UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Matemática Discreta

Licenciatura en Informática – Ingeniería en Informática

1º año

Soledad Pérez – Federico Gómez

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Repaso de
Teoría de Conjuntos

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Conjunto (Definición):

- Agrupación de elementos, no necesariamente del mismo tipo.
- Los elementos de un conjunto no tienen un orden definido.
- En un conjunto no puede haber elementos repetidos.

Formas de definir un conjunto:

- Por extensión (la veremos en este capítulo)
- Por comprensión (la veremos en este capítulo)
- Por inducción (la veremos más adelante en el curso)

Definición por extensión:

- Se enumeran los elementos del conjunto entre llaves { }
- Sólo se puede utilizar para definir conjuntos finitos (no se pueden enumerar los elementos de un conjunto infinito).

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Asociado a la definición de conjunto aparece el concepto de ELEMENTO

ELEMENTO: objeto o miembro que forma parte de un conjunto.

La relación entre ellos es de pertenencia. Se dice que el elemento <u>pertenece</u> al conjunto.

Y la notación es:

$$a \in A$$

siendo a un elemento, y A un conjunto

En términos generales, el elemento se pone en minúscula y el conjunto en mayúscula

Definición por comprensión:

- Se indica cual es el conjunto universal a partir del cual se definirán los elementos de este conjunto en particular.
- A continuación, se da una condición de pertenencia de los elementos del conjunto universal a este conjunto.

Notación: **Conj = {x $\in$ U / x cumple cierta condición}**
U es el conjunto universal del cual se toman los elementos de Conj.

Ejemplos de definiciones por extensión y comprensión:

Definir los siguientes conjuntos por comprensión y también por extensión cuando sea posible:

1) **El conjunto P de los números pares**
2) **El conjunto A de los naturales entre 0 y 10 (inclusive)**
3) **El conjunto B de los naturales pares entre 0 y 10 (inclusive)**
4) **El conjunto V de las letras vocales castellanas**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

1) El conjunto P de los números pares

por extensión: no se puede escribir por ser infinito

por comprensión:

- P = $\{ x \in N / x \text{ es par}\}$ (Se puede escribir con palabras la condición, pudo haber sido también x es múltiplo de 2)

La propiedad de ser par se puede escribir más formalmente con el concepto de módulo:

- P = $\{ x \in N / x \mod 2 = 0\}$

2) El conjunto A de los naturales entre 0 y 10 (inclusive)

por extensión:

A = {0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

por comprensión:

A = $\{ x \in N / x \leq 10\}$

3) El conjunto B de los naturales pares entre 0 y 10 (inclusive)

por extensión:

B = {0, 2, 4, 6, 8, 10}

por comprensión:

B = { x $\in N/\mathbf{x\ es\ par}$ **y x** $\leq \mathbf{10}\}$

B = { x $\in \mathbf{P}/$ **x** $\leq \mathbf{10}\}$ ***(P es el conj de los pares)***

B = { x $\in \mathbf{A}/\mathbf{x\ es\ par}\}$ ***(A es el conj de los naturales menores o iguales a 10)***

4) El conjunto V de las letras vocales castellanas

por extensión:

V = {a, e, i, o, u}

por comprensión:

V = { x $\in Char$ **/ x es vocal}**

Propiedades Universales de Conjuntos:

Las siguientes propiedades se cumplen siempre para todos los conjuntos, sin importar de qué tipo son sus elementos, si son discretos o no, o si son finitos o infinitos.

1) Inclusión e Igualdad

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, decimos que:

- $A \subseteq B$ si y solo si $\forall x \in A, x \in B$ (inclusión amplia)
- $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ (igualdad)
- $A \subset B$ si y solo si $A \subseteq B$ y no ocurre que $A = B$ (inclusión estricta)

Ejemplos de inclusión e igualdad:

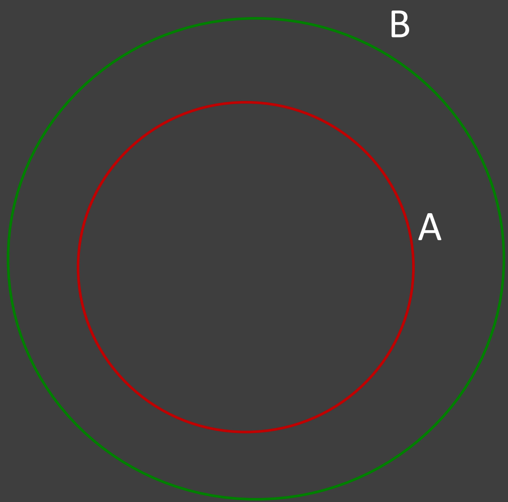
Dados $A = \varnothing$, $B = \{x \in N \,/\, x \text{ es par}\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, explicando porqué en cada caso.

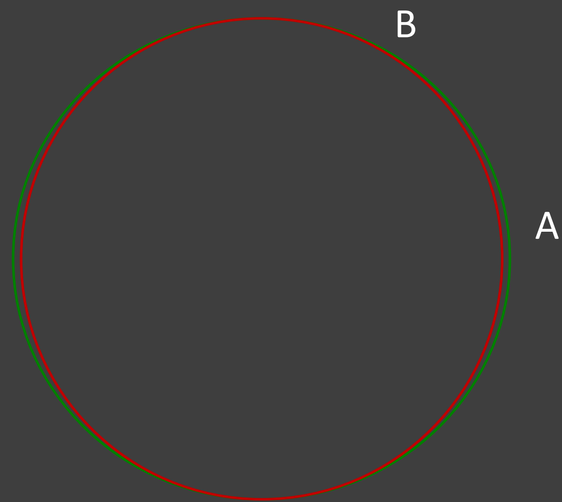
1) $A \subset B$	**3) $C \subset B$**	**5) $B \subset B$**
2) $A \subseteq B$	**4) $C \subseteq B$**	**6) $B \subseteq B$**

Propiedades Universales de Conjuntos:

Inclusión amplia

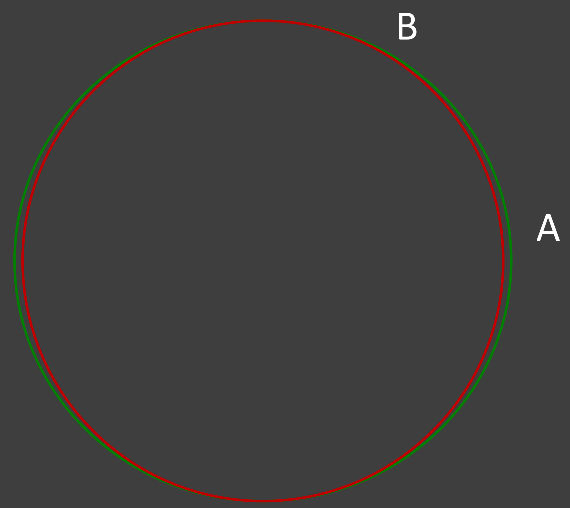
$A \subseteq B$ si y solo si $\forall\, x \in A,\ x \in B$





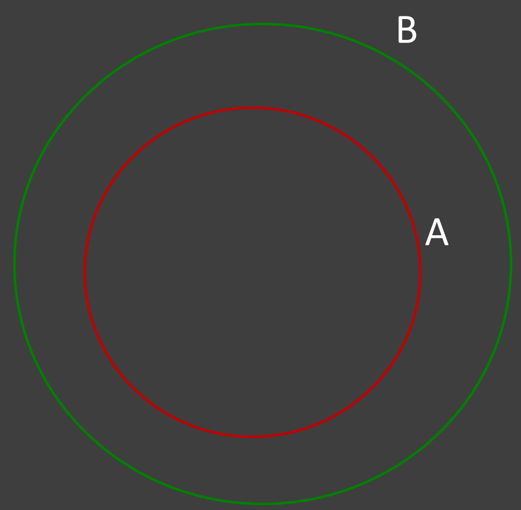
Igualdad

A = B si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$



Inclusión estricta

$A \subset B$ si y solo si $A \subseteq B$ y no ocurre que $A = B$



Ejemplos de inclusión e igualdad:

Dados A = $\varnothing$, B = {x $\in$ N / x es par}, C = {2, 4, 6}, indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, explicando porqué en cada caso.

