Se proponen soluciones de ejemplo para algunos ejercicios del práctico. Las soluciones presentadas no son las únicas posibles. Pueden existir otras soluciones igualmente correctas.

Ejercicio 1

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP proposiciones cualesquiera. Se propone la siguiente derivación que demuestra la consecuencia sintáctica: $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\neg\alpha \wedge \beta)$. Complete los recuadros de la derivación con los nombres de las reglas empleadas y cancele aquella(s) hipótesis que corresponda cancelar.

<u>Solución</u>:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \dfrac{(1)\ \cancel{\neg\alpha \wedge \beta}}{\neg\alpha}\ \boxed{\wedge \mathbf{E}}}{\bot}\ \boxed{\neg \mathbf{E}}}{\beta}\ \boxed{\bot \mathbf{E}} \qquad \neg\beta}{\bot}\ \boxed{\neg \mathbf{E}}}{\neg(\neg\alpha \wedge \beta)}\ \boxed{\neg \mathbf{I}\ (1)}$$

Ejercicio 2

Sean $\alpha, \beta \in$ PROP proposiciones cualesquiera. Se propone la siguiente derivación que demuestra el teorema: $\vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. Complete los recuadros de la derivación con las proposiciones faltantes y cancele aquella(s) hipótesis que corresponda cancelar.

<u>Solución</u>:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha}\ (2) \qquad \boxed{\cancel{\neg\beta}\ (1)}}{\alpha \wedge \neg\beta}\ (\wedge \mathrm{I}) \qquad \overset{(4)}{\boxed{\cancel{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}}}}{\bot}\ (\neg \mathrm{E})}{\boxed{\beta}}\ (\mathrm{RAA})\ (1)}{\alpha \to \beta}\ (\to \mathrm{I})\ (2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(3)\ \cancel{\alpha \wedge \neg\beta}}{\boxed{\alpha}}\ (\wedge \mathrm{E}) \qquad \overset{(4)}{\cancel{\alpha \to \beta}}}{\beta}\ (\to \mathrm{E}) \qquad \dfrac{\overset{(3)}{\cancel{\alpha \wedge \neg\beta}}}{\boxed{\neg\beta}}\ (\wedge \mathrm{E})}{\bot}\ (\neg \mathrm{E})}{\boxed{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}}\ (\neg \mathrm{I})\ (3)}{(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)}\ (\leftrightarrow \mathrm{I})\ (4)$$

Ejercicio 3

Sean α, β, γ $\in$ PROP proposiciones cualesquiera. Construya derivaciones que prueban las siguientes consecuencias sintácticas de la lógica proposicional:

a) $\alpha \wedge \beta \to \gamma \ \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(1)}{\cancel{\beta}}}{\alpha \wedge \beta}\ (\wedge \text{ I}) \qquad \alpha \wedge \beta \to \gamma}{\gamma}\ (\to \text{E})}{\beta \to \gamma}\ (\to \text{I})\ (1)}{\alpha \to (\beta \to \gamma)}\ (\to \text{I})\ (2)$$

b) $\alpha,\ \neg\beta \ \vdash \ \neg(\alpha \to \beta)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \overset{(1)}{\cancel{\alpha \to \beta}}}{\beta}\ (\to \text{E}) \qquad \neg\beta}{\bot}\ (\neg \text{ E})}{\neg(\alpha \to \beta)}\ (\neg \text{ I})\ (1)$$

c) $\neg\alpha \wedge (\neg\beta \to \alpha) \ \vdash \ \beta$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\neg\beta}} \qquad \dfrac{\neg\alpha \wedge (\neg\beta \to \alpha)}{\neg\beta \to \alpha}\ (\wedge \text{ E})}{\alpha}\ (\to \text{E}) \qquad \dfrac{\neg\alpha \wedge (\neg\beta \to \alpha)}{\neg\alpha}\ (\wedge \text{ E})}{\bot}\ (\neg \text{ E})}{\beta}\ (\text{RAA})\ (1)$$

d) $\neg(\neg\alpha \wedge \beta),\ \beta \ \vdash \ \alpha$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\neg\alpha}} \qquad \beta}{\neg\alpha \wedge \beta}\ (\wedge \text{ I}) \qquad \neg(\neg\alpha \wedge \beta)}{\bot}\ (\neg \text{ E})}{\alpha}\ (\text{RAA})\ (1)$$

e) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}}}{\alpha \vee \beta}(\vee \mathrm{I}) \qquad \neg(\alpha \vee \beta)}{\perp}(\neg \mathrm{E})}{\neg\alpha}(\neg \mathrm{I})\ (1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\beta}}}{\alpha \vee \beta}(\vee \mathrm{I}) \qquad \neg(\alpha \vee \beta)}{\perp}(\neg \mathrm{E})}{\neg\beta}(\neg \mathrm{I})\ (2)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}(\wedge \mathrm{I})$$

