Ejemplo .27. Las matrices siguientes tienen sus coeficientes en $\mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
matriz fila de orden 4	matriz columna de orden 3	matriz nula de orden 2×3

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo orden y para cada par de índices i, j se verifica que $a_{ij} = b_{ij}$.

Podemos sumar matrices del mismo orden:

Definición .28. (Suma de matrices). Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de orden $m \times n$. Se define su suma $C = A + B$ como una matriz de orden $m \times n$ cuyos coeficientes c_{ij} vienen dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En otros términos, se suma coeficiente a coeficiente.

Ejemplo .29. Las matrices siguientes tienen sus coeficientes en $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C + D \quad \text{no está definida}$$

Definición .30. (Producto de una matriz por un escalar). Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ y k es un escalar, el producto de la matriz A por el escalar k, denotado por kA, es la matriz de orden $m \times n$ dada por

$$kA = (ka_{ij}).$$

Ejemplo .31. Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sea $k = 3 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$3A = \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Las siguientes propiedades son inmediatas:

Proposición .32. Sean A, B, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, matrices arbitrarias, y sean k, $k' \in \mathbb{K}$. Entonces:

1. La suma de matrices verifica las propiedades siguientes:
   - **conmutativa:** $A + B = B + A$.
   - **asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$;
   - **existencia de elemento neutro:** la matriz 0 de orden $m \times n$ verifica $A + 0 = A$;
   - **existencia de elemento opuesto:** la matriz $-A = (-a_{ij})$ verifica $A + (-A) = 0$;
2. $(k + k')A = kA + k'A$.
3. $k(A + B) = kA + kB$.
4. $k(k'A) = (k \cdot k')A$.
5. $1A = A$.

El producto AB de dos matrices A y B está definido únicamente si el número de columnas de A es igual al número de filas de B:

Definición .33. (Producto de matrices). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times r$. Se define el producto de A y B como una matriz $C = AB$ de orden $m \times r$ cuyos coeficientes c_{ij} están definidos por

$$c_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$.

Ejemplo .34. Si consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}), \text{ su producto es:}$$

$$c_{12} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 23$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 23 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo sería:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \end{pmatrix}$$

Matrices de este tamaño:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición .35. Bajo la hipótesis de que los órdenes de las matrices sean compatibles con las operaciones indicadas, tenemos las siguientes propiedades:

1. **Asociativa**: $A(BC) = (AB)C$.
2. **Distributiva** del producto con respecto a la suma:
$$A(B + B') = AB + AB', \quad (A + A')B = AB + A'B.$$
3. $(kA)B = A(kB) = k(AB)$, para todo escalar $k \in \mathbb{K}$.
4. $A0 = 0A = 0$.

Ejemplo .36.

1. El producto de matrices no es necesariamente conmutativo. Podemos tener $AB \neq BA$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Puede ocurrir que el producto de dos matrices no nulas sea nulo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 La trasposición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Definición .37. La matriz **traspuesta** de A, denotada por A^t, es la matriz de orden $n \times m$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

donde la i-ésima columna de A^t es la i-ésima fila de A, o equivalentemente

$$(A^t)_{ji} = a_{ij}$$

Ejemplo .38.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposición .39. La operación de trasposición cumple las propiedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(kA)^t = kA^t$, k escalar
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Acabamos esta sección con matrices que tienen una forma especial:

Definición .40. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A es:

1. **simétrica** si es igual a su traspuesta, $A = A^t$, o dicho de otro modo $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.
2. **antisimétrica** si es la opuesta de su traspuesta, $A = -A^t$, o dicho de otro modo $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.
3. **triangular superior** si $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$.
4. **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$.
5. **diagonal** si $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, es decir si es a la vez triangular superior y triangular inferior.

Ejemplo .41. Las matrices siguientes son simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad I_n, \quad 0$$

Las matrices siguientes son triangulares superiores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n, \quad 0$$

Las matrices siguientes son triangulares inferiores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad I_n, \quad 0$$

Las matrices I_n, 0 son matrices diagonales.

2.4 Matrices elementales

Las operaciones elementales efectuadas en una matriz A se pueden realizar multiplicando la matriz A por unas determinadas matrices llamadas matrices elementales.

