Notas asesorías Cálculo Diferencial

Funciones

Función: Regla de correspondencia/regla matemática que asigna a cada valor de entrada un único valor de salida

Función

$x \longrightarrow \boxed{\text{Regla de correspondencia}} \longrightarrow f(x)$

Valor de entrada

$x \in \mathbb{R}$. $\qquad f(x) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

Regla de correspondencia

- $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \underline{f(1) = 2}$.

$x = 1$

$f(5) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow f(5) = 6$

Funciones Constantes.

$f(x) = c$

Es un valor constante.

Ejemplos:

- $f(x) = 10$

$$f(0) = 10 \quad , \quad f(-5) = 10 \, , \quad f(11) = 10 .$$

Funciones polinomiales.

grado de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + \underbrace{a_0 \overset{1}{\cancel{x^0}}}_{a}$$

Coeficiente principal.

$a_n \neq 0$,

$n = 1$, : Función Lineal (función polinomial de grado 1).

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

$$f(x) = ax + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \, , \, a \neq 0$$

$n = 2$, : Función Cuadrática (Función polinomial de grado 2)

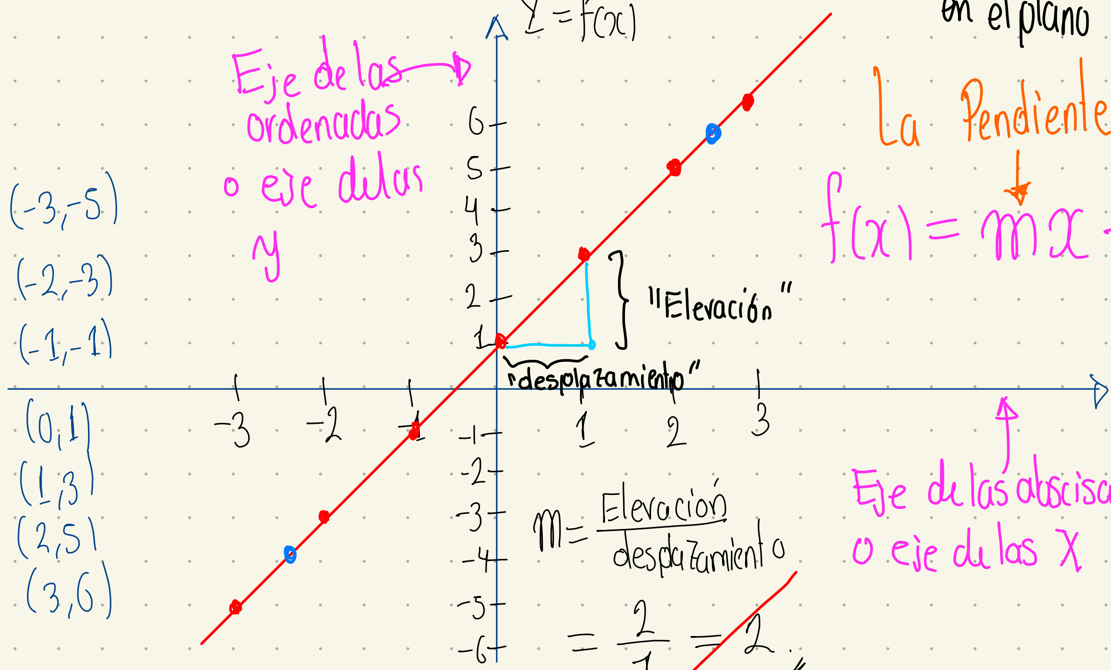
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \, , \, a \neq 0 .$$

$f(x) = 2x + 1$

$(x, f(x))$ ← Representa un punto en el plano Cartesiano

x	$f(x)$	
-3	-5	$(-3,-5)$
-2	-3	$(-2,-3)$
-1	-1	$(-1,-1)$
0	1	$(0,1)$
1	3	$(1,3)$
2	5	$(2,5)$
3	6	$(3,6)$



$$m = \frac{\text{Elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{2}{1} = 2$$

La Pendiente de la recta

$$f(x) = mx + b$$

Ordena al Origen.

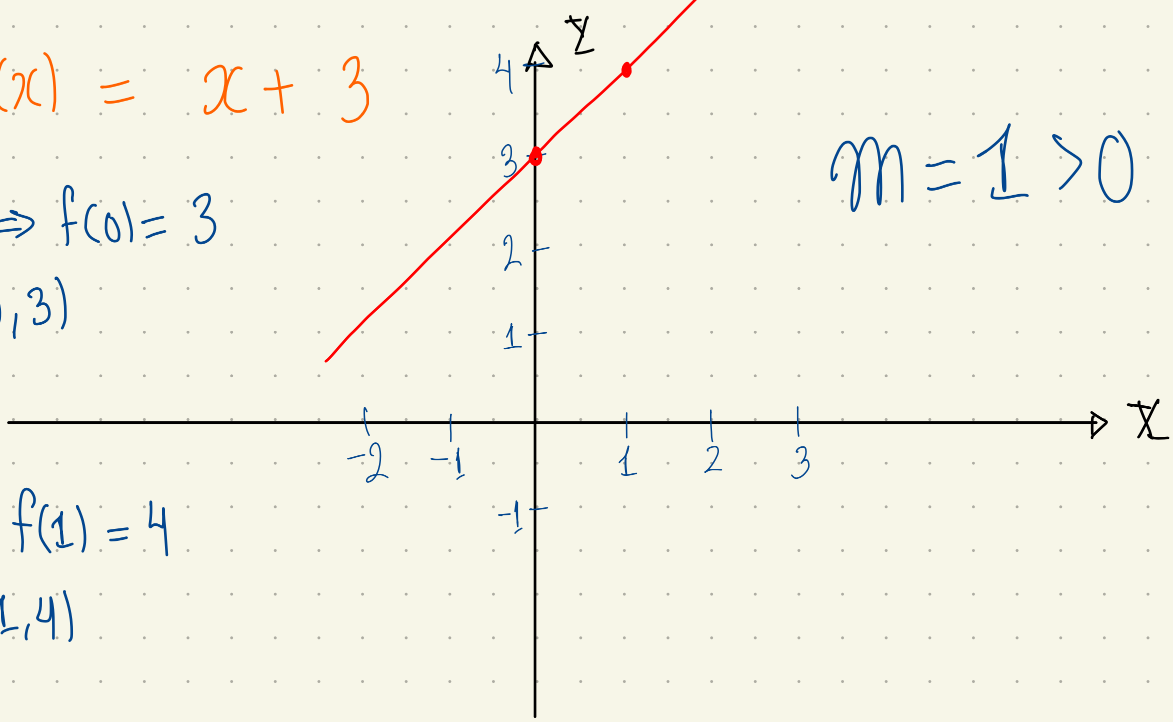
2) $f(x) = x + 3$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3$

