Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 15 \\
-3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8 \\
x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}
$$

Para resolver un sistema se utilizan las siguientes reglas:

- Una ecuación del sistema puede multiplicarse por una constante.
- A una ecuación se le puede sumar otra ecuación multiplicada por una constante.
- El orden de dos ecuaciones puede intercambiarse

El objetivo es conseguir transformar el sistema en un sistema triangular que se resuelve mediante sustitución regresiva.

Método de eliminación

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 15 \\
-10x_2 + 19x_3 &= 77 \\
-72x_3 &= -216
\end{aligned}
$$

$$x_3 = \frac{-216}{-72} = 3$$

$$x_2 = \frac{77 - 3 \cdot 19}{-10} = -2$$

$$x_1 = \frac{15 - 3 + 2 \cdot (-2)}{4} = 2$$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -7 & -2.5 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -7 & -2.5 \\ 0 & -4.5 & -1 & 4.5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & -4.5 & -1 & 4.5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & 0 & -13.6 & 0 \\ 0 & 0 & -11.4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ 27.2 \\ 21.8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2.8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Sustitución regresiva

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$x_3 = v_3$

$x_2 = v_2 - a_{23}\, x_3$

$x_1 = v_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3$

$x_0 = v_0 - a_{01}\, x_1 - a_{02}\, x_2 - a_{03}\, x_3$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Algoritmo eliminación gaussiana:

- Definir matriz de coeficientes, A(N×N), y vector de términos independientes, v(N)

```
for j en [0, N-1]
    diagonal = A(j,j)
    for k en [j, N-1]
        A(j,k) = A(j,k)/diagonal
    v(j) = v(j)/diagonal        Hasta aquí he conseguido 1 en el elemento de la diagonal. Adaptando toda la fila.
    for i en [j+1, N-1]
        factor = A(i,j)
        for k en [j, N-1]
            A(i,k) = A(i,k) – factor · A(j,k)
        v(i) = v(i) – factor · v(j)        Hemos obtenido la matriz triangular superior.
```

- Sustitución regresiva:

```
for i en [N-1, 0, -1]
    x(i) = v(i)
    for j en [N-1, i+1, -1]
        x(i) = x(i) – A(i,j) · x(j)
```

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Código de eliminación gaussiana en C++

```
for (int j=0; j<N; j++){         // Recorro todas las columnas
        diagonal=A[j][j];        // Para cada columna guardo el valor del elemento diagonal
        // Una vez seleccionada la columna j, recorro la fila j dividiendo cada
        // elemento por el elemento A(j,j)
        for (int k=j; k<N; k++){
                A[j][k]=A[j][k]/diagonal;
        }
        // No hay que olvidarse del elemento del vector de términos independientes!
        v[j]=v[j]/diagonal;
        // Para cada fila i que esté debajo de la fila j (i>j) voy a hacer ceros
        for (int i=j+1; i<N; i++){
                factor=A[i][j];         // Guardo el primer elemento no nulo de la fila i
                // Recorro la fila i desde k=j (columna actual) hasta el final, y
                // le resto el término factor*(elemento de la misma columna de la fila j)
                for (int k=j; k<N; k++){
                        A[i][k]=A[i][k]-factor*A[j][k];
                }
                // Hacemos lo mismo con el término independiente
                v[i]=v[i]-factor*v[j];
        }
}
```

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Código de eliminación gaussiana en C++ *(continuación)*

```
// Sustitución regresiva:
x[N-1]=v[N-1];          // empezamos con el último elemento
// Vamos desde el penúltimo (i=N-2) hasta el primero (i=0)
for (int i=N-2; i>=0; i--){
        x[i]=v[i];
        for (int j=N-1; j>i; j--){  // sumamos los términos correspondientes con j>i
            x[i]=x[i]-A[i][j]*x[j];
        }
    }

// Imprimimos la solución:

cout<< "Solución: (";
for (int i=0; i<N; i++){
        cout << x[i];
        if (i!=N-1) cout<<", ";
        else cout<<")";
        }
```

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Código de eliminación gaussiana en Python

```
A=zeros([N,N],float)              # Habría que asignar valores a los arrays
v=zeros(N,float)
x=empty(N,float)

for j in range(N):

          diagonal=A[j,j]
          for k in range(j,N):
                    A[j,k]=A[j,k]/diagonal
          v[j]=v[j]/diagonal
          for i in range(j+1,N):
                    factor=A[i,j]
                    for k in range(j,N):
                              A[i,k]=A[i,k]-factor*A[j,k]
                    v[i]=v[i]-factor*v[j]

for i in range(N-1,-1,-1):

          x[i]=v[i]
          for j in range(N-1,i,-1):
                    x[i]=x[i]-A[i,j]*x[j]

print(x)
```

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Código de eliminación gaussiana en Python *(versión 2)*

```
A=zeros([N,N],float)            # Habría que asignar valores a los arrays
v=zeros(N,float)
x=empty(N,float)

for j in range(N):

        diagonal=A[j,j]
        A[j,:] /= diagonal
        v[j] /= diagonal

        for i in range(j+1,N):
                factor=A[i,j]
                A[i,:] -= factor*A[j,:]
                v[i] -= factor*v[j]

for i in range(N-1,-1,-1):

        x[i]=v[i]
        for j in range(N-1,i,-1):
                x[i] -= A[i,j]*x[j]

print(x)
```

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Algoritmo pivoteo: Se usa porque puede pasar que algún elemento de la diagonal nos quede cero. Usamos pivoteo para evitar dividir por cero al tratar de convertir ese elemento de la diagonal en 1. El pivoteo consiste en intercambiar las filas.

(es conveniente insertar el pivoteo en el bucle general de la eliminación gaussiana)

```
for j en [0, N-1]
    pivote = |A(j,j)|
    fila_pivote = j
    for i en [j+1, N-1]
        if |A(i,j)| > pivote
            pivote = |A(i,j)|
            fila_pivote = i
    if fila_pivote ≠ j
        for k en [0, N-1]
            intercambiar A(j,k) por A(fila_pivote,k)
    intercambiar v(j) por v(fila_pivote)
```

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

- Se pueden ir almacenando las operaciones que se van realizando durante la eliminación gaussiana y construir con ellas una matiz triangular inferior, cuyo producto con la matriz triangular superior resultado de la transformación nos proporciona la matriz de partida:

$$L \cdot U = A$$

- Python incluye una función para resolver sistemas de ecuaciones mediante eliminación gaussiana con descomposición LU.

```
from numpy.linalg import solve
x = solve(A,v)
```

Matrices tridiagonales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & & & \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Utilizar solve para estos sistemas es un desperdicio de tiempo de computación. Por eso está bien tener un algoritmo propio para este tipo de sistemas.

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Sustitución regresiva

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$x_3 = v_3$

$x_2 = v_2 - a_{23}\, x_3$

$x_1 = v_1 - a_{12}\, x_2$

$x_0 = v_0 - a_{01}\, x_1$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Algoritmo eliminación gaussiana en matrices tridiagonales:

- Definir matriz de coeficientes, A(N×N), y vector de términos independientes, v(N)

for j en [0, N-2] *(el último elemento lo sacamos del bucle)*

    diagonal = A(j,j)

    A(j,j+1) = A(j,j+1)/diagonal *(el elemento (j,j) va a ser 1, y el de la izda,*

    v(j) = v(j)/diagonal *el (j,j-1), se ha hecho 0 en la iteración anterior)*

    factor = A(j+1,j) *(sólo vamos a hacer cero un elemento bajo la diagonal)*

    A(j+1,j+1) = A(j+1,j+1) – factor · A(j,j+1) *(sólo para j+1; para j sabemos que*

    v(j+1) = v(j+1) – factor · v(j) *será 0 y para j+2 no cambia porque el elemento de arriba (j,j+2), es 0)*

v(N-1) = v(N-1)/A(N-1,N-1) *(Último elemento, fuera del bucle)*

- Sustitución regresiva:

x(N-1) = v(N-1)

for i en [N-2, 0, -1]

    x(i) = v(i) – A(i,i+1) · x(i+1) *(No hace falta hacer un bucle, sólo está el elemento x(i+1))*

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Matrices banda

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & & & & \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \\ & & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ & & & & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

$$
\begin{aligned}
&a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots\ldots + a_{0n}x_n = b_0\\
&a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\\
&a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\quad
\left\{
\begin{aligned}
&x_0 = \frac{1}{a_{00}}\left(b_0 - a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - \ldots\ldots - a_{0n}x_n\right)\\
&x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{10}x_0 - a_{12}x_2 - \ldots\ldots - a_{1n}x_n\right)\\
&x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{20}x_0 - a_{21}x_1 - \ldots\ldots - a_{2n}x_n\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\\
&x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n0}x_0 - a_{n1}x_1 - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

$$x_0 = \frac{1}{a_{00}}\left(b_0 - a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - \ldots\ldots - a_{0n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{10}x_0 - a_{12}x_2 - \ldots\ldots - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{20}x_0 - a_{21}x_1 - \ldots\ldots - a_{2n}x_n\right)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n0}x_0 - a_{n1}x_1 - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right)$$

Se parte de un valor inicial, $x_i^{(0)}$, por ejemplo $x_i^{(0)} = b_i/a_{ii}$. Se sustituyen los valores en el lado derecho de las ecuaciones y se obtienen nuevos valores de x_i, que pasan a llamarse $x_i^{(1)}$,

Método de Jacobi (desplazamientos simultáneos):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

Aplicación del método de Jacobi:
$$x_0^{(1)} = \frac{b_0}{a_{00}} - \frac{1}{a_{00}} \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j^{(0)}$$

El nuevo valor de $x_0^{(1)}$ está más próximo a la solución que $x_0^{(0)}$, por lo que lo usamos para el siguiente término:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{10} x_0^{(1)}}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(0)}$$

Hacemos lo mismo con $x_1^{(1)}$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{20} x_0^{(1)}}{a_{22}} - \frac{a_{21} x_1^{(1)}}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}} \sum_{j=3}^{n} a_{2j} x_j^{(0)}$$

Generalizando tenemos el método de Gauss-Seidel (desplazamientos sucesivos):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

Los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen para matrices de coeficientes diagonalmente dominantes (cuando los elementos de la diagonal son mayores que la suma de todos los otros coeficientes de su fila):

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \qquad x_1 = 1{,}8333 + 0{,}3333x_2 - 0{,}1667x_3$$
$$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5 \qquad x_2 = 0{,}7143 + 0{,}2857x_1 - 0{,}2857x_3$$
$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \qquad x_3 = 0{,}2000 + 0{,}2000x_1 - 0{,}4000x_2$$

Comenzando con xi(0) = bi/aii, tenemos, para el método de Jacobi:

	0	1	2	3	4	5	...
x_1	1,8333	2,0380	2,0848	2,0042	1,9940	1,9964	...
x_2	0,7143	1,1809	1,0530	1,0014	0,9903	0,9979	...
x_3	0,2000	0,8524	1,0800	1,0382	1,0014	0,9949	...

Tras 9 iteraciones se consigue un error ≤ 1×10-4. Con Gauss-Seidel:

	0	1	2	3	4	5	...
x_1	1,8333	2,0380	2,0625	1,9947	1,9991	2,0001	...
x_2	0,7143	1,2394	0,9883	0,9963	1,0005	1,0000	...
x_3	0,2000	1,1034	1,0078	0,9974	1,0000	1,0000	...

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

Los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen para matrices de coeficientes diagonalmente dominantes:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

Algoritmo para el método de Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

```
for i en [0, n]
      b(i) = b(i)/a(i,i)
      x_new(i) = b(i)            (vector inicial)
      for j en [0,n], j≠i
            a(i,j)=a(i,j)/a(i,i)
```

- Repetir hasta la convergencia:

```
for i en [0,n]
      x_old(i) = x_new(i)
for i en [0,n]
      x_new(i) = b(i)
      for j en [0,n], j≠i
            x_new(i) = x_new(i) – a(i,j) x_old(j)
```

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

Algoritmo para el método de Gauss-Seidel:

```
for j en [0, n]
      b(i) = b(i)/a(i,i)
      x(i) = b(i)                    (vector inicial)
      for j en [0,n], j≠i
            a(i,j)=a(i,j)/a(i,i)
```

- Repetir hasta la convergencia:

```
for i en [0,n]
      x(i) = b(i)
      for j en [0,n], j≠i
            x(i) = x(i) – a(i,j) x(j)
```

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

Para llegar a la convergencia no podemos aplicar $|x_n - x_{n+1}|<\varepsilon$. Puesto que ahora estamos tratando con vectores, podemos usar la norma euclidiana:

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

de manera que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|<\varepsilon$

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

Los sistemas de ecuaciones no lineales sólo pueden ser resueltos por métodos iterativos. Sea el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&f_0(x_0,x_1,....,x_n)=0\\
&f_1(x_0,x_1,....,x_n)=0\\
&.....\\
&f_n(x_0,x_1,....,x_n)=0
\end{aligned}
$$

Podemos adoptar la estrategia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, reordenando el sistema de la forma

$$x_i = F_i(x_j)$$

Para que el método converja, debe cumplirse que

$$\sum_{j=0}^{n}\left|\frac{\partial F_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_j}\right| \leq 1 \qquad \forall i$$

Se trata de una condición suficiente, pero no necesaria.

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.0 Repaso: sistemas de ecuaciones

Métodos iterativos

Al igual que en el apartado anterior, tenemos dos aproximaciones:

1. Desplazamientos simultáneos (análogo a Jacobi)

$$x_i^{(k+1)} = F_i(x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$$

2. Desplazamientos sucesivos (análogo a Gauss-Seidel)

$$x_i^{(k+1)} = F_i(x_0^{(k+1)}, ..., x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$$

Cuando existen varias soluciones, los métodos iterativos pueden no ser capaces de encontrar todas. Para encontrar soluciones distintas se parte de vectores iniciales distintos.

5.1 Método de las diferencias finitas

Definición de derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para h no infinitesimal:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Variantes:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

5.1 Método de las diferencias finitas

Derivada segunda:

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Aplicando diferencias centrales a las derivadas primeras:

$$f'(x+h) \approx \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}$$

$$f'(x-h) \approx \frac{f(x) - f(x-2h)}{2h}$$

La derivada segunda queda:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}$$

5.1 Método de las diferencias finitas

Derivada segunda:

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h/2) - f'(x-h/2)}{h}$$

Las derivadas primeras quedan:

$$f'(x+h/2) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x-h/2) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Y la expresión para la derivada segunda queda:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.1 Método de las diferencias finitas

Para datos equiespaciados:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \qquad \text{(Diferencias hacia adelante)}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \qquad \text{(Diferencias hacia atrás)}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \qquad \text{(Diferencias centrales)}$$

Derivada segunda:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}$$

5.1 Método de las diferencias finitas

Resolución de ecuaciones diferenciales por el método de las diferencias finitas, ejemplo:

$$u'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right) u = x \;; \qquad u(1) = 2 \;; \qquad u(3) = -1$$

Tomamos cuatro subintervalos iguales:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1.0	1.5	2.0	2.5	3.0

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} - \left(1 - \frac{x_1}{5}\right) u_1 = x_1$$

$$\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} - \left(1 - \frac{x_2}{5}\right) u_2 = x_2$$

$$\frac{u_2 - 2u_3 + u_4}{h^2} - \left(1 - \frac{x_3}{5}\right) u_3 = x_3$$

5.1 Método de las diferencias finitas

En general podemos escribir:

$$x_i: \quad \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \left(1 - \frac{x_i}{5}\right) u_i = x_i$$

Reordenando los términos de cada índice:

$$u_{i-1} - \left[2 + h^2\left(1 - \frac{x_i}{5}\right)\right] u_i + u_{i+1} = h^2 x_i$$

Con lo que:

$$\begin{pmatrix} -\left[2 + h^2\left(1 - \frac{x_1}{5}\right)\right] & 1 & 0 \\ 1 & -\left[2 + h^2\left(1 - \frac{x_2}{5}\right)\right] & 1 \\ 0 & 1 & -\left[2 + h^2\left(1 - \frac{x_3}{5}\right)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 x_1 - u_0 \\ h^2 x_2 \\ h^2 x_3 - u_4 \end{pmatrix}$$

5.1 Método de las diferencias finitas

Sustituyendo los valores de h=0.5, u_0=2, u_4=–1, y los valores de x_i:

$$\begin{pmatrix} -2.175 & 1 & 0 \\ 1 & -2.150 & 1 \\ 0 & 1 & -2.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.625 \\ 0.5 \\ 1.625 \end{pmatrix}$$

que tiene por solución:

$$u_1 = 0.552 \; ; \quad u_2 = -0.424; \quad u_3 = -0.964$$

Si en lugar de 4 subintervalos tomásemos 10, es decir, hiciéramos h=0.2, habría 9 ecuaciones con 9 incógnitas, más los 2 valores de frontera. La matriz correspondiente es tridiagonal (siempre lo es con este método). Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Se comparan con los obtenidos por el método del disparo

x	**Valores del método de diferencias finitas**	**Valores del método del disparo**
1.2	1.351	1.350
1.4	0.792	0.790
1.6	0.311	0.309
1.8	−0.097	−0.100
2.0	−0.436	−0.438
2.2	−0.705	−0.708
2.4	−0.903	−0.904
2.6	−1.022	−1.024
2.8	−1.058	−1.059

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.1 Método de las diferencias finitas

Las condiciones de frontera pueden venir dadas en el valor de la derivada:

$$u'' = f(x)\ ; \quad u'(a) = A\ ; \quad u(b) = B$$

En este caso, el valor de $u_0 = u(a)$ es desconocido: hay una incógnita más. Al hacer n intervalos, tendremos n incógnitas en lugar de n-1

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots.,\ x_n = b$$

Conocemos u_n, pero no u_0. Hay que incluir una ecuación para u_0, pero esto implica introducir un nuevo punto, u_{-1}, desconocido:

$$u'' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} = f(x_0)$$

donde $u_{-1} = u(x_{-1}) = u(x_0 - \Delta x)$.

Podemos usar el valor de la derivada en x_0 para obtener una expresión para u_{-1}:

$$u'(a) = u'(x_0) = \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = A$$

$$u_{-1} = u_1 - 2hA$$

5.1 Método de las diferencias finitas

$$\frac{u_{-1}-2u_0+u_1}{h^2}=f(x_0) \qquad\qquad u_{-1}=u_1-2hA$$

Sustituyendo tenemos, para la primera ecuación:

$$\frac{u_{-1}-2u_0+u_1}{h^2}=\frac{u_1-2hA-2u_0+u_1}{h^2}=\frac{-2u_0+2u_1-2hA}{h^2}=f(x_0)$$

$$-2u_0+2u_1=2hA+h^2 f(x_0)$$

Para el resto de ecuaciones:

$$u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}=h^2 f(x_i)\ , \qquad i=1,\dots,n-1$$

Si la condición de frontera que afecta a la derivada es la del final del intervalo, se aplica un procedimiento similar. Y si afecta a ambos extremos se hace para ambos:

$$u'(x_0)=\frac{u_1-u_{-1}}{2h} \quad\Rightarrow\quad u_{-1}=u_1-2hu'(x_0)$$

$$u'(x_n)=\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} \quad\Rightarrow\quad u_{n+1}=u_{n-1}+2hu'(x_n)$$

Para el caso anterior tendríamos:

$$-2u_0+2u_1=2hu'(x_0)+h^2 f(x_0)\ ; \qquad 2u_{n-1}-2u_n=-2hu'(x_n)+h^2 f(x_0)$$

5.1 Método de las diferencias finitas

Las ecuaciones más habituales en Física implican a las tres dimensiones espaciales. Es muy habitual encontrarse con la ecuación de Laplace o la de Poisson:

$$\nabla^2 u = 0 \; ; \qquad \nabla^2 u = f$$

Condiciones de contorno:

$$u(x=0) = u(0,y) \; , \qquad 0 \le y < y_f$$

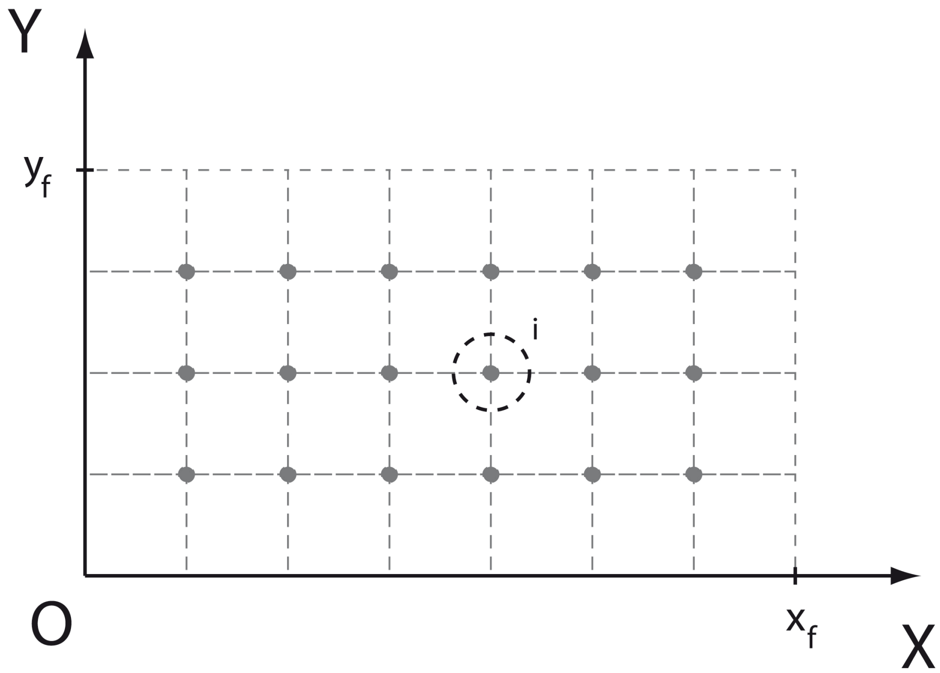
$$u(x=x_f) = u(x_f,y) \; , \qquad 0 \le y < y_f$$

$$u(y=0) = u(x,0) \; , \qquad 0 \le x < x_f$$

$$u(y=y_f) = u(x,y_f) \; , \qquad 0 \le x < x_f$$

Se divide la región en m×n nodos.

