EJERCICIO 5.1.

Se pide resolver la siguiente ecuación:

$$u'' = u; \;\; u'(1) = 1.17520; \;\;\; u'(3) = 10.0178$$

Por el método de las diferencias finitas y comparar con la solución exacta sabiendo que $u(x) = \cosh(x)$ y que los valores en la frontera corresponden a $senh(1)\ y\ senh(3)$. El código debe crear una gráfica con la solución exacta y las soluciones numéricas para 5 intervalos, 10 intervalos y 20 intervalos.

Para el método de las diferencias finitas, teniendo una ecuación del tipo:

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x); \quad x \in [a, b]$$

$$u(a) = u_a; u(b) = u_b$$

Dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos de la misma longitud h:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, b = x_n$$

Donde $x_{i+1} - x_i = h$.

Obtenemos la aproximación numérica para la primera y segunda derivadas de u en cada punto x_i, $i = 1, \dots, n-1$, es decir:

$$u' = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

$$u'' = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

Entonces, la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i + r_i$$

Reorganizando términos:

$$-\left(\frac{h}{2}p_i + 1\right)u_{i-1} + (2 + h^2 q_i)u_i + \left(\frac{h}{2}p_i - 1\right)u_{i+1} = -h^2 r_i$$

Que es un sistema de n – 1 ecuaciones algebraicas, que podemos escribir en notación matricial como:

$$Au = b$$

Donde,

$$A = \begin{pmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1 - 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(\frac{h}{2}p_2+1) & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2 - 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(\frac{h}{2}p_3+1) & 2+h^2q_3 & \frac{h}{2}p_3 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{h}{2}p_4+1) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{h}{2}p_{n-2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2+h^2q_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -h^2r_1 + (\frac{h}{2}p_1+1)u_0 \\ -h^2r_2 \\ -h^2r_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ -h^2r_{n-2} \\ -h^2r_{n-1} - (\frac{h}{2}p_{n-1}-1)u_n \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Como en nuestro caso las condiciones de frontera vienen dadas en el valor de la derivada, los valores u_0 y u_n son desconocidos. Por tanto, hay dos incógnitas más en nuestro sistema, al hacer nuestro sistema, tendremos n+1 incógnitas en lugar de n-1.

Como hemos visto en la teoría, las ecuaciones para estas incógnitas son:

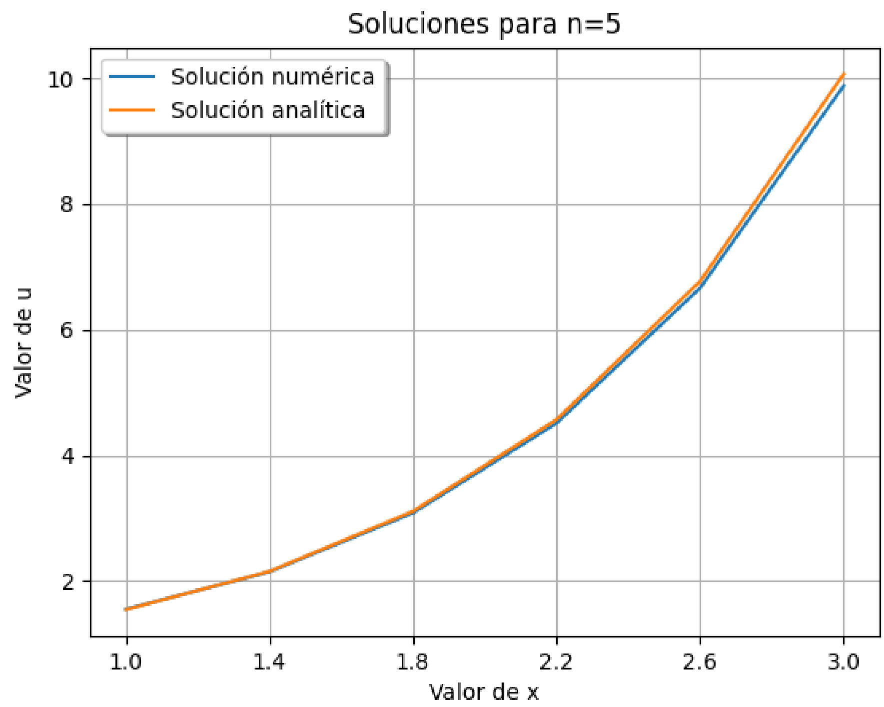
$$2u_0 - 2u_1 = -2hu'(x_0) - h^2f(x_0); \;\; -2u_{n-1} + 2u_n = +2hu'(x_n) - h^2f(x_n)$$

