Se proponen soluciones de ejemplo para algunos ejercicios del práctico. Las soluciones presentadas no son las únicas posibles. Pueden existir otras soluciones igualmente correctas.

Ejercicio 1

Dadas las siguientes letras proposicionales:

- p = “La luna es blanca”
- q = “El sol es amarillo”
- r = “La tierra es un queso”

Tomando como base las letras proposicionales anteriores, traduzca a proposiciones bien formadas las siguientes frases expresadas en lenguaje natural:

<u>Solución</u>:

a) Si la tierra es un queso, entonces la luna no es blanca o el sol no es amarillo

$r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

b) No se cumple que el sol no es amarillo y la luna no es blanca

$\neg(\neg q \wedge \neg p)$

c) La tierra no es un queso y el sol es amarillo o la tierra es un queso y la luna no es blanca

$(\neg r \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$

d) El sol es amarillo y la luna es blanca si y sólo si no se cumple que el sol no es amarillo o la luna no es blanca

$(q \wedge p) \leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg p)$

e) Si la luna no es blanca entonces el sol no es amarillo y si el sol no es amarillo entonces la luna no es blanca

$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$

Ejercicio 2

Coloque todos los paréntesis que sea posible a cada una de las siguientes proposiciones, tomando en cuenta la precedencia usual de las conectivas:

<u>Solución</u>:

a) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$

b) $((p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p))$

c) $(p \rightarrow ((q \wedge q) \rightarrow p))$

d) $(((p \wedge r) \vee q) \leftrightarrow s)$

Ejercicio 3

Dibuje la tabla de verdad asociada a cada una de las siguientes proposiciones y determine cuáles de ellas son tautologías, cuáles son contradicciones y cuáles son contingencias. Justifique todas sus respuestas.

a) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

Solución:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

La proposición es una tautología porque sus cuatro valuaciones posibles valen 1.

b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow p$

Solución:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow p$
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0

La proposición es una contradicción porque sus cuatro valuaciones posibles valen 0.

c) $(p \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow p) \leftrightarrow \neg p$

Solución:

p	$\perp$	$p \rightarrow \perp$	$\perp \rightarrow p$	$(p \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow p)$	$\neg p$	$(p \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow p) \leftrightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1

La proposición es una tautología porque sus dos valuaciones posibles valen 1.

d) $(p \rightarrow \perp) \vee (q \rightarrow \perp)$

Solución:

p	q	$\perp$	$p \rightarrow \perp$	$q \rightarrow \perp$	$(p \rightarrow \perp) \vee (q \rightarrow \perp)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0

La proposición es una contingencia porque algunas de sus valuaciones valen 0 y otras 1.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Ejercicio 4

Dibuje la tabla de verdad asociada a cada una de las siguientes proposiciones y determine cuáles de las consecuencias lógicas planteadas se cumplen y cuáles no. Justifique todas sus respuestas.

a) $p, \neg(p \to q) \models \neg q$

Solución:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

La única valuación que hace valer 1 a $p, \neg(p \to q)$ es la tercera valuación (v_3). En ella se verifica que $v_3(p) = 1$, $v_3(\neg(p \to q)) = 1$ y también que $v_3(\neg q) = 1$. Por definición de consecuencia lógica, se cumple efectivamente que $p, \neg(p \to q) \models \neg q$.

b) $(p \to q), (q \to p) \models (p \wedge q)$

Solución:

p	Q	$p \to q$	$q \to p$	$p \wedge q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Las dos valuaciones que hacen valer 1 a $(p \to q), (q \to p)$ son la primera valuación (v_1) y la cuarta valuación (v_4). En la cuarta se verifica que $v_4(p \to q) = 1$, $v_4(q \to p) = 1$ pero $v_4(p \wedge q) = 0$. Por definición de consecuencia lógica, **no** se cumple que $(p \to q), (q \to p) \models (p \wedge q)$. Es decir, que $(p \to q), (q \to p) \not\models (p \wedge q)$

c) $(p \vee q), (p \to q) \models (p \wedge q)$

Solución:

