Linear Algebra - GIA

1 Sistemas de ecuaciones lineales

Recuerda que estas notas son, únicamente, parte del material de trabajo de los profesores de esta asignatura. Los contenidos de este tema se pueden ver en los siguientes libros:

- Grossman, S. I. Álgebra Lineal. McGraw-Hill Interamericana. (Temas 1 y 2).
- Lay, David C. Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. Prentice Hall (Temas 1, 2 y 3).
- Merino, L. y Santos, E. Álgebra Lineal con métodos elementales. Thomson (Tema 1).

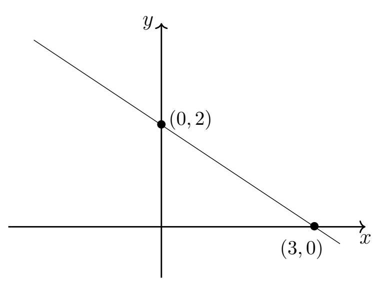
1.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

La ecuación de una recta en el plano real xy se escribe

$$a_1x + a_2y = b$$

donde a_1, a_2, b son números reales. Esta ecuación se llama **ecuación lineal** en las variables (o incógnitas) x e y.

Ejemplo .1. $2x + 3y = 6$



Ejemplo .2. Las ecuaciones siguientes no son ecuaciones lineales:

$$2x^2 + 5y = 0$$

$$xy + 3z = 1$$

$$\sin(x) + y = 0$$

A partir de ahora $\mathbb{K}$[1] denota un cuerpo arbitrario. En especial nos interesarán el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y el cuerpo $\mathbb{Z}_p$ de los enteros módulo p, con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman **escalares**.

[1]Véase Apéndice 1.5.

Definition .3. Llamamos **ecuación lineal** en las variables (o incógnitas) $x_1, \dots, x_n$ y con coeficientes en $\mathbb{K}$, a toda expresión de la forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

donde $a_1, \dots, a_n$ y b son elementos de $\mathbb{K}$.

Una **solución** de la ecuación lineal (1) es una n-tupla $s_1, \dots, s_n$ de valores de las variables $x_1, \dots, x_n$ que satisfacen la ecuación (1). Dicho de otro modo

$$a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Ejemplo .4. Si consideramos la ecuación $2x + 3y = 6$, con coeficientes en $\mathbb{R}$, una solución es $x = 0, y = 2$ y otra solución es $x = 9, y = -4$. De hecho $\left\{ \left(3 - \frac{3t}{2}, t\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación.

Si consideramos la ecuación $2x + 3y = 6$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ una solución es $x = 0, y = 2$ y otra solución es $x = 2, y = 3$. De hecho $\{(3 + 2t, t) | t \in \mathbb{Z}_7\}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación..

Definition .5. Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,** es una colección de m ecuaciones lineales en las variables $x_1, \dots, x_n$,

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

Llamaremos a_{ij} al coeficiente de la j-ésima incógnita en la i-ésima ecuación. Los b_i se llaman términos independientes.

Definition .6. Toda n-tupla, $s_1, \dots, s_n$ satisfaciendo cada una de las ecuaciones del sistema se llama **solución** del sistema.

Ejemplo .7. El sistema lineal con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$$

admite como solución

$$x_1 = -18,\ x_2 = -6,\ x_3 = 1.$$

Sin embargo

$$x_1 = 7,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0$$

no es solución del sistema porque no satisface la segunda ecuación.

Definition .8. Un sistema de ecuaciones se dice que es **compatible** si admite alguna solución. En caso contrario se dice que es **incompatible**. Cuando la solución del sistema es única se dice que es **compatible determinado**, y si hay más de una solución se dice que es **compatible indeterminado**.