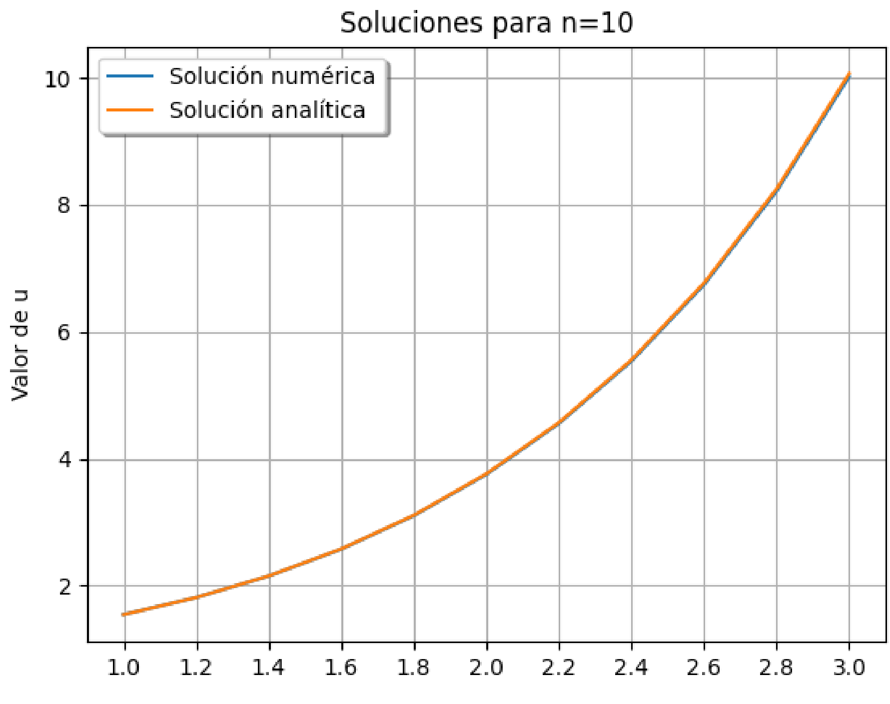
Entonces las matrices A y b de nuestro sistema quedarían:

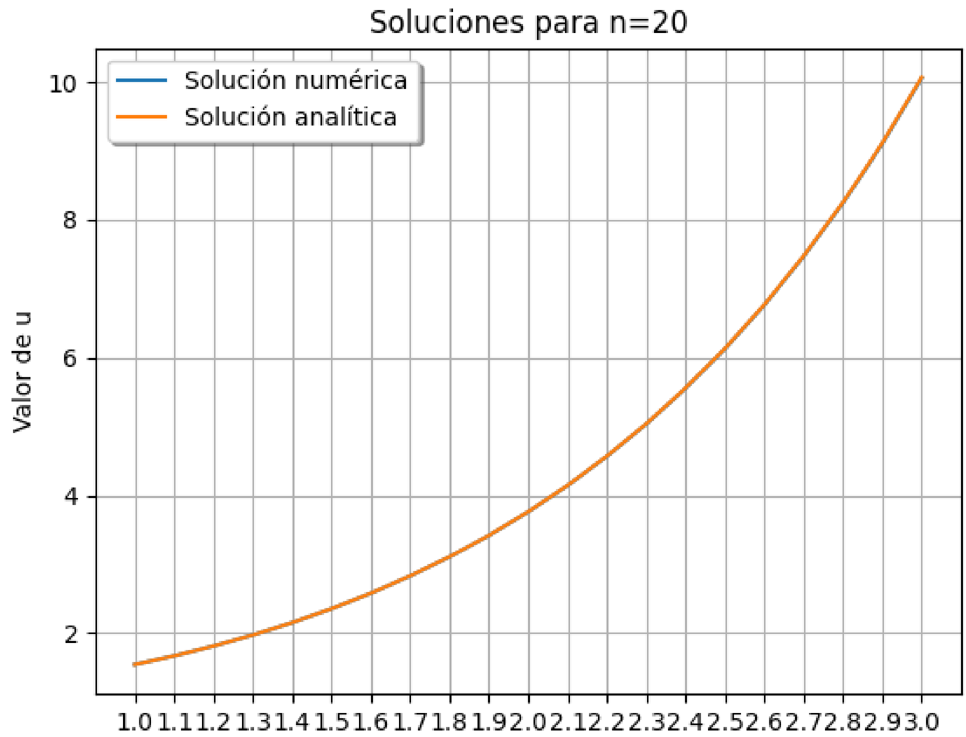
$A = \begin{pmatrix} 2+h^2q_0 & \frac{h}{2}p_0 - 2 \; \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; \frac{h}{2}p_n - 2 & 2+h^2q_n \end{pmatrix}$ Solo se añaden las dos ecuaciones de arriba y abajo, el resto de la matriz queda igual.

$b = \begin{pmatrix} -2hu'_0 - h^2r_0 \\ -h^2r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2r_{n-1} \\ 2hu'_n - h^2r_n \end{pmatrix}$ Se añaden ecuaciones en los extremos y varían las que lo eran antes.

Tras resolver el sistema tridiagonal para 5, 10 y 20 intervalos y compararlo con la solución exacta que equivale a cosh(x), obtenemos las siguientes gráficas:







Como podemos apreciar, la aproximación numérica a la solución analítica es cada vez más precisa, según aumentamos el número de intervalos.