**Se proponen soluciones de ejemplo para algunos de los ejercicios del práctico. Las soluciones presentadas no son las únicas posibles. Pueden existir otras soluciones igualmente correctas.**

# Ejercicio 1

Definir los siguientes conjuntos por comprensión y también por extensión cuando sea posible:

**Solución:**

a) Números naturales pares y múltiplos de 5.

A = { x ∈ N / (x mod 2 = 0) y (x mod 5 = 0) }

b) Números naturales pares, múltiplos de 5 y menores que 75.

B = { x ∈ N / (x mod 2 = 0) y (x mod 5 = 0) y (x < 75) }

B = { 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 }

c) Números naturales primos y menores que 50.

C = { x ∈ N / (Para todo y ∈ N, si (y > 1) y (y < x), entonces (x mod y ≠ 0)) y (x < 50) }

C = { 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 }

d) Letras vocales del alfabeto castellano.

D = { x ∈ Char / x es vocal }

D = { a, e, i, o, u }

e) Pares ordenados de naturales tales que la primer componente es menor que la segunda.

E = { (x,y) ∈ NxN / x < y }

f) Pares ordenados de letras vocales tales que la primer componente es alfabéticamente mayor que la segunda.

F = { (x,y) ∈ Char x Char / (x es vocal) y (y es vocal) y (x > y) }

F = { (u,a), (u,e), (u,i), (u,o), (o,a), (o,e), (o,i), (i,a), (i,e), (e,a) }

g) Pares ordenados de naturales tales que la suma de sus componentes es menor que 5.

G = { (x,y) ∈ NxN / x + y < 5 }

G = { (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (4,0) }

h) La relación de Identidad entre números naturales ($Id_N$).

$Id_N$ = { (x,y) ∈ NxN / x = y }

i) La relación de Identidad entre letras vocales.

$Id_V$ = { (x,y) ∈ Char x Char / (x es vocal) y (y es vocal) y (x = y) }

$Id_V$ = { (a,a), (e,e), (i,i), (o,o), (u,u) }

j) El conjunto potencia de J = {0,1,2}.

P(J) = { x ∈ P(N) / x ⊆ {0,1,2} }

P(J) = { ∅, {0}, {1}, {2}, {0,1}, {0,2}, {1,2}, {0,1,2} }

# Ejercicio 2

Dados los siguientes conjuntos:

A = { x $\in$ N / x es múltiplo de 3 y x $\leq$ 20 }    C = { x $\in$ Char / x < g }

B = { a, b, c, d }    D = { 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }

a) Calcular los siguientes conjuntos, expresando el resultado por extensión. En caso de que alguno de ellos tenga más de 10 elementos, indicar solamente los 10 primeros.

**Solución:**

A $\cup$ D = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 1, 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }

C – B = {e, f}

B $\oplus$ C = {e, f}

(C $\cap$ A) $\cup$ B = {a, b, c, d}

A x B = { (0,a), (0,b), (0,c), (0,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d), (6,a), (6,b), etc… }

$\varnothing \times$ A = $\varnothing$

(A – D) x (B $\cap$ C) = { (0,a), (6,a), (9,a), (12,a), (15,a), (18,a), (0,b), (6,b), (9,b), (12,b), etc… }

A x B x (C – B) = { (0,a,e), (0,a,f), (0,b,e), (0,b,f), (0,c,e), (0,c,f), (0,d,e), (0,d,f), (1,a,e), (1,a,f), etc… }

P(B $\cap$ C) = { $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, etc… }

P((C – B) x (B $\cap$ C)) = { $\varnothing$, {(e,a)}, {(e,b)}, {(e,c)}, {(e,d)}, {(f,a)}, {(f,b)}, {(f,c)}, {(f,d)}, {(e,a), (e,b)}, etc… }

B x P(B) = { (a,$\varnothing$), (a,{a}), (a,{b}), (a,{c}), (a,{d}), (a,{a,b}), (a,{a,c}), (a,{a,d}), (a,{a,b,c}), (a,{a,d}), etc… }

