Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Ecuaciones de orden superior y sistemas

- Normalmente, en Física, uno se encuentra con ecuaciones de segundo orden. También podemos encontrarnos con sistemas de ecuaciones diferenciales. En realidad, ambas situaciones se reducen a una, ya que las ecuaciones de orden superior a uno se pueden expresar como un sistema de ecuaciones.
- Una ecuación de segundo orden con condiciones iniciales puede expresarse como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \;\; ; \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = x_0'$$

- Si definimos una segunda variable, $v = \dfrac{dx}{dt}$, la ecuación anterior se convierte en el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = v \,; \quad x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dv}{dt} = f(t, x, v) \,; \quad v(t_0) = v_0$$

que puede resolverse utilizando el método de Runge-Kutta

Ecuaciones de orden superior y sistemas

- En general, una ecuación de orden n puede expresarse así:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$
$$y(x_0) = A_1 \ , \quad y'(x_0) = A_2 \ , \ \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

- Para cada derivada de orden inferior definimos una variable. Llamemos por conveniencia y_1 a la variable y.

$$y_2 = y_1'$$
$$y_3 = y_2' = y_1''$$
$$y_4 = y_3' = y_1'''$$
$$\ldots$$
$$y_n = y_{n-1}' = y_1^{(n-1)}$$

- De manera que nuestro sistema de ecuaciones es:

$$y_1' = y_2 \ ; \quad y_1(x_0) = A_1$$
$$y_2' = y_3 \ ; \quad y_2(x_0) = y_1'(x_0) = A_2$$
$$y_3' = y_4 \ ; \quad y_3(x_0) = y_1''(x_0) = A_3$$
$$\ldots$$
$$y_{n-1}' = y_n \ ; \quad y_{n-1}(x_0) = y_1^{(n-2)}(x_0) = A_{n-1}$$
$$y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \ ; \ y_n(x_0) = y_1^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Ecuaciones de orden superior y sistemas

- Al aplicar el método de Runge-Kutta en sistemas de ecuaciones hay que tener en cuenta que cada variable tendrá sus propios valores de las k_i. Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = xy + t \,, \qquad x(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = ty + x \,, \qquad y(0) = -1$$

- La variable *x* tendrá, en cada paso de Runge-Kutta de 4º orden, sus valores de k_{1x}, k_{2x}, k_{3x} y k_{4x}. Y, por otro lado, la variable *y* tendrá sus propios valores de k_i: k_{1y}, k_{2y}, k_{3y} y k_{4y}.
- Estos valores son totalmente independientes y es necesario ir calculándolos en el orden correcto: primero se calculan **todos** los valores de k_1 para **todas** las variables, luego **todos** los de k_2, y así sucesivamente.
- Es un error común alterar este orden y calcular primero todas las k_i de una variable, por ejemplo, todas las k_{ix} y después todas las de la otra variable, las k_{iy}. Esto conduce a un resultado erróneo.

Ecuaciones de orden superior y sistemas

- Esto es así porque la función que determina la derivada de cada variable puede depender en general de todas las otras variables:

$$x' = xy + t\,;\quad f_x(t,x,y) = xy + t\,;\quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,;\quad f_y(t,x,y) = ty + x\,;\quad y(0) = -1$$

- La forma general del método de Runge-Kutta de 4º orden para ecuaciones de primer orden en x, con t como variable independiente, era:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3)$$

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,;\quad f_x(t,x,y) = xy + t\,;\quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,;\quad f_y(t,x,y) = ty + x\,;\quad y(0) = -1$$

- Ahora, las soluciones de Runge-Kutta para cada variable x(t) e y(t) son:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

$$k_{1x} = h \cdot f_x(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{1y} = h \cdot f_y(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{2x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \qquad k_{2y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \qquad k_{3y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f_x(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y}) \qquad k_{4y} = h \cdot f_y(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y})$$

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = xy + t\,; \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = ty + x\,; \quad y(0) = -1$$

Hay que ser muy cuidadoso y calcular primero TODAS las k_1 de todas las variable, luego TODAS las k_2 y así sucesivamente:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

$$k_{1x} = h \cdot f_x(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{1y} = h \cdot f_y(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{2x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \qquad k_{2y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \qquad k_{3y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f_x(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y}) \qquad k_{4y} = h \cdot f_y(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y})$$

Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = xy + t\,; \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = ty + x\,; \quad y(0) = -1$$