$\Delta x = \Delta y = h$

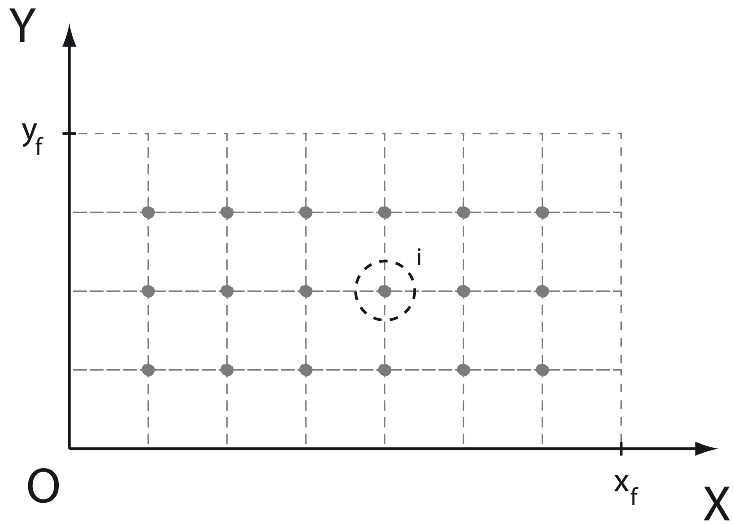


Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.1 Método de las diferencias finitas

La ecuación de Laplace en dos dimensiones viene dada por:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

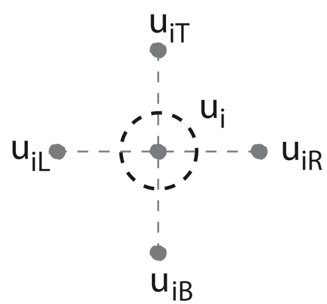


L = left
R = Right

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{iL} - 2u_i + u_{iR}}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{iL} - 2u_i + u_{iR}}{h^2}$$

T = top
B = Bottom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{iT} - 2u_i + u_{iB}}{(\Delta y)^2} = \frac{u_{iT} - 2u_i + u_{iB}}{h^2}$$



$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{iL} + u_{iR} + u_{iT} + u_{iB} - 4u_i}{h^2} = 0$$

$$\nabla^2 u_i = \frac{1}{h^2}\left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\} u_i \qquad \nabla^2 u_i = \frac{1}{h^2}\left\{ \begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix} \right\} u_i$$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

Forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden en dos dimensiones y con coeficientes lineales:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Podemos clasificar estas ecuaciones según los valores de A, B y C:

- Si (B^2 - 4AC) < 0, se denominan elípticas.
- Si (B^2 - 4AC) = 0, se denominan parabólicas.
- Si (B^2 - 4AC) > 0, se denominan hiperbólicas.

A y B mismo signo

En los casos en los que B=0, las ecuaciones elípticas tienen A y B positivos; las parabólicas tienen alguno de los dos coeficientes nulo; y las hiperbólicas tienen los coeficientes con signo opuesto.

Las ecuaciones elípticas que vamos a estudiar son de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Función que puede depender de todo esto

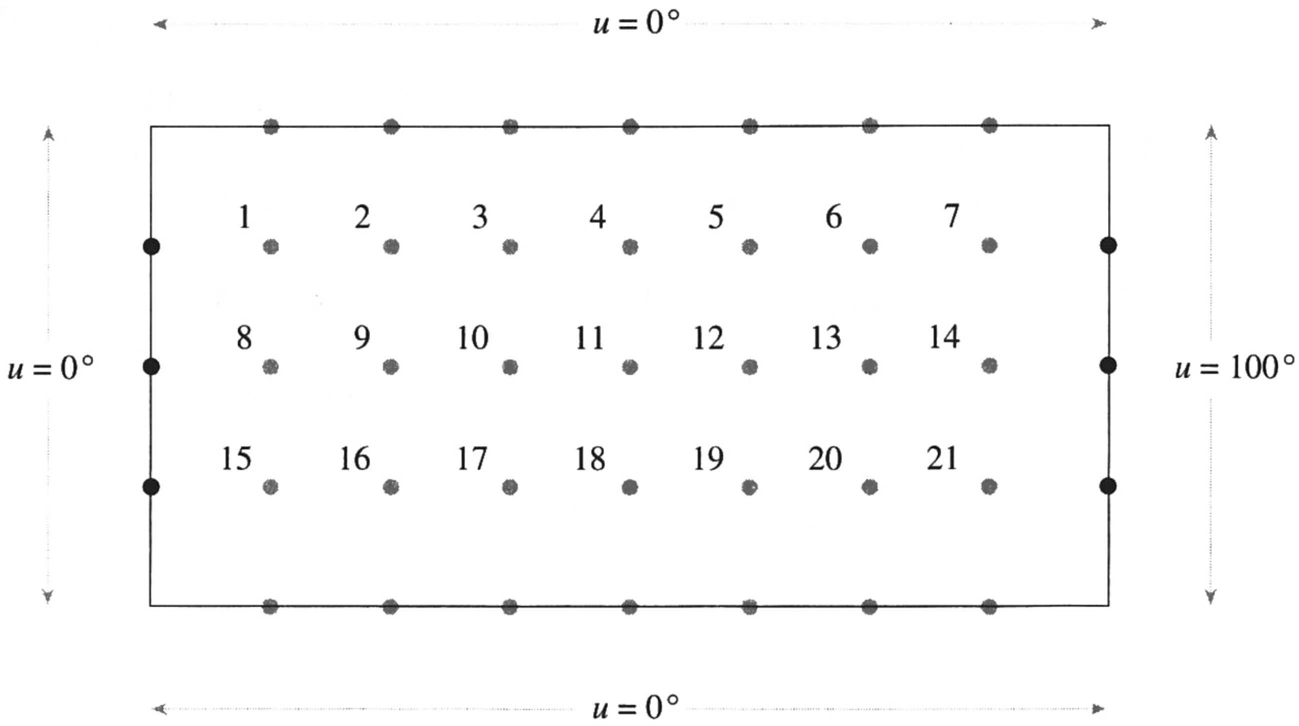
5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

Ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$

Caso particular: distribución de temperaturas en estado de equilibrio de una placa rectangular de 20 cm de ancho y 10 cm de alto.

Condiciones de frontera: todos los bordes están a 0ºC excepto el borde derecho, que está a 100ºC. Se supone que la superficie de la placa no gana ni pierde calor.

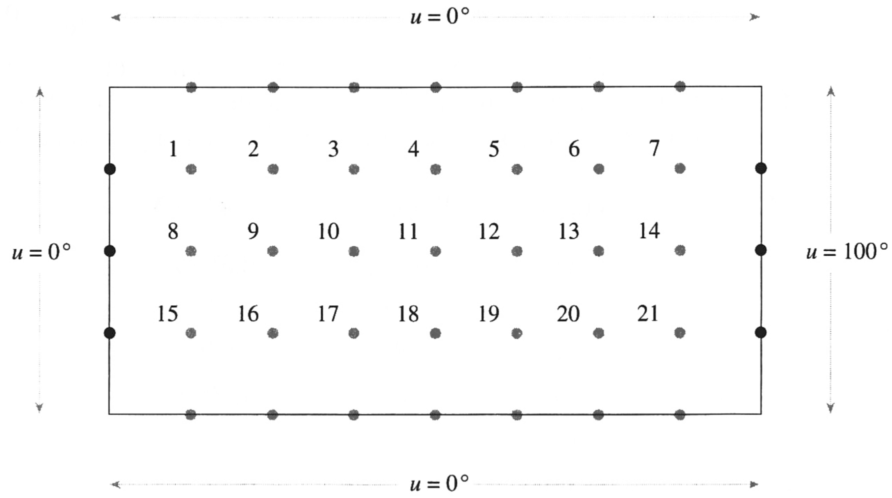
Vamos a usar inicialmente nodos separados 2.5 cm entre sí:



Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

$$\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u_i = 0$$



Para la primera fila:

Extremo izquierdo:

$$\left\{\begin{matrix} & \cancel{1} & \\ \cancel{1} & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4u_1 + u_2 + u_8 = 0$$

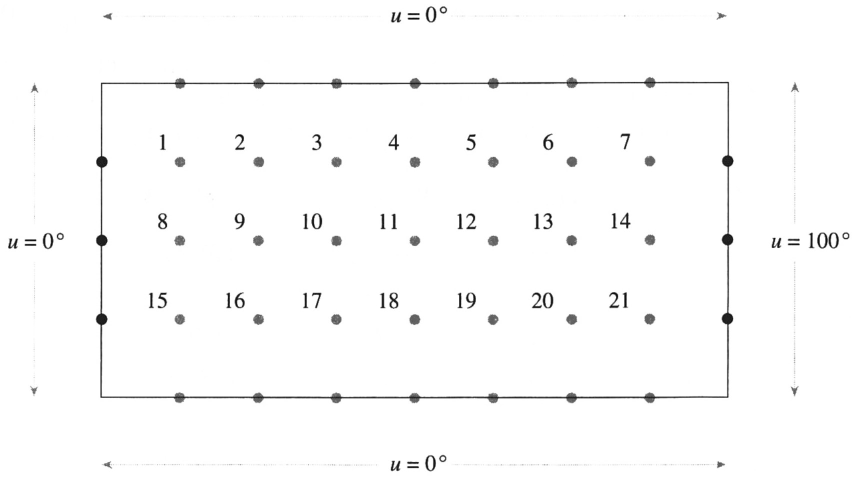
Nodos 2-6:

$$\left\{\begin{matrix} & \cancel{1} & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i-1} - 4u_i + u_{i+1} + u_{i+7} = 0$$

Extremo derecho:

$$\left\{\begin{matrix} & \cancel{1} & \\ 1 & -4 & \cancelto{100}{1} \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_6 - 4u_7 + 100 + u_{14} = 0$$

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio



Para la fila central, en el extremo izquierdo:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \cancel{1} & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\} u_8 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 - 4u_8 + u_9 + u_{15} = 0$$

Nodos 9 a 13:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\} u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i-7} + u_{i-1} - 4u_i + u_{i+1} + u_{i+7} = 0$$

Extremo derecho: $u_7 + u_{13} - 4u_{14} + 100 + u_{21} = 0$

Fila inferior:

Extremo izquierdo: $u_8 - 4u_{15} + u_{16} = 0$

Nodos 16-20: $u_{i-7} + u_{i-1} - 4u_i + u_{i+1} = 0$

Extremo derecho: $u_{14} + u_{20} - 4u_{21} + 100 = 0$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

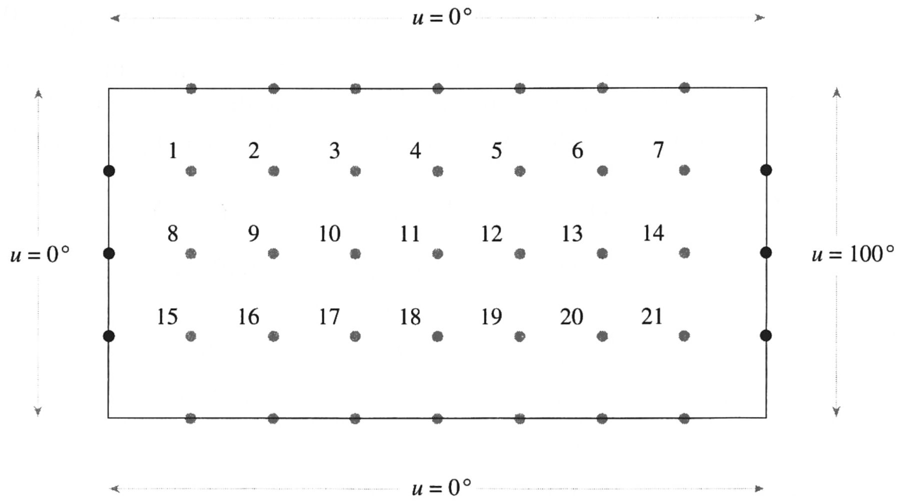
5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21			
1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u1		0
2	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u2		0
3	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u3		0
4	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u4		0
5	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u5		0
6	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	u6		0
7	0	0	0	0	0	1	-4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	u7		-100
8	1	0	0	0	0	0	0	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	u8		0
9	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	u9		0
10	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	u10	=	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	u11		0
12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	u12		0
13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	1	0	u13		0
14	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	0	0	0	0	0	0	1	u14		-100
15	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4	1	0	0	0	0	0	u15		0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	u16		0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	u17		0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	u18		0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	u19		0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	1	u20		0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-4	u21		-100

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

Resolviendo el sistema por eliminación gaussiana, se obtiene, para la temperatura en cada nodo:

Columna	Renglón 1	Renglón 2	Renglón 3
1	0.3530	0.4988	0.3530
2	0.9132	1.2894	0.9132
3	2.0103	2.8323	2.0103
4	4.2957	7.0193	4.2931
5	9.1531	12.6537	9.1531
6	19.6631	27.2893	19.6631
7	43.2101	53.1774	43.2101

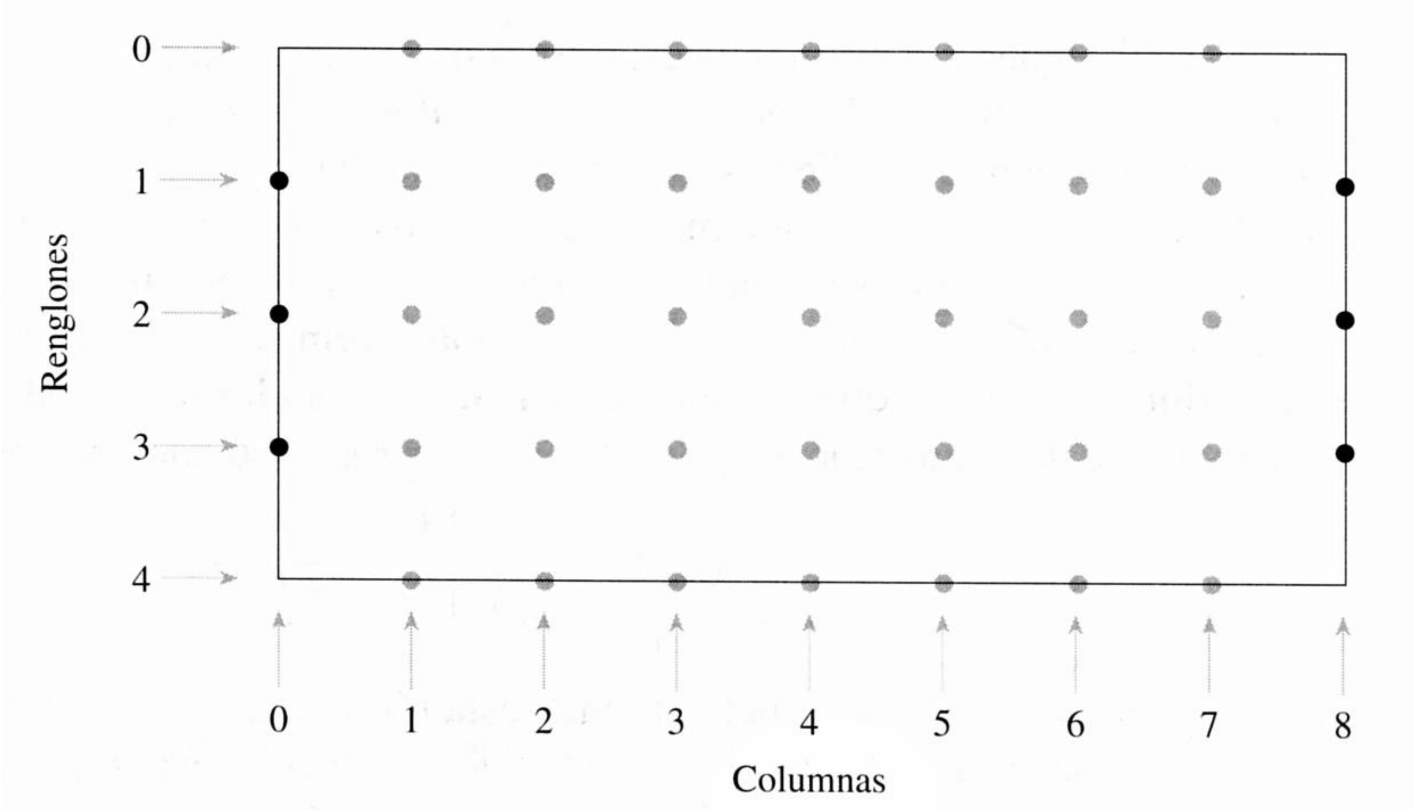


Filas 1 y 3 iguales

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

Para aumentar la precisión hay que disminuir el valor de h, pero el número de incógnitas aumenta rápidamente. Además, no es trivial definir la matriz de coeficientes para distintos valores de h.

En realidad, se trata de matrices dispersas y diagonalmente dominantes. Los métodos más adecuados son los métodos iterativos. Es conveniente reestructurar los índices:



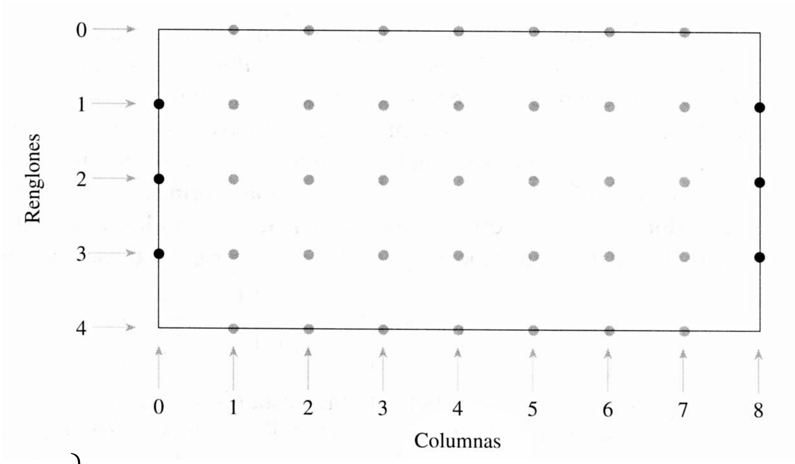
Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

Para el elemento de la fila i y la columna j, tenemos:

arriba + izquierda   dereca + abajo

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j}}{h^2} = 0$$



Eliminamos la h y reordenamos para cada incógnita:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j}\right)$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{array}\right\} u_{i,j}$$

h*h desaparece por la ecuación que es, esto no siempre pasa. En Laplace hay un cero a la derecha.

Las filas 0 y 4 y las columnas 0 y 8 son los valores en la frontera (las esquinas no son necesarias).

Se van haciendo iteraciones para la ecuación genérica anterior. Como primera iteración se puede tomar $u_{i,j}=0$, o bien tomar algún promedio de los valores de frontera, como por ejemplo una interpolación.

Se puede acelerar la convergencia utilizando sobrerrelajación:

$$u_{i,j} = u_{i,j} + \omega \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j}}{4} \quad ; \quad 1 \le \omega < 2$$

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

```
norma = norm(u)
max_dif = amax(abs(u-u_anterior))
```

```
norma – norma_anterior ≤ epsilon
max_dif ≤ epsilon
```

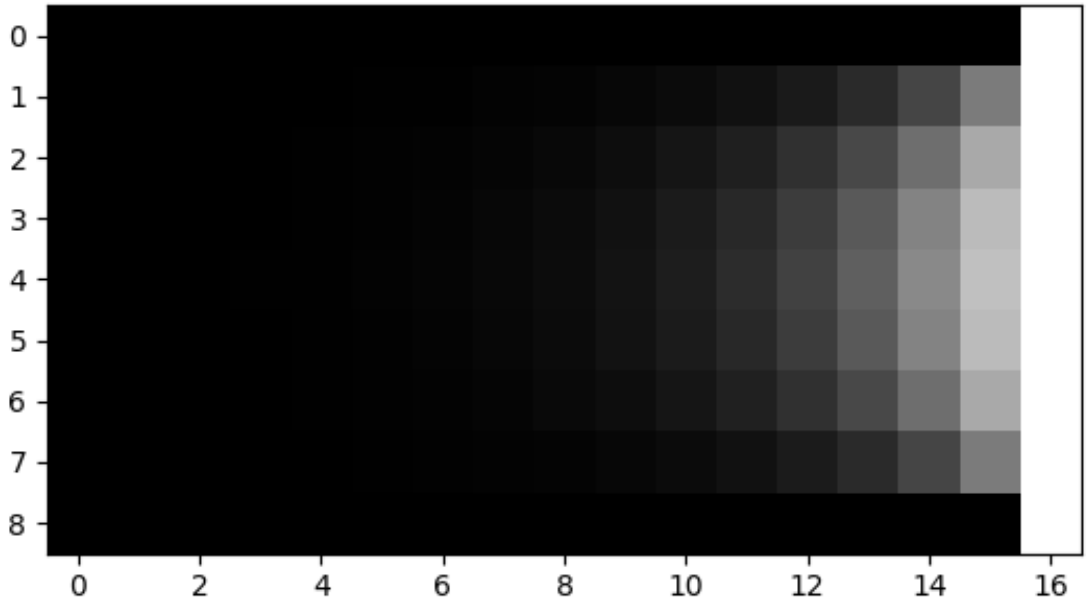
Los valores de las fronteras NO deben cambiar durante las iteraciones.

Para representar mapas de valores se usa `imshow()`. El criterio que hemos seguido a la hora de indexar las filas y columnas, con j para la coordenada x e i para la coordenada y.