P(A $\cap$ D) x P(B $\cap$ C) = { ($\varnothing$,{a}), ($\varnothing$,{b}), ($\varnothing$,{c}), ($\varnothing$,{d}), ({3},{a}), ({3},{b}), ({3},{c}), ({3},{d}), etc… }

b) Calcular los siguientes cardinales:

**Solución:**

| C x D | = | C | x | D | = 6 x 9 = 54

| A x B x C | = | A | x | B | x | C | = 7 x 4 x 6 = 168

| P(B x C x D) | = 2 ^ | B x C x D | = 2 ^ (|B| x |C| x |D|) = 2 ^ (4 x 6 x 9) = 2 ^ 216

| P(B x C) x P(A $\cup$ B $\cup$ C) | = | P(B x C) | x | P(A $\cup$ B $\cup$ C) | = (2 ^ | B x C |) x (2 ^ | A $\cup$ B $\cup$ C |) =

(2 ^ 24) x (2 ^ 13) = 2 ^ 37

# Ejercicio 3

Dados los siguientes conjuntos:

A = { x $\in$ N / x es múltiplo de 4 y x < 40 }
B = { x $\in$ N / x es potencia de 2 }

a) Exprese por extensión la relación R = { (x,y) $\in$ NxN / (x $\in$ (A $\cap$ B)) y (y $\in$ (A $\cap$ B)) y (x $\leq$ y) }

**Solución:**

R = { (4,4), (4,8), (4,16), (4,32), (8,8), (8,16), (8,32), (16,16), (16,32), (32,32) }

b) Considerando que el conjunto universal es el conjunto de los naturales, indique si R cumple o no cada una de las siguientes propiedades, justificando su respuesta en cada caso: Reflexiva, Irreflexiva, Simétrica, Asimétrica, Antisimétrica, Transitiva.

**Solución:**

**Reflexiva: NO.** Debido a que la relación está definida como R $\subseteq$ NxN, el conjunto universal del que se toman elementos para el producto cartesiano NxN es el conjunto de los naturales. Para el elemento número 1, que pertenece a N, no existe en R el lazo (1,1), por lo tanto no están en R todos los lazos.

**Irreflexiva: NO.** El número 4 pertenece a N, y existe en R el lazo (4,4), por lo que al menos existe un par del tipo (x,x), por lo tanto no es irreflexiva.

**Simétrica: NO.** Por ejemplo, existe en R el par (4,8), pero no existe el par (8,4), por lo que hay al menos un par ordenado cuyo par inverso no está en R, por lo tanto no es simétrica.

**Asimétrica: NO.** Por ejemplo existe en R el par (4,4), por lo que al menos hay un par inverso (ya que el inverso de un lazo es el propio lazo), por lo tanto no es asimétrica.

**Antisimétrica: SI.** Para todo par ordenado en R que no es un lazo, su par inverso no está en R. Está el par (4,8) pero no el (8,4), está el par (4,16) pero no el (16,4), está el par (4,32) pero no el (32,4), está el par (8,16) pero no el (16,8), está el par (8,32) pero no el (32,8), y está el par (16,32) pero no el (32,16),. Concluimos que R es antisimétrica.

**Transitiva: SI.** En R están todos los posibles pares ordenados del tipo (x,y) e (y,z) tales que el par compuesto (x,z) también está en R. Lo comprobamos a continuación:

(4,8) y (8,16) están en R => (4,16) también está en R

(4,8) y (8,32) están en R => (4,32) también está en R

(4,16) y (16,32) están en R => (4,32) también está en R

(8,16) y (16,32) están en R => (8,32) también está en R

El resto de las composiciones posibles involucran componer con algún lazo, en cuyo caso el resultado es el mismo par ordenado que se compone con el lazo. Concluimos finalmente que R es transitiva.

c) ¿Es R una relación de equivalencia? ¿Es R una relación de orden parcial amplio? Justifique.

**Solución:**

¿R es de **equivalencia**? **NO**, por no ser reflexiva.

¿R es de **orden parcial amplio**? **NO**, por no ser reflexiva.