$G' = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E) \iff V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$

$\{v_1, v_2\}\ \{v_1, v_4\}\ \{v_2, v_4\}$

$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\})$

A:

$V' = \{v_1, v_2, v_4\} \subseteq V$

$\mathcal{E}' = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E$

$\Rightarrow$ A es subgrafo

B:

2.

1.) $e_1 = \{e, g\}$, $e_2 = \{b, g\}$, $e_3 = \{g, s\}$

3.)

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ g \\ s \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & g & s & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7. Euleriano $\iff \partial(v) = \text{par}\ \forall v \in V$

$\partial(g)$ y $\partial(s) = 3 \Rightarrow$ no es euleriano

3. Aristas del grafo $\underbrace{\text{4-regular}}$ de 12 vért.

$\partial(v) = 4\ \forall v \in V$

$\sum \partial(v) = 2|E| \iff$

$\Rightarrow 4 \cdot 12 = 2|E| \iff |E| = 24$

En un grafo simple, $E_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$ (completo)

4. Grafo simple con $|E| = 66$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \geq 66 \iff n(n-1) \geq 132 \iff n^2 - n - 132 \geq 0$

$n^2 - n - 132 = 0 \iff \begin{cases} n = 12 \\ \cancel{n = -11} \end{cases}$

5. Si un grafo es isomorfo a su complementario, $|V| = 4n$ / $|V| = 4n+1$

$G = (V, E)$ Simple

$K_n = (V, E_n)$

$G^c = (V, E^c)$ Complementario

Si $G \simeq G^c \Rightarrow |V| = 4\lambda$ o $|V| = 4\lambda + 1$

$E^c = E_n \setminus E$ $\quad |E| = |E^c| = |E_n| - |E| \quad |E_n| = \frac{n(n-1)}{2}$

6. Grafo simple de orden 10, $|E| > 25$, no es bipartito

V_1 $\quad \underline{n} \Rightarrow \forall v \in V_1,\ \partial(v) \leq |V_2| = 10 - n$

$\partial(v) = 10 - n$ (si es completo)

Núm. de aristas del bipartito completo

V_2 $\quad m = \underline{10 - n}$ $\quad |E| \leq \underbrace{n \cdot m}_{|E|_{max}} = n(10-n)$

$25 < |E| \leq n(10-n) \iff 25 < n(10-n) \iff 25 - 10n + n^2 < 0 \iff$

$\iff (n-5)^2 < 0$ Imposible

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ a) 4

b) "Un grafo de orden n es conexo $\iff \forall i \neq j,\ a_{ij} \neq 0$ de $A + A^2 + \dots A^{n-1}$"

$n = 4 \Rightarrow A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i \neq j,\ a_{ij} \neq 0 \Rightarrow$ es conexo

(8) G grafo con 41 vértices

1) Si es conexo, nº mínimo de aristas

El grafo conexo con menor $|E|$ es un árbol $\Rightarrow$ $|V| = |E| + 1 \Leftrightarrow |E| = |V| - 1 = 40$

2) 2 componentes conexas $\Rightarrow$ 2 árboles

$|V_1| = |E_1| + 1$

$|V_2| = |E_2| + 1$

$|E_T| = |E_1| + |E_2|$

$\Leftrightarrow |E_T| = |V_T| - 2$

$|V_T| = |V_1| + |V_2|$

3) G simple y conexo. ¿$\partial(v)_{máx}$?

$\partial(v) \leq n - 1 = 40$

4) Num máx aristas? El grafo con > num aristas es el completo

$$|E_n| = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{41 \cdot 40}{2} = 820$$

(9) G grafo simple con 13 vértices. Grado máximo de cualquier vértice

$\partial(v) \leq n - 1 \Rightarrow \partial(v)_{máx} = 12$

Como es simple, cada vértice es adyacente, a lo sumo, a 12 vértices

$|V| = 13$ — $4 \cdot \partial(v) = 1$, $7 \cdot \partial(v) = 4$

$|E| = 28$

$$\sum \partial(v) = 2|E|$$

$$4 + \underbrace{7 \cdot 4}_{28} + 2n = 2 \cdot 28 \Leftrightarrow 32 + 2n = 56 \Leftrightarrow 2n = 24 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n = 12$ //

Si para $\partial(v)_{máx} = 12$

(10) G simple de 10 vértices $\partial(v) \geq 5$ y $|E| = 12n$.

$5 \leq \partial(v) \leq 9 \Rightarrow 10 \cdot 5 \leq \sum \partial(v) \leq 10 \cdot 9 \Rightarrow 50 \leq 2|E| \leq 90$

$25 \leq \underbrace{|E|}_{n \cdot 12} \leq 45$

$n \cdot 12 = |E| = 36$

b) G es euleriano $\Rightarrow \partial v$ par

¿$\partial v = 6$?

$\partial v = 6$ o $\partial v = 8$

$x = $ "$\partial v = 6$"

$10 - x = $ "$\partial v = 8$"

$\sum \partial v = 2|E|$

$6x + 8(10-x) = 2|E| \Leftrightarrow 3x + 40 - 4x = 36$

$\Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$ //

(13)

Th. Ore.

