UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Matemática Discreta

- Licenciatura en Informática – Ingeniería en Informática
- 1º año
- Soledad Pérez – Federico Gómez

Métodos de Prueba

¿Qué es un teorema?

Un teorema es un enunciado matemático compuesto por:

- **Hipótesis:** Afirmaciones que se asumen conocidas y verdaderas.
- **Tesis:** Afirmación cuya veracidad se desea concluir partiendo de las hipótesis.

No se sabe a priori si un teorema es verdadero o no. El ingenio, la práctica, son elementos esenciales para determinar la validez de un teorema.

Si el teorema es verdadero, hay que **demostrarlo**. Para ello, se utiliza algún método de prueba (ver en breve). Demostrar un teorema significa comprobar su validez mediante razonamientos justificados que a partir de las hipótesis concluyen la tesis. Se aplican definiciones, propiedades y otros teoremas previamente demostrados.

Al demostrar un teorema, **no** es válido razonar sobre casos concretos y particulares. Hay que razonar sobre **casos generales**.

¿Qué es un teorema? (continuación)

Si el teorema es falso, hay que dar un **contraejemplo**. Un contraejemplo es **un** caso concreto en el cual las hipótesis se cumplen, pero la tesis no.

El uso de ejemplos concretos es válido **únicamente** para probar la falsedad de un teorema. Para probar su veracidad, el único mecanismo válido es hacer una **demostración**.

Al dar un contraejemplo, se debe explicar también porqué el ejemplo concreto efectivamente permite refutar el enunciado.

Ejemplo: Un primer teorema

Dado el siguiente enunciado: $\forall n \in N, n^2 \leq 2^n$

1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**
2) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**
3) **Determinar si el teorema es verdadero o falso, dando una demostración o un contraejemplo, según corresponda.**

Ejemplo: Un primer teorema

Dado el siguiente enunciado: $\forall n \in N, n^2 \leq 2^n$

1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**

Para todo natural n, el resultado de n^2 es menor o igual que 2^n

- **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**

Hipótesis: $n \in N$
Tesis: $n^2 \leq 2^n$

- **Determinar si el teorema es verdadero o falso, dando una demostración o un contraejemplo, según corresponda.**

Pensémoslo para n =0, n=1, n=2, etc…

El teorema es FALSO, como muestra el siguiente contraejemplo:

Para $n = 3$, tenemos que $n^2 = 9$ y que $2^n = 8 \Rightarrow 9$ no es ≤ 8

Por lo tanto, al haber un natural que no cumple la tesis, se concluye que el teorema es FALSO.

Métodos de prueba a utilizar en teoremas verdaderos:

En caso de que un teorema efectivamente se cumpla (sea verdadero), veremos tres métodos para hacer la correspondiente prueba (prueba es sinónimo de demostración).

- **Prueba directa**
- **Prueba por absurdo**
- **Prueba por contrarrecíproco**

Algunos teoremas se pueden demostrar por más de un método. Hay otros que, en cambio, solamente salen por uno de los métodos. En cada prueba concreta se debe elegir algún método que resulte apropiado.

Hay un cuarto método de prueba que veremos más adelante en el curso, se trata de la **prueba por inducción**.

Prueba directa:

En este método se parte de las hipótesis para llegar a la tesis. Consiste en ir realizando razonamientos que hacen uso de las hipótesis hasta que, eventualmente, se llega a concluir la tesis.

En cada paso de la demostración, se hace uso de alguna hipótesis, alguna propiedad conocida o algún teorema previamente demostrado. Es muy importante indicar expresamente qué se está usando en cada paso.

Ejemplo de prueba directa:

Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, se quiere demostrar que:

$$(A - B) \subseteq (A \cap B)^C$$

1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**
2) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**
3) **Demostrar el teorema aplicando el método de prueba directa.**

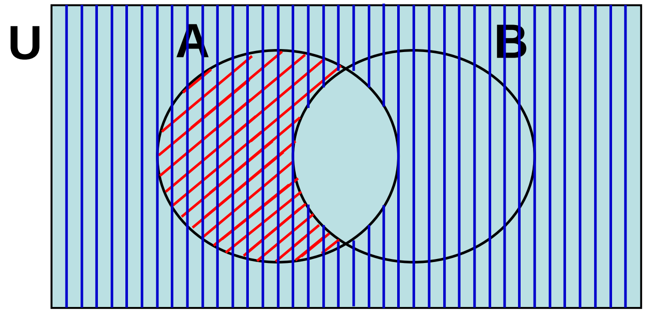
Ejemplo de prueba directa:

Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, se quiere demostrar que:

$$(A - B) \subseteq (A \cap B)^C$$

1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**

   Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, el conjunto $(A - B)$ está incluido ampliamente en el conjunto $(A \cap B)^C$. Es decir, todo elemento x perteneciente a $(A - B)$ también pertenece a $(A \cap B)^C$



2) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**

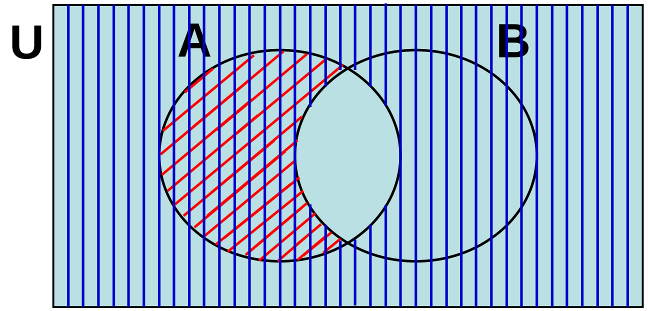
   Hipótesis: $x \in (A - B)$

   Tesis: $x \in (A \cap B)^C$

Ejemplo de prueba directa:

3) Demostrar el teorema aplicando el método de prueba directa.

Por hipótesis, sabemos que $x \in (A - B)$

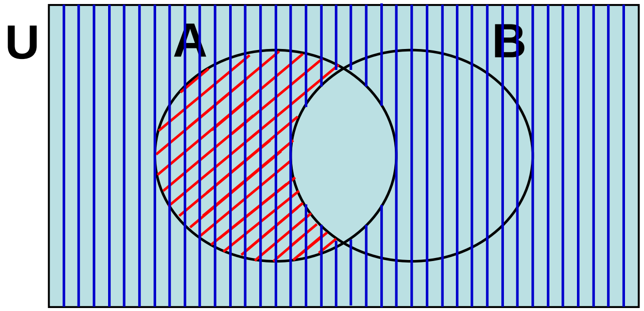


Ejemplo de prueba directa:

3) Demostrar el teorema aplicando el método de prueba directa.

Por hipótesis, sabemos que x $\in$ (A – B) $\Rightarrow$

Por definición de diferencia de conjuntos, (x $\in$ A) y (x $\notin$ B)



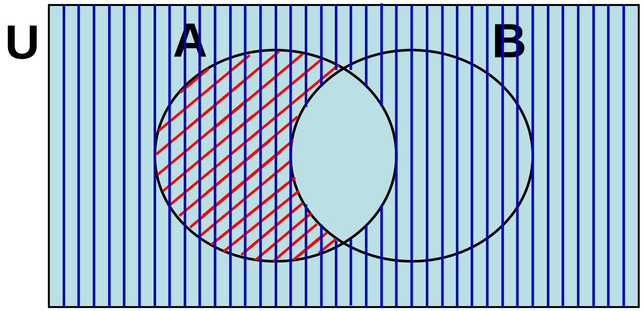
Ejemplo de prueba directa:

3) Demostrar el teorema aplicando el método de prueba directa.

