Matemática Discreta

- Licenciatura en Informática – Ingeniería en Informática
- 1º año
- Soledad Pérez – Federico Gómez

Lógica Proposicional

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>¿Qué es la Lógica?</u>

Es una disciplina que se encarga del análisis de los razonamientos como objeto de estudio. Se encarga de formalizar la escritura de los mismos y establece técnicas para estudiar su validez.

La lógica se divide a su vez en varias categorías, en este curso veremos dos de ellas, la lógica **proposicional** y la lógica de **predicados**.

•**Lógica proposicional**: Estudia la forma general de los enunciados matemáticos y sus reglas de inferencia, pero sin entrar en detalle sobre la naturaleza de los elementos involucrados en los razonamientos.

•**Lógica de predicados**: Agrega a la lógica proposicional el estudio de los elementos sobre los cuales se razona, incorporando el uso de cuantificadores, variables, relaciones y funciones.

En este capítulo nos ocuparemos del estudio de la lógica proposicional. En el próximo capítulo abordaremos el estudio de la lógica de predicados.

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Lógica Proposicional:

Se basa en el estudio de las proposiciones lógicas (que definiremos en breve) y se divide en las siguientes cuatro áreas de estudio:

- **Sintaxis**: Se encarga de definir las reglas necesarias para la correcta escritura de proposiciones que representen razonamientos.
- **Semántica**: Se encarga de establecer técnicas para estudiar la veracidad o falsedad de las proposiciones lógicas.
- **Deducción natural**: Se encarga de establecer técnicas para la correcta escritura de pruebas matemáticas basadas en proposiciones.
- **Completitud**: Se encarga de establecer un paralelismo (equivalencia) entre la semántica y la deducción natural.

En este capítulo veremos cada una de las cuatro áreas de estudio, y lo haremos siguiendo el mismo orden en que fueron presentadas.

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Sintaxis de la Lógica Proposicional:

Se basa en la noción de proposición (también llamada proposición lógica). Una **proposición** es cualquier frase del lenguaje natural que pueda eventualmente llegar a ser verdadera o falsa.

A la sintaxis no le importa si la frase efectivamente es verdadera o es falsa, lo que le interesa es el hecho de que tiene la propiedad de poder ser verdadera o ser falsa.

Ejemplos de proposiciones:

Dadas las siguientes frases del Idioma Español, determinar si son proposiciones o no lo son:

1)"*La tierra es plana*"

2)"*Estamos en el primer semestre del año*"

3)"*¿Qué vamos a comer hoy?*"

4)"*Quizás me vaya de vacaciones este año*"

Ejemplos de proposiciones:

Dadas las siguientes frases del Idioma Español, determinar si son proposiciones o no lo son:

1) **"*La tierra es plana*"**

   SI, es una proposición

2) **"*Estamos en el primer semestre del año*"**

   SI, es una proposición

3) **"*¿Qué vamos a comer hoy?*"**

   NO es una proposición

4) **"*Quizás me vaya de vacaciones este año*"**

   NO es una proposición

<u>Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

Una **proposición atómica** es cualquier proposición que se considera indivisible. Se refiere a cualquier frase que no se puede descomponer en frases más pequeñas sin que pierda el sentido (significado).

Una **proposición no atómica** es cualquier proposición que se construye combinando otras proposiciones existentes. Se hace mediante el uso de palabras que conectan proposiciones diferentes.

<u>Ejemplos de proposiciones atómicas y no atómicas</u>:

Dadas las siguientes proposiciones, determinar si son atómicas o no atómicas:

1)"*Juan tiene 12 años*"

2)"*Luis es mayor que Juan*"

3)"*Si Luis es mayor que Juan entonces Juan tiene 12 años*"

4)"*Luis NO es mayor que Juan y Juan tiene 12 años*"

Ejemplos de proposiciones atómicas y no atómicas:

Dadas las siguientes proposiciones, determinar si son atómicas o no atómicas:

1)"*Juan tiene 12 años*"

Atómica

2)"*Luis es mayor que Juan*"

Atómica

3) "*Si Luis es mayor que Juan entonces Juan tiene 12 años*"

No atómica

4) "*Luis NO es mayor que Juan y Juan tiene 12 años*"

No atómica

Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación):

Escribir cada frase del lenguaje natural como una proposición puede ser engorroso. Por ello, se utilizan **letras proposicionales** para representar proposiciones que son **atómicas**.

Se llama **letra proposicional** a cualquier letra minúscula que se usa para identificar una proposición atómica. Opcionalmente, puede ir acompañada de un subíndice (**p**, **q**, **r**, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, etc).

En vez de escribir la frase correspondiente a cada proposición atómica, lo que hacemos es asignarle una letra proposicional y luego referirnos a ella mediante dicha letra proposicional.

Ejemplos de uso de letras proposicionales: **p = "*Juan tiene 12 años*"**

q = "*Luis es mayor que Juan*"

Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación):

Las proposiciones **no atómicas** se construyen combinando proposiciones ya existentes mediante el uso de **conectivas**. Las conectivas son palabras que conectan proposiciones.

En proposicional, cada conectiva tiene un símbolo que la identifica, y las conectivas existentes son las siguientes: $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\neg$ (no), $\rightarrow$ (entonces), $\leftrightarrow$ (si y sólo si)

Ejemplos de uso de conectivas:

Dadas las siguientes letras proposicionales: p = "*Juan tiene 12 años*" q = "*Luis es mayor que Juan*", escribir las proposiciones no atómicas correspondientes a las siguientes frases:

1)"*Si Luis es mayor que Juan entonces Juan tiene 12 años*"

2)"*Luis NO es mayor que Juan y Juan NO tiene 12 años*"

3)"*Juan tiene 12 años si y sólo si Luis es mayor que Juan*"

<u>Ejemplos de uso de conectivas</u>:

Dadas las siguientes letras proposicionales: p = "*Juan tiene 12 años*" q = "*Luis es mayor que Juan*", escribir las proposiciones no atómicas correspondientes a las siguientes frases:

1)"*Si Luis es mayor que Juan entonces Juan tiene 12 años*"

$$q \rightarrow p$$

2)"*Luis NO es mayor que Juan y Juan NO tiene 12 años*"

$$\neg q \wedge \neg p$$

3)"*Juan tiene 12 años si y sólo si Luis es mayor que Juan*"

$$p \leftrightarrow q$$

<u>Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

¿Cómo determinar si una proposición está bien escrita? No cualquier forma de combinar letras proposicionales y conectivas es correcta. Por ejemplo:

- **($p \rightarrow q$)** es una proposición correctamente escrita.
- **($\rightarrow \wedge q$)** ***no*** es una proposición correctamente escrita.
- **($p \leftrightarrow \neg$)** ***no*** es una proposición correctamente escrita.

Las conectivas $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ se denominan conectivas **binarias** y pueden usarse únicamente para conectar **dos** proposiciones que, a su vez, están correctamente escritas.

La conectiva $\neg$ se denomina conectiva **unaria** y puede usarse únicamente para anteponer **una** proposición que, a su vez, esté correctamente escrita.

Veremos a continuación un conjunto de **reglas de pertenencia** que sirven para determinar, sin ambigüedad, cuál es la manera correcta de escribir proposiciones.

Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación):

Se llama **PROP** al conjunto de todas las proposiciones que existen (tanto atómicas como no atómicas). Es un conjunto infinito, y está definido por las siguientes **reglas de pertenencia**.

1. $\perp \in$ **PROP**
2. $p_n \in$ **PROP (siendo p_n cualquier letra proposicional)**
3. **Si $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP entonces $(\alpha \wedge \beta) \in$ PROP**
4. **Si $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP entonces $(\alpha \vee \beta) \in$ PROP**
5. **Si $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in$ PROP**
6. **Si $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP entonces $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in$ PROP**
7. **Si $\alpha \in$ PROP entonces $(\neg\alpha) \in$ PROP**

Observación: Veremos más adelante en el curso que estas reglas de pertenencia constituyen en realidad una **definición inductiva**.

<u>Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

Algunas observaciones acerca de la definición de **PROP**:

• $\perp$ es una proposición atómica especial que significa **absurdo**. Haremos uso de ella más adelante en el curso.

• La regla 2 establece que cualquier **letra proposicional** es por sí sola una proposición (proposición atómica).

• Las reglas 3, 4, 5, 6 establecen que las **conectivas binarias** solamente pueden usarse **entre medio** de otras dos proposiciones válidas. Por ejemplo, **($\rightarrow \wedge$ q) no** es una proposición válida.

• La regla 7 establece que la **conectiva unaria** solamente puede usarse antecediendo a otra proposición válida. Por ejemplo, **(p $\leftrightarrow \neg$) no** es una proposición válida.

<u>Sintaxis de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

Según la definición de **PROP** toda proposición **no atómica** necesariamente debe llevar **paréntesis**. No obstante, opcionalmente se permite omitir el uso de paréntesis siempre que se tomen en cuenta las **precedencias**.

Las precedencias establecen qué conectivas se aplican primero y qué conectivas se aplican después. El orden de precedencia (de la más fuerte a la más débil) es el siguiente: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$.

Es **muy importante** aplicar correctamente las precedencias y el uso de paréntesis. De otro modo, puede cambiar el significado de la frase.

<u>Ejemplos de precedencias y paréntesis</u>:

1) Tomando en cuenta las precedencias, colocar paréntesis a la siguiente proposición: $p \rightarrow \neg p \vee q \wedge \bot$

2) Considerando p = "*Hay ñoquis*" y q = "*Hay tallarines*", comparar los significados de las siguientes proposiciones: $\neg(p \wedge q)$, $(\neg p \wedge q)$

Ejemplos de precedencias y paréntesis:

1)Tomando en cuenta las precedencias, colocar paréntesis a la siguiente proposición: $p \rightarrow \neg p \vee q \wedge \perp$

$p \rightarrow (\neg p) \vee q \wedge \perp$

$p \rightarrow (\neg p) \vee (q \wedge \perp)$

$p \rightarrow ((\neg p) \vee (q \wedge \perp))$

2)Considerando p = "*Hay ñoquis*" y q = "*Hay tallarines*", comparar los significados de las siguientes proposiciones: $\neg(p \wedge q)$, $(\neg p \wedge q)$

$\neg(p \wedge q)$ = " No ocurre que hay ñoquis y tallarines"

$(\neg p \wedge q)$ = " No hay ñoquis y hay tallarines"

Semántica de la Lógica Proposicional:

Es la segunda área de estudio de la lógica proposicional. Se encarga de definir técnicas para estudiar la veracidad o falsedad de las proposiciones.

En semántica, se define el **valor de verdad** de una proposición como un valor numérico que indica si es verdadera o falsa. El valor **1** se usa para representar que es verdadera, y el valor **0** para representar que es falsa.

Si α es una proposición, entonces:

- $v(\alpha) = 1$ significa que “el valor de verdad de α es 1 (verdadero)”
- $v(\alpha) = 0$ significa que “el valor de verdad de α es 0 (falso)”

Lo anterior constituye la **única** forma correcta de escribir el valor de verdad de una proposición. Escribir $\alpha = 1$ ó $\alpha = 0$ es **incorrecto**, ya que lo que vale 1 o 0 **no es** la proposición α, sino el **valor de verdad** de α.

