UNIVERSIDAD DE LA EMPRESA

Se proponen soluciones de ejemplo para algunos ejercicios del práctico. Las soluciones presentadas no son las únicas posibles. Pueden existir otras soluciones igualmente correctas.

Ejercicio 1

Considere el tipo de similaridad $< 1,2 \,;\, 1 \,;\, 2 >$ con símbolos de relación **P** (unario) y **R** (binario), símbolo de función **f** (unario) y símbolos de constante $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$. Construya derivaciones que demuestren las siguientes consecuencias sintácticas de lógica de predicados. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas:

a) $P(c_1),\ \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash P(f(c_1))$

Solución:

$$\dfrac{P(c_1) \qquad \dfrac{\forall x(P(x) \to P(f(x)))}{P(c_1) \to P(f(c_1))}\ \forall E\,(*)}{P(f(c_1))}\ \to E$$

(*) c_1 es libre para x en $(P(x) \to P(f(x))$ por ser una constante

b) $\forall x \forall y R(x,y) \vdash R(f(c_1), f(c_2))$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y R(x,y)}{\forall y R(f(c_1),y)}\ \forall E\,(*)}{R(f(c_1),f(c_2))}\ \forall E\,(**)$$

(*) $f(c_1)$ es libre para x en $\forall y\, R(x,y)$ por ser c_1 una constante

(*) $f(c_2)$ es libre para y en $R(f(c_1),y)$ por ser c_2 una constante

c) $P(c_1),\ P(c_2) \vdash \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y))$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(c_1) \qquad P(c_2)}{P(c_1) \wedge P(c_2)}\ \wedge I}{\exists y(P(c_1) \wedge P(y))}\ \exists I\,(*)}{\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y))}\ \exists I\,(**)$$

(*) c_2 es libre para y en $(P(c_1) \wedge P(y))$ por ser una constante

(*) c_1 es libre para x en $\exists y\,(P(x) \wedge P(y))$ por ser una constante

d) $\forall x R(x, c_1),\ \forall x(R(x, c_1) \to P(x)) \vdash \forall y P(f(y))$

Solución: **(próxima página)**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, R(x, c_1)}{R(f(y), c_1)}\,\forall E\,(*) \qquad \dfrac{\forall x\,(R(x, c_1) \to P(x))}{R(f(y), c_1) \to P(f(y))}\,\forall E\,(**)}{P(f(y))}\,\to E}{\forall y\; P(f(y))}\,\forall\, I\,(***)$$

(*) f (y) es libre para x en $R(x,c_1)$ porque luego de la sustitución, **y** no queda ligada

(**) f (y) es libre para x en $R(x,c_1) \to P(x)$ porque luego de la sustitución, **y** no queda ligada

(***) $y \notin FV(\forall x\, R(x,c_1))$ porque no ocurre en ella.

$y \notin FV(\forall x\, R(x,c_1) \to P(x))$ porque no ocurre en ella.

e) $\forall x \forall y\, (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \vdash \forall x\, R(x,x) \to \exists y\, \neg R(y,y)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall x\, R(x,x)}}}{R(x,x)}\,\forall E\,(*) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))}{\forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))}\,\forall E\,(*)}{R(x,x) \to \neg R(x,x))}\,\forall E\,(**)}{\dfrac{\neg R(x,x)}{\exists y \neg R(y,y)}\,\exists I\,(***)}\,\to E$$

$$\dfrac{\exists y \neg R(y,y)}{\forall x\, R(x,x) \to \exists y \neg R(y,y)}\,\to I\,(1)$$

(*) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(**) **x** es libre para y en $R(x,y) \to \neg R(y,x)$ porque no hay cuantificadores que la liguen tras la sustitución

(***) **x** es libre para y en $\neg R(y,y)$ porque no hay cuantificadores que la liguen tras la sustitución

f) $\forall x\,(P(x) \to \neg R(x,x)) \vdash \exists x\, R(x,x) \to \neg \forall x\, P(x)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\exists x\, R(x,x)}} \qquad \dfrac{\overset{(3)}{\cancel{R(x,x)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\forall x\, P(x)}}}{P(x)}\,(\forall E)\,(*) \qquad \dfrac{\forall x\,(P(x) \to \neg R(x,x))}{P(x) \to \neg R(x,x)}\,(\forall E)\,(*)}{\neg R(x,x)}\,(\to E)}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\,(\exists E)\,(3)\,(**)}{\neg \forall x\, P(x)}\,(\neg I)\,(2)}{\exists x\, R(x,x) \to \neg \forall x\, P(x)}\,(\to I)\,(1)$$