1) A $\subset$ B CORRECTO, el conjunto vacío está estrictamente incluido en cualquier otro (excepto el propio vacío, pero no es el caso)

2) A $\subseteq$ B CORRECTO, el conjunto vacío está ampliamente incluido en cualquier otro

3) C $\subset$ B CORRECTO, cada elemento de C pertenece a B, y no son iguales

4) C $\subseteq$ B CORRECTO, cada elemento de C pertenece a B

5) B $\subset$ B INCORRECTO, no se cumple porque B = B

6) B $\subseteq$ B CORRECTO, cada elemento de B pertenece a B

UDE
UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

2) Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos las siguientes operaciones entre ellos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \quad o \quad x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \quad y \quad x \in B\}$
- Diferencia: $A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$
- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U \,/\, x \in A \cup B \quad y \quad x \notin A \cap B\}$
- Complemento: $A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$
- Cardinal: $\#(A) = |A|$ = cantidad de elementos del conjunto A

Ejemplos de operaciones entre conjuntos:

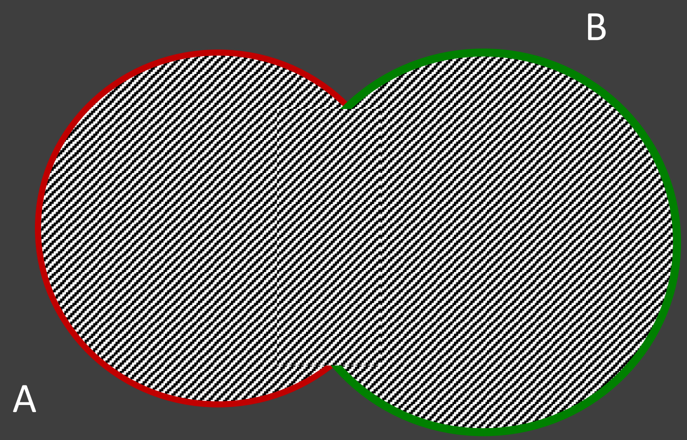
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

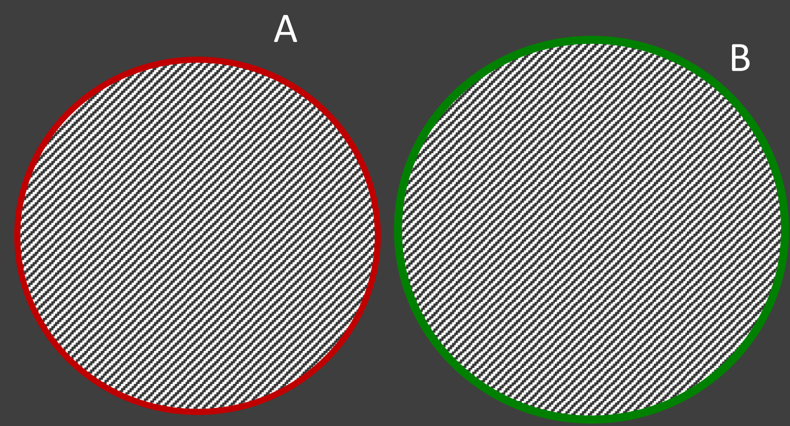
1) $A \cup B$	**3) $A - B$**	**5) A^C**
2) $A \cap B$	**4) $A \oplus B$**	**6) B^C**

Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera

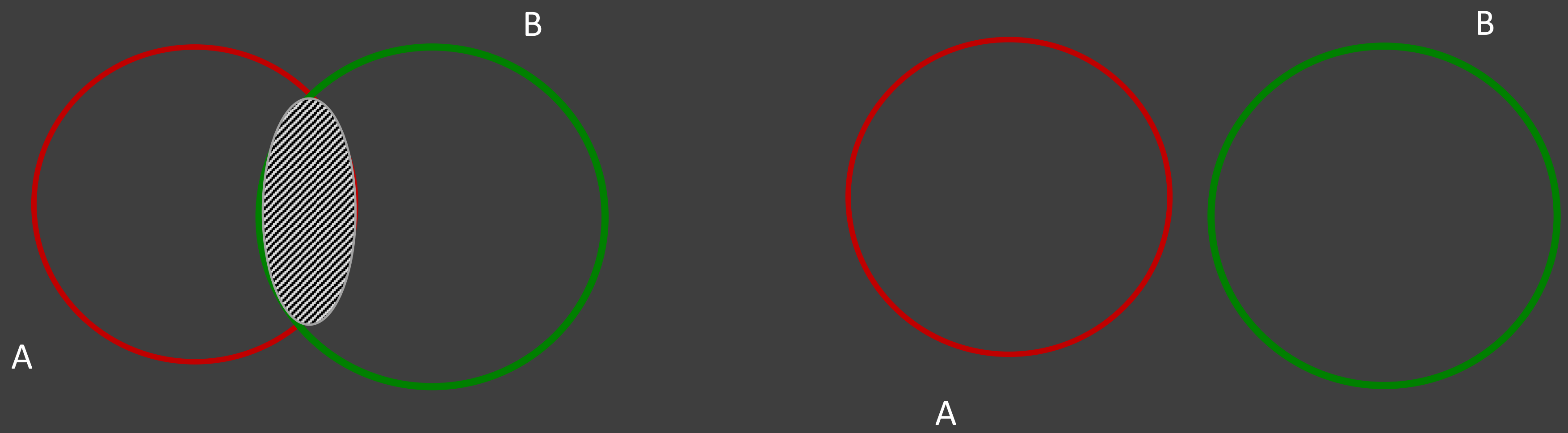
- Unión: $A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$ (o)



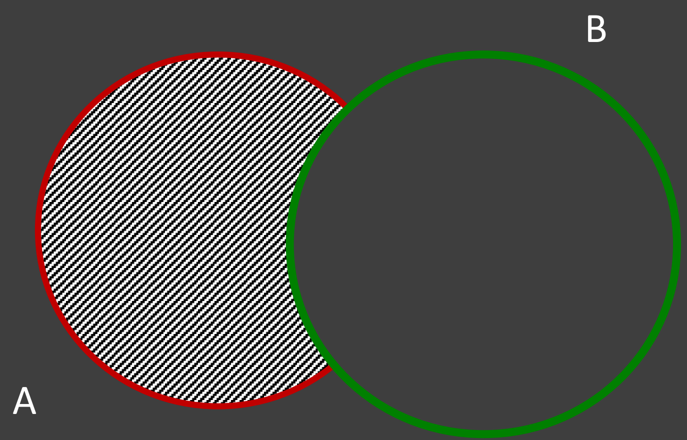


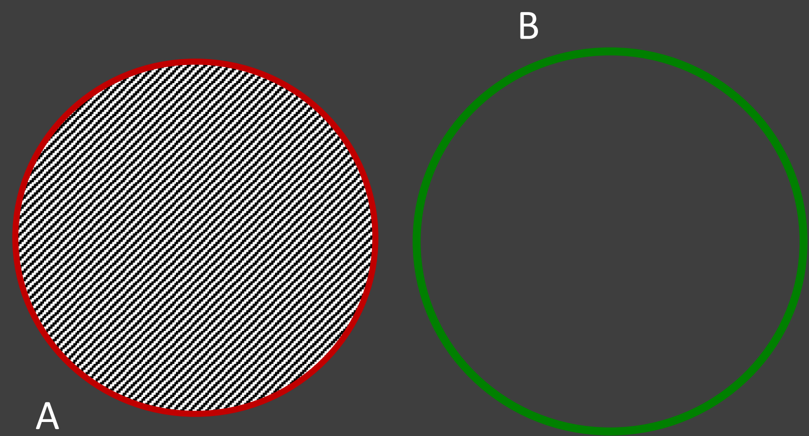
Operaciones entre conjuntos

- Intersección: $A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$ (y)

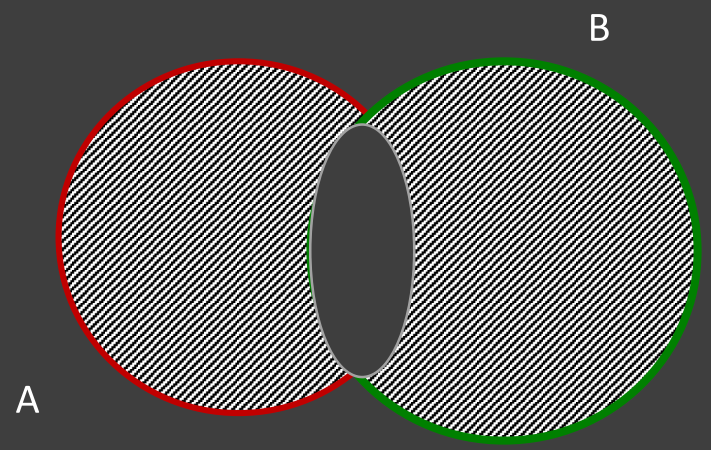


- Diferencia: $A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$ (y no)