Ejemplo .9. El siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

es claramente incompatible. El siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array}\right\}$$

es compatible. Efectivamente, si damos un valor arbitario a x_2, $x_2 = s$, y resolvemos x_1 con respecto a x_2, el conjunto de soluciones es

$$\{(2-s, s), \text{ con } s \in \mathbb{R}\}.$$

Definition .10. Un **sistema homogéneo** es un sistema en el que los términos independientes son todos nulos. Es de la forma:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Todo sistema homogéneo es compatible porque admite, al menos, la llamada solución trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

1.2 Matriz ampliada asociada

Definition .11. Asociado al sistema de ecuaciones (2) obtenemos, olvidando las variables x_i y los signos "+" y "=", lo que se denomina la **matriz ampliada** asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{3}$$

Ejemplo .12. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 6y & + & 3z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El método base para resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en reemplazarlo por otro sistema más simple y con el mismo conjunto de soluciones. En ese caso, diremos que los **sistemas** son **equivalentes**. Esto se hace a través de una sucesión de operaciones, llamadas **operaciones elementales**, clasificadas en tres tipos:

Tipo 1:	permutar dos ecuaciones del sistema;
Tipo 2:	multiplicar una ecuación del sistema por una constante no nula;
Tipo 3:	sumar un múltiplo de una ecuación del sistema a otra ecuación del sistema.

Las operaciones anteriores no modifican el conjunto de soluciones del sistema y se corresponden con operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada asociada:

Tipo 1: permutar dos filas;

Tipo 2: multiplicar una fila por una constante no nula;

Tipo 3: sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

Ejemplo .13. Vamos a utilizar operaciones elementales para resolver el sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & & & + & 3z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Obtenemos la matriz ampliada asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Si realizamos operaciones elementales sobre el sistema y sobre la matriz ampliada [2]

Tipo 3: $f_2 \to f_2 + (-2)f_1$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & - & 6y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Tipo 3: $f_2 \to f_2 + (-2)f_1$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

observamos que las operaciones elementales pueden ser realizadas únicamente sobre la matriz ampliada para volver, al final, al sistema de ecuaciones:

Tipo 3: $f_3 \to f_3 + +(-2)f_1$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

[2] Denotaremos indistintamente por f_i la i-ésima ecuación del sistema y la i-ésima fila de su matriz ampliada.

Tipo 2: $f_2 \to -\frac{1}{6}f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Tipo 3: $f_3 \to f_3 + 7f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

Tipo 2: $f_3 \to -\frac{6}{11}f_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tipo 3: $f_2 \to f_2 + (-\frac{1}{6})f_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tipo 3: $f_1 \to f_1 + (-3)f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tipo 3: $f_1 \to f_1 + (-2)f_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz ampliada corresponde al sistema

$$\left.\begin{array}{cccc} x & & & = 1 \\ & y & & = 0 \\ & & z & = 0 \end{array}\right\}$$

Obtenemos así que el sistema es compatible determinado, con la solución única

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 0.$$

Este ejemplo se generaliza en el apartado siguiente.

1.3 Eliminación Gaussiana

La eliminación gaussiana permite averiguar si un sistema de ecuaciones lineales es compatible y en caso afirmativo, obtener el conjunto de soluciones. El método consiste en transformar la matriz ampliada del sistema en una matriz más sencilla, que llamamos escalonada (reducida). Esto se hace a través de una serie operaciones, las operaciones elementales vistas en la página 4.

Definition .14. La matriz ampliada (3) se dice que es **escalonada** si verifica las siguientes condiciones:

1. Las filas donde todos los elementos son nulos se reagrupan en la parte baja de la matriz.
2. En toda fila no nula, el primer elemento no nulo vale 1. Se llama **pivote**.
3. En dos filas sucesivas con elementos no nulos, el pivote de la fila inferior se encuentra a la derecha del pivote de la fila superior.

Ejemplo .15. La matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

satisface las condiciones i) y ii) pero no la iii), mientras que la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

no satisface la condición ii). La matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

satisface i), ii) y iii), es por tanto una matriz escalonada.

Definition .16. La matriz ampliada (3) de la página 3 se dice que es **escalonada reducida** si es una matriz escalonada y, además, verifica la condición siguiente:

iv) Toda columna conteniendo un pivote tiene nulos todos los demás elementos.

Ejemplo .17. La matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

es escalonada reducida, mientras que la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

es escalonada no reducida (a causa de la 3ª columna).

