Ejercicio 1

Considere el tipo de similaridad $< 1,2 \; ; \; 1 \; ; \; 2 >$ con símbolos de relación **P** (unario) y **R** (binario), símbolo de función **f** (unario) y símbolos de constante $\mathbf{c_1}$**,** $\mathbf{c_2}$. Construya derivaciones que demuestren las siguientes consecuencias sintácticas de lógica de predicados. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas:

a) $P(c_1), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash P(f(c_1))$

b) $\forall x \forall y R(x,y) \vdash R(f(c_1), f(c_2))$

c) $P(c_1), P(c_2) \vdash \exists x \exists y\, (P(x) \wedge P(y))$

d) $\forall x R(x, c_1), \forall x(R(x, c_1) \to P(x)) \vdash \forall y P(f(y))$

e) $\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x)) \vdash \forall x R(x,x) \to \exists y \neg R(y,y)$

f) $\forall x(P(x) \to \neg R(x,x)) \vdash \exists x R(x,x) \to \neg \forall x P(x)$

Ejercicio 2

Sean α, $\beta \in$ FORM fórmulas cualesquiera. Construya derivaciones que demuestren las siguientes consecuencias sintácticas de lógica de predicados. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas:

a) $\forall x(\alpha \to \beta), \exists x \alpha \vdash \exists x \beta$

b) $\forall x \alpha \wedge \exists x \beta \vdash \exists x\, (\alpha \wedge \beta)$

c) $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \forall x \alpha \leftrightarrow \forall x \beta$

d) $\exists x\, (\neg\beta \to \alpha), \forall x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x \beta$

e) $\forall x \alpha \vee \forall x \beta \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$

Ejercicio 3

Sean α, $\beta \in$ FORM fórmulas cualesquiera. Construya derivaciones que demuestren los siguientes teoremas de lógica de predicados. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas:

a) $\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta) \to \forall x \alpha \wedge \forall x \beta$

b) $\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x \alpha \wedge \exists x \beta$

c) $\vdash \forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$

d) $\vdash \neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$

e) $\vdash \exists x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)$

Ejercicio 4

Un conjunto $\Gamma \subseteq$ SENT es ***inconsistente*** si y sólo si $\Gamma \vdash \bot$. Al igual que en PROP, para probar la inconsistencia de Γ basta con dar una derivación que concluya $\bot$ partiendo de hipótesis en Γ. En cambio, para probar la consistencia de Γ es necesario usar el Teorema de Completitud.

a) Utilizando el Teorema de Completitud, demuestre la ***Condición necesaria y suficiente de consistencia*** para la Lógica de Predicados, cuyo enunciado es el siguiente:

Dado $\Gamma \subseteq$ SENT, Γ *es consistente* $\Leftrightarrow$ *Existe una estructura* $\mathcal{M}$ *tal que* $\mathcal{M} \models \Gamma$.

b) Considere el tipo de similaridad $< 1 \; ; \; - \; ; \; 1 >$ con un símbolo de relación **P** (unario) y símbolo de constante $\mathbf{c_1}$. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es consistente o inconsistente, justificando apropiadamente su respuesta en cada caso:

$\Gamma_1 = \{ \forall x\, P(x),\ \exists x \neg P(x) \}$

$\Gamma_2 = \{ \forall x\, P(x),\ \neg \exists x P(x) \}$

$\Gamma_3 = \{ \neg \forall x P(x),\ \exists x\, P(x) \}$

$\Gamma_4 = \{ \neg \forall x P(x),\ \exists x \neg P(x) \}$