Matemática Discreta

Licenciatura en Informática – Ingeniería en Informática

1º año

Soledad Pérez – Federico Gómez

Repaso de
Teoría de Conjuntos

Conjunto (Definición):

- Agrupación de elementos, no necesariamente del mismo tipo.
- Los elementos de un conjunto no tienen un orden definido.
- En un conjunto no puede haber elementos repetidos.

Formas de definir un conjunto:

- Por extensión (la veremos en este capítulo)
- Por comprensión (la veremos en este capítulo)
- Por inducción (la veremos más adelante en el curso)

Definición por extensión:

- Se enumeran los elementos del conjunto entre llaves { }
- Sólo se puede utilizar para definir conjuntos finitos (no se pueden enumerar los elementos de un conjunto infinito).

Asociado a la definición de conjunto aparece el concepto de ELEMENTO

ELEMENTO: objeto o miembro que forma parte de un conjunto.

La relación entre ellos es de pertenencia. Se dice que el elemento <u>pertenece</u> al conjunto.

Y la notación es:

$$a \in A$$

siendo a un elemento, y A un conjunto

En términos generales, el elemento se pone en minúscula y el conjunto en mayúscula

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Definición por comprensión:

- Se indica cual es el conjunto universal a partir del cual se definirán los elementos de este conjunto en particular.
- A continuación, se da una condición de pertenencia de los elementos del conjunto universal a este conjunto.

Notación: **Conj = {x $\in$ U / x cumple cierta condición}**
U es el conjunto universal del cual se toman los elementos de Conj.

Ejemplos de definiciones por extensión y comprensión:

Definir los siguientes conjuntos por comprensión y también por extensión cuando sea posible:

1) **El conjunto P de los números pares**
2) **El conjunto A de los naturales entre 0 y 10 (inclusive)**
3) **El conjunto B de los naturales pares entre 0 y 10 (inclusive)**
4) **El conjunto V de las letras vocales castellanas**

1) El conjunto P de los números pares

por extensión: no se puede escribir por ser infinito

por comprensión:

- P = { x $\in N/\mathrm{x}$ es par} (Se puede escribir con palabras la condición, pudo haber sido también x es múltiplo de 2)

La propiedad de ser par se puede escribir más formalmente con el concepto de módulo:

- P = { x $\in N/\mathrm{x} \mod 2 = 0$}

2) El conjunto A de los naturales entre 0 y 10 (inclusive)

por extensión:

A = {0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

por comprensión:

A = { x $\in N/\mathrm{x} \leq 10$}

3) El conjunto B de los naturales pares entre 0 y 10 (inclusive)

por extensión:

B = {0, 2, 4, 6, 8, 10}

por comprensión:

B = { x $\in N/\mathrm{x\ es\ par}$ **y x** $\leq 10\}$

B = { x $\in \mathrm{P}/$ **x** $\leq 10\}$ ***(P es el conj de los pares)***

B = { x $\in \mathrm{A}/\mathrm{x\ es\ par}\}$ ***(A es el conj de los naturales menores o iguales a 10)***

4) El conjunto V de las letras vocales castellanas

por extensión:

V = {a, e, i, o, u}

por comprensión:

V = { x $\in Char$ **/ x es vocal}**

<u>Propiedades Universales de Conjuntos</u>:

Las siguientes propiedades se cumplen siempre para todos los conjuntos, sin importar de qué tipo son sus elementos, si son discretos o no, o si son finitos o infinitos.

1) Inclusión e Igualdad

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, decimos que:

- $A \subseteq B$ si y solo si $\forall x \in A,\ x \in B$ (inclusión amplia)
- $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ (igualdad)
- $A \subset B$ si y solo si $A \subseteq B$ y no ocurre que $A = B$ (inclusión estricta)

<u>Ejemplos de inclusión e igualdad</u>:

Dados $A = \varnothing$, $B = \{x \in N \ / \ x \text{ es par}\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, explicando porqué en cada caso.

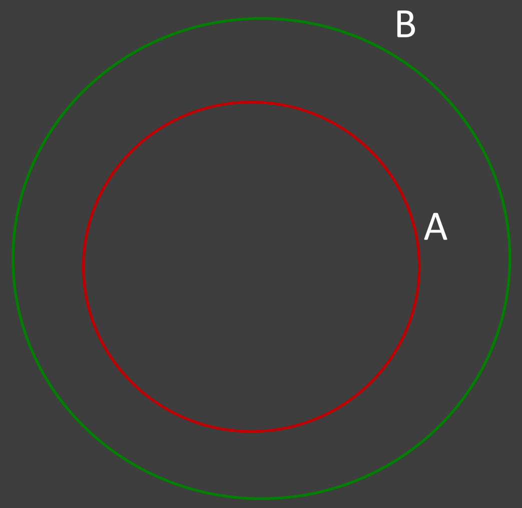
1) $A \subset B$ **3) $C \subset B$** **5) $B \subset B$**

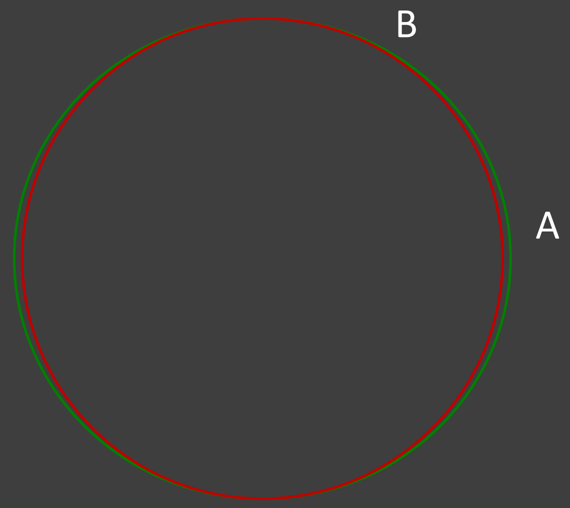
2) $A \subseteq B$ **4) $C \subseteq B$** **6) $B \subseteq B$**

Propiedades Universales de Conjuntos:

Inclusión amplia

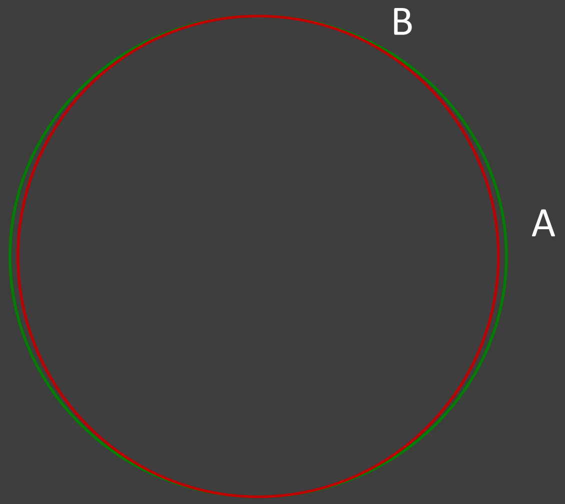
$A \subseteq B$ si y solo si $\forall\ x \in A$, $x \in B$





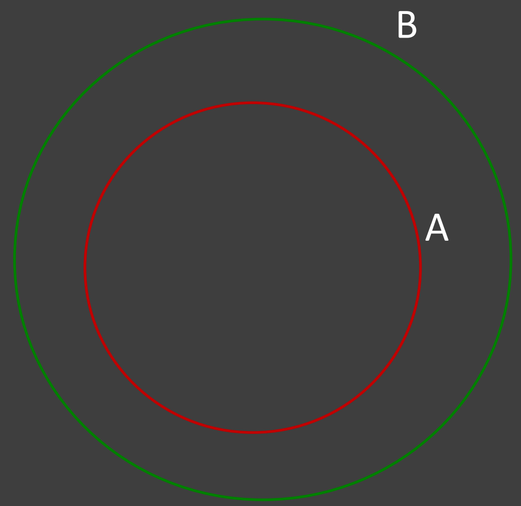
Igualdad

$A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$



Inclusión estricta

$A \subset B$ si y solo si $A \subseteq B$ y no ocurre que $A = B$



Ejemplos de inclusión e igualdad:

Dados $A = \emptyset$, $B = \{x \in N \ / \ x \text{ es par}\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, explicando porqué en cada caso.

1) $A \subset B$ CORRECTO, el conjunto vacío está estrictamente incluido en cualquier otro (excepto el propio vacío, pero no es el caso)

2) $A \subseteq B$ CORRECTO, el conjunto vacío está ampliamente incluido en cualquier otro

3) $C \subset B$ CORRECTO, cada elemento de C pertenece a B, y no son iguales

4) $C \subseteq B$ CORRECTO, cada elemento de C pertenece a B

5) $B \subset B$ INCORRECTO, no se cumple porque B = B

6) $B \subseteq B$ CORRECTO, cada elemento de B pertenece a B

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

2) Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos las siguientes operaciones entre ellos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \quad o \quad x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \quad y \quad x \in B\}$
- Diferencia: $A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$
- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U \,/\, x \in A \cup B \quad y \quad x \notin A \cap B\}$
- Complemento: $A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$
- Cardinal: $\#(A) = |A|$ = cantidad de elementos del conjunto A

Ejemplos de operaciones entre conjuntos:

Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

1) $A \cup B$ 3) $A - B$ 5) A^C

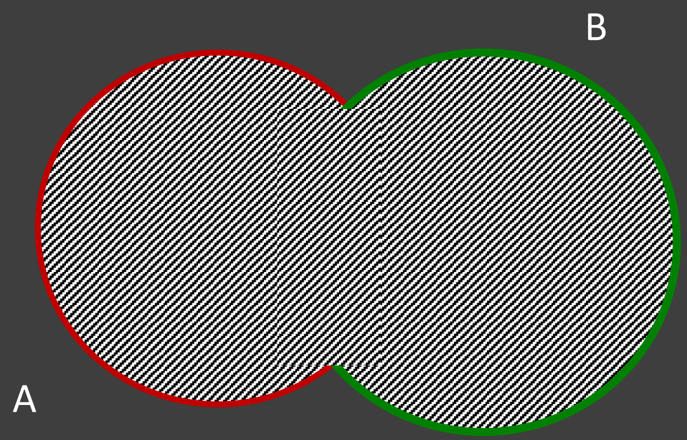
2) $A \cap B$ 4) $A \oplus B$ 6) B^C

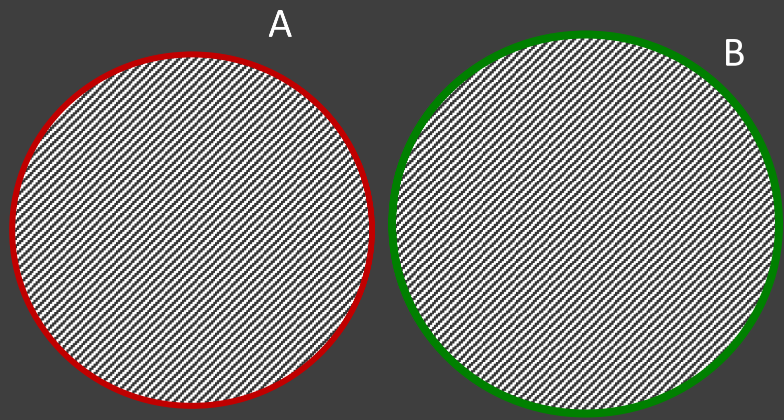
Operaciones entre conjuntos

Matemática Discreta
Teórico Repaso teoría de conjuntos
Pág. 6

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera

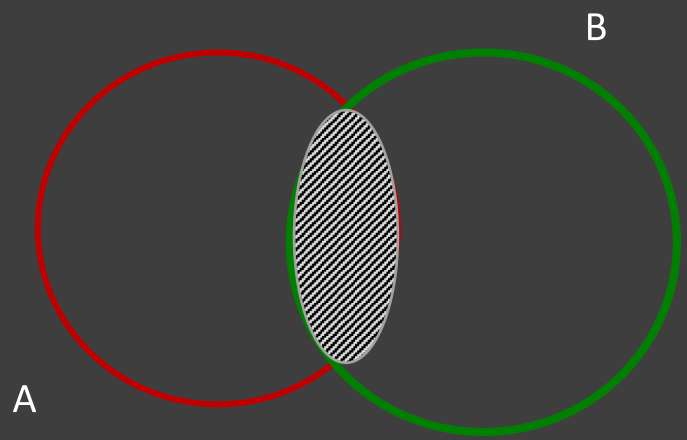
- Unión: $A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$ (o)

