6.7. Ejercicios: Técnicas de conteo.

1). Como sí importa el orden:

$n = 3$ (número de participantes). $r = 2$ (cantidad de lugares a considerar)

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{(3)!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1} = \underline{6}$$

Puede quedar de 6 formas diferentes.

2). Configuraciones sin repetición.

$n = 3, \quad r = 2.$

$$C_2^3 = \frac{(3)!}{(2)!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = \underline{\underline{3}}$$

La ensalada se puede preparar de 3 formas.

3). Todos los arreglos ordenados que se pueden formar utilizando todos los elementos del conjunto (n).

$n = 5$

$$P_n = n! = 5! = \underline{\underline{120}}$$

Pueden hacer cola de 120 formas diferentes.

4). Como importa el orden:

$n = 8, \quad r = 3$

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!} = 8\cdot 42 = \underline{336}$$

Puede otorgarlo de 336 maneras.

5). Configuraciones sin repetición: $n = 10, \quad r = 2$

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 8!} = \frac{90}{2} = \underline{45}$$

Puede seleccionar a los 2 marineros de 45 formas.

6). $n=7$, $r=5$ (importa el orden).

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = \underline{\underline{2520}}$$

Puede acomodar 5 de ellos de 2520 maneras.

7). Combinaciones Sin repetición: $n=10$, $r=2$

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10\cdot9\cdot8!}{2!\cdot8!} = \frac{10\cdot9}{2} = 45$$

Se Puede Formar Un comité formado por 2 de ellos de 45 maneras.

8). Cantidad total n de letras: $[n=8]$

Caso de Permutaciones con repetición.

$n_1=R=2$, $n_2=E=3$, $n_3=M=2$, $n_4=B=1$

$$P^n_{n_1,n_2,n_3,n_4} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!} = \frac{8!}{2!\,3!\,2!\,1!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4\cdot3!} = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$$

$$= 1680$$

Con las letras de la Palabra "REMEMBER" se Pueden Formar 1680 Palabras.

9). Combinación Sin Repetición.
Como maría siempre tiene que estar en el equipo, la escogencia se hace es escoger 5 jugadores de los 11 que excluyen a maría, Pues ella es Fija en todos los equipos.

$n=11$, $r=5$.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11!}{5!\,6!} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{11\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3} = 462$$

Puede Formar 462 equipos diferentes de 6 jugadores en los que maría siempre esté.

10). el orden no importa, por lo que se calcula utilizando combinaciones. Se escoge de Un grupo de $[n=4]$ frutas, r es la Cantidad de Frutas a elegir (Puede tomar los valores de 2,3,4).
La Cantidad total es la suma de combinaciones para cada valor de r Frutas.

$C_T = C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} + \frac{4!}{3!(4-3)!} + \frac{4!}{4!(4-4)!}$

$= \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\,2!} + \frac{4\cdot 3!}{3!\cdot 1!} + \frac{4!}{4!\cdot 0!} = 6 + 4 + 1 = 11$

Se pueden preparar 11 jugos surtidos diferentes.

11). Importa el orden, por lo que se usa variación sin repetición.

$n = 10, \quad r = 3$

$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = 10\cdot 9\cdot 8 = 10\cdot 72 = \underline{\underline{720}}$

Se pueden seleccionar 3 estudiantes en ese orden de 720 formas.

12). Variación sin repetición. $n = 10$ (equipos participantes) $r = 2$ (campeón y sub-campeón)

$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!} = 8\cdot 7 = \underline{\underline{56}}$

Se pueden ganar los premios de campeón y sub-campeón de 56 maneras.

13). Importa el orden, por lo que se usa variaciones sin repetición. $n = 7$ (dígitos del 1 al 7), $r = 3$ (cifras).

$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$

Se pueden formar 210 números de 3 cifras distintas con los dígitos del 1 al 7.

14). Importa el orden: se usa variación con repetición

$n = 7; \quad r = 3$

$V_r^n = n^r = 7^3 = 49\cdot 7 = \underline{\underline{343}}$

Se pueden formar 343 números de 3 cifras con los dígitos del 1 al 7.

15). Como no importa el orden, se usan combinaciones (sin repetición). $n = 10, \quad r = 3$

$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 5\cdot 3\cdot 8 = \underline{\underline{120}}$

hay 120 maneras diferentes de seleccionar el comite.

16). Se usan las variaciones con repetición.
Cantidad de letras totales = 26, cantidad de letras a escoger = 3.
Cantidad de digitos totales = 10, cantidad de digitos a escoger = 3

$$V_{l_3}^{26} = 26^3 \quad , \quad V_{d_3}^{10} = 10^3$$

Principio multiplicativo:

$$V_{l_3}^{26} \cdot V_{d_3}^{10} = 26^3 \cdot 10^3 = 17'576,000$$

Se pueden hacer 17'576,000 placas con 3 letras y 3 digitos.

17). En este caso el orden importa: Sin embargo, no hay una posición fija de referencia como puede ser en una fila lineal. Es decir, cualquier rotacion del mismo orden cuenta como la misma disposición.
Para las personas A, B, C las siguientes son la misma.

$$A \to B \to C \; , \; B \to C \to A \; , \; C \to A \to B.$$

Por lo tanto cuando una de las n personas se fija como referencia, el resto de $(n-1)$ personas tienen $(n-1)!$ formas de ser permutadas.

Se pueden sentar de $(n-1)!$ formas.

18). no importa el orden por lo que se usan combinaciones. Como los helados se pueden repetir, se usa combinación con repetición. $n=7$, $r=3$.

$$C_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = \frac{(7+3-1)!}{3!\,(7-1)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!\cdot 6!} = 3\cdot 4\cdot 7 = \underline{\underline{84}}$$

Se pueden hacer 84 combinaciones de 3 sabores.

19). $n=6$, $r=3$. no importa el orden (combinación).

Primer caso, con repetición: $C_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3!\,5!}$

$$C_r^n = 4\cdot 7\cdot 2 = 8\cdot 7 = \underline{\underline{56}}$$

Se pueden seleccionar gaseosas de 56 maneras diferentes.

Segundo caso, Sin Repetición: $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$C_r^n = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot3!} = 5\cdot4 = \underline{\underline{20}}$$

se pueden seleccionar 3 gaseosas diferentes del almacen de 6 gaseosas de 20 maneras diferentes.

20). Esta fórmula cuenta la cantidad de maneras de seleccionar r elementos de un conjunto de n elementos. en esta cuenta se permiten repeticiones y no importa el orden.

Por ejemplo, con un conjunto {A, B, C} de $[n=3]$, se quiere calcular para $[r=2]$ las combinaciones son:

{AA, AB, AC, BB, BC, CC} $\longrightarrow$ Repetición permitida
$\longrightarrow$ no importa el orden (AB = BA).

Encontrar esta combinación equivale a encontrar todas las formas de distribuir r objetos indistinguibles en n tipos de elementos.
esto implica que hay $n-1$ divisiones entre diferentes tipos de elementos. Por lo tanto, el número total de posiciones es: $n+r-1$, y las permutaciones totales son $= (n+r-1)!$

Ahora, como los elementos deben ser indistinguibles (no importa el orden) las permutaciones que intercambian el orden de los objetos o las divisiones entre tipos de elementos no se deben tomar en cuenta.

Como hay $[r!]$ formas de redordenar los elementos indistinguibles y $[(n-1)!]$ formas de reordenar las divisiones, estas dos cantidades deben dividir el total de permutaciones. Por lo tanto, la fórmula queda de la siguiente manera:

$$C_r^n = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$