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$p \wedge q$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Las dos valuaciones que hacen valer 1 a $(p \vee q), (p \to q)$ son la segunda valuación (v_2) y la cuarta valuación (v_4). En la segunda se verifica que $v_2(p \vee q) = 1$, $v_2(p \to q) = 1$ pero $v_2(p \wedge q) = 0$. Por definición de consecuencia lógica, **no** se cumple que $(p \vee q), (p \to q) \models (p \wedge q)$. Es decir, que $(p \vee q), (p \to q) \not\models (p \wedge q)$.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por el Instituto Universitario Autónomo del Sur y asociados

d) $(p \to q), (r \to \bot) \models (p \leftrightarrow r) \vee (\neg r)$

Solución:

p	q	r	$\bot$	$p \leftrightarrow r$	$\neg r$	$p \to q$	$r \to \bot$	$(p \leftrightarrow r) \vee (\neg r)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1

Hay tres valuaciones que hacen valer 1 a $(p \to q)$, $(r \to \bot)$, son la primera, tercera y séptima valuación (v_1, v_3 y v_7). En las tres se verifica que $(p \leftrightarrow r) \vee (\neg r)$ también vale 1. Por definición de consecuencia lógica, se cumple efectivamente que $(p \to q), (r \to \bot) \models (p \leftrightarrow r) \vee (\neg r)$

Ejercicio 5

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in$ PROP proposiciones **cualesquiera**. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es correcta o no. En caso de que sea correcta, plantee hipótesis, tesis y demuéstrela. En caso contrario presente un contraejemplo concreto y justifique.

a) Si se cumple que $\models \neg\alpha$ y que $\models (\beta \to \alpha)$ entonces se cumple que $\models \neg\beta$ **CORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\models \neg\alpha$ y $\models (\beta \to \alpha)$

Tesis: $\models \neg\beta$

Demostración: Sea v una valuación cualquiera. Debemos probar que $v(\neg\beta) = 1$.

Como $(\neg\alpha)$ es tautología, $v(\neg\alpha) = 1$ y por definición de valuación se tiene que $v(\alpha) = 0$.

Como $(\beta \to \alpha)$ es tautología, $v(\beta \to \alpha) = \max\{ 1 - v(\beta), v(\alpha) \} = 1$.

Dado que $v(\alpha) = 0$, se tiene entonces que $\max\{ 1 - v(\beta), 0 \} = 1$, por tanto $1 - v(\beta) = 1$.

Por definición de valuación, concluimos que $v(\neg\beta) = 1$.

b) Si se cumple que $\models (\alpha \wedge \beta)$ entonces se cumple que $\models \alpha$ y que $\models \beta$ **CORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\models (\alpha \wedge \beta)$

Tesis: $\models \alpha$ y $\models \beta$

Demostración: Sea v una valuación cualquiera. Debemos probar que $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$.

Como $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología, $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{ v(\alpha), v(\beta) \} = 1$. Por lo tanto, tanto $v(\alpha)$ como $v(\beta)$ valen ambas 1.

c) Si se cumple que $\models (\alpha \vee \beta)$ entonces se cumple que $\models (\alpha \wedge \beta)$ **INCORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\models (\alpha \vee \beta)$

Tesis: $\models (\alpha \wedge \beta)$

Contraejemplo: Tomamos $\alpha = p$, $\beta = \neg p$.

Comprobamos que $\models (\alpha \vee \beta)$. La siguiente tabla de verdad muestra que en las dos posibles valuaciones se cumple que $v(p \vee \neg p) = 1$.

p	$\neg$p	p $\vee$ $\neg$p
0	1	1
1	0	1

Sin embargo, vemos que $(\alpha \wedge \beta)$ es una contradicción. La siguiente tabla de verdad muestra que en las dos posibles valuaciones se cumple que $v(p \wedge \neg p) = 0$.

p	$\neg$p	p $\wedge$ $\neg$p
0	1	0
1	0	0

d) Si se cumple que $\alpha \models \beta$ entonces se cumple que $\models \alpha$ o que $\models \beta$ **INCORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\alpha \models \beta$

Tesis: $\models \alpha$ o $\models \beta$

Contraejemplo: Tomamos $\alpha = p$, $\beta = p$.