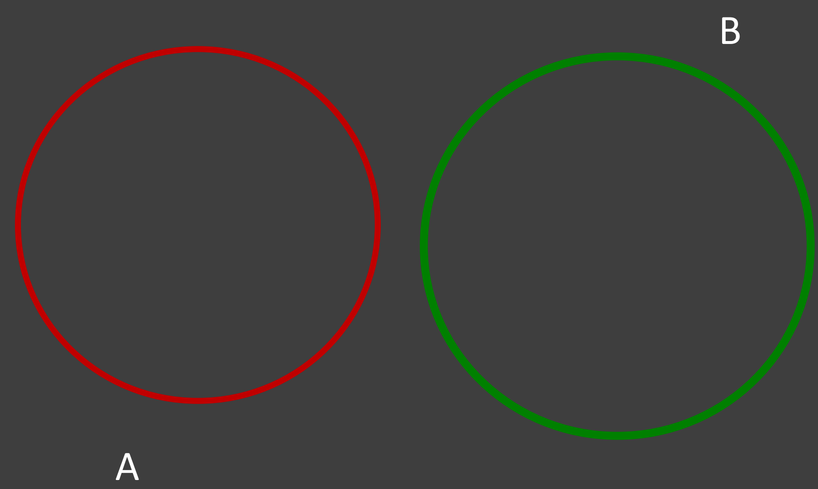




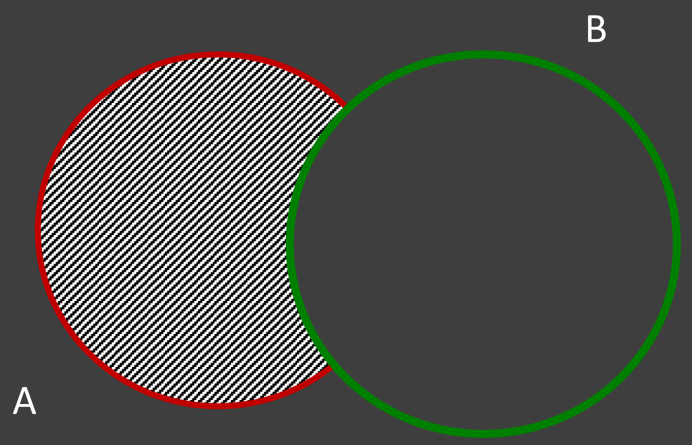
Operaciones entre conjuntos

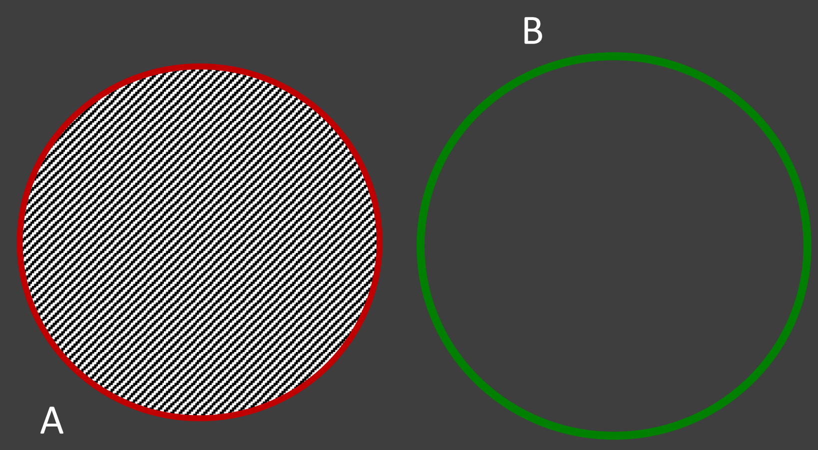
- Intersección: $A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$ (y)



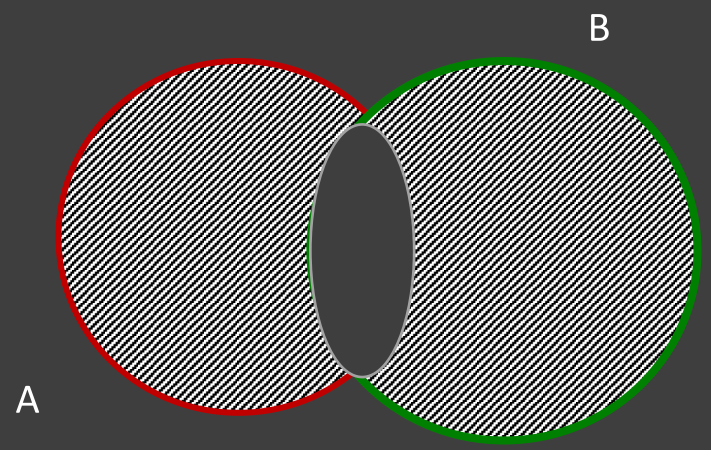


- Diferencia: A - B = $\{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$ (y no)