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

El valor de verdad de una proposición **atómica** se determina mediante su significado en la realidad. Por ejemplo:

- p = “La tierra es plana” $v(p) = 0$
- q = “2 + 2 = 4” $v(q) = 1$

El valor de verdad de una proposición **no atómica** se determina a partir del valor de verdad de las **letras proposicionales** que la componen y de las **conectivas** que utiliza. Por ejemplo:

- $p \wedge q$ = “La tierra es plana **y** 2 + 2 = 4” $v(p \wedge q) = 0$
- $p \vee q$ = “La tierra es plana **o** 2 + 2 = 4” $v(p \vee q) = 1$
- $\neg p$ = “La tierra **no** es plana” $v(\neg p) = 1$

Obsérvese que usando las **mismas** letras proposicionales, pero **distintas** conectivas, se obtienen valores de verdad **diferentes**. Esto se debe a que cada conectiva define su propia manera de calcular el valor de verdad.

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

Se llama **valuación** a una función v **:** PROP $\rightarrow$ {0,1} que permite calcular el valor de verdad de proposiciones que **no** son letras proposicionales. Esta función nos dice cómo se calcula el valor de verdad dependiendo de las conectivas involucradas. Cumple las siguientes propiedades:

1. $v(\perp) = 0$
2. $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{ v(\alpha), v(\beta) \}$
3. $v(\alpha \vee \beta) = \max\{ v(\alpha), v(\beta) \}$
4. $v(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{ 1 - v(\alpha), v(\beta) \}$
5. $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$, en otro caso es 0.
6. $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$

Ejemplo de uso de la función de valuación:

1) Dadas p = "La tierra es plana" y q = "2 + 2 = 4", calcular el valor de verdad de la siguiente proposición: $\neg p \rightarrow (p \wedge \neg q)$

2) La función de valuación v, ¿es total?, ¿inyectiva?, ¿sobreyectiva?

1. $v(\perp) = 0$
2. **$v(\alpha \wedge \beta) = \min \{ v(\alpha), v(\beta) \}$**
3. **$v(\alpha \vee \beta) = \max \{ v(\alpha), v(\beta) \}$**
4. $v(\alpha \rightarrow \beta) = \max \{ 1 - v(\alpha), v(\beta) \}$
5. $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$, en otro caso es 0.
6. $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1. $v(\perp) = 0$
2. $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{ v(\alpha), v(\beta) \}$
3. $v(\alpha \vee \beta) = \max\{ v(\alpha), v(\beta) \}$
4. **$v(\alpha \to \beta) = \max\{ 1 - v(\alpha), v(\beta) \}$**
5. **$v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$, en otro caso es 0.** 6. $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$

p	**q**	**$p \to q$**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

1. $v(\perp) = 0$
2. $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{ v(\alpha), v(\beta) \}$
3. $v(\alpha \vee \beta) = \max\{ v(\alpha), v(\beta) \}$
4. $v(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{ 1 - v(\alpha), v(\beta) \}$
5. $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$, en otro caso es 0. **6.** $\mathbf{v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)}$

p	¬p
0	1
1	0

<u>**Ejemplo de uso de la función de valuación**</u>:

1)Dadas p = “La tierra es plana” y q = “2 + 2 = 4”, calcular el valor de verdad de la siguiente proposición: $\neg p \rightarrow (p \wedge \neg q)$

$\neg p \rightarrow (p \wedge \neg q)$

v(p) = 0 (analizando el significado de p)

v(q) = 1

$v(\neg q) = 1 - v(q) = 1 – 1 = 0$

$v(p \wedge \neg q) = \min \{v(p), v(\neg q)\} = \min \{0, 0\} = 0$

$v(\neg p) = 1 – v(p) = 1 – 0 = 1$

$v(\neg p \rightarrow (p \wedge \neg q)) = \max \{1 – v(\neg p) , v((p \wedge \neg q))\} = \max \{1-1, 0\} = 0$

2)La función de valuación v, ¿es total?, ¿inyectiva?, ¿sobreyectiva?

<u>Es total</u>, ya que por la definición se observa que se puede calcular la para cualquier proposición: para el absurdo, y para las proposiciones con conectiva binaria y unaria.

<u>No es inyectiva</u>, ya que para los ejemplos anteriores de p y q que pertenecen a PROP, tenemos que $v(\neg q) = 0$ y $v(p \wedge \neg q) = 0$

<u>Es sobreyectiva</u>, ya que los dos elementos del Codominio: 0 y 1, son resultado de la función

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

Propiedad: Si una proposición α posee n letras proposicionales, entonces existen 2^n valuaciones posibles para α.

Ejemplo de cantidad de valuaciones posibles:

Considere $\alpha = (r \rightarrow s) \wedge (\neg s)$. Tiene 2 letras proposicionales (r, s), por lo que existen $2^2 = 4$ valuaciones posibles para α. Complete la tabla de verdad siguiente con los correspondientes valores de verdad.

r	s	$(r \rightarrow s)$	$(\neg s)$	$(r \rightarrow s) \wedge (\neg s)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Observación: La tabla de verdad no es más que un mecanismo gráfico para ver cómodamente todas las posibles valuaciones de una proposición.

Ejemplo de cantidad de valuaciones posibles:

Considere $\alpha = (r \to s) \wedge (\neg s)$. Tiene 2 letras proposicionales (r, s), por lo que existen $2^2 = 4$ valuaciones posibles para α. Complete la tabla de verdad siguiente con los correspondientes valores de verdad.

r	s	$(r \to s)$	$(\neg s)$	$(r \to s) \wedge (\neg s)$
0	0	1		
0	1	1		
1	0	0		
1	1	1		

Atención: solo es posible construir una tabla de verdad cuando tenemos letras proposicionales, como en este caso.

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Ejemplo de cantidad de valuaciones posibles</u>:

Considere $\alpha = (r \rightarrow s) \wedge (\neg s)$. Tiene 2 letras proposicionales (r, s), por lo que existen $2^2 = 4$ valuaciones posibles para α. Complete la tabla de verdad siguiente con los correspondientes valores de verdad.

r	s	$(r \rightarrow s)$	$(\neg s)$	$(r \rightarrow s) \wedge (\neg s)$
0	0	1	1	
0	1	1	0	
1	0	0	1	
1	1	1	0	

Atención: solo es posible construir una tabla de verdad cuando tenemos letras proposicionales, como en este caso.

Ejemplo de cantidad de valuaciones posibles:

Considere $\alpha = (r \to s) \wedge (\neg s)$. Tiene 2 letras proposicionales (r, s), por lo que existen $2^2 = 4$ valuaciones posibles para α. Complete la tabla de verdad siguiente con los correspondientes valores de verdad.

r	s	$(r \to s)$	$(\neg s)$	$(r \to s) \wedge (\neg s)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Atención: solo es posible construir una tabla de verdad cuando tenemos letras proposicionales, como en este caso.

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

• **Tautología**: Sea $\alpha \in$ PROP una proposición. Decimos que α es una tautología $\Leftrightarrow$ todas sus posibles valuaciones cumplen que $v(\alpha) = 1$.

• **Contradicción**: Sea $\alpha \in$ PROP una proposición. Decimos que α es una contradicción $\Leftrightarrow$ todas sus posibles valuaciones cumplen que $v(\alpha) = 0$.

• **Contingencia**: Sea $\alpha \in$ PROP una proposición. Decimos que α es una contingencia $\Leftrightarrow$ α no es tautología ni contradicción.

Ejemplos de tautología, contradicción, contingencia:

1) Considere nuevamente la proposición $\alpha = (r \to s) \wedge (\neg s)$ del último ejemplo. ¿es tautología? ¿contradicción? ¿contingencia?

2) Sea $\beta = (p \vee \neg p)$ ¿es tautología? ¿contradicción? ¿contingencia?

3) Sea $\delta = (p \wedge \perp)$ ¿es tautología? ¿contradicción? ¿contingencia?

Ejemplos de tautología, contradicción, contingencia:

1) Considere nuevamente la proposición $\alpha = (r \to s) \wedge (\neg s)$ del último ejemplo. ¿es tautología? ¿contradicción? ¿contingencia?

Es CONTINGENCIA, ya que como se vio en la tabla de verdad, en algún caso el valor de verdad es 0, en otro 1

2) Sea $\beta = (p \vee \neg p)$ ¿es tautología? ¿contradicción? ¿contingencia?

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Es una TAUTOLOGÍA, ya que todas sus valuaciones son = 1

3) Sea $\delta = (p \wedge \perp)$ ¿es tautología? ¿contradicción? ¿contingencia?

p	$\perp$	$p \wedge \perp$
0	0	0
1	0	0

Es una CONTRADICCIÓN, ya que todas sus valuaciones son = 0

<u>Semántica de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

<u>Notación</u>:

- Cuando una proposición α es tautología, se escribe $\models \alpha$.
- Cuando una proposición α **no** es tautología, se escribe $\not\models \alpha$.
- **No** existe notación especial para denotar contradicción o contingencia.

Las **tautologías** son proposiciones interesantes porque son siempre verdaderas, **sin importar** el valor de verdad de sus letras proposicionales. Se consideran **verdades universales** de la lógica proposicional.

Por ejemplo, la clásica frase "*Llueve o no llueve*" puede expresarse con la proposición ($\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{p}$). Esta frase es siempre verdadera, sin importar si en un instante dado efectivamente está lloviendo o no.

La mayoría de las proposiciones que existen son contingencias. La minoría de PROP está formada por tautologías y por contradicciones.

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

Consecuencia lógica: Sea $\Gamma \subseteq$ PROP un conjunto de proposiciones y sea $\alpha \in$ PROP una proposición. Se cumple que α es consecuencia lógica de Γ si y sólo si para toda valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$ se cumple que $v(\alpha) = 1$.

Notación:

- La notación $v(\Gamma) = 1$ denota que para toda $\delta \in \Gamma$ se cumple $v(\delta) = 1$.
- La notación $\Gamma \models \alpha$ denota que α es consecuencia lógica de Γ.
- La notación $\Gamma \not\models \alpha$ denota que α **no** es consecuencia lógica de Γ.

La definición de consecuencia lógica constituye un concepto central dentro de la semántica. En forma intuitiva, que α sea consecuencia lógica de Γ significa que α es verdadera siempre que todas las proposiciones de Γ sean también verdaderas.

Solamente en el caso de que α sea falsa cuando las proposiciones de Γ son verdaderas es que decimos que α **no es** consecuencia lógica de Γ.

