Cálculo y Análisis Numérico
Grado en Inteligencia Artificial
Universidade da Coruña

Prof. María González Taboada
maria.gonzalez.taboada@udc.es

5 de septiembre de 2022

Tema 1. Funciones reales de una variable real

1. Conjuntos de números

- Números **naturales**: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Números **enteros**: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Números **racionales**: expresión decimal limitada $(0,25)$ o ilimitada periódica $(0,333\ldots)$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

- Números **irracionales**: expresión decimal ilimitada no periódica ($\mathbb{I}$)

$$\pi, \quad e, \quad \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \ldots$$

1. Conjuntos de números

- Números **reales**: $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

- Números **complejos**:

$$\mathbb{C} := \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

  i se llama la unidad imaginaria

- Se verifica que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Además, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$:

  Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$

Conjuntos acotados

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío.

Definición

*Se dice que $M \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** del conjunto A si*

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

*El conjunto A se dice **acotado superiormente** si tiene alguna cota superior.*

*Se llama **supremo** del conjunto A, $\sup(A)$, a la menor de las cotas superiores del conjunto A.*

Conjuntos acotados

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío.

Definición

*Se dice que $m \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** del conjunto A si*

$$\forall x \in A, \quad m \leq x$$

*El conjunto A se dice **acotado inferiormente** si tiene alguna cota inferior.*

*Se llama **ínfimo** del conjunto A, $\inf(A)$, a la mayor de las cotas inferiores del conjunto A.*

Conjuntos acotados

Definición

*Un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ se dice **acotado** si está acotado superior e inferiormente, es decir, si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\forall x \in A, \quad m \leq x \leq M$$

Axioma del supremo. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, entonces existe $\sup(A)$.

Conjuntos acotados

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío.

- Cuando $\sup(A) \in A$, se llama **máximo** del conjunto A.
- Cuando $\inf(A) \in A$, se llama **mínimo** del conjunto A.

2. Funciones reales de una variable real

Sea $A \subset \mathbb{R}$.

Definición

La correspondencia $f : A \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real si a cada $x \in A$ le asigna una única imagen $f(x) \in \mathbb{R}$.

Se llama:

- Dominio de f: $\mathscr{D}(f) \equiv \mathrm{Dom}(f) := \{x \in A \,/\, f(x) \in \mathbb{R}\}$
- Imagen de f:
  $\mathrm{Im}(f) \equiv f(A) := \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$

Propiedades de monotonía

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real y sea* $B \subset A$.

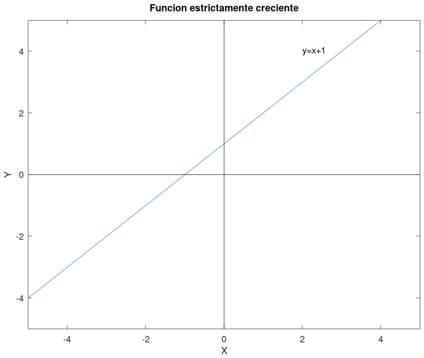
- *Se dice que* f *es* *creciente* *en* B *si*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- *Se dice que* f *es* *estrictamente creciente* *en* B *si*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Propiedades de monotonía



Propiedades de monotonía

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $B \subset A$.

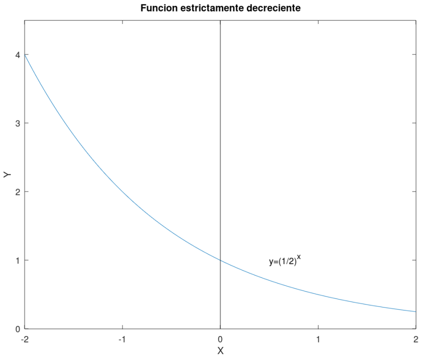
- *Se dice que f es decreciente en B si*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *Se dice que f es estrictamente decreciente en B si*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Propiedades de monotonía



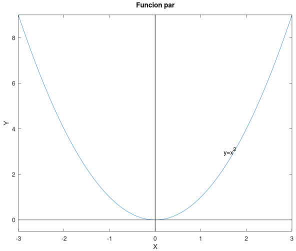
Simetría par

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, con A simétrico respecto al origen ($x \in A \Leftrightarrow -x \in A$).

Definición

Se dice que la función f tiene simetría par si

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(f)$$



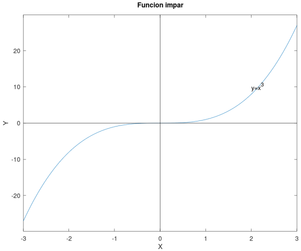
Simetría impar

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, con A simétrico respecto al origen ($x \in A \Leftrightarrow -x \in A$).

Definición

Se dice que la función f tiene simetría impar si

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in \mathscr{D}(f)$$



Periodicidad

Definición

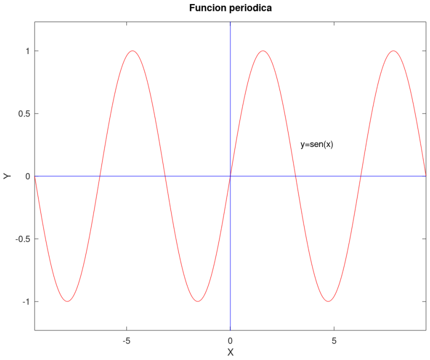
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se dice que* f *es periódica con período* T, *si*

$$f(x+T) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Ejemplo: las funciones trigonométricas sen, cos, tan son periódicas con periodo 2π, 2π y π, respectivamente.

