Teoría de conjuntos, relaciones y funciones

1) ***Propiedades universales de conjuntos***:

Dados los conjuntos A, B, C se cumplen las siguientes propiedades:

Unión:
- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Diferencia y diferencia simétrica:
- $A - A = \varnothing$
- $A - \varnothing = A$
- $A \oplus A = \varnothing$
- $A \oplus \varnothing = A$

Intersección:
- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributivas:
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Leyes de Morgan:
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

2) ***Propiedades de relaciones***:

Dada una relación $R \subseteq AxA$ se definen las siguientes propiedades:
- R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in A, (x,x) \in R$
- R es irreflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in A, (x,x) \notin R$
- R es simétrica $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A$, si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \in R$
- R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A$, si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \notin R$
- R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A$, si $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$ entonces $x = y$
- R es transitiva $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A$, si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$ entonces $(x,z) \in R$

3) ***Propiedades de funciones***:

Dada una función $f : A \rightarrow B$ se definen las siguientes propiedades:
- f es total $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B \,/\, y = f(x)$
- f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in$ Preimagen(f), si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \,/\, y = f(x)$

Lógica Proposicional

1) ***Definición de valuación***

v **:** PROP $\rightarrow \{0,1\}$ tal que cumple las siguientes propiedades:

- $v(\bot) = 0$
- $v(\alpha \wedge \beta) = \min \{ v(\alpha), v(\beta) \}$
- $v(\alpha \vee \beta) = \max \{ v(\alpha), v(\beta) \}$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = \max \{ 1 - v(\alpha), v(\beta) \}$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = v(\beta)$, en otro caso es 0
- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$

2) ***Reglas de deducción natural***:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha & \beta \end{array}}{\alpha \wedge \beta}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \alpha \wedge \beta \end{array}}{\alpha}\ \wedge\mathbf{E_1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \alpha \wedge \beta \end{array}}{\beta}\ \wedge\mathbf{E_2} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\alpha}^{\mathbf{(1)}} \\ D \\ \beta \end{array}}{\alpha \to \beta}\ \to\mathbf{I\ (1)}$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha & \alpha\to\beta \end{array}}{\beta}\ \to\mathbf{E} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \alpha \end{array}}{\alpha \vee \beta}\ \vee\mathbf{I_1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \beta \end{array}}{\alpha \vee \beta}\ \vee\mathbf{I_2} \qquad \dfrac{\begin{array}{ccc} & \cancel{\alpha}^{\mathbf{(1)}} & \cancel{\beta}^{\mathbf{(1)}} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ \alpha \vee \beta & \delta & \delta \end{array}}{\delta}\ \vee\mathbf{E\ (1)}$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \cancel{\beta}^{\mathbf{(1)}} & \cancel{\alpha}^{\mathbf{(1)}} \\ D_1 & D_2 \\ \alpha & \beta \end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}\ \leftrightarrow\mathbf{I\ (1)} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha & \alpha\leftrightarrow\beta \end{array}}{\beta}\ \leftrightarrow\mathbf{E_1} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \beta & \alpha\leftrightarrow\beta \end{array}}{\alpha}\ \leftrightarrow\mathbf{E_2}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\alpha}^{\mathbf{(1)}} \\ D \\ \bot \end{array}}{\neg\alpha}\ \neg\mathbf{I\ (1)} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha & \neg\alpha \end{array}}{\bot}\ \neg\mathbf{E} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \bot \end{array}}{\alpha}\ \bot\mathbf{E} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \neg\cancel{\alpha}^{\mathbf{(1)}} \\ D \\ \bot \end{array}}{\alpha}\ \mathbf{RAA\ (1)}$$

Lógica de Predicados

1) ***Definición de valuación***: Dada una estructura $\mathcal{M}$ cualquiera, v^M: SENT $\to$ {0,1} tal que:

- $v^{\mathcal{M}}(\bot) = 0$
- $v^{\mathcal{M}}(R(t_1 \ldots t_n)) = 1 \iff t_1^M, \ldots t_n^M$ satisfacen la relación R, en otro caso es 0
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \wedge \beta) = \min\{ v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \vee \beta) = \max\{ v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \to \beta) = \max\{ 1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \iff v^{\mathcal{M}}(\alpha) = v^{\mathcal{M}}(\beta)$, en otro caso es 0
- $v^{\mathcal{M}}(\neg\alpha) = 1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha)$
- $v^{\mathcal{M}}(\exists x_i\, \alpha) = 1 \iff$ existe algún a $\in |\mathcal{M}|$ tal que $v^{\mathcal{M}}(\alpha[a / x_i]) = 1$
- $v^{\mathcal{M}}(\forall x_i\, \alpha) = 1 \iff$ para todo a $\in |\mathcal{M}|$ se cumple que $v^{\mathcal{M}}(\alpha[a / x_i]) = 1$

2) ***Reglas de deducción natural***:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \alpha \end{array}}{\forall x\, \alpha}\ \forall\mathrm{I}\ (*) \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \forall x\, \alpha \end{array}}{\alpha[t / x]}\ \forall\mathrm{E}\ (*) \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D \\ \alpha[t / x] \end{array}}{\exists x\, \alpha}\ \exists\mathrm{I}\ (*) \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} & \cancel{\alpha}^{(1)} \\ D_1 & D_2 \\ \exists x\, \alpha & \delta \end{array}}{\delta}\ \exists\mathrm{E}\ (*)\ (1)$$

(*) $x \notin FV(H(D))$ (*) t es libre para x en α (*) t es libre para x en α (*) $x \notin FV(H(D_2) - \{\alpha\}),\ x \notin FV(\delta)$