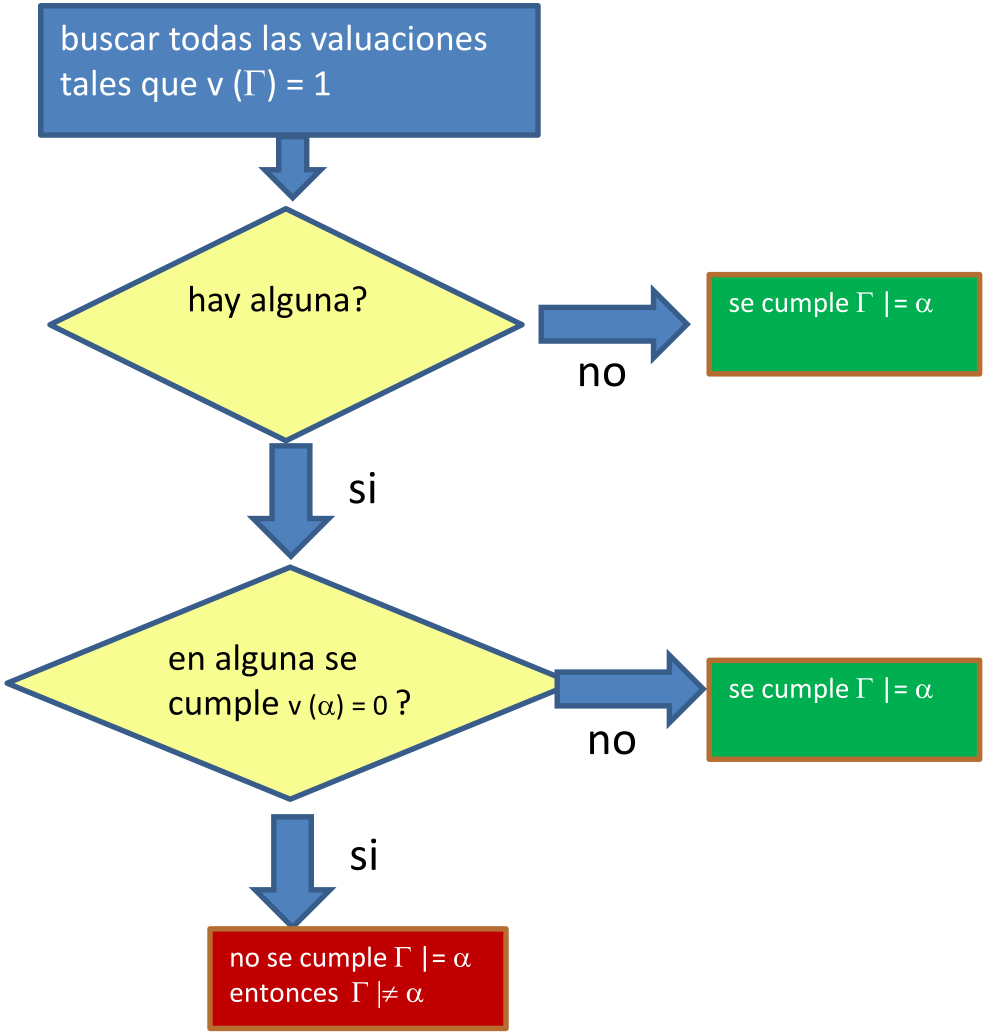
Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

El siguiente **algoritmo** determina si α es o no consecuencia lógica de Γ:

Entrada: Conjunto de proposiciones Γ, proposición α. **Salida**: Indicación de si α es o no consecuencia lógica de Γ. **Método**:

Buscar todas las valuaciones tales que $v(\Gamma) = 1$ (es decir, todas las valuaciones en las que las proposiciones de Γ valen todas 1)

Si no hay ninguna **entonces**
    α **es** consecuencia lógica de Γ (o sea, $\Gamma \models \alpha$)
Sino
    Ver si en alguna de esas valuaciones se cumple $v(\alpha) = 0$
    Si se cumple $v(\alpha) = 0$ **entonces**
        α **no es** consecuencia lógica de Γ (o sea, $\Gamma \not\models \alpha$)
    Sino
        α **es** consecuencia lógica de Γ (o sea, $\Gamma \models \alpha$)
    Fin
Fin


buscar todas las valuaciones tales que v (Γ) = 1
hay alguna?
no
se cumple Γ |= α
si
en alguna se cumple v (α) = 0 ?
no
se cumple Γ |= α
si
no se cumple Γ |= α entonces Γ |≠ α

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

Ejemplos de Consecuencia lógica:

1) **Se quiere determinar si: $\neg(p \wedge q), (p \rightarrow q) \models (\neg p)$.**

   a. **¿Cuál es el conjunto Γ en este caso?**
   b. **¿Cuál es la proposición α en este caso?**
   c. **Aplicar el algoritmo para determinar si $\Gamma \models \alpha$.**

a. $\Gamma = \neg(p \wedge q), (p \rightarrow q)$

b. $\alpha = (\neg p)$

c. Como se trata de proposiciones compuestas por letras proposicionales, se puede construir una tabla, como se muestra a continuación:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
0	0	0			
0	1	0			
1	0	0			
1	1	1			

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \to q$	$\neg p$
0	0	0	1		
0	1	0	1		
1	0	0	1		
1	1	1	0		

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
0	0	0	1	1	
0	1	0	1	1	
1	0	0	1	0	
1	1	1	0	1	

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

			$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\Gamma}$		$\overbrace{\qquad}^{\alpha}$
p	**q**	**$p \wedge q$**	**$\neg(p \wedge q)$**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg p$**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

Se marca en las columnas azul y verde, las valuaciones de las dos proposiciones que componen el conjunto Γ.
Se destaca en color naranja la columna con las valuaciones de la proposición α .

$$\overbrace{\neg(p \wedge q) \quad p \to q}^{\Gamma} \quad \overbrace{\neg p}^{\alpha}$$

p	q	p ∧ q	¬(p ∧ q)	p → q	¬p
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

Se marca en las columnas azul y verde, las valuaciones de las dos proposiciones que componen el conjunto Γ.
Se destaca en color naranja la columna con las valuaciones de la proposición α .
Siguiendo el algoritmo, existe alguna valuación de $\Gamma = 1$ (hay dos), y se señalan en rojo las dos filas en las que se cumple que $v(\Gamma) = 1$

			Γ		α
p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

Se marca en las columnas azul y verde, las valuaciones de las dos proposiciones que componen el conjunto Γ.
Se destaca en color naranja la columna con las valuaciones de la proposición α .
Siguiendo el algoritmo, existe alguna v(Γ) $= 1$ (hay dos), y se señalan en rojo las dos filas en las que se cumple que $v(\Gamma) = 1$.
Siguiendo el algoritmo, para esos casos, también ocurre que v(α) = 1, por lo que la consecuencia lógica se cumple.
Por lo tanto es cierto que $\Gamma \models \alpha$.

Semántica de la Lógica Proposicional (continuación):

Ejemplos de Consecuencia lógica:

2) Se tienen dos proposiciones α, $\beta \in$ PROP. Se sabe que α es una contradicción y que $\neg\alpha \models \beta$. Se quiere determinar si $\models \beta$.

a. **¿Se sabe cuántas letras proposicionales tienen α y β?**
b. **¿Podemos dibujar tabla de verdad para resolver el problema?**
c. **Enunciar el problema como un teorema (hipótesis y tesis).**
d. **Demostrar el teorema o refutarlo mediante un contraejemplo.**

a. En este caso no se sabe cuántas letras proposicionales tienen α y β

b. Por lo anterior, no se puede dibujar la tabla de verdad ya que no sabemos cuántas filas tendría.

c. Hipótesis: α es contradicción.

$\neg\alpha \models \beta$

Tesis: $\models \beta$

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

d. Demostrar el teorema o refutarlo mediante un contraejemplo.

d. H1 . α es contradicción.

H2. $\neg\alpha \models \beta$

T . $\models \beta$

Dem. por prueba directa:

por Hip. 1 α es contradicción

$\Rightarrow$ v(α) = 0 siempre (por def. de contradicción)

$\Rightarrow$ v($\neg\alpha$) = 1 siempre (por valuación para caso del $\neg$). (1)

por Hip. 2 $\neg\alpha \models \beta$

=> siempre que v($\neg\alpha$) = 1, se cumple que v(β) = 1 (2)

Por (1) y (2), tenemos que v(β) = 1 siempre

$\Rightarrow \beta$ es tautología (por definición de tautología)

$\Rightarrow \models \beta$ **q.e.d**

Deducción Natural de la Lógica Proposicional:

Es la tercera área de estudio de la lógica proposicional. Se encarga de establecer técnicas para la correcta escritura de pruebas matemáticas basadas en proposiciones.

Un aspecto que ha preocupado mucho a los matemáticos a lo largo de la historia es la manera de escribir demostraciones (pruebas) matemáticas en forma correcta, legible y libre de ambigüedades.

La deducción natural es un área dentro de la lógica que busca formalizar la manera en la cual escribimos demostraciones. Se ocupa de definir reglas precisas para la escritura de demostraciones basadas en el uso de proposiciones lógicas.

La deducción natural se llama así porque parte de la manera en la cual las personas naturalmente escriben demostraciones y luego las traduce a símbolos de la lógica.

Deducción Natural de la Lógica Proposicional (continuación):

A modo de ejemplo introductorio, consideremos el siguiente enunciado:

Teorema de la lluvia:

Hipótesis: 1) Llueve.
2) Cuando llueve, la calle se moja.
3) Cuando la calle se moja, la gente se resbala.

Tesis: La gente se resbala.

Demostración:

Por hip 1), llueve

Por hip 2), cuando llueve, la calle se moja

la calle se moja

Por hip 3), cuando la calle se moja, la gente se resbala

la gente se resbala (LQQD)

<u>Deducción Natural de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

Supongamos ahora que tenemos las siguientes letras proposicionales:

- p = “Llueve”
- q = “La calle se moja”
- r = “La gente se resbala”

Podemos entonces re-escribir el teorema de la lluvia del siguiente modo:

<u>Hipótesis</u>: p, $p \to q$, $q \to r$

<u>Tesis</u>: r

<u>Demostración</u>: p

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p \\ p \to q \end{array}\right\} \Rightarrow q \\ q \to r \end{array}\right\} \Rightarrow r$$

<u>Observación</u>: Nótese que la prueba tiene forma de **árbol**. En la **raíz** se ubica la **tesis**, mientras que en las **hojas** se encuentran las **hipótesis**.

<u>Deducción Natural de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

La deducción natural propone escribir las pruebas matemáticas en forma de árbol. A éste árbol lo llama **árbol de derivación** y es tal que:

- En las **hojas** del árbol se ubican las **hipótesis**.
- En la **raíz** del árbol de ubica la **conclusión** (o tesis).
- En los niveles intermedios se aplican **reglas de derivación**.

En deducción natural, los árboles de derivación se dibujan en forma vertical, con la **raíz** (conclusión) en la parte **inferior** y las **hojas** (hipótesis) en la parte **superior**.

Dibujamos nuevamente el árbol de derivación para el teorema de la lluvia:

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad\qquad p \rightarrow q}{q}\ \text{(regla)} \qquad\qquad q \rightarrow r}{r}\ \text{(regla)}$$

Deducción Natural de la Lógica Proposicional (continuación):

Consecuencia sintáctica: Sea $\Gamma \subseteq$ PROP un conjunto de proposiciones y sea $\alpha \in$ PROP una proposición. Se dice que α es consecuencia sintáctica de $\Gamma \Leftrightarrow$ existe un árbol de derivación D tal que H(D) $\subseteq \Gamma$ y C(D) = α.

Notación:

- La notación H(D) denota el conjunto de hipótesis (hojas) del árbol D.
- La notación C(D) denota la conclusión (raíz) del árbol D.
- La notación $\Gamma \vdash \alpha$ denota que α es consecuencia sintáctica de Γ.
- La notación $\Gamma \nvdash \alpha$ denota que α **no** es consecuencia sintáctica de Γ.

En forma intuitiva, que α sea consecuencia sintáctica de Γ significa que α se puede **demostrar** mediante un árbol de derivación a partir de hipótesis contenidas en el conjunto Γ.

Observación: NO confundir el concepto de consecuencia **sintáctica** con el de consecuencia **lógica**, pertenecen a áreas de estudio **diferentes**.

<u>Deducción Natural de la Lógica Proposicional (continuación)</u>:

En resumen, el enunciado correspondiente al **teorema de la lluvia** puede expresarse mediante la siguiente **consecuencia sintáctica**:

$$\mathbf{p},\ \mathbf{p \to q},\ \mathbf{q \to r} \vdash \mathbf{r}$$

Dicha consecuencia sintáctica efectivamente se cumple, ya que existe un árbol de derivación cuyas hipótesis (hojas) son **p**, **p** $\to$ **q**, **q** $\to$ **r** y cuya conclusión (raíz) es **r.**

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad\qquad p \to q}{q}\,(\to E) \qquad\qquad q \to r}{r}\,(\to E)$$

La noción de **consecuencia sintáctica** en deducción natural corresponde al concepto de **teorema** visto antes en el curso. Las **hipótesis** se escriben delante del símbolo $\vdash$, la **tesis** se escribe luego del símbolo $\vdash$ y la **demostración** se escribe en forma de árbol de derivación.