Comprobamos que $\alpha \models \beta$. Sea v una valuación tal que v(p) = 1. Se verifica trivialmente que v(p) = 1, cumpliéndose entonces la definición de consecuencia lógica.

Sin embargo, vemos que ni α ni β son tautologías. Basta con tomar la otra valuación que hace valer cero a p.

e) Si se cumple que $\alpha \models \beta$ y que $\beta \models \gamma$ entonces se cumple que $\alpha \models \gamma$ **CORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma$

Tesis: $\alpha \models \gamma$

Demostración: Sea v una valuación cualquiera tal que $v(\alpha) = 1$. Debemos probar que $v(\gamma) = 1$.

Por hipótesis, tenemos que $\alpha \models \beta$. Como $v(\alpha)= 1$, aplicando la definición de consecuencia lógica tenemos que $v(\beta)= 1$. También por hipótesis, tenemos que $\beta \models \gamma$. Aplicando de nuevo la definición de consecuencia lógica, concluimos que $v(\gamma) = 1$.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por el Instituto Universitario Autónomo del Sur y asociados

Ejercicio 6

Sean $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP dos proposiciones tales que $\models \alpha$ y $\models \neg\beta$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es correcta o no. En caso de que sea correcta, plantee hipótesis, tesis y demuéstrela. En caso contrario presente un contraejemplo concreto y justifique.

a) $\alpha \models \beta$ **INCORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\models \alpha$ y $\models \neg\beta$

Tesis: $\alpha \models \beta$

Contraejemplo: Tomamos $\alpha = (p \vee \neg p)$, $\beta = \bot$.

Comprobamos que $\models \alpha$. Sea v una valuación cualquiera. Se verifica que $v(p \vee \neg p) = 1$, dado que, por definición de valuación (caso $\vee$) max { $v(p)$, $v(\neg p)$ } = 1, independientemente del valor de verdad de p (si $v(p) = 1$, entonces $v(\neg p) = 0$, por definición de valuación, caso $\neg$, y viceversa).

Comprobamos que $\models \neg\beta$. Sea v una valuación cualquiera. Se verifica que $v(\bot) = 0$. Entonces, por definición de valuación (caso $\neg$), se verifica que $v(\neg\bot) = 1$.

Sin embargo, vemos que $\alpha \not\models \beta$. En cualquier valuación v se verifica que $v(p \vee \neg p) = 1$, pero $v(\bot) = 0$. Se concluye entonces que $p \vee \neg p \not\models \bot$.

b) $\beta \models \alpha$ **CORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\models \alpha$ y $\models \neg\beta$

Tesis: $\beta \models \alpha$

Demostración: Por hipótesis, tenemos que $\models \neg\beta$. Por definición de tautología, en toda valuación v se cumple que $v(\neg\beta) = 1$. Por definición de valuación (caso $\neg$), se tiene que $v(\beta) = 0$. Por lo tanto, dado que en toda valuación se tiene que $v(\beta) = 0$, entonces no existe ninguna valuación tal que $v(\beta) = 1$. Dado esto, por definición de consecuencia lógica, ya con eso se cumple que $\beta \models \alpha$.

c) $\models \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$ **CORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\models \alpha$ y $\models \neg\beta$

Tesis: $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$

Demostración: Por hipótesis, tenemos que $\models \alpha$ y $\models \neg\beta$. Por definición de tautología, en toda valuación v se cumple que $v(\alpha) = 1$ y $v(\neg\beta) = 1$. Por definición de valuación (caso $\neg$), se tiene que $v(\beta) = 0$. Entonces, por definición de valuación (caso $\leftrightarrow$), se tiene que $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 0$ (dado que $v(\alpha) \neq v(\beta)$) y luego, por definición de valuación (caso $\neg$), se tiene que $v(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)) = 1$. Como esto vale cualquiera sea la valuación v, por definición de tautología se concluye finalmente que $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Ejercicio 7