$\Rightarrow (0,3)$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 4$

$\Rightarrow (1,4)$

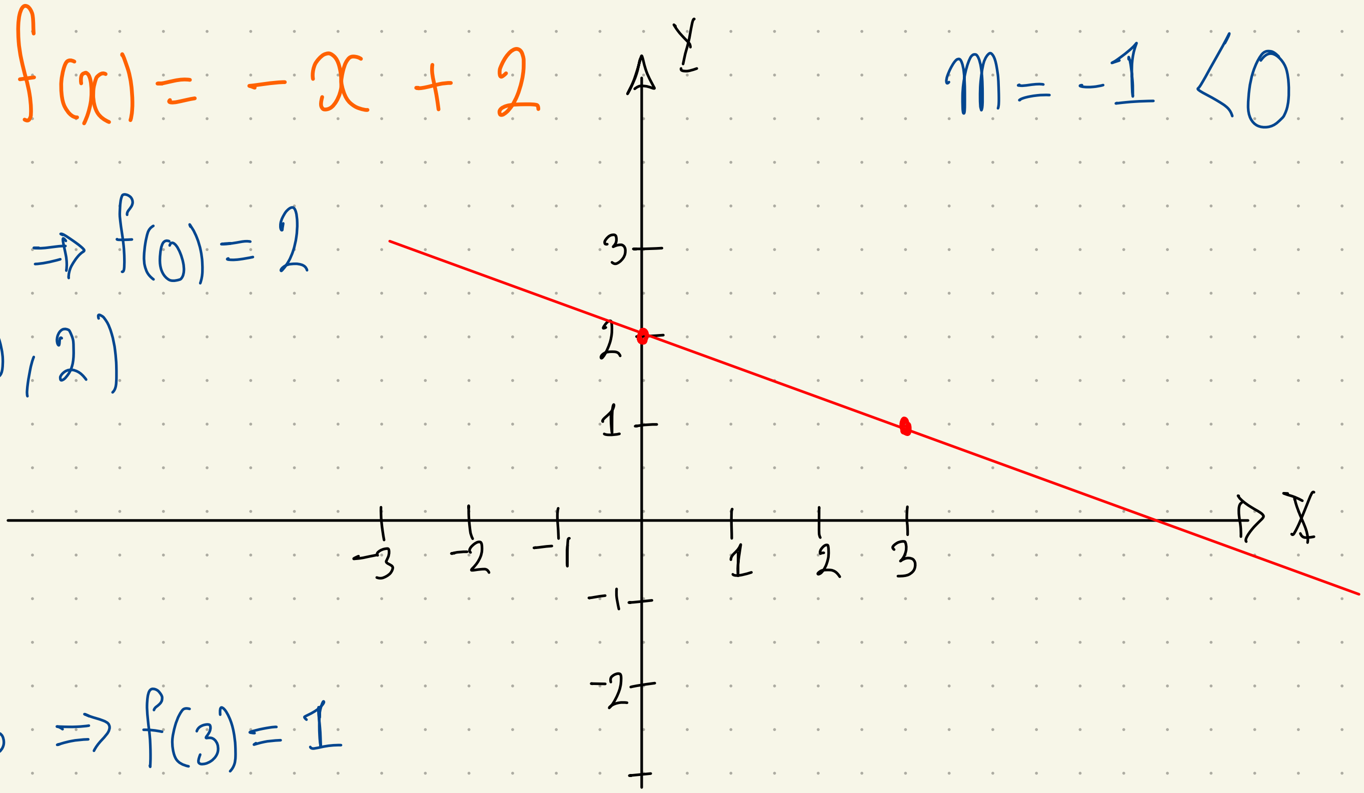


$$m = 1 > 0$$

③ $f(x) = -x + 2$ $\quad m = -1 < 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

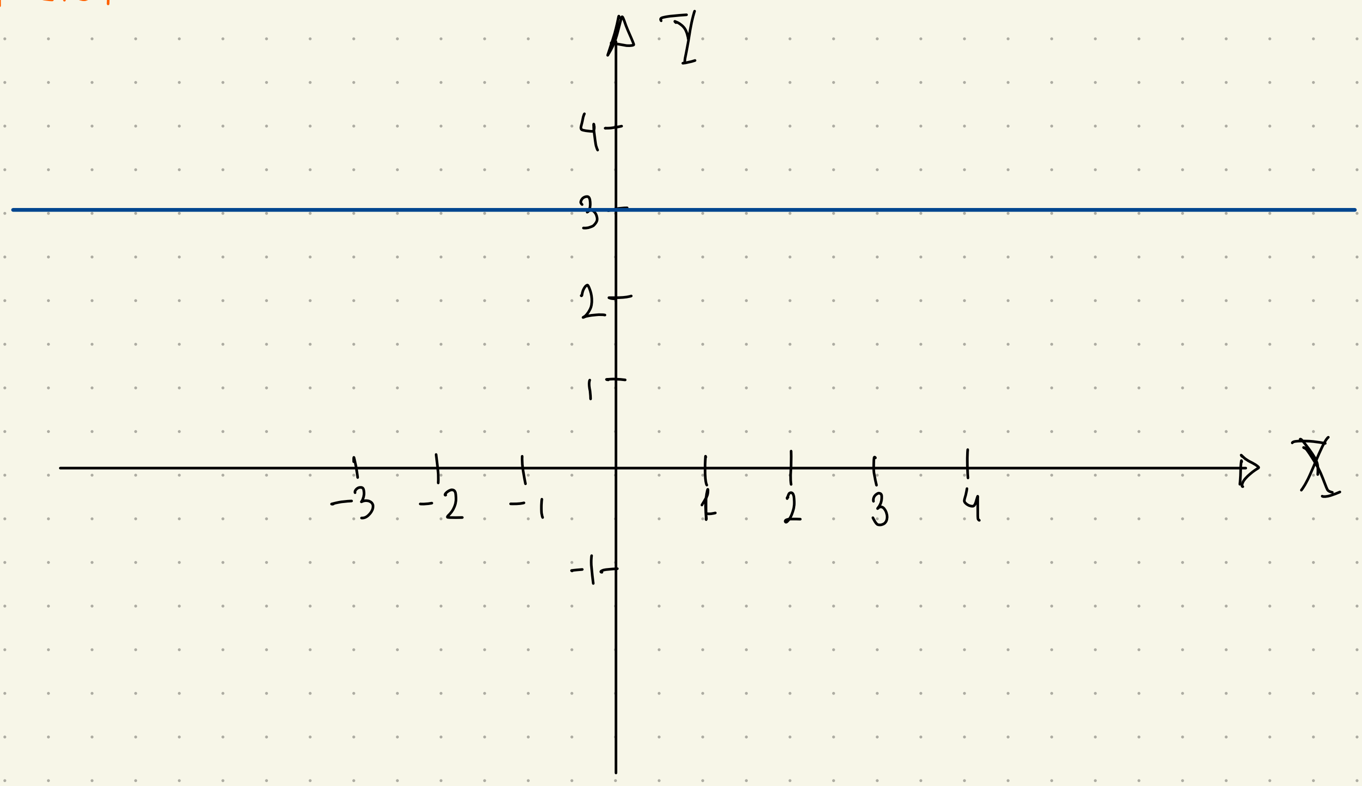
$(0, 2)$



$x = 3 \Rightarrow f(3) = 1$

$(3, 1)$

④ $f(x) = 0 \cdot x + 3 = 3$



La forma general de una ecuación lineal es:

$$Ax + By + C = 0$$

$f(x) = 2x + 1$, $\quad y = 2x + 1$ Variable dependiente (depende de los valores que tome x)

Variable independiente

$$y = 2x + 1 \iff 2x - y + 1 = 0$$

= Ecuaciones de la línea recta =

- Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

i) (a, b) punto por el que pasa la línea recta

ii) m pendiente.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y - b = m(x - a)}$$

Ecuación punto Pendiente de una línea recta.

Ejemplo: Encuentra la ecuación ~~Punto-pendiente~~ la ecuación general de la línea recta que pasa por el punto $(1,3)$ y que tiene pendiente $m=5$.

$$y-3=5(x-1)$$

Ecuación punto-pendiente de la línea recta en cuestión

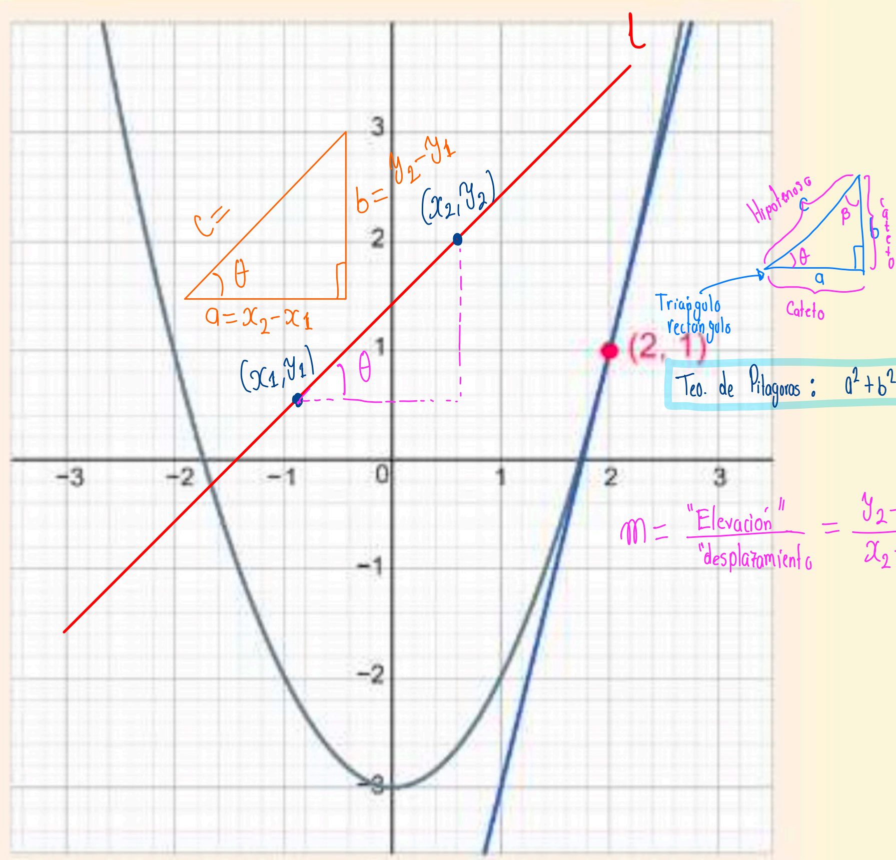
$$\iff y-3-5x+5=0$$

$$\iff y-5x+2=0$$

$$\iff 5x-y-2=0$$

Ecuación general de la línea recta que pasa por $(1,3)$ y tiene pendiente $m=5$.

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Funciones trigonométricas

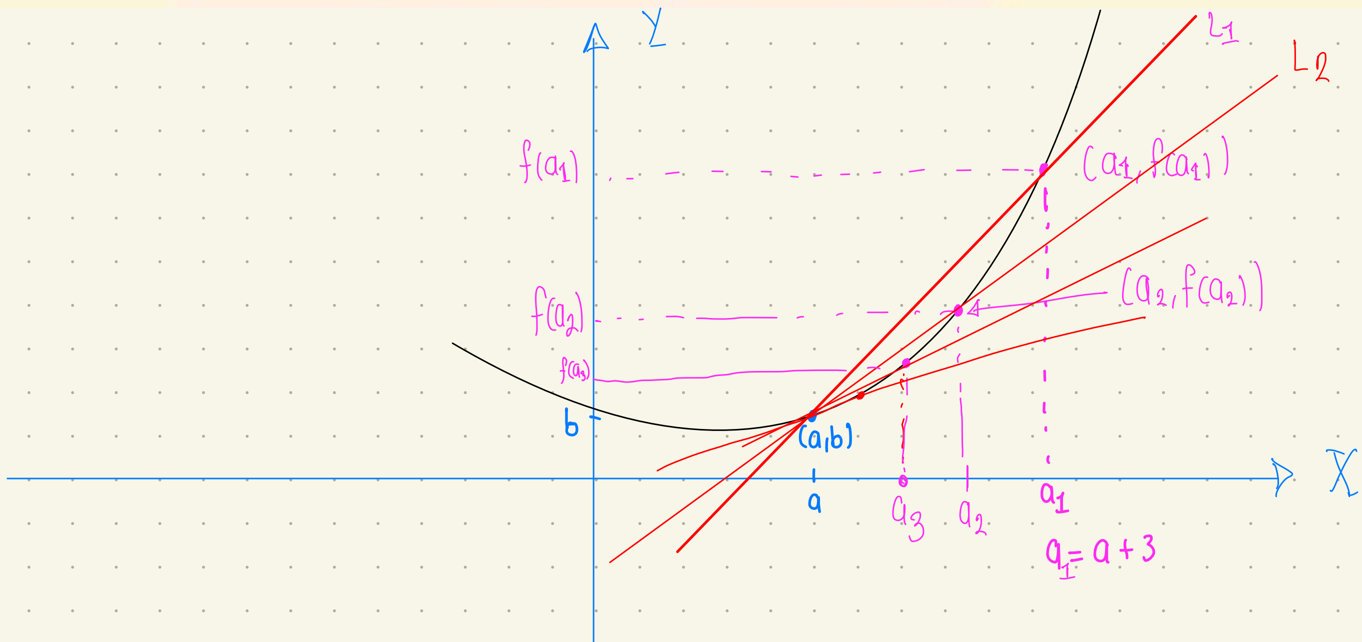
$\text{Sen}(\theta) = \frac{C.O}{hip} = \frac{b}{c}$

