

Matemática Discreta

- Licenciatura en Informática – Ingeniería en Informática
- 1º año

Métodos de Prueba

¿Qué es un teorema?

Un teorema es un enunciado matemático compuesto por:

- **Hipótesis**: Afirmaciones que se asumen conocidas y verdaderas.
- **Tesis**: Afirmación cuya veracidad se desea concluir partiendo de las hipótesis.

No se sabe a priori si un teorema es verdadero o no. El ingenio, la práctica, son elementos esenciales para determinar la validez de un teorema.

Si el teorema es verdadero, hay que **demostrarlo**. Para ello, se utiliza algún método de prueba (ver en breve). Demostrar un teorema significa comprobar su validez mediante razonamientos justificados que a partir de las hipótesis concluyen la tesis. Se aplican definiciones, propiedades y otros teoremas previamente demostrados.

Al demostrar un teorema, **no** es válido razonar sobre casos concretos y particulares. Hay que razonar sobre **casos generales**.

¿Qué es un teorema? (continuación)

Si el teorema es falso, hay que dar un **contraejemplo**. Un contraejemplo es **un** caso concreto en el cual las hipótesis se cumplen, pero la tesis no.

El uso de ejemplos concretos es válido **únicamente** para probar la falsedad de un teorema. Para probar su veracidad, el único mecanismo válido es hacer una **demostración**.

Al dar un contraejemplo, se debe explicar también porqué el ejemplo concreto efectivamente permite refutar el enunciado.

Ejemplo: Un primer teorema

Dado el siguiente enunciado: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$

- 1) Explicar con palabras cuál es su significado.
- 2) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.
- 3) Determinar si el teorema es verdadero o falso, dando una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

Métodos de prueba a utilizar en teoremas verdaderos:

En caso de que un teorema efectivamente se cumpla (sea verdadero), veremos tres métodos para hacer la correspondiente prueba (prueba es sinónimo de demostración).

- **Prueba directa**
- **Prueba por absurdo**
- **Prueba por contrarrecíproco**

Algunos teoremas se pueden demostrar por más de un método. Hay otros que, en cambio, solamente salen por uno de los métodos. En cada prueba concreta se debe elegir algún método que resulte apropiado.

Hay un cuarto método de prueba que veremos más adelante en el curso, se trata de la **prueba por inducción**.

Prueba directa:

En este método se parte de las hipótesis para llegar a la tesis. Consiste en ir realizando razonamientos que hacen uso de las hipótesis hasta que, eventualmente, se llega a concluir la tesis.

En cada paso de la demostración, se hace uso de alguna hipótesis, alguna propiedad conocida o algún teorema previamente demostrado. Es muy importante indicar expresamente qué se está usando en cada paso.

Ejemplo de prueba directa:

Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, se quiere demostrar que:

$$(A - B) \subseteq (A \cap B)^c$$

- 1) Explicar con palabras cuál es su significado.**
- 2) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.**
- 3) Demostrar el teorema aplicando el método de prueba directa.**

Prueba por absurdo:

Este método consiste en **negar** la tesis. Es decir, suponer que la tesis a probar en realidad es **falsa** (no se cumple).

Luego se agrega dicha suposición temporalmente como una hipótesis adicional. Se hace uso de ella junto con la(s) hipótesis original(es) hasta que en algún paso se llega a un resultado **absurdo** (una contradicción).

En el momento en el que se alcanza el absurdo, la prueba termina. Se concluye entonces que la tesis efectivamente era verdadera.

Ejemplo de prueba por absurdo:

Sean A un conjunto cualquiera y $R \subseteq A \times A$ una relación. Se quiere demostrar que si R es asimétrica, entonces también es irreflexiva.

- 1) Explicar con palabras cuál es su significado.
- 2) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.
- 3) Demostrar aplicando el método de prueba por absurdo.

Prueba por contrarrecíproco:

Este método consiste en enunciar y demostrar un teorema **equivalente** al que se desea probar. Por ser equivalentes, la validez de uno implica necesariamente la validez del otro (y viceversa).

El teorema equivalente se denomina teorema **contrarrecíproco** (no confundir con el **recíproco**). El teorema contrarrecíproco se obtiene de negar e invertir las hipótesis y tesis del teorema original. Es decir:

- Lo que es **hipótesis** en el teorema original se **niega** y pasa a ser **tesis** en el teorema contrarrecíproco.
- Lo que es **tesis** en el teorema original se **niega** y pasa a ser **hipótesis** en el teorema contrarrecíproco.

Luego, se pasa a demostrar el teorema contrarrecíproco. Su demostración puede hacerse usando alguno de los otros dos métodos de prueba vistos antes (prueba directa o prueba por absurdo).

Prueba por contrarrecíproco (continuación):

Si el enunciado del teorema original tiene la siguiente forma:

- Hipótesis: **Se cumple X**
- Tesis: **Hay que probar Y**

Entonces, el enunciado del teorema contrarrecíproco tiene esta forma:

- Hipótesis: **Se cumple lo opuesto a Y**
- Tesis: **Hay que probar lo opuesto a X**

Ejemplo de prueba por contrarrecíproco:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Se quiere probar que si $|B| - |A| = 0$, entonces $A \not\subset B$.

- 1) Explicar con palabras cuál es su significado.
- 2) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema.
- 3) Enunciar la(s) hipótesis y la tesis del teorema contrarrecíproco.
- 4) Demostrar el teorema contrarrecíproco.