COMPUTACIÓN II: PRÁCTICA XVI

Pablo Gradolph Oliva

Universidad Autónoma de Madrid

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON CONDICIONES DE CONTORNO (MÉTODO DEL DISPARO)

Dadas las condiciones de contorno u(a) = 110V y u(b) = 0V, queremos convertir u(b) en un u'(a) y así poder resolver la ecuación diferencial por los métodos que ya conocemos, en este caso por el método de Ronge-Kutta de cuarto orden. Para hacer esto, utilizaremos el método del disparo.

Para ello, lo primero que hago es pasar de la ecuación:

$$u'' + \frac{2}{r}u' = 0$$

Al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

Nombre inicial	Nuevo nombre	Condición inicial	Ecuación
u	z1	110	z1' = z2
u'	z2	u'(a)	z2' = $-\frac{2}{r}z2$

$$\begin{bmatrix} z1' \\ z2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z2 \\ -\frac{2}{r}z2 \end{bmatrix}; Z(0) = \begin{bmatrix} 110 \\ u'(a) \end{bmatrix}$$

Sistema para el cuál, tenemos que hallar un valor correcto de u'(a) utilizando el método del disparo:

Suposición 1:

$$u_1'(a) = \frac{|u(b) - u(a)|}{b - a} = \frac{110}{5} = 22 \xRightarrow{con\ RK4} Encontramos\ u_1(b) = 165$$

Como $u_1(b) = 165 > u(b) = 0$, buscamos un $u_2'(a) < u_1'(a)$.

Suposición 2:

$$u_2'(a) = u_1'(a) * 0.5 = 11 \xRightarrow{con\ RK4} Encontramos\ u_2(b) = 137.5$$

Por interpolación sacamos la condición inicial. Iteramos hasta que el valor de $fabs\left(u_3(b) - u(b)\right) < tol$. Seguimos la siguiente fórmula:

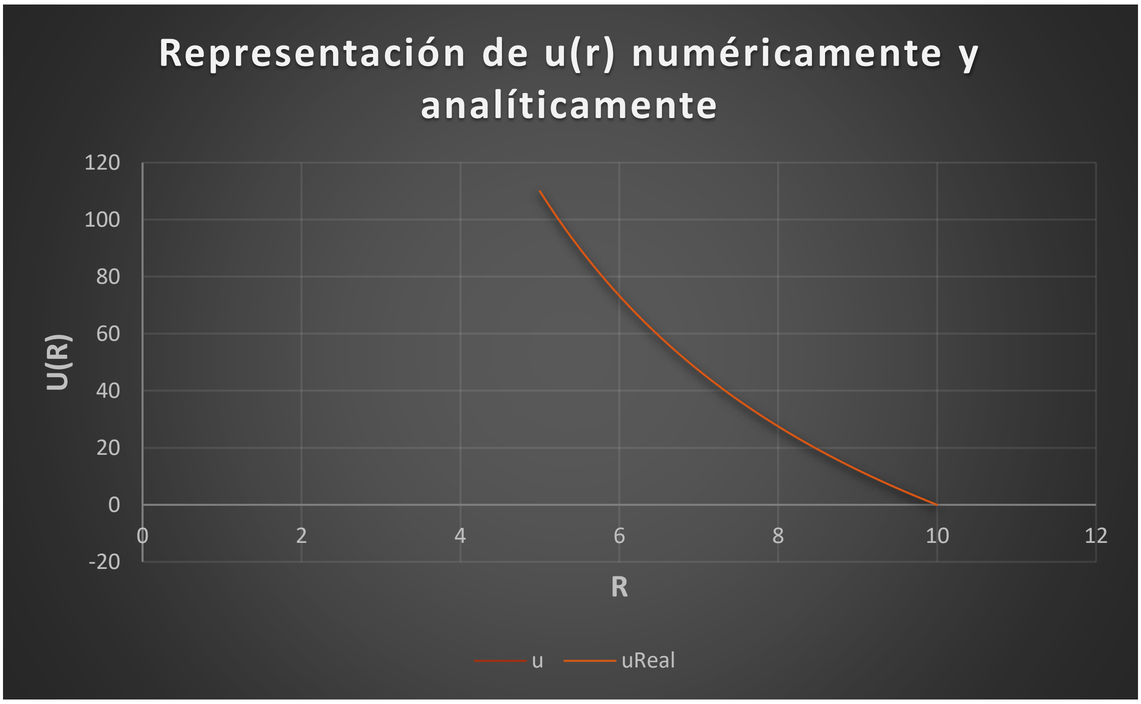
$$u_3'(a) = u_2'(a) - \frac{\left(u_2(b) - u(b)\right) * (u_2'(a) - u_1'(a))}{u_2(b) - u_1(b)}$$

En mi caso, con la primera iteración ya obtenemos un valor de u(b) con un error de 10^{-13} y el valor u'(a) que tomamos al final como condición inicial para resolver el sistema es u'(a)=-44.

Para esta tolerancia, el programa creado genera el fichero "Pt16_RK4_1.txt" en el que se encuentran todos los valores de u(r) con un paso $\Delta R = 0.05$ desde $R_1 = 5cm,\ hasta\ R_2 = 10cm$. En dicho fichero también encontramos los valores de la solución exacta siguiendo la fórmula:

$$u(r) = \frac{u_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right)$$

Los valores obtenidos son prácticamente los mismos y, además, encontramos los valores de la primera derivada u'(r). A continuación, se ven los resultados representados gráficamente:



Vemos como los valores de u(r) obtenidos del sistema con RK4 y la solución exacta se solapan.