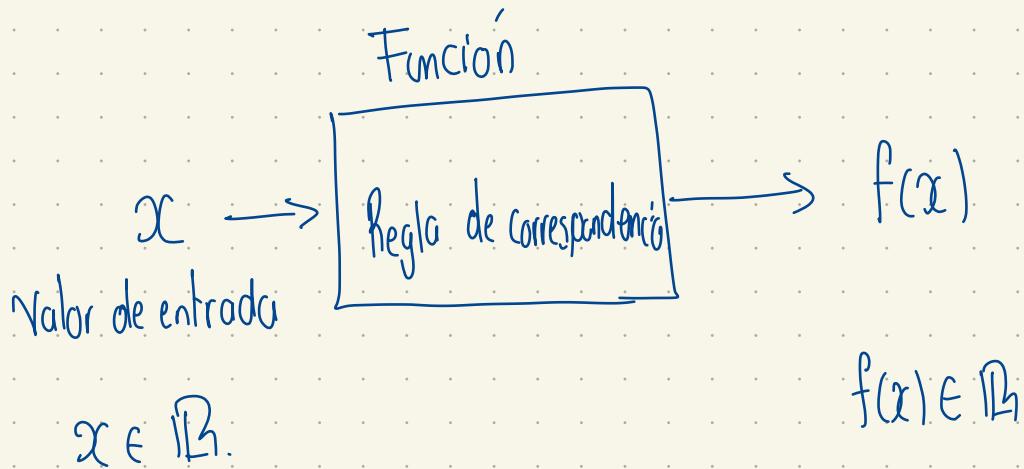


Notas
asesorías
Cálculo
Diferencial

Funciones

Función: Regla de correspondencia/regla matemática que asigna a cada valor de entrada un único valor de salida



Ejemplos:

o) $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$

$x=1$

$f(5) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow f(5) = 6$

Funciones Constantes.

$$f(x) = C$$

↑
Es m valor constante.

Ejemplos:

•) $f(x) = 10$

$$f(0) = 10, \quad f(-5) = 10, \quad f(11) = 10.$$

Funciones polinomiales. grado de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + \underbrace{a_0 x^0}_1$$

Coeficiente principal.

$$a_n \neq 0,$$

$n=1$, : Función lineal (Función polinomial de grado 1).

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$n=2$, : Función Cuadrática (Función polinomial de grado 2)

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

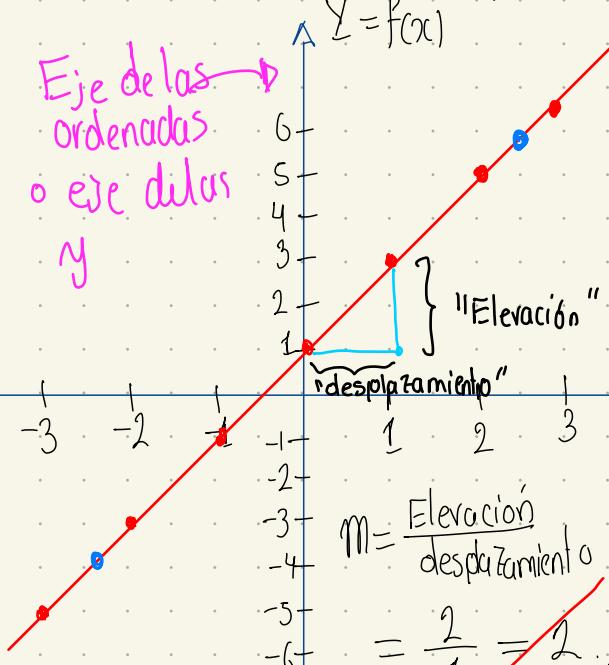
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$f(x) = 2x + 1$$

x	$f(x)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	6

(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 6)

Eje de las ordenadas
o eje ditus
 y



$(x, f(x))$ → Representa un punto en el plano Cartesiano

La Pendiente de la recta

$$f(x) = mx + b$$

Eje de las abscisas
o eje de las X

Ordenada
Origen.