Periodicidad

- Si una función es periódica con período T, es suficiente estudiarla en un intervalo de longitud T, como $[0, T]$.



Composición de funciones

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real, con $Im(f) \subset B$.
La función compuesta $g \circ f$ (se lee "f compuesta con g") es la función

$$\begin{array}{rcrcl} g \circ f & : & A \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x \in A & \to & (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{array}$$

$$x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B \xrightarrow{g} g(f(x))$$

Composición de funciones

- **Ejemplo:** Sean $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

  Entonces:

$$(g \circ f)(x) = \frac{2x+4}{2x+5}$$

y

$$(f \circ g)(x) = \frac{5x+8}{x+2}$$

¡OJO! La composición de funciones en general no es conmutativa

Composición de funciones

- **Ejemplo:** Sean

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = \text{sen}(x)$$

$$h(x) = x^2 + 1$$

Entonces:

$$(f \circ g \circ h)(x) = e^{\text{sen}(x^2+1)}$$

Ejercicio: Calcular $(h \circ g \circ f)(x)$

Función inversa

Definición

Una función f es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}(f), \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

- Ejemplos: $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^3$, $h(x) = (0{,}5)^x$

Función inversa

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva. Entonces, existe una única función* $h : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$h(f(x)) = x\,, \quad \forall x \in A$$

$$f(h(x)) = x\,, \quad \forall x \in \mathrm{Im}(f)$$

Definición

La función h *se denomina inversa de* f *y se denota* f^{-1}.

- **Ejemplo:** Las funciones $f(x) = x^7 - 9$ y $h(x) = \sqrt[7]{x+9}$ son inversas entre sí.

Función inversa

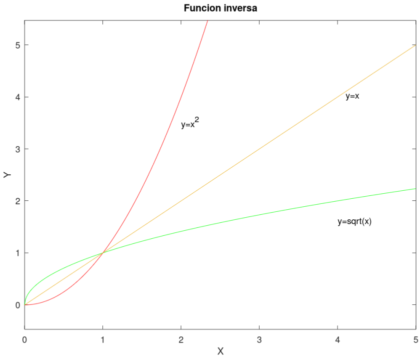
Cálculo de la función inversa: Dada una función f, la forma práctica de calcular su función inversa (si existe) es:

1. Si es posible, despejar x en función de y en la ecuación $y = f(x)$
2. Intercambiar los papeles de x e y

Ejemplo: Si $f(x) = x^3 + 1$, entonces $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

¡OJO! f^{-1} no es lo mismo que $\frac{1}{f}$

Función inversa



- Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$.

3. Funciones elementales

1. Función valor absoluto
2. Funciones polinómicas
3. Funciones racionales
4. Funciones exponenciales
5. Funciones logarítmicas
6. Funciones trigonométricas
7. Funciones trigonométricas inversas
8. Funciones hiperbólicas

3.1 Función valor absoluto

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$*. Se llama* *valor absoluto* *de* a*, y se denota* $|a|$*, a*

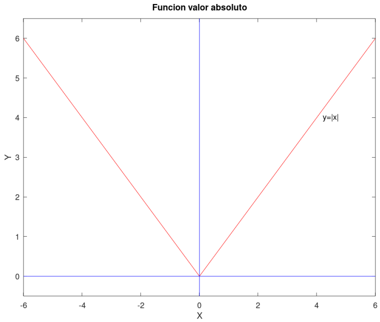
$$|a| = \begin{cases} -a, & si\ a < 0, \\ a, & si\ a \geq 0. \end{cases}$$

- **Ejemplos**: $|0| = 0\,, \quad |-3| = 3\,, \quad |5| = 5$

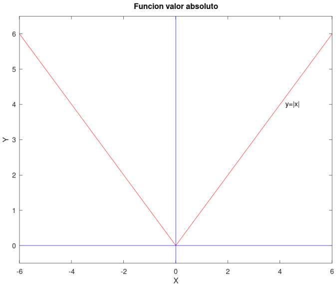
3.1 Función valor absoluto

Definición

Se llama función valor absoluto, y se denota $|\cdot|$, a la función real de variable real que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder su valor absoluto, $|x|$.



3.1 Función valor absoluto



Observación

La función valor absoluto presenta simetría par:

$$|-x| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3.1 Función valor absoluto

Propiedades

Se cumple que:

1. $|x| \geq 0\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
3. *Desigualdad triangular:* $|x+y| \leq |x| + |y|\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
4. $|x\,y| = |x|\,|y|\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \quad y \neq 0$
6. $|x| = \sqrt{x^2}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
7. *Si* $C > 0$*, entonces:* $|x| \leq C \;\Leftrightarrow\; -C \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq C$

3.1 Función valor absoluto

- **Resolución de ecuaciones**:

$$|-3x+5| = |x+1| \iff \begin{cases} -3x+5 = x+1 \\ -3x+5 = -x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} -4x = -4 \\ -2x = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

La ecuación tiene 2 soluciones: $x=1$ y $x=3$.

