Actividad Global 1, MCA1

1er Periodo

Profesor: Roberto Méndez Méndez   Alumno: Pablo de Jesús Pérez
Ayudante: Emiliano Macias Dávalos   Mogchún

Actividad 1.

1. Quién dio los axiomas de la geometría eucladiana actual

R = David Hilbert, él propuso los axiomas modernos de la geometría eucladiana actual en su libro "Fundamentos de la geometría" de 1899.

2. Cita las 3 diferentes clases de objetos de la geometría euclidiana y los Axiomas dados por David Hilbert y qué grupo son:

Las tres diferentes clases de objetos o también llamados objetos primitivos de la geometría euclidiana son:

1. Puntos   2. Rectas   3. Planos

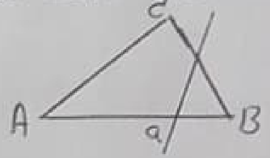
Los Puntos se le llaman los elementos de la geometría lineal.
Los Puntos y lineas rectas, los elementos de la geometría plana.
Los Puntos, lineas rectas y planos, los elementos de la geometría del espacio o los elementos del espacio.

I) Axiomas de conexión 1-7

1. Dos puntos distintos determinan una recta única.
2. Una recta contiene al menos dos puntos distintos.
3. Un plano contiene almenos tres puntos no coliniales.
4. Dos puntos distintos de una recta determinan un plano.
5. Si dos planos tienen un punto en común, tienen almenos una recta común.
6. Si dos planos α y β tienen un punto A en común, entonces tienen un segundo punto B en común.
7. Una recta contiene almenos dos puntos; un plano almenos tres puntos, no coliniales; el espacio al menos cuatro puntos no coplanares.

II) Axiomas de orden 1 - 5

1. Si A, B, C son puntos distintos en una recta, entonces uno está "entre" los otros dos.
2. Dado dos puntos A y C, siempre existe un punto B en la recta tal que C está entre A y B.
3. De tres puntos en una recta, solo uno puede estar entre los otros dos.
4. Si una recta entra en un triángulo en un lado y no pasa por un vértice, entonces debe salir por otro lado (axioma de pasch).



5. Una recta tiene infinitos puntos

III) Axioma de paralelas (Euclid's Axiom)

Por un punto exterior a una recta, pasa a lo más una recta paralela a la dada

IV) Axiomas de Congruencia 1 - 6

$\cong$ = Congruente

1. Si A y B son puntos en una recta, y A' es un punto en otra recta, entonces existe B' tal que el segmento $AB \cong A'B'$.
2. Si A y $B \cong A'B'$ y $AB \cong A''B''$, entonces $A'B' \cong A''B''$
3. Sobre una recta, dada una orientación, la congruencia de segmentos es única.
4. Si dos segmentos son congruentes a un mismo tercero, entonces son congruentes entre sí.
5. Se pueden trasladar ángulos congruentemente: dado un ángulo $\angle ABC$ y un rayo $A'B'$, existe un rayo $B'C'$ tal que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.
6. Si un triángulo coincide con otro en dos lados y el ángulo comprendido, entonces coincide en el tercer lado (criterio de congruencia SAS).

V) Axioma de Continuidad (Archimedes's axiom)

Dado un segmento AB y un segmento CD, existe un número natural n tal que colocando consecutivamente n copias de CD sobre la recta que contiene AB, se supera la longitud a AB.

3. En qué consiste la geometría hiperbólica, aplicaciones y en qué se diferencia con lo que conocemos como geometría euclidiana.

Es una geometría no euclidiana en la que existe más de una recta paralela que pasa por el mismo punto, y sus triangulos siempre son menores a 180°

Aplicaciones: Esta teoría es fundamental para entender la Teoría de la relatividad, se usa en campos como la física, informática y la arquitectura.

A diferencia de la geometría Euclidiana en la Hiperbólica existe más de una recta paralela y los triangulos siempre tienen ángulos menores a 180°

4. En qué consiste la geometría Elíptica, aplicaciones y en qué se diferencia con lo que conocemos como geometría euclidiana.

En esta geometría el espacio se modela como una esfera de radio fijo y estudia las propiedades de los espacios con curvatura positiva

Aplicaciones: Su principal uso es en la navegación y en general en superficies esféricas.

A diferencia de la geometría euclidiana en la elíptica las lineas paralelos no existen y los ángulos de sus triangulos son mayores a 180°.

5. Qué es una ruta Hamiltoniana

Es un camino en una estructura de red o grafo que visita cada punto o vértice exactamente una vez.

6. Qué es un ciclo Hamiltoniano

Es un camino cerrado simple en un grafo que visita todos los vértices una sola vez, y además regresa al vértice inicial.

7. Qué es una proposición (afirmación)

En matemáticas una afirmación (proposición) es una sentencia que es falsa o verdadera.

8. Qué es una propiedad

R= Es una afirmación (proposición) en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos que se refiere a objetos de la Teoría de conjuntos.

9. Toda propiedad define un conjunto. Da un ejemplo para tu respuesta

Supongamos "ser un número par" es una propiedad, entonces este define al conjunto de todos los números pares:

$$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ es par}\}=\{\dots,-4,-2,0,2,4,6\dots\}$$

10. Cita los Axiomas de ZFC

1) Axioma de Extensionalidad. $\forall x \forall y (\forall z (z\in x \longleftrightarrow z\in y) \to x=y)$

Este axioma dice que todos los conjuntos "x" e "y" con los mismos elementos son iguales

2) Axioma del conjunto Vacío. $\exists x \forall z (z\notin x)$

Este axioma postula la existencia de un conjunto sin elementos, es decir, un conjunto vacío

3) Axioma de Unión. $\forall x \exists u \forall z (z\in u \longleftrightarrow \exists w\in x (z\in w))$

Informalmente para todos los conjuntos x existe la unión x, que consiste en todos los conjuntos que pertenecen almenos a un elemento de X. Por ejemplo: $x=\{x\}$

4) Axioma del conjunto Potencia. $\forall x \exists y \forall z (z\in y \longleftrightarrow z\subseteq x)$

Establece que para cada conjunto x existe un conjunto (Px), llamado conjunto potencia de x, que consta de todos los subconjuntos de X.