$$2) \quad f(x) = x + 3$$

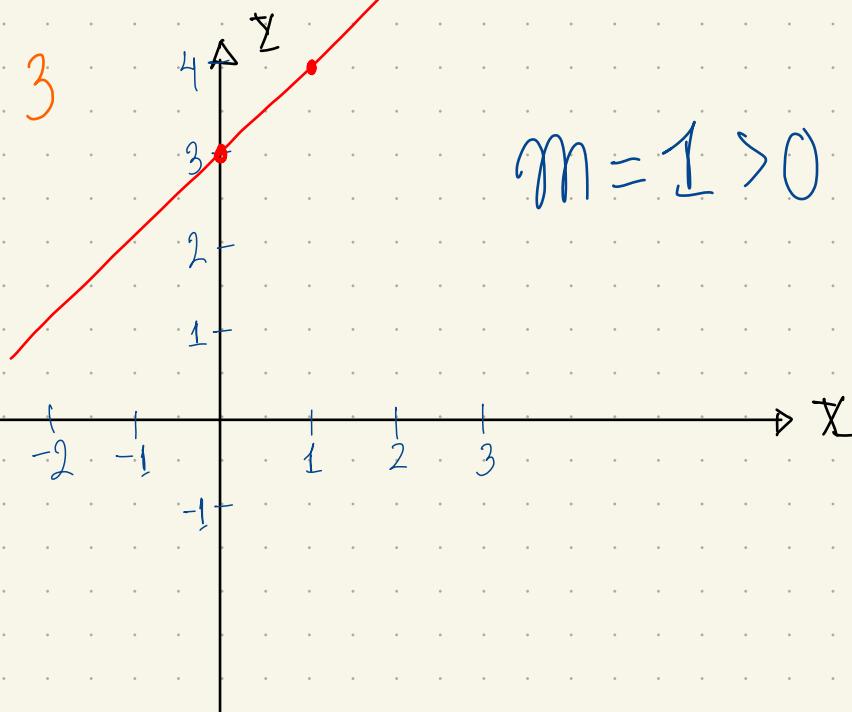
$$x=0 \Rightarrow f(0)=3$$

$$\Rightarrow (0, 3)$$

$$m=1 > 0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=4$$

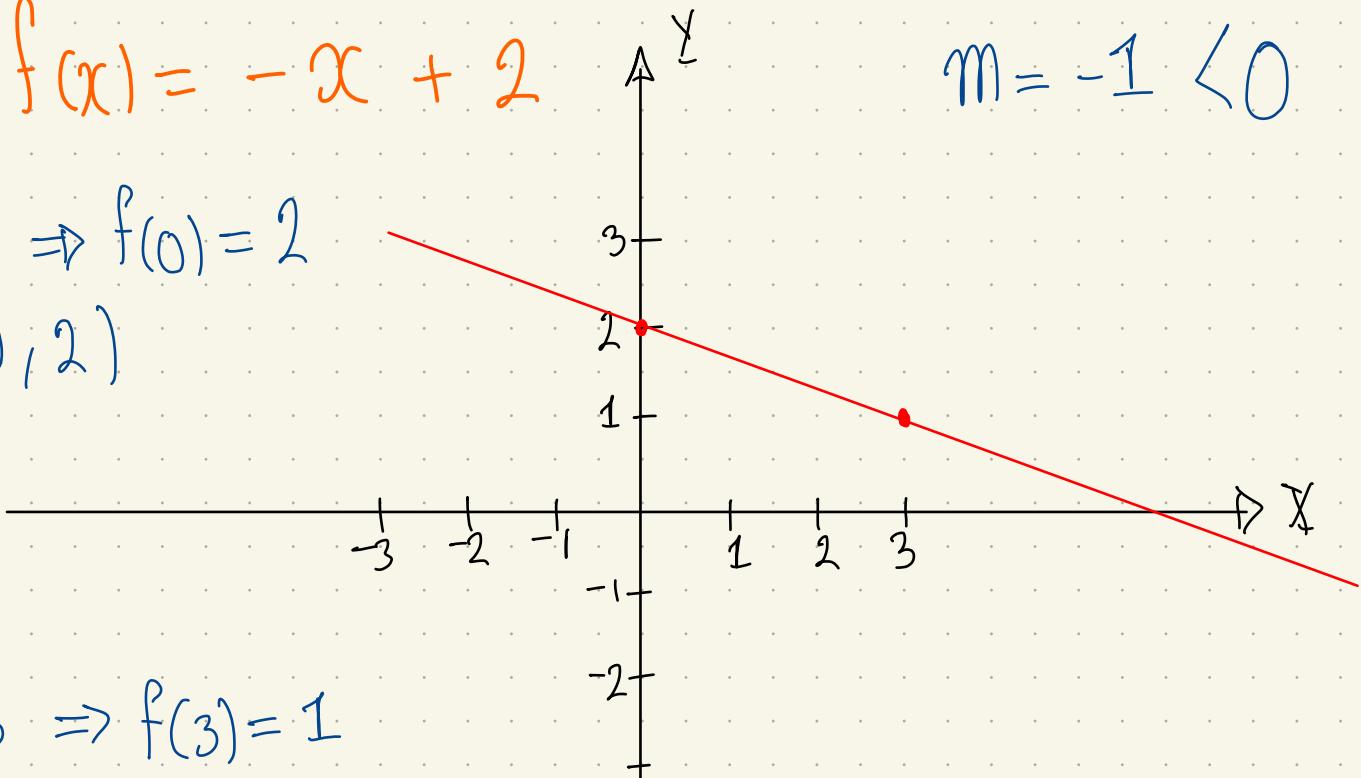
$$\Rightarrow (1, 4)$$



$$\textcircled{3} \quad f(x) = -x + 2 \quad m = -1 < 0$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=2$$

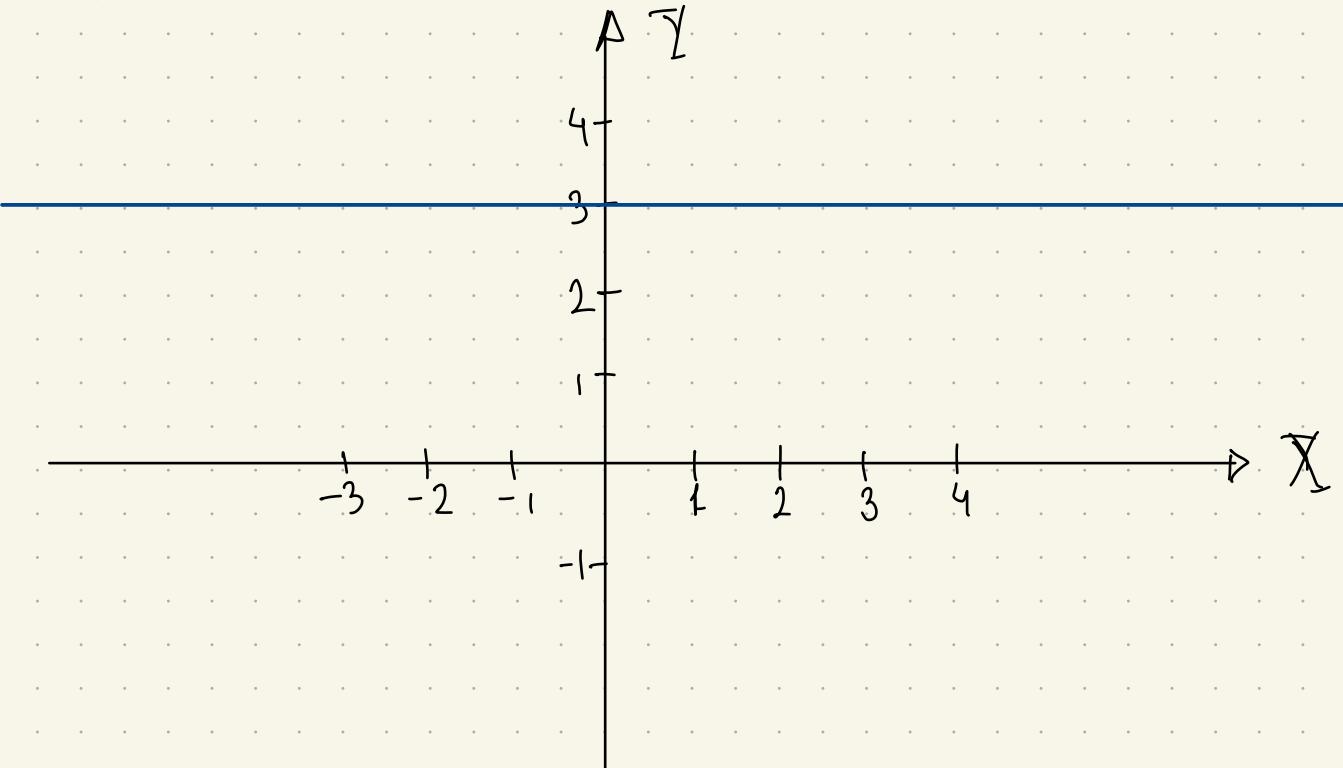
$$(0, 2)$$



$$x=3 \Rightarrow f(3)=1$$

$$(3, 1)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = 0 \cdot x + 3 = 3$$



La forma general de una ecuación lineal es:

$$Ax + By + C = 0$$

$f(x) = 2x + 1$, $y = 2x + 1$

↑ Variable independiente
Variable dependiente (depende de los valores)
(que tome x)

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

= Funciones de la línea recta =

• Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

i) (a, b) punto por el que pasa la línea recta

ii) m pendiente.



$$y - b = m(x - a)$$

Ecuación punto
Pendiente de una
línea recta.

Ejemplo: Encuentra la ecuación punto-pendiente de la linea recta que pasa por el punto $(1, 3)$ y que tiene Pendiente $m=5$.

la ecuación general

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

Ecuación punto-pendiente
de la linea recta
en cuestión

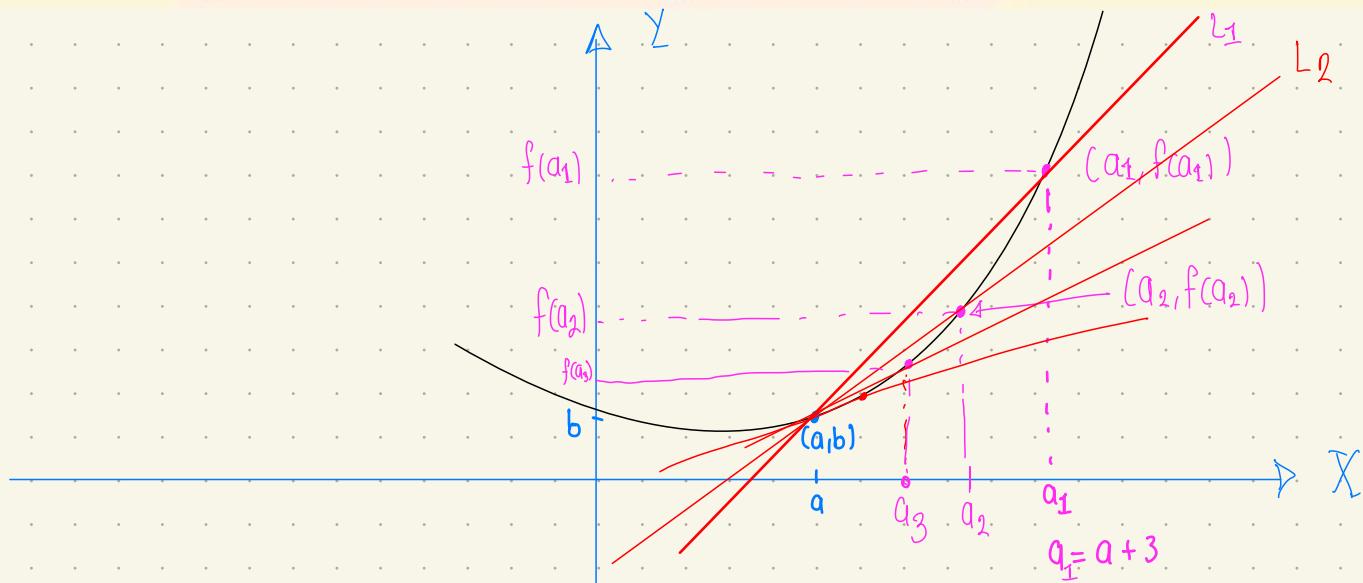
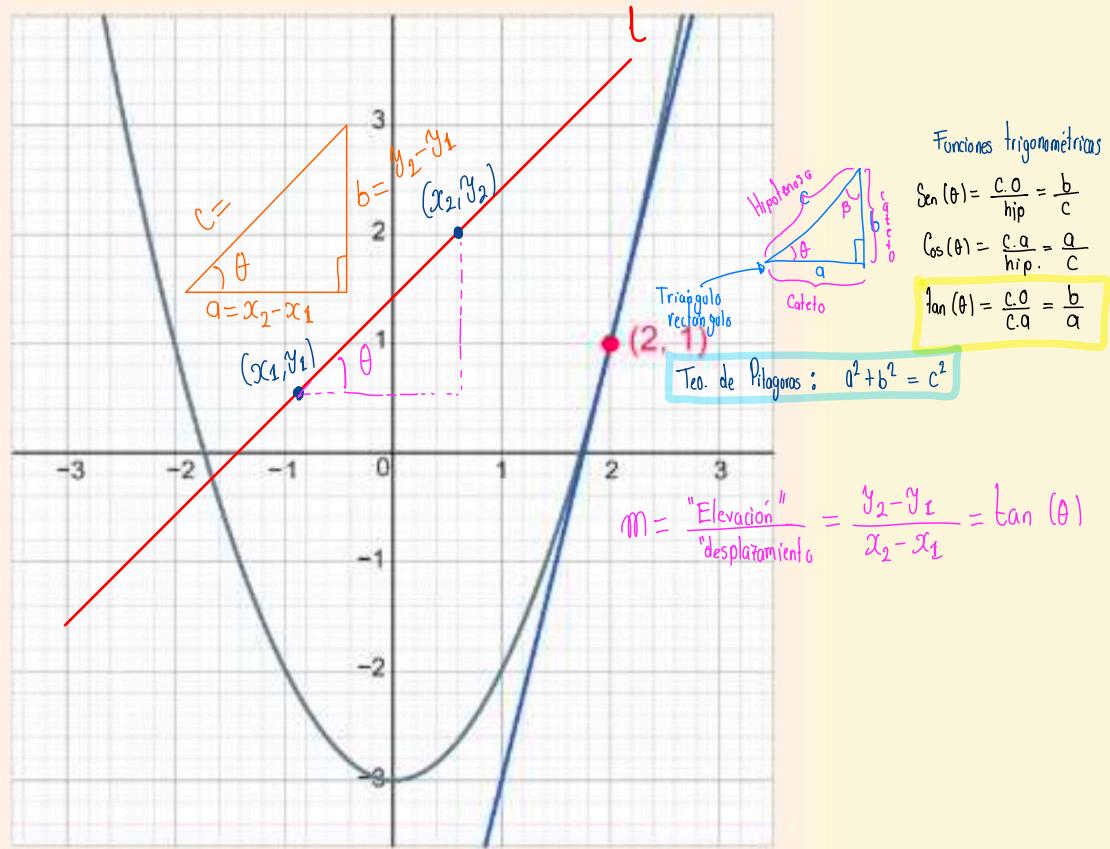
$$\Leftrightarrow y - 3 - 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 2 = 0$$

Ecuación general de
la linea recta que
pasa por $(1, 3)$ y
tiene pendiente $m=5$.

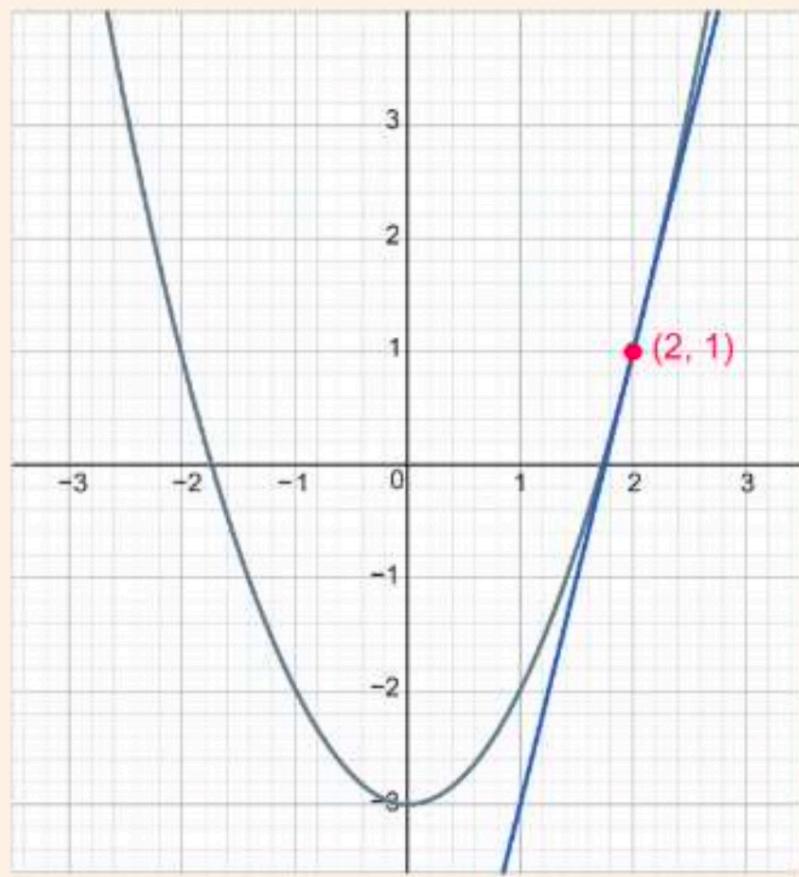
3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Pendiente de L_1 : $\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}$

