Ejercicio 1

Sea Z el conjunto de los números **enteros**. Se define la relación $R = \{ (x,y) \in Z \times Z \ / \ x + y \geq 0 \}$

a) ¿Cuántos elementos tiene R? Escriba cinco elementos pertenecientes a la relación.
b) Indique si R cumple o no cada una de las siguientes propiedades, justificando su respuesta en cada caso (mediante una demostración o un presentando un contraejemplo concreto, según corresponda): reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica, transitiva.
c) ¿Es R una relación de equivalencia? ¿Es R una relación de orden parcial amplio? Justifique.

Ejercicio 2

Sea $Id_N = \{ (x,y) \in N \times N \ / \ x = y \}$ la relación de identidad entre números naturales.

a) Demuestre que Id_N es una relación de equivalencia.
b) Demuestre que Id_N es una relación de orden parcial amplio.

Ejercicio 3

Dadas las siguientes relaciones:

$F = \{ (x,y) \in N \times N \ / \ x \leq y \}$ $G = \{ (x,y) \in N \times N \ / \ y = 2x \}$ $H = \{ (x,y) \in N \times N \ / \ x - y = 0 \}$

a) Para cada una de ellas, indique si es o no una función, justificando su respuesta. En caso afirmativo, exprésela en notación prefija e indique su dominio y codominio.
b) Para aquellas que **no** son funciones, indique si cumplen o no c/u de las siguientes propiedades, justificando apropiadamente en cada caso: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica, transitiva.
c) Para aquellas que **sí** son funciones, indique si cumplen o no c/u de las siguientes propiedades, justificando apropiadamente en cada caso: total, parcial, inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.
d) Para aquellas que son inyectivas, halle su función inversa, expresándola en notación prefija.

Ejercicio 4

Sea A un conjunto cualquiera y sean $R \subseteq A \times A$ y $S \subseteq A \times A$ dos relaciones sobre A. Demuestre c/u de los siguientes teoremas, planteando adecuadamente hipótesis y tesis en cada caso.

a) Si R es reflexiva y $|A| = |R|$ entonces R es una relación de equivalencia.
b) Si R y S son relaciones reflexivas y simétricas, entonces $(R \cap S)$ también es una relación reflexiva y simétrica.
c) Si R y S son tales que $R \cap S = Id_A$ entonces $(R \oplus S)$ no es una relación de equivalencia.

Ejercicio 5

Sean F y G dos funciones **cualesquiera**. Indique si c/u de las siguientes afirmaciones es correcta o no. En caso afirmativo, demuéstrela. En caso negativo, dé un contraejemplo concreto y justifique.

a) $F \cup G$ es una función.
b) $F \cap G$ es una función.
c) $F - G$ es una función.

Ejercicio 6

Dadas las siguientes funciones:

$f_1 : A \to A$ siendo $A = \{a, b, c, d\}$, tal que: $f_1(a) = b$, $f_1(b) = c$, $f_1(c) = d$, $f_1(d) = c$.

$f_2 : A \to B$ siendo $B = \{0, 2, 4\}$, tal que: $f_2 = \{ (a, 0), (b, 0), (c, 2) \}$

$f_3 : Z \to Z$ tal que: $f_3(x) = 2x + 4$.

$f_4 : Z \to Z$ tal que: $f_4(x) = x^2$.

$f_5 : P(C) \to N$, siendo $C = \{1, 2, 3\}$ tal que $f_5(x) = \text{cardinal}(x)$.

$f_6 : P(C) \times P(C) \to P(C)$, siendo $C = \{1, 2, 3\}$ tal que $f_6(x,y) = x \cup y$.

a) Para cada una de ellas, determine dominio, codominio, preimagen e imagen.

b) Exprésela en forma de conjunto definido por extensión cuando sea posible. Determine si son totales, parciales, inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. Justifique todas sus respuestas.

c) Para las que la función inversa esté definida, calcúlela. Exprésela en forma de conjunto definido por extensión en aquellos casos en los que sea posible. En los que no sea posible, hágalo tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión.

d) Calcule: $(f_2 \circ f_1)$, $(f_4 \circ f_3)$, $(f_3 \circ f_4)$, $(f_5 \circ f_6)$. Exprese la función compuesta en forma de conjunto definido por extensión en aquellos casos en los que sea posible. En los que no sea posible, hágalo tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión.

Ejercicio 7

Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera.

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones totales e inyectivas.

a) Indique dominio y codominio de la función $(g \circ f)$.

b) Demuestre que $(g \circ f)$ también es una función total.

c) Demuestre que $(g \circ f)$ también es una función inyectiva.

d) Considerando que A, B y C son el conjunto de los números naturales, proponga dos ejemplos de funciones f y g **diferentes** que sean totales e inyectivas, expresándolas tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión. Demuestre que efectivamente son totales e inyectivas y luego calcule $(g \circ f)$, expresándola tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión.