



COMPUTACIÓN AVANZADA

Práctica 2: Trayectoria de un proyectil en distintos casos



2 DE ABRIL DE 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Pablo Gradolph Oliva

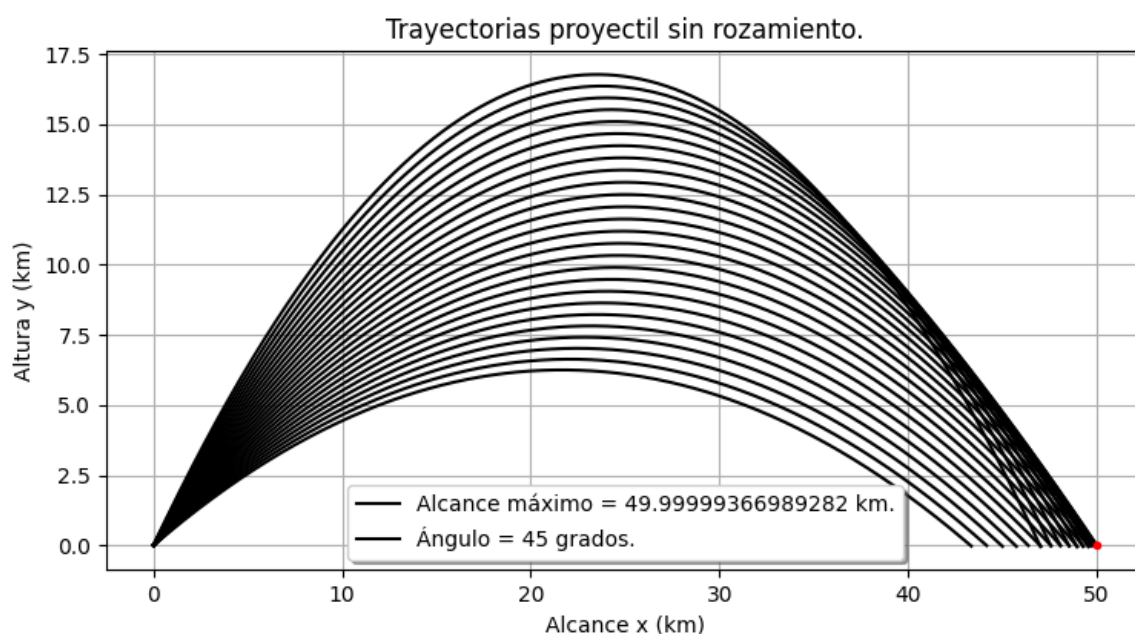
En esta práctica, se pide estudiar el movimiento de un proyectil, su alcance y la trayectoria que describe en varios supuestos que se muestran y describen a continuación. En todos los casos he utilizado el método de Runge-Kutta de 4º orden para resolver los distintos sistemas de ecuaciones diferenciales que se plantean. He estudiado las trayectorias y los alcances para distintos ángulos (entre 30 y 55 grados) dentro de cada supuesto y he utilizado un valor para la variable $dt = 0.1$. Por último, en todos los casos se ha trabajado con una velocidad inicial $v_0 = 700 \text{ m/s}$ del proyectil y un valor para la gravedad $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. SIN ROZAMIENTO

Para este supuesto se pide estudiar la trayectoria descrita por el proyectil sin tener en cuenta la fuerza de rozamiento producida por el efecto del aire. De esta manera el sistema de ecuaciones diferenciales que queda a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x & \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_x}{dt} = 0 & \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$

Tras la resolución del sistema he obtenido la siguiente gráfica, con todas las trayectorias para los distintos ángulos:



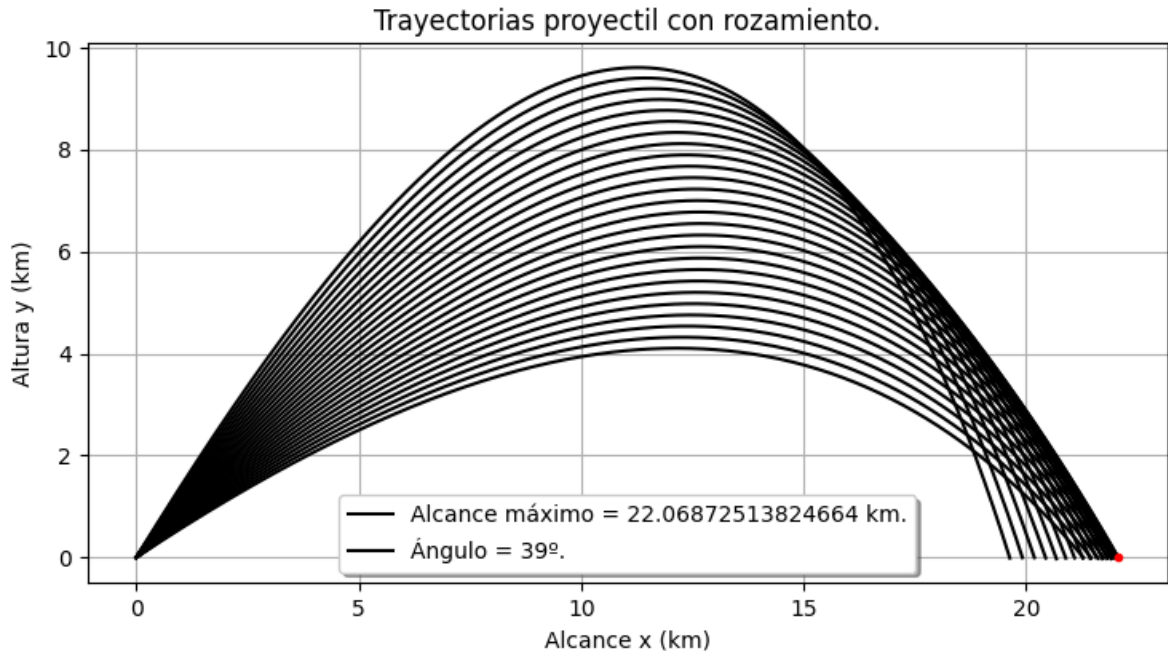
Se puede apreciar como el alcance máximo obtenido es prácticamente de 50 km y que este valor se obtiene cuando lanzamos el proyectil con un ángulo de 45° sobre la horizontal.

2. CON ROZAMIENTO Y DENSIDAD DEL AIRE CONSTANTE

Para este segundo supuesto, se pide estudiar la trayectoria descrita por el proyectil teniendo en cuenta el efecto de la fuerza de rozamiento sobre la trayectoria y, por tanto, sobre el alcance del proyectil, suponiendo que la densidad del aire es constante para todas las distintas alturas que alcanza el proyectil. El sistema de ecuaciones que queda para resolver ahora es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{-B_2|v|v_x}{m} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{B_2|v|v_y}{m} \end{array} \right\} \text{ con } \frac{B_2}{m} = 4 * 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

Obteniéndose, de esta manera, la siguiente gráfica:



Vemos como ahora, teniendo en cuenta el rozamiento con el aire, cambian las trayectorias, el proyectil alcanza alturas menos elevadas, el alcance máximo es de menos de la mitad de la distancia que en el caso anterior (ahora llega entorno a 22 km) y esto se da para un ángulo menor que 45°, en concreto, para un ángulo de 39°.

3. CON ROZAMIENTO Y VARIANDO LA DENSIDAD DEL AIRE CON LA ALTURA

En este último caso, se han estudiado las diferentes trayectorias teniendo en cuenta tanto la fuerza de rozamiento como la variación de la densidad del aire con la altura a la que se encuentra el proyectil. Para realizar esto se han propuesto dos modelos, la aproximación isoterma en la que se supone una temperatura constante para todas las alturas y la aproximación adiabática en la que se supone un proceso que permanece en equilibrio.

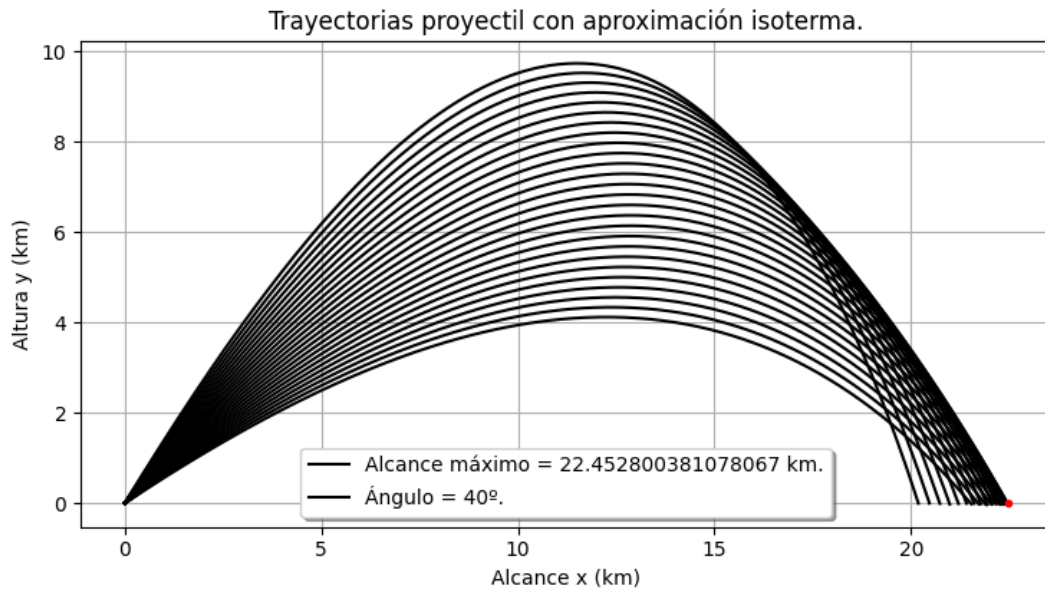
APROXIMACIÓN ISOTERMA

Para la aproximación isoterma el sistema que tenemos que resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{B_2(y=0)|v|v_x}{m} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{B_2(y=0)|v|v_y}{m} \end{array} \right\}$$

$$\text{con } \rho = \rho_0 * \exp(-y/y_0) ; y_0 = 10^4 \text{ m} ; \frac{B_2(y=0)}{m} = 4 * 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

Y la siguiente gráfica muestra los resultados obtenidos:



Vemos como las trayectorias son similares al caso anterior, pero, en este caso, se obtiene un alcance máximo ligeramente mayor, de 22,5 km aproximadamente y esto se produce para un ángulo de 40°.

APROXIMACIÓN ADIABÁTICA

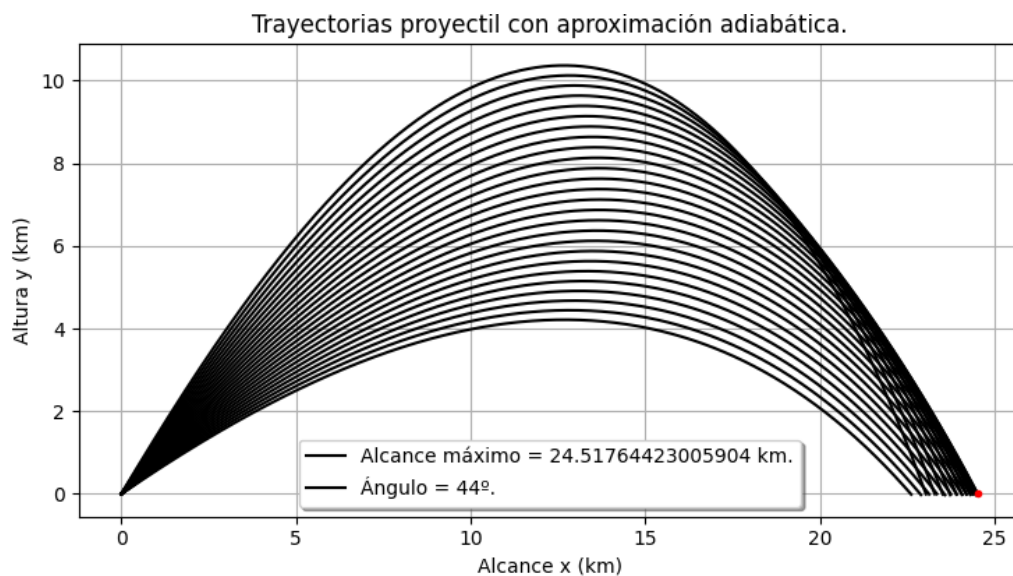
En el último supuesto, el sistema que tenemos que resolver es el mismo que en el caso anterior:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{B_2(y=0)}{m} |v| v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{B_2(y=0)}{m} |v| v_y \end{array} \right\} \text{ con } \frac{B_2(y=0)}{m} = 4 * 10^{-5} \text{ m}^{-1}.$$

Pero en este caso, lo que cambia es la siguiente expresión:

$$\rho = \rho_0 * \left(1 - \frac{ay}{T_0}\right)^\alpha \text{ con } a = 6.5 * 10^{-3} \frac{K}{m}, \alpha = 2.5 \text{ y } T_0 = 300K$$

Para el cuál se han obtenido los siguientes resultados:



En este caso, tanto el alcance máximo, como el ángulo de tiro en el que se consigue son algo mayores que en los dos casos anteriores. El alcance máximo es aproximadamente 24.5 km y este fenómeno se produce al lanzar el proyectil con un ángulo de 44° sobre la horizontal.

DATOS OBTENIDOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

Para finalizar, he querido mostrar una tabla con todos los datos obtenidos para los distintos ángulos y por los distintos métodos, unos pequeños comentarios acerca de éstos y todas las gráficas juntas que recogen estos datos para las trayectorias en intervalos de 5° y de 1° . La tabla con todos los datos es la siguiente: (se muestran los alcances en kilómetros).

| Ángulo (en grados) | Alcance sin rozamiento | Alcance con rozamiento | Alcance con rozamiento y aproximación isoterma | Alcance con rozamiento y aproximación adiabática |
|--------------------|------------------------|------------------------|--|--|
| 30 | 43.30125 | 21.28432 | 21.51699 | 22.60235 |
| 31 | 44.14737 | 21.45622 | 21.70538 | 22.87206 |
| 32 | 44.9397 | 21.60607 | 21.87189 | 23.12138 |
| 33 | 45.67727 | 21.73428 | 22.01687 | 23.3504 |
| 34 | 46.35918 | 21.84124 | 22.14067 | 23.55917 |
| 35 | 46.98461 | 21.9273 | 22.24354 | 23.74769 |
| 36 | 47.55281 | 21.99278 | 22.32578 | 23.91592 |
| 37 | 48.06307 | 22.03801 | 22.38762 | 24.0638 |
| 38 | 48.51477 | 22.06323 | 22.42927 | 24.19124 |
| 39 | 48.90738 | 22.06873 | 22.45094 | 24.29811 |
| 40 | 49.24038 | 22.05473 | 22.4528 | 24.38425 |
| 41 | 49.51339 | 22.02148 | 22.43501 | 24.44947 |
| 42 | 49.72609 | 21.96917 | 22.39773 | 24.49359 |
| 43 | 49.87819 | 21.898 | 22.34108 | 24.5164 |
| 44 | 49.96953 | 21.80815 | 22.26518 | 24.51764 |
| 45 | 49.99999 | 21.69979 | 22.17015 | 24.4971 |
| 46 | 49.96953 | 21.57307 | 22.05609 | 24.4545 |
| 47 | 49.87819 | 21.42816 | 21.92308 | 24.3896 |
| 48 | 49.72608 | 21.26518 | 21.77122 | 24.30212 |
| 49 | 49.5134 | 21.08427 | 21.60058 | 24.1918 |
| 50 | 49.24038 | 20.88556 | 21.41123 | 24.05837 |
| 51 | 48.90737 | 20.66916 | 21.20325 | 23.90156 |
| 52 | 48.51478 | 20.43519 | 20.9767 | 23.72114 |
| 53 | 48.06308 | 20.18376 | 20.73165 | 23.51685 |
| 54 | 47.55282 | 19.91496 | 20.46815 | 23.28845 |
| 55 | 46.98463 | 19.91496 | 20.18628 | 23.03574 |

Vemos como la principal diferencia está en tener o no en cuenta el rozamiento y es que, para los tres casos en los que se tiene en cuenta, el alcance se reduce entorno a la mitad. Otro fenómeno interesante que se produce en el caso sin rozamiento es que el ángulo para el que se alcanza el mayor alcance es 45° y que se produce también el efecto de los ángulos complementarios, es decir, se llega a la misma distancia lanzando el proyectil 40° que a 50° , a 35° que a 55° y así para todos los ángulos complementarios. Estos efectos son poco realistas, y es por esta razón, por la que se han estudiado los casos con rozamiento.

En los casos con rozamiento, me gustaría destacar que el alcance obtenido mediante la aproximación adiabática es ligeramente mayor que en los otros dos casos al igual que el ángulo para el que se obtiene el alcance máximo que es 44° un valor algo sorprendente puesto que es muy próximo a los 45° aunque también es ligeramente inferior, acorde con lo esperado.

Esto no es así para los otros dos casos en los que los alcances son muy similares y el ángulo para el que se obtiene el máximo alcance es 39° para el caso con rozamiento y densidad constante y 40° para el caso de la aproximación isoterma.

Por último, se muestran todas las trayectorias descritas juntas para apreciar bien estas diferencias en los distintos supuestos estudiados:

