T2. Teoría de Grafos

Un **grafo** es un par $G=(V,E)$, donde V es el conjunto no vacío de **vértices** o nodos, y E es el conjunto de **aristas**.

En un **grafo no dirigido**, las aristas $e=\{u,v\}$ *simplemente unen los vértices*. En un **grafo dirigido**, $e=(u,v)$ salen de un vértice ***u*** y terminan en otro ***v***

Si una arista tiene une un vértice consigo mismo, se le dice **lazo**. Si un vértice no está conectado a otro, se le dice **vértice aislado.**

1.1 Vértices

Un par de vértices son **adyacentes** si *existe una arista que los une*. Se dice que $e=\{u,v\}$ incide en los vértices *u y v* o que los conecta.

El **grado** de un vértice $\partial(v)$ es el número e aristas que inciden en el. Los lazos añaden grado 2 a cada vértice . Los vértices con grado 0 son aislados y los de grado 1, **hojas.**

La **sucesión de grados** es la sucesión formada por los grados de los vértices: $(\partial(v_1),\partial(v_2)...,\partial(v_n))$

Lema del apretón de manos

La suma de los grados de todos los vértices de un grafo $G=(V,E)$ es igual al doble del n.º de aristas

$$\sum_{v\in V}\partial(v)=2|E|.$$

Como consecuencia: En un grafo, el número de vértices de grado impar es par

Definiciones:

- A un grafo con *n* vértices se le dice grafo de **orden n.**
- Si es **simple** y de **orden n**, el grado de cada vértice: $\partial(v)\leq n-1$
- A un grafo simple con vértices cuyo grado es r, se le dice ***r*-regular.**
- Un grafo simple es completo K_n si cada vértice es adyacente a todos los demás.

1.2 Subgrafos

$G'=(V',E')$ es un subgrafo de G si $V'\subseteq V$ y $E'\subseteq E$. Es decir, los vértices y aristas de G' también están en G.

Además, si $V'=V$, se le llama **subgrafo recubridor** o **parcial**

1.3 Grafos isomorfos

Intuitivamente, los grafos isomorfos son grafos que comparten la misma estructura pero se ven de forma diferente.

Formalmente, dos grafos son isomorfos si existe una **función biyectiva** entre sus **vértices y sus aristas** que conserva la **relación de adyacencia**, es decir, *si dos vértices están conectados en un grafo, sus correspondientes en el otro también deben estarlo*.

Para ello, deben cumplir unos invariantes:

- **Número de vértices**
- **Número de aristas**
- **Sucesión de grados idéntica.**

Sin embargo, estas condiciones son necesarias pero **no suficientes** para demostrar que dos grafos son isomorfos.

1.4 Grafo complementario

El grafo complementario de G es otro grafo simple con el *mismo conjunto de vértices* pero con las **aristas que no están en G.**

Teniendo en cuenta *que dos grafos son isomorfos si sus complementarios lo son*, podemos comprobarlo mediante estos.

1.5 Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia de G es la matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n cuyo elemento a_{ij} es el número de aristas que unen el vértice v_i con el vértice v_j .

Si G es simple, su matriz solo tiene 0 y 1 y su diagonal y los elementos de la diagonal son nulos. Si un vértice v_i tiene ***k* lazos**, $a_{ii}=k$ (Número de conexiones consigo mismo)

A partir de la matriz de adyacencia podemos determinar el grado de un vértice v_i a partir de los elementos de la fila o columna:

$$2a_{ii}+\sum_{j\neq i} a_{ij}=\partial(v_i)$$

2. Conectividad

2.1 Caminos y ciclos

Un **camino** de un vértice *v* a otro *w* es una secuencia de aristas. Un camino en el que todas las aristas son distintas se llama camino simple. Son de la forma:

$$e_1=\{v_0,v_1\},\ e_2=\{v_1,v_2\},\ \ldots\ ,e_n=\{V_{n-1},v_n\}$$

El vértice v_0 se llama vértice inicial y v_n vértice final. El número de aristas ***n*** es la **longitud** de el camino.

Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia, el número de caminos de longitud *k* de v_i a v_j viene dado por la matriz A^k en la posicion *i , j*

Un camino de longitud mayor o igual que 1 en el que $v_n=v_0$ es un **circuito** o camino cerrado

2.2 Conexión

Se dice que dos vértices *u y v* están conectados si $u=v$ o *existe un camino que los une.*

Grafo conexo

Un grafo es **conexo** si tiene una única componente conexa, es decir, t*odos los vértices del grafo están relacionados* (conectados al menos por un camino).