5) Axioma del reemplazo. $\forall A \forall \vec{p} (\forall x \in A \exists ! y \, \varphi(x, y, \vec{p}) \rightarrow \exists B \, \forall x \in A \, \exists y \in B \, \varphi(x, y, \vec{p}))$
Establece que para toda formula de primer orden $\varphi(x, y, \vec{p})$ con Free $(\varphi) = \{x, y, \vec{p}\}$, donde $\vec{p}$ denota una secuencia finita de parámetros.

6) Axioma del par. $\{x, y\} = u :\Longleftrightarrow \forall z (z \in u \Leftrightarrow (z = x \vee z = y))$
Por el Axioma del par, si x es un conjunto, entonces también $\{x\}$ es un conjunto

7) Axioma de Separación (subconjunto). $\forall x \forall \vec{p} \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, \vec{p})))$
Establece que, dado un conjunto existente y una propiedad bien definida, existe un subconjunto de dicho conjunto cuyos elementos son precisamente aquellos que cumplen dicha propiedad.

8) Axioma del Infinito. $\exists I (\emptyset \in I \wedge \text{ind}(I))$
De manera informal, postula la existencia de un conjunto inductivo no vacío que contiene $\emptyset$

9) Axioma de la Fundación. $\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y . (y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset)))$
En particular no existe un conjunto x tal que $x \in x$ ni tampoco existen ciclos como $x_0 \in_1 \in \ldots \in x_0$,

Axioma de Elección. $\forall \mathcal{F} (\emptyset \in \mathcal{F} \rightarrow \exists f (f \subseteq {}^{\mathcal{F}} \cup^{\mathcal{F}} \wedge \forall x \in \mathcal{F} (f(x) \in x)))$
De manera informal, cada familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

11. Qué es un conjunto
R = Se denomina conjunto a aquel que cumple los axiomas de ZFC

12. Di cuáles son las operaciones básicas definidas sobre los reales
R = Suma, resta, multiplicación y la división

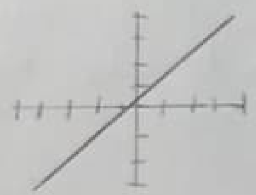
13. Cómo se definen los números racionales
Se define de la forma $r = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ y se denota como $\mathbb{Q}$

14. Da la definición conjuntista de función.

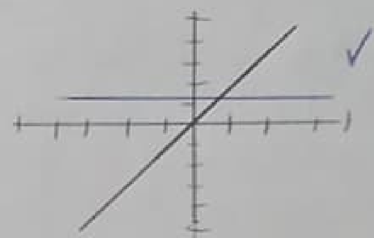
R= Sea F una relación de A en B es decir $F \subseteq A \times B$, F es una función si F es una relación unívoca, lo que implica que $((a,b) \in F, (a,c) \in F \Rightarrow b = c$

15. Muestra gráficamente cómo se comprueba que una función de $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es invertible.

Para que una función sea invertible tiene que ser Biyectiva. Tomamos como ejemplo una función lineal



Para mostrar si es ingectiva trazamos una linea horizontal y si solo toca en un solo punto, es inyectiva.

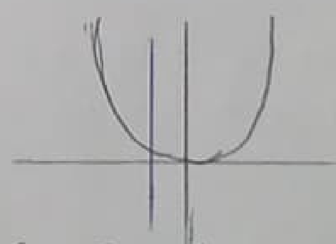


Para mostrar si es suprayectiva tiene que abarcar todo el codominio de la función, eso depende en que conjunto está definida la función, la función lineal tiene como $Ran = \mathbb{R}$, siempre será suprayectiva.

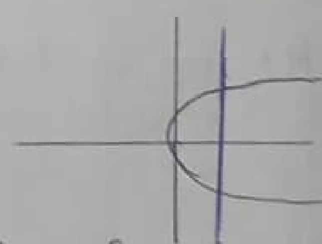
∴ Función lineal es un ejemplo de función invertible.

16. Muestra gráficamente cómo se comprueba si la gráfica dada se puede expresar como una función.

Para comprobar gráficamente se puede expresar como función trazamos una linea vertical, si esta toca en un solo punto entonces es función, de otra forma no lo es.



Sí es función

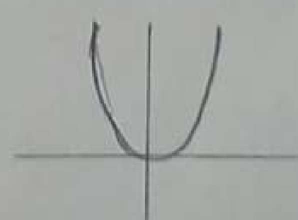


No es función

17. Da el dominio, rango, regla de correspondencia y gráfica (cuándo sea posible) de las funciones: cuadrática, cúbica, polinomial, racional, exponencial, logarítmica, trigonométrica (Todas).

• Función Cuadrática.

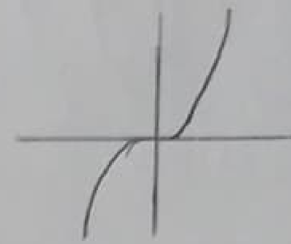
Forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad f(x) = x^2$



Dom: $\mathbb{R}$ Ran: $\mathbb{R}^+$ o $(0, \infty)$

- **Función Cúbica.**

Forma: ax^3+bx^2+cx+d $\quad F(x)=x^3$



Dom = $\mathbb{R}$ Rango = $\mathbb{R}$

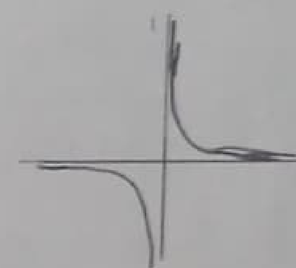
- **Función Polinomial.**

Forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Dom = $\mathbb{R}$ Rango = $\begin{cases} \text{• Si el grado } n \text{ es impar} = \mathbb{R} \\ \text{• Si el grado } n \text{ es par dependerá del} \\ \text{valor mín. o máx. de la función} \end{cases}$