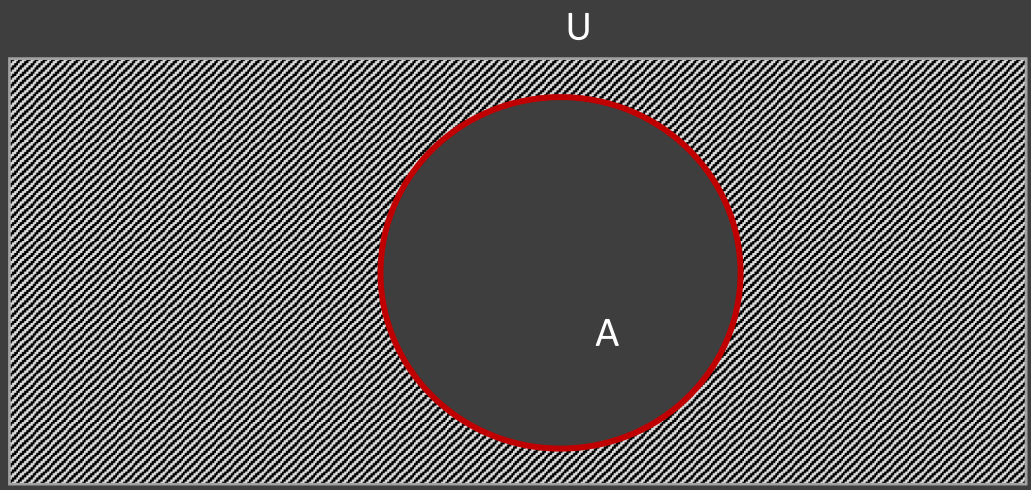




- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U \,/\, x \in A \cup B \text{ y } x \notin A \cap B\}$



Complemento: $A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$



- Cardinal: #(A) = |A| = cantidad de elementos del conjunto
- Es la única operación que da como resultado un número natural y no un conjunto

Ejemplos:

$A = \{0,1,2\}$	$B = \{\ \}$
$\|A\| = 3$	$\|B\| = 0$

<u>Propiedades Universales de Conjuntos (continuación)</u>: (REPETIDA)

2) Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos las siguientes operaciones entre ellos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in U / x \in A \quad o \quad x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \quad y \quad x \in B\}$
- Diferencia: $A - B = \{x \in U / x \in A \text{ y } x \notin B\}$
- Diferencia Simétrica: $A \oplus B = \{x \in U / x \in A \cup B \quad y \quad x \notin A \cap B\}$
- Complemento: $A^c = \{x \in U / x \notin A\}$
- Cardinal: $\#(A) = |A|$ = cantidad de elementos del conjunto A

<u>Ejemplos de operaciones entre conjuntos</u>:

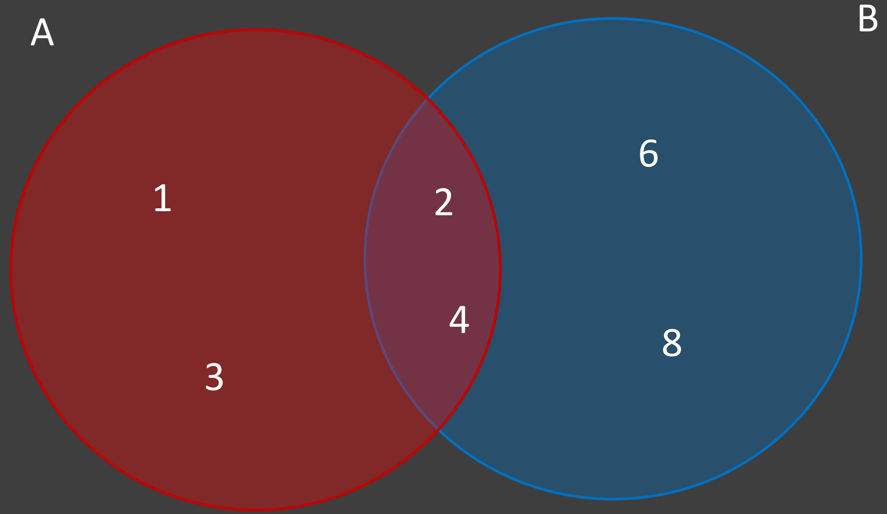
Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

1) $A \cup B$	**3)** $A - B$	**5)** A^C
2) $A \cap B$	**4)** $A \oplus B$	**6)** B^C

Ejemplos de operaciones entre conjuntos:

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, calcular los siguientes conjuntos considerando que el Universo es el conjunto de todos los naturales:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$



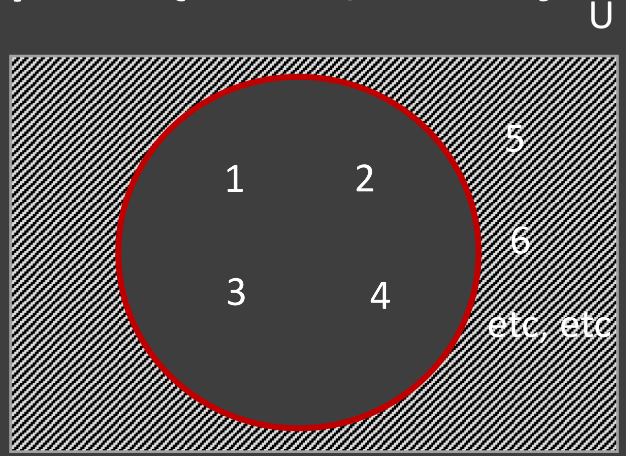
2) $A \cap B = \{2, 4\}$

3) $A - B = \{1,3\}$

4) $A \oplus B = \{1,3,6,8\}$

Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}

5) $A^C = \{x \in N \,/\, x \notin A\}$ **o** $\{x \in N \,/\, x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \text{ y } x \neq 3 \text{ y } x \neq 4\}$



6) $B^C = \{x \in N \,/\, x \notin B\}$ **o** $\{x \in N \,/\, x \neq 2 \text{ y } x \neq 4 \text{ y } x \neq 6 \text{ y } x \neq 8\}$

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

3) Propiedades Universales de la Unión de conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (conmutativa de la unión)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativa de la unión)

4) Propiedades Universales de la Intersección de conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa de la intersección)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativa de la intersección)

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

5) Propiedades Universales de la Diferencia entre conjuntos

Sea A un conjunto cualquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A - A = \varnothing$
- $A - \varnothing = A$
- $A \oplus A = \varnothing$
- $A \oplus \varnothing = A$

6) Propiedades Distributivas entre conjuntos

Sean A , B y C tres conjuntos, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejemplo de propiedades distributivas:

Dados A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5}, C = {2, 4, 6}, comprobar el cumplimiento de las dos propiedades distributivas

Ejemplo de propiedades distributivas:

Dados A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5}, C = {2, 4, 6}, comprobar el cumplimiento de las dos propiedades distributivas

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3\}$

$(A \cap B) = \{1,3\}$

$(A \cap C) = \{2\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3\}$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(B \cap C) = \{\ \}$
$A \cup (B \cap C) = \{1,2,3\}$

$(A \cup B) = \{1,2,3,5\}$
$(A \cup C) = \{1,2,3,4,6\}$
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3\}$

Propiedades Universales de Conjuntos (continuación):

7) Propiedades de la cardinalidad de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
$A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$
$A = B \Rightarrow |A| = |B|$

¿Se cumplen los recíprocos de estas tres propiedades?