Sea $\Gamma \subseteq$ PROP un conjunto de proposiciones y α, $\beta \in$ PROP dos proposiciones tales que $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es correcta o no. En caso de que sea correcta, plantee hipótesis, tesis y demuéstrela. En caso contrario presente un contraejemplo concreto y justifique.

a) $\Gamma \models (\alpha \wedge \beta)$. **CORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$

Tesis: $\Gamma \models (\alpha \wedge \beta)$

Demostración: Sea una v valuación cualquiera tal que $v(\Gamma) = 1$. Dado que $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$, por def. de consecuencia lógica tenemos que $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$. Luego, por def. de valuación (caso $\wedge$), tenemos que $v(\alpha \wedge \beta) = \min \{ v(\alpha), v(\beta) \} = \min \{ 1, 1 \} = 1$. Aplicando nuevamente la def. de consecuencia lógica, concluimos que $\Gamma \models (\alpha \wedge \beta)$.

b) $\Gamma \models \neg(\alpha \vee \beta)$. **INCORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$

Tesis: $\Gamma \models \neg(\alpha \vee \beta)$

Contraejemplo: Tomamos $\Gamma = \{p, q\}$, $\alpha = (p \to q)$, $\beta = (q \to p)$.

Sea v una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$. Es decir, tal que $v(p) = v(q) = 1$. Por def. de valuación (caso $\to$) tenemos que $v(p \to q) = \max \{ 1 - v(p), v(q) \} = \max \{ 1 – 1, 1 \} = 1$ y que $v(q \to p) = \max \{ 1 - v(q), v(p) \} = \max \{ 1 – 1, 1 \} = 1$. Por lo tanto, se verifica que $\Gamma \models \alpha$ y que $\Gamma \models \beta$. **(1)**

Sin embargo, veremos que $v(\neg(\alpha \vee \beta)) = 0$. Por def. de valuación (caso $\vee$) tenemos que $v(\alpha \vee \beta) = \max \{ v(\alpha), v(\beta) \} = \max \{ v(p \to q), v(q \to p) \} = \max \{1, 1\} = 1$. Entonces, por def. de valuación (caso $\neg$) tenemos que $v(\neg(\alpha \vee \beta)) = 1 – v(\alpha \vee \beta) = 1 – 1 = 0$. **(2)**

A partir de **(1)** y **(2)**, se concluye entonces que $\Gamma \not\models \neg(\alpha \vee \beta)$.

c) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una tautología. **INCORRECTA**

Solución:

Hipótesis: $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$

Tesis: $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una tautología

Contraejemplo: Tomamos nuevamente $\Gamma = \{p, q\}$, $\alpha = (p \to q)$, $\beta = (q \to p)$.

P	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

En la parte anterior ya vimos que $\Gamma \models \alpha$ y que $\Gamma \models \beta$. Sin embargo, a partir de la tabla de verdad, comprobamos que existen dos valuaciones que hacen valer 0 a $(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Es decir, que hacen valer 0 a $(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$. Por lo tanto, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ **no** es una tautología.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por el Instituto Universitario Autónomo del Sur y asociados

d) Dada cualquier proposición $\delta \in \Gamma$, se cumple que $\Gamma \models (\neg\neg\delta)$. **CORRECTA**

<u>Solución</u>:

<u>Hipótesis</u>: $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$, $\delta \in \Gamma$ es una proposición cualquiera.

<u>Tesis</u>: $\Gamma \models (\neg\neg\delta)$

<u>Demostración</u>: Sea una v valuación cualquiera tal que $v(\Gamma) = 1$. Dado que $\delta \in \Gamma$, en particular se cumple que $v(\delta) = 1$. Entonces, por def. de valuación (caso $\neg$), tenemos que $v(\neg\delta) = 1 - v(\delta) = 1 - 1 = 0$. Aplicando nuevamente la def. de valuación (caso $\neg$), tenemos que $v(\neg\neg\delta) = 1 - v(\neg\delta) = 1 - 0 = 1$. Aplicando la def. de consecuencia lógica, concluimos que $\Gamma \models \neg\neg\delta$.