f) $(\alpha \to \beta) \vee \neg\alpha \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha \to \beta) \vee \neg\alpha \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(1)}{\cancel{\alpha \to \beta}}}{\beta}(\to \mathrm{E}) \qquad \overset{(3)}{\cancel{\neg\beta}}}{\perp}(\neg \mathrm{E}) \qquad \dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(1)}{\cancel{\neg\alpha}}}{\perp}(\neg \mathrm{E})}{\perp}(\vee \mathrm{E})\ (1)}{\neg\alpha}(\neg \mathrm{I})\ (2)}{\neg\beta \to \neg\alpha}(\to \mathrm{I})\ (3)$$

Ejercicio 4

Sean α, β, $\gamma \in$ PROP proposiciones cualesquiera. Construya derivaciones que prueben los siguientes teoremas de la lógica proposicional:

a) $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(1)}{\cancel{\beta}}}{\alpha \wedge \beta}(\wedge \mathrm{I})}{\beta \to \alpha \wedge \beta}(\to \mathrm{I})\ (1)}{\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)}(\to \mathrm{I})\ (2)$$

b) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\beta\wedge\alpha}}}{\alpha}\,(\wedge\ E)\qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\beta\wedge\alpha}}}{\beta}\,(\wedge\ E)}{\alpha\wedge\beta}\,(\wedge\ I)\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha\wedge\beta}}}{\beta}\,(\wedge\ E)\qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha\wedge\beta}}}{\alpha}\,(\wedge\ E)}{\beta\wedge\alpha}\,(\wedge\ I)}{(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\beta\wedge\alpha)}\,(\leftrightarrow I)\ (1)$$

c) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}}\qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\beta}}\qquad \overset{(5)}{\cancel{(\beta\to(\alpha\to\gamma))}}}{\alpha\to\gamma}\,(\to E)}{\gamma}\,(\to E)}{\beta\to\gamma}\,(\to I)\ (1)}{(\alpha\to(\beta\to\gamma)}\,(\to I)\ (2)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(4)}{\cancel{\beta}}\qquad \dfrac{\overset{(3)}{\cancel{\alpha}}\qquad \overset{(5)}{\cancel{(\alpha\to(\beta\to\gamma))}}}{\beta\to\gamma}\,(\to E)}{\gamma}\,(\to E)}{\alpha\to\gamma}\,(\to I)\ (3)}{(\beta\to(\alpha\to\gamma)}\,(\to I)\ (4)}{(\alpha\to(\beta\to\gamma))\leftrightarrow(\beta\to(\alpha\to\gamma))}\,(\leftrightarrow I)\ (5)$$

d) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha\wedge\neg\alpha}}}{\alpha}\,(\wedge\ E)\qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha\wedge\neg\alpha}}}{\neg\alpha}\,(\wedge\ E)}{\bot}\,(\neg\ E)}{\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)}\,(\neg\ I)\ (1)$$

e) $\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{(\alpha\vee\beta)\wedge\neg\alpha}}}{\alpha\vee\beta}\,(\wedge\ E)\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\alpha}}\qquad \dfrac{\overset{(2)}{\cancel{(\alpha\vee\beta)\wedge\neg\alpha}}}{\neg\alpha}\,(\wedge\ E)}{\bot}\,(\neg\ E)}{\beta}\,(\bot\ E)\qquad \overset{(1)}{\cancel{\beta}}}{\beta}\,(\vee\ E)\ (1)}{((\alpha\vee\beta)\wedge\neg\alpha)\to\beta}\,(\to I)\ (2)$$

f) $\vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\alpha}} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\neg\beta}} \qquad \overset{(5)}{\cancel{\neg\beta \to \neg\alpha}}}{\neg\alpha}\,(\to E)}{\bot}\,(\neg E)}{\beta}\,\text{RAA (1)}}{\alpha \to \beta}\,(\to I)\,(2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(3)}{\cancel{\alpha}} \qquad \overset{(5)}{\cancel{\alpha \to \beta}}}{\beta}\,(\to E) \qquad \overset{(4)}{\cancel{\neg\beta}}}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\alpha}\,(\neg I)\,(3)}{\neg\beta \to \neg\alpha}\,(\to I)\,(4)}{(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)}\,(\leftrightarrow I)\,(5)$$

