+ ×

− ÷

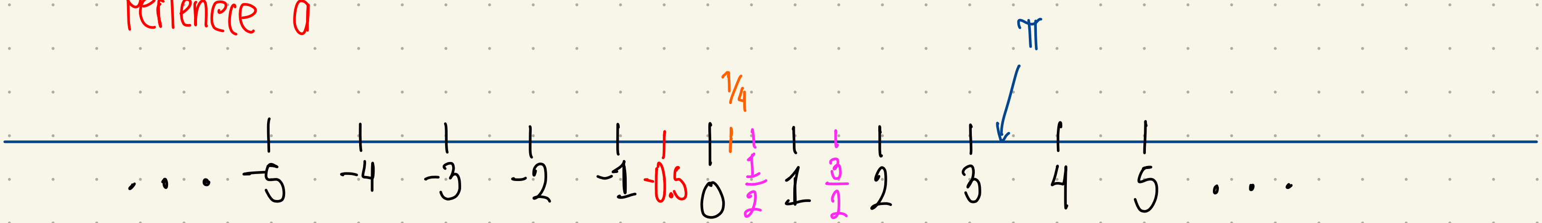
08/Julio/2024

El conjunto de los números reales

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales.

$1 \in \mathbb{R}$, $1/2 \in \mathbb{R}$, $0.3\bar{3} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

"Pertenece a"



Sistema de los números reales.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

•) Existe un único $a+b \in \mathbb{R}$

••) " " " $a \cdot b \in \mathbb{R}$

Sistema de números reales.

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por $\mathbb{R}$ en el cual estan definidas dos operaciones $+$ y $\cdot$ para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$. Estas operaciones son llamadas suma y multiplicacion respectivamente y estan definidas de tal manera que, para cada para de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, existen únicos elementos $a+b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen los siguientes axiomas (llamados axiomas de campo) para todos los elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$

C1.- Cerradura: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

i) $a+b \in \mathbb{R}$ y ii) $a \cdot b \in \mathbb{R}$

C2. Conmutatividad: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen:
(Ley Conmutativa)

i) $a+b = b+a$ y ii) $a \cdot b = b \cdot a$.

C3.- Asociatividad: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:
(Ley asociativa)

i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

C4. Existencia de elemento neutro:

i) Existe 0 en $\mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0+a = a+0 = a.$$ //Neutro aditivo

ii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$ // Neutro multiplicativo.

C5.- Existencia de inversos:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + a_1 = 0$$

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a_2 = 1.$$

C6.- Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:

(Ley distributiva).

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales arbitrarios, entonces se satisfacen:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 1$

i) Distributividad por la izquierda

$$2(3+1) = 8$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$$

ii) Distributividad por la derecha:

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$$2x + 3x = (2+3)x$$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales junto con las operaciones de suma $+$ y producto como ya las conocemos es un campo llamado Sistema de los números reales.

09/Julio/2024

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6+8)x = x(6+8)$ Conmutatividad para el producto
2. $(x+3)y+2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$ Distributividad por la derecha.
3. $(3+5)+2 = 3+(5+2)$
4. $(2+3)+5 = 2+(3+5)$ Asociatividad para la suma.
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x+y)+3 = (y+x)+3$ Conmutatividad para la suma
7. $(1+2)(-3) = 1(-3)+2(-3)$
8. $[(w+3)2]z = [2(w+3)]z$
9. $(-13+z)(2)+7 = [z+(-13)](2)+7$
10. $(a-b)+[-(a-b)] = 0$ // Existencia de inversos para la suma.
11. $(3+4)(5+2) = (3+4)5+(3+4)2$ // Distributividad por la izquierda.
12. $x(y+0)+z = xy+z$
13. $(x+2)+[-(x+2)] = 0$
14. $2(x+y) = 2x+2y$

Distributividad por la izq.

$x(y+0)+z = (x \cdot y + x \cdot 0) + z$
$= (x \cdot y) + z$
$= x \cdot y + z$

$(x+y) \cdot 2 = \cancel{x + y \cdot 2}$

$x = 1, \; y = 1$

$1 + 1 \cdot 2$
$= 1 + 2$
$= 3$

$(1+1) \cdot 2$
$= 2 \cdot 2$

$= 4$

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación "$a=b$" significa que "a es el mismo elemento que b". Dicho de otra forma, "$a=b$" significa que se estan usando simbolos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a=b$, entonces $b=a$ // Simetría

I2) Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$. // Transitividad.

