COMPUTACIÓN II

PRÁCTICA 8 evaluable (clase 13)

Integración, cálculo del periodo de oscilación de un péndulo físico

El periodo de oscilación de un péndulo físico viene dado por la siguiente expresión [1]:

$$T=\frac{2T'}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-k^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)\right)}} \qquad \text{donde } 0\leq k=\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\leq 1,$$

y $T'=\frac{2\pi}{\omega}$, es el periodo del armónico o aproximación de pequeña amplitud.

Realizar un programa en C++ que calcule *T/T´* en función de ϑ_m, variando ϑ_m entre 0 y 100º con saltos de 5º, utilizando:

1. La regla Trapezoidal y de Simpson con 4 y 20 intervalos. La cuadratura gaussiana de 2 y 5 puntos.
2. Guarda los resultados en un fichero y representa gráficamente los resultados, *T/T´* frente a $\vartheta_{m,}$ para todos los métodos.
3. Escribe un informe detallado con los resultados.

<u>Anexo analítico:</u> *La ecuación del movimiento de un péndulo físico es,* $\frac{d^2\theta}{\mathrm{dt}^2}+\omega^2\,\mathrm{sen}(\theta)=0$, *en donde* $\omega^2=\frac{\mathrm{mgd}}{I}$, *d es la distancia entre el eje fijo alrededor del cual oscila el péndulo y el centro de masas, e I es el momento de inercia alrededor del eje de oscilación. Podemos calcular el periodo T a partir del principio de conservación de la energía sin necesidad de calcular los detalles del movimiento. Si consideramos que el potencial gravitatorio es cero en la altura del punto de suspensión, tendremos:*

$$K+U=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2-\mathrm{mgd}\cos(\theta)=E_0=-\mathrm{mgd}\cos(\theta_m)$$

en donde $E_0=\frac{1}{2}I\omega_0^2-\mathrm{mgd}\cos(\theta_0)$ *es una constante determinada por las condiciones iniciales y* θ_m *es el desplazamiento angular máximo. Reordenando la ecuación anterior podemos obtener:*

$$\mathrm{dt}=\pm\sqrt{\frac{I}{2\,\mathrm{mgd}}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}}\Rightarrow t=\int_0^t \mathrm{dt}=\pm\sqrt{\frac{I}{2\,\mathrm{mgd}}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}}$$

Para obtener T necesitaríamos considerar únicamente el tiempo de un cuarto de oscilación, empezando la misma en $\vartheta_0 = 0$ e integrando hasta $\vartheta = \vartheta_m$.

De esta forma la expresión integral para T es $T=4\sqrt{\frac{I}{2\,\mathrm{mgd}}}\int_0^{\theta_m}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}}$*, suponiendo* $\vartheta_m<\pi$.

Esta integral es impropia, pero se puede transformar en una integral no impropia utilizando las identidades trigonométricas de los ángulos mitad:

$$\mathrm{sen}(\varphi)=\frac{\mathrm{sen}(\theta/2)}{\mathrm{sen}(\theta_m/2)}\ \cos(\varphi)=\sqrt{\frac{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}{2\,\mathrm{sen}^2(\theta_m/2)}}$$

para obtener: $T=\frac{2T'}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi))}}$*, en donde* $0<k=\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_m}{2}\right)<1$*, y* $T'=\frac{2\pi}{\omega}$.

Esta integral es una ***integral elíptica de primera clase*** *y se encuentra tabulada en libros de tablas [1].*

Referencias:

1. Tablas de Integrales y funciones: I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik o Abramowitz and Stegun
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Anharmonicity
3. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo2/pendulo2.htm