Por hipótesis, sabemos que $x \in (A - B) \Rightarrow$

Por definición de diferencia de conjuntos, $(x \in A)$ y $(x \notin B) \Rightarrow$

Por definición de intersección de conjuntos, $x \notin (A \cap B)$



<u>Ejemplo de prueba directa</u>:

3) Demostrar el teorema aplicando el método de prueba directa.

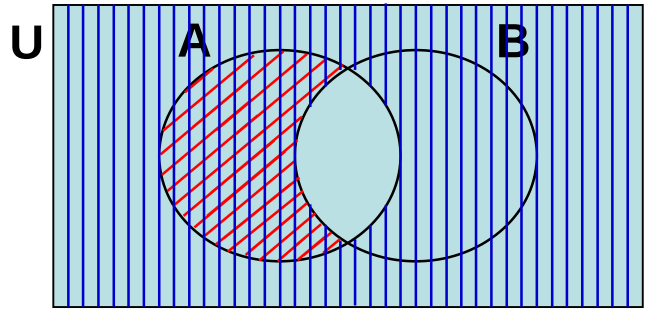
Por hipótesis, sabemos que x $\in$ (A – B) $\Rightarrow$

Por definición de diferencia de conjuntos, (x $\in$ A) y (x $\notin$ B) $\Rightarrow$

Por definición de intersección de conjuntos, x $\notin$ (A $\cap$ B) $\Rightarrow$

Por definición de complemento de un conjunto, x $\in$ $(A \cap B)^C$ (q.e.d)

<u>Observación</u>: q.e.d significa "queda entonces demostrado". Se acostumbra poner q.e.d cuando se llega finalmente a la tesis



Prueba por absurdo:

Este método consiste en **negar** la tesis. Es decir, suponer que la tesis a probar en realidad es **falsa** (no se cumple).

Luego se agrega dicha suposición temporalmente como una hipótesis adicional. Se hace uso de ella junto con la(s) hipótesis original(es) hasta que en algún paso se llega a un resultado **absurdo** (una contradicción).

En el momento en el que se alcanza el absurdo, la prueba termina. Se concluye entonces que la tesis efectivamente era verdadera.

Ejemplo de prueba por absurdo:

Sean A un conjunto cualquiera y R $\subseteq$ AxA una relación. Se quiere demostrar que si R es asimétrica, entonces también es irreflexiva.

1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**
2) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**
3) **Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.**

<u>Ejemplo de prueba por absurdo</u>:

Sean A un conjunto cualquiera y R $\subseteq$ AxA una relación. Se quiere demostrar que si R es asimétrica, entonces también es irreflexiva.

1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**

Dada una relación R cualquiera cuyos pares ordenados surgen de AxA, se cumple que si R es asimétrica, también es irreflexiva
Recordar que:

R es asimétrica $\Leftrightarrow$ para todo par (x,y) $\in$ R, su par inverso (y,x) $\notin$ R (no existe ningún par inverso de los pares que están en R)

R es irreflexiva $\Leftrightarrow$ no existe ningún par (x,x) que pertenezca a R (no existe ningún lazo en la relación)

2) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**

Hipótesis: R es asimétrica
Tesis: R es irreflexiva

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Ejemplo de prueba por absurdo</u>:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Hipótesis 1: R es asimétrica

Hipótesis 2: R no es irreflexiva

Por absurdo, supongamos que la tesis <u>no</u> se cumple, es decir que la relación R <u>no</u> es irreflexiva

Ejemplo de prueba por absurdo:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Hipótesis 1: R es asimétrica

Hipótesis 2: R no es irreflexiva

Por absurdo, supongamos que la tesis no se cumple, es decir que la relación R no es irreflexiva $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad irreflexiva, existe al menos un lazo en la relación. Es decir, existe al menos un lazo (x,x) $\in$ R

Ejemplo de prueba por absurdo:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Hipótesis 1: R es asimétrica