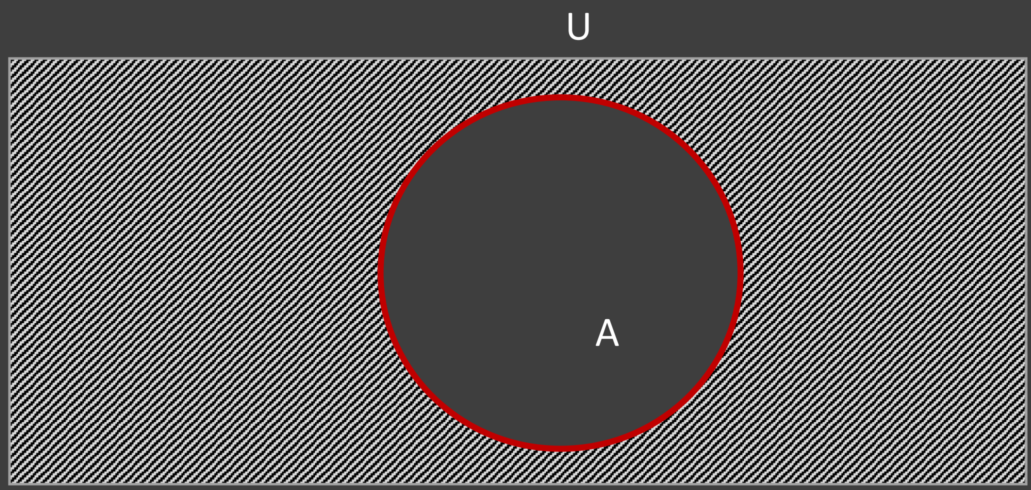




- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U \,/\, x \in A \cup B \text{ y } x \notin A \cap B\}$



Complemento: $A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$



- Cardinal: #(A) = |A| = cantidad de elementos del conjunto
- Es la única operación que da como resultado un número natural y no un conjunto

Ejemplos:

A = {0,1,2}	B = { }
|A| = 3	|B| = 0

<u>Propiedades Universales de Conjuntos (continuación)</u>: (REPETIDA)

2) Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos las siguientes operaciones entre ellos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in U / x \in A \quad o \quad x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \quad y \quad x \in B\}$
- Diferencia: $A - B = \{x \in U / x \in A \text{ y } x \notin B\}$
- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U / x \in A \cup B \quad y \quad x \notin A \cap B\}$
- Complemento: $A^c = \{x \in U / x \notin A\}$
- Cardinal: #(A) = |A| = cantidad de elementos del conjunto A

<u>Ejemplos de operaciones entre conjuntos</u>:

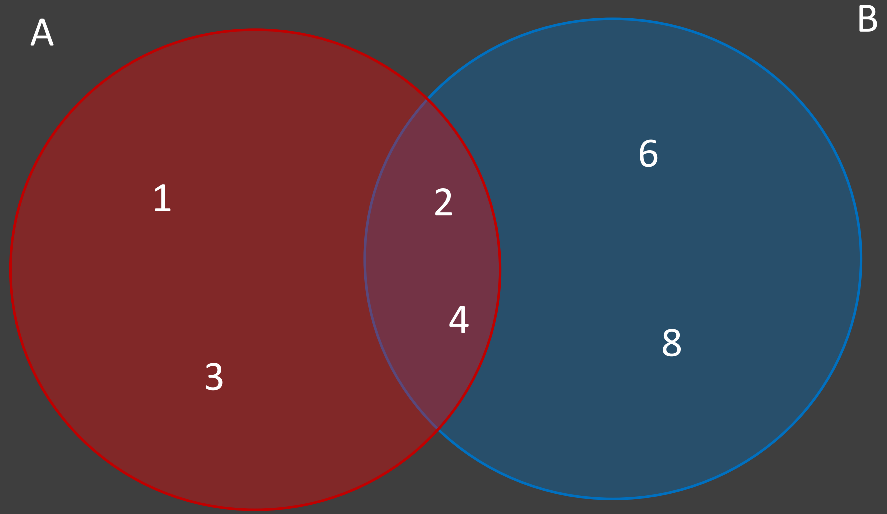
Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

1) $A \cup B$	**3)** $A - B$	**5)** A^C
2) $A \cap B$	**4)** $A \oplus B$	**6)** B^C

Ejemplos de operaciones entre conjuntos:

Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$



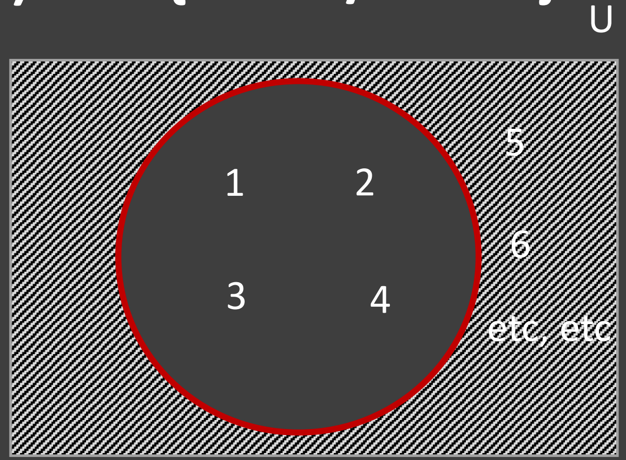
2) $A \cap B = \{2, 4\}$

3) $A - B = \{1,3\}$

4) $A \oplus B = \{1,3,6,8\}$

Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}

5) $A^C = \{x \in N \,/\, x \notin A\}$ **o** $\{x \in N \,/\, x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \text{ y } x \neq 3 \text{ y } x \neq 4\}$



6) $B^C = \{x \in N \,/\, x \notin B\}$ **o** $\{x \in N \,/\, x \neq 2 \text{ y } x \neq 4 \text{ y } x \neq 6 \text{ y } x \neq 8\}$

<u>Propiedades Universales de Conjuntos (continuación)</u>:

3) Propiedades Universales de la Unión de conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (conmutativa de la unión)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativa de la unión)

4) Propiedades Universales de la Intersección de conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa de la intersección)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativa de la intersección)

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

5) Propiedades Universales de la Diferencia entre conjuntos

Sea A un conjunto cualquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $A \oplus A = \emptyset$
- $A \oplus \emptyset = A$

6) Propiedades Distributivas entre conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejemplo de propiedades distributivas:

Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, comprobar el cumplimiento de las dos propiedades distributivas

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Ejemplo de propiedades distributivas:

Dados A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5}, C = {2, 4, 6}, comprobar el cumplimiento de las dos propiedades distributivas

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3\}$

$(A \cap B) = \{1,3\}$

$(A \cap C) = \{2\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3\}$

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(B \cap C) = \{\ \}$

$A \cup (B \cap C) = \{1,2,3\}$

$(A \cup B) = \{1,2,3,5\}$

$(A \cup C) = \{1,2,3,4,6\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3\}$

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

7) Propiedades de la cardinalidad de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
$A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$
$A = B \Rightarrow |A| = |B|$

¿Se cumplen los recíprocos de estas tres propiedades?

8) Leyes de Morgan entre conjuntos

Sean A, B dos conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo de Leyes de Morgan:

Dados $U = \{x \in N \,/\, x \leq 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, comprobar el cumplimiento de las dos Leyes de Morgan

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo de Leyes de De Morgan:

Dados $U = \{x \in N / x \leq 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, comprobar el cumplimiento de las dos Leyes de De Morgan

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ **$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$**

$(A \cup B) = \{1,2,3,4,5\}$	$A^C = \{0,4,5,6,7,8\}$
$(A \cup B)^C = \{0,6,7,8\}$	$B^C = \{0,1,2,3,6,7,8\}$
	$A^C \cap B^C = \{0,6,7,8\}$

2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cap B) = \{\ \}$	$A^C = \{0,4,5,6,7,8\}$
$(A \cap B)^C = U$ $= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$	$B^C = \{0,1,2,3,6,7,8\}$
	$A^C \cup B^C =$ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Conjunto Potencia

- Los conjuntos pueden estar formados por otros conjuntos -> es decir,

sus elementos pueden ser conjuntos. Por ejemplo, el conjunto de la clase, puede estar formado por los grupos de obligatorio (que están formados por alumnos).

Recordar:

- PERTENENCIA es una relación entre un elemento y un conjunto
- Elemento pertenece a conjunto si encontramos a ese elemento "adentro" del conjunto

$$a \in A$$

- INCLUSION AMPLIA es una relación entre dos conjuntos.
- Conjunto A ampliamente incluido en B, si "abriendo"el conjunto A, comprobamos que

CADA UNO de sus elementos PERTENECE a B

$$A \subseteq B \quad (\forall\ x \in A,\ x \in B)$$

Conjunto Potencia:

El conjunto potencia es un conjunto formado por todos los **subconjuntos** de un conjunto dado. Tiene la particularidad de que sus elementos son a su vez otros conjuntos. Concretamente, todos aquellos conjuntos que están ampliamente incluidos en el conjunto original.

