T1.Teoría de Conjuntos

1. Conjuntos

Diremos que un conjunto es una **colección bien definida de objetos**, llamados elementos del conjunto. Para que un conjunto esté bien definido **debe ser posible determinar si un objeto particular está o no en él.** En un conjunto no se repiten los elementos ni tampoco influye el orden en que aparecen

Se dice que un elemento α pertenece a *A*, y se denota $\boldsymbol{\alpha \in A}$, si α es un elemento del conjunto A. En caso contrario, $\boldsymbol{\alpha \notin A}$.

Dos conjuntos *A y B* son iguales si ambos tienen los mismos elementos:

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

El c**onjunto vacío** es aquel que no tiene elementos, se denota por $\varnothing$ o por { }.

Un conjunto se dice **unitario** si contiene un único elemento, como, por ejemplo, {1}, {Z}, {a}.

$$a \in \{a\}, \text{ pero } a \neq \{a\}$$

Un conjunto *A* se dice **finito** si tiene un número ***n* (n $\in$ N) de elementos**; este número se llama **cardinal de *A*** y se denota o bien por |A| o por #A. En caso contrario, se dice que *A* es **no finito**.

1.1 Subconjuntos

Se dice que A es un subconjunto de B, y se denota por $\mathbf{A \subseteq B}$, si todo elemento de A pertenece a B.

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

• Cuando A no está contenido en B, se escribirá $A \nsubseteq B$.

$$A \nsubseteq B \Longleftrightarrow \exists\ a\ (a \in A \text{ y } a \notin B)\ ).$$

• Cualquier conjunto B, admite como subconjuntos al conjunto vacío $\varnothing$ y al propio conjunto B. Estos se denominan **subconjuntos triviales**.

• Si $\mathbf{A \subseteq B}$ **y** $\mathbf{A \neq B}$, se dice que A está **contenido estrictamente** en B: $A \subset B$

Dado un conjunto A, el conjunto **partes de *A*** es el conjunto formado por **todos los subconjuntos de *A*** y se denota por *P(A)*

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\} \text{ es decir } X \in P(A) \Longleftrightarrow X \subseteq A$$

Si *A* es finito y tiene cardinal *n*, entonces P(A) es finito y tiene cardinal **|P(A)| = 2^n**. Además, e verifica que $\varnothing$ y *A* son elementos de *P(A)*.

1.2 Operaciones con conjuntos

Complementario

Sea A subconjunto de *U*, *A* $\subseteq$ *U*, se llama **complementario** (respecto a U) de *A*, y se denota por $\overline{A}$, al **subconjunto de *U*** formado por todos los **elementos que no pertenecen a *A***, es decir:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Propiedades 1. Sean A, B $\subseteq$ U. Se verifica:

1) $\overline{\varnothing} = U$

2) $\overline{U} = \varnothing$

3) $\overline{\overline{A}} = A$

4) $A \subseteq B \Longleftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Unión

Unión de *A* y *B*, y se representa por A $\cup$ B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a *A* **o** a *B* (o a ambos):

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Intersección

Intersección de *A y B*, y se representa por A $\cap$ B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a *A* **y** a *B*:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Propiedades:

1) Leyes de identidad: $A \cup \varnothing = A$ y $A \cap U = A$.

2) Leyes de complementario: $A \cup \overline{A} = U$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

3) Leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.

4) Leyes asociativas: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

5) Leyes distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6) Leyes de idempotencia: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$.

7) Leyes de acotación: $A \cup U = U$ y $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8) Leyes de absorción: $A \cup (A \cap B) = A$ y $A \cap (A \cup B) = A$.

9) Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

10) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$.

11) $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$.

12) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C \Longleftrightarrow (A \cup B) \subseteq C$.

13) $C \subseteq A$ y $C \subseteq B \Longleftrightarrow C \subseteq (A \cap B)$.

14) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

Unión y de intersección para una colección finita *A1, A2, . . . , An* de subconjuntos de *U*:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U | x \in \text{al menos a un } A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U | x \in \text{todos } A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Dos conjuntos que no tienen ningún elemento en común se dice que son disjuntos: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$

Si los conjuntos *A1, A2, . . . , An* son **finitos y <u>disjuntos</u> dos a dos** (es decir, $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_j} = \varnothing$**)** para cualesquiera i, j con $\mathbf{i \neq j}$), entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

En general, para dos conjuntos finitos *A y B*, se verifica:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Diferencia

Se llama **diferencia** entre *A y B*, y se representa por **A\B** o por A − B, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Partición

