$+ \quad \times$

$- \quad \div$

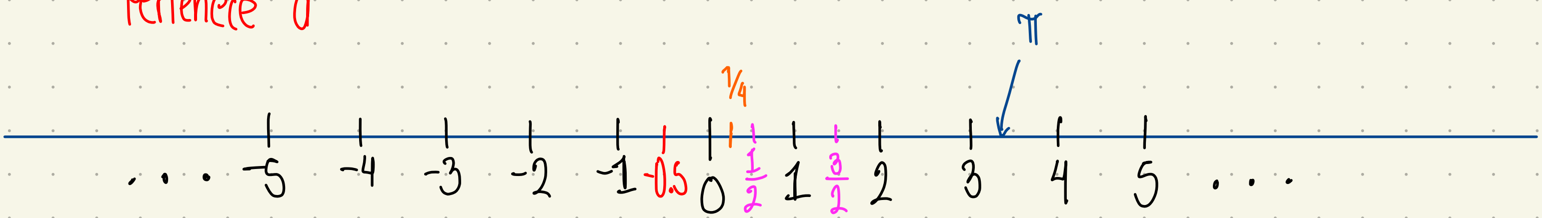
08/Julio/2024

El conjunto de los números reales

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales.

$1 \in \mathbb{R}$, $1/2 \in \mathbb{R}$, $0.3\bar{3} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

"Pertenece a"



Sistema de los números reales.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a, b \in \mathbb{R} \implies$

•) Existe un único $a+b \in \mathbb{R}$

••) " " " $a \cdot b \in \mathbb{R}$

Sistema de números reales.

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por $\mathbb{R}$ en el cual estan definidas dos operaciones $+$ y $\cdot$ para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$. Estas operaciones son llamadas suma y multiplicacion respectivamente y estan definidas de tal manera que, para cada para de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, existen únicos elementos $a+b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen los siguientes axiomas (llamados axiomas de campo) para todos los elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$

C1.- Cerradura: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

i) $a+b \in \mathbb{R}$ y ii) $a \cdot b \in \mathbb{R}$

C2. Conmutatividad: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen:
(Ley Conmutativa)

i) $a+b=b+a$ y ii) $a \cdot b = b \cdot a$.

C3.- Asociatividad: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:
(Ley asociativa)

i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

C4. Existencia de elemento neutro:

i) Existe 0 en $\mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0+a = a+0 = a.$$ //Neutro aditivo

ii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$ // Neutro multiplicativo.

C5.- **Existencia de inversos:**

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + a_1 = 0$$

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a_2 = 1.$$

C6.- **Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:**
(Ley distributiva).

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales arbitrarios, entonces se satisfacen:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 1$

i) Distributividad por la izquierda

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$2(3+1) = 8$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2$
$= 8$

ii) Distributividad por la derecha:

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$2x + 3x = (2+3)x$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales junto con las operaciones de Suma + y producto como ya las conocemos es un campo llamado Sistema de los números reales.

09/Julio/2024

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6+8)x = x(6+8)$ Conmutatividad para el producto
2. $(x+3)y+2 = (x\cdot y + 3\cdot y)+2$ Distributividad por la derecha.
3. $(3+5)+2 = 3+(5+2)$
4. $(2+3)+5 = 2+(3+5)$ Asociatividad para la suma.
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x+y)+3 = (y+x)+3$ Conmutatividad para la suma
7. $(1+2)(-3) = 1(-3)+2(-3)$
8. $[(w+3)2]z = [2(w+3)]z$
9. $(-13+z)(2)+7 = [z+(-13)](2)+7$
10. $(a-b)+[-(a-b)] = 0$ // Existencia de inversos para la suma.
11. $(3+4)(5+2) = (3+4)5+(3+4)2$ // Distributividad por la izquierda.
12. $x(y+0)+z = xy+z$
13. $(x+2)+[-(x+2)] = 0$
14. $2(x+y) = 2x+2y$

Distributividad por la izq.

$x(y+0)+z = (x\cdot y + x\cdot 0)+z$

$= (x\cdot y)+z$

$= x\cdot y + z$

$\cancel{(x+y)\cdot 2 = x+y\cdot 2}$

$x=1,\ y=1$

$(1+1)\cdot 2$

$= 2\cdot 2$

$1+1\cdot 2$

$= 1+2$

$= 3$

$= 4$

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación "$a=b$" significa que "a es el mismo elemento que b". Dicho de otra forma, "$a=b$" significa que se estan usando simbolos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a=b$, entonces $b=a$ // Simetría

I2) Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$. // Transitividad.

I3) Si $a+c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a \cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c, entonces $a=b$ implica que:

i) $a+c=b+c$ y ii) $a \cdot c = b \cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ "Si y sólo si"

1) $a=b \iff a+c=b+c$

2) $a=b \iff a \cdot c = b \cdot c$.

$a+\underline{5}=8+\underline{5}$

$\iff a=8$

$a \cdot 2 = 10$

$= 5 \cdot 2$

Consecuencias de las propiedades de los números reales

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y el producto]

i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a+c = b+c$, entonces $a=b$.

ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a=b$.

Dem. i) Por hip. sabemos que:

$$a+c = b+c \quad \ldots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (C6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$c + c_1 = 0 \quad \ldots (2)$$

Por propiedades de la igualdad:

$$b+(c+c_1)$$

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1 = b+(c+c_1)$$

$$\Longrightarrow \quad a+(\cancel{c+c_1}) = b+(\cancel{c+c_1})$$

$$a+0 = b+0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$a = b.$$