Reglas de Deducción Natural:

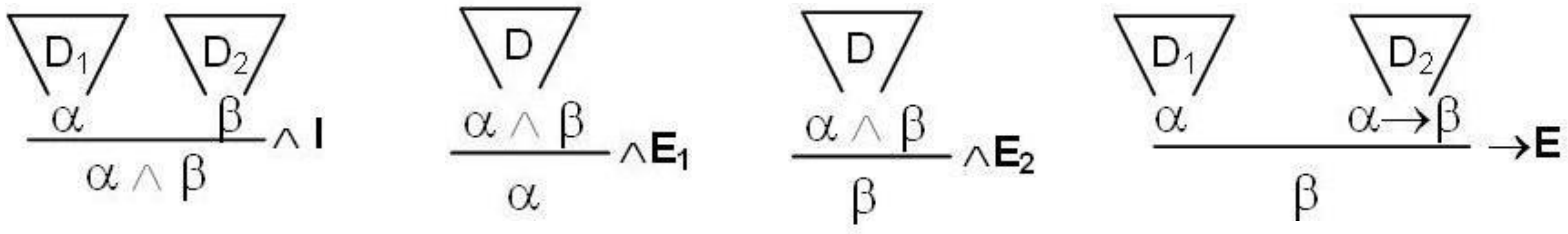
Dijimos anteriormente que en los niveles intermedios de un árbol de derivación se aplican **reglas**. Dichas reglas se llaman reglas de **derivación** o reglas de **deducción natural**.

Existen 15 reglas de deducción natural que podemos utilizar en nuestros árboles de derivación. Dichas reglas están basadas en razonamientos habitualmente utilizados al escribir demostraciones matemáticas.

Cada regla tiene un nombre y un contexto de aplicación (veremos c/u de ellas). Los nombres de las reglas existentes son los siguientes:

introducción de $\wedge$	**introducción 1 de $\vee$**	**introducción de $\leftrightarrow$**
eliminación 1 de $\wedge$	**introducción 2 de $\vee$**	**eliminación de $\neg$**
eliminación 2 de $\wedge$	**eliminación de $\vee$**	**introducción de $\neg$**
eliminación de $\rightarrow$	**eliminación 1 de $\leftrightarrow$**	**eliminación de $\perp$**
introducción de $\rightarrow$	**eliminación 2 de $\leftrightarrow$**	**reducción al absurdo**

Reglas de Deducción Natural (continuación):

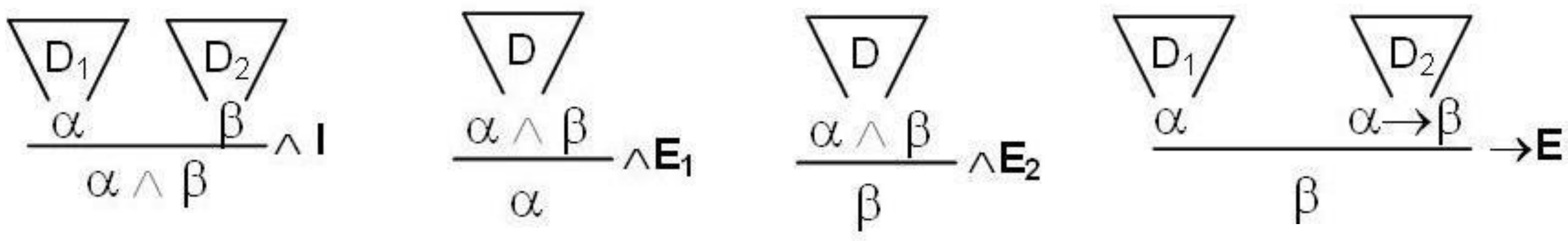


- La regla **($\wedge$ I)** dice que si en una rama concluimos α y en la otra rama concluimos β, entonces podemos concluir **($\alpha \wedge \beta$).**
- La regla **($\wedge$ E$_1$)** dice que si concluimos **($\alpha \wedge \beta$)**, entonces podemos concluir α. La regla **($\wedge$ E$_2$)** es análoga, sólo que para concluir β.
- La regla **($\rightarrow$ E)** dice que si en una rama concluimos α y en la otra rama concluimos **($\alpha \rightarrow \beta$)**, entonces podemos concluir β.

1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: ($\alpha \rightarrow \beta$), ($\alpha \wedge \delta$) $\vdash$ ($\beta \wedge \delta$)

Reglas de Deducción Natural (continuación):



1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

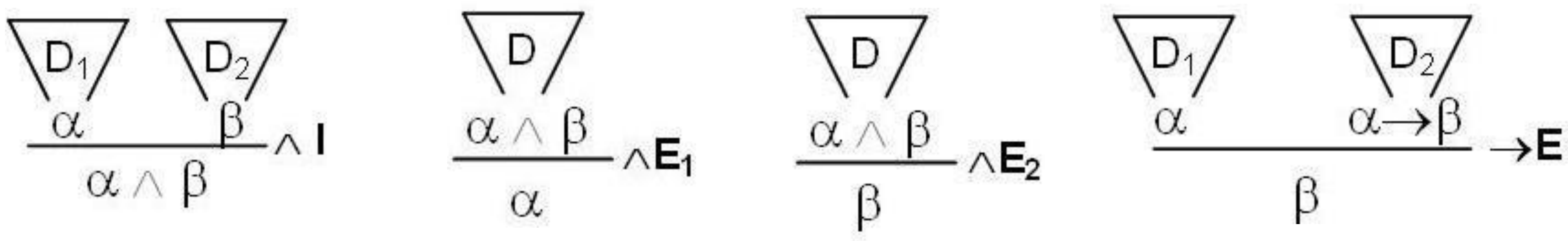
$$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \beta\end{matrix}}{\alpha \wedge \beta}\wedge I \qquad \dfrac{\begin{matrix}D\\ \alpha \wedge \beta\end{matrix}}{\alpha}\wedge E_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}D\\ \alpha \wedge \beta\end{matrix}}{\beta}\wedge E_2 \qquad \dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \alpha\rightarrow\beta\end{matrix}}{\beta}\rightarrow E$$

1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$(\alpha \wedge \delta)$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

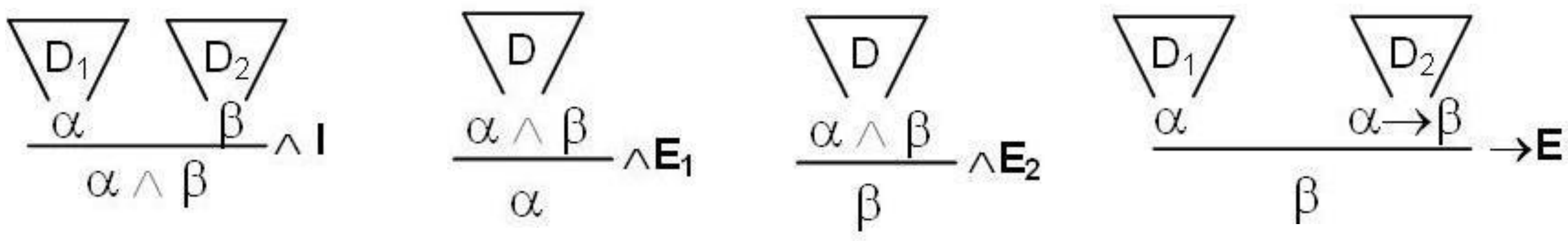


1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$$\frac{(\alpha \wedge \delta)}{\alpha}\ (\wedge E_1)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

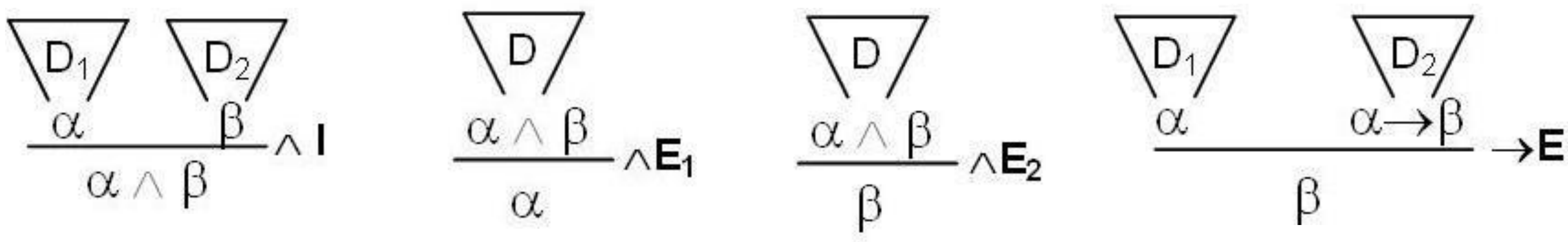


1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$$\frac{(\alpha \wedge \delta)}{\alpha}\,(\wedge E_1) \qquad\qquad (\alpha \rightarrow \beta)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$$\dfrac{\dfrac{(\alpha \wedge \delta)}{\alpha}\,(\wedge\, E_1) \qquad (\alpha \to \beta)}{\beta}\,(\to E)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

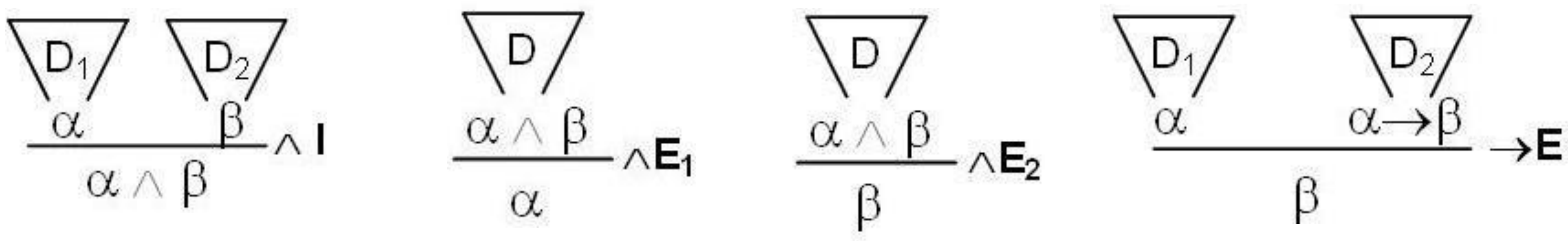
$$\frac{\overset{D_1}{\alpha} \qquad \overset{D_2}{\beta}}{\alpha \wedge \beta} \wedge \mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\overset{D}{\alpha \wedge \beta}}{\alpha} \wedge \mathbf{E_1} \qquad\qquad \frac{\overset{D}{\alpha \wedge \beta}}{\beta} \wedge \mathbf{E_2} \qquad\qquad \frac{\overset{D_1}{\alpha} \qquad \overset{D_2}{\alpha \to \beta}}{\beta} \to \mathbf{E}$$

1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$$\frac{\dfrac{(\alpha \wedge \delta)}{\alpha}\,(\wedge E_1) \qquad (\alpha \to \beta)}{\beta}\,(\to E) \qquad\qquad (\alpha \wedge \delta)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

