Matemática Discreta

- Licenciatura en Informática – Ingeniería en Informática
- 1º año

(Repaso de)
Teoría de Conjuntos

<u>Conjunto (Definición)</u>:

- Agrupación de elementos, no necesariamente del mismo tipo.
- Los elementos de un conjunto no tienen un orden definido.
- En un conjunto no puede haber elementos repetidos.

<u>Formas de definir un conjunto</u>:

- Por extensión (la veremos en este capítulo)
- Por comprensión (la veremos en este capítulo)
- Por inducción (la veremos más adelante en el curso)

<u>Definición por extensión</u>:

- Se enumeran los elementos del conjunto entre llaves { }
- Sólo se puede utilizar para definir conjuntos finitos (no se pueden enumerar los elementos de un conjunto infinito).

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Definición por comprensión</u>:

- Se indica cual es el conjunto universal a partir del cual se definirán los elementos de este conjunto en particular.
- A continuación, se da una condición de pertenencia de los elementos del conjunto universal a este conjunto.

  Notación: **Conj = {x ∈ U / x cumple cierta condición}**
  U es el conjunto universal del cual se toman los elementos de Conj.

<u>Ejemplos de definiciones por extensión y comprensión</u>:

Definir los siguientes conjuntos por comprensión y también por extensión cuando sea posible:

1) **El conjunto P de los números pares**
2) **El conjunto A de los naturales entre 0 y 10 (inclusive)**
3) **El conjunto B de los naturales pares entre 0 y 10 (inclusive)**
4) **El conjunto V de las letras vocales castellanas**

UDE UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Propiedades Universales de Conjuntos:

Las siguientes propiedades se cumplen siempre para todos los conjuntos, sin importar de qué tipo son sus elementos, si son discretos o no, o si son finitos o infinitos.

1) Inclusión e Igualdad

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, decimos que:

- $A \subseteq B$ si y solo si $\forall x \in A,\ x \in B$ (inclusión amplia)
- $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ (igualdad)
- $A \subset B$ si y solo si $A \subseteq B$ y no ocurre que $A = B$ (inclusión estricta)

Ejemplos de inclusión e igualdad:

Dados $A = \varnothing$, $B = \{x \in N \ / \ x \text{ es par}\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, explicando porqué en cada caso.

1) $A \subset B$ **3) $C \subset B$** **5) $B \subset B$**

2) $A \subseteq B$ **4) $C \subseteq B$** **6) $B \subseteq B$**

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

2) Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos las siguientes operaciones entre ellos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \;\; o \;\; x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \;\; y \;\; x \in B\}$
- Diferencia: $A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \; y \; x \notin B\}$
- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U \,/\, x \in A \cup B \;\; y \;\; x \notin A \cap B\}$
- Complemento: $A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$
- Cardinal: $\#(A) = |A|$ = cantidad de elementos del conjunto A

Ejemplos de operaciones entre conjuntos:

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

1) $A \cup B$	**3) $A - B$**	**5) A^C**
2) $A \cap B$	**4) $A \oplus B$**	**6) B^C**

<u>Propiedades Universales de Conjuntos (continuación)</u>:

3) Propiedades Universales de la Unión de conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (conmutativa de la unión)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativa de la unión)

4) Propiedades Universales de la Intersección de conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa de la intersección)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativa de la intersección)

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

5) Propiedades Universales de la Diferencia entre conjuntos

Sea A un conjunto cualquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A - A = \varnothing$
- $A - \varnothing = A$
- $A \oplus A = \varnothing$
- $A \oplus \varnothing = A$

6) Propiedades Distributivas entre conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejemplo de propiedades distributivas:

Dados A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5}, C = {2, 4, 6}, comprobar el cumplimiento de las dos propiedades distributivas

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

7) Propiedades de la cardinalidad de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
$A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$
$A = B \Rightarrow |A| = |B|$

¿Se cumplen los recíprocos de estas tres propiedades?

