Se proponen soluciones de ejemplo para algunos ejercicios del práctico. Las soluciones presentadas no son las únicas posibles. Pueden existir otras soluciones igualmente correctas.

Ejercicio 1

Considere la siguiente estructura $\mathcal{M}$ con tipo de similaridad $<$ 1,2 **;** 2,2,1 **;** 3 $>$:

$\mathcal{M}$ = $<$ N **;** Par, Mayor **;** sum, prod, cuad **;** 0,1,2 $>$

- N es el conjunto de los números naturales.
- Par = { $x \in$N | x es múltiplo de 2 } es la relación "ser par".
- Mayor = { $(x,y) \in$ NxN | $x > y$ } es la relación "mayor".
- sum : NxN $\rightarrow$ N / sum (x,y) = $x + y$ es la función suma de naturales.
- prod : NxN $\rightarrow$ N / prod (x,y) = $x * y$ es la función producto de naturales.
- cuad : N $\rightarrow$ N / cuad (x) = x^2 es la función cuadrado de un número natural.

Se define el siguiente alfabeto de símbolos para el tipo de similaridad presentado:

- Símbolos de Relación: **P** (unario), **M** (binario) para las relaciones Par y Mayor.
- Símbolos de Función: **s** (binario), **p** (binario), **c** (unario) para las funciones sum, prod y cuad.
- Símbolos de Constante: $\mathbf{c_0}$, $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ para las constantes 0, 1 y 2.

Utilizando solamente los símbolos presentados, traduzca a fórmulas bien formadas de FORM las siguientes afirmaciones sobre el universo de discurso dado por la estructura $\mathcal{M}$.

a) Existe algún natural que no es par.

Solución:

$\exists x \neg P(x)$

b) No todos los naturales son pares.

Solución:

$\neg \forall x \, P(x)$

c) No existe ningún natural que sea par e impar a la vez.

Solución:

$\neg \exists x \, (P(x) \wedge \neg P(x))$

d) Hay por lo menos dos naturales tales que su suma es mayor que cero.

Solución:

$\exists x \exists y \, M(s(x,y), c_0)$

e) Existen dos naturales tales que su suma es mayor que su producto.

Solución:

$\exists x \exists y \, M(s(x,y), p(x,y))$

f) No existe ningún natural impar tal que su cuadrado sea par.

Solución:

$\neg \exists x \, (\neg P(x) \wedge P(c(x)))$

g) El cuadrado de todo natural no es mayor que el producto del natural consigo mismo.

Solución:

$\forall x \neg M(c(x), p(x,x))$

h) Todo natural mayor que 0 cumple que su cuadrado también lo es.

Solución:

$\forall x\ (M(x, c_0) \rightarrow M(c(x), c_0))$

i) Todo natural mayor que 1 cumple que su cuadrado es mayor que él.

Solución:

$\forall x\ (M(x, c_1) \rightarrow M(c(x), x))$

j) La suma de dos naturales pares cualesquiera también es par.

Solución:

$\forall x \forall y\ (P(x) \wedge P(y) \rightarrow P(s(x,y)))$

k) Todo par de naturales impares cumple que su producto es par.

Solución:

$\forall x \forall y\ (\neg P(x) \wedge \neg P(y) \rightarrow P(p(x,y)))$

l) Si el cuadrado de un natural cualquiera es par y mayor que cero, entonces el natural también es par y mayor que cero.

Solución:

$\forall x\ (P(c(x)) \wedge M(c(x), c_0) \rightarrow P(x) \wedge M(x, c_0))$

Ejercicio 2

Considere el tipo de similaridad $< 1,2\ ;\ -\ ;\ 2 >$ junto con el siguiente alfabeto de símbolos:

- Símbolos de Relación: **Q** (unario), **R** (binario).
- Símbolos de Constante: $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$.

Sean además las siguientes fórmulas bien formadas en dicho lenguaje:

$\alpha_1 = \forall x\ (R(x,y) \leftrightarrow \exists y Q(y))$

$\alpha_2 = \forall x\ \exists y\ (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$

$\alpha_3 = R(c_1, c_2) \vee \neg Q(c_1)$

$\alpha_4 = \exists z\ (\forall y R(z,y) \wedge \neg R(y,z))$

$\alpha_5 = \forall x\ (Q(x) \rightarrow \exists x R(x,y))$

a) Indicar cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas en cada una de las fórmulas presentadas. Señalar el cuantificador al cual están ligadas.