Un grafo de orden *n* es conexo si todos los elementos no diagonales de su matriz de la matriz A + A² + … + A^{n-1} son no nulos.

Arista de separación

Una arista $e=\{v_i,v_j\}$ es una arista de separación si al suprimir dicha arista, el conjunto de vértices conectados con v_i y el conjunto de vértices conectados con v_j son disjuntos.

Punto de corte

Un vértice es un punto de corte si G – {v} tiene más componentes conexas que el grafo inicial. Es decir, se produce una separación.

2.3 Grafo bipartito

Un grafo es bipartito si:

- $V = V_1 \cup V_2 \ / \ V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $e = \{v_1, v_2\}, v_1 \in V_1 \, y \, v_2 \in V_2$

Es decir, está formado por dos **c*onjuntos disjuntos*** *de vértices* y cada arista conecta dos vértices que pertenecen a cada conjunto respectivamente. Un grafo es **bipartit**o si, y sólo si, todos *sus ciclos tienen longitud par.*

Para obtener la partición del conjunto de vértices, empezando en uno cualquiera *v*:

$$V_1 = \{v' \in V / \ d(v, v') \text{ es par}\} \qquad V_2 = \{v' \in V / \ d(v, v') \text{ es impar}\}$$

3. Grafos eulerianos y hamiltonianos

3.1Grafo Euleriano

En un grafo, llamamos **camino euleriano** a un *camino simple que contiene a todas las aristas del grafo*. Un **circuito euleriano** es un *camino euleriano cerrado*

Un **grafo euleriano** es un grafo que admite algún circuito euleriano. Un **grafo semieuleriano** es un grafo que admite un camino euleriano no cerrado.

Entonces:

- Un grafo es **euleriano** si todo vértice tiene **grado par**
- Un grafo es **semieuleriano** si tiene exactamente dos **vértices de grado impar**

3.2 Grafo Hamiltoniano

Un **camino hamiltoniano** es un camino que *contiene* ***todos los vértices una sola vez***. Si es cerrado, es un **circuito hamiltoniano.** Dos condiciones suficientes para que un grafo sea hamiltoniano son:

Teorema de Dirac. Sea G un grafo simple y conexo con *n* vértices, es hamiltoniano si:

$$n \geq 3 \ , \ Si \, \partial(v) \geq \frac{n}{2} \ \forall \, v \in V$$

Teorema de Ore. Sea G un grafo simple y conexo con *n* vértices, es hamiltoniano si:

$$n \geq 3 \ , \ Si \, \partial(u) + \partial(v) \geq n \ , \forall \, u, v \in V$$

4. Grafos ponderados

Un grafo ponderado es un grafo $G = (V, E)$ con una función que le asigna un peso $w(e)$ a cada arista:

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Se define el peso de G como la *suma de los pesos de sus aristas*. Si *T* es un camino de G, el peso de T es la suma de los pesos de sus aristas

5. Árboles

Un árbol es un grafo conexo y sin circuitos simples. Un bosque es un grafo en el que cada componente conexa es un árbol.

Puesto que no puede tener circuitos, tampoco puede tener lazos o aristas múltiples.

- Cada par de vértices están unidos por un solo camino
- Es conexo y toda arista es de separación
- $|V| = |E| + 1$
- Es conexo y no tiene circuitos

Entonces deducimos que un grafo con *n* vértices y *n-1* aristas es un árbol. Y un bosque con *n* vértices y *m* componentes conexas tiene *n-m* aristas.

5.1 Árbol generador

Cada grafo conexo contiene un árbol que conecta todos sus vértices, el cual usa el menor número de aristas posible para mantener la conexión

Un árbol generador es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G.

Mediante estos algoritmos podemos calcular los árboles generadores tales que su peso es el menor posible para ese conjunto de aristas.

Algoritmo de Prim.

Se elige un vértice cualquiera. Manteniendo la estructura de árbol, se van añadiendo aristas adyacentes a algún vértice ya seleccionado siempre que estas no formen un circuito y sean del menor peso posible, se repite hasta que sea imposible no crear un ciclo.

Algoritmo de Kruskal

Seleccionamos una arista inicial de peso mínimo. Seguimos tomando aristas de peso mínimo, sin formar un circuito con las previamente seleccionadas, hasta que consigamos el árbol generador