8) Leyes de Morgan entre conjuntos

Sean A, B dos conjuntos cualesquiera, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo de Leyes de Morgan:

Dados $U = \{x \in N \ / \ x \leq 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, comprobar el cumplimiento de las dos Leyes de Morgan

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo de Leyes de De Morgan:

Dados $U = \{x \in N \,/\, x \leq 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, comprobar el cumplimiento de las dos Leyes de De Morgan

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ **$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$**

$(A \cup B) = \{1,2,3,4,5\}$	$A^C = \{0,4,5,6,7,8\}$
$(A \cup B)^C = \{0,6,7,8\}$	$B^C = \{0,1,2,3,6,7,8\}$
	$A^C \cap B^C = \{0,6,7,8\}$

2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cap B) = \{\ \}$	$A^C = \{0,4,5,6,7,8\}$
$(A \cap B)^C = U$ $= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$	$B^C = \{0,1,2,3,6,7,8\}$
	$A^C \cup B^C =$ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Conjunto Potencia

- Los conjuntos pueden estar formados por otros conjuntos -> es decir,

sus elementos pueden ser conjuntos. Por ejemplo, el conjunto de la clase, puede estar formado por los grupos de obligatorio (que están formados por alumnos).

Recordar:

- PERTENENCIA es una relación entre un elemento y un conjunto
- Elemento pertenece a conjunto si encontramos a ese elemento "adentro" del conjunto

$$a \in A$$

- INCLUSION AMPLIA es una relación entre dos conjuntos.
- Conjunto A ampliamente incluido en B, si "abriendo"el conjunto A, comprobamos que

CADA UNO de sus elementos PERTENECE a B

$$A \subseteq B \quad (\forall x \in A, x \in B)$$

Conjunto Potencia:

El conjunto potencia es un conjunto formado por todos los **subconjuntos** de un conjunto dado. Tiene la particularidad de que sus elementos son a su vez otros conjuntos. Concretamente, todos aquellos conjuntos que están ampliamente incluidos en el conjunto original.

- Si A es un conjunto, se denota como P(A) a su conjunto potencia.
- Se cumple la siguiente propiedad: Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

Ejemplos de conjunto potencia:

1) **Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.**
2) **¿Se cumple que $2 \in P(A)$?**
3) **¿Se cumple que $\{2\} \in P(A)$?**
4) **¿Se cumple que $\{2\} \subseteq P(A)$?**

Consideremos las 3 materias del primer semestre de la carrera de Licenciatura en Informática. A fin del semestre, cada uno de ustedes va a haber aprobado alguna de ellas, o todas.
Tenemos Materias = {P1, MD, SO}
Cuáles son los resultados posibles? Aprobar:

- P1
- MD
- SO
- P1 y MD
- P1 y SO
- MD y SO
- P1, MD y SO
- Ningunoa

Esto que hemos listado arriba es justamente **todos los subconjuntos posibles de ser formados** a partir del conjunto Materias. Y eso se llama **Conjunto Potencia**

- P(Materias)= {{P1}, {MD}, {SO}, {P1, MD} {P1, SO}, {MD, SO}, {P1, MD, SO}, {} }

Notar que:

- cada uno de las posibilidades es en realidad un conjunto, por eso está delimitado mediante { y }
- como el conjunto Potencia del conjunto Materias está integrado por conjuntos, éstos se convierten allí en “elementos”, y son separados por comas, para la definición por extensión.
- ahora, por ejemplo {aMD}, es un elemento del conjunto potencia. Y es a su vez, un conjunto con un elemento solo.
- El conjunto potencia de A debe incluir siempre el conjunto vacío y el propio conjunto completo A

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Conjunto Potencia:

El conjunto potencia es un conjunto formado por todos los **subconjuntos** de un conjunto dado. Tiene la particularidad de que sus elementos son a su vez otros conjuntos. Concretamente, todos aquellos conjuntos que están incluidos en el conjunto original.

- Si A es un conjunto, se denota como P(A) a su conjunto potencia.
- Se cumple la siguiente propiedad: Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

Ejemplos de conjunto potencia:

1) **Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.**
2) **¿Se cumple que $2 \in P(A)$?**
3) **¿Se cumple que $\{2\} \in P(A)$?**
4) **¿Se cumple que $\{2\} \subseteq P(A)$?**

1) Dado el conjunto A = {2, a, %}, calcular su conjunto potencia.

P(A)= { { }, {2}, {a}, {%}, {2,a}, {2,%}, {a,%}, {2,a,%} }

Y comprobamos que están todos ya que |P(A)| = 8 = 2^3 , ya que |A| = 3

2) ¿Se cumple que 2 $\in$ P(A)?

NO, el conjunto potencia está formado por CONJUNTOS, por lo que el 2 no puede ser uno de sus elementos.

3) ¿Se cumple que {2} $\in$ P(A)?

SI, el conjunto con el número 2 es uno de los elementos de P(A).

4) ¿Se cumple que {2} $\subseteq$ P(A)?

NO, el conjunto con el número 2 no está ampliamente incluído en P(A), ya que el 2 no pertenece a P(A) (esto basándonos en la definción de inclusión amplia:

{2} $\subseteq$ P(A) si y solo si $\forall$ x $\in$ {2}, x $\in$ P(A) -> $\forall$ x $\in$ {2} es el 2

Lo que si es cierto es lo siguiente:{ {2} } $\subseteq$ P(A)

UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Producto Cartesiano:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es un conjunto que tiene como elementos a todos los **pares ordenados** de los elementos de A y B.

