Tema 1

Introducción a la teoría de conjuntos

UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Área de Álgebra

Estas notas son, únicamente, parte del material de trabajo de los profesores de esta asignatura. Recomendamos consultar los siguientes libros:

- F. Aguado, F. Gago, M. Ladra, G. Vega, C. Vidal, A. Vieites. *Problemas Resueltos de Combinatoria. Laboratorio con SageMath*. Paraninfo 2018: Capítulo 1.
- K.H. Rosen, *Matemática Discreta y sus aplicaciones*: Capítulo 1 (sec. 1.6, 1.7, 1.8).
- S.S. Epp, *Matemáticas Discretas con aplicaciones*: Capítulos 1 (sec. 2 y 3), 6 y 7.

1.1 Noción intuitiva de conjunto

Consideraremos como punto de partida la noción intuitiva de *conjunto*. La teoría de conjuntos nos proporcionará el lenguaje adecuado para el estudio de los temas que constituyen esta asignatura y para la modelización de problemas. Esa noción intuitiva fue dada, en la segunda mitad del siglo XIX, por el matemático Georg Cantor (1845-1918), que es considerado como el fundador de la teoría de conjuntos. Después de que esta teoría fuese aceptada como una rama de las matemáticas, aparecieron contradicciones o paradojas. Para eliminar tales paradojas, a principios del siglo XX se desarrollaron aproximaciones más complejas. En este curso, seguiremos la versión original de Cantor, ya que los conjuntos que utilizaremos se pueden tratar consistentemente con ella.

Diremos que un **conjunto** *es una colección bien definida de objetos, llamados* **elementos** *del conjunto. Para que un conjunto esté bien definido debe ser posible determinar si un objeto particular está o no en él.*

Por ello, no es correcto hablar del conjunto formado por *"Las diez mejores jugadoras españolas de fútbol de todos los tiempos"*, ya que no estaría bien definido, porque el término *"mejor"* es subjetivo.

> Dado un conjunto A, se dice que un elemento α **pertenece** a A, y se denota $\alpha \in A$, si α es un elemento del conjunto A. En caso contrario, se dice que α no pertenece al conjunto y se denota $\alpha \notin A$.

Dado un objeto α y un conjunto A, se cumple que $\alpha \in A$ o que $\alpha \notin A$, pero no ambas a la vez.

Ejemplos de conjuntos de números usados en matemáticas son $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales; $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros; $\mathbb{Q}$, el conjunto de los racionales; $\mathbb{R}$, el conjunto de los reales; y $\mathbb{C}$, el conjunto de los complejos.

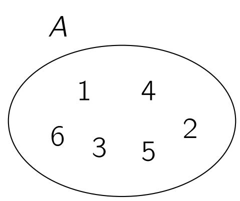
Los conjuntos pueden representarse delimitando entre llaves "{" y "}" bien sus elementos, bien la propiedad que los determina. Por ejemplo,

$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \quad \text{y} \quad \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es no negativo par menor que } 10\}$$

representan el mismo conjunto. Cuando el conjunto es "muy grande" se pueden utilizar los puntos suspensivos para evitar escribir todos sus elementos; por ejemplo, $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ representa el conjunto de los enteros del 1 al 1000.

Ejemplo 1.

i) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$2 \in A$,
$6 \in A$,
$13 \notin A$,
$casa \notin A$

A representado por un diagrama de Venn

ii) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 16\} = \{0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4\}$;

iii) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \textit{ divide a } 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Puesto que un conjunto está totalmente determinado por sus elementos, dos conjuntos A y B son **iguales** si ambos tienen los mismos elementos. Es decir, cuando para cualquier elemento x, se tiene que $x \in A$ si, y sólo si, $x \in B$. Esto se escribe,

$$A = B \iff \forall x \left(x \in A \iff x \in B\right)$$

De esta forma, $A \neq B$ si bien existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, o bien existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.

Nota: Es importante no confundir conjuntos con *listas*. Las listas se representan utilizando corchetes "[" y "]" y, mientras que **en un conjunto no se repiten los elementos ni tampoco influye el orden en que aparecen**, en las listas sí importa tanto el lugar que ocupa un elemento como el número de veces que aparece cada elemento. Así $\{1, 3, 5\} = \{3, 1, 5\} = \{5, 1, 3\}$, pero $[1, 3, 5] \neq [1, 5, 3]$ y $[1, 3, 5] \neq [1, 1, 3, 5] \neq [1, 3, 1, 5] \neq [3, 3, 1, 5]$

El **conjunto vacío** es aquel que no tiene elementos, se denota por $\emptyset$ o por $\{\ \}$.

Un conjunto se dice *unitario* si contiene un único elemento, como, por ejemplo, $\{1\}$, $\{\mathbb{Z}\}$, $\{a\}$.
Es importante diferenciar un elemento a del conjunto unitario $\{a\}$: $\boxed{a \in \{a\}, \text{ pero } a \neq \{a\}}$

Un conjunto A se dice **finito** si tiene un número n ($n \in \mathbb{N}$) de elementos; este número se llama **cardinal** de A y se denota o bien por $|A|$ o bien por $\#A$. En caso contrario, se dice que A es no finito.

Ejemplo 2.

i) Son conjuntos finitos:

- $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\} = \emptyset, \quad |X| = 0;$
- $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \quad |Y| = 2;$
- $A = \{1, 2, a, c\}$, $|A| = 4$;
- $B = \{\emptyset, \{a, b\}\}$[1], $|B| = 2$;
- $B' = \{\emptyset\}$[2], $|B'| = 1$;
- $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{3, 2\}\}$, $|C| = 3$;
- $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid -5 < 3n \leq 15\}$, *el conjunto formado por los números* **enteros** *cuyo triple es mayor que -5 y menor o igual que 15, es* $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *y su cardinal es* $|D| = 7$.

ii) Son conjuntos no finitos:

- *el conjunto formado por los números* **reales** *cuyo triple es mayor que -5 y menor o igual que 15,* $D' = \{n \in \mathbb{R} \mid -5 < 3n \leq 15\}$, *que es el intervalo* $\left(\frac{-5}{3}, 5\right]$. *Nótese la diferencia con el conjunto D del apartado anterior;*
- *el conjunto formado por los números naturales pares,* $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$;
- *el conjunto de los enteros cuyo doble es menor que 100,* $\{n \in \mathbb{Z} \mid 2n < 100\}$.