Pendiente de L_2 : $\frac{f(a_2) - f(a)}{a_2 - a}$

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ en el punto $x=2$
Coincide con la pendiente de la recta tangente a
la gráfica de la función en el punto $(2, 1)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=2} = 2 \cdot x \Big|_{x=2}$$

$= 4$

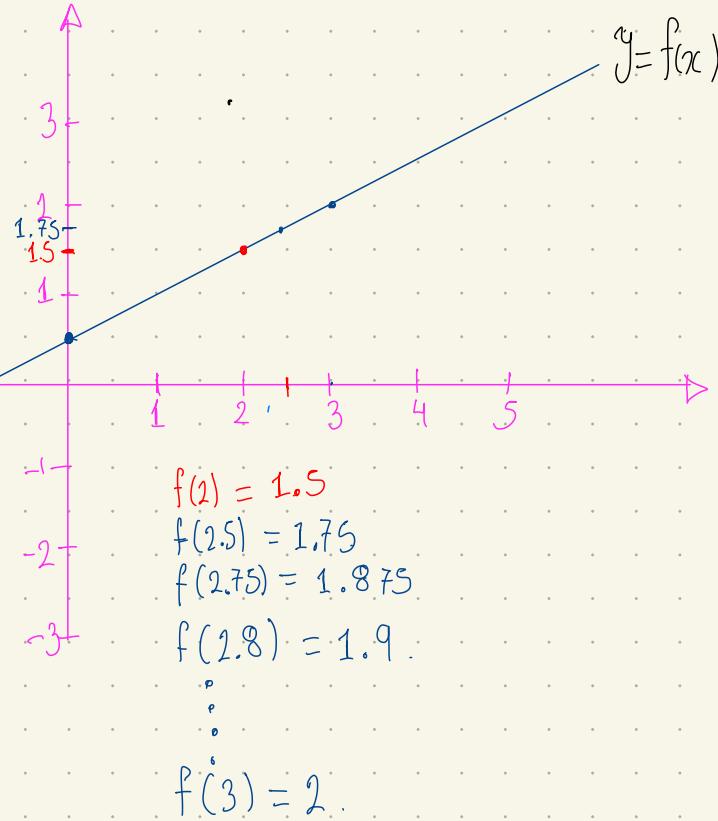
$$f'(2)$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

"A que valor (si existe) se acerca la función cuando x se acerca a 3?"

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$



la pendiente de la recta

tangente (en caso de que exista)
 a la gráfica de mi función
 en $(a, f(a))$.

$$= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= la derivada de la función f
 en el punto $x=a$.

Calcula los siguientes términos de la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, márcalos en la recta numérica y responde las siguientes dos preguntas.

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$a_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$$

$$a_{50} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$$

$$a_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

$$a_{500} = 1 - \frac{1}{500} = 0.998$$

$$a_{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Los puntos a_1 , a_2 y a_3 ya están marcados en la recta numérica, ahora marca los valores a_n que obtuviste.



a) ¿Qué pasa con los valores de a_n cuando n va creciendo?

.....

b) ¿Qué crees que pase si calculas a_{5000} , a_{10000} y a_{50000} ? ? 0.99998

.....

Problemario.

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

$$f(x) = x^2 + 2$$

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$ $a=1$

Solución:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Def: de } m_{\tan} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2] - [1^2 + 2]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1^2 + 2 \cdot 1 \cdot h + h^2 + 2] - 3}{h}$$

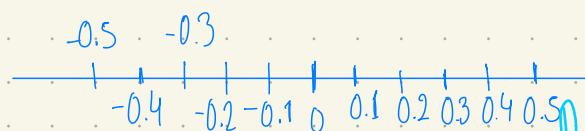
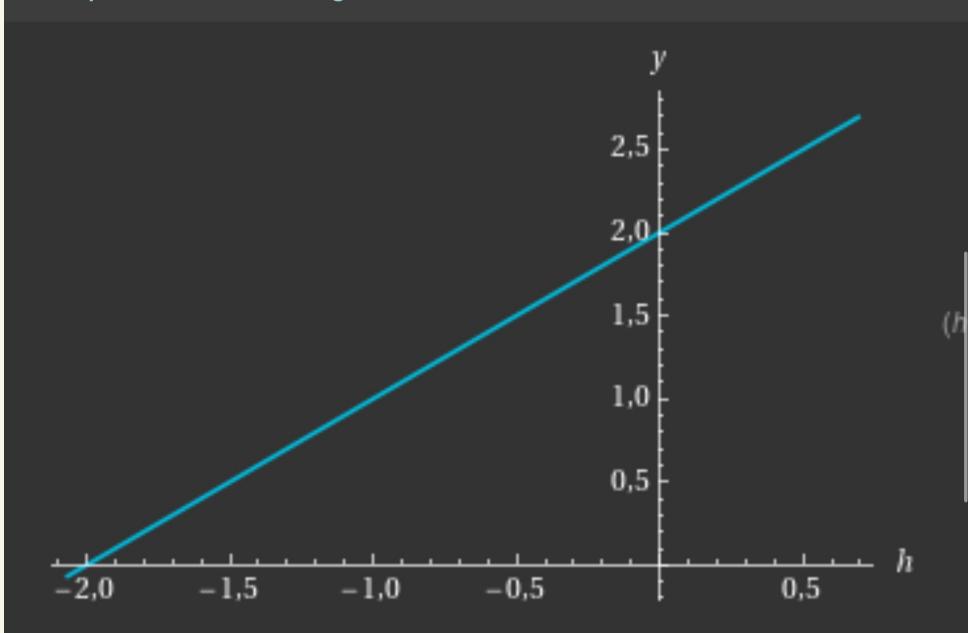
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h + 3) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 3 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

h	$\frac{h^2 + 2h}{h}$
-0.5	1.5
-0.4	1.6
-0.3	1.7
-0.2	1.8
-0.1	1.9
0	2
0.1	2.1
0.2	2.2
0.3	2.3
0.4	2.4
0.5	2.5

Representaciones gráficas



Cuando $h \neq 0$

$$\frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 = 0 + 2 = 2$$

Si $f(h) = g(h)$ para todo $h \neq 0$
ent. $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)$

• $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$

Límite de los
Pendientes de los
rectas secantes cuando
 $x=1$ y esto sabemos
que es igual a la
Pendiente de la recta tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x=1$ es: 2

i.e.

$$\underline{m_{\text{tan}} = 2}$$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

$$f(x) = x^2 + 2 \quad , \quad x=1 \quad , \quad y = f(1) = 3$$

$$m_{tan} = 2, \quad (1, 3)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

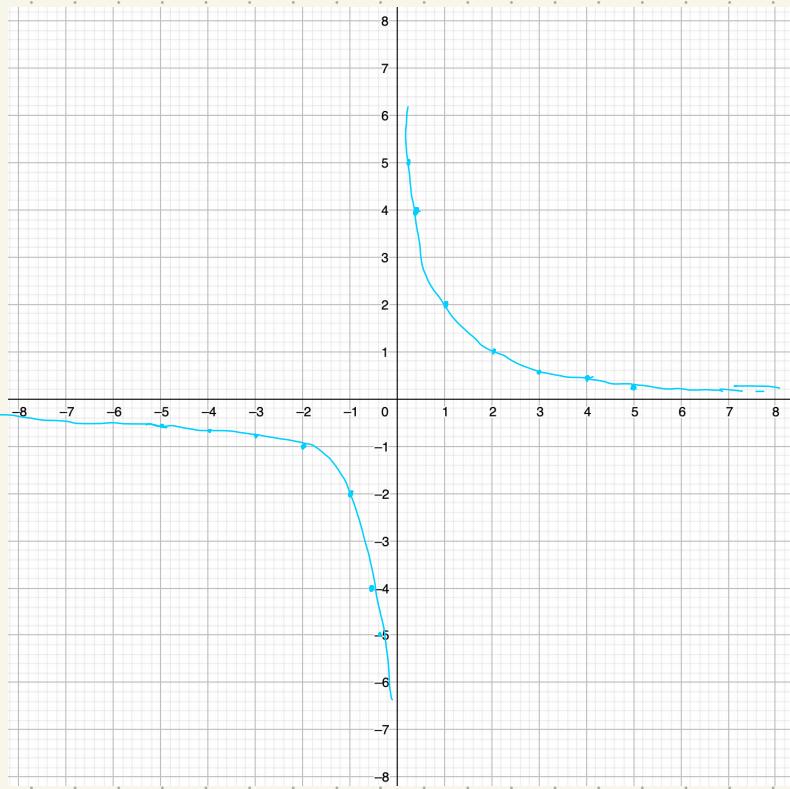
$$\Leftrightarrow y = 2x - 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 2x + 1}$$

Ecuación de la recta tangente a
la gráfica de la función f
en el punto $x=1$.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

x	$f(x) = \frac{2}{x}$
-5	$\frac{2}{-5} = -0.4$
-4	-0.5
-3	-0.666
-2	-1
-1	-2
0	⚠️
1	2
2	1
3	0.6666
4	0.5
5	0.4



x	$F(x)$
-5	-0.4
-4	-0.5
-3	-0.6666666666666667
-2	-1
-1	-2
0	⚠️
1	2
2	1
3	0.666666666666667
4	0.5
5	0.4

x	$F(x)$
-1	-2
-0.9	-2.222222222222222
-0.8	-2.5
-0.7	-2.85714285714286
-0.6	-3.33333333333333
-0.5	-4
-0.4	-5
-0.3	-6.66666666666667
-0.2	-10
-0.1	-20
0	⚠️
0.1	20
0.2	10
0.3	6.66666666666667
0.4	5
0.5	4
0.6	3.33333333333333
0.7	2.85714285714286
0.8	2.5
0.9	2.22222222222222
1	2

Geogebra

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en

$x = 2$ $a = 2$

Solución

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4 - 2(2+h)]}{2(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-2h]}{2(2+h)} \stackrel{0}{\circ} h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2h) \cdot 1}{2h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h}$$

$$f(a+b) = \frac{2}{a+b}$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f(a) = \frac{2}{a}$$

$$(f(1+1)) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$4 - 4 - 2h = -2h$$

(-1) ✓

$$= \frac{-1}{2+0}$$

$$= \frac{-1}{2} \quad \therefore m_{\tan} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad (2, f(2)) = (2, 1) \\ (a, b)$$

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{a+h} - \frac{2}{a}}{h}$$

$$2a - 2a - 2h = -2h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{2a - 2(a+h)}{a(a+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{-2h}{a(a+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-2h}{a(a+h)} \right] \stackrel{0}{\div} \stackrel{0}{\frac{h}{1}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-2}{a(a+0)}$$

$$= \frac{-2}{a^2}$$

Paru $a = 2$

$$m_{\tan} \Big|_{a=2} = \frac{-2}{2^2} = \frac{-1}{2}$$

$$m_{\tan} = \frac{-2}{a^2}$$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(5+h)-1} - \sqrt{5-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+4} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+4) - 4}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 1/4$$

Por lo tanto, $m_{tan} = \frac{1}{4}$.



$$x \quad f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1	0
2	1
3	1.41
4	1.73
5	2
6	2.23
7	2.44
8	2.64

$$x = -5 \quad ? \quad f(-5) ?$$

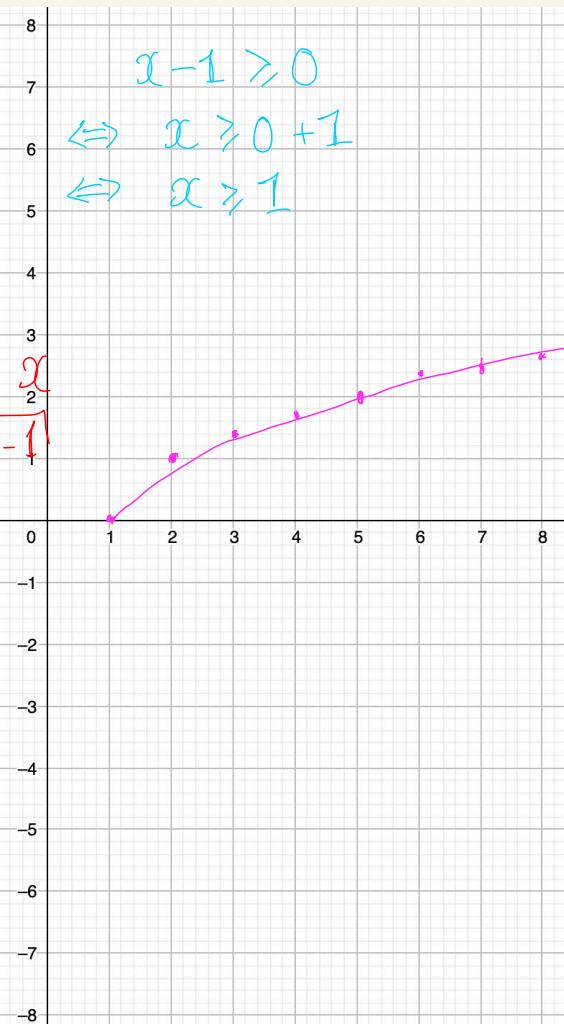
$$f(-5) = \sqrt{-5-1} \\ = \sqrt{-6}$$

¿Porque los valores de x en la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ estan bien?

$$x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



x	F(x)
1	0
2	1
3	1.4142135623731
4	1.73205080756888
5	2
6	2.23606797749979
7	2.44948974278318
8	2.64575131106459
9	2.82842712474619
10	3
11	3.16227766016838
12	3.3166247903554
13	3.46410161513775
14	3.60555127546399
15	3.74165738677394
16	3.87298334620742
17	4
18	4.12310562561766
19	4.24264068711928
20	4.35889894354067
21	4.47213595499958

ACTIVIDAD PARA EL CUADERNO

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x .