En cada par ordenado (x,y), la primer componente x es un elemento de A y la segunda componente y es un elemento de B. En un par ordenado sí importa el orden de las componentes.

- Se suele denotar como A x B
- Se cumple la siguiente propiedad: |A x B| = |A| x |B|
- El producto cartesiano se puede generalizar a n conjuntos, en dicho caso en lugar de hablar de pares ordenados, estaríamos hablando de n-uplas ordenadas.

Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

Aparece un concepto nuevo, que es el PAR ORDENADO.

Se puede pensar como una "parejita" de dos elementos, que tiene la característica que el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo al conjunto B. La idea de *ordenado* viene de allí.

En un par ordenado los elementos se separan por una coma, y se "encierra" la parejita entre *paréntesis* (y)

Cada uno de los pares ordenados formados así, pasan a pertenecer al conjunto Producto cartesiano.

El producto cartesiano AxB está formado por TODOS los pares ordenados posibles del tipo (x,y) tales que $x \in A$ e $y \in B$

Este concepto se puede ampliar a más de dos conjuntos. Por ejemplo si es AxBxC, sus elementos serán triplas ordenadas del tipo (x,y,z) tales que $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

Producto Cartesiano:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es un conjunto que tiene como elementos a todos los **pares ordenados** de los elementos de A y B.

En cada par ordenado (x,y), la primer componente x es un elemento de A y la segunda componente y es un elemento de B. En un par ordenado sí importa el orden de las componentes.

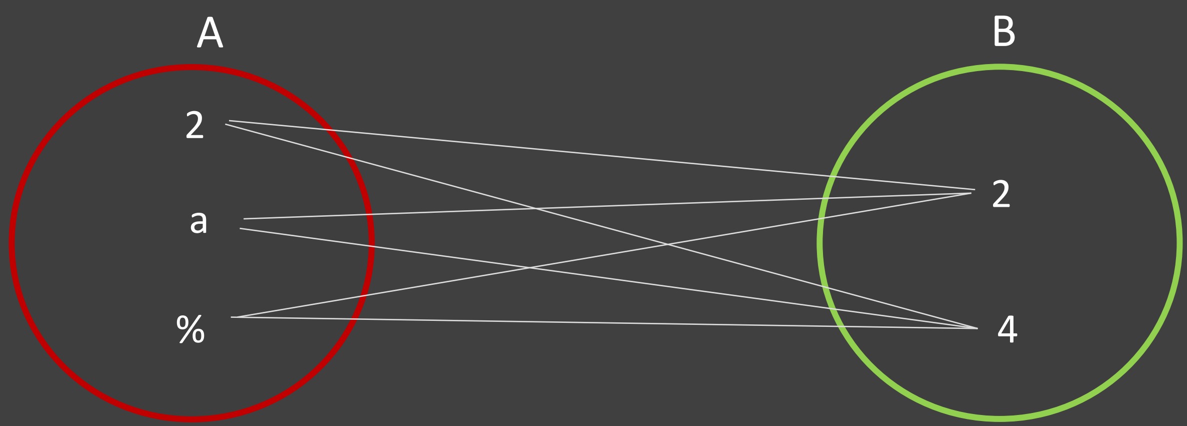
- Se suele denotar como A x B
- Se cumple la siguiente propiedad: |A x B| = |A| x |B|
- El producto cartesiano se puede generalizar a n conjuntos, en dicho caso en lugar de hablar de pares ordenados, estaríamos hablando de n-uplas ordenadas.

Ejemplos de producto cartesiano:

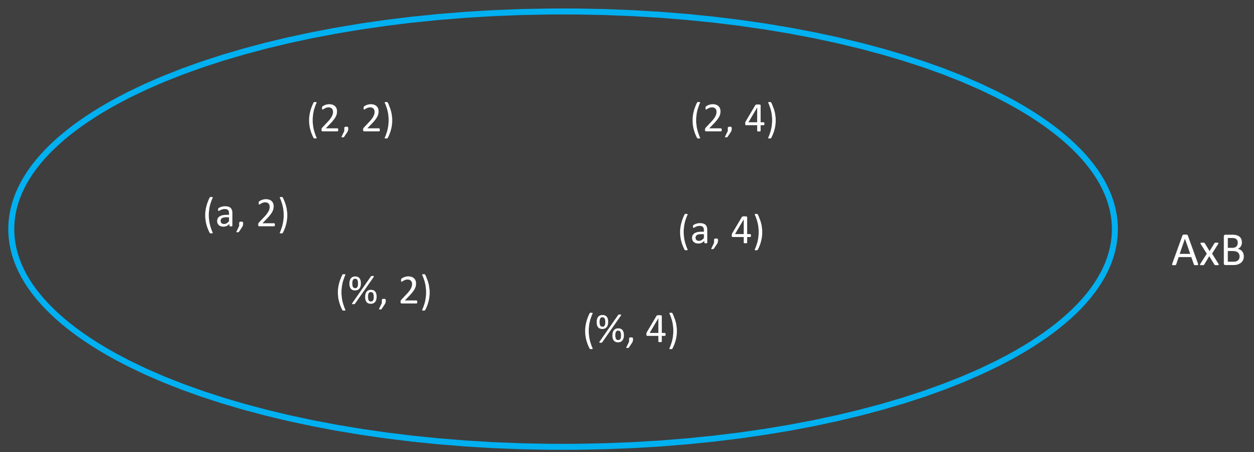
Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.



AxB = { (2,2), (2,4), (a,2), (a, 4), (%, 2), (%,4) }



Ejemplos de producto cartesiano:

Dados los conjuntos A = {2, a, %} y B = {2, 4} calcular el producto cartesiano de A x B.

AxB = { (2,2), (2,4), (a,2), (a, 4), (%, 2), (%,4) }

Notar que se cumple que |AxB| = 6, ya que |A| = 3 y |B| = 2, y 2x3 = 6

Nota: en los pares ordenados SI se permite elementos repetidos, ya que NO son conjuntos.
El elemento (2,2) es un par ordenado en el que el primer 2 pertenece a A y el segundo pertenece a B

Relaciones entre Conjuntos:

Se llama relación entre dos conjuntos A y B, a **cualquier subconjunto** del producto cartesiano A x B. Es decir, cualquier conjunto de pares ordenados tomados de A x B se le llama relación.

- Si $R \subseteq A \times B$, decimos que R es una relación.
- A se llama **dominio** y B se llama **codominio** de la relación.
- Dependiendo de su cardinalidad, la relación puede escribirse por extensión o comprensión, como cualquier conjunto.

Ejemplos de relaciones:

1) **Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, definir una relación sobre A x B que tenga cuatro elementos.**
2) **¿Se cumple que $\varnothing$ es una relación? ¿A x B es una relación?**
3) **Dado el conjunto N de los números naturales, definir una relación sobre NxN en la cual ambas componentes de cada par ordenado tengan el mismo valor.**

Ejemplos de relaciones:

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}, definir una relación sobre A x B que tenga cuatro elementos.

Por ejemplo podría ser $R_1 \subseteq A \times B$ tal que $R_1 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

Puede ser éste o cualquier otro conjunto que cumpla $R \subseteq A \times B$ y que tenga 4 elementos

2) ¿Se cumple que $\emptyset$ es una relación?

Si, dado que $\emptyset \subseteq A \times B$

¿A x B es una relación?

Si, dado que $A \times B \subseteq A \times B$

3) Dado el conjunto N de los números naturales, definir una relación sobre NxN en la cual ambas componentes de cada par ordenado tengan el mismo valor.

$\mathbf{R_3} \subseteq N \times N$

$\mathbf{R_3 = \{ (x,y) \in N \times N \,/\, x = y \}}$

Relaciones entre Conjuntos (continuación):

Algunas observaciones acerca de las relaciones:

1. Al conjunto $\varnothing$ se le llama **relación vacía** y al conjunto A x B (todo el producto cartesiano) se le llama **relación universal**.
2. Hay una relación especial que se llama **identidad**. Se trata del conjunto formado por todos los pares ordenados cuyas componentes son iguales ("lazos"). Se define así: $\mathbf{Id_A = \{ (x,y) \in A \times A \,/\, x = y \}}$
3. Las relaciones se pueden generalizar también a n conjuntos:
   - $R \subseteq A \times B$ — es una relación binaria
   - $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n$ — es una relación n-aria
4. Dado $R \subseteq A \times B$ se define la Relación Inversa del siguiente modo:

   $$\mathbf{R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \,/\, (x, y) \in R\}}$$

Ejemplos de relación inversa: **Definir las inversas de las relaciones definidas en el último ejemplo de la diapositiva anterior.**

Ejemplos de relaciones:

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}.. Definir las inversas de las relaciones definidas en el último ejemplo de la diapositiva anterior.

$R = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(a,1), (b,1), (a,2), (b,2)\}$

Recordar que $R^{-1} \subseteq B \times A$

2) La inversa de $\varnothing$ es $\varnothing$

La inversa de $A \times B$ es $B \times A$

3) La inversa de la relación de identidad es la propia relación de identidad

$\mathbf{R^{-1} = \{ (x,y) \in N \times N \,/\, x = y \}}$

Propiedades de las relaciones binarias sobre AxA

Para esta parte consideramos **solamente** relaciones sobre el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo. Dada una relación R $\subseteq$ A x A cualquiera, definimos las siguientes seis propiedades sobre R:

Reflexiva: R es reflexiva $\Leftrightarrow$ Todo elemento de A se relaciona con sí mismo

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Irreflexiva: R es irreflexiva $\Leftrightarrow$ Ningún elemento de A se relaciona con sí mismo.

$$\forall x \in A, (x, x) \notin R$$

Simétrica: R es simétrica $\Leftrightarrow$ Por cada par que está en R, también está en R su par inverso

$$\forall x \in A, \forall y \in A, si\ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

Propiedades de las relaciones binarias sobre AxA (continuación):

Transitiva: R es transitiva $\Leftrightarrow$ por cada par (x, y) $\in$ R y (y, z) $\in$ R también existe el par (x, z) $\in$ R.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{A}, \text{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \text{ y } (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}$$

Asimétrica: R es asimétrica $\Leftrightarrow$ por cada par que está en R, **no** está en R su par inverso.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \text{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \notin \mathbf{R}$$

Anti-simétrica: R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ R es Asimétrica con excepción de los pares donde ambas componentes coinciden (“lazos”). Es decir, no hay pares inversos, pero sí se permiten “lazos”.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \text{ si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \text{ y } (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