Solución:

$\alpha_1 = \forall \mathbf{x}\ (R(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow \exists \mathbf{y} Q(\mathbf{y}))$

La variable $\mathbf{y}$ en $R(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ocurre libre. La variable $\mathbf{x}$ en $R(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ocurre ligada al $\forall \mathbf{x}$. La variable $\mathbf{y}$ en $Q(\mathbf{y})$ ocurre ligada al $\exists \mathbf{y}$.

$\alpha_2 = \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ (R(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow R(\mathbf{y},\mathbf{x}))$

No hay ocurrencias de variables libres. La variable $\mathbf{x}$ en $(R(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow R(\mathbf{y},\mathbf{x}))$ ocurre ligada al $\forall \mathbf{x}$. La variable $\mathbf{y}$ en $(R(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow R(\mathbf{y},\mathbf{x}))$ ocurre ligada al $\exists \mathbf{y}$.

$\alpha_3 = R(c_1, c_2) \vee \neg Q(c_1)$

No hay ocurrencias de variables libres. No hay ocurrencias de variables ligadas. De hecho, no hay ocurrencia alguna de variables.

$\alpha_4 = \exists \mathbf{z}\ (\forall \mathbf{y}\, R(\mathbf{z},\mathbf{y}) \wedge \neg R(\mathbf{y},\mathbf{z}))$

La variable $\mathbf{y}$ en $\neg R(\mathbf{y},\mathbf{z})$ ocurre libre. La variable $\mathbf{z}$ en $R(\mathbf{z},\mathbf{y})$ ocurre ligada al $\exists \mathbf{z}$. La variable $\mathbf{y}$ en $R(\mathbf{z},\mathbf{y})$ ocurre ligada al $\forall \mathbf{y}$. La variable $\mathbf{z}$ en $\neg R(\mathbf{y},\mathbf{z})$ ocurre ligada al $\exists \mathbf{z}$.

$\alpha_5 = \forall \mathbf{x}\ (Q(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{x}\, R(\mathbf{x},\mathbf{y}))$

La variable $\mathbf{y}$ en $R(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ocurre libre. La variable $\mathbf{x}$ en $Q(\mathbf{x})$ ocurre ligada al $\forall \mathbf{x}$. La variable $\mathbf{x}$ en $R(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ocurre ligada al $\exists \mathbf{x}$.

b) Determinar cuáles de las fórmulas presentadas son cerradas y cuáles son abiertas.

Solución:

Las fórmulas α_2 y α_3 son cerradas porque en ellas no hay ocurrencias de variables libres. Las restantes fórmulas son abiertas porque en ellas hay al menos una ocurrencia de variable libre.

Ejercicio 3

Considere el tipo de similaridad $< 2,1\ ;\ 2\ ;\ - >$ junto con el siguiente alfabeto de símbolos:

- Símbolos de Relación: **M** (binario), **R** (unario).
- Símbolos de Función: **f** (binario).

Sea $\alpha \in$ FORM la siguiente fórmula bien formada en dicho lenguaje:

$$\alpha = \exists x\, M(x,y) \leftrightarrow \forall y (R(x) \vee M(y,x))$$

Conteste las siguientes preguntas, justificando apropiadamente sus respuestas. En cada caso, indique si es válido o no hacer la sustitución $\alpha[t / x]$ (o $\alpha[t / y]$, dependiendo de la pregunta).

Solución:

a) Sea $t = f(x,y)$ ¿t es libre para x en α?

t no es libre para x en α, ya que y aparece ligada en $\forall \mathbf{y}\ (\mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \vee \mathbf{M}(\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})))$, por tanto no es correcta esta sustitución.

b) Sea $t = f(x,y)$ ¿t es libre para y en α?

t no es libre para y en α, ya que x aparece ligada en $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$, por tanto no es correcta esta sustitución.

c) Sea $t = f(x,z)$ ¿t es libre para x en α?

t es libre para x en α y es correcta la sustitución. El resultado es:

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{z})) \vee \mathbf{M}(\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{z})))$$

d) Sea $t = f(x,z)$ ¿t es libre para y en α?

t no es libre para y en α, ya que x aparece ligada en $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{z}))$, por tanto no es correcta esta sustitución.

e) Sea t = $f(y,z)$ ¿t es libre para x en α?

t no es libre para x en α, ya que y aparece ligada en $\forall y\ (R(f(y,z)) \vee M(y, f(y,z))$, por tanto no es correcta esta sustitución.

f) Sea t = $f(y,z)$ ¿t es libre para y en α?

t es libre para y en α y es correcta la sustitución. El resultado es:

$$\exists x\ M(x, f(y,z)) \leftrightarrow \forall y\ (R(x)) \vee M(y,x))$$

Ejercicio 4

Considere la siguiente estructura $\mathcal{M}$ con tipo de similaridad $<$ 1,1,2 **;** – **;** 3 $>$:

$\mathcal{M} = <$ Z **;** Positivo, Negativo, Mayor **;** – **;** 1,2,3 $>$ donde:

- Z es el conjunto de los números enteros.
- Positivo = { $x \in Z$ | $x > 0$ } es la relación "ser positivo".
- Negativo = { $x \in Z$ | $x < 0$ } es la relación "ser negativo".
- Mayor = { $(x,y) \in Z x Z$ | $x > y$ } es la relación "mayor".

Se define el siguiente alfabeto de símbolos para el tipo de similaridad presentado:

- Símbolos de Relación: **P** (unario), **N** (unario), **M** (binario) para las relaciones Positivo, Negativo y Mayor.
- Símbolos de Constante: $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{c_3}$ para las constantes 1, 2 y 3.

Demuestre o refute cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta en todos los casos en forma detallada:

a) $\mathcal{M} \models \exists x\ (P(x) \wedge N(x))$ **Afirmación INCORRECTA**

<u>Solución</u>:

$\mathcal{M} \models \exists x\ (P(x) \wedge N(x))$	$\Leftrightarrow$	(por definición de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\exists x\ (P(x) \wedge N(x))) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Existe algún $a \in Z$ tal que $v^{\mathcal{M}}(P(a) \wedge N(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\wedge$)
Existe algún $a \in Z$ tal que $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 1$ y $v^{\mathcal{M}}(N(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)
Existe algún $a \in Z$ tal que a > 0 y a < 0.		

Esto es **<u>falso</u>** en los enteros ya que no existe ningún entero que sea positivo y negativo en forma simultánea.

b) $\mathcal{M} \models \exists x \exists y\ (P(x) \wedge N(y))$ **Afirmación CORRECTA**

<u>Solución</u>:

$\mathcal{M} \models \exists x \exists y\ (P(x) \wedge N(y))$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\exists x \exists y\ (P(x) \wedge N(y))) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Existen $a,b \in Z$ tales que $v^{\mathcal{M}}(P(a) \wedge N(b)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\wedge$)
Existen $a,b \in Z$ tales que $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 1$ y $v^{\mathcal{M}}(N(b)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)
Existen $a,b \in Z$ tales que a > 0 y b < 0.		

Esto es **<u>cierto</u>** en los enteros ya que existe al menos un entero positivo (por ejemplo, el 2) y también existe al menos uno negativo (por ejemplo, el -2).

c) $\mathcal{M} \models \forall x\,(P(x) \vee N(x))$ **Afirmación INCORRECTA**

Solución:

$\mathcal{M} \models \forall x\,(P(x) \vee N(x))$ ⇔ (por def. de modelo)

$v^{\mathcal{M}}(\forall x\,(P(x) \vee N(x))) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)

Para todo $a \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(P(a) \vee N(a)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\vee$)

Para todo $a \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 1$ o $v^{\mathcal{M}}(N(a)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo $a \in Z$, $a > 0$ o $a < 0$.

Esto es **falso** en los enteros ya que existe un entero que no cumple ninguna de las dos propiedades (el 0), ya que no es cierto que 0 > 0 y tampoco es cierto que 0 < 0.

d) $\mathcal{M} \models \forall x \exists y M(y,x)$ **Afirmación CORRECTA**

Solución:

$\mathcal{M} \models \forall x \exists y M(y,x)$ ⇔ (por def. de modelo)

$v^{\mathcal{M}}(\forall x \exists y M(y,x)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)

Para todo $a \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(\exists y M(y,a)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)

Para todo $a \in Z$, existe $b \in Z$ tal que $v^{\mathcal{M}}(M(b,a)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo $a \in Z$, existe $b \in Z$ tal que $b > a$.