Recordar las opciones `"origin"` y `"extent"` de `imshow`:

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

8x16



Tiempo de ejecución directo: 0.0009961128234863281 segundos

Tiempo de ejecución iterativo (norma): 0.026825904846191406 segundos

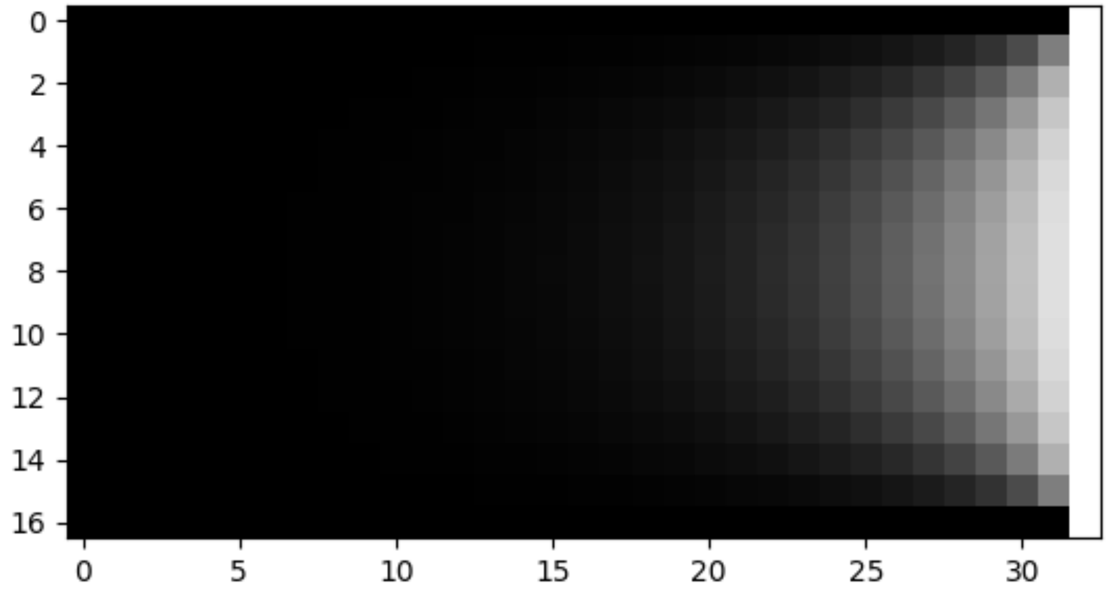
Tiempo de ejecución iterativo (dif_max): 0.03857898712158203 segundos

Número de iteraciones (norma): 59

Número de iteraciones (dif_max): 59

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

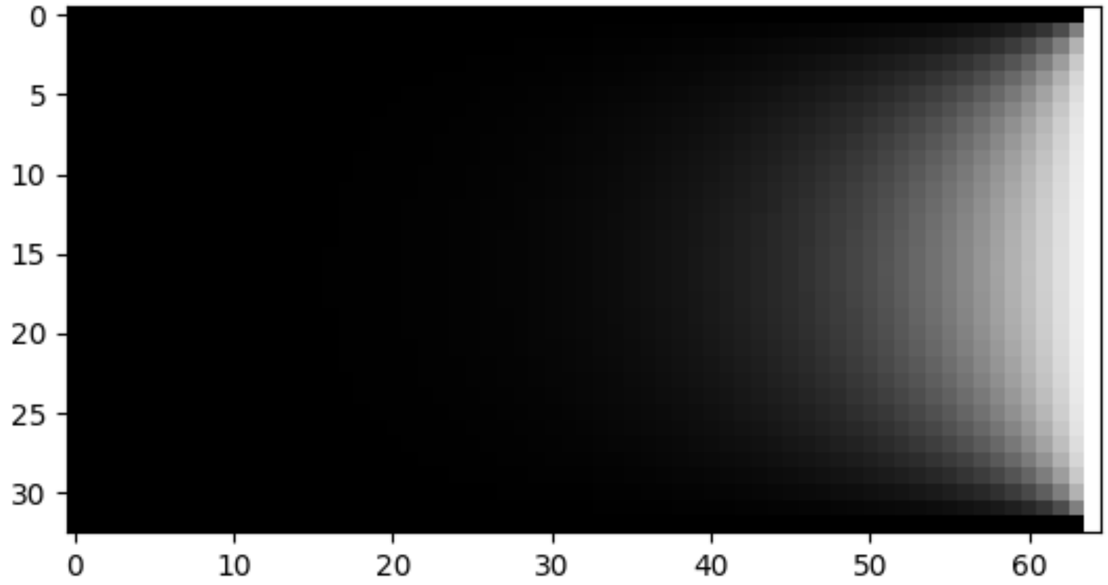
16x32



Tiempo de ejecución directo: 0.05086684226989746 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (norma): 0.41894006729125977 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (dif_max): 0.3944230079650879 segundos
Número de iteraciones (norma): 208
Número de iteraciones (dif_max): 208

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

32x64

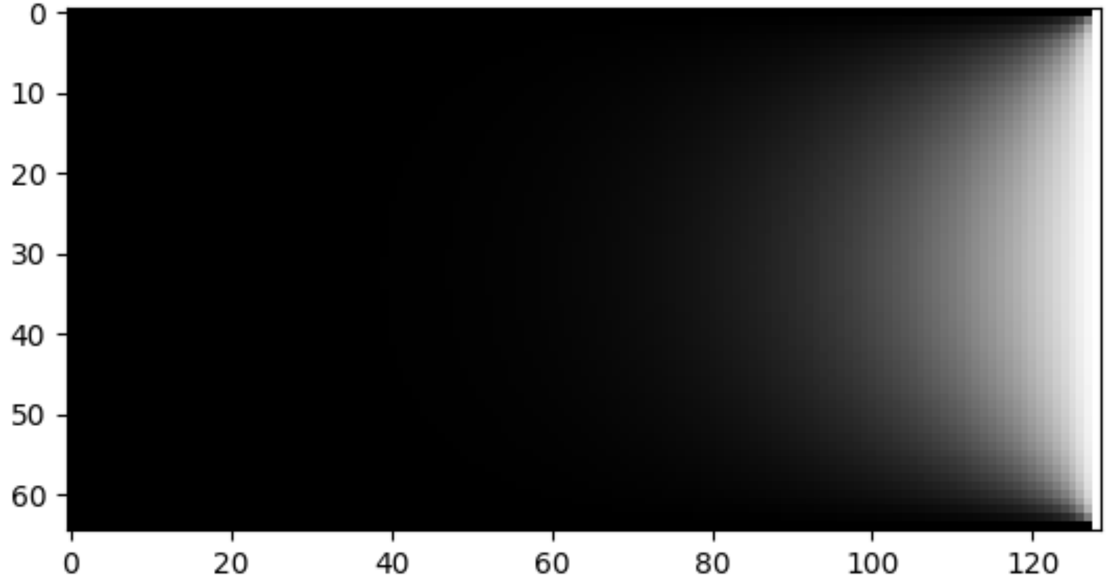


Tiempo de ejecución directo: 0.7138991355895996 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (norma): 5.855571985244751 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (dif_max): 5.828336954116821 segundos
Número de iteraciones (norma): 727
Número de iteraciones (dif_max): 727

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

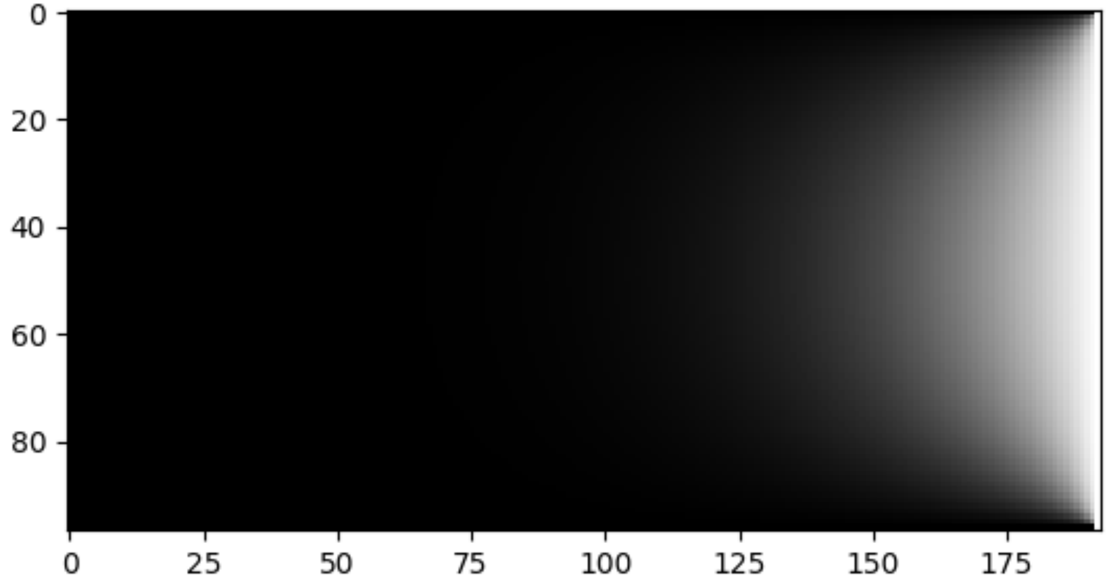
64x128



Tiempo de ejecución directo: 39.38989520072937 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (norma): 86.68925619125366 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (dif_max): 85.23738598823547 segundos
Número de iteraciones (norma): 2493
Número de iteraciones (dif_max): 2493

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

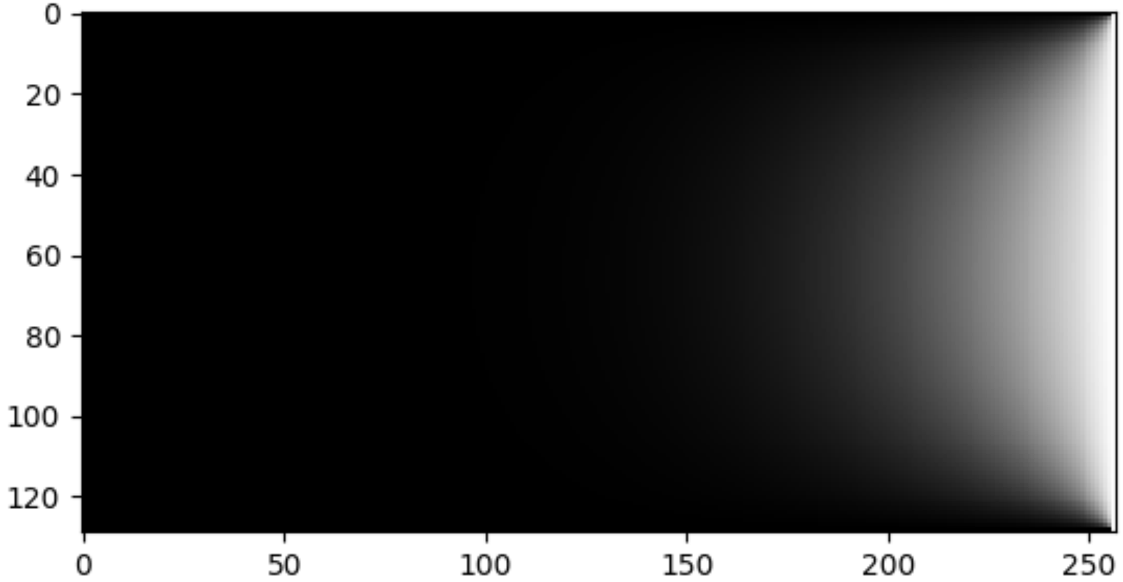
96x192



Tiempo de ejecución directo: 479.42150497436523 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (norma): 399.4576017856598 segundos
Tiempo de ejecución iterativo (dif_max): 398.92017102241516 segundos
Número de iteraciones (norma): 5077
Número de iteraciones (dif_max): 5077

5.2 EDPs elípticas: distribución de temperaturas en equilibrio

128x256



Tiempo de ejecución directo: Error de sistema

Tiempo de ejecución iterativo (norma): 1150.5419840812683 segundos

Tiempo de ejecución iterativo (dif_max): 1127.1097688674927 segundos

Número de iteraciones (norma): 8367

Número de iteraciones (dif_max): 8367

C++: 16 segundos!!

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

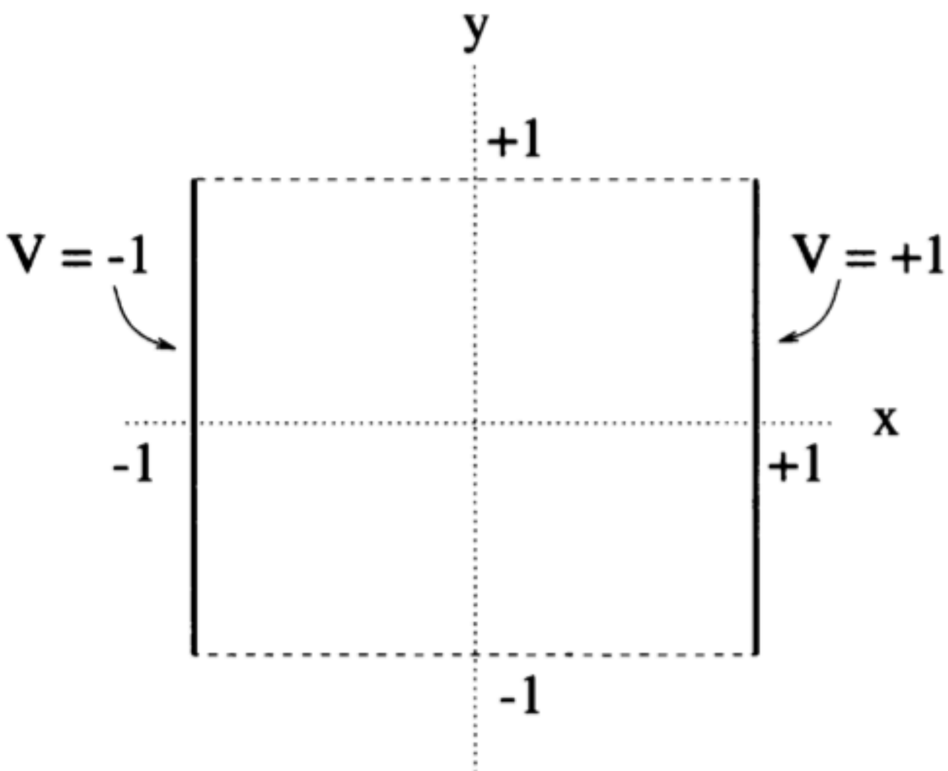
Expresión del potencial eléctrico en 3 dimensiones mediante diferencias finitas:

$$V(i,j,k)=\frac{1}{6}\left[V(i+1,j,k)+V(i-1,j,k)+V(i,j+1,k)+V(i,j-1,k)+V(i,j,k+1)+V(i,j,k-1)\right]$$

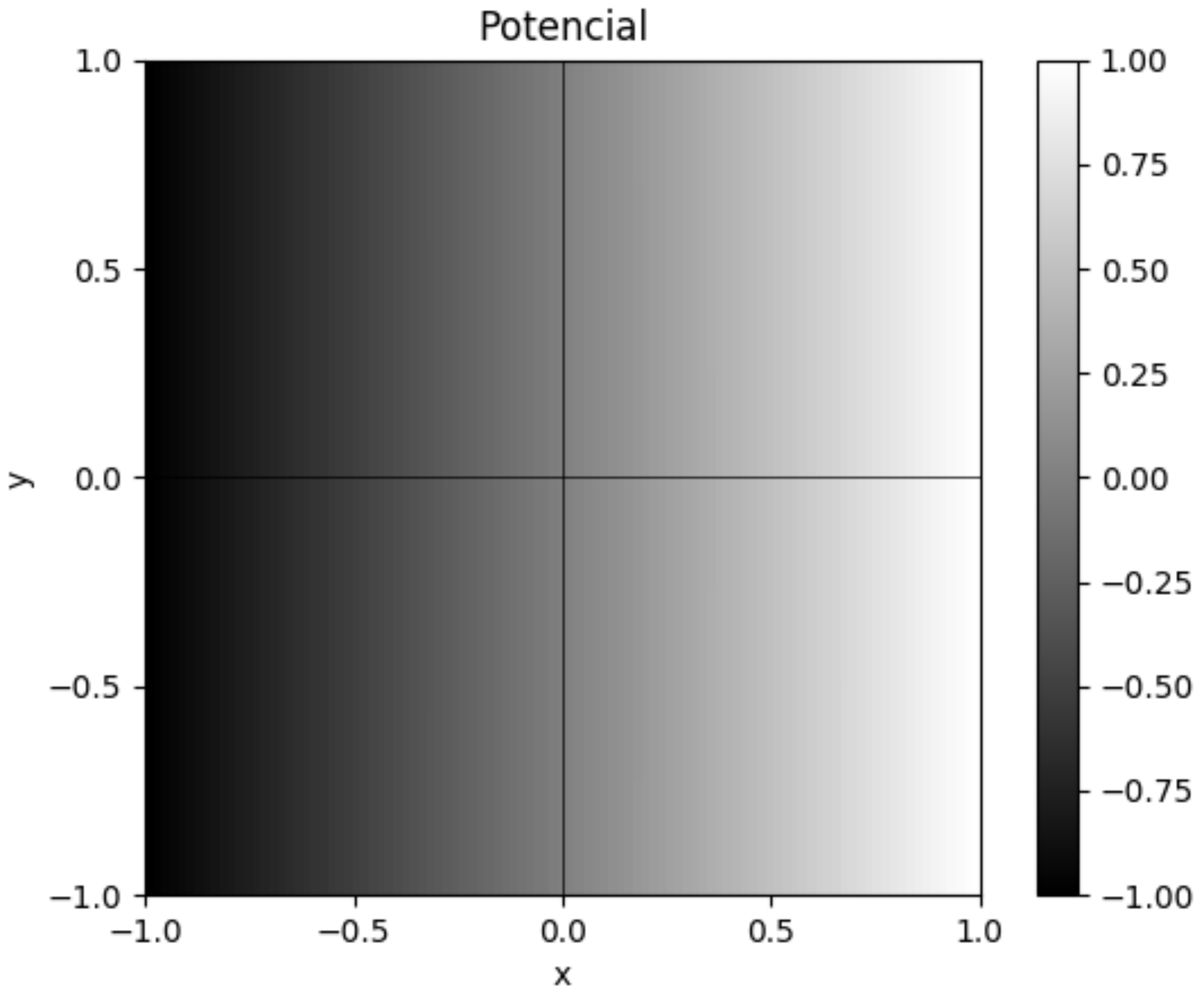
En 2 dimensiones:

$$V(i,j,k)=\frac{1}{4}\left[V(i+1,j)+V(i-1,j)+V(i,j+1)+V(i,j-1)\right]$$

Problema:

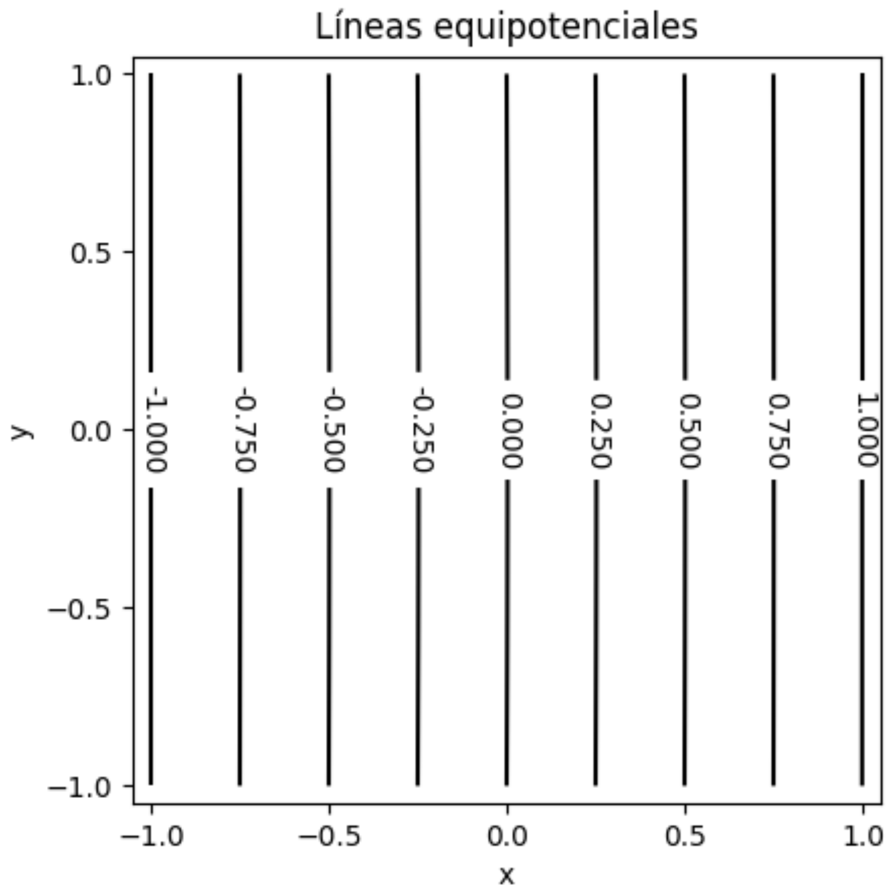


5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



imshow(u,T',origin="lower",extent=[-1,1,-1,1]

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico




```
cs=contour(x,y,u,colors="k")

clabel(cs)
```

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

Cálculo del campo eléctrico a partir de los valores obtenidos para el potencial:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

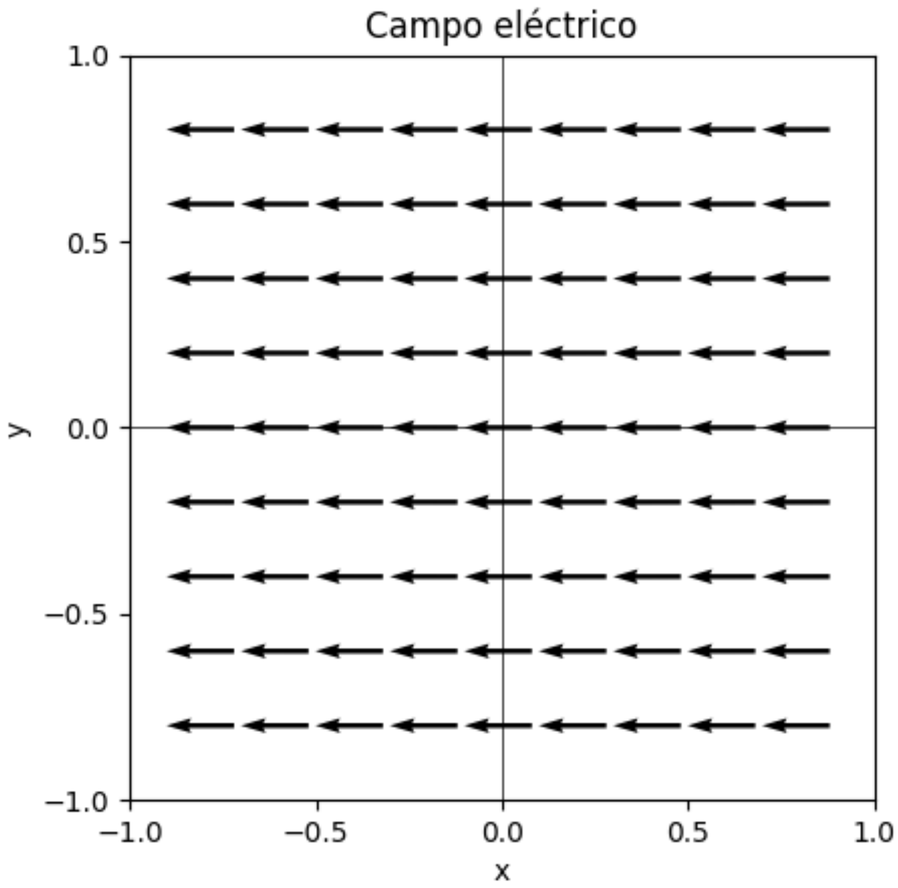
Expresado como diferencias centrales:

$$E_x(i,j) = -\frac{V(i+1,j) - V(i-1,j)}{2h}$$

$$E_y(i,j) = -\frac{V(i,j+1) - V(i,j-1)}{2h}$$

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

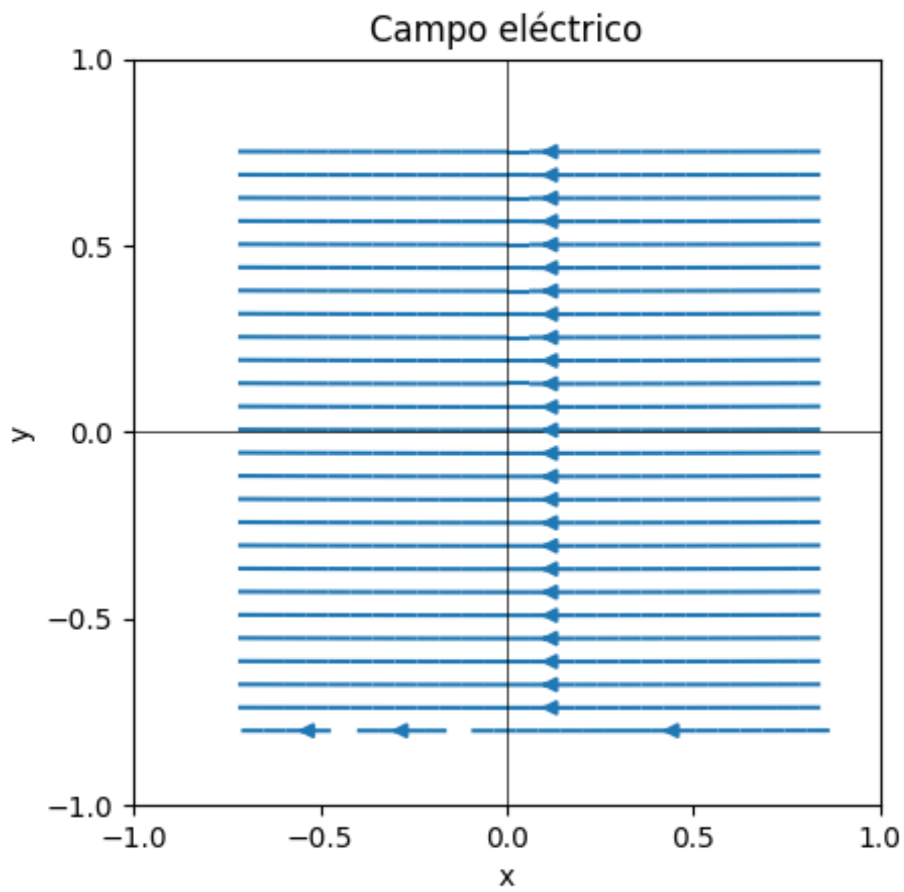
Pintada 1 de cada 10 flechas que te salen




```
quiver(x,y,Ex,Ey)
```