I3) Si $a+c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a \cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c, entonces $a=b$ implica que:

i) $a+c=b+c$ y ii) $a \cdot c = b \cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

"Si y sólo si"

1) $a=b \iff a+c=b+c$

2) $a=b \iff a \cdot c = b \cdot c$.

$a+\underline{5} = 8+\underline{5}$

$\iff a=8$

$a \cdot 2 = 10$

$= 5 \cdot 2$

Consecuencias de las propiedades de los números reales

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y el producto]

i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a=b$.

Dem. i) Por hip. sabemos que:

$$a+c=b+c \quad \ldots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (C6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$c+c_1=0 \quad \ldots (2)$$

Por propiedades de la igualdad:

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1 = b+(c+c_1)$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1 = b+(c+c_1)$$

$$\Longrightarrow \quad a+(c+c_1) = b+(c+c_1)$$

$$a+0 = b+0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$a = b.$$

10/Julio/2024

Observación: los elementos 0 y 1 que aparecen en el axioma 3 son únicos. Esto es, el neutro aditivo y el neutro multiplicativo son los únicos números reales que satisfacen: $a+0=a$ y $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a.

$$z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } z + a = a, \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = 0.$$

"Para todo"

Productos que involucran al cero

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1) $a \cdot 0 = 0$

"Si y sólo si"

2) $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ó $b = 0.$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ ó } b = 2 \\ a = 5 \text{ ó } b = 0 \\ a = 0 \text{ ó } b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$ ✓

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Existe un único número real x tal que: $a + x = b$

2) Si $a \neq 0$, entonces existe un único número real y t.q.

$$a \cdot y = b.$$

$a = 2$ $b = 5$

¿x?

$2 + x = 5$ / $x = 3$

$a = -1$ $b = 4$

¿x?

$-1 + x = 4$ | $x = 5$

$a = 2$, $b = 4$

¿y?

$2 \cdot y = 4$ | $y = 2$.

$a = 8$, $b = 2$

¿y?

$8 \cdot y = 2$.

$$y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Observación:

i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$.

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un unico $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Aplicando el Teorema anterior al caso $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$, se obtiene que existe un único número real x tal que

$$a + x = 0$$

i.e. el inverso aditivo de un número real a es único.

$a = 5$, $x = -5$

$$5 + (-5) = 0$$

$a = -2$

¿x?

$(-2) + x = 0$

Si $x = 2$, ent.

$(-2) + 2 = 0$

$a = 2$

$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$a = \frac{3}{2}$ ¿x?

$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x = 1$

$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{6} = 1$

Definición:

•) Si $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $-a$ al único número real que cumple $a + (-a) = 0$ y se le llama el inverso aditivo de a.

••) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, denotamos por a^{-1} al único número real que cumple $a \cdot a^{-1} = 1$ y se le denomina el inverso multiplicativo de a.

$x \cdot x^{-1} = 1$

Observación: Con esta definición del teorema anterior se tiene que para $a \in \mathbb{R}$,

- El único número real x que satisface la relación $a + x = b$ es $x = b + (-a)$.

- Si además $a \neq 0$, entonces el único número real x que satisface la identidad $a \cdot x = b$ es $x = b \cdot a^{-1}$.

$$2 + x = 5$$

$$x = 5 + (-2)$$

$$= 5 - 2$$

$$= 3$$

$$a + x = b$$

"entonces"

$$\Rightarrow (a + x) + (-a) = b + (-a)$$

$$\Rightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a)$$

$$\Rightarrow x + (a + (-a)) = b + (-a)$$

$$\Rightarrow x + 0 = b + (-a)$$

$$\Rightarrow x = b + (-a)$$

Notación: De ahora en adelante emplearemos la siguiente notación:

- $a - b := a + (-b)$
- Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

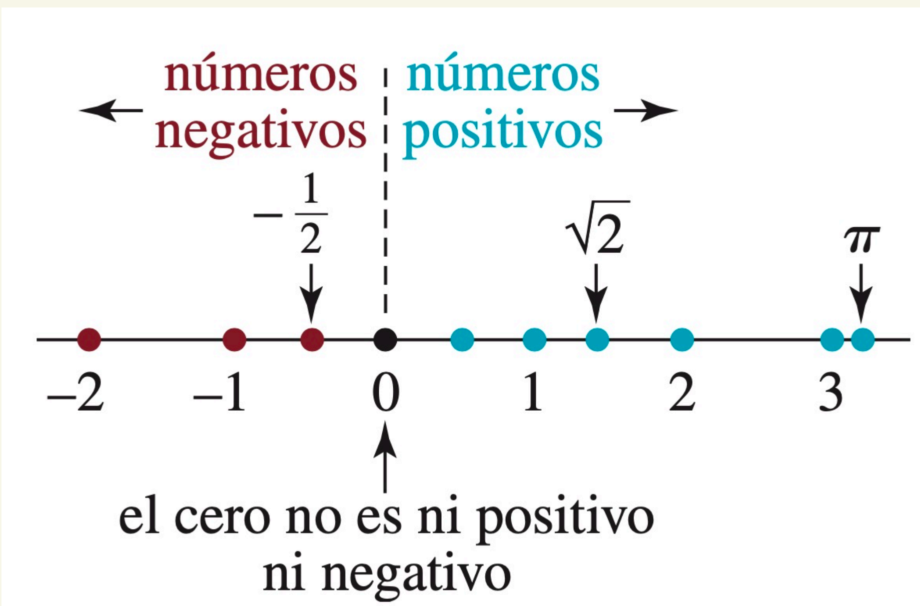
$a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$$a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$5 + (-2) = 5 - 3$$

$$2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$

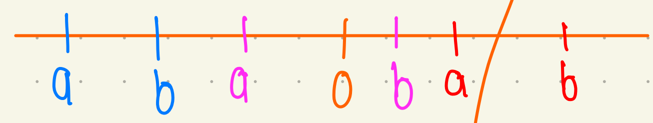


$x \in \mathbb{R}$ es positivo: $x > 0$, $0 < x$.

$x \in \mathbb{R}$ es negativo: $x < 0$, $0 > x$.

"a es estrictamente mas pequeño que b"

Los números reales son ordenados:



Definición: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

- Se dice que **a es menor que b** y se denota por $a<b$ si $b-a$ es número positivo. Geometricamente esto significa que a esta a la izquierda de b en la recta númerica. O bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y se denota como $b>a$.

$$\cancel{\frac{10}{2} < 5}$$

- El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a<b$ o que $a=b$. y se lee como "a es menor o igual que b".

$$\frac{10}{2} \leq 5$$

Relaciones entre los signos de a y -a

Sea $a \in \mathbb{R}$

1) Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo

2) Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

(2) $a=-1 \Rightarrow -a=1$

No supongas que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a.

Relaciones entre los signos de a y a^{-1}

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

1) Si a es positivo, entonces a^{-1} es positivo

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

2) Si a es negativo, entonces a^{-1} es negativo.

(2) $a = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$(-1)(-1) = 1$ ✓

$a = -2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-2}$ ✓

$$a \cdot a^{-1} = \frac{(-2)}{1}\left(\frac{1}{-2}\right)$$

$$= \frac{(-2)(1)}{1(-2)}$$

$5 = \frac{5}{1}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$= \frac{-2}{-2}$$

$$= 1$$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se satisfacen cada una de las siguientes proposiciones:

$(-2)(3) = 2(-3) = -(2 \cdot 3) = -6$

i) $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

ii) $(-1)a = a \cdot (-1) = -a$ $\quad (-1)5 = -5.$

iii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $-(-a) = a$. $\quad -(-2) = 2$

iv) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $\quad (-2)(-4) = 8$

v) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ $\quad -(2+5) = (-2) + (-7)$

$= -7$

vi) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

vii) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$ y $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

(vi) $\quad a = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\underbrace{a^{-1}}_{b})^{-1} =$

$$(a^{-1})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2.$$

vii) Si $a = 2$ y $b = 3$

$$(a \cdot b)^{-1} = (2 \cdot 3)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Leyes de los signos

- $(+)(+) = +$
- $(+)(-) = -$
- $(-)(+) = -$
- $(-)(-) = +$