- Si A es un conjunto, se denota como P(A) a su conjunto potencia.
- Se cumple la siguiente propiedad: Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

Ejemplos de conjunto potencia:

1) **Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.**
2) **¿Se cumple que $2 \in P(A)$?**
3) **¿Se cumple que $\{2\} \in P(A)$?**
4) **¿Se cumple que $\{2\} \subseteq P(A)$?**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Supongamos que Juancito tiene 3 juguetes, y lo dejan llevar a un paseo hasta 3 de ellos. Él elige cuáles y cuántos.
Tenemos Juguetes = {osito, pelota, autito}
Qué opciones tiene Juancito? Llevar:

- El osito solo
- La pelota sola
- El autito solo
- El osito y la pelota
- El osito y el autito
- La pelota y el autito
- El osito, la pelota y el autito
- Ninguno

Esto que hemos listado arriba es justamente **todos los subconjuntos posibles de ser formados** a partir del conjunto Juguetes. Y eso se llama **Conjunto Potencia**

- P(Juguetes)= {{osito}, {pelota}, {autito}, {osito, pelota} {osito, autito}, {pelota, autito}, {osito, pelota, autito}, {} }

Notar que:

- cada uno de las posibilidades es en realidad un conjunto, por eso está delimitado mediante { y }
- como el conjunto Potencia del conjunto Juguetes está integrado por conjuntos, éstos se convierten allí en "elementos", y son separados por comas, para la definición por extensión.
- ahora, por ejemplo {autito}, es un elemento del conjunto potencia. Y es a su vez, un conjunto con un elemento solo.
- El conjunto potencia de A debe incluir siempre el conjunto vacío y el propio conjunto completo A

Conjunto Potencia:

El conjunto potencia es un conjunto formado por todos los **subconjuntos** de un conjunto dado. Tiene la particularidad de que sus elementos son a su vez otros conjuntos. Concretamente, todos aquellos conjuntos que están incluidos en el conjunto original.

- Si A es un conjunto, se denota como P(A) a su conjunto potencia.
- Se cumple la siguiente propiedad: Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

Ejemplos de conjunto potencia:

1) **Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.**
2) **¿Se cumple que $2 \in P(A)$?**
3) **¿Se cumple que $\{2\} \in P(A)$?**
4) **¿Se cumple que $\{2\} \subseteq P(A)$?**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

1) Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.

P(A)= { { }, {2}, {a}, {%}, {2,a}, {2,%}, {a,%}, {2,a,%} }

Y comprobamos que están todos ya que |P(A)| = 8 = 2^3 , ya que |A| = 3

2) ¿Se cumple que 2 $\in$ P(A)?

NO, el conjunto potencia está formado por CONJUNTOS, por lo que el 2 no puede ser uno de sus elementos.

3) ¿Se cumple que {2} $\in$ P(A)?

SI, el conjunto con el número 2 es uno de los elementos de P(A).

4) ¿Se cumple que {2} $\subseteq$ P(A)?

NO, el conjunto con el número 2 no está ampliamente incluído en P(A), ya que <u>el 2 no pertenece a P(A) </u>(esto basándonos en la defincíón de inclusión amplia:

{2} $\subseteq$ P(A) si y solo si $\forall$ x $\in$ {2}, x $\in$ P(A) -> $\forall$ x $\in$ {2} es el 2

Lo que si es cierto es lo siguiente:{ {2} } $\subseteq$ P(A)

Producto Cartesiano:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es un conjunto que tiene como elementos a todos los **pares ordenados** de los elementos de A y B.

En cada par ordenado (x,y), la primer componente x es un elemento de A y la segunda componente y es un elemento de B. En un par ordenado sí importa el orden de las componentes.

- Se suele denotar como A x B
- Se cumple la siguiente propiedad: |A x B| = |A| x |B|
- El producto cartesiano se puede generalizar a n conjuntos, en dicho caso en lugar de hablar de pares ordenados, estaríamos hablando de n-uplas ordenadas.

Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Aparece un concepto nuevo, que es el PAR ORDENADO.

Se puede pensar como una "parejita" de dos elementos, que tiene la característica que el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo al conjunto B. La idea de *ordenado* viene de allí.

En un par ordenado los elementos se separan por una coma, y se "encierra" la parejita entre *paréntesis* (y)

Cada uno de los pares ordenados formados así, pasan a pertenecer al conjunto Producto cartesiano.

El producto cartesiano AxB está formado por TODOS los pares ordenados posibles del tipo (x,y) tales que $x \in A$ e $y \in B$

Este concepto se puede ampliar a más de dos conjuntos. Por ejemplo si es AxBxC, sus elementos serán triplas ordenadas del tipo (x,y,z) tales que $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

Producto Cartesiano:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es un conjunto que tiene como elementos a todos los **pares ordenados** de los elementos de A y B.

En cada par ordenado (x,y), la primer componente x es un elemento de A y la segunda componente y es un elemento de B. En un par ordenado sí importa el orden de las componentes.

- Se suele denotar como A x B
- Se cumple la siguiente propiedad: |A x B| = |A| x |B|
- El producto cartesiano se puede generalizar a n conjuntos, en dicho caso en lugar de hablar de pares ordenados, estaríamos hablando de n-uplas ordenadas.

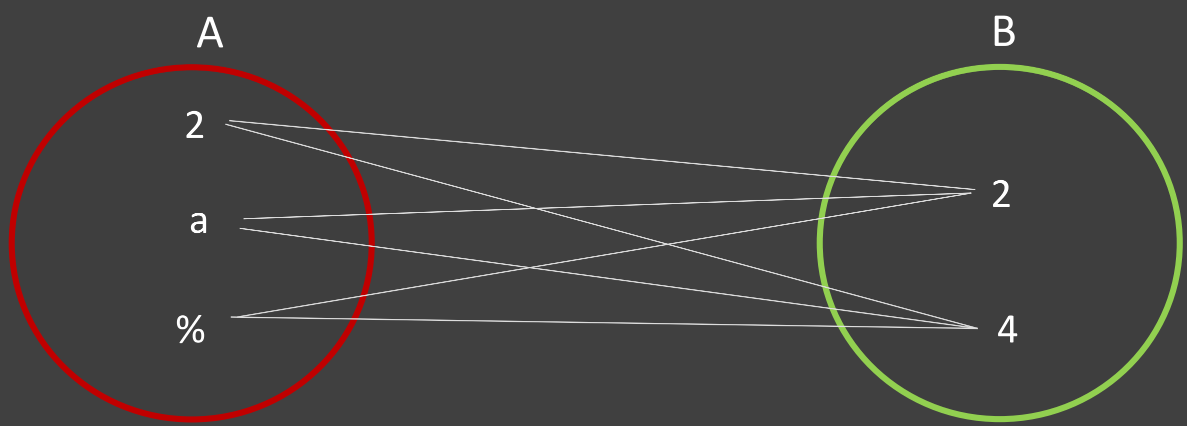
Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

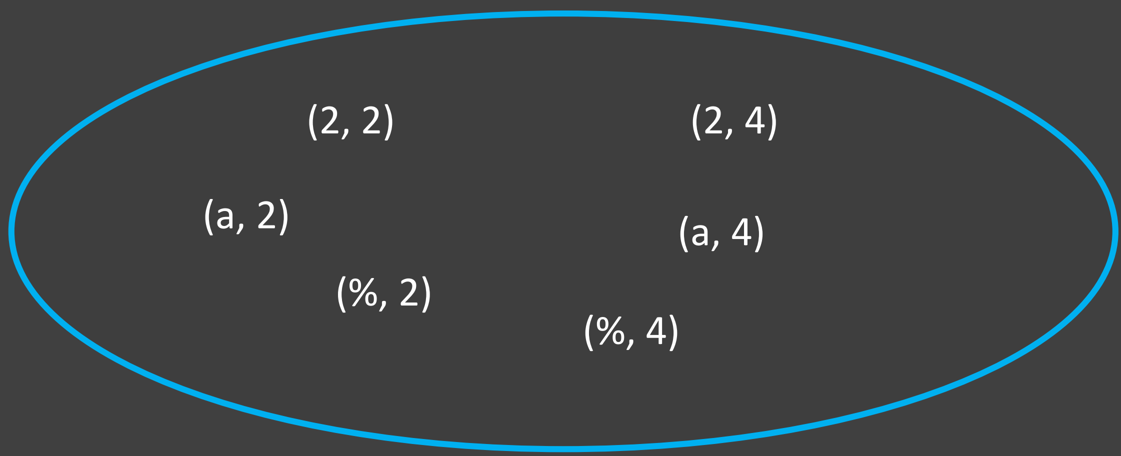
Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.