- **Función racional.**

Forma: $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\quad F(x) = \dfrac{1}{x}$



$Q(x) \neq 0$

Dom = Dom $Q \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}$

Rango = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

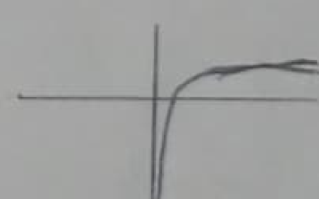
- **Función Exponencial.**

Forma: $f(x) = ba^x$ $\quad F(x) = e^x$

Dom = $\mathbb{R}$ Rango = $\mathbb{R}^+$ o $(0, \infty)$

- **Función Logaritmica**

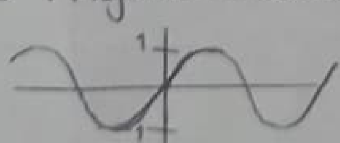
Forma: $f(x) = \log_a(x)$ $\quad F(x) = \log x$



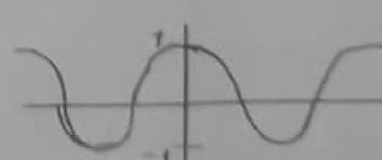
Dom = $\mathbb{R}^+$ o $(0, \infty)$ Rango = $\mathbb{R}$

- **Funciones Trigonométricas**

Sen(x)



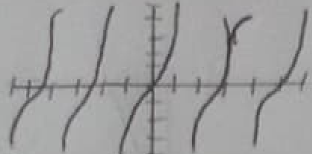
Cos(x)



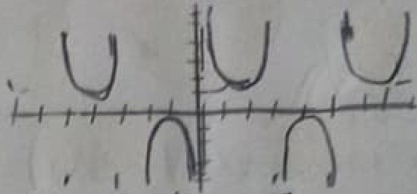
Dom = $\mathbb{R}$
Rango = $[-1, 1]$

Dom = $\mathbb{R}$
Rango = $[-1, 1]$

• Tan(x)



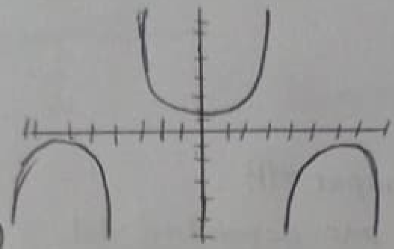
• Csc(x)



Dom $= \mathbb{R} - (2n+1)\pi/2$
Rango $= \mathbb{R}$

Dom $= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq xn$, donde $n \in \mathbb{Z}\}$
Rango $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

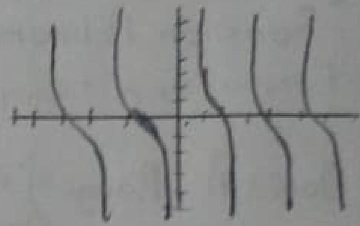
• Sec(x)



Dom $\in \mathbb{R} - \frac{(2n+1)\pi}{2}$

Rango $= \mathbb{R} - (-1, 1)$

• Ctg(x)



Dom $= \mathbb{R} - n\pi$
Rango $= \mathbb{R}$

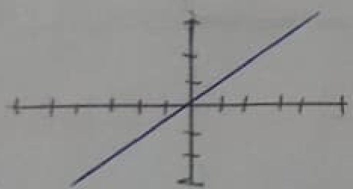
18. Qué es una Sucesión

R = Es un conjunto ordenado de números o elementos que siguen una regla o patrón específico de forma que permite predecir los siguientes elementos indefinidamente.

19. Escribe las funciones de activación clásicas para redes neuronales, dando su dominio, rango, regla de correspondencia y gráfica

• Función Identidad

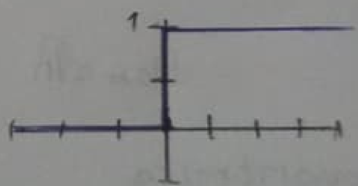
$f(x) = x$



Dom $= \mathbb{R}$ Rango $= \mathbb{R}$

• Paso Binario

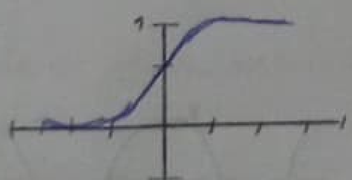
$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Dom $= \mathbb{R}$ Rango $= \{0, 1\}$

• Función Sigmoide

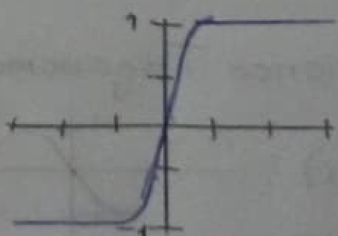
$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$



Dom $= \mathbb{R}$ Rango $= (0, 1)$

• Fun. Tangente Hiperbólica

$$f(x) = \tan(x) = \frac{e^{x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}}$$



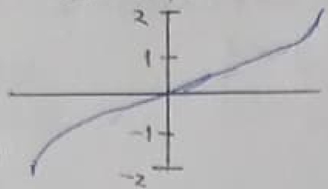
Dom $= \mathbb{R}$
Rango $= (-1, 1)$

- Fun. Arcotangente Hiperbólica

$f(x) = \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(1+x)}{(1-x)}\right)$

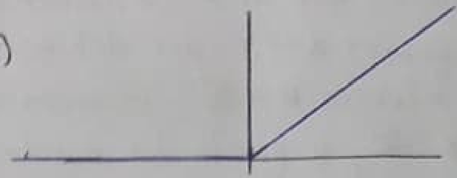
$Dom = (-1, 1)$

$Rango = (-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$



- Función ReLU

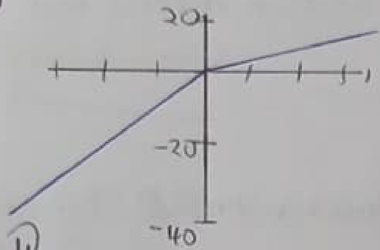
$f(x) = max(0, x)$



$Dom = \mathbb{R}$ $Rango = [0, \infty)$

- Función PReLU

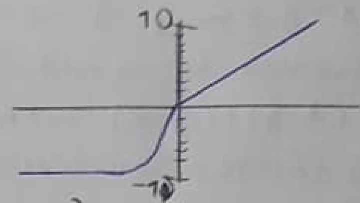
$f(x) = \begin{cases} \alpha x, (x < 0) \\ x, (x \geq 0) \end{cases}$