1.4 Algoritmo de eliminación de Gauss

Este algoritmo permite transformar cualquier matriz en una matriz escalonada (reducida) con la ayuda de las operaciones elementales de la página 4. Ilustramos el procedimiento con un ejemplo de una matriz en $\mathbb{R}$:

Paso 1. Identificar la columna más a la izquierda que contiene al menos un elemento no nulo:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & & \end{array}\end{array}$$

Paso 2. Permutar, si es necesario, la primera fila con otra fila, para que el elemento en lo alto de la columna identificada en el **Paso 1** sea no nulo: $f_1 \leftrightarrow f_2$

$$\text{posible pivote} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Paso 3. Si el elemento que se encuentra en lo alto de dicha columna vale a, multiplicar por su inverso a^{-1} para que aparezca un pivote:

$f_1 \to \frac{1}{3} f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Paso 4. Sumar múltiplos adecuados de la primera fila al resto de filas para anular los elementos no nulos bajo el pivote:

$f_3 \to f_3 + (-3) f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Paso 5. Olvidar la primera fila de la matriz, volver al **Paso 1** y repetir el algoritmo con la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$f_2 \to f_2 + (-1) f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$f_2 \to -\frac{1}{3} f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 6. La matriz completa es escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 7. Para convertir la matriz escalonada en una matriz escalonada reducida (método Gauss-Jordan), debemos hacer nulos todos los elementos situados encima de cada pivote de cada fila no nula. Sumando múltiplos apropiados de dicha fila a las filas superiores, se anulan los elementos deseados:

Definition .18. Diremos que un **sistema** de ecuaciones es **escalonado** (reducido) si la matriz ampliada asociada es escalonada (reducida).

1.5 Estudio y resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Theorem .19. (Discusión de un sistema escalonado). Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Supongamos que al transformar la matriz ampliada del sistema a su forma escalonada, la matriz resultante tiene r pivotes. Se verifica:

1. Si la columna de términos independientes tiene pivote, el sistema es incompatible.
2. En otro caso, el sistema es compatible, pudiéndose dar dos casos:
   (a) Si $r = n$, el sistema es compatible determinado.
   (b) Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado.

Proof.

1. Si la columna de términos independientes tiene pivote, una de las ecuaciones del sistema es de la forma
$$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1$$
que no tiene solución, por lo que tampoco tiene solución el sistema de ecuaciones.
2. Para justificar este punto, estudiamos cómo se resuelven los sistemas compatibles escalonados.
   (a) Si $r = n$, todas las variables tienen pivote. La única solución del sistema se puede obtener de dos formas:
      i. Despejando recursivamente en el sistema de ecuaciones el valor de las variables, desde x_n hasta x_1.
      ii. Transformando la matriz ampliada a su forma escalonada reducida. En ese caso, la columna de términos independientes es la solución del sistema.
   (b) Si $r < n$, las $n - r$ variables que no tienen pivote se pasan al término independiente de las ecuaciones. Así, el sistema queda con el mismo número de pivotes que de incógnitas, se resuelve como en el caso (a) quedando la solución en función de las variables que no tienen pivote (parámetros). ■

Definition .20. En un sistema de ecuaciones lineales escalonado, las variables que tienen pivote se llaman **variables directoras** y las variables que no tienen pivote se llaman **variables libres**.

Corolario .21. Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo donde el número de incógnitas n es más grande que el número de ecuaciones m es un sistema compatible indeterminado.

Proof. Por el apartado 2 (b) del Teorema .19. ■

Ejemplo .22. En $\mathbb{Z}_7$ consideramos la matriz ampliada siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ésta es una matriz escalonada que corresponde al sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Las tres variables son directoras, por tanto, el sistema es compatible determinado. Despejando recursivamente la única solución es $x_3 = 1$, $x_2 = 3$, $x_1 = 6$.