Definición .43. Se llama **matriz elemental** de orden n a la matriz resultante de aplicar una (y sólo una) operación elemental por filas a la matriz identidad de orden n, I_n. Existen por tanto tres tipos de matrices elementales:

(1) E_{ij} se obtiene intercambiando las filas i-ésima y j-ésima de I_n.

(2) Para un escalar $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$, la matriz $E_i(k)$ se obtiene multiplicando por k los elementos de la fila i-ésima de I_n.

(3) Para un escalar $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$, la matriz $E_{i+(k)j}$ se obtiene sumando a la fila i-ésima de I_n, la fila j-ésima multiplicada por k.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad E_{i+(k)j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que señalar que las matrices elementales anteriores también se pueden obtener aplicando a la matriz identidad transformaciones elementales por columnas.

Ejemplo .44. Vamos a realizar operaciones elementales en las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

- Intercambiar la fila 1 y la fila 3:

$$E_{13}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Multiplicar la fila 2 por el escalar $4 \in \mathbb{R}$:

$$E_2(4)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 20 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Sumar a la fila 1, la fila 2 multiplicada por $4 \in \mathbb{R}$:

$$E_{1+(4)2}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo .45. Hacemos operaciones elementales en las columnas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

- Intercambiar la columna 1 y la columna 3:

$$AE_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Multiplicar la columna 3 por el escalar $2 \in \mathbb{R}$:

$$AE_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Sumar a la columna 2, la columna 3 multiplicada por $2 \in \mathbb{R}$:

$$AE_{3+(2)2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz de orden $m \times n$ y sean E y F matrices elementales de órdenes m y n, respectivamente. Entonces:

▷ EA es la matriz que se obtiene de A realizando en sus filas la misma transformación elemental con la que se obtiene E a partir de la identidad.

▷ AF es la matriz que se obtiene de A realizando en sus columnas la misma transformación elemental con la que se obtiene F a partir de la identidad.

2.5 Inversa de una matriz

Definición .46. Sea A una matriz de orden n. Se dice que A es una **matriz invertible** si existe otra matriz B de orden n tal que

$$AB = I_n = BA.$$

En este caso, decimos que B es una inversa de A. Si A no es invertible se dice que es una **matriz singular**.

Ejemplo .47. La matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ es invertible, ya que la matriz } \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ satisface:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo .48. La matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ es invertible, ya que la matriz } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ satisface:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que sólo se define la noción de matriz inversa para matrices cuadradas, y no toda matriz cuadrada es invertible:

Ejemplo .49. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

no es invertible. En efecto, sea

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz arbitraria. Entonces el producto

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

que jamás será igual a la matriz identidad I_2.

El siguiente resultado establece que si una matriz admite inversa, la inversa es única.

Proposición .50. Si B y C son matrices inversas de A, entonces $B = C$.

Proof. Como B y C son inversas de A, tenemos

$$BA = I, \quad AC = I$$

y por tanto

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

donde se utiliza que el producto de matrices es asociativo, como se vio en el apartado *i)* de la Proposición .35. ■

Si A es una matriz de orden n invertible, su inversa se denota por A^{-1} y

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Proposición .51. Sean A y B matrices invertibles de orden n, con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces:

1. A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB es invertible con inversa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. De forma análoga, si $A_1, \ldots, A_m$ son matrices de orden n invertibles, entonces
$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = (A_m)^{-1}(A_{m-1})^{-1}\cdots(A_1)^{-1}.$$
3. kA es invertible, para todo $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$. Además, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.
4. A^t también es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

de donde, multiplicando ambos lados de la igualdad por A^{-1} obtenemos finalmente que:

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$$

En otras palabras, una secuencia de operaciones elementales que transforma a A en la identidad sirve para transformar la I_n en A^{-1}. De ahí que aplicando la secuencia de operaciones elementales, simultáneamente, a A e I_n se tenga que

$$E_k \cdots E_2 E_1 \left(A \middle| I_n\right) = \left(I_n \middle| A^{-1}\right).$$

Obviamente, si A es singular, tal secuencia no existe.