3.1 Función valor absoluto

- **Resolución de inecuaciones**:

$$\begin{aligned} |-3x+5| \leq 10 &\Leftrightarrow -10 \leq -3x+5 \leq 10 \\ &\Leftrightarrow -15 \leq -3x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow 5 = \frac{-15}{-3} \geq x \geq -\frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow x \in [-\frac{5}{3}, 5] \end{aligned}$$

3.1 Función valor absoluto

Definición

Dado $x \in \mathbb{R}$*, su* *distancia al origen* *es* $d(x,0) := |x|$.
Dados $x, y \in \mathbb{R}$*, se llama* *distancia* *entre estos dos puntos a*

$$d(x,y) := |x-y|$$

- **Ejemplo**: $d(-2,5) = |-2-5| = |-7| = 7$

3.2 Funciones polinómicas

Definición

Una función p real de variable real se dice polinómica si es de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

- a_n se llama coeficiente director de la función polinómica p
- n se llama grado de la función polinómica p
- El dominio de una función polinómica es $\mathbb{R}$.
- La imagen de una función polinómica varía en cada caso.

3.2 Funciones polinómicas

- Ejemplos:

1. $p_0(x) = 6$
2. $p_1(x) = 3\,x^2 - 9\,x + 2$
3. $p_2(x) = -6\,x^3 + \sqrt{2}\,x - e$
4. $p_3(x) = \pi\,x^6 - 12\,x^3 + 3\,x$

3.3 Funciones racionales

Definición

Una función f, real de variable real, es racional si es el cociente de dos funciones polinómicas, es decir,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son funciones polinómicas.

- El dominio de f está formado por todos los números reales excepto aquéllos que anulan el denominador:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$$

- La imagen de f varía en cada caso.

3.3 Funciones racionales

- Ejemplos de funciones racionales son

1. $f_1(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 12}{8x^3 - \sqrt{3}}$

$$8x^3 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt[6]{3}}{2} \right\}$$

2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^5 + \pi}$

$$x^5 + \pi = 0 \Rightarrow x^5 = -\pi \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \sqrt[5]{-\pi} \}$$

3.4 Funciones exponenciales

Definición

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Se llama función exponencial de base a a la función real de variable real definida por

$$f(x) = a^x$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$
- $f(0) = a^0 = 1\,, \quad \forall\, a > 0\,, \quad a \neq 1$

3.4 Funciones exponenciales

Propiedades

1. $a^{x+y} = a^x a^y\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

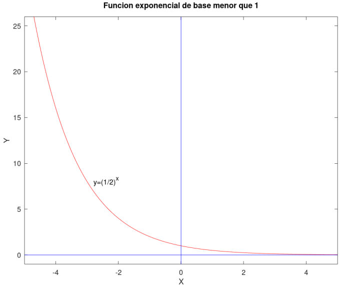
3.4 Funciones exponenciales

Si $0 < a < 1$, entonces

- la función exponencial de base a es estrictamente decreciente:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x > a^y$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$



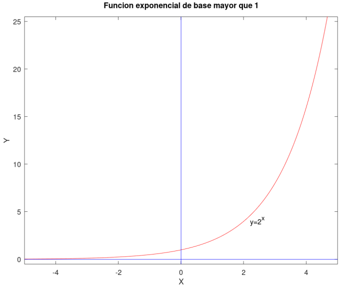
3.4 Funciones exponenciales

Si $a > 1$, entonces

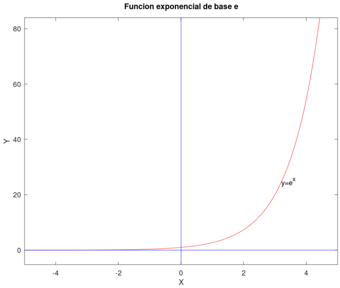
- la función exponencial de base a es estrictamente creciente:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y$$

- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad$ y $\quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$



3.4 Funciones exponenciales



- La función exponencial más utilizada es la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$.
  Esta función es la que se conoce por defecto como función exponencial.

3.5 Funciones logarítmicas

Definición

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, *se dice que* y *es el logaritmo en base* a *de* x, *y se escribe* $y = \log_a(x)$, *si* $a^y = x$*:*

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

- **Ejemplo**:

$$2 = \log_3(9) \quad \text{ya que} \quad 3^2 = 9$$

3.5 Funciones logarítmicas

Propiedad

La función $\log_a$ *es la función inversa de la función exponencial de base* a*:*

$$\log_a(a^x) = x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a(x)} = x\,, \quad \forall x > 0$$

- $\mathrm{Dom}(\log_a) = (0, +\infty)$
- $\mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$
- $\log_a(1) = 0$ ya que $a^0 = 1$

3.5 Funciones logarítmicas

Propiedades

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,, \quad \forall x, y > 0$
2. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)\,, \quad \forall x > 0\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}$
3. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)\,, \quad \forall x, y > 0$