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$

2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$

4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$

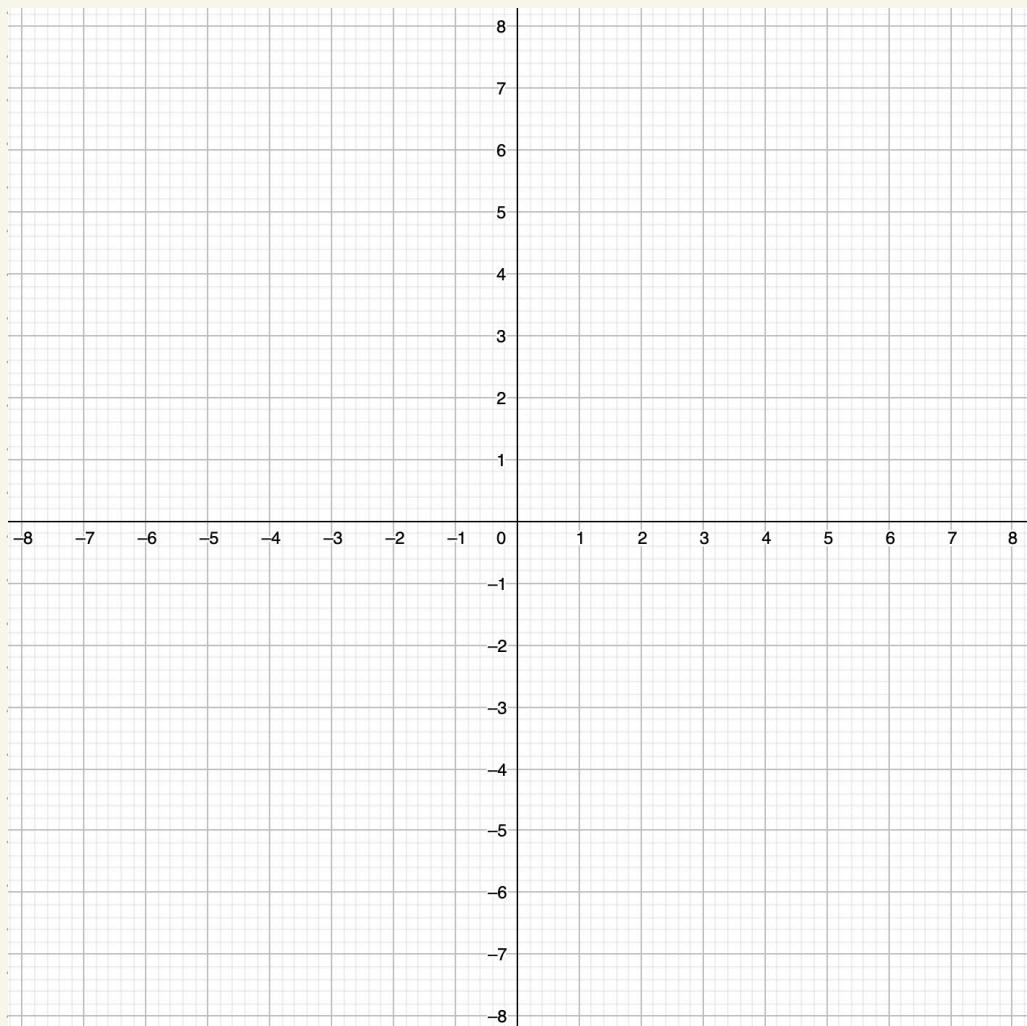
8. $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

11. $f(x) = -2x^3 + x$, $x = 2$ 12. $f(x) = 8x^3 - 4$, $x = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x = -1$ 14. $f(x) = \frac{4}{x - 1}$, $x = 2$



$$\textcircled{1} \quad f(x) = x^2 - 6 \quad , \quad x=3 \quad / \quad a=3$$

Solución:

$$h(x) = x^n$$

$$h'(x) = n x^{n-1}$$

$$g(x) = 6$$

$$g'(x) = 0$$

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Definición 4.1.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a . Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existe, entonces la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente m_{\tan} .

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3+h)^2 - 6] - [3^2 - 6]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[9 + 6h + h^2 - 6] - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h \\ &= 6 + 0 \\ &= 6 \\ \therefore m_{\tan} &= 6 \end{aligned}$$

Ecu. punto-pendiente

$$y - y_1 = \underline{m}(x - x_1)$$

m_{\tan}

$$(x_1, y_1) = (3, 3)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, \quad y_1 = f(x_1) \\ &= f(3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$m_{\tan} = 6, \quad (x_1, y_1) = (3, 3)$$

$$y - 3 = 6(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 6x - 18 + 3$$

$$\Leftrightarrow \textcolor{red}{y = 6x - 15}$$

Ecación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6$ en el punto $(3, 3)$.

$$\textcircled{14} \quad f(x) = \frac{4}{x-1}, \quad x=2 / a=2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{4}{(2+h)-1} \right] - \left[\frac{4}{2-1} \right]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{1+h} - 4}{h} \quad \frac{4}{1+h} - 4 = \frac{4-4-4h}{1+h} \\
 &\quad = \frac{-4h}{1+h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-4h}{1+h}}{h} \quad \frac{-4h}{1+h} \div \frac{h}{1} = \frac{-4h}{h(1+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{1+h} \quad = \frac{-4}{1+h}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{1+0}$$

$$= -4$$

$$\therefore M_{tan} = -4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$k(x) = \frac{\textcircled{4} f(x)}{(x-1) g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{\cancel{(x-1)} \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad k'(2) = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1} = \underline{\underline{-4}}$$

$$M_{tan} = -4, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = f(x_1) = f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$$
$$(2, 4)$$

$$y - 4 = -4(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y = -4x + 8 + 4$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = -4x + 12} \rightarrow$$

la ecuación de la recta tangente
a la gráfica de la función
 $f(x) = \frac{4}{x-1}$ en el punto $(2, 4)$.

$$16. f(x) = 4 - \frac{8}{x}, x = -1$$

$$-8 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Solución:

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= +8x^2 \\ = \frac{8}{x^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[4 - \frac{8}{(-1+h)}\right] - \left[4 - \frac{8}{-1}\right]}{h}$$

$$x = -1 \\ = \frac{8}{1} = 8$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{4(-1+h) - 8}{h-1}\right] - 12}{h}$$

$$\frac{-4+4h-8}{h-1} = \frac{4h-12}{h-1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4h-12}{h-1} - 12}{h}$$

$$\frac{4h-12}{h-1} - 12 = \frac{4h-12-12h+12}{h-1}$$

$$= \frac{-8h}{h-1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-8h}{h-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-8h}{h-1} \right] \stackrel{0}{\circ} \frac{h}{1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8h}{h(h-1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8}{h-1}$$

$$= \frac{-8}{0-1} \quad \therefore m_{\tan} = 8$$

$\xrightarrow{}$

$$= \underline{8}$$

$$x_1 = -1, \Rightarrow y_1 = f(-1) = 4 - \frac{8}{(-1)} = 4 + 8 = 12$$

$(-1, 12)$

$$y - 12 = 8(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 8x + 8 + 12$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 8x + 20}$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = -3x^2 + 10, \quad x = -1$$

$$-3(-1+h)^2 = -3(1-2h+h^2)$$

$$= -3 + 6h - 3h^2$$

Solución:

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-3(-1+h)^2 + 10] - (-3(-1)^2 + 10)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3+6h-3h^2+10}{h} - 7$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h^2+6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[-3h+6]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -3h+6$$

$$= -3(0)+6$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

$$\therefore m_{\tan} = \underline{\underline{6}}, \quad x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-1) = 7$$

$$(-1, 7)$$

$$y-7 = 6(x - (-1)) \Leftrightarrow y-7 = 6(x+6)$$

$$\Leftrightarrow y = 6x + 6 + 7$$

$$\Leftrightarrow y = 6x + 13$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -3x + 1$ en el punto $(-1, 7)$ es:

$$\underline{y = 6x + 13}$$

⑨ $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

Solución:

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$\begin{aligned} & (1+h)^2 - 3(1+h) \\ &= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h \\ &= h^2 - h - 2 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h - 2 + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h - 1$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\therefore m_{\tan} = -1$$

$$x_1 = 1 \quad y \quad y_1 = f(1) = -2, \quad (1, -2)$$

$$y - (-2) = (-1)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -x - 1}}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto $(1, -2)$ es:

$$\underline{\underline{y = -x - 1}}$$

¿Pendiente en $x=3/2$?

Solución:

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3/2+h) - f(3/2)}{h}$$
$$\frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{2}}{h} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{18}{4}}{h} = \frac{-\frac{9}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{9}{4} + 3h + h^2 \right) - \frac{9}{2} - 3h \right] - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}}{h}$$
$$\frac{-\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}{h} = \frac{-\frac{18}{4}}{h} = \frac{-\frac{9}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h^{2-1} \quad // \quad \frac{h^2}{h} = \frac{h \cdot h}{h} = h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h$$

$$= 0.$$

$$m_{\tan} = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad y_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{4} - \left(\frac{9}{2}\right) \frac{18}{4}$$
$$= \underline{\underline{-\frac{9}{4}}}$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$y - \left(-\frac{9}{4}\right) = 0 \cdot (x - \frac{3}{2})^0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{9}{4}}}$$

(10) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

Solución:

$$-(x+h)^2 = -x^2 - 2xh - h^2$$

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h - 3] - [-x^2 + 5x - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h - 3 + x^2 - 5x + 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 5h - 2xh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[-h + 5 - 2x]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2x + 5 - h$$

$$= -2x + 5 - 0$$

$$\overline{-2x + 5}$$

∴ $m_{tan} = -2x + 5$

En el punto $x = -2$, $m_{tan} = -2(-2) + 5 = 9$

$$\therefore m_{tan} \Big|_{x=-2} = 9$$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

Solución:

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2 + 5x - 3)$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= -\frac{d}{dx}(x^2) + 5 \frac{d}{dx}(x)$$

$$= -2 \cdot x^{2-1} + 5 \cdot 1 \cdot x^{1-1}$$

$$= -2 \cdot x + 5$$

$$m_{\tan} \Big|_{x=-2} = 9 \quad f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2, \quad y_1 = f(-2) = -(-2)^2 + 5(-2) - 3 \\ &= -4 - 10 - 3 \\ &= -17 \end{aligned}$$

$$(-2, -17)$$

$$y - (-17) = 9(x - (-2))$$

$$\Leftrightarrow y = 9x + 18 - 17$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 9x + 1}$$

(14)

$$f(x) = \frac{4}{x-1}, \quad x=2.$$

Solución:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{(x+h)-1} - \frac{4}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4x-4 - 4x-4h+4}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{(x-1)[(x+h)-1]} \stackrel{0}{\underset{0}{\circ}} h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

∴ $m_{\tan} = \frac{-4}{(x-1)^2}$

$$m_{\tan} \Big|_{x=2} = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1^2} = -4$$

$$\therefore m_{\tan} = -4$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = f(x_1) = \frac{4}{2-1} = 4$$

(2, 4)

$$y - 4 = -4(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -4x + 8 + 4$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -4x + 12}}$$

$$13. f(x) = \frac{1}{2x}, \quad x = -1$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h} = \frac{2x - 2(x+h)}{2(x+h)2(2x)}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x - 2x - 2h}{h[2(x+h)2(2x)]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2)}{h(2(x+h)2(2x))}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{2(x+h)2(2x)} = \frac{-2}{4x^2 + h}$$

$$M_{tan} = \frac{-2}{4(-1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad M_{tan} = -\frac{1}{2}$$

Ecuacion punto-pendiente de la recta

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - (-1/2) = -1/2(x - (-1)) \quad x_1 = -1$$

$$y = -1/2x - 1/2 - 1/2 \quad y_1 = \frac{1}{2(-1)}$$

$$y = -1/2x - 1$$

$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $y = -\frac{1}{2}$

$$16. f(x) = 4 - \frac{8}{x}, \quad x = -1$$

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

prop 1.

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

(x+h)

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{\left[4 - \frac{8}{-1+h}\right] - \left[4 - \frac{8}{-1}\right]}{h}$$

prop 2

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{\left[4(-1+h) - 8\right]}{h-1} - 12$$

prop 2

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{4h - 12}{h-1} - 12$$

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\left(\frac{-8h}{h-1}\right)^h$$

Resolvemos x2
Ex y en x1

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-8}{h-1} \right] \div h$$

Ex y en x1

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8h}{h(h-1)} = \frac{8}{h-1}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8}{h-1} = 8 \quad m_{tan} = 8$$

Ecuación punto - pendiente en la recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = 8$$

$$y - 12 = 8(x - (-1))$$

$$x_1 = -1$$

$$y = 8x + 8 + 12$$

$$y_1 = 4 - \frac{8}{(-1)} = 4 + 8 = 12$$

$$y = 8x + 20$$

$$y_1 = 12$$

$$(v-1)^{-2} = -2(v^{-1})^{-1}$$

15. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x=0 \quad \frac{-4}{2(x-1)^3}$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x-1+h)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}}{h}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x-1+h)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}}{h} = \frac{(x-1)^2 - (x-1+h)^2}{(x-1+h)^2(x-1)^2}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x-1)h - h^2}{(x-1+h)^2(x-1)^2}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x-1)h - h^2}{(x-1+h)^2(x-1)^2} \stackrel{h \rightarrow 0}{=} h$$

$$M_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x-1)}{(x-1)^2(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{-2}{(0-1)^3} = \frac{2}{-1} = 2$$

$$M_{tan} = 2$$

Ecuación punto-pendiente de la recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = 2$$

$$x_1 = 0$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y_1 = \frac{1}{(0-1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$y = 2x - 0 + 1$$

$$y_1 = 1$$

$$y = 2x + 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x-1)h - h^2}{(x-1+h)^2(x-1)} \stackrel{0}{\circ} h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh + 2h - h^2}{(x^2 - 2x + 2xh + 1 - 2h + h^2)h}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[-2x + 2 - h]}{(x^2 - 2x + 2xh + 1 - 2h + h^2)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x + 2 - h}{x^2 - 2x + 2xh + 1 - 2h + h^2} \stackrel{0}{\circ} h^2$$

$$= = \frac{-2x + 2 - 0}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2(x-1)}{(x-1)^2} \quad x \neq 1,$$

$$= \frac{-2}{x-1}$$

$\overbrace{\hspace{10em}}$

$$m_{\tan} \Big|_{x=0} = \frac{-2}{0-1} = 2.$$

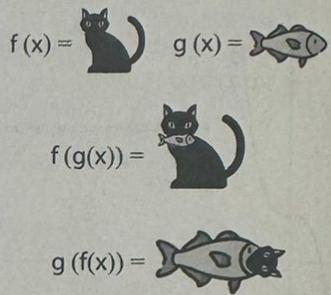
$$x=0, y=1$$

$$y-1 = 2(x-0)$$

$$\underline{y = 2x + 1}$$

Sean dos funciones f y g , con las cuales ejecutaremos las operaciones de meme $f(g(x))$:

- a. Suma $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$
- b. Resta $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$
- c. Multiplicación $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$
- d. División $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
- e. Composición $(f \circ g) = f[g(x)]$



Ejemplo 3

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = -3$$

$$f(x) = x^2$$

- a. $f(x) + g(x) = (x + 2) + (-3) = x + 2 - 3 = x - 1$
- b. $f(x) - g(x) = (x + 2) - (-3) = x + 2 + 3 = x + 5$
- c. $f(x) \cdot g(x) = (x + 2)(-3) = -3x - 6$
- d. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x + 2)}{-3} = -\frac{(x + 2)}{3}$
- e. Composición $(f \circ g) = f(-3) = -3 + 2 = -1$

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

Ejemplo 4

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6, \quad g(x) = x + 1$$

- a. $f(x) + g(x) = (x^2 + 5x + 6) + (x + 1) = x^2 + 5x + 6 + x + 1 = x^2 + 6x + 7$
- b. $f(x) - g(x) = (x^2 + 5x + 6) - (x + 1) = x^2 + 5x + 6 - x - 1 = x^2 + 4x + 5$
- c. $f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 5x + 6)(x + 1) = x^3 + x^2 + 11x + 6$
- d. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2 + 5x + 6)}{x + 1}$

e. Composición $(f \circ g)(x) = f(x+1) = (x+1)^2 + 5(x+1) + 6$

$$\begin{aligned} &= x^2 + 2x + 1 + 5x + 5 + 6 \\ &= x^2 + 7x + 12 \end{aligned}$$

función identidad



Ejemplo 5

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, g(x) = x$$

- $f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$
- $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$
- $f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x^2 - 1})x = x\sqrt{x^2 - 1}$
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$
- Composición
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$



Tesoro digital



Revisa el QR o el link propuesto sobre algunas recomendaciones y ejemplos adicionales sobre el contenido de operaciones con funciones:



Ejemplo 6

En una agencia de autos compactos se pide realizar el modelado que exprese el descuento de \$10,000.00 del precio regular de un auto que se ofertará en promoción. Se desea cobrar el 95% del precio regular. Esta situación se da cuando los autos no tuvieron la demanda pronosticada o llegarán nuevos modelos.

Veamos cómo podremos resolver la situación.

Planteamiento

Precio del auto: x

Precio del auto con descuento: $f(x) = x - 10000$

El 95% del precio del auto: $g(x) = 0.95x$

Entonces podemos decir que la expresión composición es que incluya tanto el precio del auto con descuento y el 95% a cobrar es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0.95x) = 0.95x - 10000$$

El precio del auto compacto más económico para 2024 está en razón de 230 000, considerando la versión inicial o también llamada austera.

Entonces el cálculo queda de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = 0.95(230000) - 10000 = \$208500.00$$

El precio final del auto a cobrar es de \$208 500.00



Reto educativo 3

Instrucciones: puedes trabajar en equipos de cuatro o cinco personas para resolver cada ejercicio. Al finalizar comparte los resultados, de esta manera se ejerce la coevaluación entre compañeros de equipo. Trabaja en tu libreta.

1. Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión.

a. $f(x) + g(x) = (f+g)(x) = (x+2) + (x-4) = x+2+x-4 = 2x-2$

b. $f(x) - g(x) = (f-g)(x) = (x+2) - (x-4) = x+2-x+4 = 6$

c. $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) = (x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$

d. $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{x-4}$

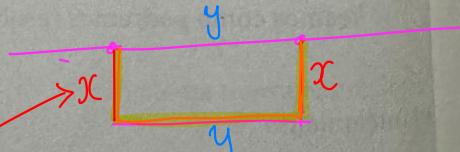
e. $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (x-4) + 2 = x-2$.

- $f(x) = x+2, g(x) = x-4$

- $f(x) = x^2 - 3, g(x) = \sqrt{x}$

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}, g(x) = 4$

- $f(x) = x^2 - 4x + 2, g(x) = x + 1$



$$x + y + x = 800 \Leftrightarrow 2x + y = 800$$

2. Decidiste sembrar manzanilla y yerba buena en tu casa. Para ello requieres cercar una porción de tu jardín y cuentas con una pared, para cercar dispones de 800 metros de malla y solo vas a cercar tres lados del rectángulo.

Expresa el área del jardín en términos de su ancho.

$$\Leftrightarrow y = 800 - 2x$$

$$A = b \cdot h$$

$$= y \cdot x$$

$$= (800 - 2x)x$$

$$= 800x - 2x^2$$

$$f(x) = x^3 - 3, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (\sqrt{x})^3 - 3$$

$$= x^{3/2} - 3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= \sqrt{x^3 - 3}$$

$$= \sqrt{x^3 - 3} . |$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3} , \quad g(x) = 4$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= \sqrt{(4)^2 - 3}$$
$$= \sqrt{13}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$0 = 4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 , \quad g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= (x+1)^2 - 4(x+1) + 2$$
$$= x^2 + 2x + 1 - 4x - 4 + 2$$
$$= x^2 - 2x - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= (x^2 - 4x + 2) + 1$$
$$= x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = x^2 - 2x - 1$$

Proxima semana (lunes) - 1 / hoja milimétrica
 (Entrega el miércoles 14 de septiembre)

3. Vamos a analizar la siguiente situación: el costo de producir playeras deportivas está dado por $C(x)=30x+1500$ y el ingreso por cada playera es de \$180.00, ¿Cuál es la utilidad, considerando las expresiones anteriores?

Comparte el planteamiento con tus compañeros y docente, para reconocer la operación con funciones que fue necesaria realizar para encontrar la utilidad.

Plantea el procedimiento y comenta con tus compañeros la solución a la situación.

Es importante que reconozcas que los costos están compuestos por costo fijo y costo variable de producir una pieza, así como que el ingreso es el precio de venta por producto.

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo} = 180x - C(x) = 180x - 30x - 1500 \\ = \underline{\underline{150x - 1500}}$$



CIERRE



Reto educativo

Instrucciones: trabaja en equipos o pares para identificar de los ejemplos en sagital la función inyectiva, la función suprayectiva, la función biyectiva y la relación.

Para cerrar esta progresión será necesario que compares tus resultados con tus compañeros y el grupo pueda validar las respuestas para que todos tengan la misma información.

- La representación sagital de los jugadores destacados y los dorsales que los identifica en sus diversos equipos por ser personajes emblemáticos para el equipo.