Hipótesis 2: R no es irreflexiva

Por absurdo, supongamos que la tesis no se cumple, es decir que la relación R no es irreflexiva $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad irreflexiva, existe al menos un lazo en la relación. Es decir, existe al menos un lazo $(x,x) \in R$

Por otra parte, por hipótesis sabemos que R es asimétrica

Ejemplo de prueba por absurdo:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Hipótesis 1: R es asimétrica

Hipótesis 2: R no es irreflexiva

Por absurdo, supongamos que la tesis no se cumple, es decir que la relación R no es irreflexiva $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad irreflexiva, existe al menos un lazo en la relación. Es decir, existe al menos un lazo $(x,x) \in R$

Por otra parte, por hipótesis sabemos que R es asimétrica $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad asimétrica, dado cualquier par de R, no existe su par inverso en R

Ejemplo de prueba por absurdo:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Hipótesis 1: R es asimétrica

Hipótesis 2: R no es irreflexiva

Por absurdo, supongamos que la tesis no se cumple, es decir que la relación R no es irreflexiva $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad irreflexiva, existe al menos un lazo en la relación. Es decir, existe al menos un lazo (x,x) $\in$ R

Por otra parte, por hipótesis sabemos que R es asimétrica $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad asimétrica, dado cualquier par de R, no existe su par inverso en R $\Rightarrow$

En particular, dado el lazo (x,x), su par inverso (que es él mismo), no puede pertenecer a R, entonces el lazo (x,x) $\notin$ R

Ejemplo de prueba por absurdo:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Hipótesis 1: R es asimétrica

Hipótesis 2: R no es irreflexiva

Por absurdo, supongamos que la tesis no se cumple, es decir que la relación R no es irreflexiva $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad irreflexiva, existe al menos un lazo en la relación. Es decir, existe al menos un lazo $(x,x) \in R$

Por otra parte, por hipótesis sabemos que R es asimétrica $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad asimétrica, dado cualquier par de R, no existe su par inverso en R $\Rightarrow$

En particular, dado el lazo (x,x), su par inverso (que es él mismo), no puede pertenecer a R, entonces el lazo $(x,x) \notin R$

Hay una contradicción, ya que no puede ocurrir simultáneamente que $(x,x) \in R$ y que $(x,x) \notin R$.

Ejemplo de prueba por absurdo:

3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Por absurdo, supongamos que la tesis no se cumple, es decir que la relación R no es irreflexiva $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad irreflexiva, existe al menos un lazo en la relación. Es decir, existe al menos un lazo (x,x) $\in$ R

Por otra parte, por hipótesis sabemos que R es asimétrica $\Rightarrow$

Por definición de la propiedad asimétrica, dado cualquier par de R, no existe su par inverso en R $\Rightarrow$

En particular, dado el lazo (x,x), su par inverso (que es él mismo), no puede pertenecer a R, entonces el lazo (x,x) $\notin$ R

Hay una contradicción, ya que no puede ocurrir simultáneamente que (x,x) $\in$ R y que (x,x) $\notin$ R

Esto es absurdo entonces sí se cumple la tesis: R es irreflexiva (q.e.d)

Prueba por contrarrecíproco:

Este método consiste en enunciar y demostrar un teorema **equivalente** al que se desea probar. Por ser equivalentes, la validez de uno implica necesariamente la validez del otro (y viceversa).

El teorema equivalente se denomina teorema **contrarrecíproco** (no confundir con el **recíproco**). El teorema contrarrecíproco se obtiene de negar e invertir las hipótesis y tesis del teorema original. Es decir:

- Lo que es **hipótesis** en el teorema original se **niega** y pasa a ser **tesis** en el teorema contrarrecíproco.
- Lo que es **tesis** en el teorema original se **niega** y pasa a ser **hipótesis** en el teorema contrarrecíproco.

Luego, se pasa a demostrar el teorema contrarrecíproco. Su demostración puede hacerse usando alguno de los otros dos métodos de prueba vistos antes (prueba directa o prueba por absurdo).