8) Leyes de Morgan entre conjuntos

Sean A, B dos conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo de Leyes de Morgan:

Dados $U = \{x \in N \,/\, x \leq 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, comprobar el cumplimiento de las dos Leyes de Morgan

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Conjunto Potencia:

El conjunto potencia es un conjunto formado por todos los **subconjuntos** de un conjunto dado. Tiene la particularidad de que sus elementos son a su vez otros conjuntos. Concretamente, todos aquellos conjuntos que están incluidos en el conjunto original.

- Si A es un conjunto, se denota como P(A) a su conjunto potencia.
- Se cumple la siguiente propiedad: Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

Ejemplos de conjunto potencia:

1) **Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.**
2) **¿Se cumple que $2 \in P(A)$?**
3) **¿Se cumple que $\{2\} \in P(A)$?**
4) **¿Se cumple que $\{2\} \subseteq P(A)$?**

Producto Cartesiano:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es un conjunto que tiene como elementos a todos los **pares ordenados** de los elementos de A y B.

En cada par ordenado (x,y), la primer componente x es un elemento de A y la segunda componente y es un elemento de B. En un par ordenado sí importa el orden de las componentes.

- Se suele denotar como A x B
- Se cumple la siguiente propiedad: |A x B| = |A| x |B|
- El producto cartesiano se puede generalizar a n conjuntos, en dicho caso en lugar de hablar de pares ordenados, estaríamos hablando de n-uplas ordenadas.

Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Relaciones entre Conjuntos</u>:

Se llama relación entre dos conjuntos A y B, a **cualquier subconjunto** del producto cartesiano A x B. Es decir, cualquier conjunto de pares ordenados tomados de A x B se le llama relación.

- Si R $\subseteq$ A x B, decimos que R es una relación.
- A se llama **dominio** y B se llama **codominio** de la relación.
- Dependiendo de su cardinalidad, la relación puede escribirse por extensión o comprensión, como cualquier conjunto.

<u>Ejemplos de relaciones</u>:

1) **Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, definir una relación sobre A x B que tenga cuatro elementos.**
2) **¿Se cumple que $\varnothing$ es una relación? ¿A x B es una relación?**
3) **Dado el conjunto N de los números naturales, definir una relación sobre NxN en la cual ambas componentes de cada par ordenado tengan el mismo valor.**

Relaciones entre Conjuntos (continuación):

Algunas observaciones acerca de las relaciones:

1. Al conjunto $\varnothing$ se le llama **relación vacía** y al conjunto A x B (todo el producto cartesiano) se le llama **relación universal**.
2. Hay una relación especial que se llama **identidad**. Se trata del conjunto formado por todos los pares ordenados cuyas componentes son iguales ("lazos"). Se define así: $\mathbf{Id_A = \{ (x,y) \in A \times A \;/\; x = y \}}$
3. Las relaciones se pueden generalizar también a n conjuntos:
   - $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria
   - $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n$ es una relación n-aria
4. Dado $R \subseteq A \times B$ se define la Relación Inversa del siguiente modo:

   $$\mathbf{R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \;/\; (x, y) \in R\}}$$

Ejemplos de relación inversa: **Definir las inversas de las relaciones definidas en el último ejemplo de la diapositiva anterior.**

Propiedades de las relaciones binarias sobre AxA

Para esta parte consideramos **solamente** relaciones sobre el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo. Dada una relación R $\subseteq$ A x A cualquiera, definimos las siguientes seis propiedades sobre R:

Reflexiva: R es reflexiva $\Leftrightarrow$ Todo elemento de A se relaciona con sí mismo

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Irreflexiva: R es irreflexiva $\Leftrightarrow$ Ningún elemento de A se relaciona con sí mismo.

$$\forall x \in A, \ (x, x) \notin R$$

Simétrica: R es simétrica $\Leftrightarrow$ Por cada par que está en R, también está en R su par inverso

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \text{si } (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

<u>Propiedades de las relaciones binarias sobre AxA (continuación)</u>:

<u>Transitiva</u>: R es transitiva $\Leftrightarrow$ por cada par $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ también existe el par $(x, z) \in R$.