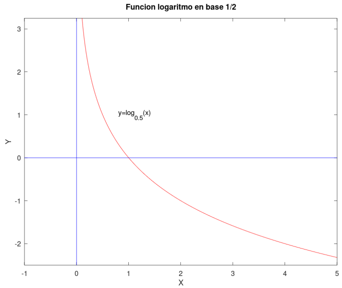
3.5 Funciones logarítmicas

Si $0 < a < 1$, entonces:

- La función $\log_a$ es estrictamente decreciente:

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \log_a(x) > \log_a(y)$$

- $\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$



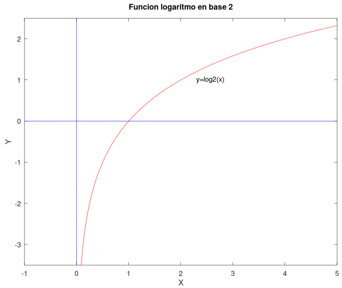
3.5 Funciones logarítmicas

Si $a > 1$, entonces:

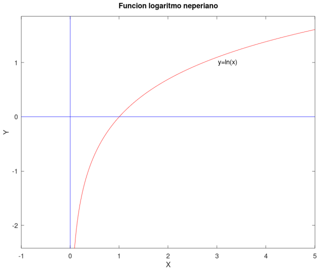
- La función $\log_a$ es estrictamente creciente:

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \log_a(x) < \log_a(y)$$

- $\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$



3.5 Funciones logarítmicas

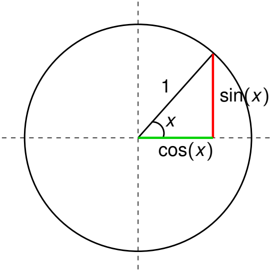


- El logaritmo más utilizado es el logaritmo en base e.
  Se llama logaritmo neperiano y se denota $\ln(x)$.
  Cualquier otro logaritmo se puede expresar en función del logaritmo neperiano mediante la fórmula

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad \forall x > 0$$

3.6 Funciones trigonométricas

El seno y el coseno se pueden entender como las longitudes de las proyecciones sobre los ejes del ángulo, en radianes, dibujado sobre la circunferencia de radio unidad.



Identidad fundamental de la trigonometría

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

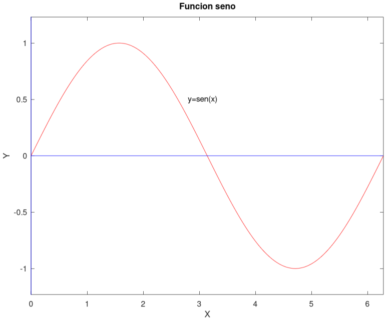
3.6 Funciones trigonométricas

Definición

Se llama función seno a la función real de variable real que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el seno del ángulo de x radianes, $\operatorname{sen}(x)$.

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(\operatorname{sen}) = [-1, 1]$
- La función seno es impar.
- La función seno es periódica con período 2π.

3.6 Funciones trigonométricas



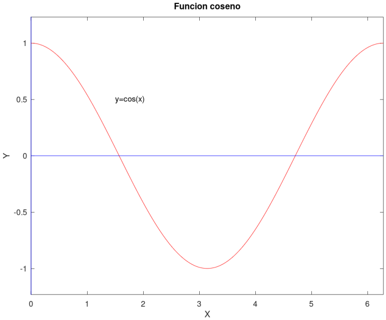
3.6 Funciones trigonométricas

Definición

Se llama función coseno a la función real de variable real que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el coseno del ángulo de x radianes, $\cos(x)$.

- $\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$
- La función coseno es par.
- La función coseno es periódica con período 2π.

3.6 Funciones trigonométricas



3.6 Funciones trigonométricas

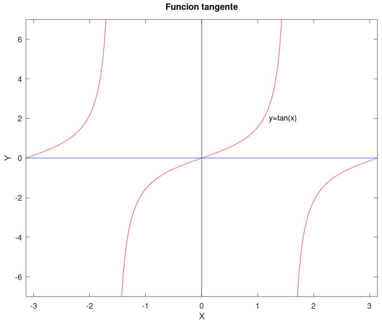
Definición

Se llama función tangente a la función real de variable real definida por

$$\tan(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

- $\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\mathrm{Im}(\tan) = \mathbb{R}$
- La función tangente es impar y periódica con período π.

3.6 Funciones trigonométricas



3.6 Funciones trigonométricas

Definición

Las funciones recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente se llaman, respectivamente, función cosecante, función secante y función cotangente:

$$\operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \quad \cot(x) := \frac{1}{\tan(x)}$$

- **Ejercicio.** Determinar el dominio y la imagen de las funciones anteriores, si tienen simetría par o impar, y si son periódicas.

3.7 Funciones trigonométricas inversas

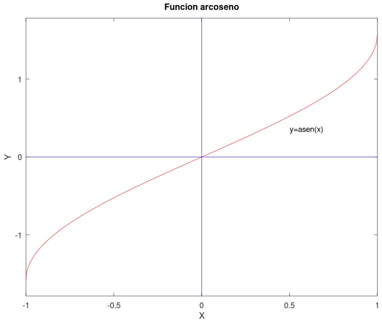
Observación

La función seno no es inyectiva. Sin embargo, si restringimos su dominio al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, entonces la restricción es inyectiva y tiene, por tanto, inversa.*

Definición

Se llama función arco-seno a la función inversa de la función seno restringida al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, esto es, dado* $x \in [-1, 1]$*,* $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *es el arco-seno de* x*,* $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$*, si y solo si* $\operatorname{sen}(y) = x$*.*

3.7 Funciones trigonométricas inversas



- $\mathrm{Dom}(\mathrm{arc\,sen}) = [-1, 1]$
- $\mathrm{Im}(\mathrm{arc\,sen}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- La función arco-seno es una función impar.