$Dom = \mathbb{R}$ $Rango = \mathbb{R}$

- Función ELU

$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x \mid x \geq 0 \\ 0 \mid x < 0 \end{cases}$

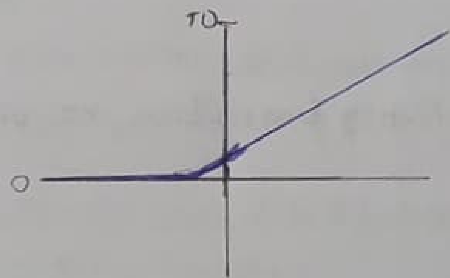


$Dom = \mathbb{R}$ $Rango = [-1, \infty)$

- Fun. Softplus

$f Softplus(x) = \ln(1 + e^x)$

$Dom = \mathbb{R}$ $Rango = (0, \infty)$



Actividad 2. Relaciones

1. Muestra que si $x, y \in \mathbb{R}$ y definimos la relación de x con y $(x \sim y)$ como,
$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$
entonces $x \sim y$ es una relación de equivalencia

Una relación es de equivalencia si: i) Reflexividad ii) Simetría iii) Transitividad

Demostración:

i) Suponemos que $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \sim x$
Calculamos $x - x = 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ Por la definición de $\sim$, $x - x \in \mathbb{Z}$ implica $x \sim x$
$\therefore \sim$ Es Reflexiva

ii) Simetría

buscamos que si $x \sim y$ entonces $y \sim x$

Supongamos $x \sim y$, por definición, $x-y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x=-(x-y)$

$\Rightarrow$ Si un número $k \in \mathbb{Z}$, entonces su opuesto $-k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x-y) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y-x \in \mathbb{Z}$, y por la definición de $\sim$ se tiene $y \sim x$

$\therefore \sim$ Es Simétrica

iii) Transitividad

buscamos que si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$

supongamos que $x \sim y$ y $y \sim z$. Entonces existen enteros m, n tales que:

$x-y=m \;,\; y-z=n \;,\; m, n \in \mathbb{Z}$

Sumamos las igualdades:

$(x-y)+(y-z)=m+n \Rightarrow x-z=m+n$

Los enteros son cerrados bajo suma, entonces $m+n \in \mathbb{Z}$. Por tanto $x-z \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Por definición, $x \sim z$

$\therefore \sim$ Es Transitiva

Conclusión

Como $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$

Actividad 3. Funciones

1. Demuestra que $[fg] \circ w = [f \circ w][g \circ w]$

Para probar que dos funciones son iguales basta con mostrar que toman el mismo valor en cada $x \in A$

Demostración:

Tomamos un $x \in A$ cualquiera. Entonces

$((fg) \circ w)(x) = (fg)(w(x))$. Por la definición de punto a punto:

$(fg)(w(x)) = f(w(x))g(w(x))$. Pero $f(w(x)) = (f \circ w)(x)$. y $g(w(x)) = (g \circ w)(x)$

Luego: $f(w(x))g(w(x)) = f(f \circ w)(x)(g \circ w)(x)$

Por tanto $\forall x \in A$:

$((fg) \circ w)(x) = (f \circ w)(x)(g \circ w)(x) \Rightarrow (fg) \circ w = (f \circ w)(g \circ w)$

$\therefore (fg) \circ w = (f \circ w)(g \circ w)$.

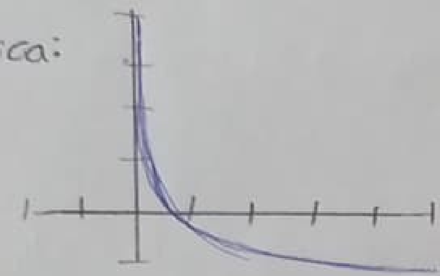
2. Cuál es la inversa de la función exponencial $f(x) = 0.3^x$ y cómo se ve su gráfica.

Para sacar la inversa:

$y = 0.3^x \Rightarrow \ln(y) = \ln(0.3^x) \Rightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(0.3) \Rightarrow x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(0.3)}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{\ln(y)}{\ln(0.3)} \quad \therefore f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(0.3)},\ x > 0$

Grafica:



3. Que da la función Softmax al aplicarla al siguiente vector y matriz

$V = [2, 5, -1, 6] \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Softmax sobre el vector:

Voy a restar el máximo para evitar desbordamientos

$V - \max(V) = [2-6, 5-6, -1-6, 6-6] = [-4, -1, -7, 0]$

$\Rightarrow$ Aplicaré el exponente:

$e^{[-4, -1, -7, 0]} = [e^{-4}, e^{-1}, e^{-7}, e^{0}] = [0.0183, 0.3679, 0.00091, 1]$

$\Rightarrow 0.0183 + 0.3679 + 0.00091 + 1 = 1.3871$

$\Rightarrow \text{softmax}(V) = \left[\dfrac{0.0183}{1.3871}, \dfrac{0.3679}{1.3871}, \dfrac{0.00091}{1.3871}, \dfrac{1}{1.3871}\right] = [0.013, 0.265, 0.0066, 0.721]$

Softmax sobre el vector:

Aplicaré el softmax por filas

- $[4, 5] \Rightarrow [4-5, 5-5] = [-1, 0] \Rightarrow [e^{-1}, e^{0}] = [0.3679, 1] \Rightarrow 0.3679 + 1 = 1.3679$

  $\Rightarrow \left[\dfrac{0.3679}{1.3679}, \dfrac{1}{1.3679}\right] = [0.269, 0.731]$

