Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales junto con las operaciones de Suma $+$ y producto como ya las conocemos es un campo llamado Sistema de los números reales.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6+8)x = x(6+8)$ Conmutatividad para el producto
2. $(x+3)y+2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$ Distributividad por la derecha.
3. $(3+5)+2 = 3+(5+2)$
4. $(2+3)+5 = 2+(3+5)$ Asociatividad para la suma.
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x+y)+3 = (y+x)+3$ Conmutatividad para la suma
7. $(1+2)(-3) = 1(-3)+2(-3)$
8. $[(w+3)2]z = [2(w+3)]z$
9. $(-13+z)(2)+7 = [z+(-13)](2)+7$
10. $(a-b)+[-(a-b)] = 0$ // Existencia de inversos para la suma.
11. $(3+4)(5+2) = (3+4)5+(3+4)2$ // Distributividad por la izquierda.
12. $x(y+0)+z = xy+z$
13. $(x+2)+[-(x+2)] = 0$
14. $2(x+y) = 2x+2y$

Distributividad por la izq.

$$x(y+0)+z = (x \cdot y + x \cdot 0) + z$$
$$= (x \cdot y) + z$$
$$= x \cdot y + z$$

$$(x+y)\cdot 2 = \cancel{x+y\cdot 2}$$

$x=1$, $y=1$ $\quad$ $1+1\cdot 2$

$(1+1)\cdot 2$ $\quad$ $= 1+2$

$= 2\cdot 2$ $\quad$ $= 3$

$= 4$

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación "$a=b$" significa que "a es el mismo elemento que b". Dicho de otra forma, "$a=b$" significa que se estan usando simbolos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a=b$, entonces $b=a$ // Simetría

I2) Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$. // Transitividad.

I3) Si $a+c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a \cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c, entonces $a=b$ implica que:

i) $a+c=b+c$ y ii) $a \cdot c = b \cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

"Si y sólo si"

1) $a=b \iff a+c=b+c$

2) $a=b \iff a \cdot c = b \cdot c$.

$a+\underline{5} = 8 + \underline{5}$

$\iff a = 8$

$a \cdot 2 = 10$

$= 5 \cdot 2$

Consecuencias de los propiedades de los números reales.

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y la multiplicación]

i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a=b$.

Dem (i) Por hip. sabemos que:

$$a+c=b+c \quad \ldots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (C6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$c+c_1=0 \quad \ldots (2)$$

Por propiedades de la igualdad:

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1 = b+(c+c_1)$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1 = b+(c+c_1)$$

$$\Longrightarrow \quad a+\underbrace{(c+c_1)}_{0} = b+\underbrace{(c+c_1)}_{0}$$

$$a+0 = b+0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$\underline{a = b.}$$