2.7 El determinante

En esta sección vamos a construir una aplicación, llamada **determinante**, que asocia a cada matriz cuadrada, un número en el cuerpo de los coeficientes de la matriz, que permitirá reconocer las matrices invertibles porque serán aquellas de determinante no nulo. Lo definimos de forma recursiva:

Definición .55. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n.

- Si $n = 1$, definimos $det(A) = a_{11}$,
- Para $n \geq 2$, definidos los determinantes de cualquier matriz de orden $n-1$, se define para la matriz A cuadrada de orden n:

$$det(A) := a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{8}$$

donde, para cada $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, siendo Δ_{ij} el determinante de la submatriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima. El número A_{ij} recibe el nombre de **adjunto** del elemento a_{ij} de A.

La expresión (8) se denomina **desarrollo de Laplace** del determinante por los elementos de la fila i-ésima. No depende de la fila i que escojamos en la matriz, es decir:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn}, \quad \forall i, j.$$

El desarrollo del determinante también puede efectuarse sobre los elementos de una columna:

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \tag{9}$$

La expresión (9) se denomina desarrollo de Laplace del determinante por los elementos de la columna j-ésima y, de nuevo, no depende de la columna que escojamos en A.

Ejemplo .56. Sea A una matriz de orden 2. Entonces

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Ejemplo .57. (Regla de Sarrus) Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Desarrollando por la primera fila, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\
&\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $det(A) = 0 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = 0$.

Proposición .58. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se verifica:

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. Si la matriz A tiene una fila (o columna) de ceros, $det(A) = 0$.
3. Si A es una matriz triangular (superior o inferior) o una matriz diagonal, entonces

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proof. La prueba de 1 se deduce de las expresiones (8) y (9). Para justificar 2 basta desarrollar el determinante por los elementos de esa fila o columna. La afirmación 3 se demuestra por inducción en n, desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna (si A es triangular superior) o de la primera fila si A es triangular inferior. ■

2.8 Determinante y operaciones elementales

En la sección 2.5 se estudió cómo, mediante operaciones elementales por filas, una matriz cuadrada A se puede transformar en una matriz triangular T. Puesto que sabemos que $det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$, sería conveniente saber cómo le afecta cada operación elemental en las filas de A al valor de su determinante.

Proposición .59. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Se verifica:

$$det(AB) = det(A)\, det(B)$$

Proposición .60. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Se verifica:

1. Si se intercambian dos filas (o dos columnas) de A entonces su determinante cambia de signo.
2. Si se multiplican los elementos de una fila (o columna) de A por un escalar $k \in \mathbb{K}$, entonces su determinante queda multiplicado por k.
3. Si a una fila (o columna) de A se le suma otra fila (o columna) multiplicada por un escalar $k \in \mathbb{K}$ no nulo, entonces su determinante no varía.

Proof. Basta tener en cuenta la Proposición .59 y el valor del determinante de las matrices elementales:

$$det(E_{ij}) = -1; \qquad det(E_i(k)) = k; \qquad det(E_{i+(k)j}) = 1.$$

■

Corolario .61. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada.

1. Si A tiene dos filas (o columnas) iguales, $det(A) = 0$.
2. Si en la fila i de A, los elementos $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ son suma de dos, entonces

$$det(A) =$$
$$= det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proof. Si A tiene dos filas iguales ($f_i = f_j$) y hacemos $f_i - f_j$, obtenemos una matriz A' con el mismo determinante que A y con una fila de ceros, así $det(A) = 0$.

Para demostrar la última propiedad, basta desarrollar el determinante por la fila i-ésima. ■

Observación. *Si en una matriz A, una fila f_i (o columna) es una suma de mútiplos de otras filas (o columnas), es decir, $f_i = \sum_{j \neq i} k_j f_j$, su determinante es cero.*

Veamos un ejemplo de cómo estas propiedades facilitan el cálculo de determinantes.

Ejemplo .62. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$det(A) =_{(f_3 - 2f_1)} det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =_{(f_4 - 2f_1)} det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$=_{(f_3 + f_2)} det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} =_{(f_4 + 4f_2)} det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$=_{(f_3 \leftrightarrow f_4)} (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

2.9 Determinante y matriz inversa

El determinante de una matriz nos permite saber cuándo dicha matriz es invertible. En todo lo que sigue A denota una matriz cuadrada de orden n, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Definición .63. La matriz adjunta de A, $Adj(A)$, es una matriz cuyos coeficientes son los adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ de los elementos de A.

Teorema .64. La matriz A es invertible si, y solo si, $det(A) \neq 0$. Además

$$A^{-1} = det(A)^{-1}(Adj(A))^t$$

Observación. *Con el resultado anterior ya podemos garantizar que si B es una matriz de orden n tal que $AB = I_n$ o $BA = I_n$, entonces, necesariamente A es invertible, siendo B la inversa de A. En efecto, si $AB = I_n$ entonces $det(A)det(B) = det(I_n) = 1$, así $det(A) \neq 0$ y, por tanto, es invertible. Entonces,*

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n = A^{-1}$$

Ejemplo .65. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ entonces } Adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -7 & 5 & 4 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $det(A) = 6 \neq 0$, la matriz A tiene inversa, que es:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(Adj(A))^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 8 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -7/6 & 4/3 \\ 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.10 Factorización LU

Una de las aplicaciones más importantes del Álgebra lineal es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Si se analiza el método de eliminación de Gauss para resolver un sistema con n incógnitas $Ax = b$, el número de operaciones elementales necesarias para llegar a la solución es proporcional al cubo de n. De ahí que para valores grandes de n resulte conveniente buscar métodos que reduzcan el número de operaciones elementales. Algunos de los algoritmos de resolución más eficientes involucran una factorización de la matriz de coeficientes A llamada factorización LU.

Supongamos que se sabe cómo factorizar una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A = LU$$

siendo L una matriz cuadrada triangular inferior y con unos en su diagonal y U es una matriz escalonada (triangular superior) del mismo tamaño que A. Entonces podemos resolver un sistema $Ax = b$ en dos pasos de la siguiente forma:

Paso 1: Como $(LU)x = Ax = b$, se tiene que $L(Ux) = b$, por tanto, si llamamos $y = Ux$ se obtiene un nuevo sistema triangular

$$Ly = b$$

donde y es la matriz columna de m incógnitas. Mediante sustitución de arriba a abajo, ya que L es triangular inferior y con unos en sus elementos diagonales, este sistema de ecuaciones lineales se resuelve de forma sencilla.

Paso 2: Obtenida y, fácilmente se resuelve el sistema

$$Ux = y$$

mediante sustitución de arriba a abajo ya que U es una matriz triangular superior.

Señalar que la factorización LU es particularmente útil cuando se necesita resolver de manera simultánea varios sistemas de ecuaciones que difieren, únicamente, en los términos independientes.

El siguiente resultado da condiciones suficientes para la existencia de una factorización LU para matrices cuadradas.

Proposición .66. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supongamos que A se puede reducir por filas a una matriz triangular superior U aplicando únicamente operaciones elementales de tipo (III), operacioines de tipo .Entonces existe una matriz triangular inferior L que es invertible y con unos en la diagonal, tal que

$$A = LU$$

Además, si A es invertible, esta descomposición es única.

Ejemplo .67. Aplicando operaciones elementales de tipo $f_j + \alpha f_i$ con $j > i$, transformamos la matriz siguiente en una matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2-2f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-3f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-2f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

Las matrices elementales correspondientes a estas operaciones elementales son $E_{2+(-2)1}$, $E_{3+(-3)1}$ y $E_{3+(-2)2}$. Así

$$E_{3+(-2)2}E_{3+(-3)1}E_{2+(-2)1}A = U, \qquad \text{por tanto} \qquad A = E_{3+(2)1}E_{3+(3)1}E_{3+(2)2}U$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LU$$

En este caso la factorización es única.

OBSERVACIÓN: Como solo se efectuan operaciones del tipo $f_j + \alpha f_i$ con $j > i$, teniendo en cuenta la estructura de L y la de U, **la información sobre L se puede almacenar en aquellas posiciones donde se obtienen los ceros de** U, de forma que el almacenamiento de esta factorización es de "bajo coste".

En el caso anterior, podemos almacenar la información de L de la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{por tanto} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \mathbf{2} & -3 & -6 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 3 \end{pmatrix}$$