1. Haciendo inducción sobre n:

- Caso base: si $n=0$ entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x_{0+1} = x_1 &= 4x_0 - x_0^2 \\
&= 4(4\sin^2\theta) - (4\sin^2\theta)^2 \\
&= 16\sin^2\theta - 16\sin^4\theta \\
&= 16\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) \\
&= 16\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&= 16(\sin\theta\cos\theta)^2 \\
&= 16(\sin 2\theta/2)^2 \\
&= 4\sin^2 2\theta.
\end{aligned}
$$

- Paso inductivo: suponga que $x_n = 4\sin^2(2^{n+1}\theta)$ entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = 4x_n - x_n^2 &= 4(4\sin^2(2^{n+1}\theta)) - (4\sin^2(2^{n+1}\theta))^2 \\
&= 16\sin^2(2^{n+1}\theta) - 16\sin^4(2^{n+1}\theta)) \\
&= 16\sin^2(2^{n+1}\theta)(1-\sin^2(2^{n+1}\theta)) \\
&= 16\sin^2(2^{n+1}\theta)\cos^2(2^{n+1}\theta) \\
&= 16(\sin(2^{n+1}\theta)\cos(2^{n+1}\theta))^2 \\
&= 16(\sin(2\cdot 2^{n+1}\theta)/2)^2 \\
&= 4\sin(2^{n+2}\theta).
\end{aligned}
$$

Con esto la inducción queda completa.