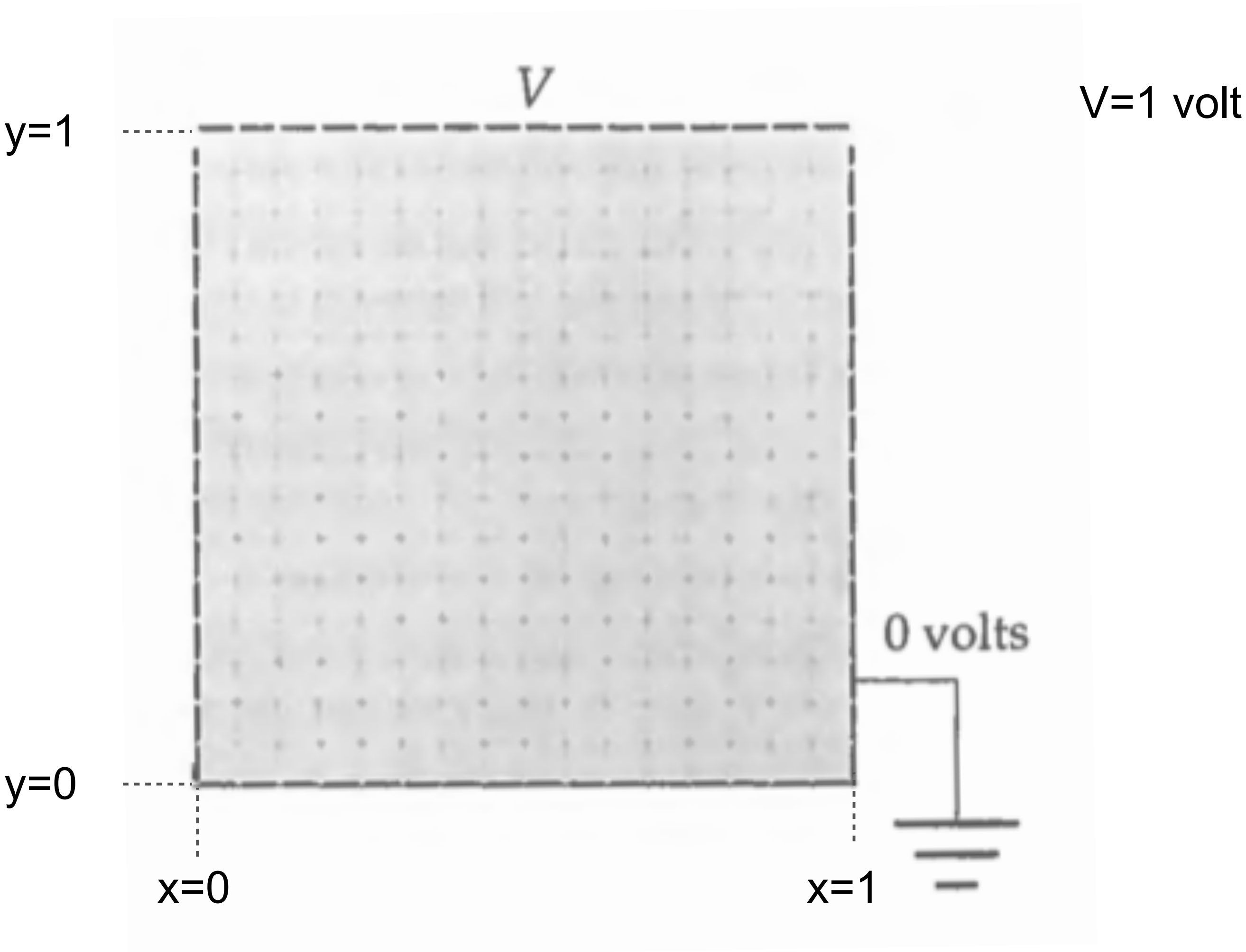
Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico




```
streamplot(x,y,Ex,Ey)
```

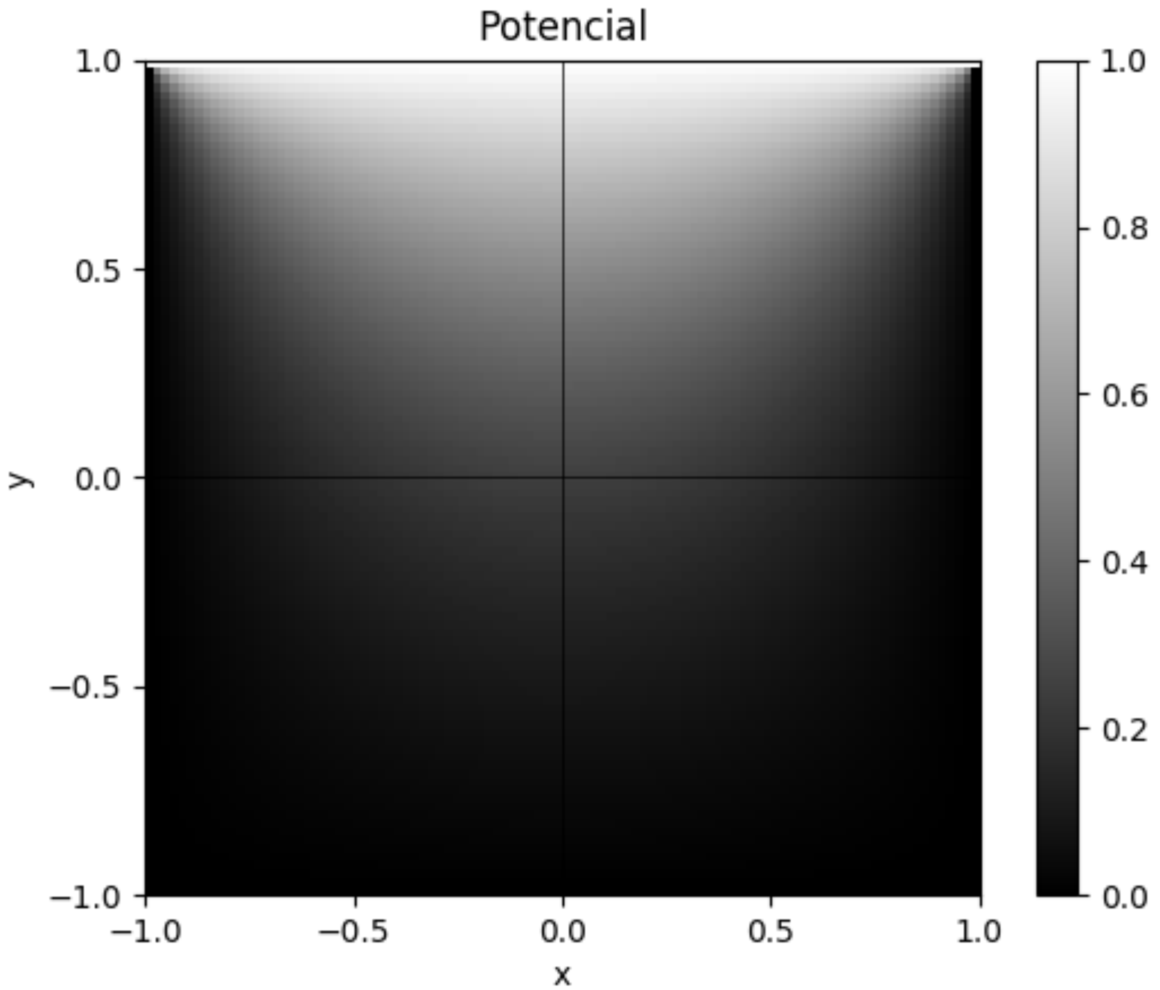
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



Con estos métodos nunca obtenemos soluciones exactas, debido a la discretización de la malla y a la tolerancia que utilicemos.

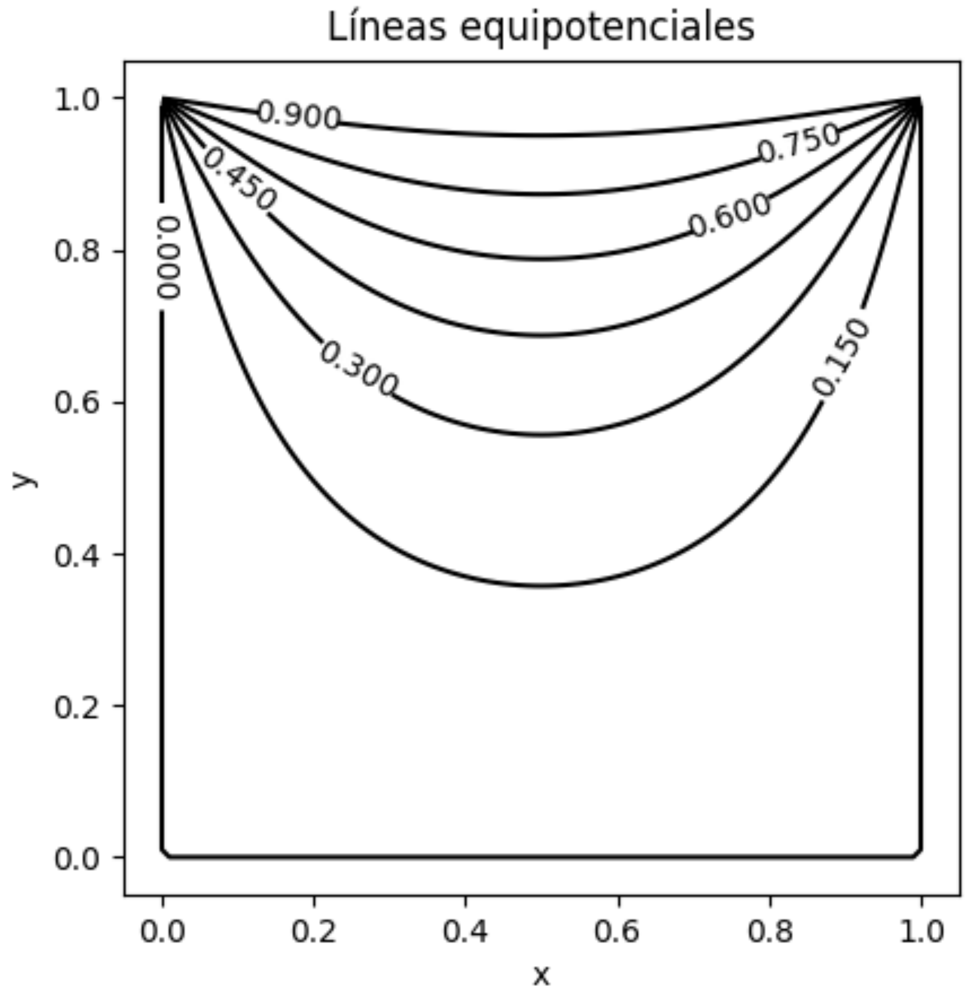
Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

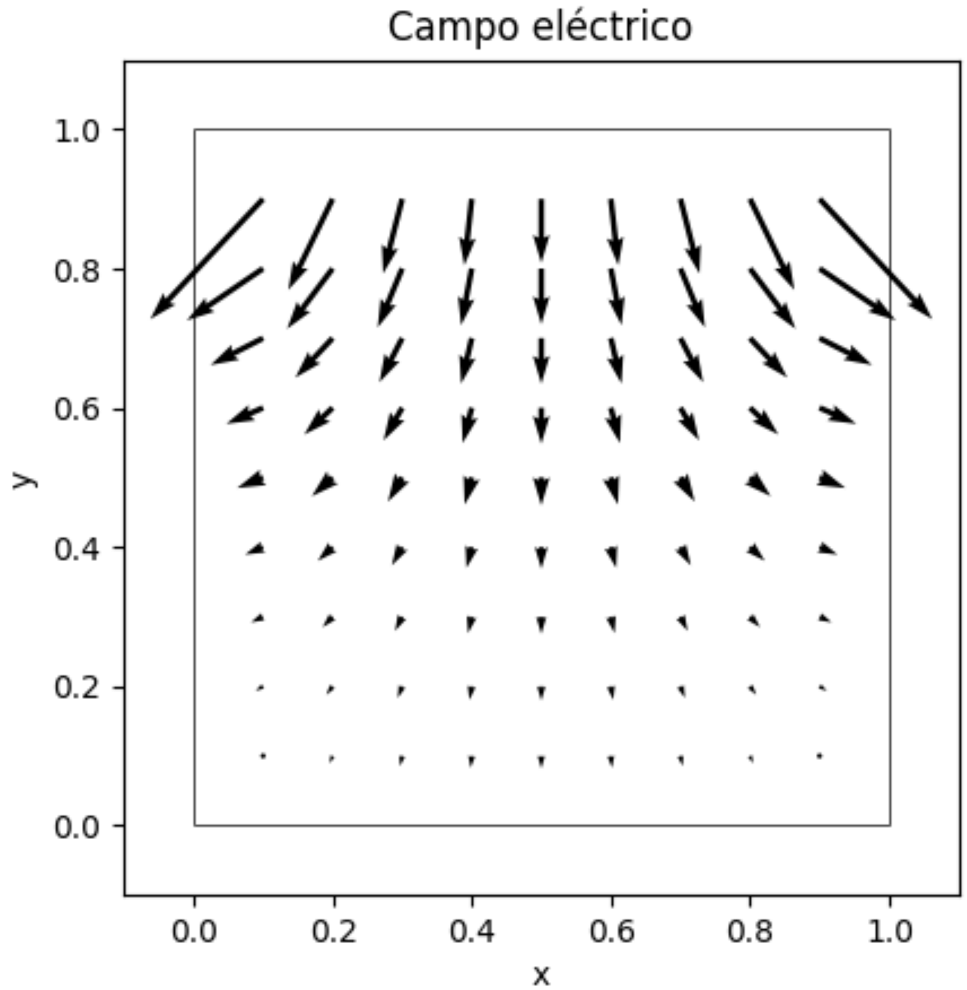


Las soluciones no dependen de las coordenadas espaciales, es decir si la malla mide 1 metro obtenemos los mismo que si mide 1 kilómetro.

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

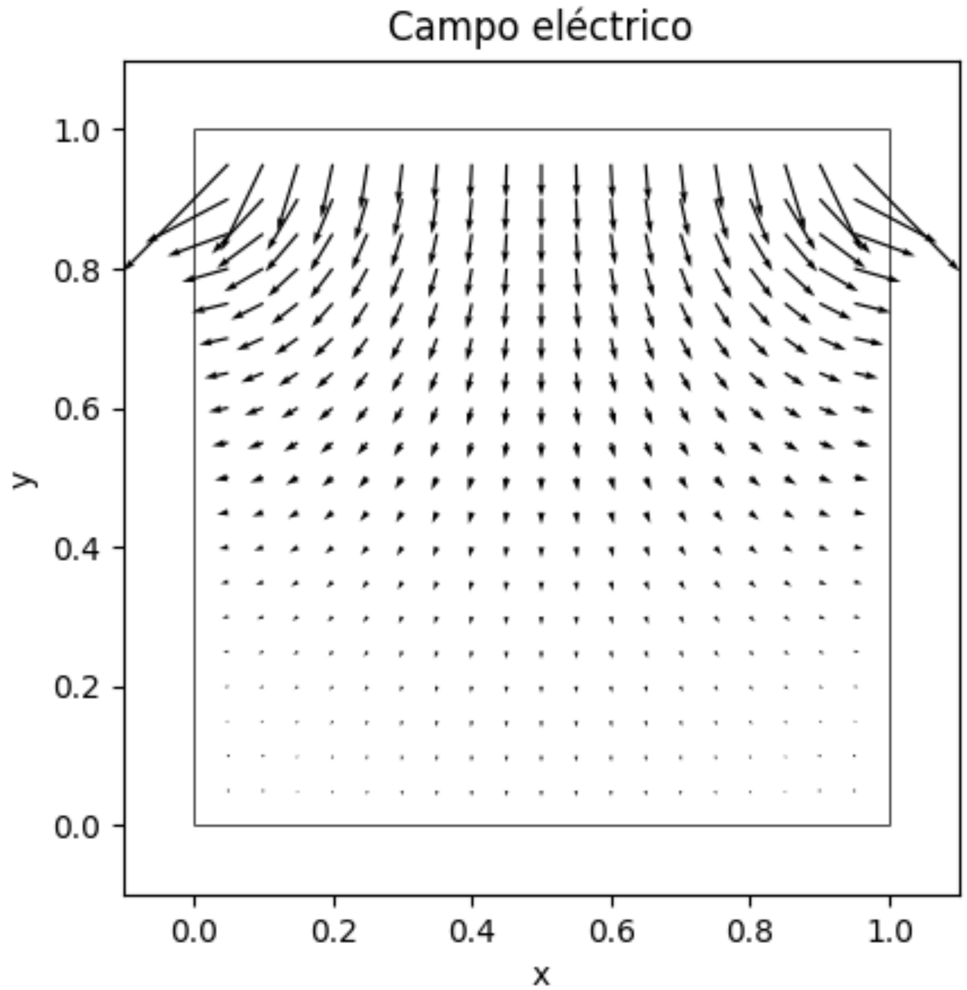


5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

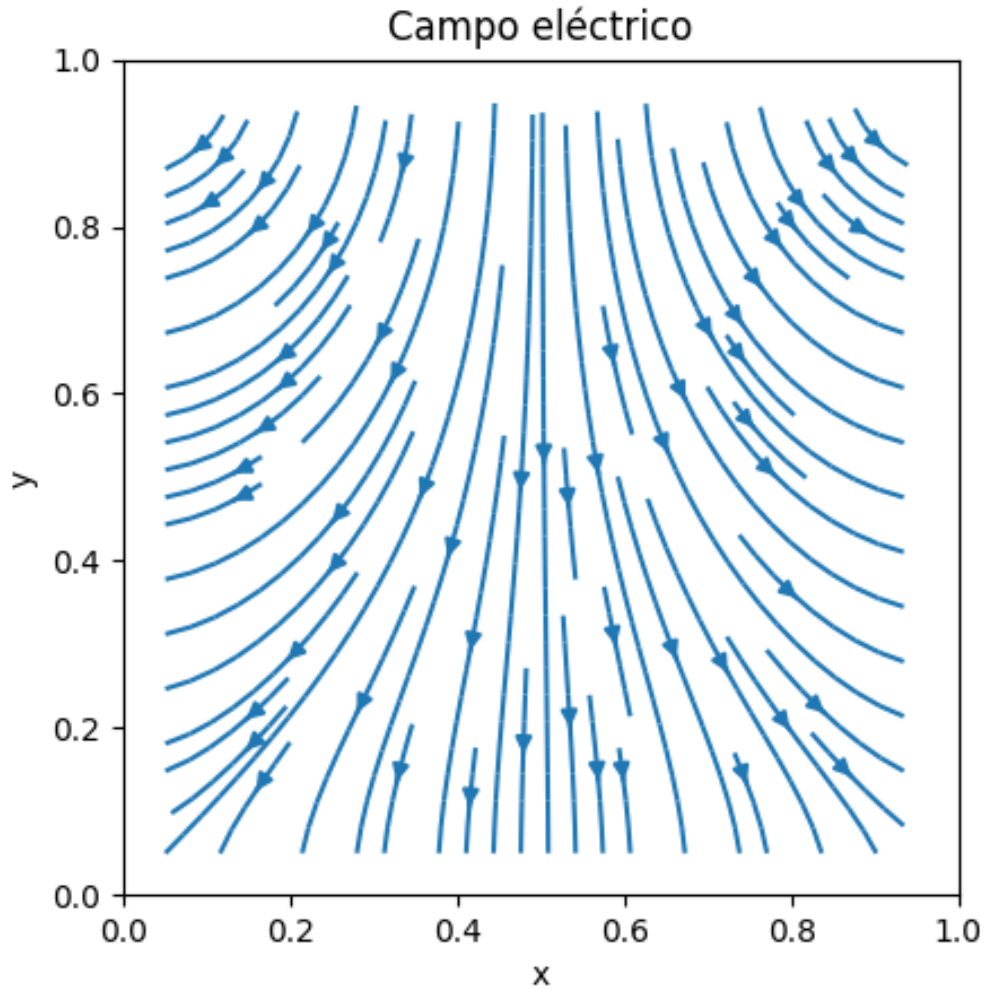


El campo eléctrico si que depende de las coordenadas espaciales. No tiene la misma apariencia el caso 1x1 metros que 1x1 kilómetros.

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

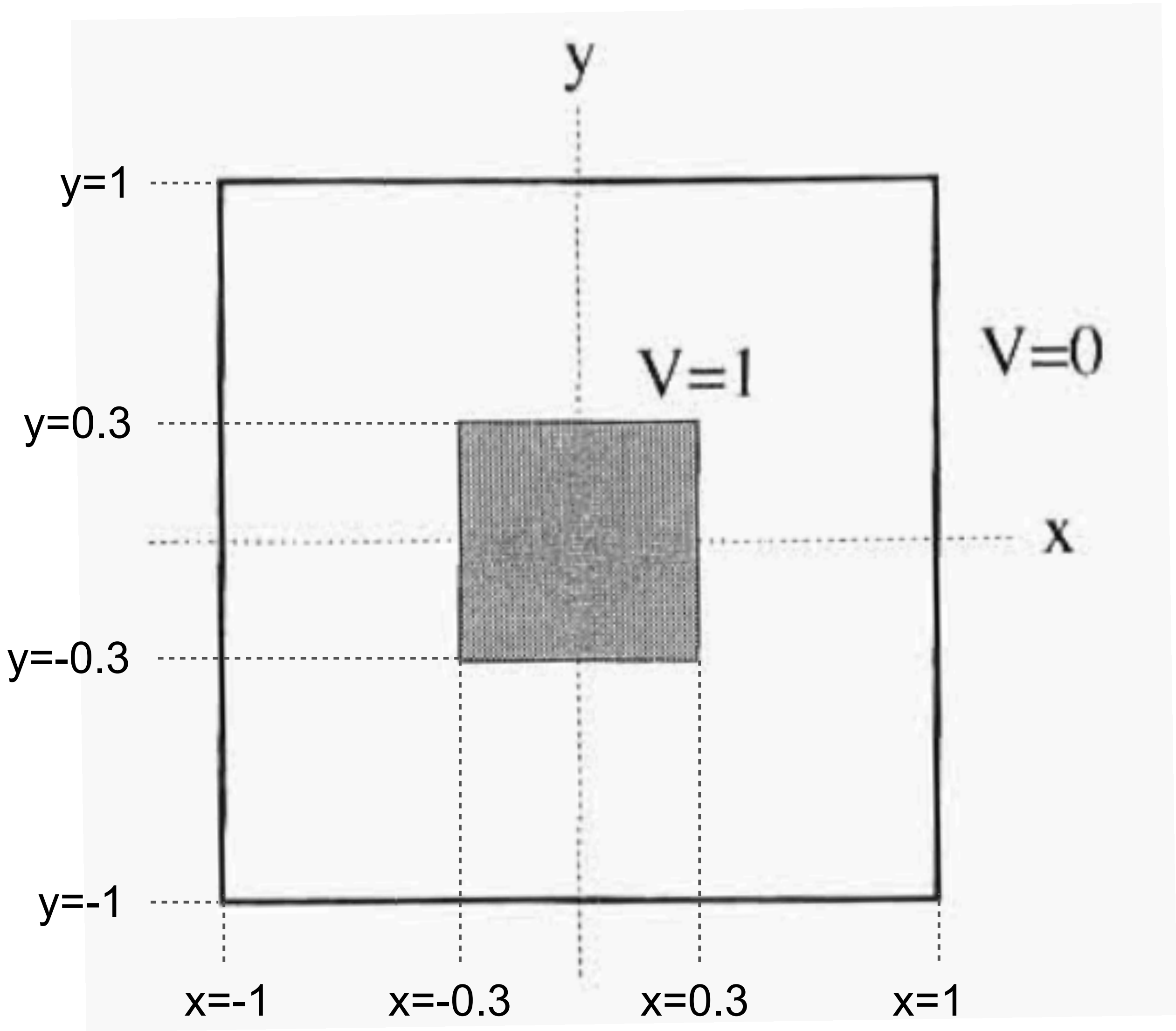


5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



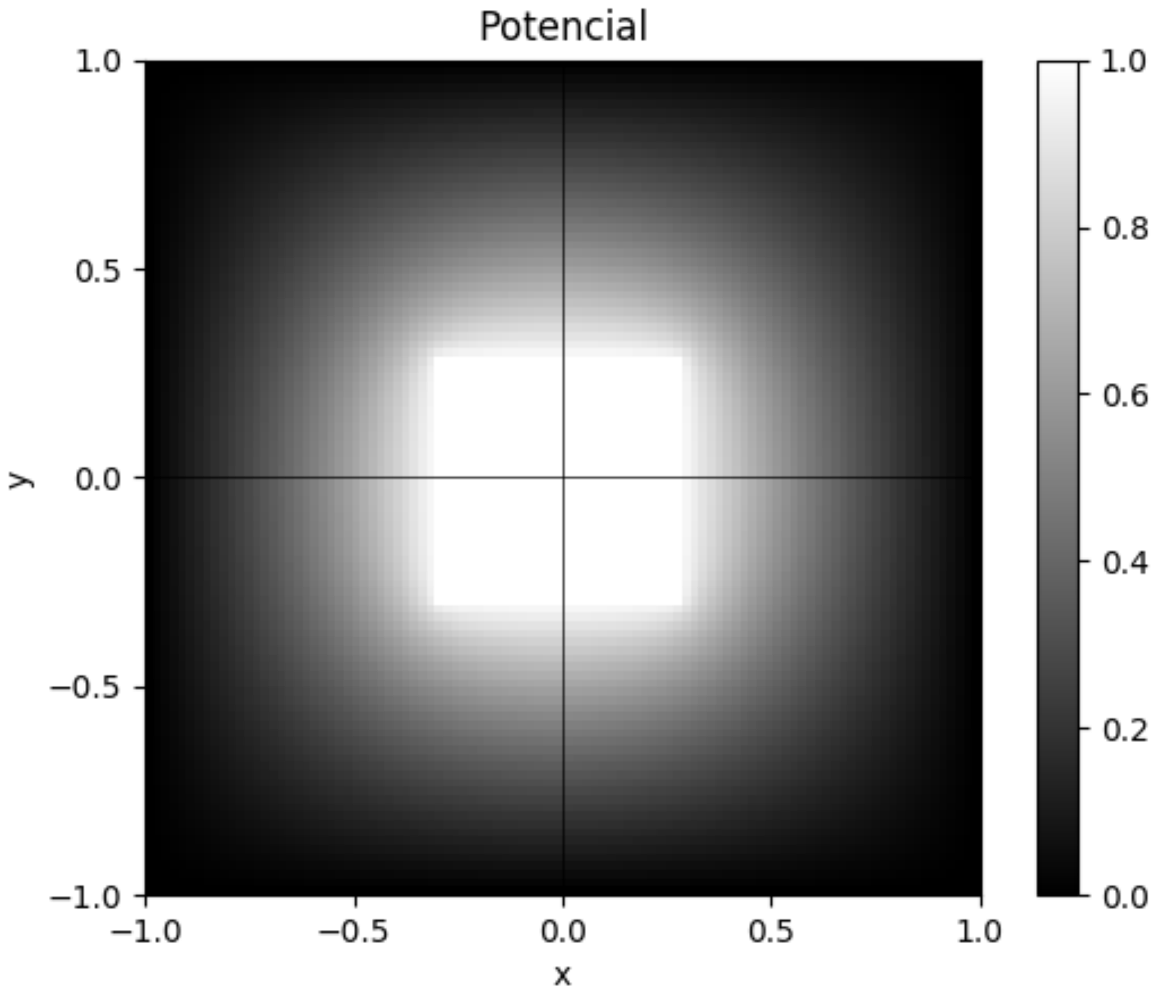
Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

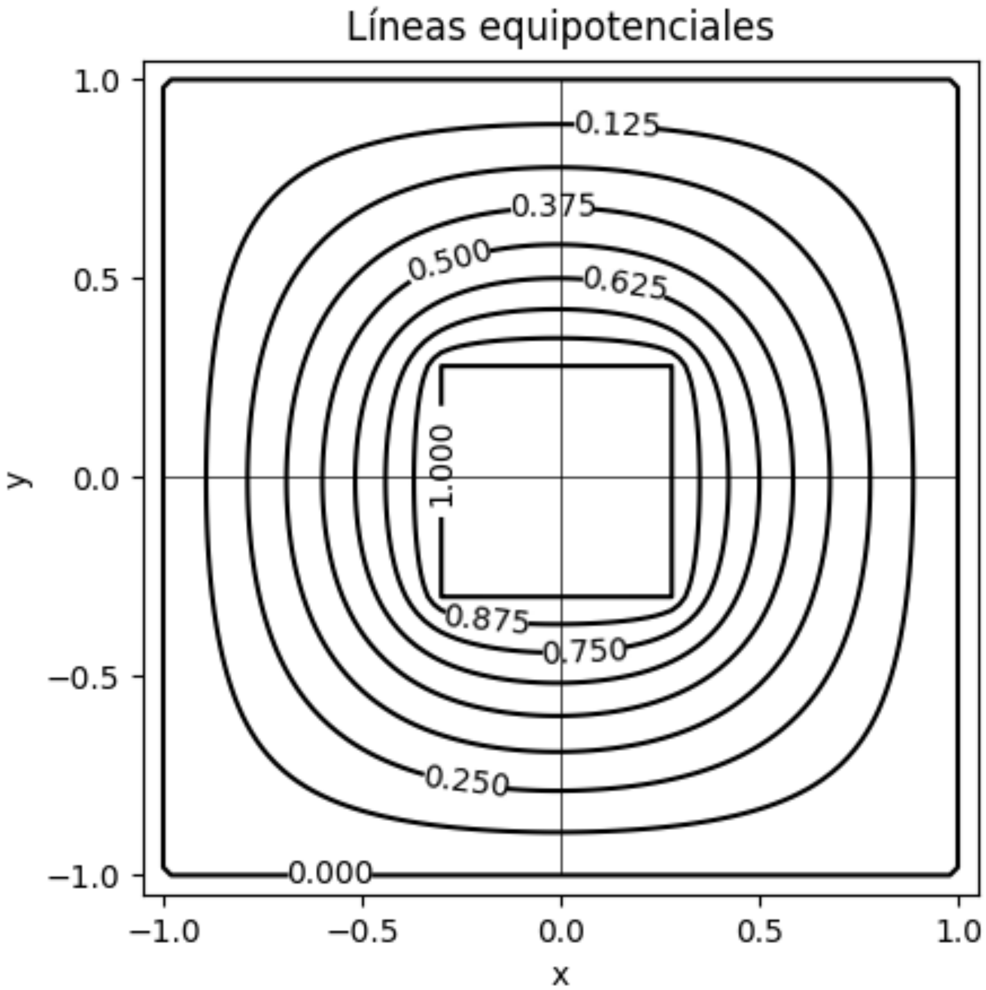


Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

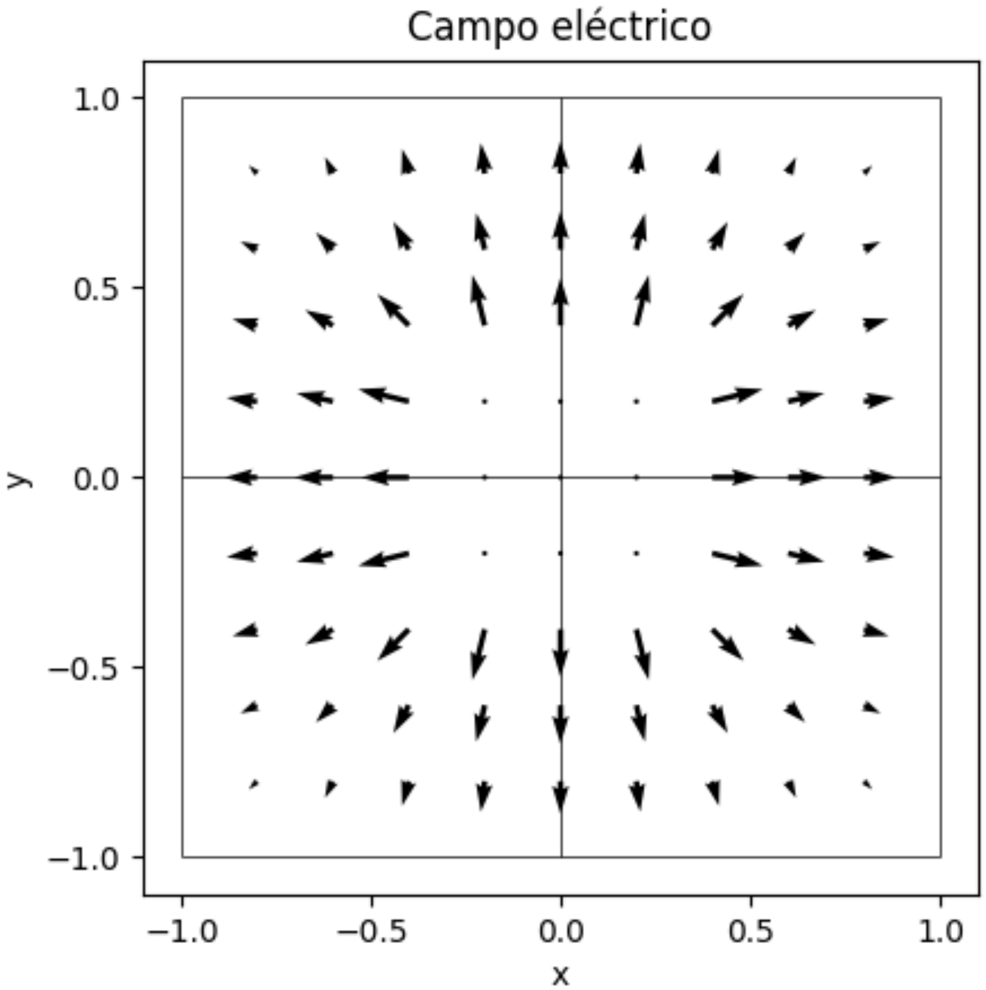


5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

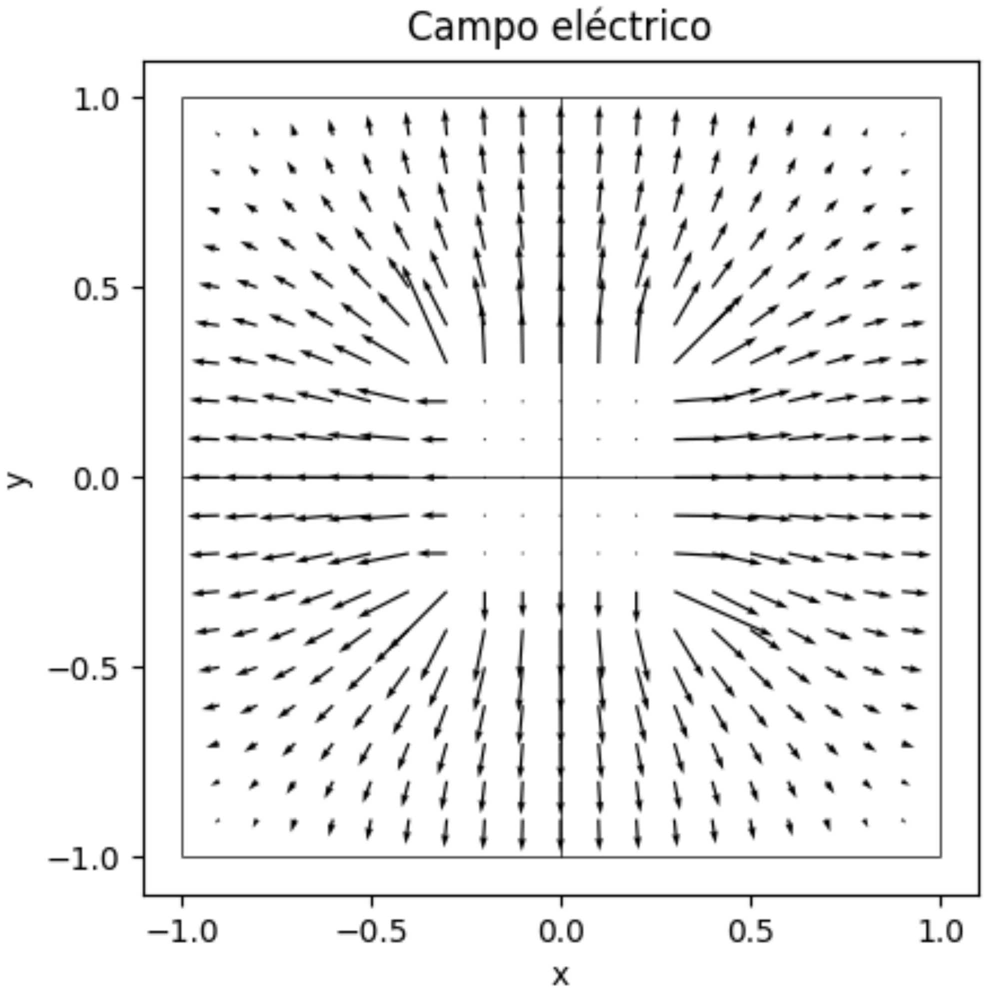


Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

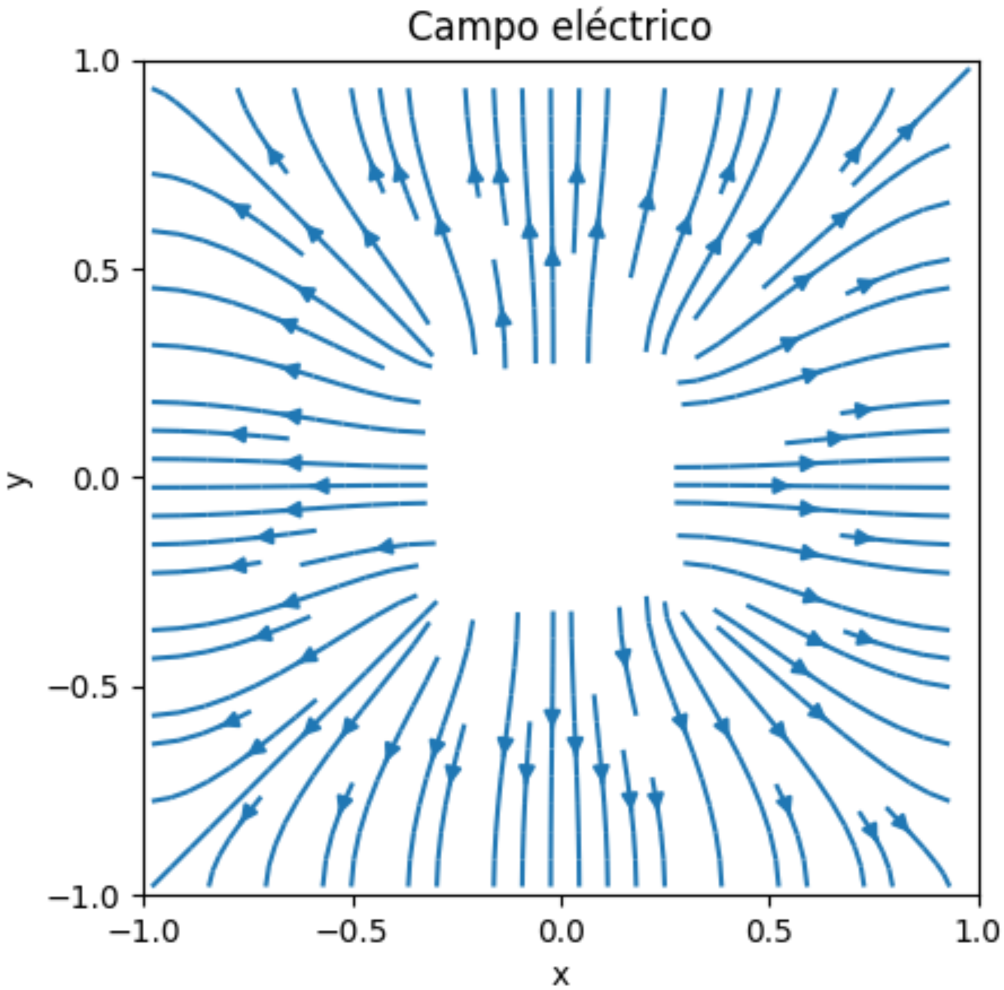
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



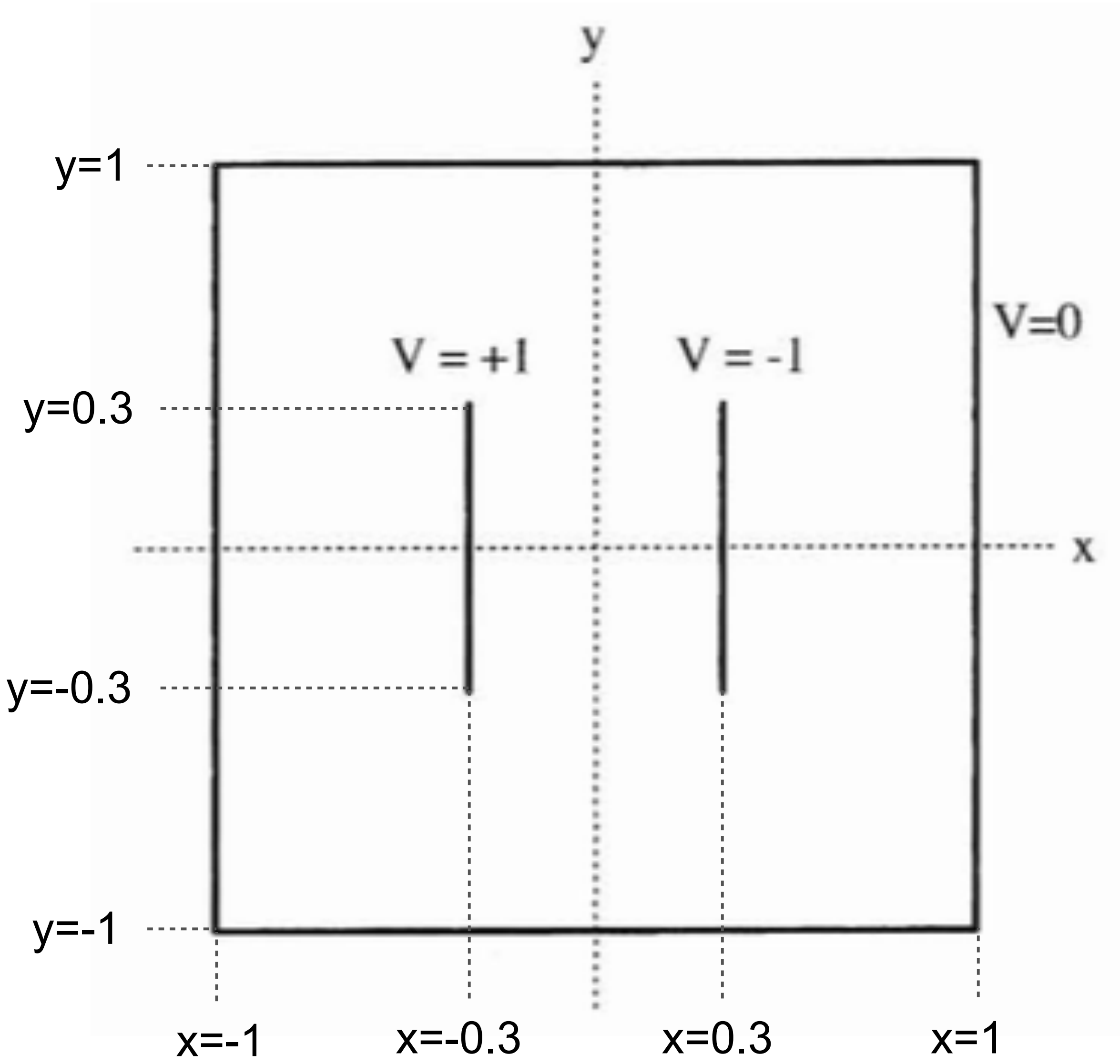
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