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A, \text{ si } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

<u>Asimétrica</u>: R es asimétrica $\Leftrightarrow$ por cada par que está en R, **no** está en R su par inverso.

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \text{ si } (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

<u>Anti-simétrica</u>: R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ R es Asimétrica <u>con excepción</u> de los <u>pares donde ambas componentes coinciden</u> ("lazos"). Es decir, no hay pares inversos, pero sí se permiten "lazos".

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \text{ si } (x, y) \in R \text{ y } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

Ejemplo de propiedades de las relaciones binarias sobre AxA:

Dado el conjunto: $A = \{1, 2, 4\}$

Se define la relación $R = \{ (x, y) \in A \times A \,/\, (x + y) \text{ es par} \}$

1) **Expresar por extensión la relación R.**
2) **¿Es R una relación *reflexiva*? ¿Por qué?**
3) **¿Es R una relación *irreflexiva*? ¿Por qué?**
4) **¿Es R una relación *simétrica*? ¿Por qué?**
5) **¿Es R una relación *transitiva*? ¿Por qué?**
6) **¿Es R una relación *asimétrica*? ¿Por qué?**
7) **¿Es R una relación *anti-simétrica*? ¿Por qué?**

Relación de Equivalencia:

Sea R $\subseteq$ A x A una relación cualquiera. Decimos que R es una relación de ***equivalencia*** $\Leftrightarrow$ R cumple **simultáneamente** las siguientes propiedades:

Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Relación de Orden Parcial Amplio:

Sea R $\subseteq$ A x A una relación cualquiera. Decimos que R es una relación de ***orden parcial amplio* (O.P.A)** $\Leftrightarrow$ R cumple **simultáneamente** las siguientes propiedades:

Reflexiva, Anti-simétrica y Transitiva.

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el conjunto A = {1, 2, 4} y la relación

R = { (x, y) $\in$ A x A / (x + y) es par }

1) **¿Es R una relación de *equivalencia*?**
2) **¿Es R una relación de *orden parcial amplio*?**

Funciones:

Sea R $\subseteq$ A x B una relación. Decimos que R es una ***función*** $\Leftrightarrow$ Cada elemento de A tiene **como máximo un** correspondiente en B dentro de R.

En otras palabras, una función es un tipo especial de relación en donde a cada elemento del dominio le corresponde **a lo sumo un** elemento del codominio.

Ejemplos de funciones:

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, indicar si las siguientes relaciones son funciones o no, explicando porqué en cada caso:

$R_1 = \{ (3,a), (2,b), (1,a), (1,b) \}$

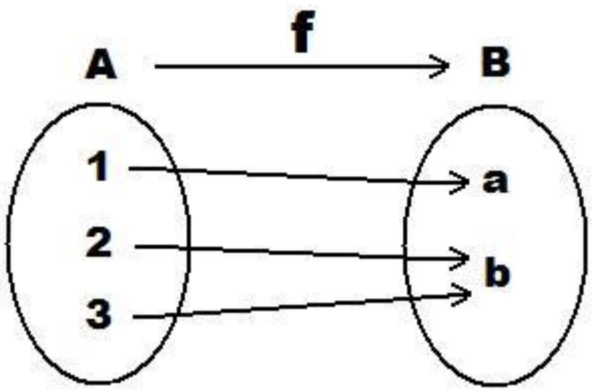
$R_2 = \{ (1,a), (2,b) \}$

$R_3 = \{ (3,b), (2,b), (1,b) \}$

$R_4 = \{ \}$

<u>Funciones (continuación)</u>:

<u>Notación</u>: Si $f \subseteq A \times B$ es una función, escribimos **$f : A \to B$** para diferenciarla de las relaciones que **no** son funciones. También es común representar a las funciones usando **diagramas de Venn**.



Veamos algunos conjuntos vinculados a toda función $f: A \to B$:

- Dominio (f) = A
- Codominio (f) = B
- Pre-Imagen (f) = $\{ x \in A \, / \, \exists y \in B$ que cumple $(x,y) \in f \}$
- Imagen (f) = $\{ y \in B \, / \, \exists x \in A$ que cumple $(x,y) \in f \}$

La pre-imagen de una función contiene a todos los elementos de A que efectivamente participan de la función. La imagen contiene a su vez a todos los elementos de B que efectivamente participan de la función.