Esto es **cierto** en los enteros ya que para todo entero a siempre existe otro entero b mayor que él (por ejemplo: b = a + 1).

e) $\mathcal{M} \models \forall x \forall y\,(M(x,y) \leftrightarrow P(x) \wedge N(y))$ **Afirmación INCORRECTA**

Solución:

$\mathcal{M} \models \forall x \forall y\,(M(x,y) \leftrightarrow P(x) \wedge N(y))$ ⇔ (por def. de modelo)

$v^{\mathcal{M}}(\forall x \forall y\,(M(x,y) \leftrightarrow P(x) \wedge N(y))) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)

Para todo $a,b \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(M(a,b) \leftrightarrow P(a) \wedge N(b)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\leftrightarrow$)

Para todo $a,b \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(M(a,b)) = 1$ si y solo si $v^{\mathcal{M}}(P(a) \wedge N(b)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\wedge$)

Para todo $a,b \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(M(a,b)) = 1$ si y solo si $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 1$ y $v^{\mathcal{M}}(N(b)) = 1$ ⇔ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo $a, b \in Z$, $a > b$ si y solo si $a > 0$ y $b < 0$.

Esto es **falso** en los enteros ya que, dados dos enteros a y b tales que a > b, no es obligatorio que a > 0 y b < 0. Por ejemplo, para a = 5 y b = 3, se cumple que a > b pero sin embargo b **no** es menor que cero.

Ejercicio 5

Considere el tipo de similaridad $< 1,2 ; - ; 1 >$ y símbolos de relación **A** (unario), **B** (binario) y símbolo de constante $\mathbf{c_1}$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es correcta o no. En caso afirmativo, demuestre que la afirmación se cumple para cualquier estructura. En caso negativo, presente una estructura concreta que sirva como contraejemplo y justifique apropiadamente.

a) $\models \forall x\,(A(x) \to A(x))$. **Afirmación CORRECTA**

<u>Solución</u>:

Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera con universo U.

Probaremos que $\mathcal{M} \models \forall x\,(A(x) \to A(x))$.

$\mathcal{M} \models \forall x\,(A(x) \to A(x))$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x\,(A(x) \to A(x))) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Para todo $a \in U$, $v^{\mathcal{M}}(A(a) \to A(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\to$)

Para todo $a \in U$, $\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(A(a)), v^{\mathcal{M}}(A(a))\} = 1$.

Esto es **<u>cierto</u>** en cualquier universo ya que $\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(A(a)), v^{\mathcal{M}}(A(a))\} = 1$ sin importar cuál sea el valor concreto de $v^{\mathcal{M}}(A(a))$.

b) $\exists x\,A(x) \models \forall x\,A(x)$. **Afirmación INCORRECTA**

<u>Solución</u>:

Hay al menos una estructura para la cual **<u>no</u>** se cumple la definición de consecuencia lógica. Por ejemplo, $\mathcal{M} = < \mathbb{Z}$; Positivo, Mayor ; – ; 1 $>$ es tal que $\mathcal{M} \models \exists x\,A(x)$ pero sin embargo $\mathcal{M} \not\models \forall x\,A(x)$ lo cual probamos a continuación:

$\mathcal{M} \models \exists x\,A(x)$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\exists x\,A(x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Existe algún $a \in \mathbb{Z}$ tal que $v^{\mathcal{M}}(A(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Existe algún $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a > 0$. Esto es **<u>cierto</u>** en $\mathbb{Z}$ ya que, por ejemplo, $1 > 0$.