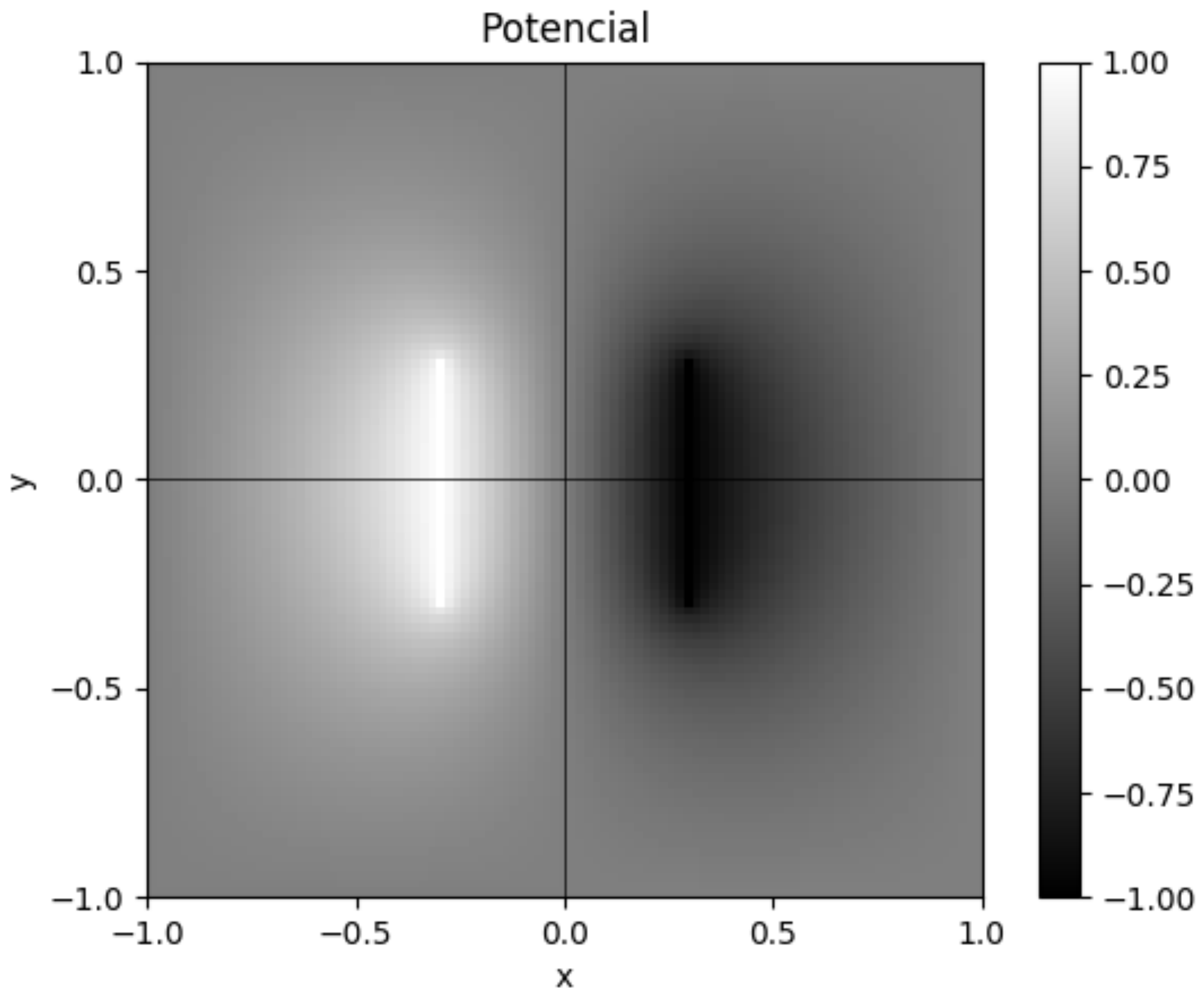
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



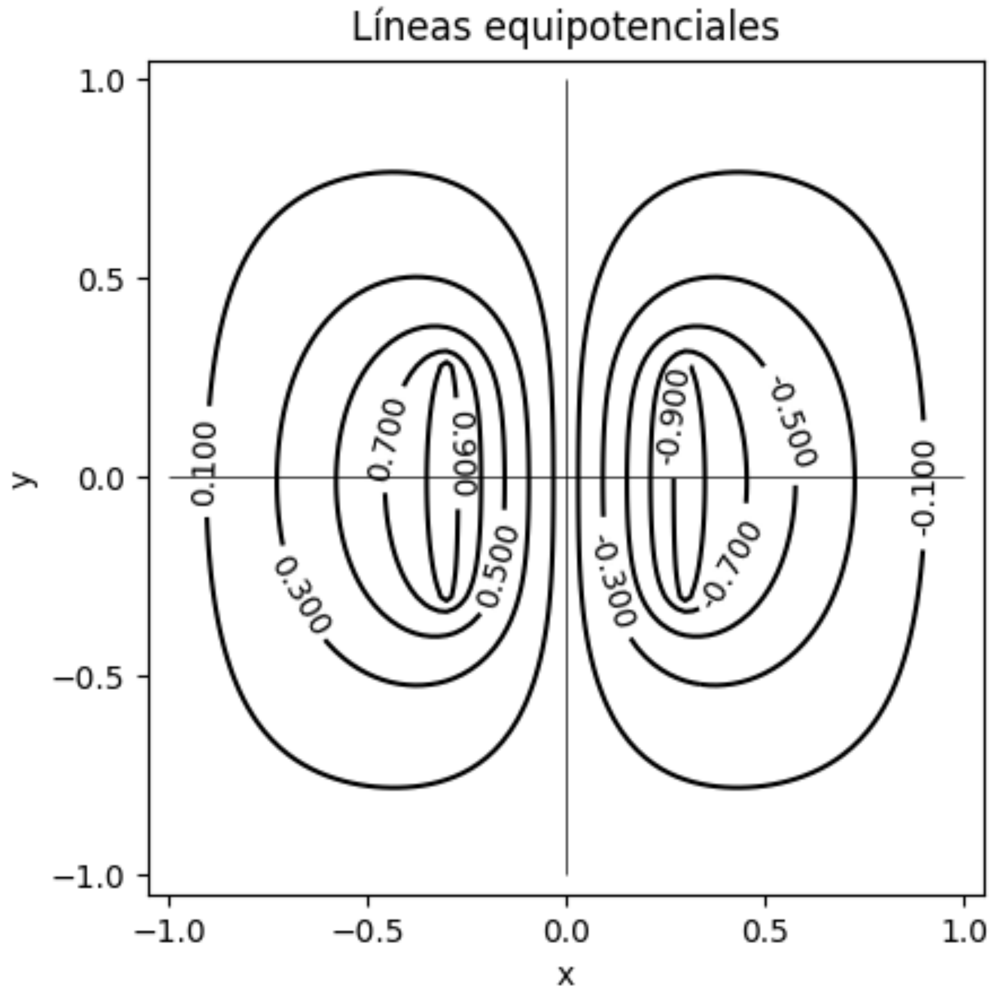
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

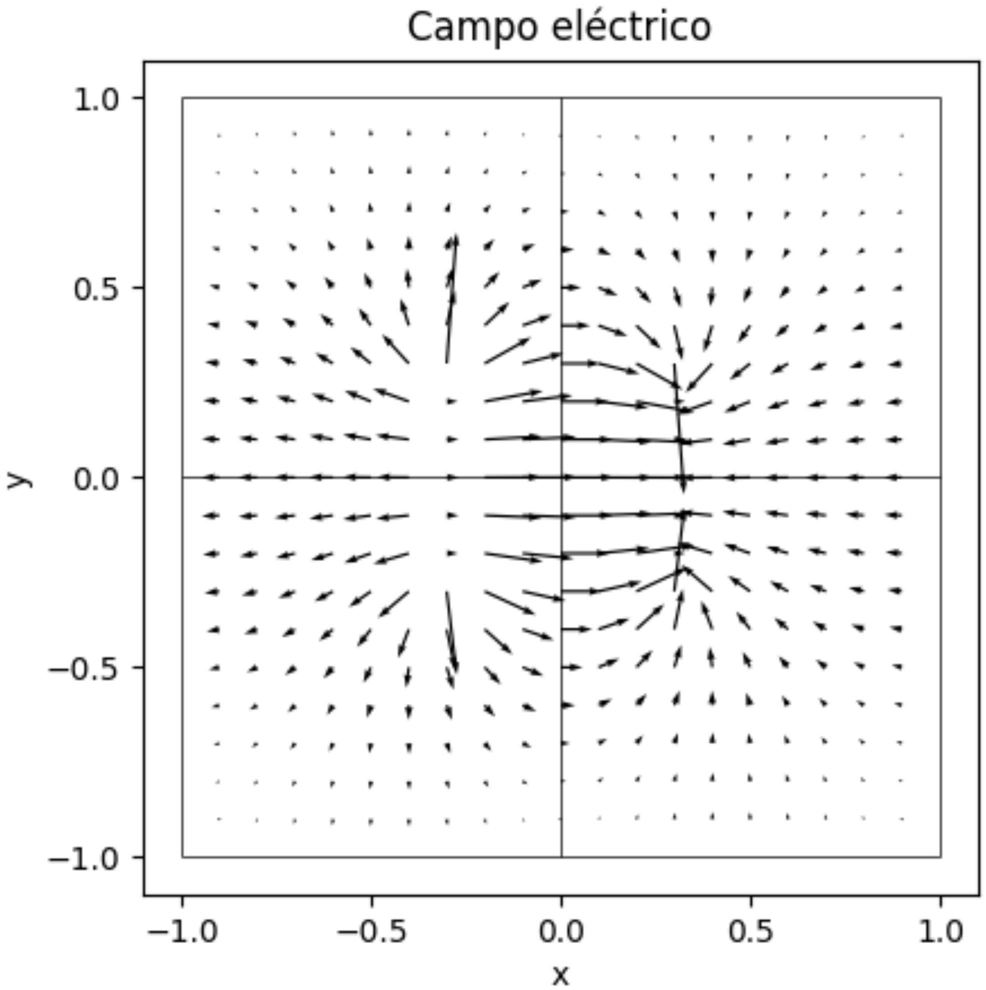


5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

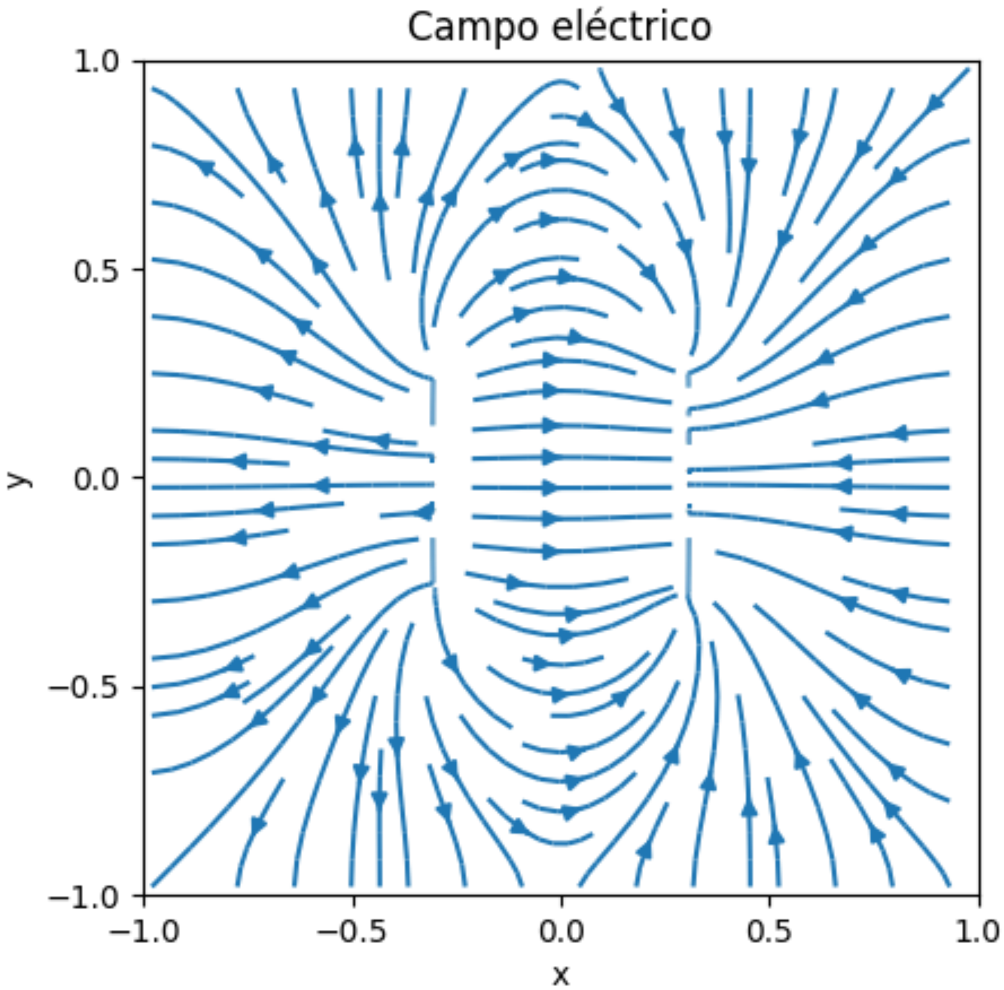


Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

En presencia de cargas eléctricas:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

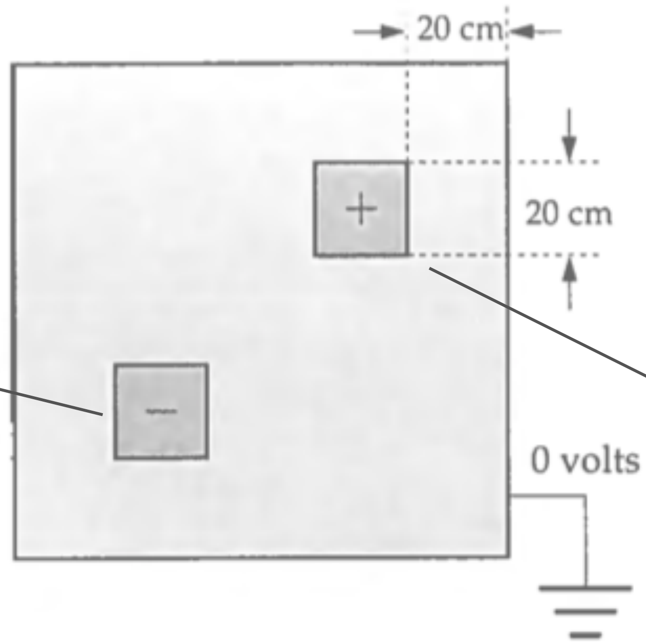
$$V(i,j,k) = \frac{1}{6}\left[V(i+1,j,k) + V(i-1,j,k) + V(i,j+1,k) + V(i,j-1,k) + V(i,j,k+1) + V(i,j,k-1)\right] + \frac{\rho(i,j,k)\cdot h^2}{6\varepsilon_0}$$

En 2 dimensiones:

$$V(i,j,k) = \frac{1}{4}\left[V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1)\right] + \frac{\rho(i,j)\cdot h^2}{4\varepsilon_0}$$

Problema:

$\rho = -1$ C/m^2



$\rho = +1$ C/m^2

p(i,j) es una matriz también con los valores de ro en los lugares correspondientes.

E0 = 1 para parametrizarlo aunque no sean los valores reales, el sentido físico es el mismo.

5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

Para definir la matriz de ρ correctamente es conveniente utilizar el valor de h para relacionar los índices con las coordenadas espaciales:

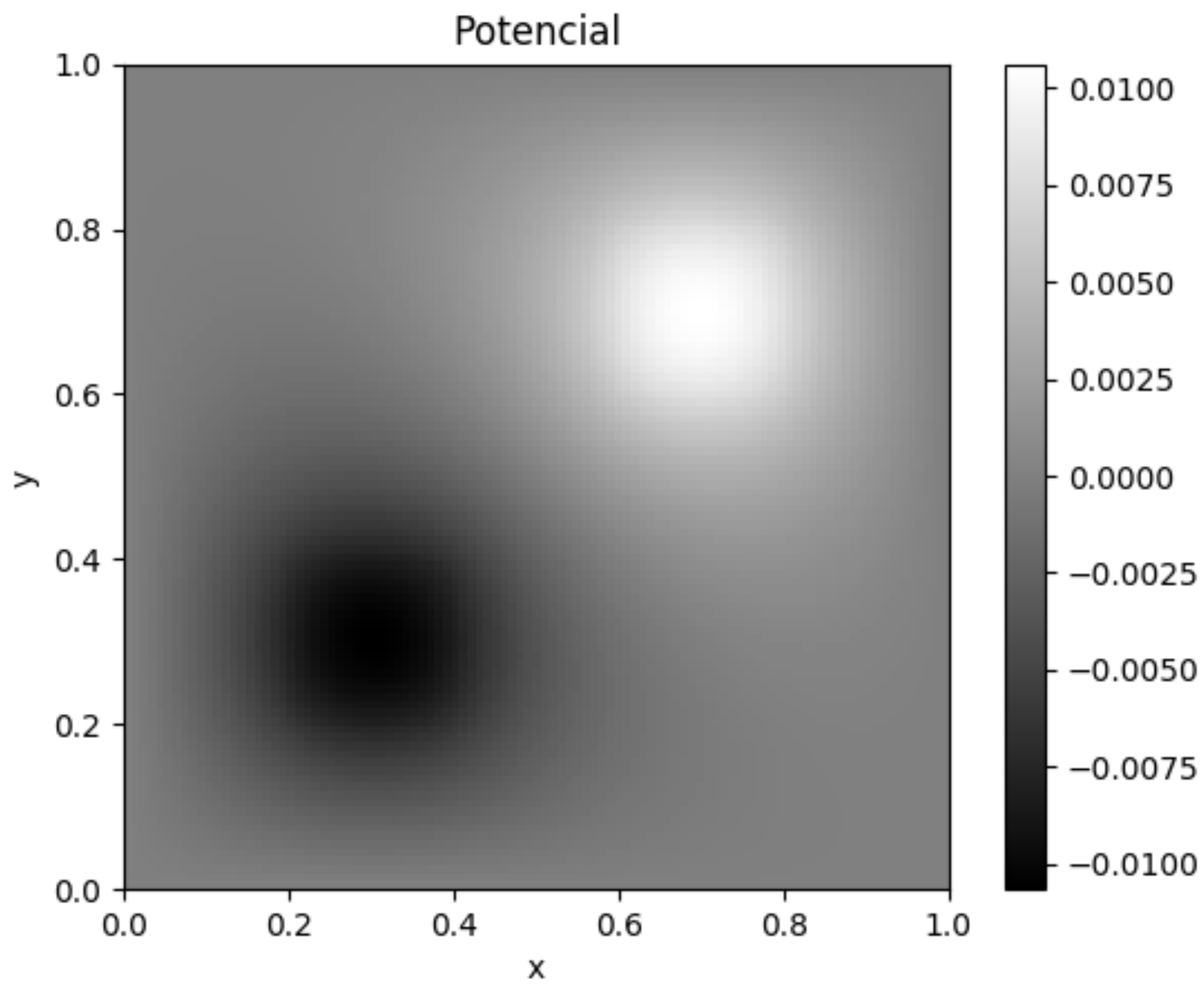
$$x(i) = h \cdot i$$
$$y(j) = h \cdot j$$

En el problema que hemos planteado, ρ es una matriz de ceros salvo para

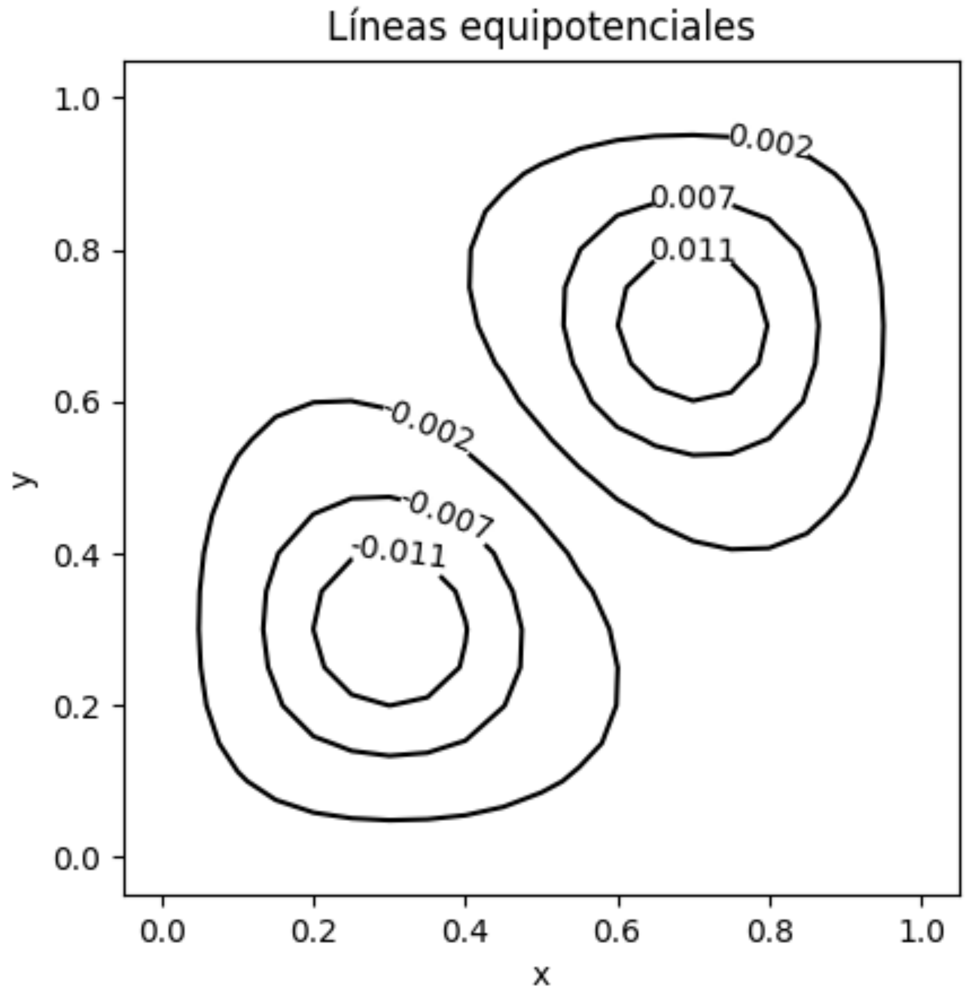
$$0.6 \leq x \leq 0.8 \quad y \quad 0.6 \leq y \leq 0.8$$
$$0.2 \leq x \leq 0.4 \quad y \quad 0.2 \leq y \leq 0.4$$

donde ρ vale 1.