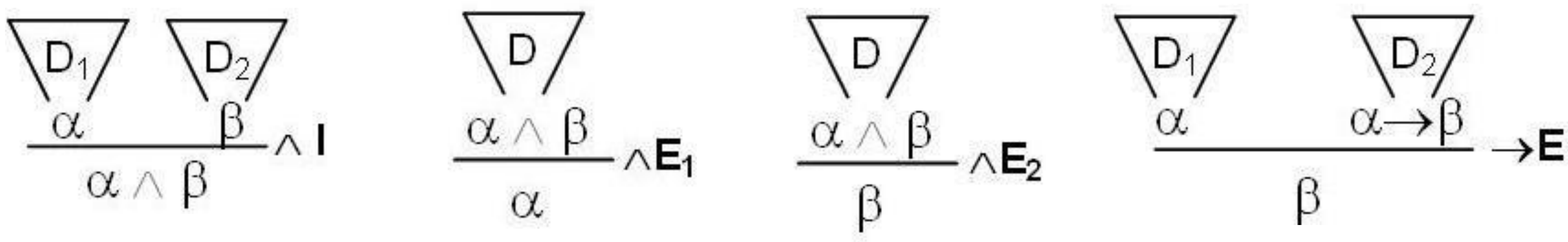


1º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$$\dfrac{\dfrac{(\alpha \wedge \delta)}{\alpha}\,(\wedge E_1) \qquad\qquad (\alpha \to \beta)}{\beta}\,(\to E) \qquad\qquad \dfrac{(\alpha \wedge \delta)}{\delta}\,(\wedge E_2)$$

<u>Reglas de Deducción Natural (continuación)</u>:

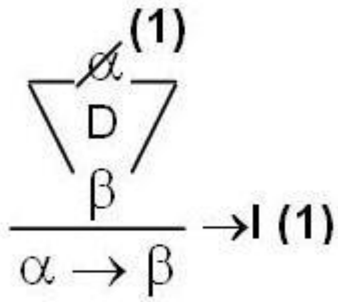


<u>1º ejemplo de deducción natural</u>:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta), (\alpha \wedge \delta) \vdash (\beta \wedge \delta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha \wedge \delta)}{\alpha}\,(\wedge E_1) \qquad (\alpha \to \beta)}{\beta}\,(\to E) \qquad \dfrac{(\alpha \wedge \delta)}{\delta}\,(\wedge E_2)}{(\beta \wedge \delta)}\,(\wedge I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



•La regla **($\rightarrow$ I)** dice que, si partiendo de α concluimos β, podemos concluir **($\alpha \rightarrow \beta$).**

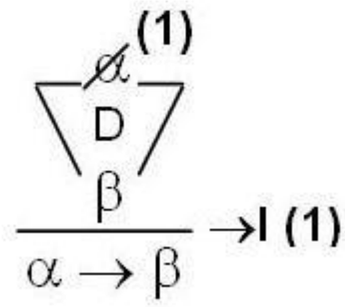
•Esta regla tiene la particularidad de que **cancela** la hipótesis α. Esto significa que, al momento de aplicar la regla, hay que cancelar todas las hojas en las que α figure como hipótesis. Una vez cancelada, α **no** podrá ser usada nuevamente como hipótesis en niveles posteriores.

•**Observación:** Podría llegar a suceder que **todas** las hipótesis del árbol resulten canceladas. En tal caso, el conjunto Γ de la consecuencia sintáctica es el conjunto **vacío**.

2º ejemplo de deducción natural:

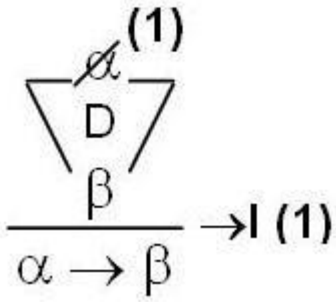
Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \delta)) \rightarrow \alpha \rightarrow \delta$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



2º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta, \delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$



Reglas de Deducción Natural (continuación):

2º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \land \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$(\alpha \to (\beta \land \delta)) \to \alpha \to \delta$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ \mathrm{D}\\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ \to I\ (1)$$

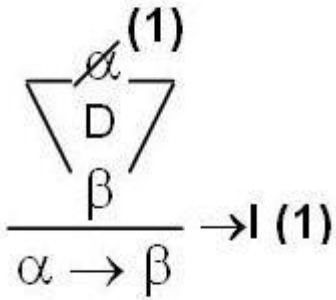
2º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$(\alpha \to (\beta \wedge \delta))$$

$$\dfrac{\alpha \to \delta}{(\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta}\ (\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



2º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$\alpha \qquad\qquad\qquad (\alpha \to (\beta \wedge \delta))$$

$$\dfrac{\dfrac{\delta}{\alpha \to \delta}\ (\to I)}{(\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta}\ (\to I)$$

<u>Reglas de Deducción Natural (continuación)</u>:

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ \mathrm{D}\\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ \to I\ (1)$$

<u>2º ejemplo de deducción natural</u>:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$\dfrac{\alpha \qquad\qquad (\alpha \to (\beta \wedge \delta))}{\beta \wedge \delta}\ (\to E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\delta}{\alpha \to \delta}\ (\to I)}{(\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta}\ (\to I)$$

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Reglas de Deducción Natural (continuación)</u>:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ \nabla D \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ \to I\ (1)$$

<u>2º ejemplo de deducción natural</u>:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad (\alpha \to (\beta \wedge \delta))}{\beta \wedge \delta}\ (\to E)}{\delta}\ (\wedge E_2)}{\alpha \to \delta}\ (\to I)}{(\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta}\ (\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ D\\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ \to I\ (1)$$

2º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}} \qquad (\alpha \to (\beta \wedge \delta))}{\beta \wedge \delta}\,(\to E)}{\delta}\,(\wedge E_2)}{\alpha \to \delta}\,(\to I)\ (1)}{(\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta}\,(\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ \nabla\!\!\!\!\!\ D \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta} \to I\ (1)$$

2º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β, $\delta \in$ PROP tres proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(2)}{\cancel{(\alpha \to (\beta \wedge \delta))}}}{\beta \wedge \delta}\,(\to E)}{\delta}\,(\wedge E_2)}{\alpha \to \delta}\,(\to I)\ (1)}{(\alpha \to (\beta \wedge \delta)) \to \alpha \to \delta}\,(\to I)\ (2)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{matrix}D\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha \vee \beta}\vee I_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}D\\ \beta\end{matrix}}{\alpha \vee \beta}\vee I_2 \qquad \dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \alpha \vee \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ D_2\\ \delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\beta}^{(1)}\\ D_3\\ \delta\end{matrix}}{\delta}\vee E\ (1)$$

- La regla **($\vee$ I_1)** dice que si concluimos α, entonces podemos concluir **($\alpha \vee \beta$)**. La regla **($\vee$ I_2)** es análoga, sólo que habiendo concluido β.
- La regla **($\vee$ E)** dice que si concluimos **($\alpha \vee \beta$)** y tanto de α como de β logramos concluir δ, entonces la conclusión final es δ. Esta regla, como la introducción del $\rightarrow$, exige **cancelar** hipótesis. Concretamente, exige cancelar α en la 2º rama y cancelar β en la 3º rama.

3º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

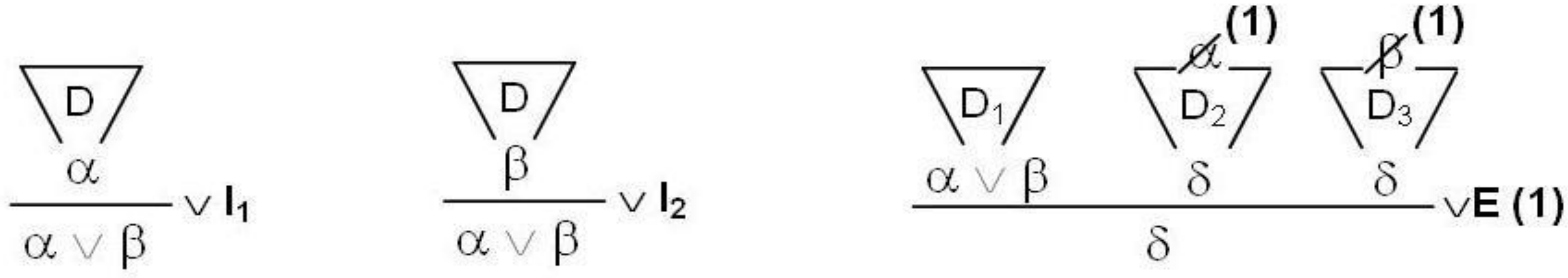
Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\frac{\begin{array}{c} D \\ \alpha \end{array}}{\alpha \vee \beta} \vee I_1 \qquad \frac{\begin{array}{c} D \\ \beta \end{array}}{\alpha \vee \beta} \vee I_2 \qquad \frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \vee \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\alpha}^{(1)} \\ D_2 \\ \delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\beta}^{(1)} \\ D_3 \\ \delta \end{array}}{\delta} \vee E\ (1)$$

3º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

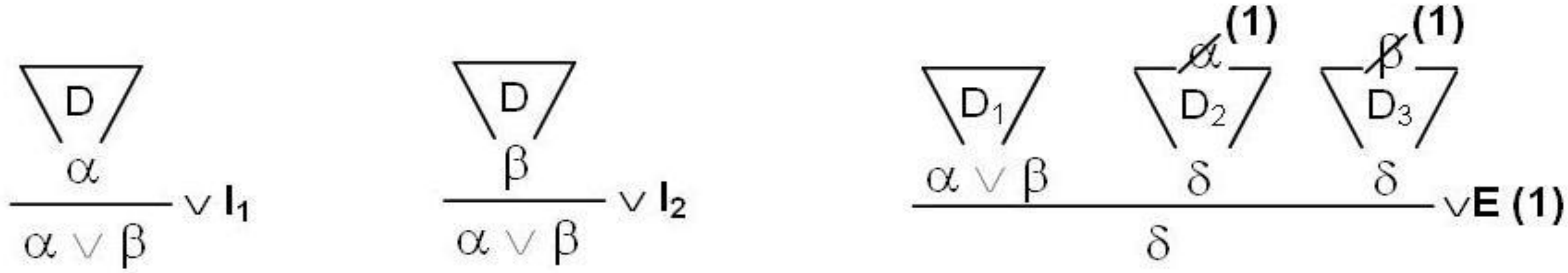


3º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



3º ejemplo de deducción natural:

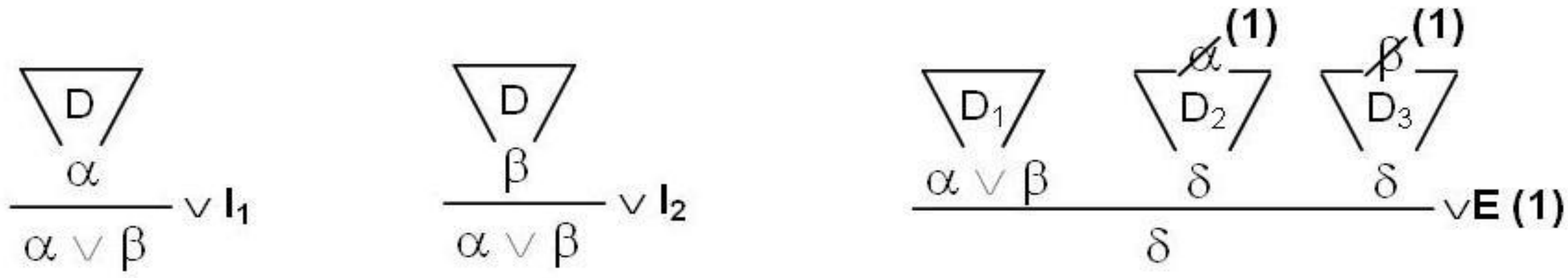
Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$(\alpha \vee \beta)$$

$$\dfrac{(\beta \vee \alpha)}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)}\ (\rightarrow I)$$

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Reglas de Deducción Natural (continuación):



3º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$\alpha \qquad\qquad \beta$$

$$\dfrac{(\alpha \vee \beta)}{(\beta \vee \alpha)} \; (\vee E)$$

$$\dfrac{(\beta \vee \alpha)}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)} \; (\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