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Prueba por contrarrecíproco (continuación):

Si el enunciado del teorema original tiene la siguiente forma:

- Hipótesis: **Se cumple X**
- Tesis: **Hay que probar Y**

Entonces, el enunciado del teorema contrarrecíproco tiene esta forma:

- Hipótesis: **Se cumple lo opuesto a Y**
- Tesis: **Hay que probar lo opuesto a X**

Ejemplo de prueba por contrarrecíproco:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Se quiere probar que si $|B| - |A| = 0$, entonces $A \not\subset B$.

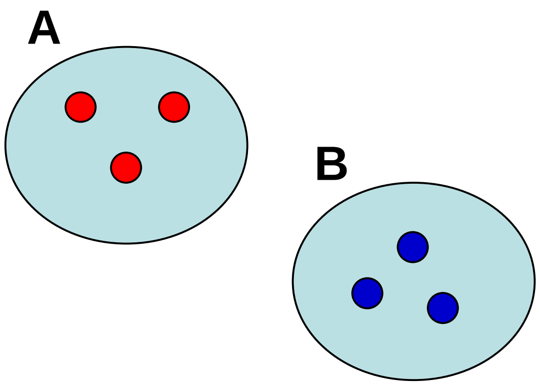
1) **Explicar con palabras cuál es su significado.**
2) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**
3) **Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema contrarrecíproco.**
4) **Demostrar el teorema contrarrecíproco.**

<u>Ejemplo de prueba por contrarrecíproco</u>:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Se quiere probar que si $|B| - |A| = 0$, entonces $A \not\subset B$.

1) Explicar con palabras cuál es su significado.

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B (no vacíos), si la cant. de elementos de B – la cant. de elementos de A es cero, entonces A <u>no</u> está incluido estrictamente en B.



No sabemos qué elementos concretos tienen A y B, pero si al restar ambas cantidades nos da cero, es seguro que A no puede estar incluido estrictamente en B, ya que la inclusión estricta exige que B tenga, por lo menos, un elemento más que A

<u>Ejemplo de prueba por contrarrecíproco</u>:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Se quiere probar que si $|B| - |A| = 0$, entonces $A \not\subset B$.

2) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.

Hipótesis: $|B| - |A| = 0$

Tesis: $A \not\subset B$

3) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema contrarrecíproco.

Hipótesis: $A \subset B$ **(lo contrario a la tesis de 2)**

Tesis: $|B| - |A| \neq 0$ **(lo contrario a la hipótesis de 2)**

Este último teorema es el que vamos a demostrar. Por ser equivalente al teorema original, su demostración implica directamente que el teorema original también se cumple

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Ejemplo de prueba por contrarrecíproco:

4) Demostrar el teorema contrarrecíproco.

Por hipótesis, sabemos que $A \subset B$

Ejemplo de prueba por contrarrecíproco:

4) Demostrar el teorema contrarrecíproco.

Por hipótesis, sabemos que $A \subset B \Rightarrow$

Por propiedad de cardinal de conjuntos, sabemos que $|A| < |B|$

Ejemplo de prueba por contrarrecíproco:

4) Demostrar el teorema contrarrecíproco.

Por hipótesis, sabemos que $A \subset B \Rightarrow$

Por propiedad de cardinal de conjuntos, sabemos que $|A| < |B| \Rightarrow$

Como $|A| < |B|$, es seguro que $|A| \neq |B|$

Ejemplo de prueba por contrarrecíproco:

4) Demostrar el teorema contrarrecíproco.

Por hipótesis, sabemos que $A \subset B \Rightarrow$

Por propiedad de cardinal de conjuntos, sabemos que $|A| < |B| \Rightarrow$

Como $|A| < |B|$, es seguro que $|A| \neq |B| \Rightarrow$

Como $|A| \neq |B|$, entonces $|B| - |A| \neq 0$ (q.e.d)