(*) x es libre para x en cualquier fórmula

(**) x no aparece libre en $\forall x\ P(x)$ ni en $\forall x\ (P(x) \to \neg R(x,x))$ porque está ligada a $\forall x$

x no aparece libre en $\bot$ porque $\bot$ no tiene variables

Ejercicio 2

Sean α, β $\in$ FORM fórmulas cualesquiera. Construya derivaciones que demuestren las siguientes consecuencias sintácticas de lógica de predicados. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas:

a) $\forall x(\alpha \to \beta), \exists x\alpha \vdash \exists x\beta$

Solución:

$$\dfrac{\exists x\alpha \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}} \qquad \dfrac{\forall x(\alpha \to \beta)}{\alpha \to \beta}\ \forall E\ (*)}{\beta}\ \to E}{\exists x\beta}\ \exists I\ (*)}{\exists x\beta}\ \exists E\ (**)\ (1)$$

(*) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(**) $x \notin FV(\forall x\,(\alpha \to \beta))$ porque está ligada al $\forall$.
$x \notin FV(\exists x\,\beta)$ porque está ligada al $\exists$.

b) $\forall x\alpha \wedge \exists x\beta \vdash \exists x\,(\alpha \wedge \beta)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\alpha \wedge \exists x\beta}{\exists x\beta}\ \wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\alpha \wedge \exists x\beta}{\forall x\alpha}\ \wedge E}{\alpha}\ \forall E\ (*) \qquad \overset{(1)}{\cancel{\beta}}}{\alpha \wedge \beta}\ \wedge I}{\exists x\,(\alpha \wedge \beta)}\ \exists I\ (*)}{\exists x\,(\alpha \wedge \beta)}\ \exists E\ (**)\ (1)$$

(*) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(**) $x \notin FV(\forall x\,\alpha \wedge \exists x\,\beta)$ porque está ligada al $\forall$ o al $\exists$ respectivamente.
$x \notin FV(\exists x\,(\alpha \wedge \beta))$ porque está ligada al $\exists$.

c) $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall E\ (*)\ \dfrac{\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta)}{\alpha \leftrightarrow \beta} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall x\beta}}}{\beta}\ \forall E\ (*)}{\alpha}\ \leftrightarrow E}{\forall x\alpha}\ \forall I\ (**) \qquad \forall I\ (***)\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta)}{\alpha \leftrightarrow \beta}\ \forall E\ (*) \quad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall x\alpha}}}{\alpha}\ \forall E\ (*)}{\beta}\ \leftrightarrow E}{\forall x\beta}}{\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta}\ \leftrightarrow I\ (1)$$

(*) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(**) $x \notin FV(\forall x\,\beta)$ porque está ligada al $\forall$.
$x \notin FV(\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta))$ porque está ligada al $\forall$.

(***) $x \notin FV(\forall x\,\alpha)$ porque está ligada al $\forall$.
$x \notin FV(\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta))$ porque está ligada al $\forall$.

d) $\exists x\,(\neg\beta \to \alpha), \forall x(\alpha \to \beta) \vdash \exists x\beta$

Solución:

$$\dfrac{\exists x\,(\neg\beta\to\alpha) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\beta}^{(1)} \quad \cancel{\neg\beta\to\alpha}^{(2)}}{\alpha}\to E \qquad \dfrac{\forall x(\alpha\to\beta)}{\alpha\to\beta}\forall E\,(*)}{\beta}\to E \qquad \cancel{\neg\beta}^{(1)}}{\bot}\neg E}{\beta}\text{RAA}\,(1)}{\exists x\beta}\exists I\,(*)}{\exists x\beta}\exists E\,(**)\,(2)$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\forall x\,(\alpha \to \beta))$ porque está ligada al $\forall$

$x \notin FV(\exists x\,\beta)$ porque está ligada al $\exists$

e) $\forall x\alpha \vee \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\alpha\vee\forall x\beta \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\cancel{\forall x\alpha}}{\alpha}\forall E\,(*)}{\alpha\vee\beta}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\cancel{\forall x\beta}}{\beta}\forall E\,(*)}{\alpha\vee\beta}\vee I}{\alpha\vee\beta}\vee E\,(1)}{\forall x(\alpha\vee\beta)}\forall I\,(**)$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\forall x\,\alpha \vee \forall x\,\beta)$ porque está ligada a alguno de los dos $\forall$.