$\mathcal{M} \models \forall x\,A(x)$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x\,A(x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Para todo $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $v^{\mathcal{M}}(A(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que a es positivo. Esto es **<u>falso</u>** en $\mathbb{Z}$ ya que, por ejemplo, -1 **<u>no</u>** es > 0.

c) $\models \forall x\,B(x,x)$. **Afirmación INCORRECTA**

<u>Solución</u>:

Hay al menos una estructura para la cual **<u>no</u>** se cumple la definición de tautología. Por ejemplo, $\mathcal{M} = < \mathbb{Z}$; Positivo, Mayor ; – ; 1 $>$ es tal que $\mathcal{M} \not\models \forall x\,B(x,x)$ lo cual probamos a continuación:

$\mathcal{M} \models \forall x\,B(x,x)$	$\Leftrightarrow$	(por definición de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x\,B(x,x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Para todo natural $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $v^{\mathcal{M}}(B(a,a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo natural $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a > a$. Esto es **<u>falso</u>** en los enteros, ya que ningún natural es mayor que sí mismo.

d) $\forall x\, \exists y\, B(y,x) \models \exists y \forall x\, B(y,x)$. **Afirmación INCORRECTA**

<u>Solución</u>:

Hay al menos una estructura para la cual no se cumple la definición de consecuencia lógica. Por ejemplo, $\mathcal{M} = <\mathbb{Z}$ **;** Positivo, Mayor **; – ;** 1 $>$ es tal que $\mathcal{M} \models \forall x \exists y\, B(y,x)$ pero sin embargo $\mathcal{M} \not\models \exists y \forall x\, B(y,x)$ lo cual probamos a continuación:

$\mathcal{M} \models \forall x \exists y\, B(y,x)$	$\Leftrightarrow$	(por definición de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x \exists y\, B(y,x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $v^{\mathcal{M}}(\exists y\, B(y,a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe algún $b \in \mathbb{Z}$ tal que $v^{\mathcal{M}}(B(b,a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe algún $b \in \mathbb{Z}$ tal que, $b > a$. Esto es <u>**cierto**</u> en los enteros, ya que para cualquier entero a siempre existe otro entero b que es mayor que él (por ejemplo, b = a + 1).

$\mathcal{M} \models \exists y \forall x\, B(y,x)$	$\Leftrightarrow$	(por definición de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\exists y \forall x\, B(y,x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Existe algún $b \in \mathbb{Z}$ tal que $v^{\mathcal{M}}(\forall x\, B(b,x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Existe algún $b \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $v^{\mathcal{M}}(B(b,a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Existe algún $b \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $b > a$. Esto es <u>**falso**</u> en los enteros, ya que no existe ningún entero que sea mayor que todos los demás enteros.

e) $\models \forall x\, (A(x) \wedge \neg A(x))$. **Afirmación INCORRECTA**

<u>Solución</u>:

Hay al menos una estructura para la cual no se cumple la definición de tautología. Por ejemplo, $\mathcal{M} = <\mathbb{Z}$ **;** Positivo, Mayor **; – ;** 1 $>$ es tal que $\mathcal{M} \not\models \forall x\, (A(x) \wedge \neg A(x))$ lo cual probamos a continuación:

$\mathcal{M} \models \forall x\, (A(x) \wedge \neg A(x))$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x\, (A(x) \wedge \neg A(x))) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Para todo $a \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(A(a) \wedge \neg A(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\wedge$)
Para todo $a \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(A(a)) = 1$ y $v^{\mathcal{M}}(\neg A(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\neg$)
Para todo $a \in Z$, $v^{\mathcal{M}}(A(a)) = 1$ y $v^{\mathcal{M}}(A(a)) = 0$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)

Para todo $a \in Z$, a es positivo y a <u>**no**</u> es positivo. Esto es <u>**falso**</u> en los enteros, ya que no es cierto que todo natural sea positivo y no positivo al mismo tiempo. Por ejemplo, para a = 3, se cumple <u>solamente</u> que es positivo.

f) $\forall x\, A(x) \models A(\mathbf{c_1})$. **Afirmación CORRECTA**

<u>Solución</u>:

Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera con universo U tal que $\mathcal{M} \models \forall x\, A(x)$. Probaremos que $\mathcal{M} \models A(\mathbf{c_1})$.

$\mathcal{M} \models \forall x\, A(x)$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x\, A(x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)

Para todo $a \in U$, $v^{\mathcal{M}}(A(a)) = 1$. Dado que esto se cumple para todos los elementos del universo, en particular se cumple para $\mathbf{c_1}$. Concluimos entonces que $v^{\mathcal{M}}(A(\mathbf{c_1})) = 1$ y luego, por definición de modelo, se tiene que $\mathcal{M} \models A(\mathbf{c_1})$.