$\text{Cos}(\theta) = \frac{C.a}{hip.} = \frac{a}{c}$

$\boxed{\tan(\theta) = \frac{C.O}{C.a} = \frac{b}{a}}$

$\boxed{\text{Teo. de Pitágoras: } a^2 + b^2 = c^2}$

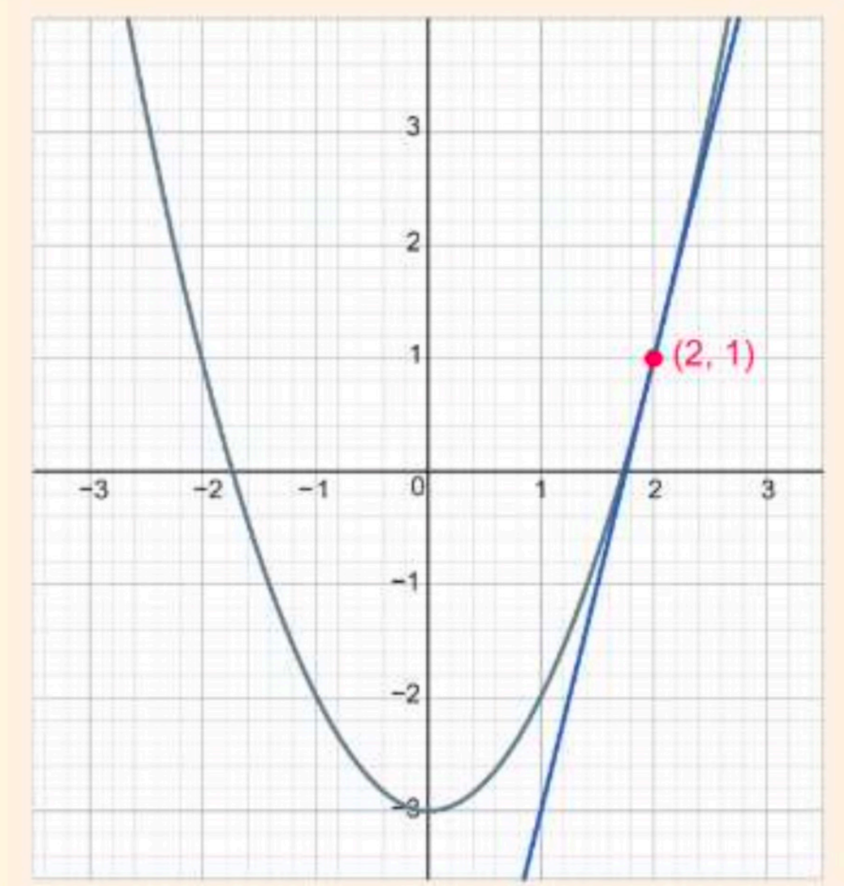
$m = \frac{\text{"Elevación"}}{\text{"desplazamiento"}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\theta)$



Pendiente de l_1 : $\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}$

Pendiente " L_2 : $\frac{f(a_2) - f(a)}{a_2 - a}$

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ en el punto $x = 2$
Coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(2, 1)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=2} = 2 \cdot x \Big|_{x=2}$$

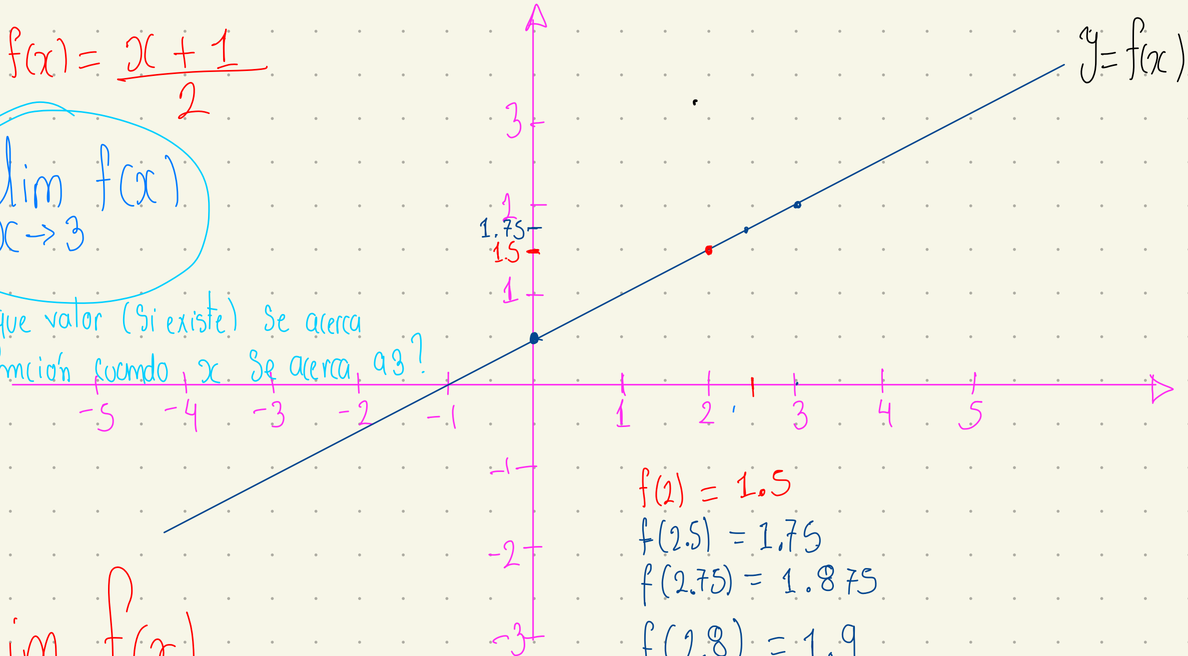
$$= 4$$

$f'(2)$

$$f(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

"A que valor (si existe) se acerca la función cuando x se acerca a 3?



$f(2) = 1.5$
$f(2.5) = 1.75$
$f(2.75) = 1.875$
$f(2.8) = 1.9$
$\vdots$
$f(3) = 2.$

$$\lim_{x \to 3} f(x) =$$

La pendiente de la recta tangente (En caso de que exista) a la gráfica de una función en $(a, f(a))$.

$$= \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= La derivada de la función f en el punto $x = a$.

Calcula los siguientes términos de la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, márcalos en la recta numérica y responde las siguientes dos preguntas.

$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$

$a_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$

$a_{50} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$

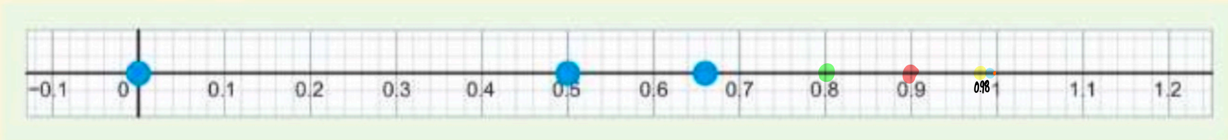
$a_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$

$a_{500} = 1 - \frac{1}{500} = 0.998$

$a_{1\,000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Los puntos a_1, a_2 y a_3 ya están marcados en la recta numérica, ahora marca los valores a_n que obtuviste.



a) ¿Qué pasa con los valores de a_n cuando n va creciendo?

....

....

b) ¿Qué crees que pase si calculas a_{5000}, a_{10000} y a_{50000}? 0.99998

....

....

Problemario.

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$

$f(x) = x^2+2$

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$ $a=1$

Solución:

Def. de m_{tan}

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(x+h)$ $\quad$ $f(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2+2] - [1^2+2]}{h}$$

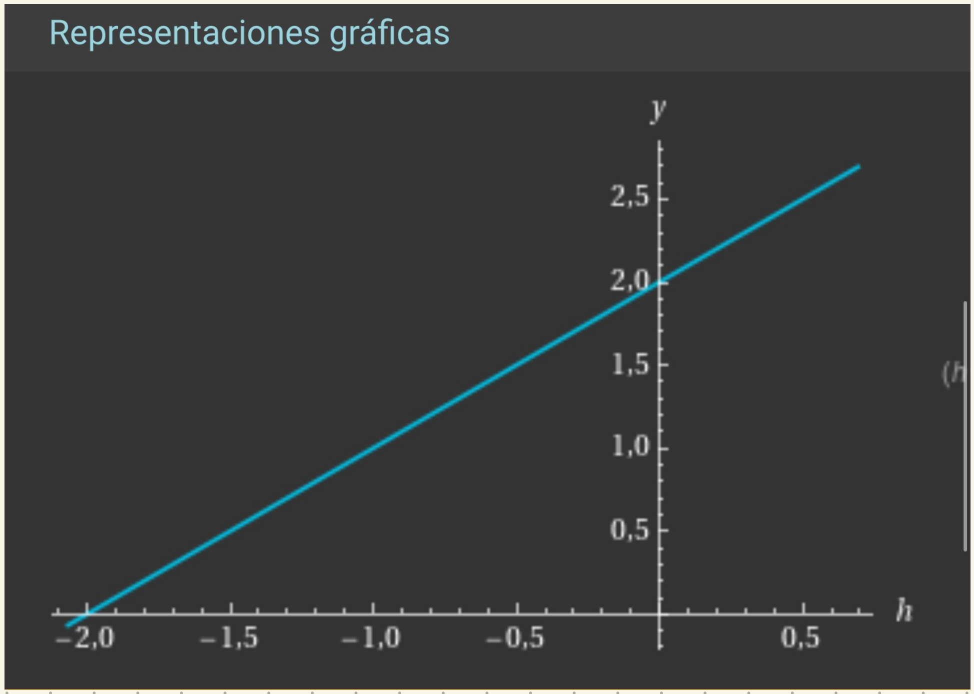
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1^2+2\cdot 1\cdot h + h^2+2] - 3}{h}$$

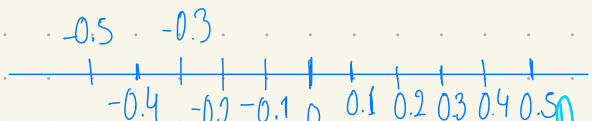
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+2h+3) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+3-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = 2$$

h	$\frac{h^2+2h}{h}$
-0.5	1.5
-0.4	1.6
-0.3	1.7
-0.2	1.8
-0.1	1.9
0	2
0.1	2.1
0.2	2.2
0.3	2.3
0.4	2.4
0.5	2.5





Cuando $h \neq 0$

$$\frac{h^2+2h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = h+2$$

Prop. de límites:

Si f es una función polinomica i.e.

$f(h) = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \dots + a_0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(h) = f(0).$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} h+2 = 0+2 = \underline{2}.$$

Si $f(h) = g(h)$ para todo $h \neq 0$

ent. $\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} g(x)$

$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = 2$

límite de las pendiente de las rectas secante cuando $x=1$ y esto sabemos que es igual a la pendiente de la recta tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x=1$ es: 2

i.e.

$$m_{tan} = 2$$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

$f(x) = x^2 + 2$, $x = 1$, $y = f(1) = 3$

$m_{tan} = 2$, $(1, 3)$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

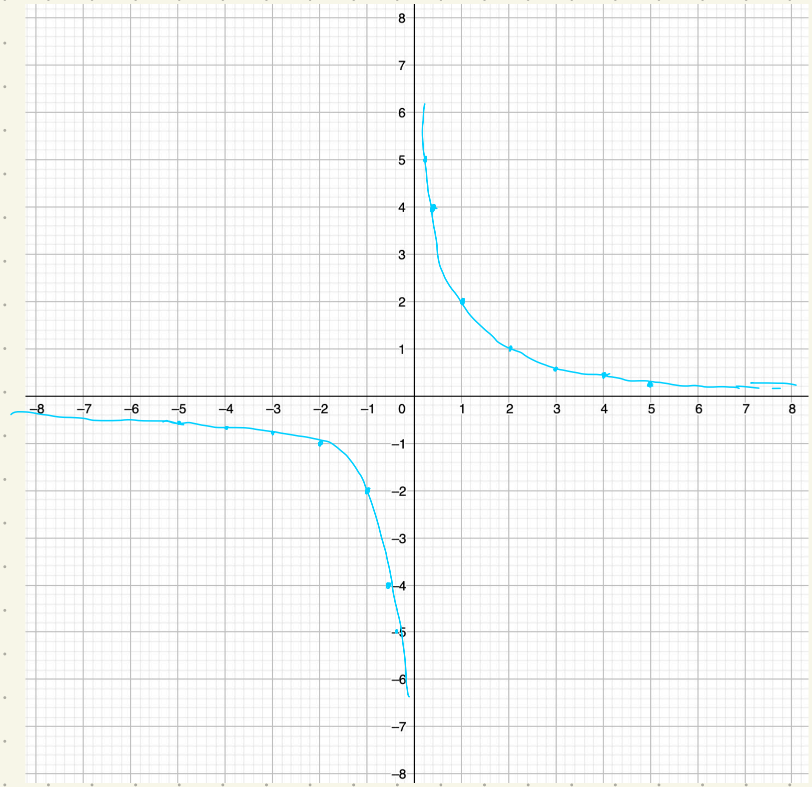
$$\Leftrightarrow \quad y = 2x - 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2x + 1$$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = 1$.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

x	$f(x) = \frac{2}{x}$
-5	$\frac{2}{-5} = -0.4$
-4	-0.5
-3	$-0.66\overline{6}$
-2	-1
-1	-2
0	
1	2
2	1
3	$0.666\overline{6}$
4	0.5
5	0.4



X	F(x)
-5	-0.4
-4	-0.5
-3	-0.666666666666667
-2	-1
-1	-2
0	
1	2
2	1
3	0.666666666666667
4	0.5
5	0.4

X	F(x)
-1	-2
-0.9	-2.22222222222222
-0.8	-2.5
-0.7	-2.85714285714286
-0.6	-3.33333333333333
-0.5	-4
-0.4	-5
-0.3	-6.66666666666667
-0.2	-10
-0.1	-20
0	
0.1	20
0.2	10
0.3	6.66666666666667
0.4	5
0.5	4
0.6	3.33333333333333
0.7	2.85714285714286
0.8	2.5
0.9	2.22222222222222
1	2