Ejercicio 3

Sean α, $\beta \in$ FORM fórmulas cualesquiera. Construya derivaciones que demuestren los siguientes teoremas de lógica de predicados. Justifique cuando corresponda que las restricciones sobre las variables se cumplen al aplicar las reglas:

a) $\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta) \to \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\forall I\,(**)\dfrac{\wedge E\dfrac{\forall E\,(*)\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall x(\alpha\wedge\beta)}}}{\alpha\wedge\beta}}{\alpha}}{\forall x\alpha} \qquad \forall I\,(**)\dfrac{\wedge E\dfrac{\forall E\,(*)\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall x(\alpha\wedge\beta)}}}{\alpha\wedge\beta}}{\beta}}{\forall x\beta}}{\forall x\alpha\wedge\forall x\beta}\wedge I}{\forall x(\alpha\wedge\beta)\to\forall x\alpha\wedge\forall x\beta}\to I\,(1)$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\forall x\,(\alpha \wedge \beta))$ porque está ligada al $\forall$.

b) $\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$

Solución:

$$
\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\exists x(\alpha \wedge \beta)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha \wedge \beta}}}{\alpha}\wedge E}{\exists x\,\alpha}\exists I\,(*) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha \wedge \beta}}}{\beta}\wedge E}{\exists x\,\beta}\exists I\,(*)}{\exists x\alpha \wedge \exists x\beta}\wedge I}{\dfrac{\exists x\alpha \wedge \exists x\beta}{\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta}\rightarrow I\,(2)}\exists E\,(**)\,(1)
$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\exists x\,\alpha \wedge \exists x\,\beta)$ porque está ligada a alguno de los dos $\exists$

c) $\vdash \forall x\forall y\alpha \leftrightarrow \forall y\forall x\alpha$

Solución:

$$
\dfrac{\forall I\,(****)\dfrac{\forall I\,(***)\dfrac{\forall E\,(**)\dfrac{\forall E\,(*)\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall x\forall y\alpha}}}{\forall y\alpha}}{\alpha}}{\forall x\alpha}}{\forall y\forall x\alpha} \qquad \forall I\,(******)\dfrac{\forall I\,(*****)\dfrac{\forall E\,(*)\dfrac{\forall E\,(**)\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\forall y\forall x\alpha}}}{\forall x\alpha}}{\alpha}}{\forall y\alpha}}{\forall x\forall y\alpha}}{\forall x\forall y\alpha \leftrightarrow \forall y\forall x\alpha}\leftrightarrow I\,(1)
$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) y siempre es libre para y en cualquier fórmula

(∗∗∗) $x \notin FV(\forall x\forall y\,\alpha)$ por estar ligada al 1º $\forall$.

(∗∗∗∗) $y \notin FV(\forall x\forall y\,\alpha)$ por estar ligada al 2º $\forall$.

(∗∗∗∗∗) $y \notin FV(\forall y\forall x\,\alpha)$ por estar ligada al 1º $\forall$.

(∗∗∗∗∗∗) $x \notin FV(\forall y\forall x\,\alpha)$ por estar ligada al 2º $\forall$.

d) $\vdash \neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$

Solución:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\exists x\,\alpha}} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}} \qquad \dfrac{\overset{(4)}{\cancel{\forall x\neg\alpha}}}{\neg\alpha}\forall E\,(*)}{\bot}\neg E}{\bot}\exists E\,(**)\,(1)}{\neg\exists x\,\alpha}\neg I\,(2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(3)}{\cancel{\alpha}}}{\exists x\,\alpha}\exists I\,(*) \qquad \overset{(4)}{\cancel{\neg\exists x\,\alpha}}}{\bot}\neg E}{\neg\alpha}\neg I\,(3)}{\forall x\neg\alpha}\forall I\,(***)}{\neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha}\leftrightarrow I\,(4)
$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\forall x\,\neg\alpha)$ porque está ligada al $\forall$

$x \notin FV(\bot)$ porque $\bot$ no posee variables

(∗∗∗) $x \notin FV(\neg\,\exists x\,\alpha)$ porque está ligada al $\exists$

e) $\vdash \exists x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)$

<u>Solución</u>:

Llamaremos **D1** a la siguiente derivación:

$$\dfrac{\exists x(\neg\beta \to \neg\alpha) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\neg\beta}} \qquad \overset{(3)}{\cancel{\neg\beta \to \neg\alpha}}}{\neg\alpha}\,{\scriptstyle \to E} \qquad \overset{(2)}{\cancel{\alpha}}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}}{\beta}\,{\scriptstyle RAA\ (1)}}{\alpha \to \beta}\,{\scriptstyle \to I\ (2)}}{\exists x(\alpha \to \beta)}\,{\scriptstyle \exists I\ (*)}}{\exists x(\alpha \to \beta)}\,{\scriptstyle \exists E\ (**)\ (3)}$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\exists x(\alpha \to \beta))$ porque está ligada al $\exists$.

Llamaremos **D2** a la siguiente derivación:

$$\dfrac{\exists x(\alpha \to \beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(3)}{\cancel{\alpha \to \beta}}}{\beta}\,{\scriptstyle \to E} \qquad \overset{(2)}{\cancel{\neg\beta}}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}}{\neg\alpha}\,{\scriptstyle \neg I\ (1)}}{\neg\beta \to \neg\alpha}\,{\scriptstyle \to I\ (2)}}{\exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)}\,{\scriptstyle \exists I\ (*)}}{\exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)}\,{\scriptstyle \exists E\ (**)\ (3)}$$

(∗) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(∗∗) $x \notin FV(\exists x(\neg\beta \to \neg\alpha))$ porque está ligada al $\exists$.

Construimos la prueba final a partir de las derivaciones **D1** y **D2**:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overset{(1)}{\cancel{\exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)}} \\ \mathbf{D1} \\ \exists x(\alpha \to \beta)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overset{(1)}{\cancel{\exists x(\alpha \to \beta)}} \\ \mathbf{D2} \\ \exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)\end{array}}{\exists x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \exists x(\neg\beta \to \neg\alpha)}\,{\scriptstyle \leftrightarrow I\ (1)}$$

Ejercicio 4

Un conjunto $\Gamma \subseteq$ SENT es ***inconsistente*** si y sólo si $\Gamma \vdash \perp$. Al igual que en PROP, para probar la inconsistencia de Γ basta con dar una derivación que concluya $\perp$ partiendo de hipótesis en Γ. En cambio, para probar la consistencia de Γ es necesario usar el Teorema de Completitud.

a) Utilizando el Teorema de Completitud, demuestre la ***Condición necesaria y suficiente de consistencia*** para la Lógica de Predicados, cuyo enunciado es el siguiente:

Dado $\Gamma \subseteq$ SENT, Γ es consistente $\Leftrightarrow$ Existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Solución:

($\Rightarrow$)

Hipótesis: Γ es consistente.
Tesis: Existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Demostración: Por hipótesis, sabemos que Γ es consistente. Entonces, por definición de consistencia, tenemos que $\Gamma \nvdash \perp$. Aplicando el teorema de completitud, concluimos que $\Gamma \not\models \perp$. Luego, por definición de consecuencia lógica, existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\mathcal{M} \not\models \perp$. En particular, nos interesa que $\mathcal{M} \models \Gamma$ (LQQD).

($\Leftarrow$)

Hipótesis: Existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$.
Tesis: Γ es consistente.

Demostración: Por absurdo supongamos que Γ es inconsistente. Entonces, por definición de inconsistencia se cumple que $\Gamma \vdash \perp$. Luego, por teorema de completitud, $\Gamma \models \perp$. Por definición de consecuencia lógica, existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\mathcal{M} \models \perp$. Esto es absurdo, pues toda estructura $\mathcal{M}$ cumple que $v^{\mathcal{M}}(\perp) = 0$. Luego, Γ es consistente (LQQD).

b) Considere el tipo de similaridad $< 1 \,;\, – \,;\, 1 >$ con un símbolo de relación **P** (unario) y símbolo de constante $\mathbf{c_1}$. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es consistente o inconsistente, justificando apropiadamente su respuesta en cada caso

$\Gamma_1 = \{ \forall x\, P(x),\ \exists x \neg P(x) \}$ $\qquad$ $\Gamma_3 = \{ \neg\forall x\, P(x),\ \exists x\, P(x) \}$

$\Gamma_2 = \{ \forall x\, P(x),\ \neg\exists x\, P(x) \}$ $\qquad$ $\Gamma_4 = \{ \forall x \neg P(x),\ \neg\exists x\, P(x) \}$