AxB = { (2,2), (2,4), (a,2), (a, 4), (%, 2), (%,4) }



AxB

Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

AxB = { (2,2), (2,4), (a,2), (a, 4), (%, 2), (%,4) }

Notar que se cumple que |AxB| = 6, ya que |A| = 3 y |B| = 2, y 2x3 = 6

Nota: en los pares ordenados SI se permite elementos repetidos, ya que NO son conjuntos.
El elemento (2,2) es un par ordenado en el que el primer 2 pertenece a A y el segundo pertenece a B

Relaciones entre Conjuntos:

Se llama relación entre dos conjuntos A y B, a **cualquier subconjunto** del producto cartesiano A x B. Es decir, cualquier conjunto de pares ordenados tomados de A x B se le llama relación.

- Si $R \subseteq A \times B$, decimos que R es una relación.
- A se llama **dominio** y B se llama **codominio** de la relación.
- Dependiendo de su cardinalidad, la relación puede escribirse por extensión o comprensión, como cualquier conjunto.

Ejemplos de relaciones:

1) **Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, definir una relación sobre A x B que tenga cuatro elementos.**
2) **¿Se cumple que $\varnothing$ es una relación? ¿A x B es una relación?**
3) **Dado el conjunto N de los números naturales, definir una relación sobre NxN en la cual ambas componentes de cada par ordenado tengan el mismo valor.**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Ejemplos de relaciones:

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, definir una relación sobre A x B que tenga cuatro elementos.

Por ejemplo podría ser $R_1 \subseteq A \times B$ tale que $R_1 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

Puede ser éste o cualquier otro conjunto que cumpla $R \subseteq A \times B$ y que tenga 4 elementos

2) ¿Se cumple que $\varnothing$ es una relación?

Si, dado que $\varnothing \subseteq A \times B$

¿A x B es una relación?

Si, dado que $A \times B \subseteq A \times B$

3) Dado el conjunto N de los números naturales, definir una relación sobre NxN en la cual ambas componentes de cada par ordenado tengan el mismo valor.

$R_3 \subseteq N \times N$

$R_3 = \{ (x,y) \in N \times N \,/\, x = y \}$

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Relaciones entre Conjuntos (continuación):

Algunas observaciones acerca de las relaciones:

1. Al conjunto $\varnothing$ se le llama **relación vacía** y al conjunto A x B (todo el producto cartesiano) se le llama **relación universal**.
2. Hay una relación especial que se llama **identidad**. Se trata del conjunto formado por todos los pares ordenados cuyas componentes son iguales ("lazos"). Se define así: $\mathbf{Id_A = \{ (x,y) \in A \times A \,/\, x = y \}}$
3. Las relaciones se pueden generalizar también a n conjuntos:
   - $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria
   - $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n$ es una relación <u>n-aria</u>
4. Dado $R \subseteq A \times B$ se define la Relación Inversa del siguiente modo:

   $\mathbf{R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \,/\, (x, y) \in R\}}$

Ejemplos de relación inversa: **Definir las inversas de las relaciones definidas en el último ejemplo de la diapositiva anterior.**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Ejemplos de relaciones:

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}.. Definir las inversas de las relaciones definidas en el último ejemplo de la diapositiva anterior.

1) $R = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(a,1), (b,1), (a,2), (b,2)\}$

Recordar que $R^{-1} \subseteq B \times A$

2) La inversa de $\varnothing$ es $\varnothing$

La inversa de $A \times B$ es $B \times A$

3) La inversa de la relación de identidad es la propia relación de identidad

$\mathbf{R^{-1} = \{ (x,y) \in N \times N \,/\, x = y \}}$

Propiedades de las relaciones binarias sobre AxA

Para esta parte consideramos **solamente** relaciones sobre el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo. Dada una relación R $\subseteq$ A x A cualquiera, definimos las siguientes seis propiedades sobre R:

Reflexiva: R es reflexiva $\Leftrightarrow$ Todo elemento de A se relaciona con sí mismo

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}$$

Irreflexiva: R es irreflexiva $\Leftrightarrow$ Ningún elemento de A se relaciona con sí mismo.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \notin \mathbf{R}$$

Simétrica: R es simétrica $\Leftrightarrow$ Por cada par que está en R, también está en R su par inverso

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \textbf{si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}$$

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Propiedades de las relaciones binarias sobre AxA (continuación):

Transitiva: R es transitiva $\Leftrightarrow$ por cada par (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R también existe el par (x, z) $\in$ R.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{A}, \textbf{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \textbf{ y } (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}$$

Asimétrica: R es asimétrica $\Leftrightarrow$ por cada par que está en R, **no** está en R su par inverso.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \textbf{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \notin \mathbf{R}$$

Anti-simétrica: R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ R es Asimétrica <u>con excepción</u> de los <u>pares donde ambas componentes coinciden</u> (“lazos”). Es decir, no hay pares inversos, pero sí se permiten “lazos”.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \textbf{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \textbf{ y } (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

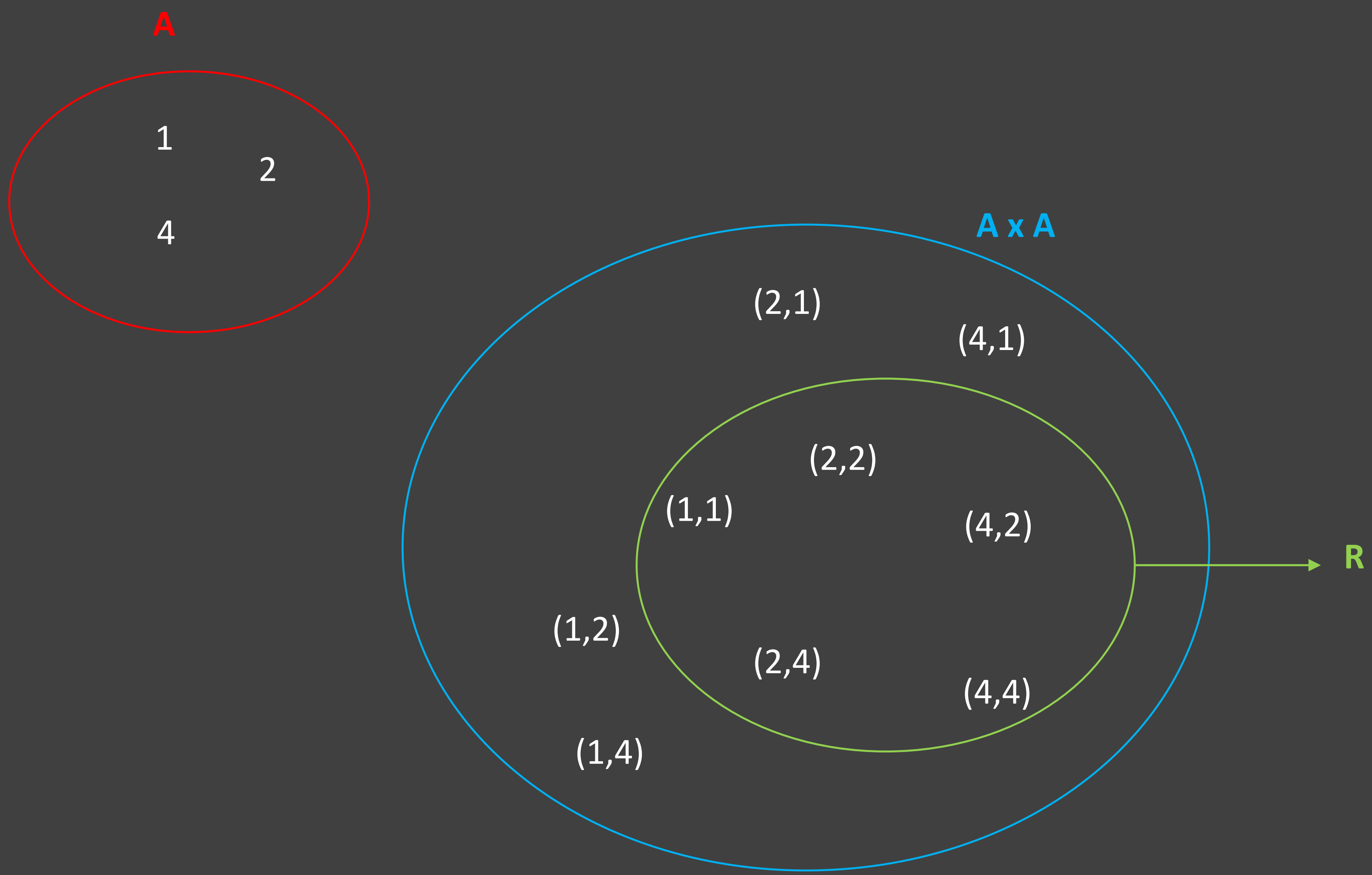
Ejemplo de propiedades de las relaciones binarias sobre AxA:

Dado el conjunto: A = {1, 2, 4}

Se define la relación R = { (x, y) $\in$ A x A / (x + y) es par }

1) **Expresar por extensión la relación R.**
2) **¿Es R una relación *reflexiva*? ¿Porqué?**
3) **¿Es R una relación *irreflexiva*? ¿Porqué?**
4) **¿Es R una relación *simétrica*? ¿Porqué?**
5) **¿Es R una relación *transitiva*? ¿Porqué?**
6) **¿Es R una relación *asimétrica*? ¿Porqué?**
7) **¿Es R una relación *anti-simétrica*? ¿Porqué?**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa


A
1
2
4
A x A
(2,1)
(4,1)
(2,2)
(1,1)
(4,2)
R
(1,2)
(2,4)
(4,4)
(1,4)

1) Expresar por extensión la relación R.