Geogebra

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

$a=2$

Solución

$$m_{tan} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$f(a+b) = \frac{2}{a+b}$

$f(x) = \frac{2}{x}$

$f(a) = \frac{2}{a}$

$f(1+1) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$f(2)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h}$$

$\cancel{4} - \cancel{4} - 2h = -2h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{4 - 2(2+h)}{2(2+h)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2h}{2(2+h)}\right] \div h$$

$(-1)\,\cancel{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2h) \cdot 1}{\cancel{2h}(2+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2+h}$$

$$= \frac{-1}{2+0}$$

$$= \frac{-1}{2} \qquad \therefore m_{tan} = \frac{-1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \qquad (2, f(2)) = (2, 1)$$

$$(a, b)$$

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$$

$f(x) = \frac{2}{x}$ $\boxed{a = 2}$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{a+h} - \frac{2}{a}}{h}$$

$$\cancel{2a} - \cancel{2a} - 2h = -2h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{2a - 2(a+h)}{a(a+h)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{-2h}{a(a+h)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2h}{a(a+h)}\right] \div \frac{h}{1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(a(a+h))}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-2}{a(a+0)}$$

$$= \frac{-2}{a^2}$$

$$\therefore \boxed{m_{tan} = \frac{-2}{a^2}}$$

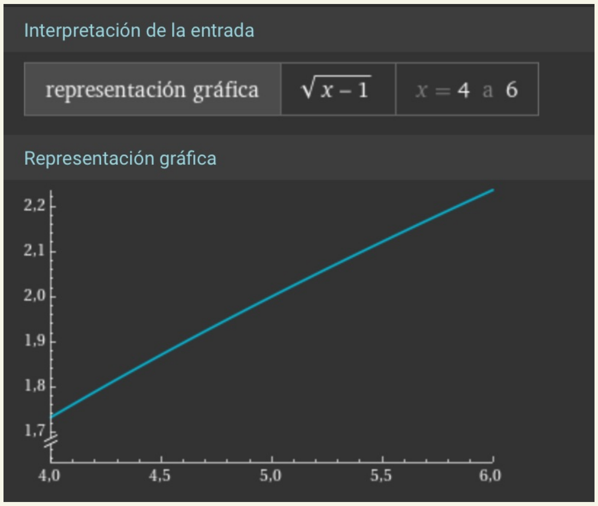
Para $a = 2$

$$m_{tan}\Big|_{a=2} = \frac{-2}{2^2}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$

Solución:



$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(5+h)-1} - \sqrt{5-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+4} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+\cancel{4}) - \cancel{4}}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = 1/4$$

Por lo tanto, $m_{tan} = \frac{1}{4}$.

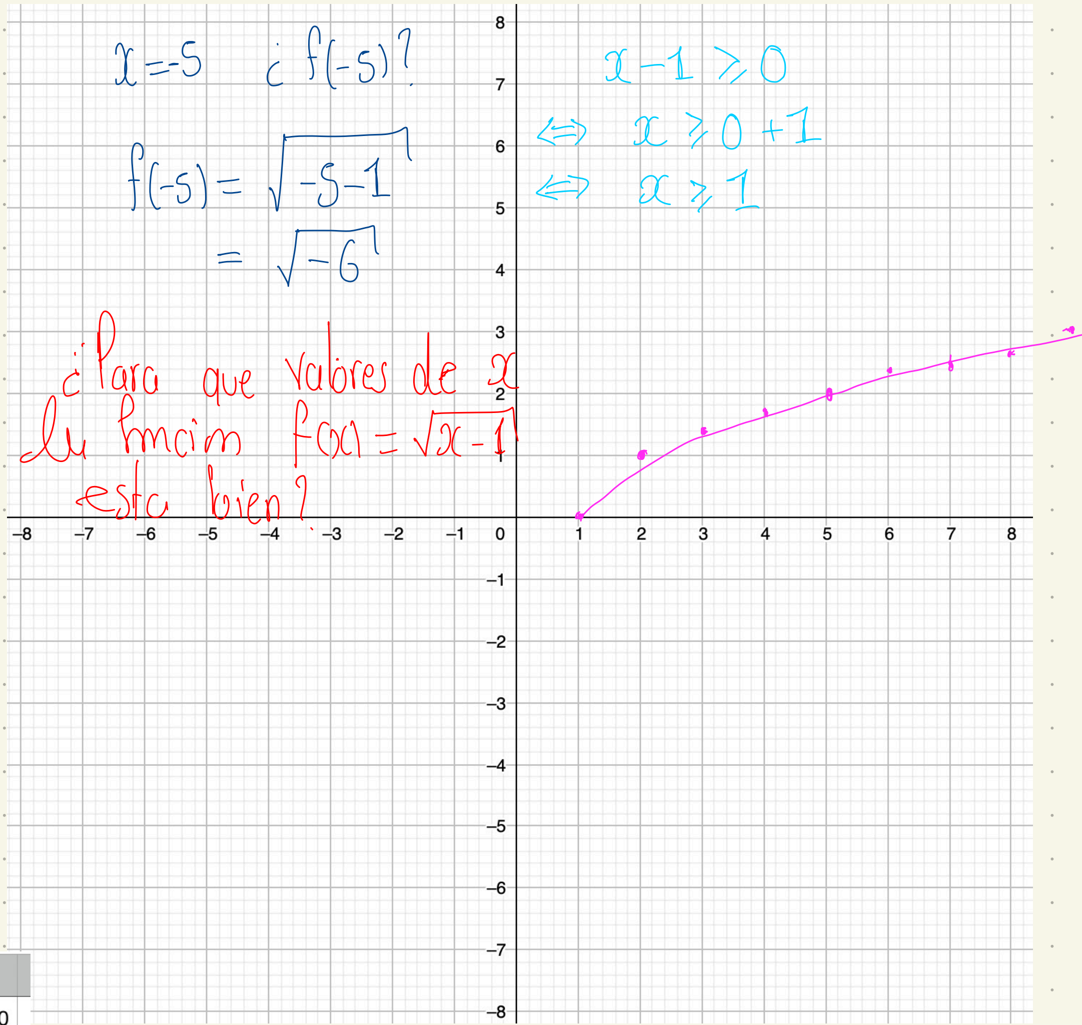
x	$f(x)=\sqrt{x-1}$
1	0
2	1
3	1.41...
4	1.73...
5	2
6	2.23...
7	2.44
8	2.64

$x=-5$ ¿$f(-5)$?

$$f(-5)=\sqrt{-5-1}$$
$$=\sqrt{-6}$$

¿Para que valores de x la funcion $f(x)=\sqrt{x-1}$ esta bien?

$$x-1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0+1$$
$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



X	F(x)
1	0
2	1
3	1.4142135623731
4	1.73205080756888
5	2
6	2.23606797749979
7	2.44948974278318
8	2.64575131106459
9	2.82842712474619
10	3
11	3.16227766016838
12	3.3166247903554
13	3.46410161513775
14	3.60555127546399
15	3.74165738677394
16	3.87298334620742
17	4
18	4.12310562561766
19	4.24264068711928
20	4.35889894354067
21	4.47213595499958

ACTIVIDAD PARA EL CUADERNO

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x.

