6.2. Ejercicios: Axiomas de Probabilidad.

1). $\mathbb{P} = a_1\mathbb{P}_1 + a_2\mathbb{P}_2$, $a_1 + a_2 = 1$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

Los tres axiomas de Kolmogorov son:

1). $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2). $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$

3). $\mathbb{P}(\bigcup_i^\infty A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

Donde Ω es un espacio muestral y $\mathcal{F}$ es una colección de sub-conjuntos de Ω.

Dado: $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ son medidas de probabilidad (*)

Si $\mathbb{P}$ satisface los axiomas, es una medida de probabilidad:

- Axioma #1:

$$\mathbb{P}(\Omega) = a_1\mathbb{P}_1(\Omega) + a_2\mathbb{P}_2(\Omega) \quad \begin{cases} \mathbb{P}_1(\Omega) = 1 \\ \mathbb{P}_2(\Omega) = 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = a_1(1) + a_2(1) = a_1 + a_2 = 1$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

- Axioma #2: Sea A un conjunto genérico del espacio muestral Ω.
(no negatividad)

$$\mathbb{P}(A) = a_1\mathbb{P}_1(A) + a_2\mathbb{P}_2(A) \quad \begin{cases} \mathbb{P}_1(A) \geq 0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{P}_2(A) \geq 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow a_1\mathbb{P}_1(A) + a_2\mathbb{P}_2(A) \geq 0$$

$$\mathbb{P}(A) \geq 0$$

- Axioma #3:

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de eventos disjuntos.

Entonces, Por aditividad de $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1 \mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + a_2 \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Como $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ Son medidas de probabilidad:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_2(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_1 \mathbb{P}_1(A_i) + a_2 \mathbb{P}_2(A_i)\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$\blacksquare$

Por lo tanto, Se demuestra que $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

2. Sea $\Omega = \{1, 2\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ y $\mathbb{P}$ Una aplicación definida Sobre $\mathcal{F}$ dada Por:

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & A = \{\emptyset\} \\ 1/3, & A = \{1\} \\ 2/3, & A = \{2\} \\ 1, & A = \{1, 2\} \end{cases}$$

- Axioma #1: $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{1, 2\}) = 1$
- Axioma #2: Para ningún Conjunto A, $(\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\})$, $\mathbb{P}(A)$ es negativo.

  $\mathbb{P}(A) \geq 0 \ \forall A$
- Axioma #3: Se consideran los eventos disjuntos del $\sigma(\Omega)$ y se definen de la siguiente manera:

  $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. (Note que $A \cap B = \emptyset$)

  $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(B) = 2/3$

  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\{1, 2\}) = 1$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ $\blacksquare$

3).

a). $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Sea $\{A_1, \dots, A_n\}$ tq. $A_i = \emptyset \ \forall i \geq 1$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \longrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$$

Si $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \infty$, lo cual contradice el hecho de que una medida de probabilidad debe ser finita ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$).

Por lo tanto:

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ■

b). Dado un evento $A \in \mathcal{F}$ el complemento A^c se define como el conjunto de todos los elementos en Ω que no están en A.

Por lo tanto, A y A^c son disjuntos:

$A \cup A^c = \Omega$

Por el primer axioma: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Por el tercer axioma:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \longrightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \ ■$$

c). Si $A \subset B$, entonces:

$B = A \cup (B - A)$,

Como A y $(B - A)$ son eventos disjuntos:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B - A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) \ ■$$

d) $\mathbb{P}(\Omega)=1$. Dado que $A \subseteq \Omega \; \forall A$, se usa el teorema anterior:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega - A) \rightarrow \mathbb{P}(\Omega - A) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A)$$

debido a que $\mathbb{P}(\Omega - A) \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) \geq 0 \rightarrow \mathbb{P}(\Omega) \geq \mathbb{P}(A)$$

$\hookrightarrow \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \forall A.$ ■