R = { (1,1), (2,2), (4,4), (2,4), (4,2) }

2) ¿Es R una relación *reflexiva*? ¿Porqué?

SI, porque para cada elemento de A, observamos que existe en R el lazo correspondiente.

3) ¿Es R una relación *irreflexiva*? ¿Porqué?

NO, ya que existe al menos un lazo, por ejemplo (4,4) $\in$ A x A

4) ¿Es R una relación *simétrica*? ¿Porqué?

SI, para cada par ordenado que pertenece a R, observamos que también está su inverso. (recordar que un lazo es su propio inverso).

5) ¿Es R una relación *transitiva*? ¿Porqué?

SI, para todos los casos en que encontramos pares del tipo (x,y) e (y,z), también existe el (x,z):

(2,2) y (2,4) => existe (2,4)

(2,4) y (4,2) => existe (2,2)

(4,2) y (2,4), => existe (4,4)

(4,4) y (4,2) => existe (4,2)

6) ¿Es R una relación *asimétrica*? ¿Porqué?

NO, ya que existe al menos un par inverso, por ejemplo pertenecen a R (4,2) y (2,4)

7) ¿Es R una relación *anti-simétrica*? ¿Porqué?

NO, por el mismo motivo que la propiedad anterior: existe al menos un par inverso (y que no es un lazo), por ejemplo pertenecen a R (4,2) y (2,4). La antisimétrica hubiera permitido lazos, como (4,4) por ejemplo, pero no otros inversos.

Relación de Equivalencia:

Sea R $\subseteq$ A x A una relación cualquiera. Decimos que R es una relación de ***equivalencia*** $\Leftrightarrow$ R cumple **simultáneamente** las siguientes propiedades:

Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Relación de Orden Parcial Amplio:

Sea R $\subseteq$ A x A una relación cualquiera. Decimos que R es una relación de ***orden parcial amplio*** **(O.P.A)** $\Leftrightarrow$ R cumple **simultáneamente** las siguientes propiedades:

Reflexiva, Anti-simétrica y Transitiva.

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el conjunto A = {1, 2, 4} y la relación

$$R = \{ (x, y) \in A \times A \; / \; (x + y) \text{ es par } \}$$

1) **¿Es R una relación de *equivalencia*?**
2) **¿Es R una relación de *orden parcial amplio*?**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Consideremos nuevamente el conjunto A = {1, 2, 4} y la relación R = { (x, y) $\in$ A x A / (x + y) es par }

1) **¿Es R una relación de *equivalencia*?**

SI, por ser reflexiva, simétrica y transitiva.

2) **¿Es R una relación de *orden parcial amplio*?**

NO, porque aunque es reflexiva y transitiva, no es antisimétrica.

Funciones:

Sea R $\subseteq$ A x B una relación. Decimos que R es una ***función*** $\Leftrightarrow$ Cada elemento de A tiene **como máximo un** correspondiente en B dentro de R.

En otras palabras, una función es un tipo especial de relación en donde a cada elemento del dominio le corresponde **a lo sumo un** elemento del codominio.

Ejemplos de funciones:

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, indicar si las siguientes relaciones son funciones o no, explicando porqué en cada caso:

R_1 = { (3,a), (2,b), (1,a), (1,b) }

R_2 = { (1,a), (2,b) }

R_3 = { (3,b), (2,b), (1,b) }

R_4 = { }

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, indicar si las siguientes relaciones son funciones o no, explicando porqué en cada caso:

R_1 = { (3,a), (2,b), (1,a), (1,b) }

NO es función ya que el elemento 1 , que pertenece a A, tiene dos correspondientes dentro de R1 : (1,a) y (1,b)

R_2 = { (1,a), (2,b) }

SI es una función, ya que cada elemento de A tiene <u>a lo sumo</u> un correspondiente de B en R2 . Existe un elemento de A que no tiene correspondientes, pero eso no afecta la definición de función

R_3 = { (3,b), (2,b), (1,b) }

SI es función. La definición de función no hace mención sobre si más de un elemento de A puede compartir el mismo correspondiente de B en R.

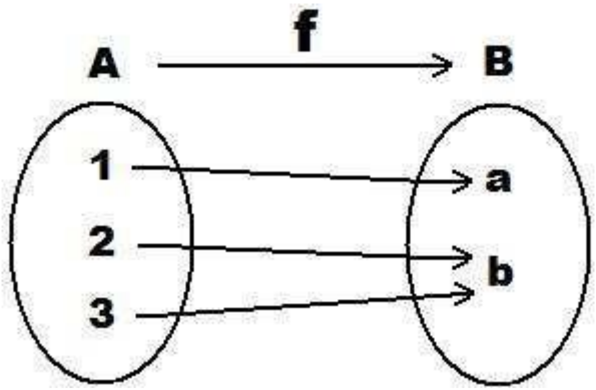
R_4 = { }

Si es función, ya que no contradice la definición.

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

<u>Funciones (continuación)</u>:

<u>Notación</u>: Si f $\subseteq$ A x B es una función, escribimos **f : A $\rightarrow$ B** para diferenciarla de las relaciones que **no** son funciones. También es común representar a las funciones usando **diagramas de Venn**.



Veamos algunos conjuntos vinculados a toda función f: A $\rightarrow$ B:

- Dominio (f) = A
- Codominio (f) = B
- Pre-Imagen (f) = { x $\in$ A / $\exists$y $\in$ B que cumple (x,y) $\in$ f }
- Imagen (f) = { y $\in$ B / $\exists$x $\in$ A que cumple (x,y) $\in$ f }

La pre-imagen de una función contiene a todos los elementos de A que efectivamente participan de la función. La imagen contiene a su vez a todos los elementos de B que efectivamente participan de la función.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Funciones (continuación):

El concepto de función ha sido estudiado en cursos de enseñanza media. Sin embargo, pocas veces se hace explícito el hecho de que la función es en realidad un tipo especial de relación (conjunto de pares ordenados).

Lo más frecuente es definir a la función mediante una notación alternativa conocida como **notación prefija**. En dicha notación, en vez de escribir los elementos como pares ordenados, se los escribe de la siguiente manera:

Notación prefija: Si $(x,y) \in f \Rightarrow$ lo denotamos $f(x) = y$

La notación prefija puede utilizarse en **cualquier** función. No obstante, es especialmente útil para funciones con **infinitos** elementos. Este es el uso que mayormente se le da en los cursos de enseñanza media.

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Ejemplos de notación prefija de funciones:

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c} se define la función f = { (1,a), (2,b), (3,b) }. Re-escribir los pares ordenados de f, pero ahora utilizando la notación prefija.

2) Dados los conjuntos A y B del ejemplo anterior, se tiene una función g: B $\rightarrow$ A tal que g(a) = 4, g(b) = 4, g(c) = 2. Re-escribir la función g en forma de conjunto de pares ordenados.

3) Dado el conjunto N de los números naturales, se define la función h: N $\rightarrow$ N / h(x) = x + 2

- ¿Cuántos pares ordenados integran la función h?
- ¿Se puede escribir la función en forma de conjunto por extensión?
- ¿Se puede escribirla en forma de conjunto por comprensión?

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

1) **Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c} se define la función f = { (1,a), (2,b), (3,b) }. Re-escribir los pares ordenados de f, pero ahora utilizando la notación prefija.**

f(1) = a
f(2) = b
f(3) = b

2) Dados los conjuntos A y B del ejemplo anterior, se tiene una función g: B $\rightarrow$ A tal que g(a) = 4, g(b) = 4, g(c) = 2. Re-escribir la función g en forma de conjunto de pares ordenados.

g = { (a,4), (b, 4), (c,2) }

3) Dado el conjunto N de los números naturales, se define la función h: N $\rightarrow$ N / h(x) = x + 2

- **¿Cuántos pares ordenados integran la función h?**

Infinitos.

