Computación II - Prácticas

Violeta González Pérez

2022

Resolución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden

Dada una ecuación diferencial de primer orden (primera derivada), $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x, y)$, y una condición inicial, $y(x_0) = y_0$, podemos obtener una tabla de valores numéricos de y para x separados por un paso h, dentro de un intervalo determinado:

$$\begin{aligned} x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, \ldots \\ y_0(x_0), y_1(x_0 + h), y_2(x_0 + 2h), y_3(x_0 + 3h), \ldots \end{aligned}$$

El error de los métodos depende del paso h. A menor h, menor es el error, sin embargo, más valores de y habrá que obtener para cubrir el intervalo de interés, lo que puede hacer que aumente el error final.

Método de Euler

El método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x, y)$, se puede resumir como:

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_0 + i \cdot h \\
\tilde{y}(x_0) &= y_0 \\
\tilde{y}(x_{i+1}) &= \tilde{y}(x_i) + hf(x_i, \tilde{y}(x_i))
\end{aligned}
$$

La ˜ indica que lo que se obtiene es una aproximación y no la solución exacta.

Programando

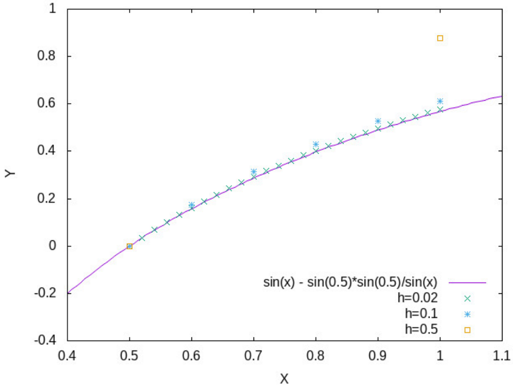
Al programar este y otros métodos hace falta establecer el número de pasos, $npasos$. Aunque este número debería ser entero, si se calcula a partir de los valores de x en el rango de interés, $[x_0, x_0 + (npasos - 1) \cdot h]$, hay que tener cuidado con los redondeos:

$$double \quad npasos = (xmax - xmin)/h;$$

Método de Euler

Ejercicio: Euler 1° orden

Utilizando el método de Euler (escríbelo en una función), resuelve $\frac{dy}{dx} = 2cosx - y\,cotx$, $y(1/2) = 0$ en el intervalo $x \in [0.5, 1.0]$, utilizando distintos pasos: $h = 0.5, 0.1, 0.02$. Compara tus soluciones con la solución exacta $y = sinx - sin^2(1/2)/sinx$. Haz esta comparación de forma numérica en $x = 1$ y también de forma gráfica (tendrás que escribir tus tablas en distintos ficheros).



Ayúdate de las funciones en ”nombbres.f”para nombrar los ficheros de forma automática.

Método de Runge-Kutta de segundo orden

El método de Runge-Kutta de segundo orden es un método iterativo con paso h que puede resumirse como:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_i}$$

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + qk_1 h)$$

$$a_1 = 1 - a_2\ ;\ p = \frac{1}{2a_2}\ ;\ q = \frac{1}{2a_2}$$

Método de Heun: $a_2 = 0.5$;
Método del punto medio o pendiente media: $a_2 = 1$;
Método de Ralston: $a_2 = 2/3$.

Método de Runge-Kutta de cuarto orden (con reales)

El método de Runge-Kutta de cuarto orden es un método iterativo con paso h que puede resumirse como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + +2k_3 + k_4\right) h$$

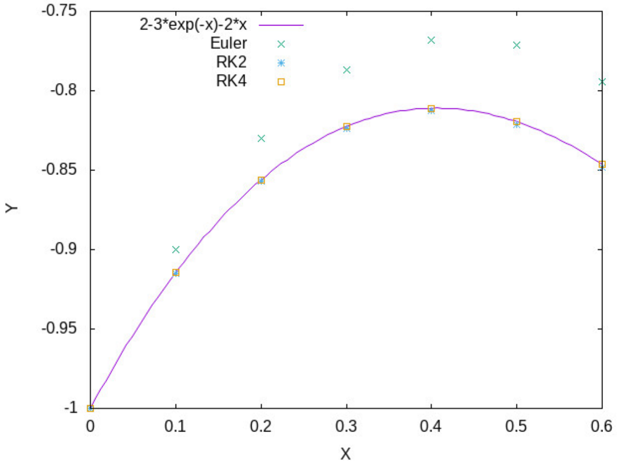
donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_i} \\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h)
\end{aligned}$$

Comparación de métodos (con reales)

Ejercicio: comparación de métodos

Utilizando los métodos para reales de Euler, RK2 (a2=1) y RK4, resuelve $\frac{dy}{dx} = -2x - y$, $y(0) = -1$ en el intervalo $x \in [0., 0.6]$, utilizando $h = 0.1$. Compara tus soluciones con la solución exacta $y = -3e^{-x} - 2x + 2$ de forma gráfica.



Realiza la práctica 9 evaluable (clase 14).

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Los métodos anteriores pueden utilizarse para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, escribiendo las funciones y las condiciones iniciales como vectores o matrices $n \times 1$, donde n es el número de ecuaciones:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \quad \frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} \\ \dots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(Y, x) \\ f_2 Y, x) \\ \dots \\ f_n Y, x) \end{pmatrix} = F(Y, x)$$

En este caso, aplicaremos los métodos utilizando las matrices en vez de reales. Así el método de Euler, lo podemos escribir como:

$$\tilde{Y}(x_{i+1}) = \tilde{Y}(x_i) + hF(x_i, \tilde{Y}(x_i))$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejercicio: sistemas de ecuaciones

Modifica el código que has desarrollado para los métodos de Euler y RK para que acepten matrices en vez de reales, y resuelve el siguiente sistema hasta $x = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} &= -0.5y_1,\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} &= 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1,\end{aligned}$$

con $h = 0.5$ y asumiendo que a $x = 0$, $y_1 = 4$ y $y_2 = 6$. Compara tu solución con $y_1(2) = 1.471577$ y $y_2(2) = 8.946865$.

Ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1

Las ecuaciones de orden n pueden convertirse en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden resolverse con el método de Euler u otros. La conversión puede realizarse de muchas maneras, es aconsejable utilizar una tabla. Veámoslo con el ejemplo: $\ddot{x} + 3\dot{x} + 6x = 1, \dot{x}(0) = 1, x(0) = 4.$

Nombre inicial	Nuevo nombre	Condición inicial	Ecuación
x	z_1	4	$\dot{z}_1 = z_2$
$\dot{x}$	z_2	1	$\dot{z}_2 = 1 - 3z_2 - 6z_1$

Derivada n-1

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 1 - 3z_2 - 6z_1 \end{pmatrix} ; \quad Z(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: conversión

Sigue los pasos anteriores para: $\ddot{x} = g - \gamma \dot{x}^2$ y condiciones iniciales $\dot{x}(0) = 0, x(0) = H.$