Una partición de un conjunto *A* es una colección *{A1, A2, . . . , An}* de subconjuntos no vacíos de A que verifica las dos propiedades siguientes:

1) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ | *El conjunto inicial es la unión de todas las particiones*

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. | *No se repiten elementos entre particiones*

1.3 Producto cartesiano

Se llama producto cartesiano *A* por *B*, y se denota por $A \times B$, al conjunto de los pares ordenados en los que el primer elemento pertenece a A y el segundo a *B.* Esto es:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Dados los conjuntos *A1, A2, . . . , An*, se define su producto cartesiano:

$$A1 \times A2 \times \cdots \times An = \{(a1, a2, \ldots, an) \mid ai \in Ai \text{ , para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

1.4 Aplicaciones

Una aplicación *f de A en B* es una regla que asocia **a cada elemento a de A un único elemento de *B***, que se denomina **imagen de a mediante f** , y se denota *f(a)*. Se dice que *A* es el conjunto inicial y *B* el conjunto final.

$$f : A \to B$$

$$a \rightsquigarrow f(a)$$

Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es:

- **Inyectiva** si elementos distintos de *A* tienen imágenes diferentes en *B*. Así, *f* no es inyectiva si existen elementos distintos de A con la misma imagen.

$$\forall\ a1, a2 \in A, \text{ si } a1 \neq a2 \text{ entonces } f(a1) \neq f(a2).$$

- **Sobreyectiva** si todo elemento de *B* es imagen de, al menos, un elemento de *A*, es decir:

$$\forall\ b \in B \text{ existe } a \in A \text{ tal que } b = f(a) .$$

Equivalentemente,

$$\mathrm{Im}(f) = B$$

- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva**.**

1.4.1 Imágenes

Sea $f : A \to B$ una aplicación y sean A1 $\subseteq$ A y B1 $\subseteq$ B.

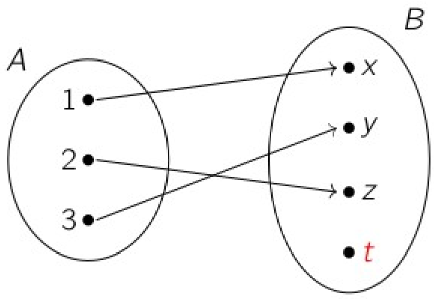
Se definen: el **conjunto imagen** (directa), por *f* , del conjunto *A1* como

$$f_* (A1) = \{f (a) \mid a \in A1\} \subseteq B$$

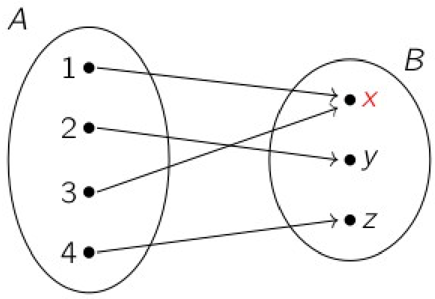
Y el **conjunto imagen recíproca**, por *f* , del conjunto *B1* como

$$f^* (B1) = \{a \in A \mid f (a) \in B1\} \subseteq A$$

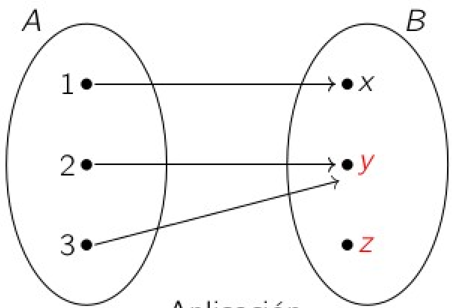
Para *A1* = *A*, el conjunto $\mathbf{f_* (A) = Im(f)}$ se llama conjunto imagen de f .



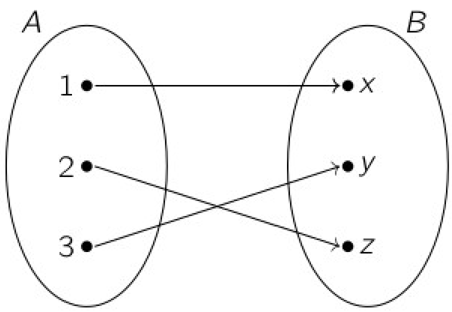
Aplicación inyectiva,
pero no sobreyectiva
($t \notin Im(f)$)



Aplicación sobreyectiva
pero no inyectiva
($f(1) = f(3)$)



Aplicación
no inyectiva y no sobreyectiva



Aplicación biyectiva

Si los conjuntos A y B son finitos y f : A → B es una aplicación, se verifica que:

• Si f es **inyectiva** entonces **|A|** ≤ **|B|**

si |A| > |B|, entonces f no es inyectiva

• Si f es **sobreyectiva,** entonces **|A|** ≥ **|B|**

si |A| < |B|, entonces f no es sobreyectiva

• Si f es **biyectiva** entonces **|A| = |B|**

si |A| ≠ |B|, entonces f no es biyectiva

1.4.3 Composición de Aplicaciones

Dados tres conjuntos A, B y C, y dos aplicaciones f y g tales que

$$f : A \longrightarrow B \qquad\qquad g : B \longrightarrow C$$

$$a \rightsquigarrow f(a) = b \qquad\qquad b \rightsquigarrow g(b) = c$$

Se llama composición de f con g a la aplicación:

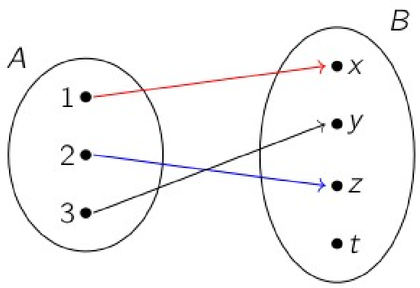
$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$a \rightsquigarrow (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

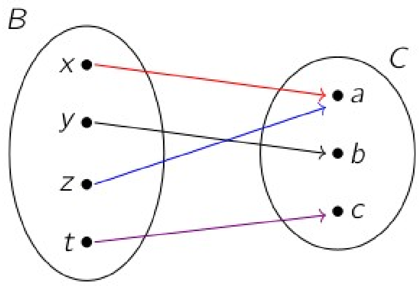
Es decir:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ a \arrow[r] & f(a) \arrow[r] & g(f(a)) = (g \circ f)(a) \end{tikzcd}$$

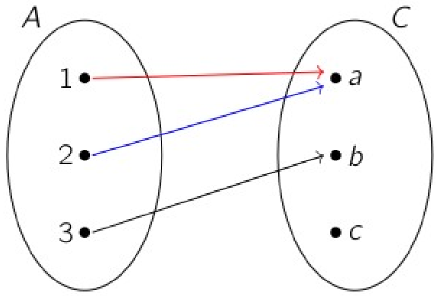
Ejemplo:



$f : A \longrightarrow B$



$g : B \longrightarrow C$



$g \circ f : A \longrightarrow C$

La composición de aplicaciones no cumple la propiedad **conmutativa:**

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Sin embargo, si cumple la propiedad **asociativa**:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Si *f y g* son inyectivas, también g ∘ f es inyectiva.
- Si *f y g* son sobreyectivas, también g ∘ f es sobreyectiva.
- Si *f y g* son biyectivas, también g ∘ f es biyectiva.

• Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces k es inyectiva3

• Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Para cada conjunto A, se llama aplicación **identidad** de *A* a la aplicación

$$IA : A \to A$$

$$a \rightsquigarrow IA\ (a) = a$$

Dada cualquier aplicación $f : A \to B$ se verifica que

$$f \circ IA = f = IB \circ f$$

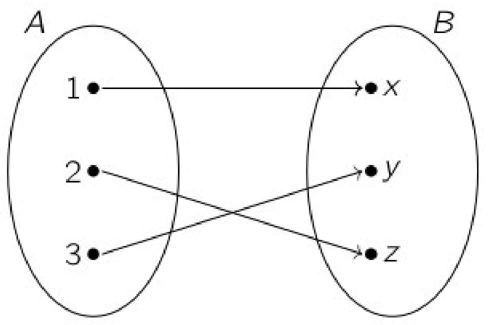
1.4.4 Aplicación Inversa

Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se llama **aplicación inversa de f** , y se denota por f^{-1} , a una aplicación $f^{-1} : B \to A$ tal que, **si b es un elemento de B**:

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$$

Dada una aplicación $f : A \to B$, f admite inversa si, y solo si, f es **biyectiva**.

La inversa de $f : A \to B$



$f^{-1} : B \to A$ está definida por:

$f^{-1}(x) = 1$ (pues $f(1) = x$),

$f^{-1}(y) = 3$ (porque $f(3) = y$),

$f^{-1}(z) = 2$ (ya que $f(2) = z$).

Además, si f tiene inversa entonces se cumple:

• Su inversa f^{-1} es la única aplicación que verifica $f \circ f^{-1} = IB$ y $f^{-1} \circ f = IA$,

• f^{-1} también tiene inversa y $(f^{-1})^{-1} = f$,

• si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos aplicaciones invertibles (es decir, tienen inversa), entonces $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.