- **¿Se puede escribir la función en forma de conjunto por extensión?**

No, por ser infinitos elementos.

- **¿Se puede escribirla en forma de conjunto por comprensión?**

Si: h = {(x,y) $\in$ NxN / y = x+2 }

Clasificación de funciones:

Consideremos una función f: $A \rightarrow B$ cualquiera. Definimos las siguientes cinco propiedades sobre la función f. Decimos que:

f es ***total*** $\Leftrightarrow$ Dominio (f) = Pre-imagen (f)

f es ***parcial*** $\Leftrightarrow$ Pre-Imagen (f) $\subset$ Dominio (f)

f es ***inyectiva*** $\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y \in$ Pre-Imagen (f) / $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

f es ***sobreyectiva*** $\Leftrightarrow$ Imagen (f) = Codominio (f)

f es ***biyectiva*** $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

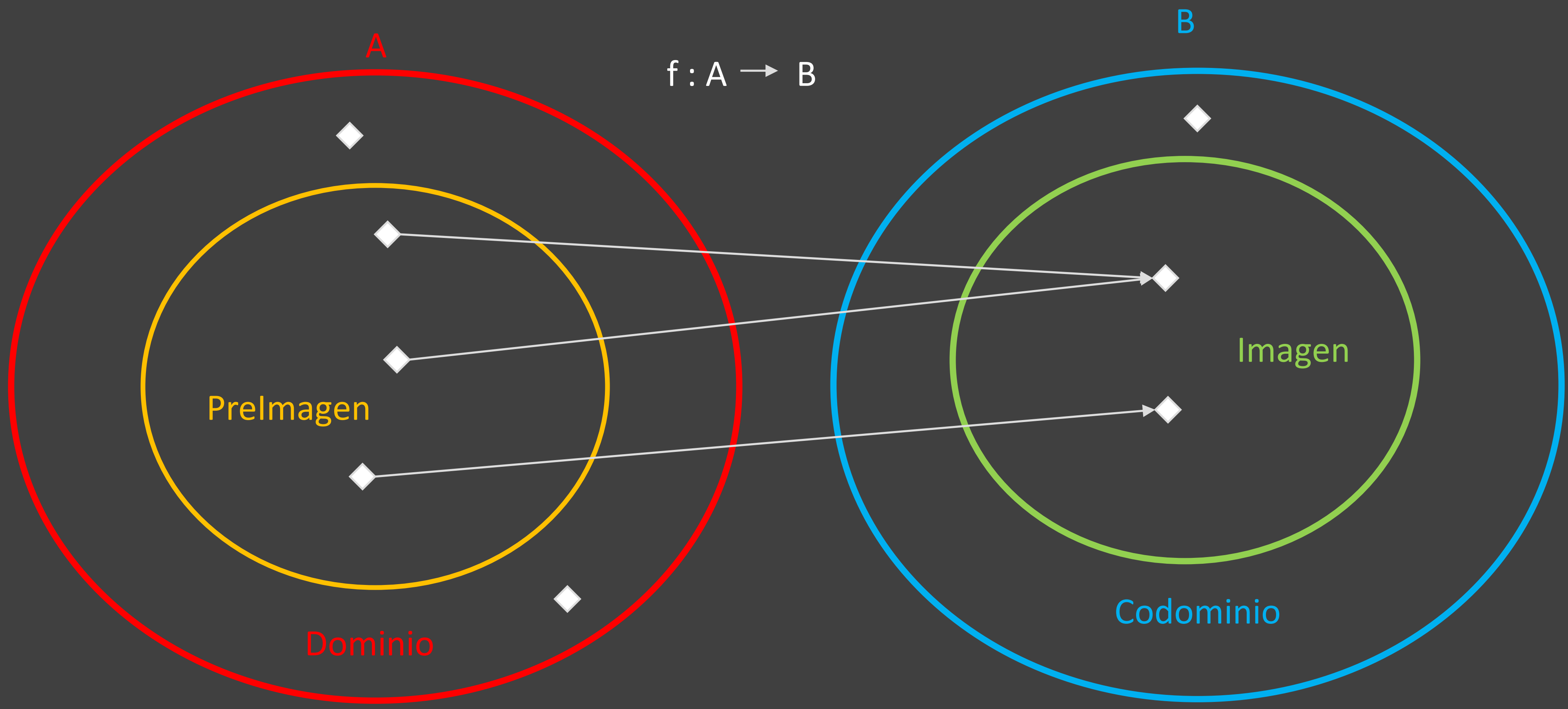
Ejemplo de clasificación de funciones:

Dada la función h: $N \rightarrow N$ / $h(x) = x + 2$

1) **Indicar su dominio, codominio, pre-imagen e imagen.**
2) **Indicar si cumple o no cada una de las propiedades anteriores, justificando porqué en cada caso.**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Recordar:



Dominio : A
Codominio : B
PreImagen : elementos de A que participan de la función
Imagen : elementos de B que participan de la función

Dada la función h: N → N / h(x) = x + 2

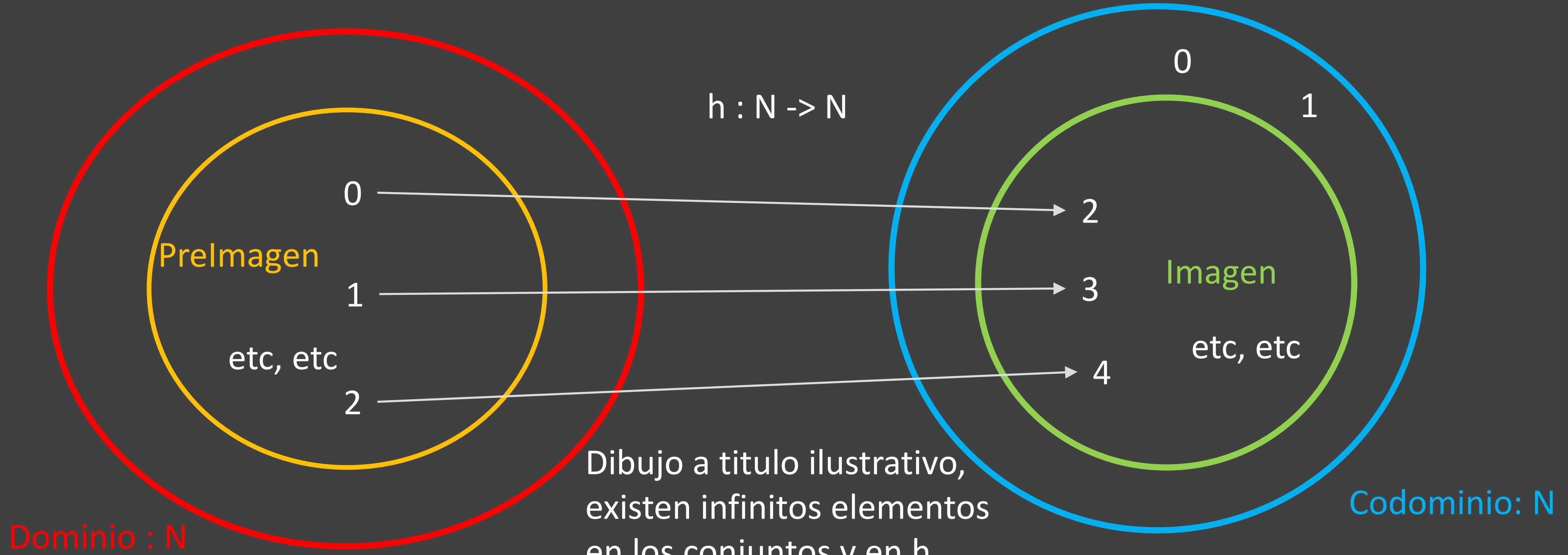
1) **Indicar su dominio, codominio, pre-imagen e imagen.**

Dominio (h) : N (está mencionado en la definición de la función: h: N → N)

Codominio (h) : N (está mencionado en la definición de la función: h: N → N)

Pre-imagen (h) : N (todos los naturales participan de la función, ya que a cualquier natural se le puede sumar 2, y el resultado también es un natural.

Imagen : todos los naturales excepto el 0 y el 1, ya que no son resultado posible de la función. Entonces Imagen (h)= { x ∈ N / x ≥ 2}



Dibujo a titulo ilustrativo, existen infinitos elementos en los conjuntos y en h

Dada la función h: N $\rightarrow$ N / h(x) = x + 2

2) Indicar si cumple o no cada una de las propiedades anteriores, justificando porqué en cada caso.

Total : SI, ya que el dominio es igual a la preimagen, es decir que todos los naturales tienen un correspondiente en h.

Parcial : NO, ya que es total.