3.7 Funciones trigonométricas inversas

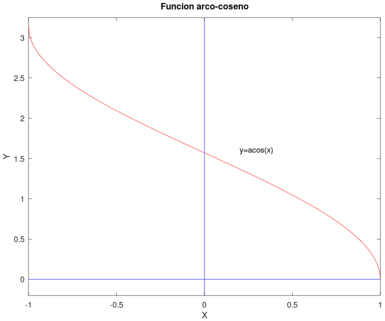
Observación

La función coseno no es inyectiva. Sin embargo, si restringimos su dominio al intervalo $[0, \pi]$*, entonces la restricción es inyectiva y tiene, por tanto, inversa.*

Definición

Se llama función arco-coseno a la función inversa de la función coseno restringida al intervalo $[0, \pi]$*, esto es, dado* $x \in [-1, 1]$*,* $y \in [0, \pi]$ *es el arco-coseno de* x*,* $y = \arccos(x)$*, si y solo si* $\cos(y) = x$*.*

3.7 Funciones trigonométricas inversas



- $\mathrm{Dom}(\arccos) = [-1, 1]$
- $\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$

3.7 Funciones trigonométricas inversas

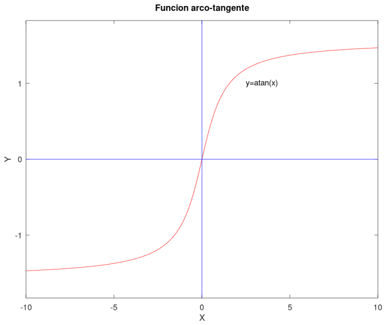
Observación

La función tangente no es inyectiva. Si restringimos su dominio al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, entonces la restricción es inyectiva y tiene, por tanto, inversa.*

Definición

Se llama *función arco-tangente* *a la función inversa de la función tangente restringida al intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, esto es, dado* $x \in \mathbb{R}$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *es el arco-tangente de* x, $y = \arctan(x)$*, si y solo si* $\tan(y) = x$.

3.7 Funciones trigonométricas inversas



- $\text{Dom}(\arctan) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- La función arco-tangente es impar.

3.8 Funciones hiperbólicas

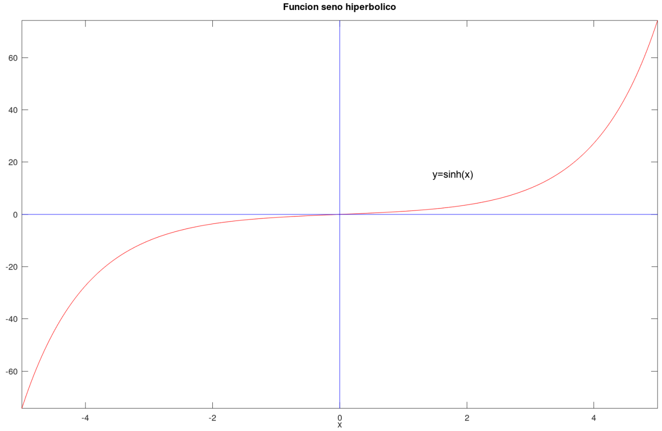
Definición

Se llama función seno hiperbólico, y se denota senh, *a la función real de variable real que a cada* $x \in \mathbb{R}$ *le hace corresponder*

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{senh}) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(\operatorname{senh}) = \mathbb{R}$
- La función seno hiperbólico es impar.

3.8 Funciones hiperbólicas



3.8 Funciones hiperbólicas

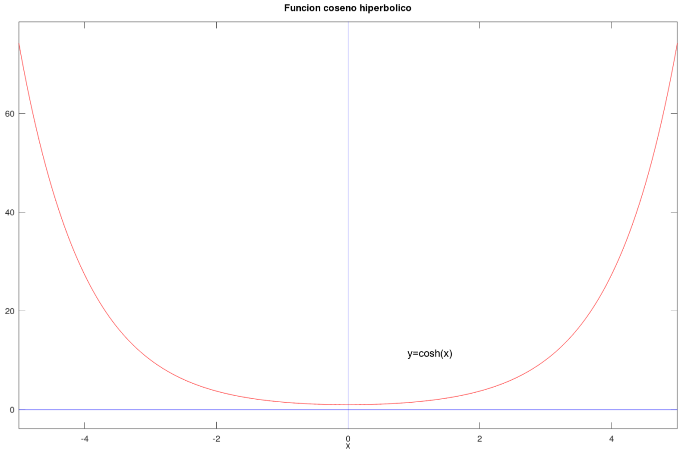
Definición

Se llama función coseno hiperbólico, y se denota cosh, *a la función real de variable real que a cada* $x \in \mathbb{R}$ *le hace corresponder*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- $\mathrm{Dom}(\cosh) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(\cosh) = [1, +\infty)$
- La función coseno hiperbólico es par.