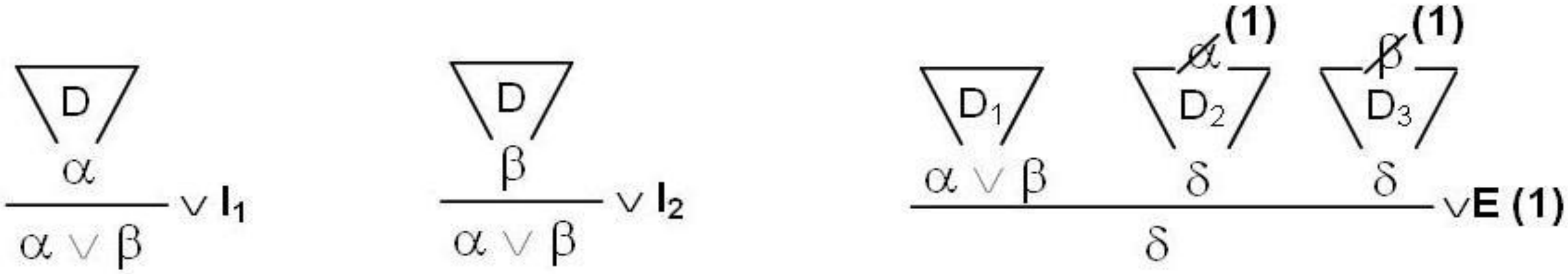
$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \alpha \end{array}}{\alpha \vee \beta}\ \vee I_1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \beta \end{array}}{\alpha \vee \beta}\ \vee I_2 \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \vee \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\alpha}^{(1)} \\ D_2 \\ \delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\beta}^{(1)} \\ D_3 \\ \delta \end{array}}{\delta}\ \vee E\ (1)$$

3º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{(\alpha \vee \beta) \qquad \dfrac{\alpha}{(\beta \vee \alpha)}(\vee I_1) \qquad \beta}{(\beta \vee \alpha)}(\vee E)}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)}(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



3º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{(\alpha \vee \beta) \qquad \dfrac{\alpha}{(\beta \vee \alpha)}(\vee I_1) \qquad \dfrac{\beta}{(\beta \vee \alpha)}(\vee I_2)}{(\beta \vee \alpha)}(\vee E)}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)}(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{matrix} \nabla^{D} \\ \alpha \end{matrix}}{\alpha \vee \beta} \vee I_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix} \nabla^{D} \\ \beta \end{matrix}}{\alpha \vee \beta} \vee I_2 \qquad \dfrac{\begin{matrix} \nabla^{D_1} \\ \alpha \vee \beta \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{\alpha}^{(1)} \\ \nabla^{D_2} \\ \delta \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{\beta}^{(1)} \\ \nabla^{D_3} \\ \delta \end{matrix}}{\delta} \vee E\ (1)$$

3º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{(\alpha \vee \beta) \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}}}{(\beta \vee \alpha)}(\vee I_1) \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\beta}}}{(\beta \vee \alpha)}(\vee I_2)}{(\beta \vee \alpha)}(\vee E)\ (1)}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)}(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

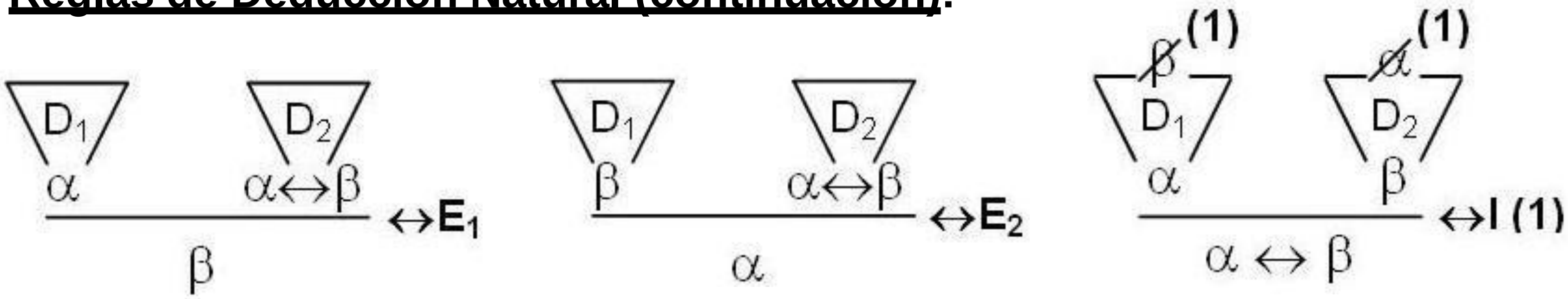
$$\dfrac{\overset{D}{\alpha}}{\alpha \vee \beta}\ \vee I_1 \qquad\qquad \dfrac{\overset{D}{\beta}}{\alpha \vee \beta}\ \vee I_2 \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha \vee \beta} \quad \overset{\overset{\cancel{\alpha}\,(1)}{D_2}}{\delta} \quad \overset{\overset{\cancel{\beta}\,(1)}{D_3}}{\delta}}{\delta}\ \vee E\ (1)$$

3º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{(\alpha \vee \beta)}} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}}}{(\beta \vee \alpha)}(\vee I_1) \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\beta}}}{(\beta \vee \alpha)}\ (\vee I_2)}{(\beta \vee \alpha)}\ (\vee E)\ (1)}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)}\ (\rightarrow I)\ (2)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



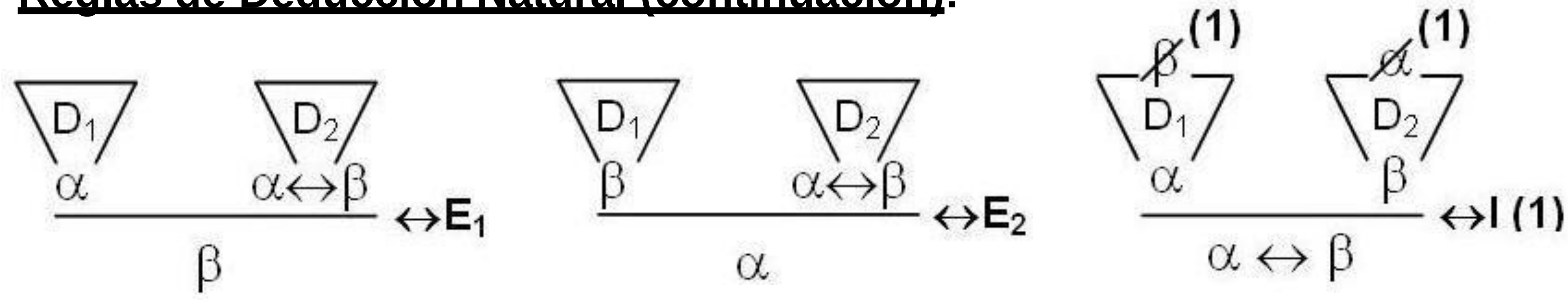
- La regla **(↔ E_1)** dice que si en una rama concluimos α y en la otra rama concluimos **(**$\alpha \leftrightarrow \beta$**)**, entonces podemos concluir β. **(↔ E_2)** es análoga.
- La regla **(↔ I)** dice que si, partiendo de β concluimos α y partiendo de α concluimos β, entonces podemos concluir **(**$\alpha \leftrightarrow \beta$**)**. Esta regla, como la introducción del $\rightarrow$, exige **cancelar** hipótesis. Concretamente, exige cancelar β en la 1º rama y cancelar α en la 2º rama.

4º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

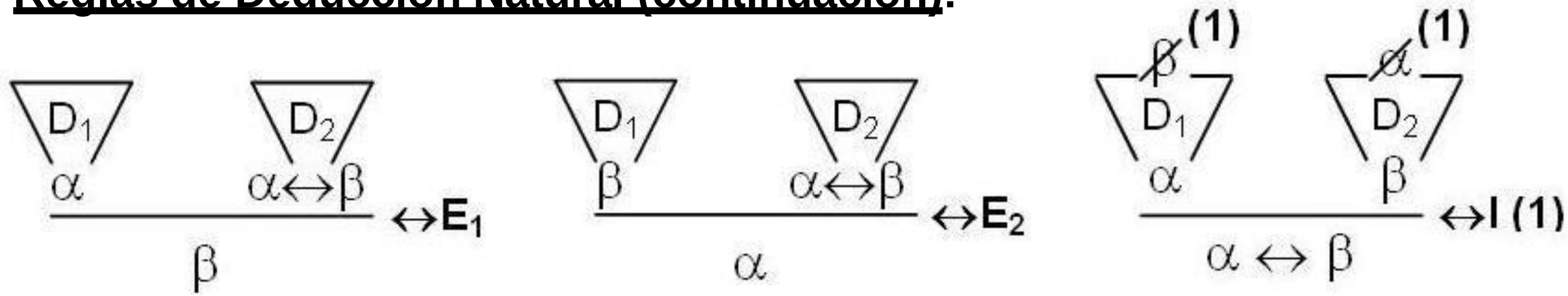
Reglas de Deducción Natural (continuación):



4º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

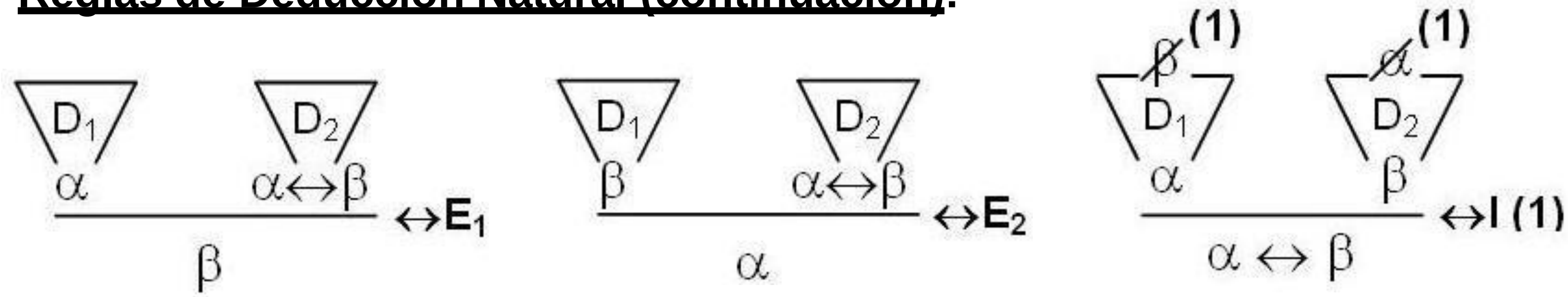


4º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

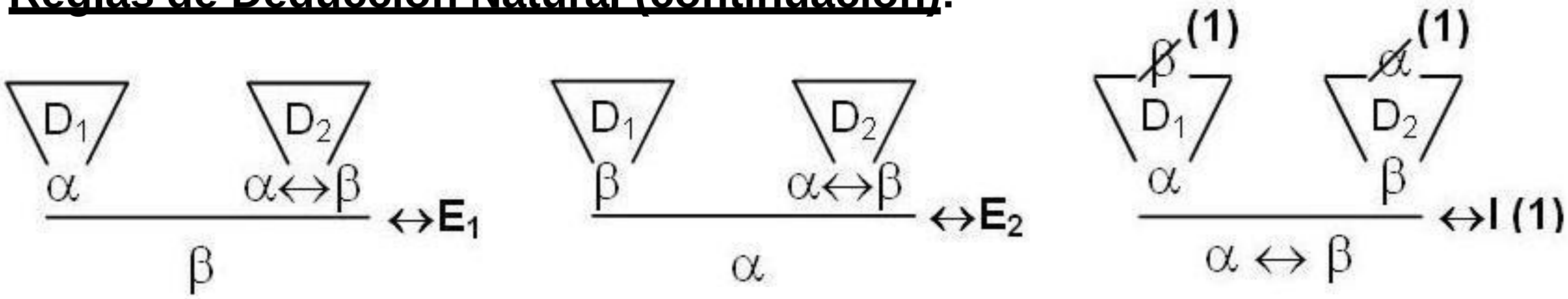


4º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\frac{\alpha \qquad\qquad\qquad \beta}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}\ (\leftrightarrow \mathrm{I})$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