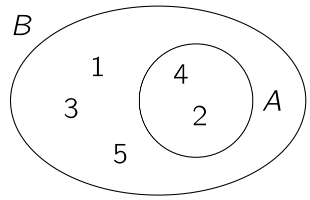
1.2 Subconjuntos

Definición 1. *sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es un* **subconjunto** *de B, y se denota por* $A \subseteq B$, *si todo elemento de A pertenece a B.*
Esto se escribe: $A \subseteq B \iff \forall x \left(x \in A \Longrightarrow x \in B\right)$.

[1]Los conjuntos son objetos y pueden ser elementos de otros conjuntos. Es este ejemplo, podemos considerar que B es una "caja" con dos "paquetes", uno de ellos vacío, $\emptyset$, y el otro, $\{a, b\}$, con los objetos a y b.

[2]Es este ejemplo, podemos interpretar que B' es una "caja" con un "paquete" vacío, por lo que B' ya no es el conjunto vacío; contiene algo: un paquete.
Sin embargo, como muestra la paradoja de Russell, no es posible que un conjunto pertenezca a sí mismo.

Asimismo, se dice que A está *incluido* o *contenido* en B, o que B contiene a A.



Inclusión de conjuntos representado por diagramas de Venn: $A = \{2,4\} \subseteq B = \{1,2,3,4,5\}$

- Cuando A *no está contenido* en B, se escribirá $A \nsubseteq B$. Equivale a que existe, al menos, un elemento $a \in A$ tal que $a \notin B$ ($A \nsubseteq B \iff \exists a\ (a \in A \text{ y } a \notin B)$).
- Cualquier conjunto B, admite como subconjuntos al conjunto vacío $\emptyset$ y al propio conjunto B. Estos se denominan *subconjuntos triviales*. En otro caso se habla de **subconjunto propio** de B; es decir, A es subconjunto propio de B si $A \subseteq B$, pero $A \neq \emptyset$ y $A \neq B$.
- Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se dice que A está contenido estrictamente en B y se denota $A \subset B$.
- $A = B \iff [A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A]$.

Ejemplo 3.

i) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

ii) $\emptyset \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$;

iii) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$, *pues* $a, b \in \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$;

iv) $\{a,\{b\}\} \nsubseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$, *porque* $\{b\} \notin \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$;

v) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

vi) $\{a,b,c\} \in \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$, *puesto que* $\{a,b,c\}$ *es un elemento de* $\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$;

vii) $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$, *ya que* $a, b, c \in \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$.

Definición 2. *Dado un conjunto A, el* **conjunto partes de** *A es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A y se denota por $\mathcal{P}(A)$.*

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Es decir, para dos conjuntos cualesquiera A y X, $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$

Para cualquier conjunto A, se verifica que $\emptyset$ y A son elementos de $\mathcal{P}(A)$: $\boxed{\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)}$
Si A es finito y tiene cardinal n, entonces $\mathcal{P}(A)$ es finito y tiene cardinal $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
$\mathcal{P}(A)$ también se llama **conjunto potencia** de A y suele denotarse por 2^A.

Ejemplo 4.

i) $\{2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, *pues* $\{2\} \subseteq \mathbb{Z}$;

ii) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *(el único subconjunto de* $\emptyset$ *es* $\emptyset$*);*

iii) Si $X = \{a, b\}$*, entonces* $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$*. En este caso,* $|X| = 2$ *y* $|\mathcal{P}(X)| = 2^2$*;*

iv) El conjunto $A = \{a, b, c\}$ *es finito,* $|A| = 3$*, y también* $\mathcal{P}(A)$ *es finito, siendo* $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$*. De hecho,* $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$*.*

v) Para $Y = \{\emptyset, 1, \{1, 2\}\}$*,* $\mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, Y\}$*.*

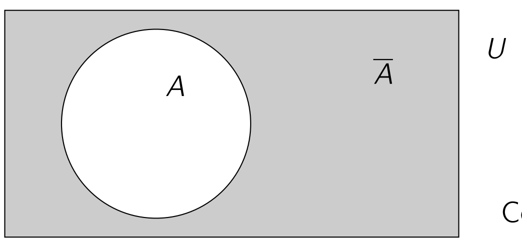
Cuando, en un contexto determinado, consideremos varios conjuntos, estos se considerarán subconjuntos de uno dado U. Dicho conjunto de referencia U se denomina **conjunto universal** o **universo**.

1.3 Operaciones con conjuntos. Propiedades

Sea U un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{P}(U)$ el conjunto de los subconjuntos de U. Definiremos tres operaciones sobre los elementos de $\mathcal{P}(U)$. Las propiedades que verifican estas operaciones determinan en $\mathcal{P}(U)$ una estructura de Álgebra de Boole (estructura que estudiaremos en el último tema de esta asignatura).

Definición 3. *Sea* A *subconjunto de* U*,* $A \subseteq U$*, se llama* **complementario** *(respecto a* U*) de* A*, y se denota por* $\overline{A}$*, al subconjunto de* U *formado por todos los elementos que no pertenecen a* A*, es decir:*

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$



Complementario de A respecto a U.