- $[0, 2] \Rightarrow [0-2, 2-2] = [-2, 0] \Rightarrow [e^{-2}, e^{0}] = [0.1353, 1] \Rightarrow 0.1353 + 1 = 1.1353$

  $\Rightarrow \left[\dfrac{0.1353}{1.1353}, \dfrac{1}{1.1353}\right] = [0.119, 0.881]$

- $[-2, 1] \Rightarrow [-2-1, 1-1] = [-3, 0] \Rightarrow [e^{-3}, e^{0}] = [0.0498, 1] \Rightarrow 0.0498 + 1 = 1.0498$

  $\Rightarrow \left[\dfrac{0.0498}{1.0498}, \dfrac{1}{1.0498}\right] = [0.0474, 0.953]$

Resultado: $\text{softmax}(M) = \begin{pmatrix} 0.269 & 0.731 \\ 0.119 & 0.881 \\ 0.0474 & 0.953 \end{pmatrix}$

4. Sean las funciones de activación Logística (sigmoide) y softplus

$f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$ $\quad g(x) = \ln(1+e^{x})$

a) Da el dominio y rango de cada una de ellas

b) Define $f \circ g$, $g \circ f$ indicando dominio, imagen y su gráfica

a) Dominio y rango

Para $f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$ el denominador es $1+e^{x}$ y $e^{x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por tanto nunca va a ser 0. ∴ Dominio $f: \mathbb{R}$

$Dom = \mathbb{R}$

$Rango = (0,1)$ $\quad$ Rango: $y = \frac{1}{1+e^{x}} \Rightarrow y(1+e^{x}) = 1 \Rightarrow y + ye^{x} = 1 \Rightarrow ye^{x} = 1-y$

$\Rightarrow e^{x} = \frac{1-y}{y}$ ahora usaré la propiedad $e^{x} > 0$:

$\Rightarrow \frac{1-y}{y} > 0$, el denominador es positivo así que $y > 0$. Entonces $1-y > 0$, es decir $y < 1$. Combinando: $0 < y < 1$

Para $g(x) = \ln(1+e^{x})$ $\quad$ Dominio: $\ln > 0$, pero $e^{x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
∴ Dominio de $g: \mathbb{R}$

$Dom = \mathbb{R}$

$Rango = (0, \infty)$ $\quad$ Rango: $y = \ln(1+e^{x}) \Rightarrow e^{y} = 1 + e^{x} \Rightarrow e^{x} = e^{y} - 1$

como $e^{x} > 0$, se requiere $e^{y} - 1 > 0$, Lo que equivale a $y > 0$. No hay límite superior. y puede crecer indifinidamente porque x puede crecer. Por tanto $y \in (0, \infty)$

b) Composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Dom, Ran. y gráfica

• $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1+e^{g(x)}}$ pero $g(x) = \ln(1+e^{x}) \Rightarrow e^{g(x)} = e^{\ln(1+e^{x})} = e^{x}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{1+(1+e^{x})} = \frac{1}{2+e^{x}}$

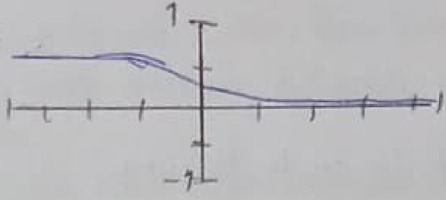
$\frac{1}{2+e^{x}}$ $\quad$ Dominio: g acepta cualquier valor y f tambien. ∴ $Dom = \mathbb{R}$

$Dom = \mathbb{R}$ $\quad$ Rango $= y = \frac{1}{2+e^{x}} = y(2+e^{x}) = 1 \Rightarrow ye^{x} = 1-2y \Rightarrow e^{x} = \frac{1-2y}{y}$

$Rango = (0, \frac{1}{2})$ $\quad \frac{1-2y}{y} > 0 \Rightarrow y > 0$ y $1-2y > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{2}$

∴ $Rango = (0, \frac{1}{2})$

Gráfica:



$f(x) = \frac{1}{2+e^x}$

° $g \circ f$. $(g\circ f)(x) = \ln(1+e^{\frac{1}{1+e^x}})$ //

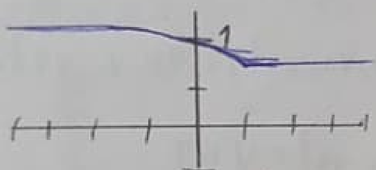
$= \ln(1+e^{\frac{1}{1+e^x}})$

Dominio: f acepta todo $\mathbb{R}$ y g también, $\therefore$ Dom $= \mathbb{R}$

Dom $= \mathbb{R}$

Rango $= (\ln 2, \ln(1+e))$. Rango: Usando que $f(\mathbb{R}) = (0,1)$; si $t \in (0,1) \Rightarrow e^t \in (e^0, e^1) = (1,e) \Rightarrow 1+e^t \in (2, 1+e)$. Aplicando $\ln$, los valores posibles de $g(f(x))$ están en: $(\ln 2, \ln(1+e))$. $\therefore$ Rango $= (\ln 2, \ln(1+e))$.