3.8 Funciones hiperbólicas



3.8 Funciones hiperbólicas

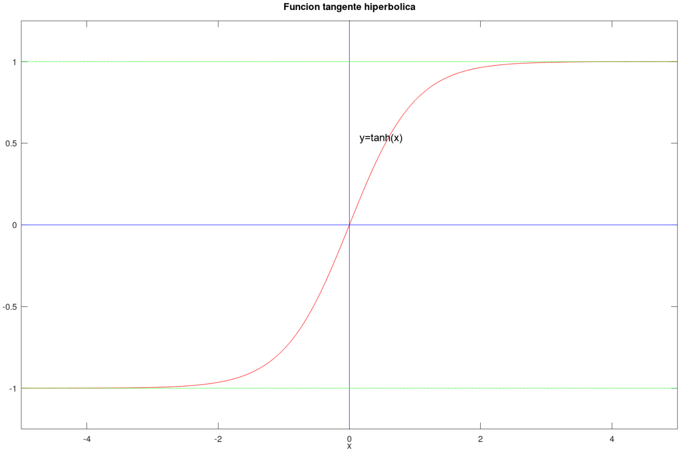
Definición

Se llama función tangente hiperbólica, y se denota tanh, *a la función real de variable real definida por*

$$\tanh(x) := \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- $\operatorname{Dom}(\tanh) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(\tanh) = (-1, 1)$
- La función tangente hiperbólica es impar.

3.8 Funciones hiperbólicas



3.8 Funciones hiperbólicas

Identidad fundamental

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición

Las funciones recíprocas de las funciones senh*,* cosh *y* tanh *se llaman, respectivamente, función cosecante hiperbólica, función secante hiperbólica y función cotangente hiperbólica:*

$$csch(x) := \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\,, \quad sech(x) := \frac{1}{\cosh(x)}\,, \quad \coth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$$

- **Ejercicio.** Determinar el dominio y la imagen de las funciones anteriores, y si tienen simetría par o impar.

4. Límites

4.1 Límite de una función en un punto

El concepto de límite de una función en un punto sirve para estudiar el comportamiento de la función en las proximidades del punto.

No importa lo que ocurre en el punto concreto donde se calcula el límite, donde la función incluso puede no estar definida.

4. Límite de una función en un punto

Definición

Se dice que $\ell \in \mathbb{R}$ *es límite de* f *en el punto* x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

En este caso, se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

4.1 Límite de una función en un punto

La definición de límite se puede expresar de forma equivalente de las siguientes maneras:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$$

o bien

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

Propiedad

El límite de una función en un punto, si existe, es único.

Propiedades (Propiedades aritméticas del límite)

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$.

Entonces,

1. $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \ell_1 \pm \ell_2$
2. $\lim_{x\to x_0} (f\,g)(x) = \ell_1\,\ell_2$
3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *si* $\ell_2 \neq 0$

4.2 Límites laterales

Definición

- *Se dice que el límite de* f *cuando* x *se acerca a* x_0 *por la derecha es* ℓ*, y se escribe* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ \textit{tal que} \ 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- *Se dice que el límite de* f *cuando* x *se acerca a* x_0 *por la izquierda es* ℓ*, y se escribe* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ \textit{tal que} \ 0 < x_0 - x < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

4.2 Límites laterales

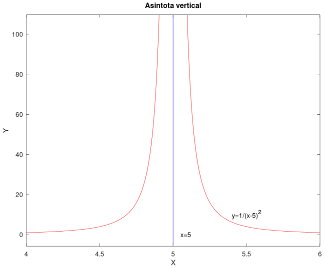
- También se puede escribir:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Propiedad

El límite de una función f en un punto x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, existe si y sólo si existen los límites laterales $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y son iguales.

4.3 Límites infinitos en un punto

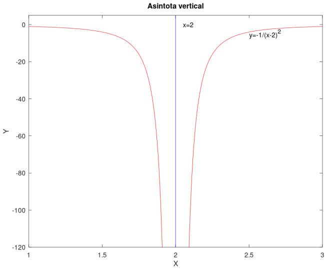


Definición

Se dice que el límite de una función f en el punto x_0 es $+\infty$, y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *si*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \ \textit{tal que} \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

4.3 Límites infinitos en un punto



Definición

Se dice que el límite de una función f en el punto x_0 es $-\infty$, y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \ \textit{tal que} \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < -M$$

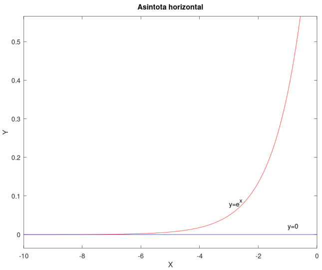
4.3 Límites infinitos en un punto

- **Ejercicio.** Escribir las definiciones de los límites laterales infinitos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

4.4 Límites en el infinito

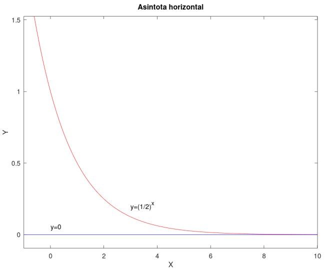


Definición

Se dice que el límite de una función f *cuando* x *tiende a* $-\infty$ *es* ℓ, *y se escribe* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M > 0 \ \textit{tal que} \ x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