Calculando la matriz escalonada reducida, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo .23. Consideremos el sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 36 \\ x & + & y & + & 2z & = & 37 \\ x & + & 2y & + & z & = & 51 \end{array}\right\}$$

y su matriz ampliada asociada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & 1 & 2 & 37 \\ 1 & 2 & 1 & 51 \end{array}\right)$$

Aplicando el algoritmo de eliminación de Gauss

$f_2 \leftrightarrow f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 37 \\ 2 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & 2 & 1 & 51 \end{array}\right)$$

$f_2 \to f_2 + (-2)f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 37 \\ 0 & -1 & -3 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 51 \end{array}\right)$$

$f_3 \to f_3 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 37 \\ 0 & -1 & -3 & -38 \\ 0 & 1 & -1 & 14 \end{array}\right)$$

$f_3 \leftrightarrow f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 37 \\ 0 & 1 & -1 & 14 \\ 0 & -1 & -3 & -38 \end{array}\right)$$

$f_3 \to f_3 + f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 37 \\ 0 & 1 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right)$$

$f_3 \leftrightarrow \frac{1}{-4} f_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 37 \\ 0 & 1 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

obtenemos una matriz ampliada en forma escalonada (no reducida) con tres pivotes, uno para cada incógnita. Por el apartado 2 del Teorema .19, el sistema de ecuaciones lineales dado es compatible determinado.

Si seguimos resolviendo vemos que la solución sería $x = 5, \quad y = 20$ y $z = 6$.

Ejemplo .24. Consideremos el sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 6y & + & 6z & = & 6 \\ 3x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

y su matriz ampliada asociada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando el algoritmo de eliminación de Gauss

$f_2 \to f_2 + 6f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$f_3 + 4f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$f_2 \to 3f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$f_3 \to f_3 + 2f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$f_3 \to 4f_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

obtenemos una matriz ampliada en forma escalonada (no reducida) con un pivote en la columna de términos independientes. Por el apartado 1 del Teorema .19, el sistema de ecuaciones lineales dado es incompatible.

Ejemplo .25. Consideremos el sistema de ecuaciones con coeficientes reales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & - & 3t & = & 9 \\ -x & + & y & - & 2z & + & t & = & -5 \end{array}\right\}$$

y su matriz ampliada asociada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Aplicando el método de Gauss
$f_2 \to f_2 - 2f_1, \quad f_3 \to f_3 + f_1$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$f_3 \to f_3 + f_2$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

llegamos a una matriz escalonada, que corresponde al sistema de ecuaciones escalonado:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2t & = & 4 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

El número de variables directoras (o pivotes) es $r = 2$, y el número de variables libres (o variables sin pivote) es, por tanto, $n - r = 4 - 2 = 2$. Despejamos las variables directoras x y z en función de las variables libres y y t:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & z & = & 4 + y + 2t \\ & & z & = & 1 - t \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 + y + 3t \\ z & = & 1 - t \end{array}\right.$$

Así, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(3 + y + 3t,\, y,\, 1 - t,\, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\},$$

y el sistema es compatible indeterminado.

Apéndice

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ con p un número primo. Para cada uno de estos conjuntos conocemos dos operaciones

– una operación suma $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$,

– una operación producto $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. Asociativa: para cualesquiera a, b, $c \in \mathbb{K}$ se verifica

$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $0 + a = a = a + 0$, $\forall a \in \mathbb{K}$ (0 es el elemento neutro para la suma).

   Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot a = a = a \cdot 1$, $\forall a \in \mathbb{K}$ (1 es el elemento neutro para el producto).

3. Para cada $a \in K$ existe el elemento $-a \in K$ (llamado el elemento *opuesto* de a para la suma) tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

   Para cada $a \in K - \{0\}$ existe el elemento $a^{-1} \in \mathbb{K}$ (llamado el elemento *inverso* de a para el producto) tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

4. Conmutativa: para cualesquiera a, $b \in \mathbb{K}$ se verifica

$$a+b = b+a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

5. Distributiva del producto respecto a la suma: para cualesquiera a, b, $c \in \mathbb{K}$ se verifica

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones internas $+$ y $\cdot$ cumpliendo las propiedades anteriores se llama *cuerpo conmutativo*. Los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman *escalares*.

$(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, en el cual los opuestos de $0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 son $0, 6, 5, 4, 3, 2$ y 1, respectivamente, y sus inversos son $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 4$, $4^{-1} = 2$, $3^{-1} = 5$, $5^{-1} = 3$ y $6^{-1} = 6$.