<u>Funciones (continuación)</u>:

El concepto de función ha sido estudiado en cursos de enseñanza media. Sin embargo, pocas veces se hace explícito el hecho de que la función es en realidad un tipo especial de relación (conjunto de pares ordenados).

Lo más frecuente es definir a la función mediante una notación alternativa conocida como **notación prefija**. En dicha notación, en vez de escribir los elementos como pares ordenados, se los escribe de la siguiente manera:

<u>Notación prefija</u>: Si $(x,y) \in f \Rightarrow$ lo denotamos $f(x) = y$

La notación prefija puede utilizarse en **cualquier** función. No obstante, es especialmente útil para funciones con **infinitos** elementos. Este es el uso que mayormente se le da en los cursos de enseñanza media.

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Ejemplos de notación prefija de funciones:

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c} se define la función f = { (1,a), (2,b), (3,b) }. Re-escribir los pares ordenados de f, pero ahora utilizando la notación prefija.

2) Dados los conjuntos A y B del ejemplo anterior, se tiene una función g: B $\rightarrow$ A tal que g(a) = 4, g(b) = 4, g(c) = 2. Re-escribir la función g en forma de conjunto de pares ordenados.

3) Dado el conjunto N de los números naturales, se define la función h: N $\rightarrow$ N / h(x) = x + 2

- ¿Cuántos pares ordenados integran la función h?
- ¿Se puede escribir la función en forma de conjunto por extensión?
- ¿Se puede escribirla en forma de conjunto por comprensión?

Clasificación de funciones:

Consideremos una función f: $A \rightarrow B$ cualquiera. Definimos las siguientes cinco propiedades sobre la función f. Decimos que:

f es ***total*** $\Leftrightarrow$ Dominio (f) = Pre-imagen (f)

f es ***parcial*** $\Leftrightarrow$ Pre-Imagen (f) $\subset$ Dominio (f)

f es ***inyectiva*** $\Leftrightarrow$ $\forall x \ \forall y \in$ Pre-Imagen (f) / $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

f es ***sobreyectiva*** $\Leftrightarrow$ Imagen (f) = Codominio (f)

f es ***biyectiva*** $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

Ejemplo de clasificación de funciones:

Dada la función h: $N \rightarrow N$ / $h(x) = x + 2$

1) **Indicar su dominio, codominio, pre-imagen e imagen.**
2) **Indicar si cumple o no cada una de las propiedades anteriores, justificando porqué en cada caso.**

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Función inversa:

El concepto de función inversa se define únicamente para funciones que son **inyectivas**. Es decir, funciones tales que a elementos distintos del dominio, le corresponden elementos distintos del codominio.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función **inyectiva**. Su función inversa f^{-1} es tal que:

- $f^{-1} : B \rightarrow A$
- Los elementos de f^{-1} se obtienen invirtiendo los pares ordenados de f. $(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$

Ejemplo de función inversa:

Considere nuevamente la función $h: N \rightarrow N \,/\, h(x) = x + 2$

1) **¿Es inyectiva?**
2) **En caso afirmativo, definir su función inversa h^{-1}. Hacerlo tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión.**

Función compuesta:

El concepto de función compuesta se define para dos funciones tales que el codominio de la primera necesariamente **coincide** con el dominio de la segunda.

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos funciones cualesquiera. Se define la función compuesta $(g \circ f): A \to C \ / \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo de función compuesta:

Dados las siguientes funciones:

$$f: N \to Z \ / \ f(x) = -3x$$

$$g: Z \to R \ / \ g(x) = x^2 / 2$$

1) **Definir la función $(g \circ f)$ usando la def. de función compuesta.**
2) **Calcular el resultado de $(g \circ f)(2)$.**
3) **¿Es posible definir la función compuesta $(f \circ g)$?**