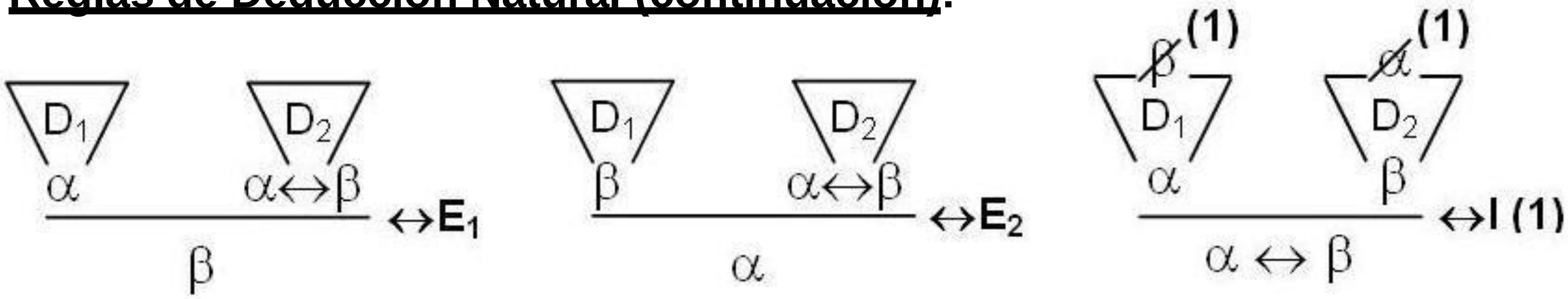


4º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\begin{array}{c} \beta \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \\ \alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta \\ \hline (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{array} \; (\leftrightarrow \mathrm{I})$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



4º ejemplo de deducción natural:

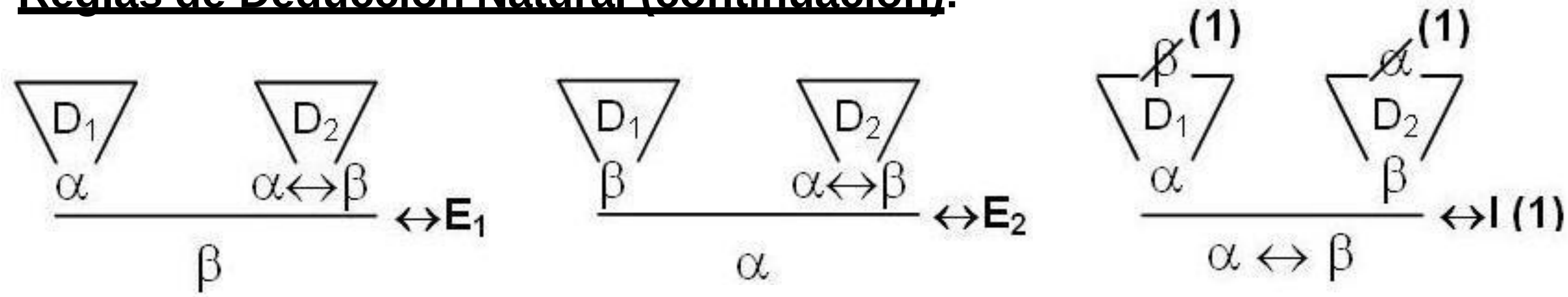
Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\beta \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha$$

$$\dfrac{\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}\ (\leftrightarrow \mathrm{I})$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



4º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\beta \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\beta \to \alpha}\,(\wedge E_2) \qquad \alpha$$

$$\dfrac{\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad \beta}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}\,(\leftrightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \alpha\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix}D_2\\ \alpha\leftrightarrow\beta\end{matrix}}{\beta}\leftrightarrow E_1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \beta\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix}D_2\\ \alpha\leftrightarrow\beta\end{matrix}}{\alpha}\leftrightarrow E_2 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\cancel{\beta}^{(1)}\\ D_1\\ \alpha\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ D_2\\ \beta\end{matrix}}{\alpha\leftrightarrow\beta}\leftrightarrow I\ (1)$$

4º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\beta \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\beta \to \alpha}(\wedge E_2)}{\alpha}(\to E) \qquad\qquad \begin{matrix}\alpha\\ \\ \beta\end{matrix}}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}(\leftrightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

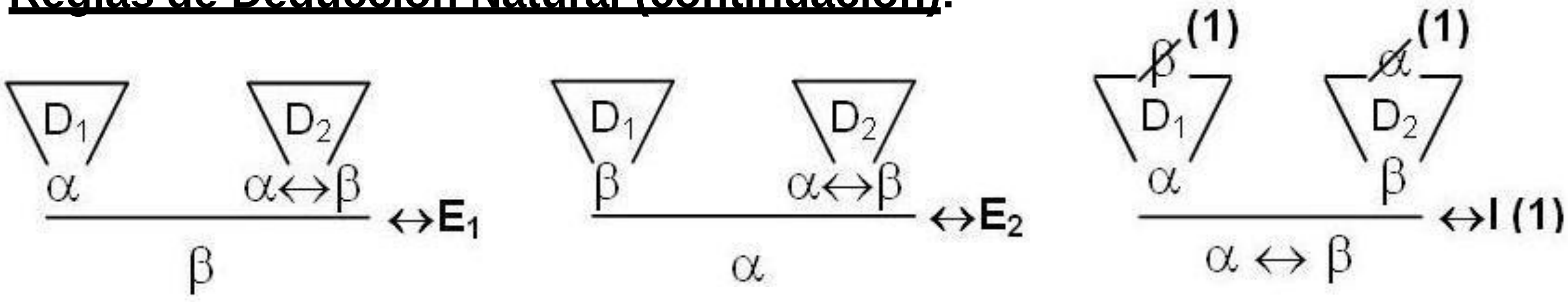
$$\frac{\overset{\mathcal{D}_1}{\alpha} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{\alpha \leftrightarrow \beta}}{\beta} \leftrightarrow E_1 \qquad\qquad \frac{\overset{\mathcal{D}_1}{\beta} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{\alpha \leftrightarrow \beta}}{\alpha} \leftrightarrow E_2 \qquad\qquad \frac{\overset{\overset{\cancel{\beta}^{(1)}}{\mathcal{D}_1}}{\alpha} \qquad \overset{\overset{\cancel{\alpha}^{(1)}}{\mathcal{D}_2}}{\beta}}{\alpha \leftrightarrow \beta} \leftrightarrow I\ (1)$$

4º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\beta \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\beta \to \alpha}\ (\wedge E_2)}{\alpha}\ (\to E) \qquad \begin{matrix} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\ \alpha \\ \beta \end{matrix}}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}\ (\leftrightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

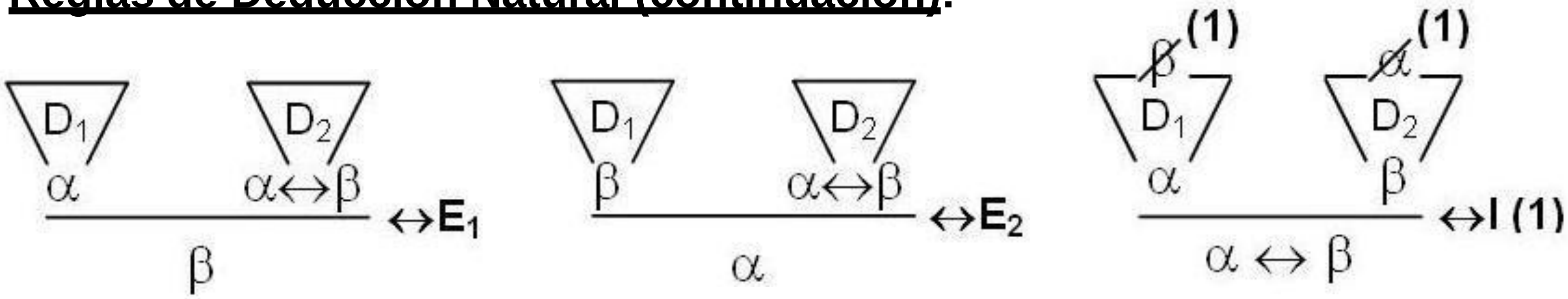


4º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\beta \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\beta \to \alpha}\,(\wedge E_2)}{\alpha}\,(\to E) \qquad \begin{array}{c}\alpha \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\alpha \to \beta}\,(\wedge E_1) \\ \beta\end{array}}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}\,(\leftrightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



4º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\beta \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\beta \to \alpha}\,(\wedge E_2)}{\alpha}\,(\to E) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)}{\alpha \to \beta}\,(\wedge E_1)}{\beta}\,(\to E)}{(\alpha \leftrightarrow \beta)}\,(\leftrightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \alpha\leftrightarrow\beta\end{array}}{\beta}\ \leftrightarrow E_1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \alpha\leftrightarrow\beta\end{array}}{\alpha}\ \leftrightarrow E_2 \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\beta}^{(1)}\\ D_1\\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{\alpha}^{(1)}\\ D_2\\ \beta\end{array}}{\alpha\leftrightarrow\beta}\ \leftrightarrow I\ (1)$$

4º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\beta}^{(1)} \qquad \dfrac{(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)}{\beta\to\alpha}\,(\wedge E_2)}{\alpha}\,(\to E) \qquad \dfrac{\cancel{\alpha}^{(1)} \qquad \dfrac{(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)}{\alpha\to\beta}\,(\wedge E_1)}{\beta}\,(\to E)}{(\alpha\leftrightarrow\beta)}\,(\leftrightarrow I)\ (1)$$

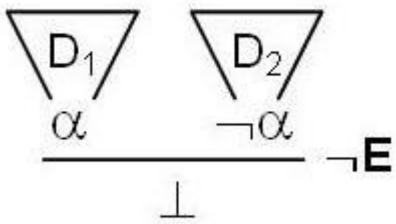
Reglas de Deducción Natural (continuación):

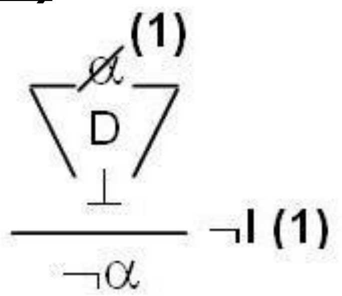
- La regla **(¬ E)** dice que si en una rama concluimos α y en la otra rama concluimos **(¬ α)**, entonces tenemos que concluir el **absurdo** (⊥).
- La regla **(¬ I)** dice que si, partiendo de α, concluimos el **absurdo** (⊥), entonces tenemos que concluir **(¬ α)**. Esta regla, como la introducción del →, exige **cancelar** la hipótesis α.