4.4 Límites en el infinito



Definición

Se dice que el límite de una función f *cuando* x *tiende a* $+\infty$ *es* ℓ, *y se escribe* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M > 0 \ \textit{tal que} \ x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

4.5 Límites infinitos en el infinito

Definición

Se dice que el límite de una función f cuando x tiende a $+\infty$ es $+\infty$, y se escribe $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall\, M > 0\,, \quad \exists\, N > 0 \;\; \textit{tal que} \;\; x > N \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

4.5 Límites infinitos en el infinito

Definición

Se dice que el límite de una función f *cuando* x *tiende a* $+\infty$ *es* $-\infty$*, y se escribe* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*, si*

$$\forall\, M > 0\,, \quad \exists\, N > 0 \;\; \textit{tal que} \;\; x > N \;\Rightarrow\; f(x) < -M$$

4.5 Límites infinitos en el infinito

- **Ejercicio.** Escribir las definiciones de los límites siguientes:

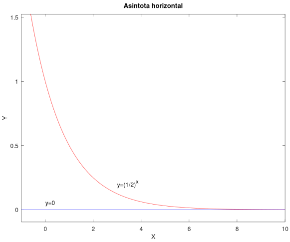
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

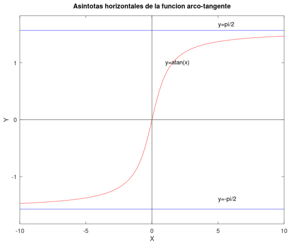
4.6 Asíntotas

Definición

Se dice que la recta $y = \ell$ *es una* ***asíntota horizontal*** *de la función* f *si*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad y/o \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



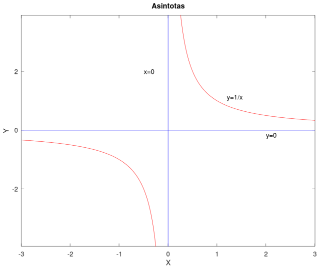


4.6 Asíntotas

Definición

Se dice que la recta $x = x_0$ *es una* ***asíntota vertical*** *de la función* f *si alguno de los límites laterales en* x_0 *es divergente:*

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

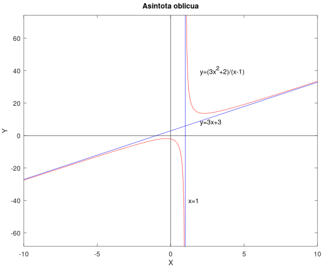


4.6 Asíntotas

Definición

La recta $y = mx + n$, $(m \neq 0)$ *es una asíntota oblicua de la función* f *si*

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0 \quad y/o \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$



4.6 Cálculo de las asíntotas de una función

- Si la función está definida en un entorno de $+\infty$, calculamos
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
Si este límite existe y es un número $\ell \in \mathbb{R}$, entonces la recta $y = \ell$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

  Si el límite no existe o vale $\pm\infty$, la función no tiene una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. En este caso, miramos a ver si la función tiene una asíntota oblicua: calculamos
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
Si $m \neq 0$ y $m \neq \infty$, entonces calculamos
$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$
La ecuación de la asíntota oblicua es: $y = mx + n$.

4.6 Cálculo de las asíntotas de una función

- Si la función está definida en un entorno de $-\infty$, repetimos los pasos anteriores sustituyendo $\lim\limits_{x \to +\infty}$ por $\lim\limits_{x \to -\infty}$
- Para determinar las asíntotas verticales, nos fijamos en aquéllos puntos x_0 en los que

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

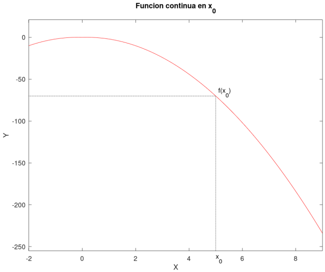
5. Continuidad

1. Continuidad en un punto
2. Tipos de discontinuidad
3. Propiedades de las funciones continuas
4. Continuidad en intervalos
5. Teorema de Bolzano
6. Método de bisección
7. Teorema de Weierstrass

5.1 Continuidad en un punto

Definición

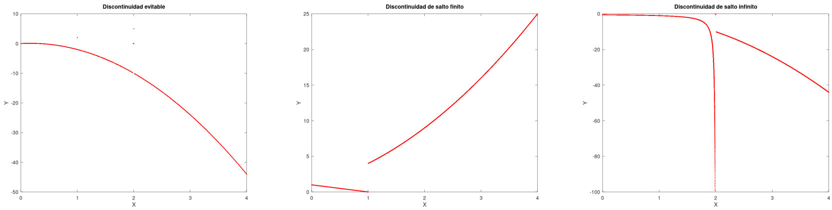
Una función f se dice continua *en un punto x_0 si $x_0 \in Dom(f)$ y* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



5.2 Tipos de discontinuidad

Definición

Si una función f no es continua en un punto x_0, se dice que f es discontinua en x_0.