Solución:

El conjunto $\Gamma_1 = \{ \forall x\, P(x),\ \exists x \neg P(x) \}$ es ***inconsistente***. Lo probamos mediante una derivación del absurdo a partir de las hipótesis del conjunto:

$$\dfrac{\exists x \neg P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\, P(x)}{P(x)}\ \forall E\ (*) \qquad \overset{(1)}{\cancel{\neg P(x)}}}{\perp}\ \neg E}{\perp}\ \exists E\ (**)\ (1)$$

(*) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

(**) $x \notin FV(\forall x\, P(x))$ por estar ligada al $\forall$
$x \notin FV(\perp)$ porque $\perp$ no tiene variables

El conjunto $\Gamma_2 = \{\ \forall x\, P(x),\ \neg\exists x\, P(x)\ \}$ es ***inconsistente***. Lo probamos mediante una derivación del absurdo a partir de las hipótesis del conjunto:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, P(x)}{P(x)}\ \forall E\ (*) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{P(x)}}}{\exists x\, P(x)}\ \exists I\ (*) \qquad \neg\exists x\, P(x)}{\bot}\ \neg E}{\neg P(x)}\ \neg I\ (1)}{\bot}\ \neg E$$

(*) x siempre es libre para x en cualquier fórmula

El conjunto $\Gamma_3 = \{\ \neg\forall x\, P(x),\ \exists x\, P(x)\ \}$ es ***consistente***. Lo probamos aplicando la CN y S de consistencia de la parte anterior:

Sea $\mathcal{M} = <\mathrm{N}$ **;** Par **; – ;** 3 $>$ siendo N el universo de los números naturales y Par la relación unaria $\{\ x\in\mathrm{N}\ /\ x \bmod 2 = 0\ \}$. Probaremos que $\mathcal{M} \models \neg\forall x\, P(x)$ y que $\mathcal{M} \models \exists x\, P(x)$. Luego, por la CN y S de consistencia, se tendrá que Γ_3 es consistente.

$\mathcal{M} \models \forall x\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\forall x\, P(x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\forall$)
Para todo $a\in\mathrm{N}$ se cumple que $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)
Para todo $a\in\mathrm{N}$ se cumple que a es par.		

Esto es **<u>falso</u>** en los naturales ya que existe al menos un natural que **<u>no</u>** es par (por ejemplo, el 3). Por lo tanto, $v^{\mathcal{M}}(\forall x\, P(x)) = 0$ y luego (por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\neg$), $v^{\mathcal{M}}(\neg\forall x\, P(x)) = 1$.

$\mathcal{M} \models \exists x\, P(x)$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\exists x\, P(x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Existe algún $a\in\mathrm{N}$ tal que $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)
Existe algún $a\in\mathrm{N}$ tal que a es par.		

Esto es **<u>cierto</u>** en los naturales ya que existe al menos un natural par (por ejemplo, el 2). Por lo tanto, $v^{\mathcal{M}}(\exists x\, P(x)) = 1$.

El conjunto $\Gamma_4 = \{\ \neg\forall x\, P(x),\ \exists x \neg P(x)\ \}$ es ***consistente***. Lo probamos aplicando la CN y S de consistencia de la parte anterior:

Sea $\mathcal{M}$ la misma estructura usada para probar la consistencia de Γ_3. Ya hemos probado que $\mathcal{M} \models \neg\forall x\, P(x)$. Probaremos ahora que $\mathcal{M} \models \exists x \neg P(x)$. Luego, por la CN y S de consistencia, se tendrá que Γ_4 es consistente.

$\mathcal{M} \models \exists x \neg P(x)$	$\Leftrightarrow$	(por def. de modelo)
$v^{\mathcal{M}}(\exists x \neg P(x)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\exists$)
Existe algún $a\in\mathrm{N}$ tal que $v^{\mathcal{M}}(\neg P(a)) = 1$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso $\neg$)
Existe algún $a\in\mathrm{N}$ tal que $v^{\mathcal{M}}(P(a)) = 0$	$\Leftrightarrow$	(por definición de $v^{\mathcal{M}}$, caso 2)
Existe algún $a\in\mathrm{N}$ tal que a **<u>no</u>** es par.		

Esto es **<u>cierto</u>** en los naturales ya que existe al menos un natural que **<u>no</u>** es par (por ejemplo, el 3). Por lo tanto, $v^{\mathcal{M}}(\exists x \neg P(x)) = 1$.