5º ejemplo de deducción natural:

Sean α, β ∈ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

Reglas de Deducción Natural (continuación):





5º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

<u>Reglas de Deducción Natural (continuación)</u>:

<u>5º ejemplo de deducción natural</u>:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

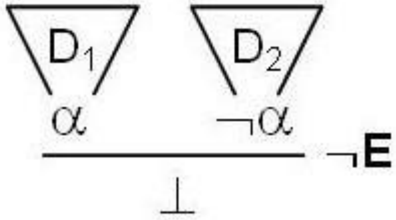
5º ejemplo de deducción natural:

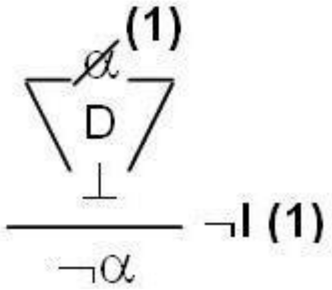
Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$(\alpha \wedge \neg \beta)$$

$$\dfrac{\neg (\alpha \wedge \beta)}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)} \, (\rightarrow \mathrm{I})$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):





5º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$(\alpha \wedge \beta) \qquad\qquad\qquad (\alpha \wedge \neg \beta)$$

$$\dfrac{\dfrac{\perp}{\neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\neg I)}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

5º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$\frac{(\alpha \wedge \beta)}{\beta}\,(\wedge E_2) \qquad\qquad (\alpha \wedge \neg \beta)$$

$$\cfrac{\cfrac{\perp}{\neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\neg I)}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

5º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$\frac{(\alpha \wedge \beta)}{\beta}\,(\wedge E_2) \qquad \frac{(\alpha \wedge \neg \beta)}{\neg \beta}\,(\wedge E_2)$$

$$\cfrac{\cfrac{\perp}{\neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\neg I)}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \neg\alpha \end{array}}{\perp}\ \neg E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\alpha}^{(1)} \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\alpha}\ \neg I\ (1)$$

5º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha \wedge \beta)}{\beta}(\wedge E_2) \qquad \dfrac{(\alpha \wedge \neg \beta)}{\neg \beta}(\wedge E_2)}{\perp}(\neg E)}{\neg (\alpha \wedge \beta)}(\neg I)}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)}(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

5º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(\alpha \wedge \beta)}^{(1)}}{\beta}\,(\wedge E_2) \qquad \dfrac{(\alpha \wedge \neg\beta)}{\neg\beta}\,(\wedge E_2)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg(\alpha \wedge \beta)}\,(\neg I)\ (1)}{(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}\,(\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

5º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $\vdash (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{(\alpha \wedge \beta)}^{(1)}}{\beta}\,(\wedge E_2) \qquad \cfrac{\cancel{(\alpha \wedge \neg \beta)}^{(2)}}{\neg \beta}\,(\wedge E_2)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\neg I)\,(1)}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)}\,(\rightarrow I)\,(2)
$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

- La regla **(⊥ E)** dice que si hemos concluido el **absurdo** (⊥), entonces podemos concluir **cualquier** proposición que queramos.
- La regla **(RAA)** dice que si, partiendo de **(**$\neg\ \alpha$**)**, concluimos el **absurdo** (⊥), entonces tenemos que concluir α. Esta regla, como la introducción del $\rightarrow$, exige **cancelar** hipótesis. Concretamente, la hipótesis **(**$\neg\ \alpha$**)**.

6º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg\ \beta \rightarrow \neg\ \alpha)\ \vdash\ (\alpha \rightarrow \beta)$

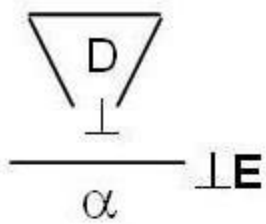
Reglas de Deducción Natural (continuación):

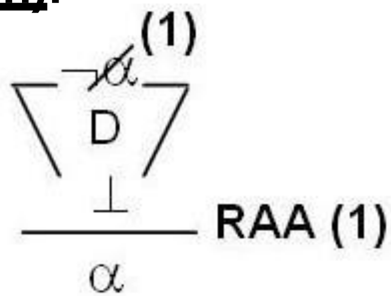
$$\frac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\alpha}\ \perp E \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ D \\ \perp \end{array}}{\alpha}\ \mathrm{RAA}\ (1)$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



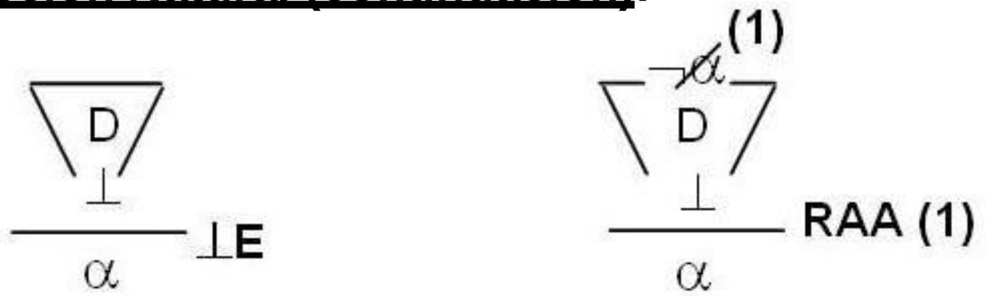


6º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

$$\alpha \rightarrow \beta$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):



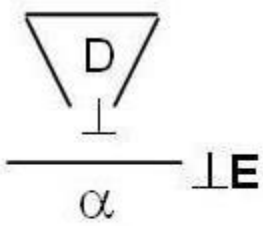
6º ejemplo de deducción natural:

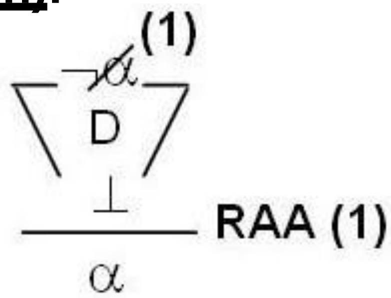
Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \to \neg \alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\alpha$$

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):





6º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \to \neg \alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\neg \beta \to \neg \alpha$$

$$\alpha$$

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

<u>Reglas de Deducción Natural (continuación)</u>:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\alpha}\ \perp E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\alpha}\ \text{RAA (1)}$$

<u>6º ejemplo de deducción natural</u>:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

$$\neg\beta \qquad\qquad \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$$

$$\alpha$$

$$\dfrac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\frac{\begin{matrix} \nabla D \\ \perp \end{matrix}}{\alpha} \perp E \qquad\qquad \frac{\begin{matrix} \cancel{\neg \alpha}^{(1)} \\ \nabla D \\ \perp \end{matrix}}{\alpha} \text{RAA (1)}$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

$$\alpha \qquad \frac{\neg \beta \qquad\qquad \neg \beta \rightarrow \neg \alpha}{\qquad} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta} (\rightarrow I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D} \\ \bot \end{matrix}}{\alpha}\ \bot E \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ \mathcal{D} \\ \bot \end{matrix}}{\alpha}\ RAA\ (1)$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\alpha \qquad\qquad \dfrac{\neg\beta \qquad\qquad \neg\beta \to \neg\alpha}{\neg\alpha}\ (\to E)$$

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\alpha}\ \perp E \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ D \\ \perp \end{matrix}}{\alpha}\ \text{RAA (1)}$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{\neg\beta \qquad \neg\beta \to \neg\alpha}{\neg\alpha}\ (\to E)}{}\ (\neg E)$$

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c} \nabla D \\ \bot \end{array}}{\alpha}\ \bot E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ \nabla D \\ \bot \end{array}}{\alpha}\ RAA\ (1)$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \to \neg \alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{\neg \beta \qquad \neg \beta \to \neg \alpha}{\neg \alpha}\ (\to E)}{\bot}\ (\neg E)$$

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla \mathrm{D} \\ \perp\end{array}}{\alpha}\ \perp\mathrm{E} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ \nabla \mathrm{D} \\ \perp\end{array}}{\alpha}\ \mathrm{RAA}\ (1)$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \to \neg \alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{\neg \beta \qquad \neg \beta \to \neg \alpha}{\neg \alpha}\ (\to \mathrm{E})}{\dfrac{\perp}{\beta}\ (\mathrm{RAA})}\ (\neg \mathrm{E})}{\alpha \to \beta}\ (\to \mathrm{I})$$

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\alpha}\ \perp E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \overset{(1)}{\cancel{\neg\alpha}} \\ D \\ \perp \end{array}}{\alpha}\ \text{RAA (1)}$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \to \neg \alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\neg\beta}} \qquad \neg\beta \to \neg\alpha}{\neg\alpha}\ (\to E)}{\perp}\ (\neg E)}{\beta}\ (\text{RAA})\ (1)}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Reglas de Deducción Natural (continuación):

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\alpha}\,\perp E \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\alpha}^{(1)} \\ D \\ \perp \end{array}}{\alpha}\,\text{RAA (1)}$$

6º ejemplo de deducción natural:

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones cualesquiera. Construir una derivación que demuestre que: $(\neg \beta \to \neg \alpha) \vdash (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\neg\beta}} \qquad \neg\beta \to \neg\alpha}{\neg\alpha}\,(\to E)}{\perp}\,(\neg E)}{\beta}\,(\text{RAA})\ (1)}{\alpha \to \beta}\,(\to I)\ (2)$$

Completitud de la Lógica Proposicional:

Es la cuarta y última área de estudio de la lógica proposicional. Se encarga de establecer un paralelismo (equivalencia) entre la semántica y la deducción natural.

La completitud de la lógica proposicional establece que las nociones de **consecuencia lógica** (en semántica) y **consecuencia sintáctica** (en deducción natural) son equivalentes.

Lo anterior significa que, si una proposición α es **consecuencia lógica** de un conjunto de proposiciones Γ, entonces necesariamente α debe ser también **consecuencia sintáctica** de Γ (y viceversa). Esta equivalencia se resume en el siguiente enunciado:

Teorema de completitud: Sea $\Gamma \subseteq$ PROP un conjunto de proposiciones y sea $\alpha \in$ PROP una proposición. Se cumple entonces que:

$$\Gamma \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \alpha$$

Completitud de la Lógica Proposicional (continuación):

El teorema de completitud es un resultado muy importante, ya que permite asegurar que es tan válido determinar la veracidad de una proposición mediante **valuaciones** como hacerlo mediante **derivaciones**.

Incluso puede ser de utilidad para determinar si una cierta derivación se puede construir o no. Cuando no nos sale una derivación, ¿es porque no se nos ocurre o porque en realidad no existe? El teorema de completitud nos puede ayudar a evacuar dicha duda.

Ejemplo de aplicación del Teorema de Completitud:

Sean p, q dos letras proposicionales. ¿Es posible construir una derivación que demuestre la siguiente consecuencia sintáctica?

$$q, q \to p \vdash \neg p$$

1) **Use el TM completitud para responder la pregunta planteada.**
2) **Si la respuesta es afirmativa, construya la derivación solicitada.**
3) **Si la respuesta es negativa, explique porqué no se puede.**

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Ejemplo de aplicación del Teorema de Completitud</u>:

Sean p, q dos letras proposicionales. ¿Es posible construir una derivación que demuestre la siguiente consecuencia sintáctica? $q, q \rightarrow p \vdash \neg p$

1) **Use el TM completitud para responder la pregunta planteada.**
2) **Si la respuesta es afirmativa, construya la derivación solicitada.**
3) **Si la respuesta es negativa, explique por qué no se puede**

Para que se cumpla que: $q, q \rightarrow p \vdash \neg p$, por TM de completitud debería cumplirse que: $q, q \rightarrow p \models \neg p$. Veamos si eso sucede:

p	q	$q \rightarrow p$	$\neg p$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

Vemos en la 4ta valuación que: $v(q) = 1$ y $v(q \rightarrow p) = 1$, pero $v(\neg p) = 0$. Por lo tanto, <u>no</u> se cumple la consecuencia lógica: $q, q \rightarrow p \not\models \neg p$ y por TM de completitud, tampoco se cumple la consecuencia sintáctica: $q, q \rightarrow p \nvdash \neg p$. La derivación solicitada <u>no</u> existe.