5.2 Tipos de discontinuidad

- Discontinuidad evitable: f tiene una discontinuidad evitable en x_0 cuando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{pero } \ell \neq f(x_0)$$

- Discontinuidad esencial: f tiene una discontinuidad esencial en x_0 cuando no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

  Esto puede ser porque:
  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
  - o bien alguno de los límites laterales (o ambos) no existe

5.3 Propiedades de las funciones continuas

Propiedades

Sean f *y* g *dos funciones continuas en el punto* x_0*. Entonces:*

1. *La función* λf *es continua en* x_0, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $f \pm g$ *y* $f \cdot g$ *son continuas en* x_0
3. *Si* $g(x_0) \neq 0$*, entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* x_0

5.3 Propiedades de las funciones continuas

Propiedad

El límite conmuta con las funciones continuas, es decir, si f *y* g *son funciones tales que existe* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *y* g *es una función continua en* ℓ*, entonces*

$$g(\ell) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = \lim_{x \to x_0} g(f(x))$$

Propiedad

Si f *es continua en* x_0 *y* g *es continua en* $f(x_0)$*, entonces la función* $g \circ f$ *es continua en* x_0*.*

5.4 Continuidad en intervalos

Definición

Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es continua en (a, b) si f es continua en todos los puntos de (a, b).

Definición

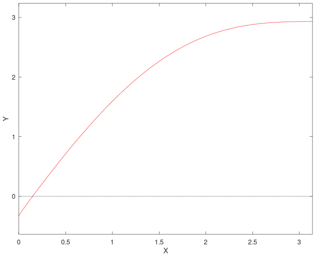
Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es continua en $[a, b]$ si se cumplen las condiciones siguientes:

1. *f es continua en (a, b)*
2. *f es continua en a por la derecha:* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. *f es continua en b por la izquierda:* $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

5.5 Teorema de Bolzano

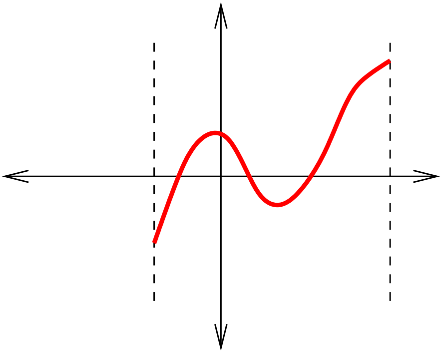
Teorema (Bolzano)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, continua en* $[a,b]$*. Si* $f(a)\,f(b) < 0$*, entonces existe al menos un punto* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*



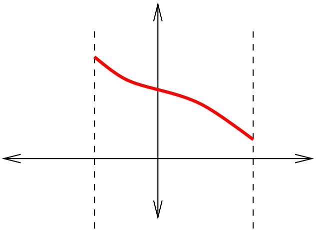
5.5 Teorema de Bolzano

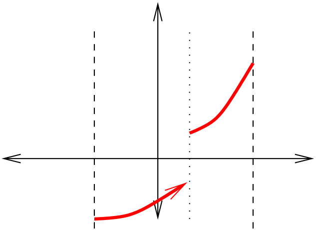
- Puede haber más de una raiz:



5.5 Teorema de Bolzano

- Si se suprime alguna de las hipótesis, el teorema no es cierto:





5.6 Método de bisección

Problema:
Dada una función f, encontrar una solución de la ecuación

$$f(x) = 0$$

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del Teorema de Bolzano, el problema tiene al menos una solución.

- ¿Cómo calcularla?

  Podemos emplear el método de bisección.

5.6 Método de bisección

El método de bisección:

1. Divide el intervalo dado a la mitad.
2. Toma el punto medio del intervalo como aproximación de la solución.
3. Si la aproximación no es satisfactoria, se repite el proceso con la mitad del intervalo en la que f presenta un cambio de signo.

5.6 Método de bisección

Algoritmo:

1. Inicializar $[a_1, b_1] = [a, b]$
2. Para $k = 1, 2, \ldots$

   (1) Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$

   (2) Si $f(x_k) = 0$, parar: x_k es una solución

   (3) Si $f(a_k)\,f(x_k) < 0$, actualizar $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$

   Si no, $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$

Nota

El proceso se repite hasta que x_k es una aproximación satisfactoria de una solución o hasta que se alcanza un máximo de iteraciones.

5.6 Método de bisección

- Se verifica que

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$$

donde α es una solución.

- Por tanto, tenemos la **acotación del error** siguiente:

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^k}$$

- Como consecuencia, el algoritmo converge a una solución:

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha$$

5.6 Método de bisección

- De la **acotación del error**:

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

  se puede deducir el número máximo de iteraciones necesarias para aproximar una solución con una tolerancia dada ε.

- En efecto, para que

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon$$

  es suficiente que

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

5.6 Método de bisección

- Entonces:

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^k \Rightarrow \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < k$$

- El menor $k \in \mathbb{N}$ que satisface la desigualdad anterior es el número máximo de iteraciones a realizar para que el error sea inferior a ε.

5.7 Teorema de Weierstrass

Teorema (Weierstrass)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$*, entonces* f *alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo* $[a,b]$*, es decir, existen* $x_m, x_M \in [a,b]$ *tales que:*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\,, \quad \forall x \in [a,b]$$