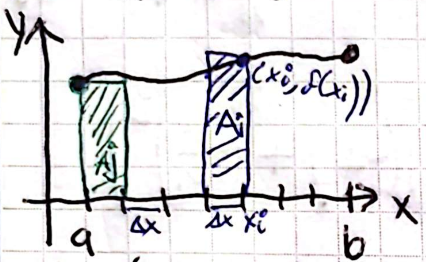
26. Considerar $f(x)=x^3$, en $[0,2]$. Usar la Suma de Riemann con $[n]$ sub intervalos para aproximar la integral en el intervalo:

$$I=\int_0^2 x^3\,dx$$

Para encontrar el valor de una integral indefinida (área debajo de la curva), se puede hacer el siguiente planteamiento:




① Se divide el intervalo en $[n]$ sub intervalos iguales.

② Para cada intervalo se considera el rectángulo en azul.

③ el Área de ese rectángulo se describe por: $A_i=\Delta x\, f(x_i)$

el Área total es la Suma de estas áreas. Si se consideran los rectángulos como el verde, la suma de las áreas (área bajo la curva) es la siguiente:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$ (se usa más adelante)

(a) $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, $b=2, a=0 \longrightarrow \Delta x=\frac{2-0}{n}=\boxed{\frac{2}{n}=\Delta x}$

(b) Puntos nodales. $x_i=a+i\Delta x$, $a=0$

$x_0=0,\ x_1=\Delta x,\ x_2=2\Delta x,\dots, x_i=i\Delta x,\dots, x_{n-1}=(n-1)\Delta x$

↳ con $\Delta x=\frac{2}{n}\ \forall\ x_i$.

(c) Valores de la Función. $f(x_i)=(x_i)^3$

$f(x_0)=0,\ f(x_1)=(\Delta x)^3,\ f(x_2)=8(\Delta x)^3,\dots, f(x_i)=(i)^3(\Delta x)^3,\dots, f(x_{n-1})=(n-1)^3(\Delta x)^3$

(d) Mostrar valor de suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=0}^{n-1}(i)^3(\Delta x)^3\Delta x=\sum_{i=0}^{n-1}(i)^3(\Delta x)^4$$

sigue en la siguiente página.

Como los subintervalos se definieron de tal forma que estaban equiespaciados, entonces $[\Delta x]$ es el mismo para todos los sumandos y $[(\Delta x)^4]$ se puede factorizar, pues todos lo tienen en común.

$$= (\Delta x)^4 \sum_{i=0}^{n-1} (i)^3$$

Según la ecuación (4.215):

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i)^3 = \frac{(n(n-1))^2}{4}$$

$\{\Delta x = \frac{2}{n} \rightarrow$ (encontrado en (a)).$\}$

$$= \left[\frac{2}{n}\right]^4 \left(\frac{(n(n-1))^2}{4}\right) = \frac{2^4}{n^4} \cdot \frac{n^2(n-1)}{2^2} = \frac{2^2}{n^2}(n-1)^2$$

$$= 4\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = 4\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 4\left(1+2(1)\left(-\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{n}\right)^2\right)$$

$$= 4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \blacksquare$$

Por lo tanto se mostró que, para $[f(x)=x^3]$ en el intervalo $(x \in [0,2])$:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = 4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$