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$

2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$

4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$

8. $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

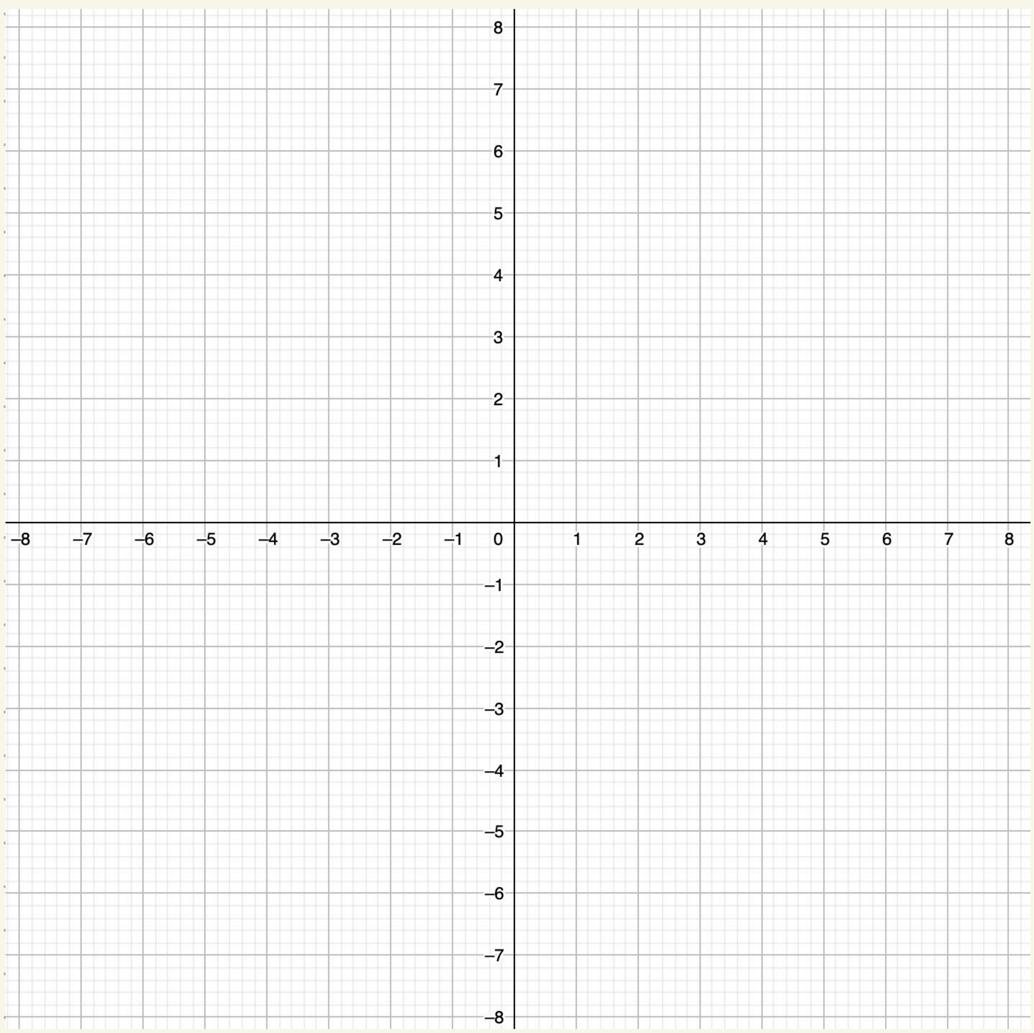
10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

11. $f(x) = -2x^3 + x$, $x = 2$

12. $f(x) = 8x^3 - 4$, $x = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x = -1$

14. $f(x) = \frac{4}{x - 1}$, $x = 2$



① $f(x) = x^2 - 6 \quad , \quad x = 3 \ / \ a = 3$

Solución:

$h(x) = x^n$

$h'(x) = n x^{n-1}$

$g(x) = c$

$g'(x) = 0$

$h(x) = f(x) \pm g(x)$

$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Definición 4.1.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a. Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (2)$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $m_{\tan}$.

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(3+h)^2 - 6] - [3^2 - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[9 + 6h + h^2 - 6] - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6 + h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6 + h$$

$$= 6 + 0$$

$$= 6$$

$$\therefore \ m_{\tan} = 6$$

Ec. punto – pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$m_{\tan}$

$$(x_1, y_1) = (3, 3)$$

$x_1 = 3 \quad , \quad y_1 = f(x_1)$

$= f(3)$

$= 3$

$m_{tan} = 6$, $(x_1, y_1) = (3,3)$

$$y - 3 = 6(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 6x - 18 + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 6x - 15$$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6$ en el punto $(3,3)$.

(14) $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$, $x = 2$ / $a = 2$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{4}{(2+h)-1}\right] - \left[\dfrac{4}{2-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{4}{1+h} - 4}{h}$$

$$\frac{4}{1+h} - \frac{4}{1} = \frac{\cancel{4} - \cancel{4} - 4h}{1+h} = \frac{-4h}{1+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-4h}{1+h}}{h}$$

$$\frac{-4h}{1+h} \div \frac{h}{1} = \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)} = \frac{-4}{1+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{1+h}$$

$$= \frac{-4}{1+0}$$

$$= -4. \qquad \therefore\ m_{tan} = -4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$k(x) = \frac{\overset{f(x)}{4}}{\underset{g(x)}{x-1}}$$

$$k'(x) = \frac{\cancel{(x-1) \cdot 0}^{0} - 4 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$x = 2 \implies k'(2) = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1} = \underline{-4}$$

$$m_{tan} = -4, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = f(x_1) = f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$$

$$(2, 4)$$

$$y - 4 = -4(x-2)$$

$$\iff y = -4x + 8 + 4$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{y = -4x + 12}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ en el punto $(2,4)$.