Propiedades 1. *Sean* $A, B \subseteq U$*. Se verifica:*

i) $\overline{\emptyset} = U$ *ii)* $\overline{U} = \emptyset$ *iii)* $\overline{\overline{A}} = A$ *iv)* $A \subseteq B \Longleftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

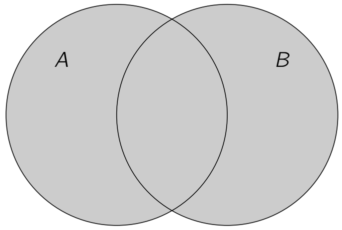
Definición 4. *Sean* A *y* B *subconjuntos de* U*, se llama:*

- **unión** *de* A *y* B*, y se representa por* $A \cup B$*, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a* A *o a* B *(o a ambos):*

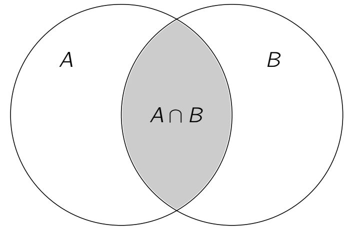
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \;\text{ o }\; x \in B\},$$

- **intersección** *de* A *y* B*, y se representa por* $A \cap B$*, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a* A *y a* B*:*

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \;\text{ y }\; x \in B\}.$$



Unión de conjuntos: $A \cup B$



Intersección de conjuntos: $A \cap B$

Dos conjuntos que no tienen ningún elemento en común se dice que son **disjuntos**, es decir:

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo 5.

i) Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, s\}$, $A \cup B = \{a, b, c, s\}$ y $A \cap B = \{b\}$.

ii) Si $A = \{a, x\}$ y $B = \{b, x\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, x\}$ y $A \cap B = \{x\}$.

iii) Si $A = \{a, y\}$ y $B = \{b, x\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, x, y\}$ y $A \cap B = \emptyset$.

iv) Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, m\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, m\} = B$ y $A \cap B = \{a, b, c\} = A$, (nótese que $A \subseteq B$).

v) Si $A = \{x, y\}$ y $B = \{x, \{y\}, \{x, z\}\}$, entonces $A \cup B = \{x, y, \{y\}, \{x, z\}\}$ y $A \cap B = \{x\}$.

vi) Si $A = \{z, \{y\}\}$ y $B = \{x, \{y\}, \{x, z\}\}$, $A \cup B = \{x, z, \{y\}, \{x, z\}\}$ y $A \cap B = \{\{y\}\}$.

Propiedades 2. *Para cualesquiera A, B y C, subconjuntos de U, se verifica:*

i) *Leyes de identidad:* $A \cup \emptyset = A \quad y \quad A \cap U = A$.

ii) *Leyes de complementario:* $A \cup \overline{A} = U \quad y \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$.

iii) *Leyes conmutativas:* $A \cup B = B \cup A \quad y \quad A \cap B = B \cap A$.

iv) *Leyes asociativas:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad y \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

v) *Leyes distributivas:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad y \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Propiedades 3. *Para cualesquiera A, B y C, subconjuntos de U, se verifica:*

i) *Leyes de idempotencia:* $A \cup A = A \quad y \quad A \cap A = A$.

ii) *Leyes de acotación:* $A \cup U = U \quad y \quad A \cap \emptyset = \emptyset$.

iii) *Leyes de absorción:* $A \cup (A \cap B) = A \quad y \quad A \cap (A \cup B) = A$.

iv) *Leyes de De Morgan:* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad y \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ejercicio 1. *Sean $A, B \subseteq U$. Demuestra que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.*

Otras propiedades. Para cualesquiera $A, B, C \subseteq U$, se verifica:

i) $A \subseteq (A \cup B)$, $\quad B \subseteq (A \cup B)$.

ii) $(A \cap B) \subseteq A$, $\quad (A \cap B) \subseteq B$.

iii) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C \Longleftrightarrow (A \cup B) \subseteq C$.

iv) $C \subseteq A$ y $C \subseteq B \Longleftrightarrow C \subseteq (A \cap B)$.

v) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

Definición 5. *Se extiende la definición de unión y de intersección para una colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjuntos de U:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \text{ pertenece al menos a un conjunto } A_i, \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n\};$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \text{ pertenece a todos los conjuntos } A_i, \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son finitos y disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualesquiera i, j con $i \neq j$), entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Esta propiedad es una de las técnicas básicas de conteo, se denomina Principio de la Adición y se estudiará en el tema 3. Sin embargo, esta igualdad no se cumple cuando los conjuntos no son disjuntos dos a dos. En general, para dos conjuntos finitos A y B, se verifica $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. El Principio de inclusión-exclusión es una generalización de esta fórmula y también se verá en el tema 3.

Se verifica que: $\overline{\cup_{i=1}^{n} A_i} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ y $\overline{\cap_{i=1}^{n} A_i} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Ejemplo 6. *Sea $U = \{n \in \mathbb{Z} \mid 10 \leq n \leq 30\}$. Consideremos los siguientes subconjuntos de U:*

$A_1 = \{n \in U \mid n \text{ es múltiplo de } 5\}$, $A_2 = \{n \in U \mid n \text{ es múltiplo de } 2\}$, $A_3 = \{n \in U \mid n \text{ no es múltiplo de } 3\}$;

se verifica que:

$14 \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$ (*pues* $14 \in A_2$, *aunque* $14 \notin A_1$);
$30 \notin A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (*pues* $30 \notin A_3$, *aunque* $30 \in A_1 \cap A_2$);
$18 \in \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}$ (*pues* $18 \notin A_1$, $18 \in A_2$, $18 \notin A_3$);
$30 \in A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$ (*pues* $30 \in A_1$, $30 \in A_2$, $30 \notin A_3$).

De hecho,

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{n \in U \mid n \text{ múltiplo de 5 o de 2 o no múltiplo de 3}\} = \{n \in U \mid n \neq 21, n \neq 27\}$;

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{n \in U \mid n \text{ es múltiplo de 5 y de 2 y no múltiplo de 3}\} = \{10, 20\}$;

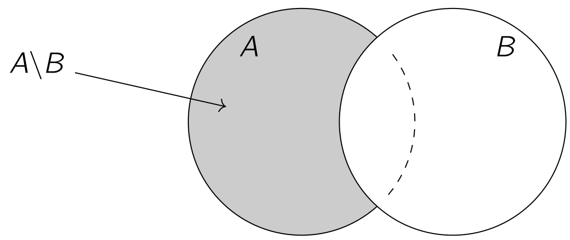
$\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} = \{n \in U \mid n \text{ no es múltiplo de 5, pero sí de 2 y de 3}\} = \{12, 18, 24\}$;

$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} = \{n \in U \mid n \text{ es múltiplo de 5 y de 2 y de 3}\} = \{n \in U \mid n \text{ es múltiplo 30}\} = \{30\}$.