Gráfica



$f(x) = \ln(1+e^{\frac{1}{1+e^x}})$

Actividad 4. Cuadráticas

1. Sea la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ en qué dimensión estaría su gráfica.

La gráfica está formada por puntos en $\mathbb{R}^4$, pero como se describe en 3 parámetros libres (x,y,z), la gráfica es una variedad de dimensión 3 dentro de $\mathbb{R}^4$ $\therefore$ La gráfica está en 3 dimensiones

2. Escribe una superficie de nivel para esta función y grafícala.

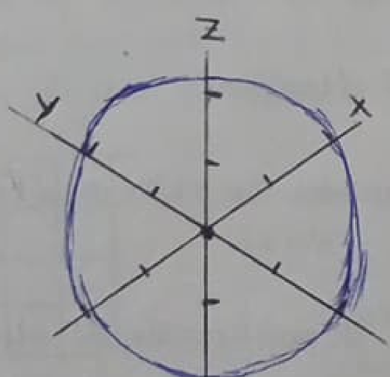
Una superficie de nivel para $f(x,y,z)$ es la esfera:

$x^2+y^2+z^2 = c$, $c > 0$

Ej: Para $c=4$ la superficie de nivel es la esfera de radio 2

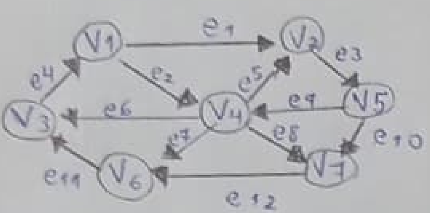
$x^2+y^2+z^2 = 4$

Gráfica:



Actividad 5. Gráfica.

1. Obten los conjuntos V y E de la gráfica dada en la figura



$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

2. Construye una topología sobre V

Un conjunto X es una topología si: i) $\emptyset, X \in T$ ii) $\bigcup_{i=1} A_i \in T$ con $A_i \in T$
iii) $\bigcap_{i=1}^{n} A \in T$ con $A \in T$

Sea T una topología sobre V, $T=\{\emptyset, V, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6, v_7\}\}$

i) $\emptyset \in T$, $V \in T$ → Sí se cumple

ii) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6, v_7\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} = V \in T$
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup V = V \in T$ $\{v_5, v_6, v_7\} \cup V = V$ → Sí se cumple

iii) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cap \{v_5, v_6, v_7\} = \emptyset$, $\emptyset \in T$
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cap V = \{v_1, v_2, v_3, v_3\} \in T$ → Sí se cumple
∴ T es una topología sobre V

3. Construye un σ-álgebra sobre V

Un conjunto $A \subset P(X)$ es una σ-álgebra si:
i) $\bigcup_{i=1} A \in A$ con $A_i \in A$ ii) $A^c \in A$ con $A \in A$ iii) $\emptyset \in A$

Sea $B=\{\emptyset, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2, v_3\}\}$, comprobamos si es σ-álgebra:

i) $\{v_1\} \cup \{v_2, v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\} \in B$ $\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_1\} = \{v_1, v_2, v_3\} \in B$ → Sí se cumple

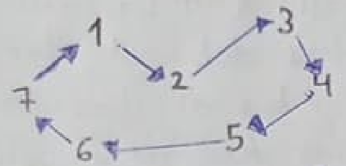
ii) $\{v_1, v_2, v_3\}^c = \emptyset$, $\emptyset \in B$ $\{v_1\}^c = \{v_2, v_3\} \in B$ $\{v_2, v_3\}^c = \{v_1\}$ $\{v_1\} \in B$
⇒ Sí se cumple

iii) $\emptyset \in B$ → Sí se cumple ∴ B es un σ álgebra

4. Se puede escribir un Ciclo Hamiltoniano en esta gráfica. Si es así dalo explícitamente.

R = Sí se puede, a continuación una demostración de ello.

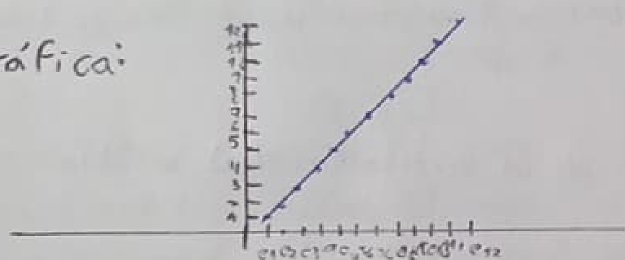
Por definición un ciclo Hamiltoniano es un camino cerrado en un grafo que visita cada vertice del grafo exactamente una vez, regresando al punto de partida.
Entonces un Ciclo Hamiltoniano sobre la gráfica dada sería:



5. ¿Es E una Función?
R = No, no es una función es solamente un conjunto

6. Construyo una función con E y muestra como se vería su gráfica.
Sea $F: E \to \mathbb{N}$, $F(e_i) = i$ $\quad \cdot F(e_1) = 1 \quad \cdot F(e_2) = 2 \quad \cdot F(e_3) = 3$

Gráfica:



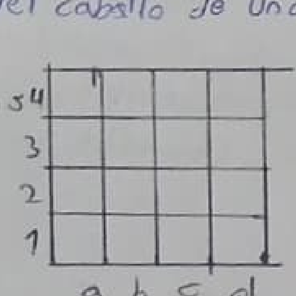
7. Da un ciclo Hamiltoniano en la gráfica.
Tenemos un grafo cuyos vertices son $V = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$
Entonces haré un ciclo Hamiltoniano C:
$C = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_1)$

Es un ciclo Hamiltoniano porque cada e_i pasa exactamente una vez y vuelve a e_1.

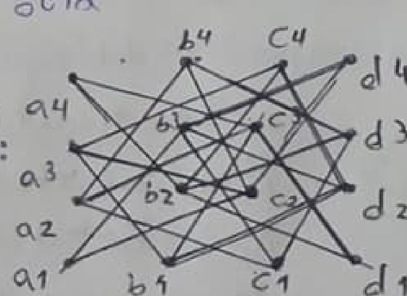
Actividad 6. Knight tour.

1. Dado un tablero de ajedrez de 4x4, cómo se vería la gráfica asociada si los vertices son las casillas y las aristas son generadas por los posibles saltos del caballo de una casilla a otra

si tenemos



la gráfica sería:



2. Habrá un Knight's tour.

B = No

Demostración.

Supongamos que existe un recorrido cerrado del caballo, por lo que debe existir un ciclo Hamiltoniano en el grafo del caballo 4×4. Entonces cada vertice es adyacente precisamente a dos aristas del ciclo Hamiltoniano. Los vertices a_1 y d_4 están obligados a usar las aristas discontinuas en el grafo del caballo, entonces el ciclo punteado debe ser un subcamino lo cual es imposible ya que $\{a_1, b_3, c_2, d_4\}$ no pueden conectarse a ningun otro modo en el camino hamiltoniano.

