Ejercicio 1

Considere la siguiente estructura $\mathcal{M}$ con tipo de similaridad $<$ 1,2 **;** 2,2,1 **;** 3 $>$:

$\mathcal{M}$ = $<$ N **;** Par, Mayor **;** sum, prod, cuad **;** 0,1,2 $>$

- N es el conjunto de los números naturales.
- Par = { $x \in$N | x es múltiplo de 2 } es la relación "ser par".
- Mayor = { $(x,y) \in$ NxN | $x > y$ } es la relación "mayor".
- sum : NxN $\rightarrow$ N / sum (x,y) = $x + y$ es la función suma de naturales.
- prod : NxN $\rightarrow$ N / prod (x,y) = $x * y$ es la función producto de naturales.
- cuad : N $\rightarrow$ N / cuad (x) = x^2 es la función cuadrado de un número natural.

Se define el siguiente alfabeto de símbolos para el tipo de similaridad presentado:

- Símbolos de Relación: **P** (unario), **M** (binario) para las relaciones Par y Mayor.
- Símbolos de Función: **s** (binario), **p** (binario), **c** (unario) para las funciones sum, prod y cuad.
- Símbolos de Constante: $\mathbf{c_0}$, $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ para las constantes 0, 1 y 2.

Utilizando solamente los símbolos presentados, traduzca a fórmulas bien formadas de FORM las siguientes afirmaciones sobre el universo de discurso dado por la estructura $\mathcal{M}$.

a) Existe algún natural que no es par.
b) No todos los naturales son pares.
c) No existe ningún natural que sea par e impar a la vez.
d) Hay por lo menos dos naturales tales que su suma es mayor que cero.
e) Existen dos naturales tales que su suma es mayor que su producto.
f) No existe ningún natural impar tal que su cuadrado sea par.
g) El cuadrado de todo natural no es mayor que el producto del natural consigo mismo.
h) Todo natural mayor que 0 cumple que su cuadrado también lo es.
i) Todo natural mayor que 1 cumple que su cuadrado es mayor que él.
j) La suma de dos naturales pares cualesquiera también es par.
k) Todo par de naturales impares cumple que su producto es par.
l) Si el cuadrado de un natural cualquiera es par y mayor que cero, entonces el natural también es par y mayor que cero.

Ejercicio 2

Considere el tipo de similaridad $<$ 1,2 **;** – **;** 2 $>$ junto con el siguiente alfabeto de símbolos:

- Símbolos de Relación: **Q** (unario), **R** (binario).
- Símbolos de Constante: $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$.

Sean además las siguientes fórmulas bien formadas en dicho lenguaje:

$\alpha_1 = \forall x\, (R(x,y) \leftrightarrow \exists y\, Q(y))$

$\alpha_2 = \forall x\, \exists y\, (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$

$\alpha_3 = R(c_1, c_2) \vee \neg Q(c_1)$

$\alpha_4 = \exists z\, (\forall y\, R(z,y) \wedge \neg R(y,z))$

$\alpha_5 = \forall x\, (Q(x) \rightarrow \exists x\, R(x,y))$

a) Indicar cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas en cada una de las fórmulas presentadas. Señalar el cuantificador al cual están ligadas.

b) Determinar cuáles de las fórmulas presentadas son cerradas y cuáles son abiertas.

Ejercicio 3

Considere el tipo de similaridad $<$ 2,1 **;** 2 **;** – $>$ junto con el siguiente alfabeto de símbolos:

- Símbolos de Relación: **M** (binario), **R** (unario).
- Símbolos de Función: **f** (binario).

Sea $\alpha \in$ FORM la siguiente fórmula bien formada en dicho lenguaje:

$$\alpha = \exists x M(x,y) \leftrightarrow \forall y (R(x) \vee M(y,x))$$

Conteste las siguientes preguntas, justificando apropiadamente sus respuestas. En cada caso, indique si es válido o no hacer la sustitución $\alpha[t / x]$ (o $\alpha[t / y]$, dependiendo de la pregunta).

a) Sea $t = f(x,y)$ ¿t es libre para x en α?

b) Sea $t = f(x,y)$ ¿t es libre para y en α?

c) Sea $t = f(x,z)$ ¿t es libre para x en α?

d) Sea $t = f(x,z)$ ¿t es libre para y en α?

e) Sea $t = f(y,z)$ ¿t es libre para x en α?

f) Sea $t = f(y,z)$ ¿t es libre para y en α?

Ejercicio 4

Considere la siguiente estructura $\mathcal{M}$ con tipo de similaridad $<$ 1,1,2 **;** – **;** 3 $>$:

$\mathcal{M} = <$ Z **;** Positivo, Negativo, Mayor **;** – **;** 1,2,3 $>$ donde:

- Z es el conjunto de los números enteros.
- Positivo = { $x \in Z$ | $x > 0$ } es la relación “ser positivo”.
- Negativo = { $x \in Z$ | $x < 0$ } es la relación “ser negativo”.
- Mayor = { $(x,y) \in Z \times Z$ | $x > y$ } es la relación “mayor”.

Se define el siguiente alfabeto de símbolos para el tipo de similaridad presentado:

- Símbolos de Relación: **P** (unario), **N** (unario), **M** (binario) para las relaciones Positivo, Negativo y Mayor.
- Símbolos de Constante: $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{c_3}$ para las constantes 1, 2 y 3.

Demuestre o refute cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta en todos los casos en forma detallada:

a) $\mathcal{M} \models \exists x (P(x) \wedge N(x))$

b) $\mathcal{M} \models \exists x \exists y (P(x) \wedge N(y))$

c) $\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \vee N(x))$

d) $\mathcal{M} \models \forall x \exists y M(y,x)$

e) $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (M(x,y) \leftrightarrow P(x) \wedge N(y))$

Ejercicio 5

Considere el tipo de similaridad $<$ 1,2 **;** – **;** 1 $>$ y símbolos de relación **A** (unario), **B** (binario) y símbolo de constante $\mathbf{c_1}$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es correcta o no. En caso afirmativo, demuestre que la afirmación se cumple para cualquier estructura. En caso negativo, presente una estructura concreta que sirva como contraejemplo y justifique apropiadamente.

a) $\models \forall x (A(x) \rightarrow A(x))$

b) $\exists x A(x) \models \forall x A(x)$

c) $\models \forall x B(x,x)$

d) $\forall x \exists y B(y,x) \models \exists y \forall x B(y,x)$

e) $\models \forall x (A(x) \wedge \neg A(x))$

f) $\forall x A(x) \models A(\mathbf{c_1})$