Hay que ser muy cuidadoso y calcular primero TODAS las k_1 de todas las variable, luego TODAS las k_2 y así sucesivamente:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

$$k_{1x} = h \cdot f_x(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{1y} = h \cdot f_y(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{2x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \qquad k_{2y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \qquad k_{3y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f_x\left(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y}\right) \qquad k_{4y} = h \cdot f_y\left(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y}\right)$$

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = xy + t\,; \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = ty + x\,; \quad y(0) = -1$$

Hay que ser muy cuidadoso y calcular primero TODAS las k_1 de todas las variable, luego TODAS las k_2 y así sucesivamente:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

$$k_{1x} = h \cdot f_x(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{1y} = h \cdot f_y(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{2x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\ x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\ y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \qquad k_{2y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\ x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\ y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x}, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \qquad k_{3y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x}, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f_x(t_n + h, x_n + k_{3x}, y_n + k_{3y}) \qquad k_{4y} = h \cdot f_y(t_n + h, x_n + k_{3x}, y_n + k_{3y})$$

Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = xy + t\,; \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = ty + x\,; \quad y(0) = -1$$

Hay que ser muy cuidadoso y calcular primero TODAS las k_1 de todas las variable, luego TODAS las k_2 y así sucesivamente:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

$$k_{1x} = h \cdot f_x(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{1y} = h \cdot f_y(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{2x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \qquad k_{2y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \qquad k_{3y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f_x(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y}) \qquad k_{4y} = h \cdot f_y(t_n + h, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y})$$

Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = xy + t\,; \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = ty + x\,; \quad y(0) = -1$$

Hay que ser muy cuidadoso y calcular primero TODAS las k_1 de todas las variable, luego TODAS las k_2 y así sucesivamente:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

$$k_{1x} = h \cdot f_x(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{1y} = h \cdot f_y(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{2x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) \qquad k_{2y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{1x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f_x\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) \qquad k_{3y} = h \cdot f_y\left(t_n + \frac{1}{2}h,\, x_n + \frac{1}{2}k_{2x},\, y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f_x(t_n + h,\, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y}) \qquad k_{4y} = h \cdot f_y(t_n + h,\, x_n + k_{3x},\, y_n + k_{3y})$$

Tema 4: Ecuaciones diferenciales en 2 y 3 dimensiones

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = xy + t\,; \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = ty + x\,; \quad y(0) = -1$$

Hay que ser muy cuidadoso y calcular primero TODAS las k_1 de todas las variable, luego TODAS las k_2 y así sucesivamente:

- Para más dimensiones:

$$k_{1x}, k_{1y}, k_{1z}, \dots.$$

$$k_{2x}, k_{2y}, k_{2z}, \dots.$$

$$k_{3x}, k_{3y}, k_{3z}, \dots.$$

$$k_{4x}, k_{4y}, k_{4z}, \dots.$$

Ecuaciones de orden superior y sistemas

$$x' = xy + t\,; \quad f_x(t,x,y) = \boxed{xy + t\,;} \quad x(0) = 1$$

$$y' = ty + x\,; \quad f_y(t,x,y) = \boxed{ty + x\,;} \quad y(0) = -1$$

$$k_{1x} = h \cdot \boxed{(x_n y_n + t_n)}$$

$$k_{1y} = h \cdot \boxed{(t_n y_n + x_n)}$$

$$k_{2x} = h \cdot \boxed{\left[\left(x_n + \frac{1}{2}k_{1x}\right)\left(y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) + \left(t_n + \frac{1}{2}h\right)\right]}$$

$$k_{2y} = h \cdot \boxed{\left[\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)\left(y_n + \frac{1}{2}k_{1y}\right) + \left(x_n + \frac{1}{2}k_{1x}\right)\right]}$$

$$k_{3x} = h \cdot \boxed{\left[\left(x_n + \frac{1}{2}k_{2x}\right)\left(y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) + \left(t_n + \frac{1}{2}h\right)\right]}$$

$$k_{3y} = h \cdot \boxed{\left[\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)\left(y_n + \frac{1}{2}k_{2y}\right) + \left(x_n + \frac{1}{2}k_{2x}\right)\right]}$$

$$k_{4x} = h \cdot \boxed{\left[(x_n + k_{3x})(y_n + k_{3y}) + (t_n + h)\right]}$$

$$k_{4y} = h \cdot \boxed{\left[(t_n + h)(y_n + k_{3y}) + (x_n + k_{3x})\right]}$$