Además de las operaciones anteriores, que dan estructura de álgebra de Boole a $\mathcal{P}(U)$, se pueden definir otras como, por ejemplo, la *diferencia* de conjuntos:

Definición 6. *Dados dos conjuntos A y B se llama* **diferencia** *entre A y B, y se representa por $A \backslash B$ o por $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B:*

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$



Diferencia de conjuntos $A \backslash B$

Observemos que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$. Además, se verifica que:

$$A \backslash B = A \Longleftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow B \subseteq \overline{A} \Longleftrightarrow B \backslash A = B$$

Ejemplo 7.

i) *Para $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, s\}$, $A \backslash B = \{a, c\}$.*

ii) *Si $A = \{a, y\}$, $B = \{b, x\}$, $A \backslash B = A = \{a, y\}$ (obsérvese que $A \cap B = \emptyset$).*

iii) *Si $A = \{x, y\}$ y $B = \{x, \{y\}, \{x, z\}\}$, $A \backslash B = \{y\}$ y $B \setminus A = \{\{y\}, \{x, z\}\}$.*

Ejercicio 2. *Sean A, B y C subconjuntos de U. Demuestra que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.*

Ejercicio 3. *Dados los conjuntos $Y = \{\emptyset, 1, \{1\}, \{2\}\}$ y $A = \{\{\emptyset\}, \{1\}, 2, \{2\}\}$, razona si es verdadera o falsa de cada una de las afirmaciones siguientes:*

i) $Y \cap \mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

ii) $\{1, \{1\}\} \in \mathcal{P}(Y) \setminus A$

iii) $\{\emptyset, \{1\}\} \subseteq Y \cap \mathcal{P}(A)$

Definición 7. *Una* **partición** *de un conjunto A es una colección $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos no vacíos de A que verifica las dos propiedades siguientes:*

i) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para todo* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Ejemplo 8.

i) *Una partición de* $B = \{a, b, c, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ *es* $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *donde:*

$$A_1 = \{a, 2, 8\}, \qquad A_2 = \{b, c\}, \qquad A_3 = \{3, 4, 6\}, \qquad A_4 = \{7\}.$$

ii) *Una partición de* $\mathbb{Z}$ *es* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *con* $A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$ *y* $A_3 = \{0\}$.

iii) *Otra partición de* $\mathbb{Z}$ *es* $\{A_1, A_2\}$ *donde* $A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es par}\}$ *y* $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es impar}\}$.

iv) *La familia* $\{A_1, A_2\}$ *con* $A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$ *y* $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ *no es una partición de* $\mathbb{Z}$ *pues, aunque* $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Z}$, $A_1 \cap A_2 = \{0\} \neq \emptyset$.

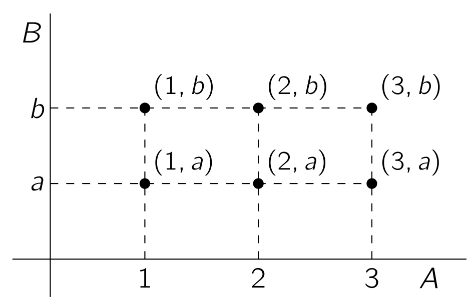
1.4 Producto cartesiano de conjuntos

Definición 8. *Dados dos conjuntos A y B, se llama* **producto cartesiano** *A por B, y se denota por $A \times B$, al conjunto de los* pares ordenados *en los que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B. Esto es:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \;\text{ y }\; b \in B\}$$

Ejemplo 9. *El producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ es el conjunto:*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$



Representación gráfica de $A \times B$

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d), elementos del producto cartesiano $A \times B$, son iguales si $a = c$ y $b = d$. Es claro que, en general, $A \times B \neq B \times A$.

Se puede extender la definición de producto cartesiano a n conjuntos.

Definición 9. *Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se define su producto cartesiano*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

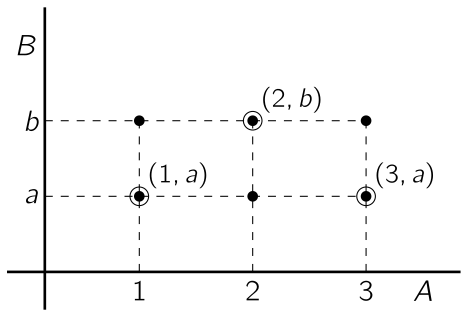


Figura 1.1: $\mathcal{R} \subset A \times B$

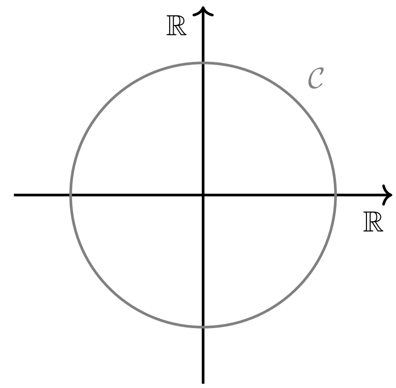


Figura 1.2: $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, también lo es $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y su cardinal es:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Cuando $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, suele usarse la notación $A^n = A \times A \times \cdots \times A$.

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una **relación** $\mathcal{R}$ sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$, es decir,

$$\mathcal{R} \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$$

El concepto de relación está presente en distintas situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, existe una relación entre el nombre de un alumno, la titulación en la que está matriculado y la nota media de dicho alumno. También existe una relación entre una línea aérea, el número de vuelo, el punto de partida, el destino, la hora de salida y la hora de llegada de un vuelo. Estas relaciones involucran elementos de varios conjuntos y se utilizan para representar bases de datos.

