COMPUTACIÓN II: PRÁCTICA XV

Pablo Gradolph Oliva

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

PRÁCTICA XV: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN N CON CONDICIONES INICIALES

He convertido las ecuaciones dadas en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$v_1 = \frac{dy_1}{dt}$$

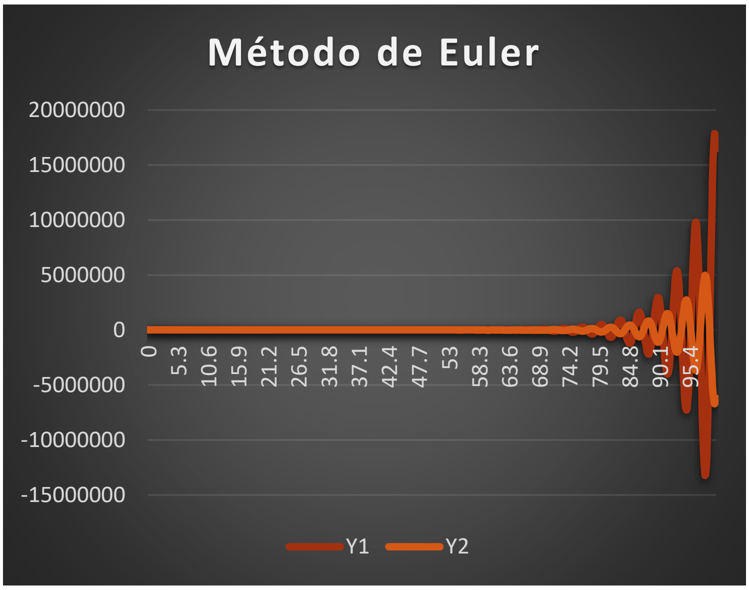
$$v_2 = \frac{dy_2}{dt}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{k_1}{m_1} y_1 - \frac{k_2}{m_1}(y_1 - y_2)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2}{m_2}(y_1 - y_2)$$

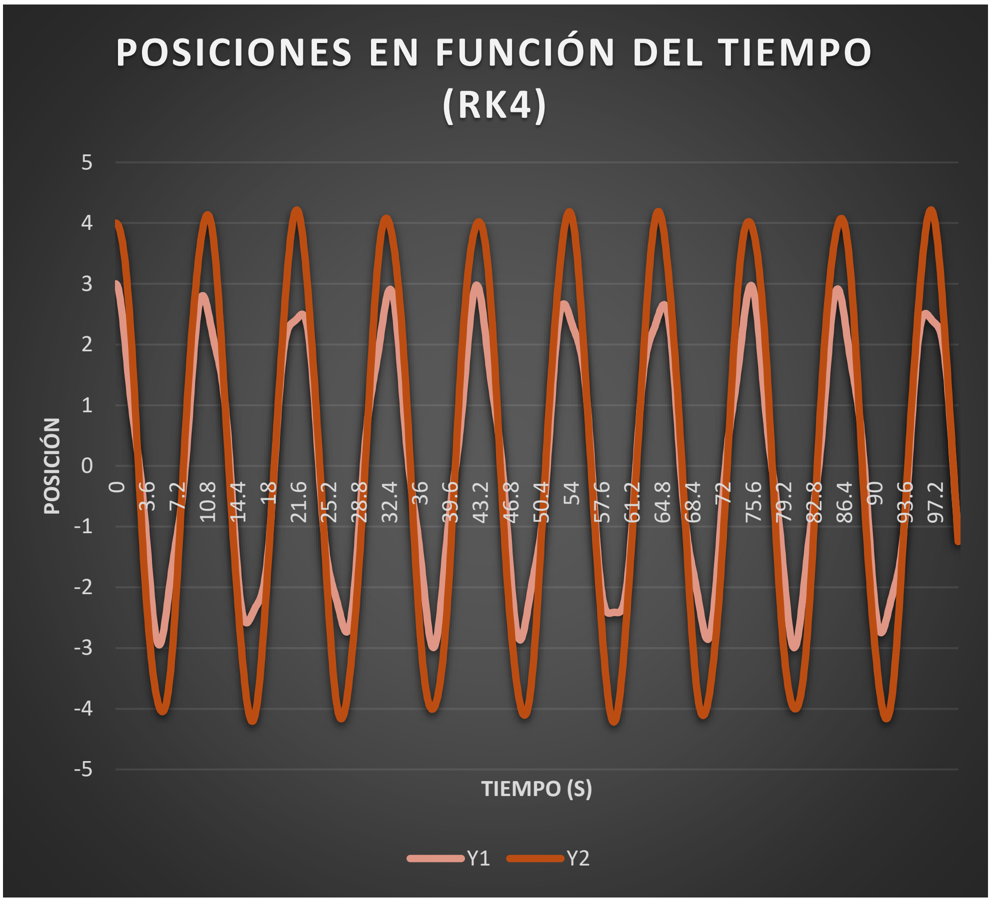
Después lo he resuelto por el método de Ronge-Kutta de cuarto orden y lo he comparado con los resultados obtenidos por el método de Euler. Por alguna razón, el método de Euler no es capaz de aproximar las soluciones correctamente y a partir de ciertos valores de tiempo, las posiciones crecen exponencialmente. Para las posiciones en función del tiempo obtenemos los siguientes resultados:

Método de Euler:



Vemos como los resultados obtenidos no son coherentes y ocurre lo mismo para las velocidades, por lo que nos centraremos solo en el método de Ronge-Kutta de cuarto orden ya que los resultados obtenidos si tienen coherencia:

Método Ronge-Kutta de cuarto orden:



Para el caso de este método si que se obtienen resultados coherentes con el problema, vemos un movimiento oscilatorio en el que la masa dos tiene una mayor amplitud que la uno, pero en ninguno de los dos casos superan enormemente esta amplitud como pasaba con Euler. Veamos ahora el resultado obtenido para las velocidades:

Comparando con el gráfico de las posiciones, vemos como el de las velocidades también tiene cierto sentido ya que aproximadamente se alcanza la velocidad máxima en los momentos en los que la posición está entorno a cero y la velocidad es nula aproximadamente cuando las masas alcanzan la máxima amplitud.

Por último, se pregunta si podríamos usar diagonalización para resolver el problema. La respuesta que yo doy es que si podríamos hacerlo. Para ello, lo primero que hacemos es transformar las ecuaciones que nos dan:

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k_1 y_1 - k_2 (y_1 - y_2)$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2 (y_1 - y_2)$$

En una ecuación matricial de la forma:

$$M\ddot{Y} + KY = 0$$

Donde la matriz de masas $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ y la matriz de rigidez $K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$. Multiplicando por M^{-1} nos queda $\ddot{Y} + K_r Y = 0$, donde $K_r = \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1.75 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora las soluciones pasan por diagonalizar la matriz Kr. Las frecuencias de los modos normales de vibración son las raíces cuadradas de los autovalores de Kr y las amplitudes de oscilación son las componentes de los autovectores.