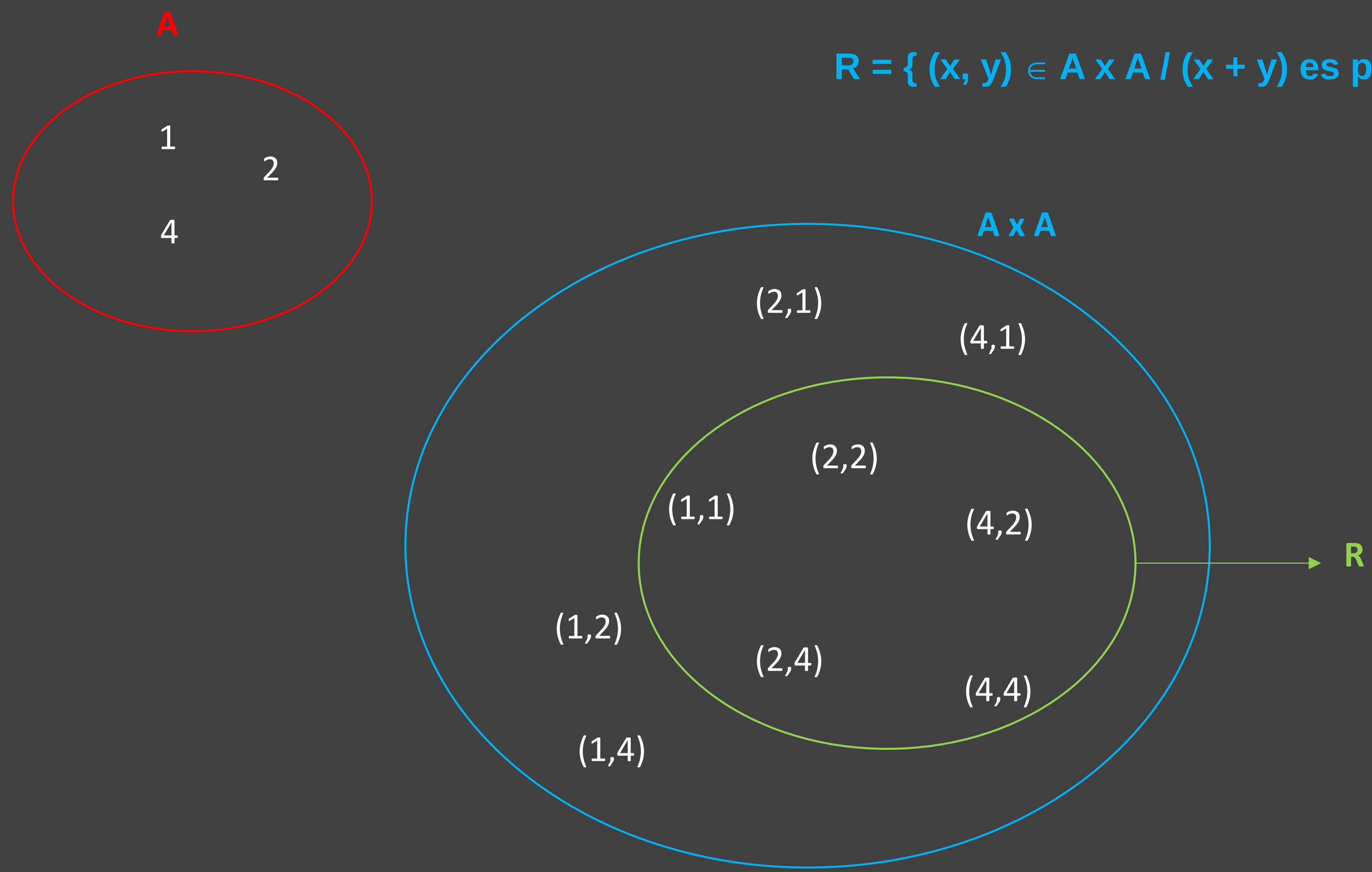
Ejemplo de propiedades de las relaciones binarias sobre AxA:

Dado el conjunto: $A = \{1, 2, 4\}$

Se define la relación $R = \{ (x, y) \in A \times A \,/\, (x + y) \text{ es par } \}$

1) **Expresar por extensión la relación R.**
2) **¿Es R una relación *reflexiva*? ¿Porqué?**
3) **¿Es R una relación *irreflexiva*? ¿Porqué?**
4) **¿Es R una relación *simétrica*? ¿Porqué?**
5) **¿Es R una relación *transitiva*? ¿Porqué?**
6) **¿Es R una relación *asimétrica*? ¿Porqué?**
7) **¿Es R una relación *anti-simétrica*? ¿Porqué?**

$R = \{ (x, y) \in A \times A \,/\, (x + y) \text{ es par} \}$



1) Expresar por extensión la relación R.

R = { (1,1), (2,2), (4,4), (2,4), (4,2) }

2) ¿Es R una relación *reflexiva*? ¿Porqué?

SI, porque para cada elemento de A, observamos que existe en R el lazo correspondiente.

3) ¿Es R una relación *irreflexiva*? ¿Porqué?

NO, ya que existe al menos un lazo, por ejemplo (4,4) $\in A \times A$

4) ¿Es R una relación *simétrica*? ¿Porqué?

SI, para cada par ordenado que pertenece a R, observamos que también está su inverso. (recordar que un lazo es su propio inverso).

5) ¿Es R una relación *transitiva*? ¿Porqué?

SI, para todos los casos en que encontramos pares del tipo (x,y) e (y,z), también existe el (x,z):

(2,2) y (2,4) => existe (2,4)

(4,2) y (2,4), => existe (4,4)

(2,4) y (4,2) => existe (2,2)

(4,4) y (4,2) => existe (4,2)

6) ¿Es R una relación *asimétrica*? ¿Porqué?

NO, ya que existe al menos un par inverso, por ejemplo pertenecen a R (4,2) y (2,4)

7) ¿Es R una relación *anti-simétrica*? ¿Porqué?

NO, por el mismo motivo que la propiedad anterior: existe al menos un par inverso (y que no es un lazo), por ejemplo pertenecen a R (4,2) y (2,4). La antisimétrica hubiera permitido lazos, como (4,4) por ejemplo, pero no otros inversos.

Relación de Equivalencia:

Sea R $\subseteq$ A x A una relación cualquiera. Decimos que R es una relación de ***equivalencia*** $\Leftrightarrow$ R cumple **simultáneamente** las siguientes propiedades:

Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Relación de Orden Parcial Amplio:

Sea R $\subseteq$ A x A una relación cualquiera. Decimos que R es una relación de ***orden parcial amplio* (O.P.A)** $\Leftrightarrow$ R cumple **simultáneamente** las siguientes propiedades:

Reflexiva, Anti-simétrica y Transitiva.

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el conjunto A = {1, 2, 4} y la relación

R = { (x, y) $\in$ A x A / (x + y) es par }

1) **¿Es R una relación de *equivalencia*?**
2) **¿Es R una relación de *orden parcial amplio*?**

Consideremos nuevamente el conjunto A = {1, 2, 4} y la relación R = { (x, y) $\in$ A x A / (x + y) es par }

1) ¿Es R una relación de *equivalencia*?

SI, por ser reflexiva, simétrica y transitiva.

2) ¿Es R una relación de *orden parcial amplio*?

NO, porque aunque es reflexiva y transitiva, no es antisimétrica.