En el caso $n = 2$, dados dos conjuntos A y B, una **relación binaria** de A en B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Si el par ordenado (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, se dice que a está **relacionado** con b, y se denota por $a\mathcal{R}b$ (es decir, $a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}$). Dado un conjunto A, se llama **relación binaria** en A a cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Ejemplo 10.

i) *Para los conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{a, b\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, b), (3, a)\} \subseteq A \times B$ *es una relación binaria de* A *en* B. *En la Figura 1.1 se muestran mediante puntos los elementos de* $A \times B$, *y mediante círculos los de* $\mathcal{R}$.

ii) *Un ejemplo de relación en* $A = \mathbb{R}$ *es* $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, *siendo* r *un número real positivo. En la Figura 1.2 se representa el conjunto* $\mathbb{R}$ *en cada eje cartesiano y el plano está dado por el producto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. *Los elementos de la relación* $\mathcal{C}$ *son los puntos del plano que verifican la ecuación que la caracteriza, que son los puntos de la circunferencia de radio* r *y centro* $(0, 0)$.

iii) *Si A es un conjunto de ciudades con aeropuerto. Un ejemplo de relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ puede ser el conjunto formado por los pares $(C, C') \in A \times A$ tales que existe un vuelo directo de la ciudad C a la ciudad C'. Es decir, $(C, C') \in \mathcal{R}$ si, y sólo si, existe un vuelo directo de C a C'.*

1.5 Aplicaciones. Tipos de aplicaciones

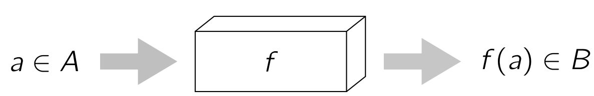
El concepto de aplicación (función) es de gran importancia en ciencias de la computación y en *Inteligencia Artificial* (un ejemplo de ello son las funciones de activación). Una aplicación es el modo más natural de implementar la correspondencia entre los datos de entrada y el resultado de un proceso. Los llamados *lenguajes funcionales* se fundamentan en este concepto y suelen identificar programa y función.

Definición 10. *Sean A y B conjuntos no vacíos. Una* **aplicación** *f de A en B es una regla que asocia a* **cada** *elemento a de A un* **único** *elemento de B, que se denomina* imagen *de a mediante f, y se denota $f(a)$.*

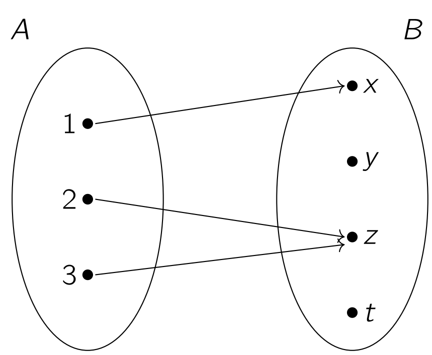
Se dice que A es el *conjunto inicial* y B el *conjunto final*. La relación entre a y su *imagen*, $f(a)$, se suele representar de la forma:

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \longrightarrow & B \\ a & \rightsquigarrow & f(a) \end{array}$$

Es útil pensar que una aplicación f es como una máquina (o como una red de neuronas), que procesa, de cierta manera, una entrada a y produce la salida $f(a)$.

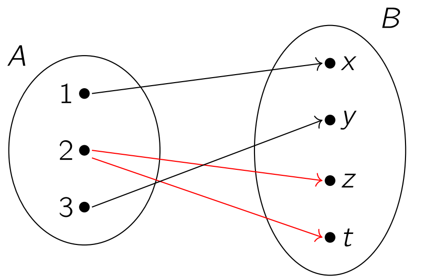


Ejemplo 11.

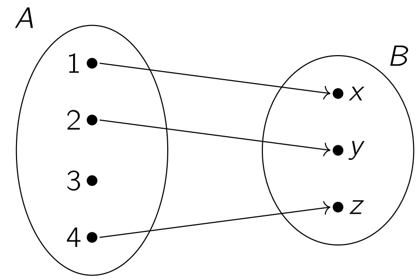


Ejemplo de aplicación entre conjuntos

Dos aplicaciones $f\colon A \to B$ y $g\colon C \to D$ son *iguales* si $A = C$, $B = D$ y $f(a) = g(a)$, para cualquier elemento a de A.



No es aplicación porque
a 2 se le asignan dos elementos de B



No es aplicación porque
3 no tiene asignada imagen en B

Definición 11. *Sea $f\colon A \to B$ una aplicación y sean $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$. Se definen:* *el conjunto* **imagen** *(directa), por f, del conjunto A_1 como*

$$f_*(A_1) = \{f(a) \mid a \in A_1\} \subseteq B$$

y el conjunto **imagen recíproca**, *por f, del conjunto B_1 como*

$$f^*(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} \subseteq A$$

Para $A_1 = A$, el conjunto $f_*(A) = Im(f)$ se llama *conjunto imagen* de f.

Ejemplo 12. *Sea $f\colon A = \{1,2,3\} \to B = \{x,y,z,t\}$ la aplicación representada en el ejemplo 11:*

- $f_*(\{1\}) = \{x\}$, $f_*(\{2\}) = \{z\}$, $f_*(\{2,3\}) = \{z\}$, $f_*(\{1,2\}) = \{x,z\}$, $Im(f) = \{x,z\}$.
- $f^*(\{x,y\}) = \{1\}$, $f^*(\{x,z\}) = A$, $f^*(\{t,y\}) = \emptyset$, $f^*(\{z\}) = \{2,3\}$.

Definición 12. *Se dice que una aplicación $f\colon A \to B$ es:*

i) **inyectiva** *si elementos distintos de A tienen imágenes diferentes en B, esto es:*

- *para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$, si $a_1 \neq a_2$ entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

Equivalentemente,

- *para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$ entonces $a_1 = a_2$.*

Así, f no es inyectiva si existen elementos distintos de A con la misma imagen.

ii) **sobreyectiva** *si todo elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A, es decir:*

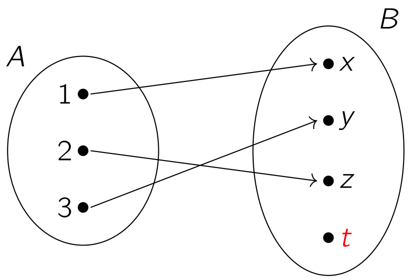
- *para cualquier $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.*

Equivalentemente,

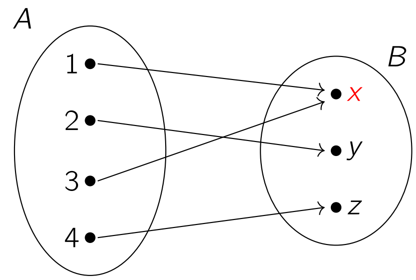
- *$Im(f) = B$.*

Por lo tanto, f no es sobreyectiva si existe algún elemento de B que no es imagen de ningún elemento de A (equivalentemente, $Im(f) \neq B$).

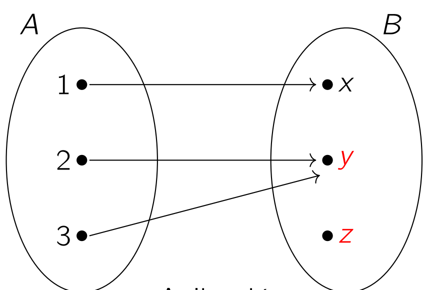
iii) **biyectiva** *o* **biunívoca** *si es inyectiva y sobreyectiva.*



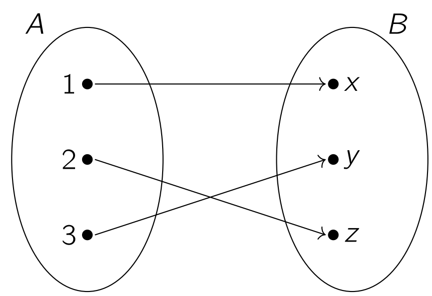
Aplicación inyectiva,
pero no sobreyectiva
($t \notin Im(f)$)



Aplicación sobreyectiva
pero no inyectiva
($f(1) = f(3)$)



Aplicación
no inyectiva y no sobreyectiva



Aplicación biyectiva

Ejemplo 13.

i) *$f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n,m) = n\cdot m$, para cada $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, es una función no inyectiva pues $f(0,3) = f(5,0) = 0$. Sin embargo, f sí es sobreyectiva ya que para cada $n\in\mathbb{N}$, $n = f(1,n)$, siendo $(1,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Además:*

$$\begin{aligned} f^*(\{5\}) &= \{(1,5),(5,1)\},\\ f^*(\{6\}) &= \{(1,6),(6,1),(3,2),(2,3)\},\\ f^*(\{2,4\}) &= \{(1,2),(2,1),(2,2),(4,1),(1,4)\}. \end{aligned}$$

ii) *Sea $A = \{a,b,c,d\}$, la aplicación $f\colon \mathcal{P}(A) \to \{n\in\mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ definida por $f(X) = |X|$, para cada $X\in\mathcal{P}(A)$. f no es inyectiva ($f(\{a,b\}) = f(\{c,d\}) = 2$, por ejemplo), ni sobreyectiva ($Im(f) = \{0,1,2,3,4\} \neq \{n\in\mathbb{Z} \mid n\geq 0\}$).*

iii) *Sea $A = \{a,b,c\}$ y sea S el conjunto de todas las cadenas binarias de longitud 3. La aplicación $f\colon \mathcal{P}(A) \to S$ definida, para cada $X\in\mathcal{P}(A)$, por $f(X) = (s_a,s_b,s_c)$, siendo $s_x = 1$ si $x\in X$ y $s_x = 0$ si $x\notin X$ (por ejemplo, $f(\{c\}) = (0,0,1)$ y $f(\{a,c\}) = (1,0,1)$) es biyectiva.*

iv) *La función $f\colon \mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2 x$, para cada $x\in\mathbb{R}^+$, es biyectiva.*

Ejercicio 4. *Sea $f\colon A\to B$ una aplicación sobreyectiva. Halla el cardinal de $B\setminus \operatorname{Im} f$ y el conjunto $\mathcal{P}(B\setminus \operatorname{Im} f)$.*

Ejercicio 5. *Considera los conjuntos* $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es un divisor de } 42\}$ *y* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Sea* $f: D \to E$ *la aplicación definida, para cada* $n \in D$, *por* $f(n) =$ *número de divisores positivos de* n.

i) *Calcula el conjunto* D.

ii) *Halla* $f(3)$ *y* $f(14)$.

iii) *Calcula los conjuntos* $f_*(D)$ *y* $f^*(\{3, 4\})$.

iv) *Estudia si* f *es inyectiva y/o sobreyectiva (razona las respuestas).*

Proposición 1. *Si los conjuntos* A *y* B *son finitos y* $f: A \to B$ *es una aplicación, se verifica que:*

- *Si* f *es inyectiva entonces* $|A| \leq |B|$
  (equivalentemente, si $|A| > |B|$, *entonces* f *no es inyectiva).*

- *Si* f *es sobreyectiva, entonces* $|A| \geq |B|$
  (equivalentemente, si $|A| < |B|$, *entonces* f *no es sobreyectiva).*

- *Si* f *es biyectiva entonces* $|A| = |B|$
  (equivalentemente, si $|A| \neq |B|$, *entonces* f *no es biyectiva).*

Este resultado, junto con el ejemplo 13.iii), permite demostrar que $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ y el conjunto S de todas las cadenas binarias de longitud 3 tienen el mismo cardinal, con lo cual $|\mathcal{P}(\{a, b, c\})| = 2^3$.

Conviene destacar que, si bien no todas las aplicaciones que se pueden definir entre dos conjuntos con el mismo cardinal son biyectivas, siempre es posible encontrar una aplicación biyectiva entre ellos.

Además, se verifica el siguiente resultado que será de utilidad en la práctica:

Proposición 2. *Si* A *y* B *son dos conjuntos finitos con el mismo cardinal y* $f: A \to B$ *es una aplicación, son equivalentes:*

i) f *es inyectiva* *ii)* f *es sobreyectiva* *iii)* f *es biyectiva*

Demostración.

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $f_*(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ y, al ser f inyectiva, $|f_*(A)| = |A| = |B|$. Puesto que $f_*(A) \subseteq B$ y tienen el mismo cardinal[3], es obvio que $f_*(A) = B$, es decir, f es sobreyectiva.

$\boxed{i) \Leftarrow ii)}$ Recíprocamente, sea f sobreyectiva. Si existen $a_1 \neq a_2$ en A con $f(a_1) = f(a_2)$, se obtendría que $|f_*(A)| < |A|$. Puesto que, por hipótesis, $|A| = |B|$, se tiene que $f_*(A) \neq B$ y esto contradice la sobreyectividad de f. □

Ejercicio 6. *Sea* $f: X \to Y$ *una aplicación entre conjuntos* **finitos**. *Completa cada afirmación con lo que le corresponda: "exactamente uno", "mayor o igual que 1" o "menor o igual que 1".*

i) f *es inyectiva si, para todo elemento* $x \in X$, *el cardinal de* $f^*(f_*(\{x\}))$ *es ...*

ii) f *es sobreyectiva si, para todo elemento* $y \in Y$, *el cardinal de* $f^*(\{y\})$ *es ...*

iii) *Para todo elemento* $y \in Y$, *el cardinal de* $f_*(f^*(\{y\}))$ *es ...*

[3] Si A es un conjunto finito y $B \subseteq A$, se cumple que $A = B \iff |A| = |B|$.

1.6 Composición de aplicaciones. Aplicación inversa

Definición 13. *Dados tres conjuntos A, B y C, y dos aplicaciones f y g tales que*

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \longrightarrow & B \\ a & \rightsquigarrow & f(a)=b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g\colon B & \longrightarrow & C \\ b & \rightsquigarrow & g(b)=c \end{array}$$

se llama **composición de f con g** *a la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} g\circ f\colon A & \longrightarrow & C \\ a & \rightsquigarrow & (g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c \end{array}$$

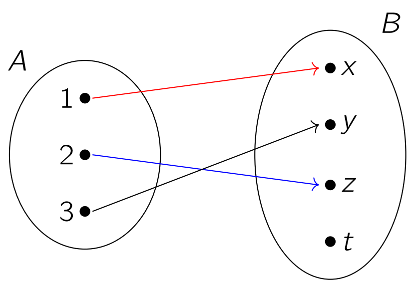
Es decir:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ a \arrow[r] & f(a) \arrow[r] & g(f(a)) = (g\circ f)(a) \end{tikzcd}$$

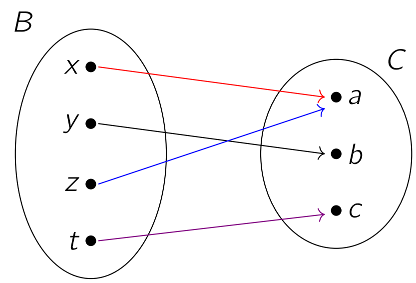
Ejemplo 14. *Sean $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x,y,z,t\}$ y $C=\{a,b,c\}$ y sean $f\colon A\to B$ y $g\colon B\to C$ las aplicaciones definidas por*

$$f(1)=x,\ f(2)=z,\ f(3)=y$$
$$g(x)=a,\ g(y)=b,\ g(z)=a,\ g(t)=c.$$

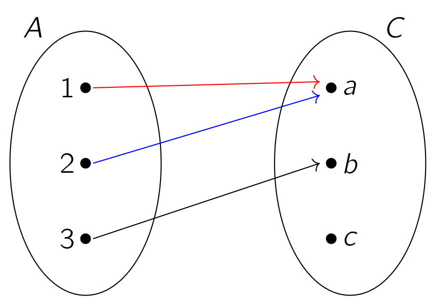
$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(x)=a,\quad (g\circ f)(2)=g(f(2))=g(z)=a,\quad (g\circ f)(3)=g(f(3))=g(y)=b.$$



$f\colon A\longrightarrow B$



$g\colon B\longrightarrow C$



$g\circ f\colon A\longrightarrow C$

En este ejemplo, no existe la composición $f \circ g$. Puede que existan las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$, pero no necesariamente coinciden. Por ejemplo, si consideramos $A = \{1, 2, 3\}$ y $f, g\colon A \to A$ las aplicaciones definidas por

$$f(1) = f(2) = f(3) = 1, \quad g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 3.$$

exiten las composiciones $(g \circ f) : A \longrightarrow A \longrightarrow A$ y $(f \circ g) : A \longrightarrow A \longrightarrow A$, pero

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 2 \ \text{ y } \ (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 1,$$

lo que indica que $g \circ f \neq f \circ g$.

Sin embargo, la composición de aplicaciones sí verifica la propiedad *asociativa*, es decir, dadas tres aplicaciones $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ y $h\colon C \longrightarrow D$:

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

Proposición 3. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ dos aplicaciones cualesquiera. Se verifica que:*

- *Si f y g son inyectivas, también $g \circ f$ es inyectiva.*
- *Si f y g son sobreyectivas, también $g \circ f$ es sobreyectiva.*
- *Si f y g son biyectivas, también $g \circ f$ es biyectiva.*

Demostración. Si f y g son inyectivas y a_1, a_2 son dos elementos de A tales que $(g\circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ (por definición de composición). Puesto que g es inyectiva, se verifica que $f(a_1) = f(a_2)$, y la inyectividad de f permite concluir que $a_1 = a_2$.
La demostración de las otras dos afirmaciones se deja como ejercicio. □

Proposición 4. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ dos aplicaciones cualesquiera. Se verifica que:*

- *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*
- *Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.*

Nota: no necesariamente se cumple el recíproco de estas implicaciones. De hecho, en el ejemplo 14 la aplicación f es inyectiva y la aplicación g es sobreyectiva, pero la composición $g \circ f$ ni es inyectiva ni es sobreyectiva.

