EJERCICIO 4.2: TRAYECTORIA Y ALCANCE DE UN PROYECTIL

Escribir un programa en Python que calcule el alcance de un proyectil en dos dimensiones sin rozamiento por los métodos de Euler y de Runge-Kutta. Suponer una velocidad inicial de 700 m/s y un ángulo respecto a la horizontal de 30º. Probar distintos intervalos temporales, dt, entre 0.0001 s y 2 s. Comparar los resultados con el resultado exacto y determinar para qué valor de dt se consigue un error relativo menor que 10–6 para cada uno de los dos métodos. Tomar como valor de g = 9.8 m/s2.

Lo primero que he hecho es calcular la solución exacta de forma analítica siguiendo los siguientes pasos:

$$y = v_0 sen(30^{º}) * t - 4.9 * t^2$$

$$0 = 350 * t - 4.9 * t^2$$

$$0 = t * (350 - 4.9 * t) \rightarrow 350 - 4.9 * t = 0 \ \rightarrow t = \frac{500}{7}\ s$$

$$x = v_0 cos(30^{º}) * t$$

$$x = 700 * \cos(30^{º}) * \frac{500}{7} = 50000 * cos(30^{º}) = 43301.27019\ m = 43.3013\ km$$

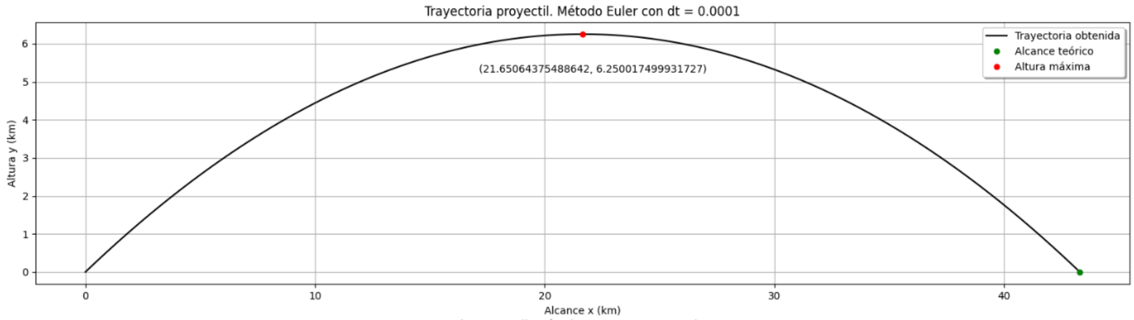
Cuando ya tengo el alcance máximo teórico, comparo este resultado con los valores obtenidos por Euler y por Runge-Kutta para distintos valores de dt y he sacado el error relativo obtenido. Se muestra todo esto en la tabla:

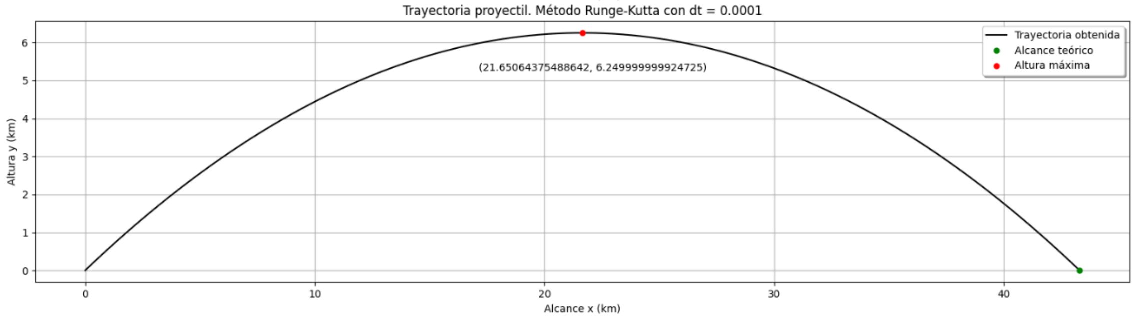
Método	dt	Alcance obtenido	Error relativo
Euler	0.0001	43.30133	1.399971e-06
Runge-Kutta	0.0001	43.30127	2.919326e-11
Euler	0.0005	43.30157	6.999975e-06
Runge-Kutta	0.0005	43.30127	2.456141e-11
Euler	0.0025	43.30279	3.499968e-05
Runge-Kutta	0.0025	43.30127	3.172456e-10
Euler	0.0125	43.30885	0.0001749937
Runge-Kutta	0.0125	43.30127	6.267493e-09
Euler	0.0625	43.33915	0.0008749063
Runge-Kutta	0.0625	43.30127	9.382662e-08
Euler	0.3125	43.49051	0.00437033
Runge-Kutta	0.3125	43.30107	4.690449e-06
Euler	1.5625	44.24431	0.02177855
Runge-Kutta	1.5625	43.297	9.858046e-05

En la tabla los alcances obtenidos están aproximados a 5 decimales, pero el error relativo nos hace ver qué valores están más próximos a la solución analítica. Podemos ver como para el método de Euler los dos primeros valores de dt probados producen un error relativo en el alcance calculado menor que 10e-6, y a partir de ahí crecen los errores hasta que para el valor máximo de dt, el error es del orden de 10e-3. Por otro lado, el método de Runge-Kutta, como ya sabíamos, aproxima mucho mejor la solución partiendo de un error del orden de 10e-12 y sólo estando por debajo de 10e-6 para el último valor de dt (=1.5625).

Se muestran a continuación las gráficas con las trayectorias para el mínimo valor de dt y para el máximo valor de dt, para ambos métodos e indicando el alcance teórico y la altura máxima de la trayectoria:

- dt = 0.0001





- dt = 1.5625