3. Habrá un Knight's tour cerrado.

B = No, como ya habríamos dado la demostración anterior de que no puede existir un Knight tour, por lo tanto tampoco puede existir un Knight's tour cerrado.

4. Cómo definirías la función de transición de un vertice (casilla) a otro (imagínate que lo quisieras programar).

Yo lo definiría de la siguiente manera:

Sea el tablero 4×4. Definimos el conjunto de vertices

$$V = \{(r, c) \mid r = 0, 1, 2, 3, \; c = 0, 1, 2, 3\}.$$

la lista de desplazamientos del caballo sería

$$\Delta = \{(\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1)$$

La función de transición $T : V \to P(V)$ se define por:

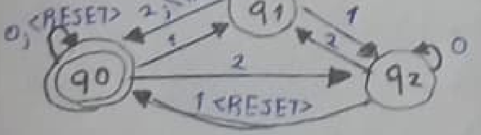
$$T((r, c)) = \{(r + \Delta r, c + \Delta c) \in V \mid (\Delta r, \Delta c) \in \Delta\}.$$

Es decir $T((r, c))$ es el conjunto de todas las casillas válidas obtenidas aplicando los saltos del caballo y quedándose dentro del tablero

Ejemplo: $T(0, 0) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Actividad 7. Autómata Finito.

1. Define el autómata respectivo del siguiente diagrama:



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{0, 1, 2, \text{<RESET>}\}$

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ o

q_0 es el estado de inicio, $q_0 \in Q$

2. Da explícitamente la función transición para cada caso posible.

$\delta: Q \times \Sigma$ = {(q_0,0), (q_0,1), (q_0,2), (q_0,<RESET>), (q_1,0), (q_1,1), (q_1,2), (q_1,<RESET>), (q_2,0), (q_2,1), (q_2,2), (q_2,<RESET>)}

$\delta[(q_0,0)] \to q_0$	$\delta[(q_1,0)] \to q_1$	$\delta[(q_2,0)] \to q_2$
$\delta[(q_0,1)] \to q_1$	$\delta[(q_1,1)] \to q_2$	$\delta[(q_2,1)] \to q_0$
$\delta[(q_0,2)] \to q_2$	$\delta[(q_1,2)] \to q_0$	$\delta[(q_2,2)] \to q_1$
δ[(q_0,<reset>)] $\to q_0$	δ[(q_1,<RESET>)] $\to q_0$	δ[(q_2,<RESET>)] $\to q_0$

3. Que cadenas acepta esto autómata.

$q_0 \to$ Estado de aceptación ó de inicio

$\boxed{2|1}$
$\delta[(q_0,2)] \to q_2$
$\delta[(q_2,1)] \to q_0$ ✓

$\boxed{2|2|2}$
$\delta[(q_0,2)] \to q_2$
$\delta[(q_2,2)] \to q_1$
$\delta[(q_1,2)] \to q_0$ ✓

$\boxed{0}$
$\delta[(q_0,0)] \to q_0$ ✓

$\boxed{2|0|1}$
$\delta[(q_0,2)] \to q_2$
$\delta[(q_2,0)] \to q_2$
$\delta[(q_2,1)] \to q_0$ ✓

$\boxed{1|2}$
$\delta[(q_0,1)] \to q_1$
$\delta[(q_1,2)] \to q_0$ ✓

$\boxed{1|0|2}$
$\delta[(q_0,1)] \to q_1$
$\delta[(q_1,0)] \to q_1$
$\delta[(q_1,2)] \to q_0$ ✓

$\boxed{1|1|1}$
$\delta[(q_0,1)] \to q_1$
$\delta[(q_1,1)] \to q_2$
$\delta[(q_2,1)] \to q_0$ ✓

$\boxed{1|2|0}$
$\delta[(q_0,1)] \to q_1$
$\delta[(q_1,2)] \to q_0$
$\delta[(q_0,0)] \to q_0$ ✓

$\boxed{2|1|0}$
$\delta[(q_0,2)] \to q_2$
$\delta[(q_2,1)] \to q_0$
$\delta[(q_0,0)] \to q_0$ ✓

4. Da dos posibles interpretaciones para este atómata, mostrando explícitamente bajo cada interpretación que hace.

Interpretación 1: Suma de dígitos módulo 3

cada número 0,1,2 se va sumando y el autómata se queda con el resto de esa suma al dividir entre 3

- q_0: La suma de los símbolos es múltiplo de 3
- q_1: La suma deja resto 1 · q_2: La suma deja resto 2
- <RESET>: reinicia la suma a 0 (q_0)

Transiciones principales:

- $\delta(q_i, d) = q_{(i+d) \bmod 3}$, para $d \in \{0,1,2\}$. · δ(q_i,<RESET>) = q_0

Interpretación 2: Lóngitud de cadena módulo 3

El autómata no mira los valores de los dígitos, solo cuenta cuantos símbolos ha leído.

q_0: Se han leído un número de símbolos multiplo de 3

q_1: Se han leído $3K+1$ q_2: Se han leído $3K+2$

<RESET>: Reinicia el contador a cero (q_0)

Transiciones principales

$\delta(q_i, d) = q(i+1) \bmod 3)$ para $d \in \{0,1,2\}$. $\delta(q_i, \langle RESET \rangle) = q_0$

Actividad 8. Cardinalidad

1. Muestra que la cardinalidad de $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ Hint. Da una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y demuestra que es biyectiva

Sea $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, voy a intercalar los enteros positivos y negativos con los naturales:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ K & \text{si } n=2K \text{ (par distinto de 0)} \\ -K & \text{si } n = 2K+1 \text{ (impar)} \end{cases}$$

Ejemplo: $f(0)=0$ $f(1)=-1$
$f(2)=1$ $f(3)=-2$
$f(4)=2$ $f(5)=-3$
$f(6)=3$

Demostración de Biyectividad. i) Inyectiva ii) Suprayectiva

i) Cada natural n se asigna a un entero diferente, no hay dos naturales que caigan en el mismo número

ii) Todo entero $z \in \mathbb{Z}$ aparece en la lista:

- Si $z \geq 0$, viene de $n = 2z$ · Si $z < 0$, viene de $n = -2z-1$

$\therefore$ La función es Biyectiva

Conclusión: He construido una correspondencia uno a uno (biyectiva) entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ por tanto: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

2. Sean los intervalos $[-1,1]$ y $[-20, 1000]$,

a) Quién es subconjunto de quién.

Para $A = [-1,1]$: empieza en -1 y termina en 1

Para $B = [-20, 1000]$ empieza en -20 y termina en 1000

claramente $-20 \leq -1$ y $1 \leq 1000$,

$\therefore [-1,1] \subseteq [-20, 1000]$

b) ¿Cuál es la longitud de cada intervalo?

La longitud de un intervalo cerrado es, $[a,b]$: $L = b - a$

Para $[-1,1]$: $L_A = 1-(-1) = 2$ Lon. de $[-1,1]: 2$

Para $[-20,1000]$: $L_B = 1000-(-20) = 1020$ Longitud de $[-20,1000]: 1020$

c) Muestra que tiene la misma cardinalidad $|[-1,1]| = |[-20,1000]|$.

Todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}$ tienen cardinalidad del continuo

$|[-1,1]| = |[-20,1000]| = |\mathbb{R}|$.

Demostración:

Construiré una función biyectiva

$f(x) = \frac{1020}{2}(x+1) - 20$

Cuando $x=-1$: Cuando $x = 1$

$f(-1) = \frac{1020}{2}(0) - 20 = -20$ $f(1) = \frac{1020}{2}(2) - 20 = 1020 - 20 = 1000$

Así que $f: [-1,1] \to [-20,1000]$ es biyectiva $\therefore |[1,1]| = |[-20,1000]|$

Actividad 9. Cultura

1. En la pintura La escuela de Atenas,

a) Qué tecnica geométrica utiliza.

R= La pintura utiliza la perspectiva lineal (también llamada perspectiva renacentista).

b) En qué consiste dicha técnica.

La perspectiva lineal consiste en representar objetos tridimensionales (3D) en una superficie bidimencional (2D), de modo que las líneas paralelas parecen converger en un punto de fuga en el horizonte.

Esto da una ilusión de profundidad y realismo.

En la obra, el punto de fuga está en el centro, justo entre Platón y Aristóteles.

De esta forma, todos los elementos arquitectónicos guían la mirada hacia ellos.

c) Quién la pintó y en que año

R= Fue pintada por Rafael Sanzio (pintor del renacimiento italiano), entre los años de 1509 y 1511

2. Ve el video. La Extraña Matemática Que Predice (Casi) todo.

a) Menciona 6 cosas "formales" que se mencionan en el video y que te hayan parecido interesantes.

1. La Ley de los grandes números.

Markov y Necrasov debatieron sobre la ley de los grandes números, que establece que al aumentar el número de pruebas independientes, el resultado promedio se aproxima al valor esperado.

2. Cadena de markov.

Es un modelo matemático que describe un proceso en el que la probabilidad de pasar de un estado a otro depende únicamente del estado actual, no del historial anterior.

3. Simulación y Método de Montecario.

Es una técnica informática que utiliza la generación de números aleatorios para predecir los posibles resultados de un evento incierto al repetir miles de veces un proceso simulado.

4. Impacto en la computación nuclear

El método montecario permitió simular el comportamiento de neutrones en reacciones nucleares lo que falicitó saber cuantos neutrones eran necesarios para crear una reacción en cadena en una bomba nuclear

5. Construcción de la maquina de Markov

Markov creó un modelo con probabilidades de transición entre vocales y consonantes, estableciendo una cadena de eventos dependientes sin memoria

6. Barajeado de cartas como cadena de Markov

Cada disposición de mazo es un estado, se ha demostrado que siete mezclas de baraja tipo riffle son suficientes para que la distribución sea casi aleatoria

3. Ve el Video NeuroCiencia del Aprendizaje ¿Aprender o Estudiar?

a) Qué es el aprendizaje

Es un proceso interno, motivado por la curiosidad y las necesidades personales, es algo que deja una huella duradera, el aprendizaje auténtico surge cuando una persona siente que le hace falta saber algo; algo que le llama mucho la atención y siente la necesidad de saciar esa curiosidad, que es el motor del aprendizaje.

b) Cuál es una condición fundamental para aprender.

Sentir curiosidad, sin duda alguna la curiosidad es la pieza principal del aprendizaje y que surja de forma genuina y auténtica.

c) Menciona tres puntos que te parecieron trascendentes o interesantes.

*Origen histórico del sistema educativo.

No sabía que el sistema educativo fue diseñado hace siglos para formar ciudadanos obedientes, soldados y funcionarios y no para que las personas desarrollaran pensamiento crítico; me sorprende que el sistema no haya evolucionado en su propósito fundamental

*Diferencia entre estudiar y aprender.

estudiar es algo que se nos ha impuesto en un sistema muy rígido que solo busca cumplir con exigencias externas a nuestros verdaderos intereses, aprender en cambio es algo interno, que sentimos un auténtico interes en cierto tema, es una curiosidad que nos motiva, si las materias solo fueran cosas que nos dan curiosidad en un sistema meno rígido, las cosas serían distintas.

*Impacto en la salud de los estudiantes.

A mí me parece esto absurdo, como es posible que algo que nos debería nacer hacer y hacerlo por gusto y que nos haga bien nos provoca totalmente lo contrario, nos genera estrés, presión, falta de sueño e incluso depresión, algo como el conocimiento que es algo muy bello no nos debería causar estas cosas, y es por culpa de un sistema educativo tan rígido, profesores que no se preocupan por encender la curiosidad y el interes en los estudiantes y solo buscan hacer lo más mínimo sin preocuparse.