Definición 14. *Para cada conjunto A, se llama aplicación* **identidad** *de A a la aplicación*

$$\begin{aligned} I_A\colon A &\longrightarrow A \\ a &\rightsquigarrow I_A(a) = a \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que dada cualquier aplicación $f\colon A \to B$ se verifica que

$$f \circ I_A = f = I_B \circ f$$

Definición 15. *Sea $f\colon A \to B$ una aplicación. Se llama* **aplicación inversa** *de f, y se denota por f^{-1}, a una aplicación $f^{-1}\colon B \to A$ tal que, si b es un elemento de B,*

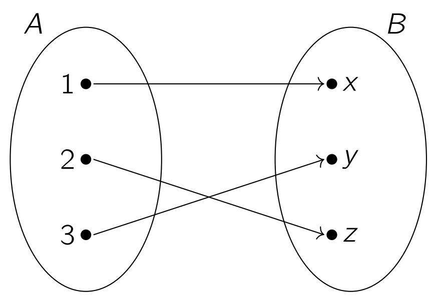
$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$$

Puede que no exista una aplicación inversa de f.

Proposición 5. *Dada una aplicación $f\colon A \to B$, f admite inversa si, y solo si, f es biyectiva.*

Si f es biyectiva, en particular es sobreyectiva, por lo que, dado un elemento $b \in B$, existe un elemento $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Y, por ser inyectiva, a es el único elemento que tiene como imagen b. Basta definir $f^{-1}(b) = a =$ único elemento de A tal que $f(a)$ es igual a b.

La inversa de $f\colon A \to B$



$f^{-1}\colon B \to A$ está definida por:
$f^{-1}(x) = 1$ (pues $f(1) = x$),
$f^{-1}(y) = 3$ (porque $f(3) = y$),
$f^{-1}(z) = 2$ (ya que $f(2) = z$).

Además, si f tiene inversa entonces se cumple:

- su inversa f^{-1} es la única aplicación que verifica $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$,
- f^{-1} también tiene inversa y $(f^{-1})^{-1} = f$,
- si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son dos aplicaciones invertibles (es decir, tienen inversa), entonces $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejemplo 15.

i) *$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n+2$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, es biyectiva, su inversa es $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(m) = m - 2$, para cada $m \in \mathbb{Z}$.*

ii) *La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 2^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$, es biyectiva y su inversa es la función $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \log_2 y$, para cada $y \in \mathbb{R}^+$.*

1.7 Ejercicios: soluciones

Ejercicio 1.

$A = A \cap U = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
Se han aplicado los apartados i), ii) y v) de Propiedades 2.

Ejercicio 2.

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (A \setminus B) \cap \overline{C} = (A \setminus B) \setminus C$$

En la primera igualdad se aplica la definición de diferencia, en la segunda una de las Leyes de De Morgan, en la tercera la asociatividad de la intersección y en las siguientes se aplica la definición de diferencia.

Ejercicio 3.

i) *Falsa. $\{2\} \in Y$, pero $\{2\} \notin \mathcal{P}(Y)$ ya que $\{2\} \not\subseteq Y$ pues $2 \notin Y$.*
Nota: Sí se cumple que $\emptyset$ y $\{1\}$ son objetos de $Y \cap \mathcal{P}(Y)$.

ii) *Verdadera. $\{1, \{1\}\} \in \mathcal{P}(Y)$, ya que $\{1, \{1\}\} \subseteq Y$, y $\{1, \{1\}\} \notin A$.*

iii) *Falsa. $\emptyset \notin A$ con lo cual $\{\emptyset, \{1\}\} \not\subseteq A$ y $\{\emptyset, \{1\}\} \notin \mathcal{P}(A)$.*

Ejercicio 4.

Por ser f sobreyectiva, $B = \operatorname{Im} f$. Entonces $B \setminus \operatorname{Im} f = \emptyset$. Por lo que $|B \setminus \operatorname{Im} f| = |\emptyset| = 0$ y $\mathcal{P}(B \setminus \operatorname{Im} f) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Ejercicio 5.

i) *$D = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$.*

ii) *$f(3) = 2$, pues 3 tiene dos divisores positivos, 1 y 3.*
$f(14) = 4$, pues 14 tiene cuatro divisores positivos, que son 1, 2, 7 y 14.

iii) *$Im(f) = f_*(D) = \{f(x) \mid x \in D\} = \{f(1), f(2), f(3), f(6), f(7), f(14), f(21), f(42)\} = \{1, 2, 4, 8\}$, pues $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(7) = 2$, $f(6) = f(14) = f(21) = 4$ y $f(42) = 8$.*
$f^*(\{3, 4\}) = \{x \in D \mid f(x) \in \{3, 4\}\} = \{x \in D \mid f(x) = 3 \text{ or } f(x) = 4\} = \{6, 14, 21\}$, pues ningún elemento $x \in D$ cumple $f(x) = 3$, mientras que $f(6) = f(14) = f(21) = 4$.

iv) *Como muestra el apartado anterior, $f(6) = f(14)$, siendo $6 \neq 14$, luego f no es inyectiva.*
Tampoco es sobreyectiva, pues $Im(f) \neq E$, por ejemplo, $3 \notin Im(f)$.

Ejercicio 6.

i) *"exactamente uno". Puesto que $f^*(f_*(\{x\})) = f^*(\{f(x)\}) = \{a \in X \mid f(a) = f(x)\}$, si este conjunto es unitario, sólo hay un elemento, x, cuya imagen es $f(x)$.*

ii) *"mayor o igual que 1". Puesto que $f^*(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$, que este conjunto tenga cardinal mayor o igual que uno significa que es no vacío por lo que $y \in Im(f)$.*

iii) *"menor o igual que 1". Puesto que*

$$f_*(f^*(\{y\})) = f_*(\{x \in X \mid f(x) = y\}) = \begin{cases} \{f(x) \mid \text{si } f(x) = y\} = \{y\} & \text{si } y \text{ es imagen de algún } x \\ f(\emptyset) = \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El cardinal del conjunto es 1, en el caso de que $y \in Im(f)$, y 0 en caso contrario.