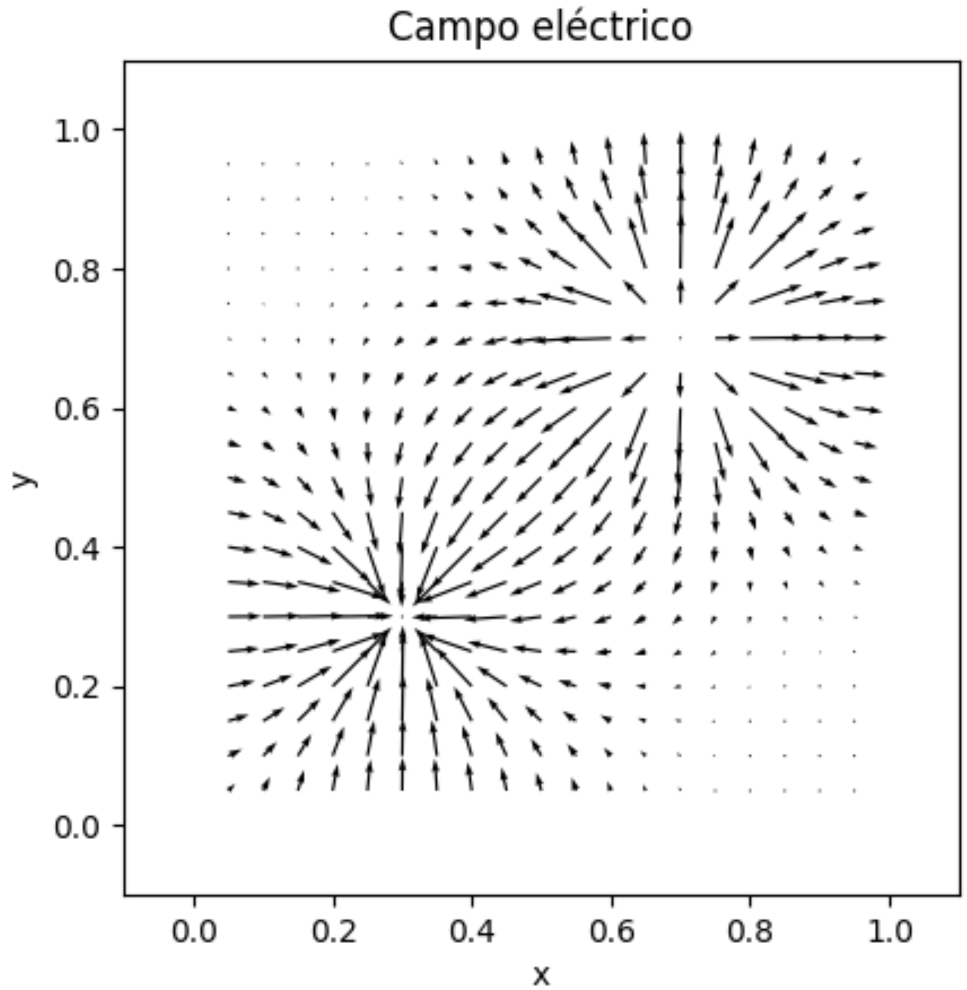
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



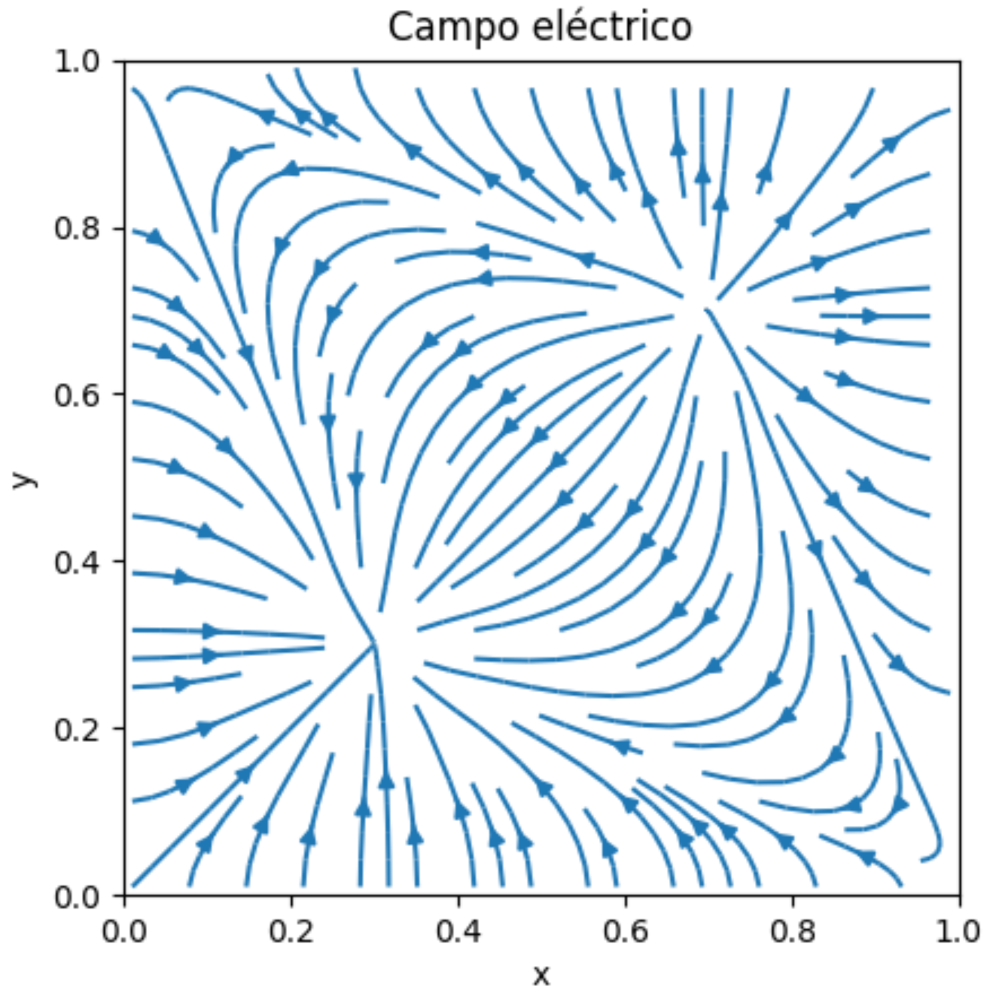
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



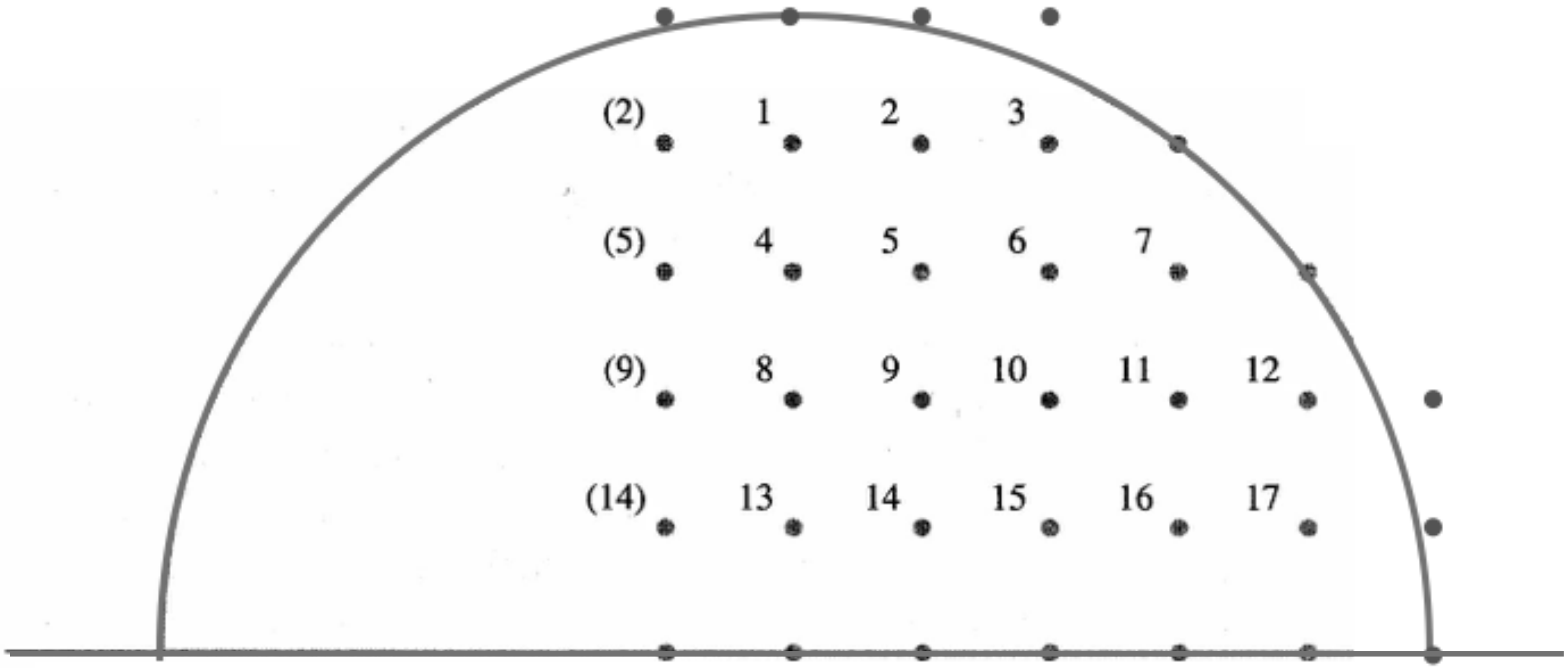
5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico



5.3 Ecuaciones de Laplace y Poisson: el potencial eléctrico

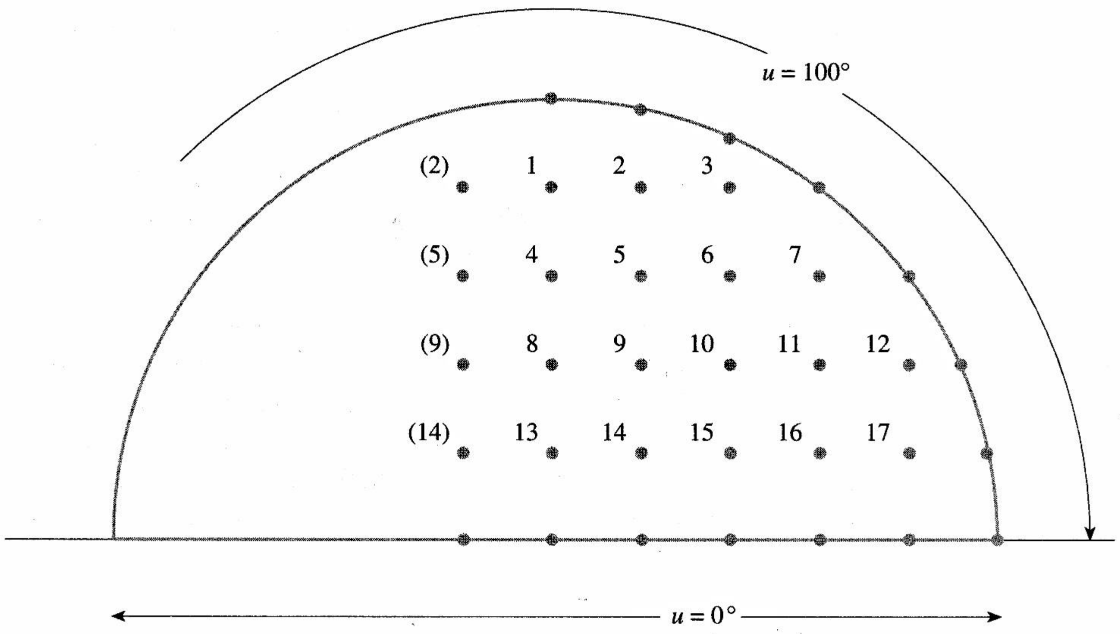


5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares



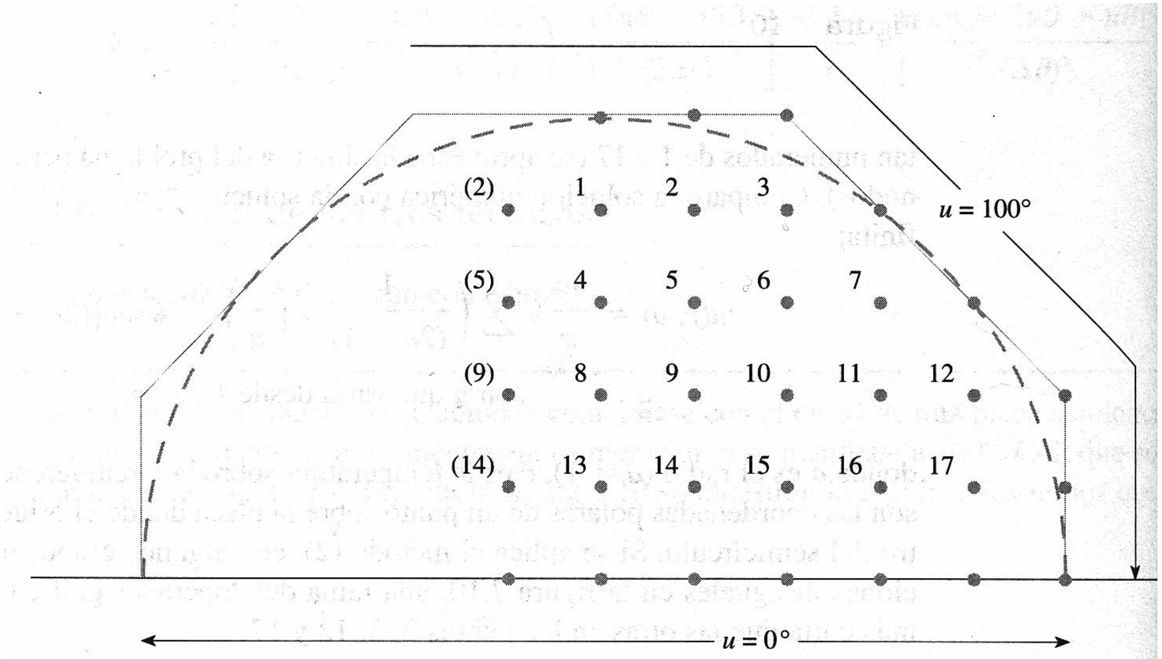
5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

1) Distorsionar la malla cerca de la frontera:



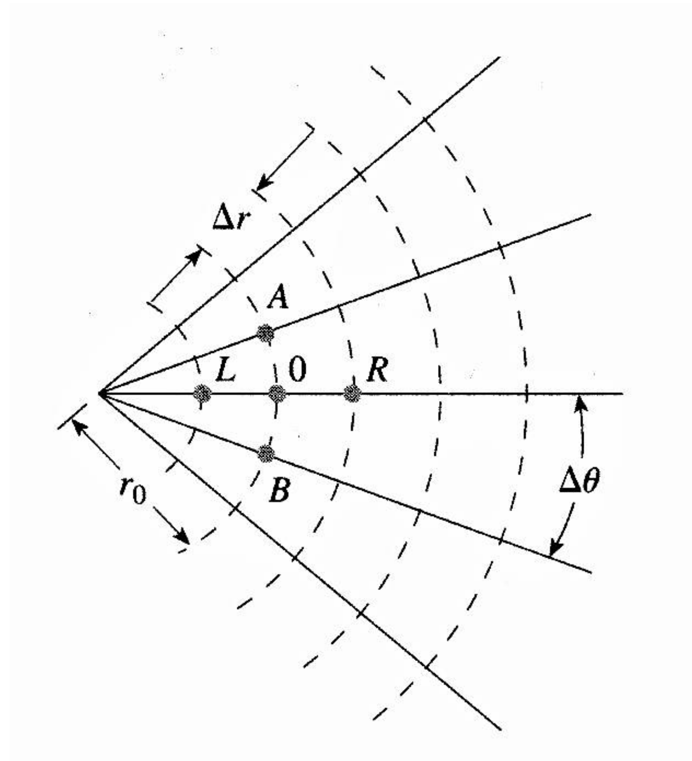
5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

2) Distorsionar la frontera para que pase por la malla:



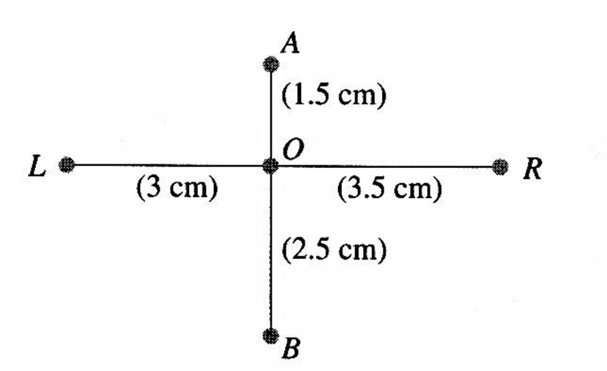
5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

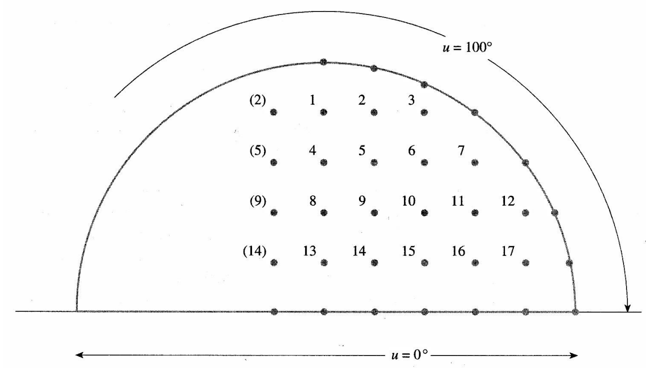
3) Utilizar un sistema de coordenadas apropiado:



5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

1) Distorsionar la malla cerca de la frontera:



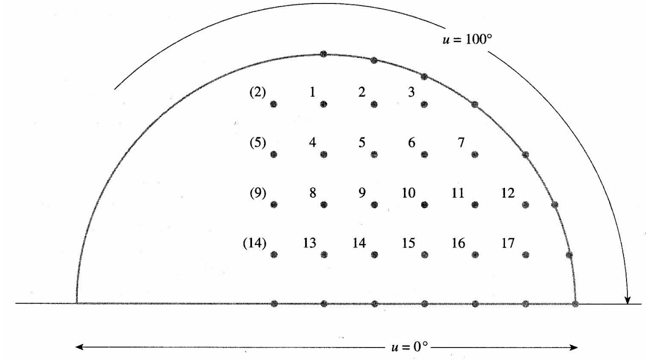


$$f''(x) = \frac{f'(x+h/2) - f'(x-h/2)}{h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

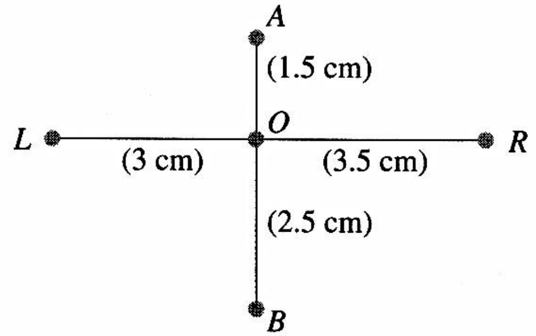
1) Distorsionar la malla cerca de la frontera:



$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,O} \approx \frac{u_0 - u_L}{h_L}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{O,R} \approx \frac{u_R - u_O}{h_R}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{O,R} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,O}\right]}{\frac{h_L}{2} + \frac{h_R}{2}}$$



3.5/2 − 3/2 = 0.125

x_c

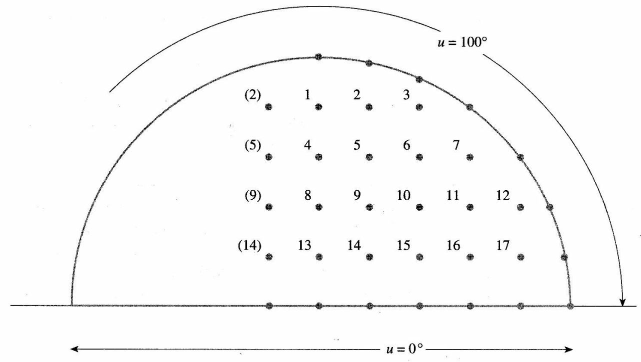
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{u_R - u_O}{h_R} - \frac{u_O - u_L}{h_L}}{\frac{h_L + h_R}{2}} = \frac{2}{h_L + h_R}\left[\frac{u_R}{h_R} + \frac{u_L}{h_L} - u_O\left(\frac{1}{h_R} + \frac{1}{h_L}\right)\right] = \frac{2}{h_L + h_R}\left[\frac{u_R}{h_R} - \frac{u_O(h_L + h_R)}{h_L h_R} + \frac{u_L}{h_L}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h_A + h_B}\left[\frac{u_A}{h_A} - \frac{u_O(h_A + h_B)}{h_A h_B} + \frac{u_B}{h_B}\right]$$

Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

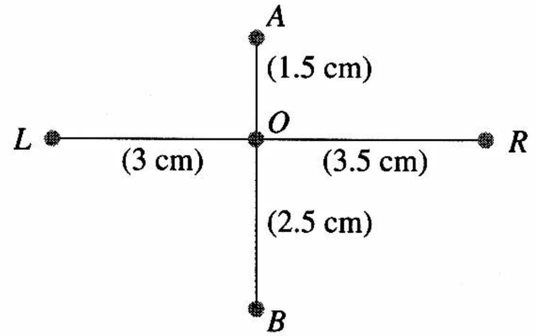
5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

1) Distorsionar la malla cerca de la frontera:



$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,O} \approx \frac{u_0 - u_L}{h_L}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{O,R} \approx \frac{u_R - u_O}{h_R}$$



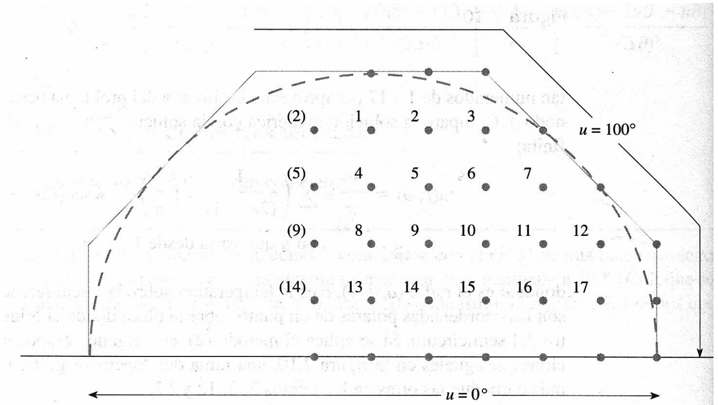
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{O,R} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,O}\right]}{\frac{h_L}{2} + \frac{h_R}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h_L + h_R}\left[\frac{u_R}{h_R} - \frac{u_O(h_L + h_R)}{h_L h_R} + \frac{u_L}{h_L}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{2}{2h}\left[\frac{u_R}{h} - \frac{u_O \cdot 2h}{h^2} + \frac{u_L}{h}\right] = \frac{u_R - 2u_O + u_L}{h^2}$$

5.4 Geometrías irregulares o no rectangulares

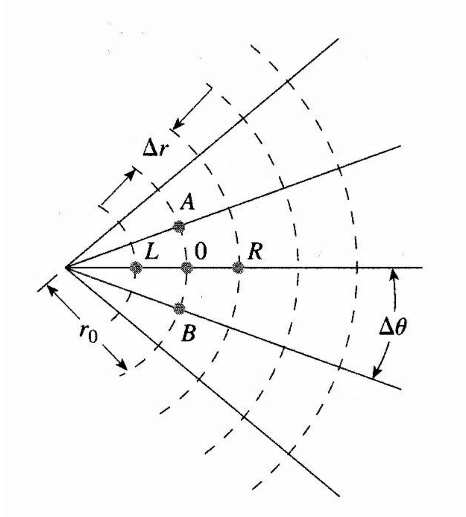
2) Distorsionar la frontera para que pase por la malla: no hay que cambiar nada, aunque se modifica la geometría real del problema



