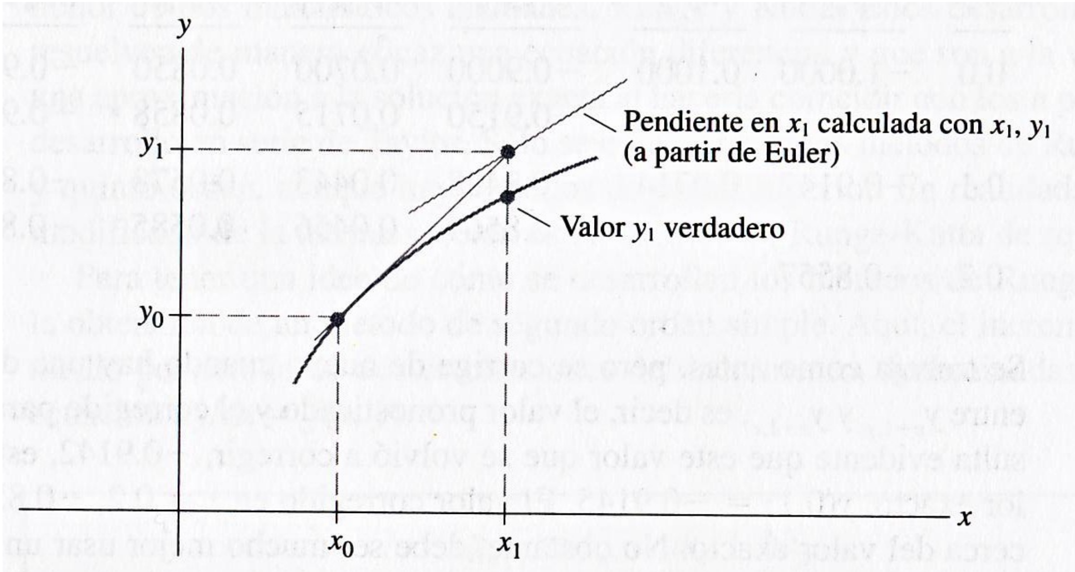
Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Recordatorio de métodos de Runge-Kutta

- El método de Euler se puede mejorar para lograr una mayor precisión. En la figura se ve claramente cuál es el problema de este método:



- Al usar la pendiente del punto inicial del intervalo, hay una desviación en y en el punto final del mismo. Esto sólo es correcto si la función es lineal. Una mejora sería usar el valor medio de la pendiente en el punto inicial y en el final:

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

Recordatorio de métodos de Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

- Esto no es posible calcularlo directamente, ya que para calcular y'_{n+1} es necesario conocer y_{n+1}. Sin embargo, se puede aproximar el valor de y_{n+1} mediante el método de Euler normal y utilizarlo para calcular y'_{n+1}. Con este valor de y'_{n+1} se calcula un y_{n+1} mejorado.
- Esto se conoce como método de Euler mejorado.
- Los métodos de Runge-Kutta (matemáticos alemanes) modifican el método de Euler mejorado. Constituyen una serie de métodos, de distinto orden según se va mejorando la precisión. Los más habituales son los de cuarto y quinto orden.
- Los métodos se basan en obtener un valor de y_{n+1} a partir del valor anterior y de un valor corregido de su derivada.

Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Recordatorio de métodos de Runge-Kutta

- Los métodos de Runge-Kutta más utilizados son los de cuarto orden, en los que la aproximación de la derivada en cada punto se hace utilizando cuatro términos.
- Existen infinitas posibilidades, pero de entre todos los conjuntos de valores posibles, el más utilizado conduce al siguiente algoritmo:

Ecuación a resolver:

$$y' = f(x, y)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hy'_n$$

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \end{aligned}\right\}$$

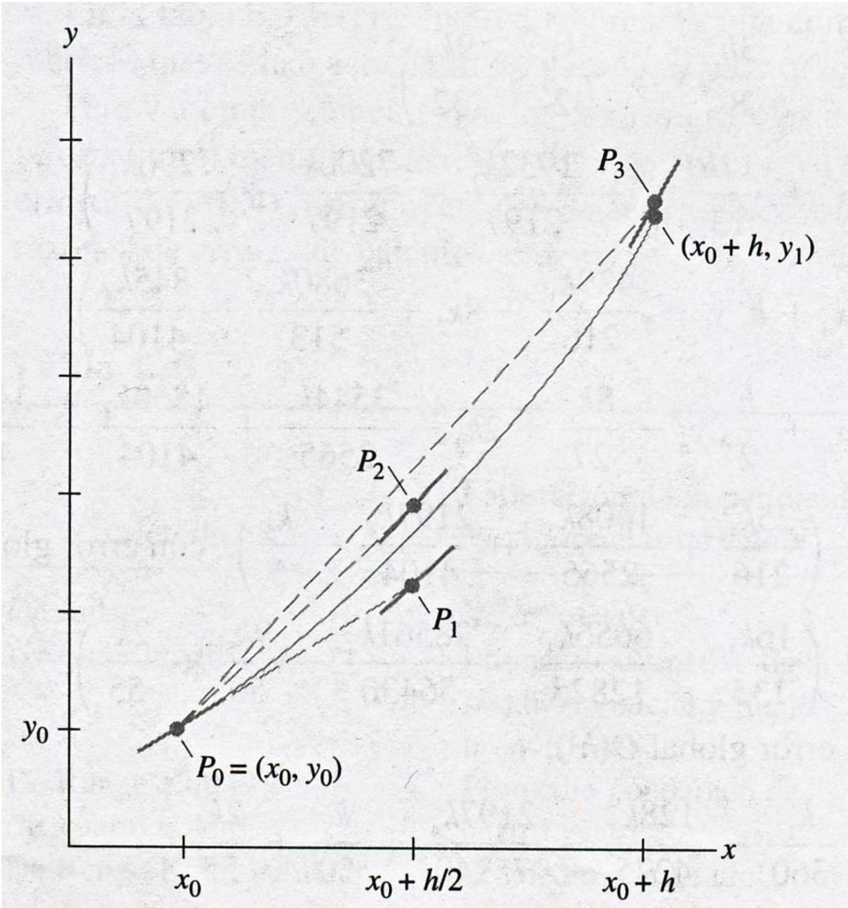
Aproximaciones a *hy'* en puntos intermedios del intervalo

$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right)$$

Aproximación a *hy' el punto final* del intervalo

Recordatorio de métodos de Runge-Kutta

- En la siguiente figura puede verse los cuatro valores de la pendiente que se usan en el método de Runge-Kutta que acabamos de ver.



Recordatorio de métodos de Runge-Kutta

- La efectividad de este método es superior al de Euler modificado.
- Por un lado parecería lo contrario, ya que en cada punto tenemos que hacer 4 evaluaciones de la función, mientras que en el de Euler modificado sólo se necesitan 2.
- Pero por otro lado, la precisión mejorada hace que el valor de h pueda ser mucho mayor que en el otro método. Existen métodos de Runge-Kutta de orden superior (5º, 6º, etc).
- Una pregunta que surge es cómo saber si el valor de h que estamos usando es el adecuado.
- Una posibilidad es calcular de nuevo cada valor utilizando h/2. Si sólo ocurre un cambio ligero en el valor de y_{n+1} es que el resultado es aceptable, pero si el cambio es grande hay que seguir reduciendo el valor de h. No obstante, este método es costoso: requiere varias evaluaciones de la función en cada paso.