Inyectiva : SI, dados dos naturales x e y cualesquiera, diferentes entre si, el resultado h(x) es diferente a h(y).

Sobreyectiva : NO, ya que vemos que la Imagen no es el mismo conjunto del codominio, por ejemplo el natural 1 pertenece al Codominio pero no pertenece a la imagen, ya que ningún natural + 2 da como resultado 1.

Biyectiva : NO, al no ser sobreyectiva.

Función inversa:

El concepto de función inversa se define únicamente para funciones que son **inyectivas**. Es decir, funciones tales que a elementos distintos del dominio, le corresponden elementos distintos del codominio.

Sea f: $A \to B$ una función **inyectiva**. Su función inversa f^{-1} es tal que:

- $f^{-1} : B \to A$
- Los elementos de f^{-1} se obtienen invirtiendo los pares ordenados de f.
  $(x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$

Ejemplo de función inversa:

Considere nuevamente la función h: $N \to N$ / $h(x) = x + 2$

1) **¿Es inyectiva?**
2) **En caso afirmativo, definir su función inversa h^{-1}. Hacerlo tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión.**

Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Considere nuevamente la función h: $N \to N$ / $h(x) = x + 2$

1) ¿Es inyectiva?

SI, dado que para $x \in N$ e $y \in N$, con $x \neq y$, $h(x) \neq h(y)$, ya que $(x+2) \neq (y+2)$ (monotonía de la suma)

2) En caso afirmativo, definir su función inversa h^{-1}. Hacerlo tanto en notación prefija como en forma de conjunto definido por comprensión

h^{-1} $N \longrightarrow N$ / $h^{-1}(x) = (x-2)$

h^{-1} $N \longrightarrow N = \{ (y,x) \in N \times N /\ x = y-2 \text{ e } y \geq 2\}$

Función compuesta:

El concepto de función compuesta se define para dos funciones tales que el codominio de la primera necesariamente **coincide** con el dominio de la segunda.

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos funciones cualesquiera. Se define la función compuesta $(g \circ f): A \to C$ / $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo de función compuesta:

Dados las siguientes funciones:

$$f: N \to Z \;/\; f(x) = -3x$$

$$g: Z \to R \;/\; g(x) = x^2/2$$

1) **Definir la función $(g \circ f)$ usando la def. de función compuesta.**
2) **Calcular el resultado de $(g \circ f)(2)$.**
3) **¿Es posible definir la función compuesta $(f \circ g)$?**

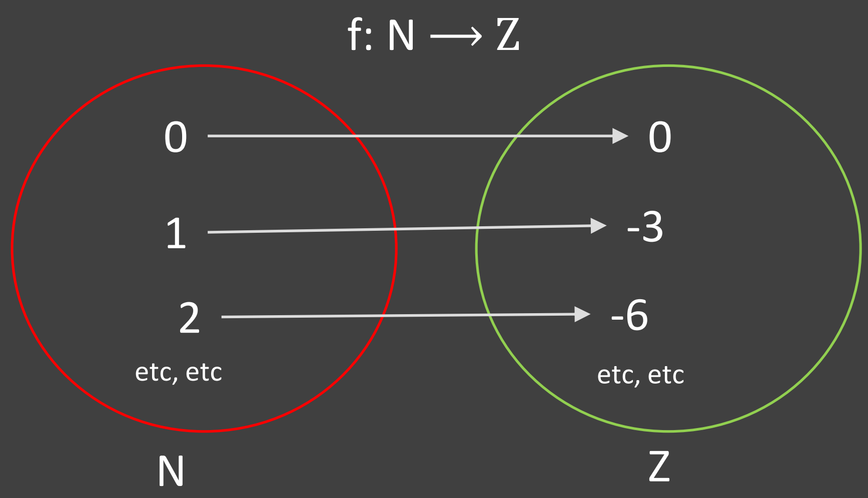
Este material es de uso exclusivo para los cursos impartidos por Universidad de la Empresa

Dados las siguientes funciones:

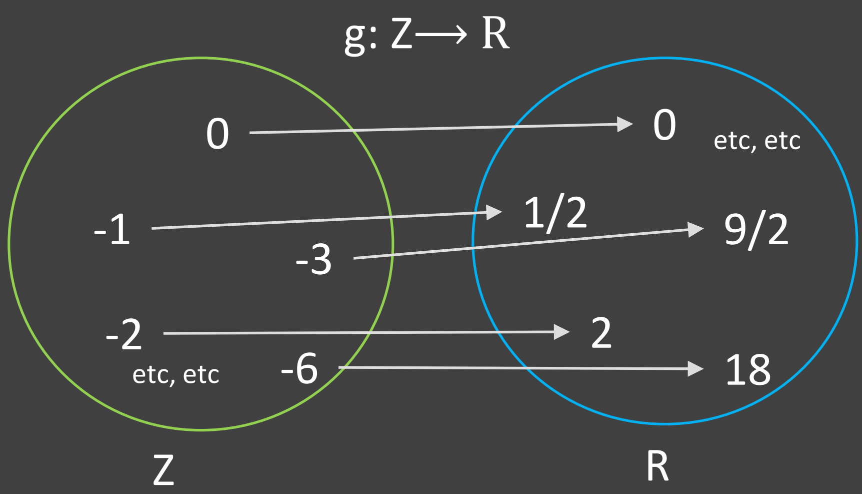
$f: N \rightarrow Z \;/\; f(x) = -3x$

$g: Z \rightarrow R \;/\; g(x) = x^2/2$

1) **Definir la función $(g \circ f)$ usando la def. de función compuesta.**



Solo a título ilustrativo,
existen infinitos elementos

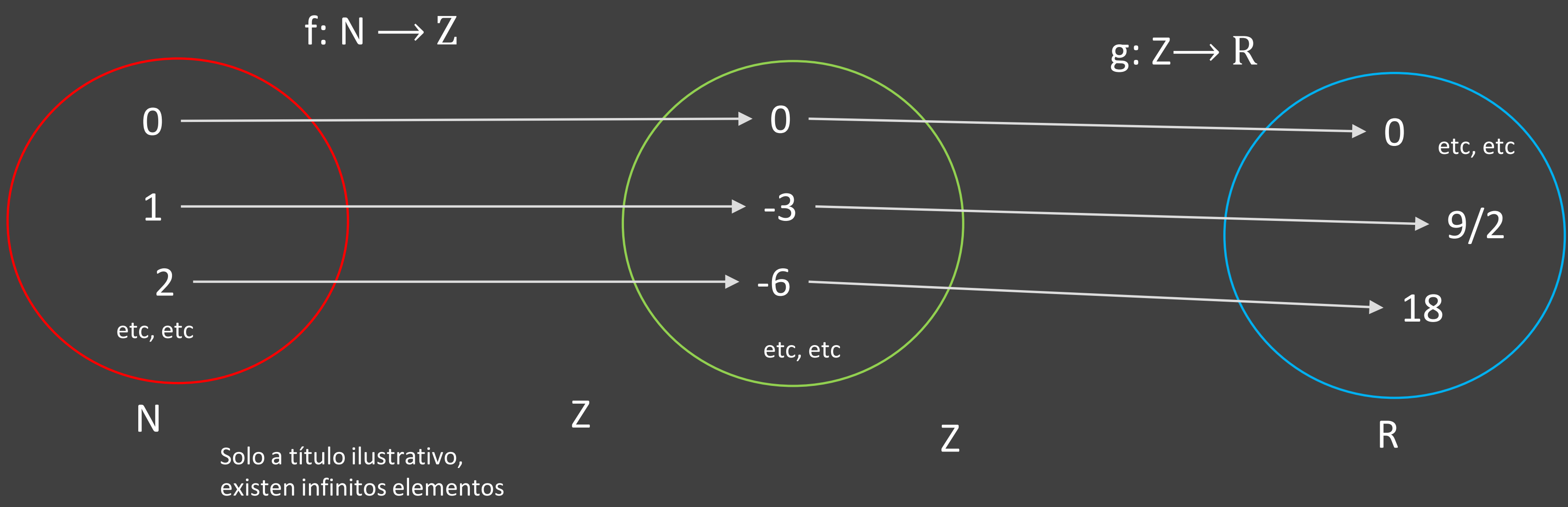


$g \circ f\,(x) = g(f(x)) = g(-3x) = (-3x)^2/2 = (9x^2)/2 = 9x^2/2$

x

2) Calcular el resultado de $(g \circ f)(2)$.

Para $x = 2$ $\quad g(f(2)) = 9\,(2)^2/2 = (9 \times 4)/2 = 36/2 = 18$



3) ¿Es posible definir la función compuesta $(f \circ g)$?

NO, ya que el codominio de g no es el mismo conjunto que el dominio de f