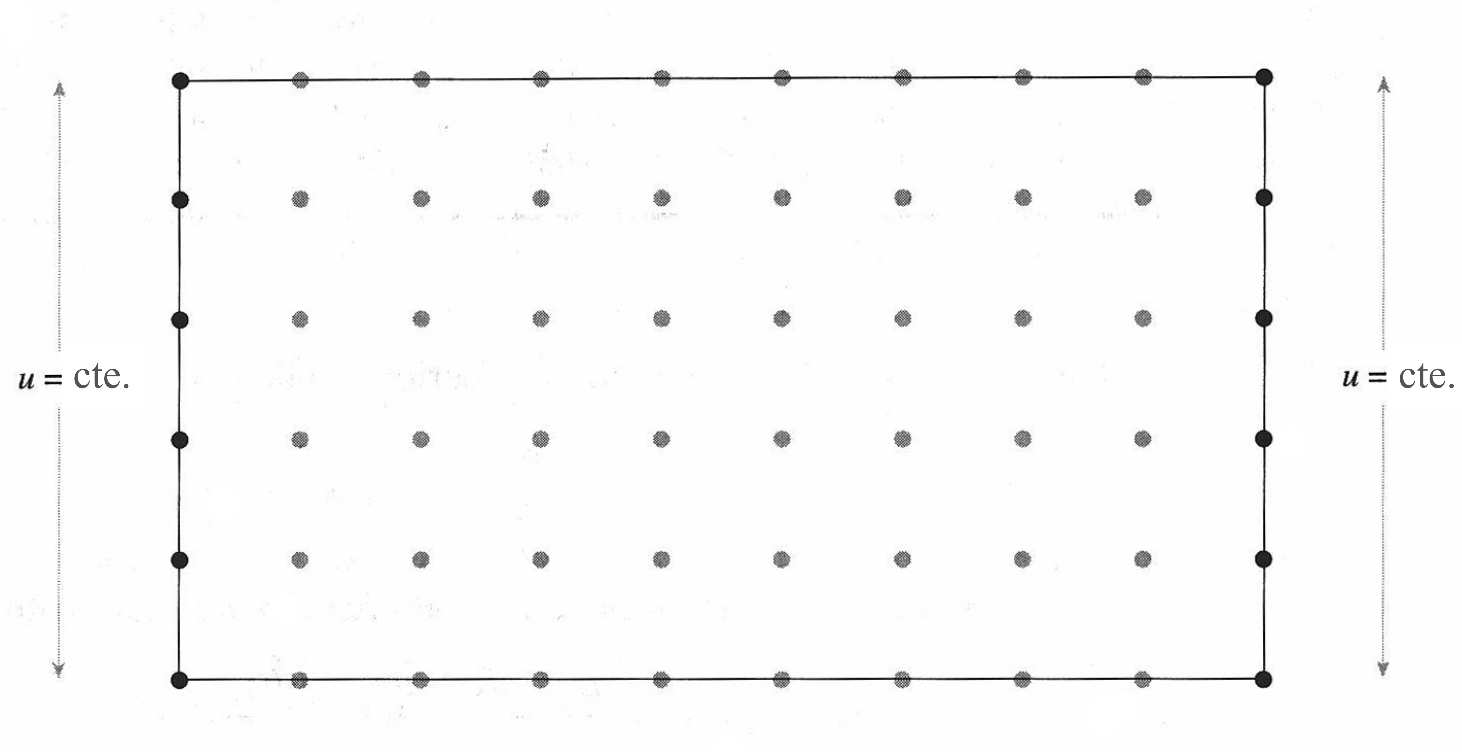
3) Utilizar un sistema de coordenadas apropiado:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\left(u_L - 2u_O + u_R\right)}{\left(\Delta r\right)^2} + \frac{1}{r}\frac{\left(u_R - u_L\right)}{2\Delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\left(u_A - 2u_O + u_B\right)}{\left(\Delta \vartheta\right)^2}$$



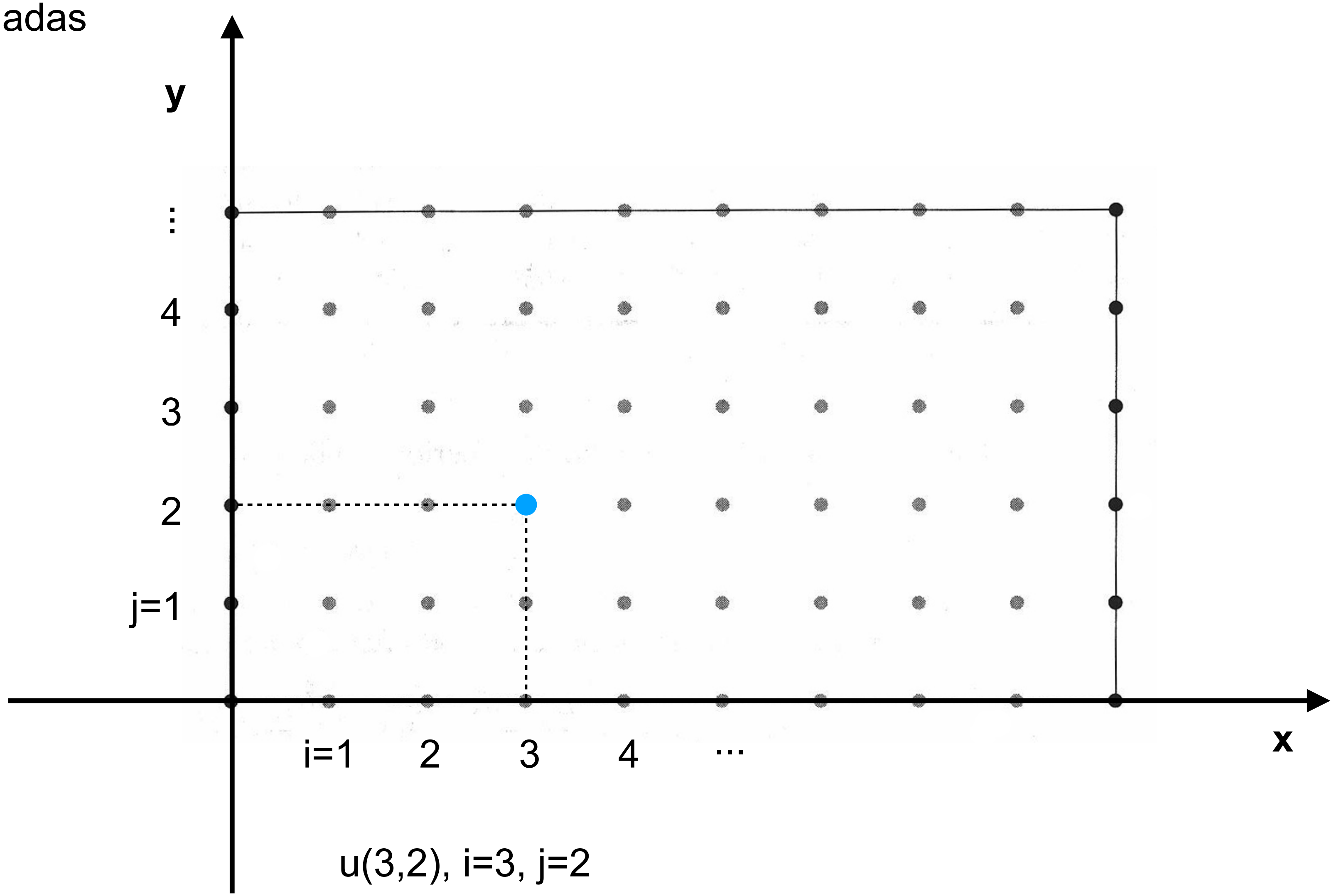
5.5 Condiciones de Neumann



Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.5 Condiciones de Neumann

Coordenadas

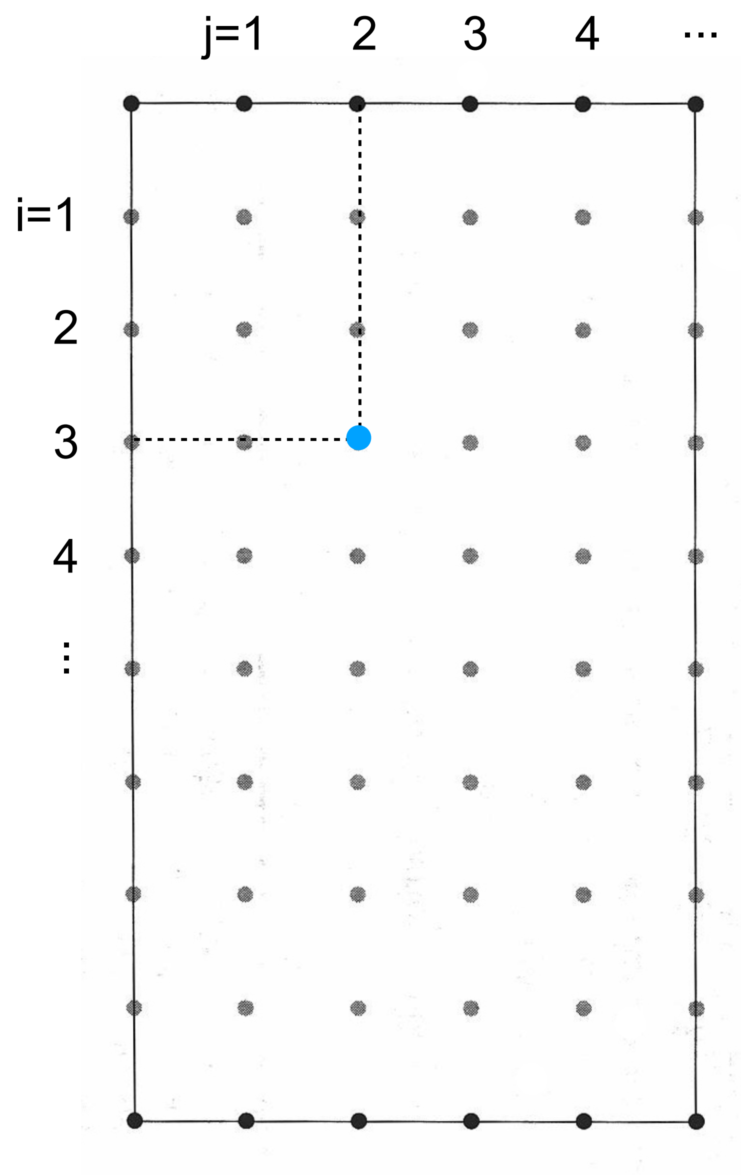


u(3,2), i=3, j=2

5.5 Condiciones de Neumann

Índices en una matriz

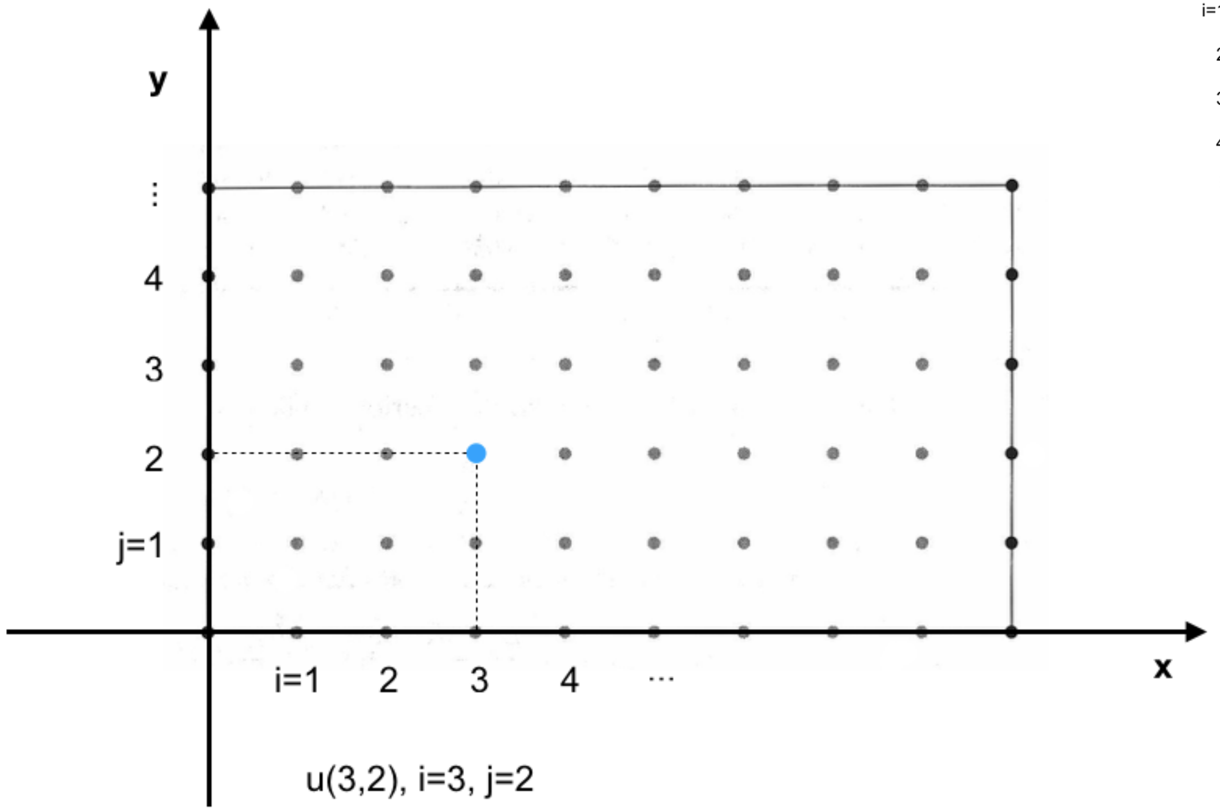
u(3,2), i=3, j=2

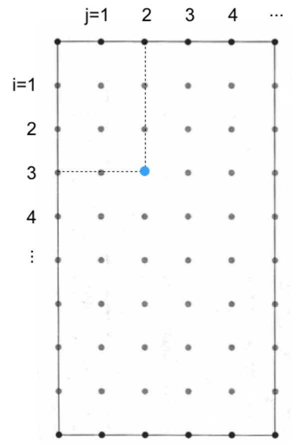


Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.5 Condiciones de Neumann

Coordenadas





i ∈ [0, $N_{columnas}$];   j ∈ [0, N_{filas}]

$\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ⟶ u crece cuando x crece

5.5 Condiciones de Neumann

Fila 6: u(i,6)

Fila 5

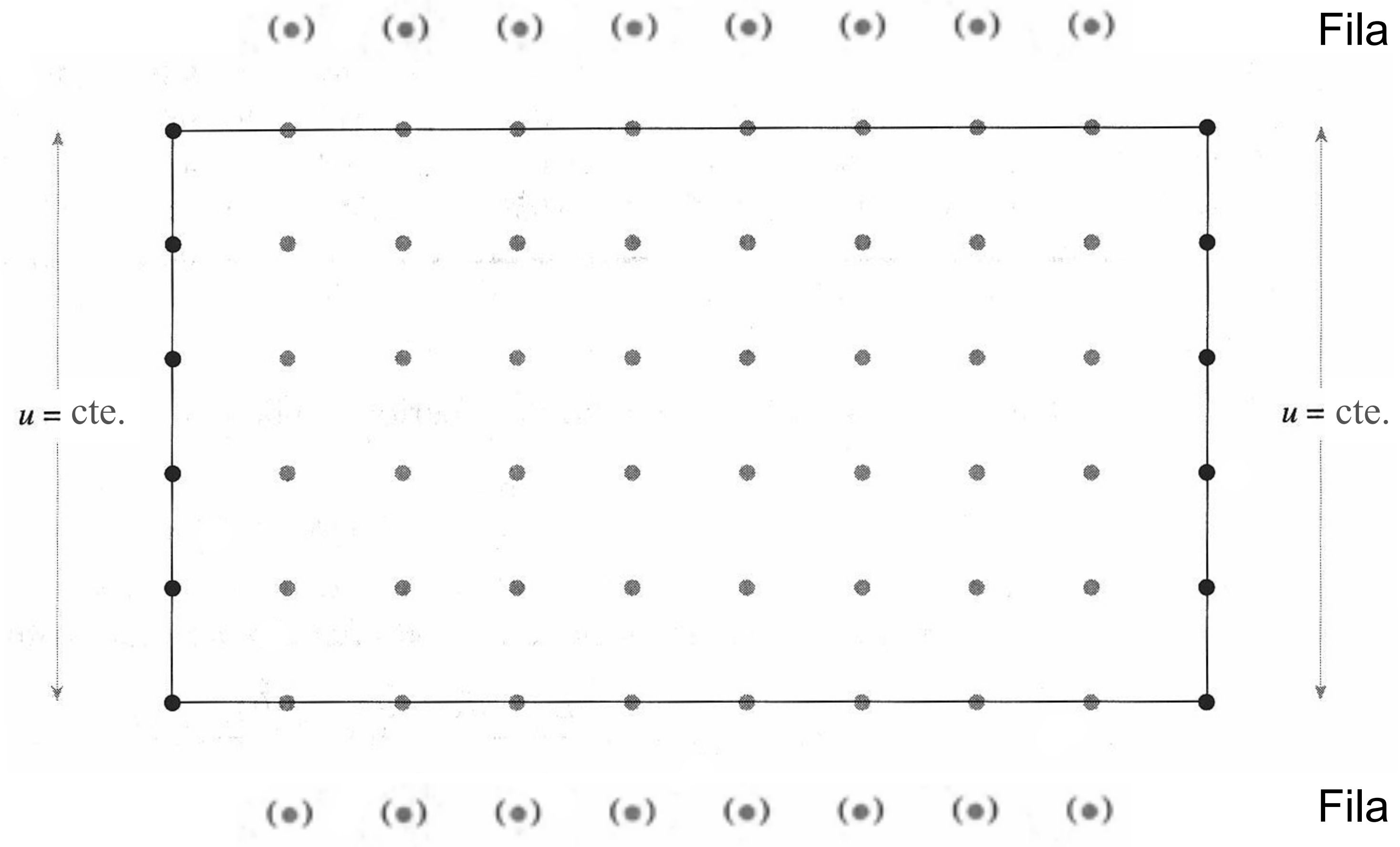
Fila 4

Fila 3

Fila 2

Fila 1

Fila 0



Fila -1: u(i,-1)

Columnas 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

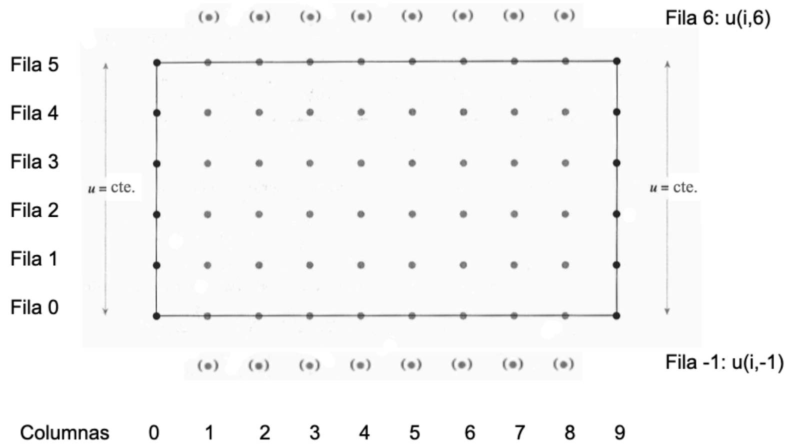
Tema 5: Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

5.5 Condiciones de Neumann

$$\nabla^2 u = f(x,y)$$

Fila 0: $$\frac{\partial u}{\partial y} = g_0(x,y)$$

Fila 5: $$\frac{\partial u}{\partial y} = g_5(x,y)$$



Fila 0: $$u(i,-1) + u(i,1) - 4u(i,0) + u(i-1,0) + u(i+1,0) = h^2 f\,; \qquad i = 1, \ldots, 8$$

$$\frac{\partial u(i,0)}{\partial y} = \frac{u(i,1) - u\left(i,-1\right)}{2h} = g_0$$

$$u(i,-1) = u(i,1) - 2hg_0$$

$$2u(i,1) - 4u(i,0) + u(i-1,0) + u(i+1,0) = h^2 f + 2hg_0$$

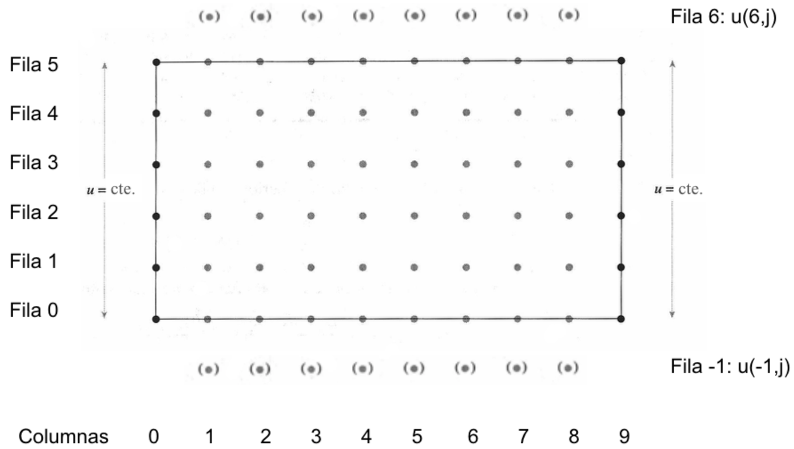
$$u(i,0) = \frac{1}{4}\left[2u(i,1) + u(i-1,0) + u(i+1,0) - \left(h^2 f + 2hg_0\right)\right]\,; \qquad i = 1, \ldots, 8$$

5.5 Condiciones de Neumann

$$\nabla^2 u = f(x,y)$$

Fila 0: $$\frac{\partial u}{\partial y} = g_0(x,y)$$

Fila 5: $$\frac{\partial u}{\partial y} = g_5(x,y)$$



Filas centrales: $$u(i,j) = \frac{1}{4}\left[u(i-1,j) + u(i+1,j) + u(i,j-1) + u\left(i,j+1\right) - h^2 f\right]; \qquad i = 1, \ldots, 8$$

Fila 5: $$u(i,4) + u(i,6) - 4u(i,5) + u(i-1,5) + u(i+1,5) = h^2 f; \qquad i = 1, \ldots, 8$$

$$\frac{\partial u(i,5)}{\partial y} = \frac{u(i,6) - u\left(i,4\right)}{2h} = g_5 \qquad u(i,6) = u(i,4) + 2hg_5$$

$$2u(i,4) - 4u(i,5) + u(i-1,5) + u(i+1,5) = h^2 f - 2hg_5$$

$$u(i,5) = \frac{1}{4}\left[2u(i,4) + u(i-1,5) + u(i+1,5) - \left(h^2 f - 2hg_5\right)\right]; \qquad i = 1, \ldots, 8$$