Ejercicio 5

Un conjunto de proposiciones Γ se dice ***inconsistente*** si y sólo si $\Gamma \vdash \bot$. Es decir, si existe una derivación D tal que $H(D) \subseteq \Gamma$ y $C(D) = \bot$. En caso contrario, se dice que Γ es ***consistente***.
Demuestre que los siguientes conjuntos son inconsistentes:

a) $\{ p, p \to q, \ p \wedge \neg q \}$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad p \to q}{q}\,(\to E) \qquad \dfrac{p \wedge \neg q}{\neg q}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\neg E)$$

b) $\{ p \vee q, \ \neg p \wedge \neg q \}$

Solución:

$$\dfrac{p \vee q \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{p}} \qquad \dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\neg p}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\neg E) \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{q}} \qquad \dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\neg q}\,(\wedge E)}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\,(\vee E)\,(1)$$

c) $\{ p \wedge q, p \to \neg p \}$

Solución:

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{p}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{\dfrac{p \wedge q}{p}\,(\wedge E) \qquad p \to \neg p}{\neg p}\,(\to E)}{\bot}\,(\neg E)$$

Ejercicio 6

Para probar que un conjunto de proposiciones es ***consistente*** habría que demostrar que no existe ninguna derivación que concluya $\perp$ partiendo de hipótesis en dicho conjunto. Sin embargo, dicho mecanismo no es factible ya que en deducción natural no existe forma de probar la inexistencia de una derivación.

Existe una forma alternativa de probar la consistencia de un conjunto de proposiciones mediante el Teorema de Completitud denominada ***Condición necesaria y suficiente de consistencia*** cuyo enunciado es el siguiente:

> *Sea* $\Gamma \subseteq$ PROP *un conjunto de proposiciones. Se cumple que* Γ *es consistente si y sólo si existe una valuación* v *tal que* $v(\Gamma) = 1$.

a) Demuestre la condición necesaria y suficiente de consistencia usando el TM de Completitud.

Solución:

($\Rightarrow$) Hipótesis: Γ es consistente.

Tesis: Existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

Demostración:

Por hipótesis, Γ es consistente $\Rightarrow$ Se cumple que $\Gamma \nvdash \perp \Rightarrow$ Por TM de completitud, se tiene que $\Gamma \not\models \perp \Rightarrow$ Por la definición de consecuencia lógica se tiene que existe una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$ y $v(\perp) = 0$. En particular, nos quedamos con que $v(\Gamma) = 1$.

($\Leftarrow$) Hipótesis: Existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$

Tesis: Γ es consistente.

Demostración:

Por hipótesis, existe una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$. Como todas las valuaciones, dicha valuación cumple que $v(\perp) = 0 \Rightarrow$ Aplicando la definición de consecuencia lógica se tiene que $\Gamma \not\models \perp \Rightarrow$ Por TM de completitud, se tiene que $\Gamma \nvdash \perp \Rightarrow \Gamma$ es consistente.

b) Demuestre que los siguientes conjuntos son consistentes aplicando la condición necesaria y suficiente de consistencia probada en la parte anterior:

1. $\{ p \to q,\ p \to \neg q \}$

Solución:

Sea v una valuación tal que v(p) = 0. Probaremos que dicha valuación hace verdaderas a las dos proposiciones del conjunto y por tanto el conjunto es consistente:

$v(p \to q) = \max \{ 1 - v(p), v(q) \} = \max \{ 1 - 0, v(q) \} = \max \{ 1, v(q) \} = 1.$

$v(p \to \neg q) = \max \{ 1 - v(p), v(\neg q) \} = \max \{ 1 - 0, v(\neg q) \} = \max \{ 1, v(\neg q) \} = 1.$

2. $\{ p, q, \neg(\neg p \wedge \neg q) \}$

Solución:

Sea v una valuación tal que $v(p) = 1$ y $v(q) = 1$. Probaremos que dicha valuación también hace verdadera a la 3º proposición del conjunto y por tanto el conjunto es consistente:

$v(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = 1 – v(\neg p \wedge \neg q) = 1 – \min \{ v(\neg p), v(\neg q) \} = 1 – \min \{ 1 – v(p), 1 – v(q) \}$

$= 1 – \min \{ 1 – 1, 1 – 1 \} = 1 – \min \{ 0, 0 \} = 1 – 0 = 1.$

3. $\{ \neg\perp, \perp \rightarrow p \}$

Solución:

Sea v una valuación cualquiera. Probaremos que dicha valuación hace verdaderas a las dos proposiciones del conjunto y por tanto el conjunto es consistente:

$v(\neg\perp) = 1 – v(\perp) = 1 – 0 = 1.$

$v(\perp \rightarrow p) = \max \{ 1 – v(\perp), v(p) \} = \max \{ 1 – 0, v(p) \} = \max \{ 1, v(p) \} = 1.$