$\partial(v) + \partial(w) \geq n \quad \forall v, w \in V$

$\partial(c) + \partial(e) \geq 8 \Leftrightarrow 4 + 3 \overset{?}{\geq} 7$ NO

Th. Dirac

$\partial(v) \geq \frac{n}{2} \quad \forall v \in V$

$\partial(a) \geq 4 \Leftrightarrow 2 \overset{?}{\geq} 4$ NO

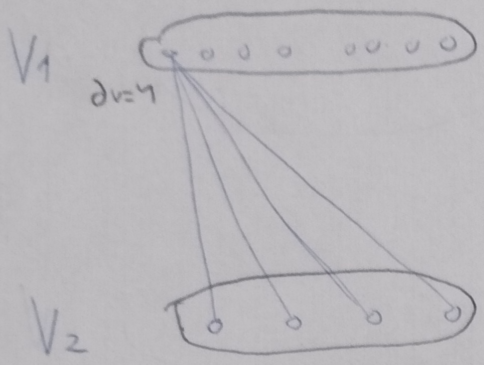
No es hamiltoniano

(11) Como el número de vértices de grado impar es par.

2 es el número mínimo de vértices impares para 1 sola componente conexa.

14.

$K_{m,n}$ grafo bipartito completo con $|V|=12$ en el que alguno tiene grado 4.



n vert / $\partial v = m$

m vert / $\partial v = n$

Si $n=4$, $m=8$

$|E| = 8 \cdot 4$
max
(completo)

Si alguno tiene grado 4, $\partial v = 4$ $\forall v \in V_1$ o V_2

Si $\sum \partial v = n \cdot m$ o $n=4$, $m=8$

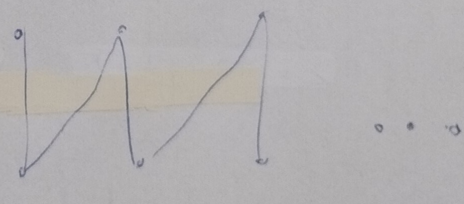
Cada vértice de V_2 está conectado a n vértices del grupo V_1, entonces, $\forall v \in V_2$, $\partial(v) = n = 4$

15. $K_{m,n}$ bip. completo 12 vert

hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $\partial(v) + \partial(w) \geq 12$ $\forall$ $v,w \in V_1,V_2$

$\partial(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V_1$

$K_{m,n}$ es hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $n=m$



$\partial(v) + \partial(w) \geq n$ $\forall$ v,w

$1 + 11$
$2 + 10$ ≥ 12 Siempre $\Rightarrow$ es hamiltoniano
$3 + 9$

Pero la única opción es $n=m$ porque no podemos repetir vértice

$m=6$
$n=6$ $|E| = 6 \cdot 6 = 36$

(16)

V_1 $\quad |V_1| = 42 \quad \partial(v_1) = 8 \quad |E_1| = 42 \cdot 8$

$|E_1| = |E_2|$

V_2 $\quad |V_2| = n \quad \partial(v_2) = 6 \quad |E_2| = 6n$

* En un grafo bipartito, $|E_1| = |E_2| \Leftrightarrow$

$|V_1| \cdot \partial(v) = |V_2| \cdot \partial(w)$

$42 \cdot 8 = 6n \Leftrightarrow n = 56$

(17) Arbol $\quad 10v \ \partial(v) = 5 \quad , \quad 8w \ \partial(w) = 4 \quad , \quad 12w \ \partial(w) = 3$

$10 \cdot \partial(=2$ $\quad$ resto ∂ 1 $\quad |E| = |V| - 1 = 39 + n$

$\Sigma \partial v = 2|E|$

$$\overset{50}{10 \cdot 5} + \overset{32}{8 \cdot 4} + \overset{36}{12 \cdot 3} + \overset{20}{10 \cdot 2} + n = 2(40 + n - 1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 138 + n = 78 + 2n \Leftrightarrow n = 60$ //

(18) Arbol $\quad h$ hojas $\quad$ 5 $\quad 22$ vert $\ \partial(v) = K \quad |E| = |V| - 1 = 21 + h$

$\Sigma \partial(v) = 2|E|$

$22K + h = 2(21 + h) \Leftrightarrow 22K + h = 42 + 2h \Leftrightarrow \underline{h = 22K - 42}$

Si es semieuleriano $\Rightarrow \exists\ 2\ v \,/\, \partial(v) = $ impar $\Rightarrow 2\ v \,/\, \partial(v) = 1 = 2$ hojas

$\Rightarrow h = 2 \Rightarrow$

$2 = 22K - 42 \Leftrightarrow 22K = \overset{h=2}{42 + 2} \Leftrightarrow K = 2$

(19) 7-regular $\quad |E| = 5|V| - 15 \quad \partial(v) = 7 \ \forall v \in G$

$\Sigma \partial(v) = 2|E| \Leftrightarrow 7|V| = 10|V| - 30 \Leftrightarrow |V| = 10$

$|E| = 35$

b) $|V| = 10$

$|E| = |V| - 1 = 9$