16. $f(x) = 4 - \dfrac{8}{x}, x = -1$

$$-8 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -8 \cdot \left(-1 \cdot x^{-2}\right)$$
$$= +8x^{-2}$$
$$= \frac{8}{x^2}$$

$x = -1$

$$= \frac{8}{1} = 8$$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[4 - \frac{8}{(-1+h)}\right] - \left[4 - \frac{8}{-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{4(-1+h) - 8}{h-1}\right] - 12}{h}$$

$$\frac{-4 + 4h - 8}{h-1} = \frac{4h-12}{h-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4h-12}{h-1} - 12}{h}$$

$$\frac{4h-12}{h-1} - 12 = \frac{4h\cancel{-12} - 12h \cancel{+12}}{h-1}$$
$$= \frac{-8h}{h-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{-8h}{h-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-8h}{h-1}\right] \div h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-8\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-8}{h-1}$$

$$= \frac{-8}{0-1} \qquad \therefore\ m_{tan} = 8$$

$$= 8$$

$x_1 = -1$, $\Rightarrow y_1 = f(-1) = 4 - \frac{8}{(-1)} = 4 + 8$

$= 12$

$(-1, 12)$

$$y - 12 = 8(x+1)$$

$$\Leftrightarrow y = 8x + 8 + 12$$

$$\Leftrightarrow y = 8x + 20$$

⑧ $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

$-3(-1+h)^2 = -3(1-2h+h^2)$
$= -3 + 6h - 3h^2$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[-3(-1+h)^2 + 10\right] - \left(-3(-1)^2 + 10\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3+6h-3h^2+10-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h^2+6h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[-3h+6\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} -3h+6$$

$$= -3(0)+6$$

$$= 6$$

$\therefore$ $m_{tan} = 6$

$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-1) = 7$

$(-1, 7)$

$$y - 7 = 6(x-(-1)) \Leftrightarrow y - 7 = 6x + 6$$

$$\iff y = 6x + 6 + 7$$

$$\iff \underline{y = 6x + 13}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -3x + 1$ en el punto $(-1, 7)$ es:

$$\underline{y = 6x + 13}$$

⑨ $f(x) = x^2 - 3x \quad , \; x = 1$

Solución:

$(1+h)^2 - 3(1+h)$
$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h$
$= h^2 - h - 2$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - h - \cancel{2} + \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} h - 1$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$\therefore \quad m_{tan} = -1$

$x_1 = 1 \quad y \quad y_1 = f(1) = -2 \quad , \quad (1,-2)$

$$y-(-2) = (-1)(x-1)$$

$$\iff y+2 = -x+1$$

$$\iff y = -x+1-2$$

$$\iff \underline{y = -x-1}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto $(1,-2)$ es:

$$\underline{y = -x-1}$$

¿ Pendiente en $x = 3/2$?

Solución:

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3/2 + h) - f(3/2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\left(\frac{9}{4} + 3h + h^2\right) - \frac{9}{2} - 3h\right] - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \underbrace{\cancel{-\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}}_{-9/2} \cancel{+\frac{9}{2}}}{h}$$

$$-\frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h^{2-1} \qquad // \quad \frac{h^2}{h} = \frac{h \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = h$$

$$= \lim_{h \to 0} h$$

$$= 0.$$

$$m_{tan} = 0$$

$$x_1 = 3/2 \quad , \quad y_1 = f(3/2) = (3/2)^2 - 3(3/2)$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \quad \frac{18}{4}$$

$$= -\frac{9}{4}$$

$$(3/2, -9/4)$$

$$y - (-9/4) = \cancel{0 \cdot (x - 3/2)} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -9/4$$

(10) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

Solución:

$-(x+h)^2 = -x^2 - 2xh - h^2$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h - 3] - [-x^2 + 5x - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-x^2} - 2xh - h^2 + \cancel{5x} + 5h \cancel{-3} + \cancel{x^2} \cancel{-5x} \cancel{+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 + 5h - 2xh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}[-h + 5 - 2x]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} -2x + 5 - h$$

$$= -2x + 5 - 0$$

$$= -2x + 5$$

$\therefore \quad m_{tan} = -2x + 5$

En el punto $x=-2$, $m_{tan} = -2(-2)+5 = 9$

$$\therefore \; m_{tan}\Big|_{x=-2} = 9$$

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$

Solución:

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2+5x-3)$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \cancel{\frac{d}{dx}(3)}^{\,0}$$

$$= -\frac{d}{dx}(x^2) + 5\frac{d}{dx}(x^1)$$

$$= -2 \cdot x^{2-1 \to 1} + 5 \cdot 1 \cdot \cancel{x^0}^{\,1}$$

$$= -2 \cdot x + 5$$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$m_{\tan}\Big|_{x=-2} = 9$$

$$x_1 = -2, \quad y_1 = f(-2) = -(-2)^2 + 5(-2) - 3$$

$$= -4 - 10 - 3$$

$$= -17$$

$$(-2, -17)$$

$$y - (-17) = 9\,(x - (-2))$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 9x + 18 - 17$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y = 9x + 1}$$

14 $\quad f(x) = \dfrac{4}{x-1} \quad , \quad x = 2.$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{4}{(x+h)-1} - \dfrac{4}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\cancel{4x} \cancel{-4} - \cancel{4x} - 4h + \cancel{4}}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-4h}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}\,(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \quad m_{tan} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$m_{tan}\Big|_{x=2} = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1^2} = -4 .$$

$$\therefore \underline{m_{tan} = -4}$$

$$x_1 = 2, \quad y_1 = f(x_1) = \frac{4}{2-1} = \underline{4}$$

$$(2,4)$$

$$y - 4 = -4(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -4x + 8 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y = -4x + 12}$$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x = -1$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f}\,\frac{1}{2(x+h)} - \cancel{f}\,\frac{1}{2x}}{h} = \frac{\frac{2x - 2(x+h)}{2(x+h)2(x)}}{\frac{h}{1}}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{2x - 2x - 2h}{h[2(x+h)2(x)]} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-2)}{h[2(x+h)2(x)]}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{2(x+h)2(x)} = \frac{-2}{4x^2 + h}$$

$$m_{tan} = \frac{-2}{4(-1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad m_{tan} = \frac{-1}{2}$$

Ecuacion punto-pendiente de la recta

$y - y_1 = m(x - x_1)$ $\qquad m = \frac{-1}{2}$

$y - (-1/2) = -1/2(x - (-1))$ $\qquad x_1 = -1$

$y = -1/2\, x - 1/2 - 1/2$ $\qquad y_1 = \frac{1}{2(-1)}$

$y = -1/2\, x - 1$ $\qquad y_1 = -\frac{1}{2}$

$$m_{tan}\Big|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

16. $f(x) = 4 - \frac{8}{x}$, $x = -1$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) f-(x)}{h}$$

porque?

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\cancel{x}-1+h) - f(\cancel{x}-1)}{h}$$

(x+h)

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[4 - \frac{8}{(-1+h)}\right] - \left[4 - \frac{8}{-1}\right]}{h}$$

pag 2

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{4(-1+h)-8}{h-1}\right] - 12}{h}$$

Pag 2

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4h-12}{h-1} - 12}{h}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{-8h}{h-1}\right)}{h}$$

Revisé otra vez

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{-8}{h-1}\right] \div h$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{-8\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)} = \frac{-8}{h-1}$$

El ejercicio

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{-8}{0-1} = 8 \qquad m_{tan} = 8$$

Ecuación punto - pendiente en la recta

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 12 = 8(x - (-1))$

$y = 8x + 8 + 12$

$y = 8x + 20$

$m = 8$

$x_1 = -1$

$y_1 = 4 - \frac{8}{(-1)} =$

$4 + 8 = 12$

$y_1 = 12$

$(x-1)^{-2} = -2(x-1)^{-3} \cdot 1$

15. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x = 0$ $\quad -\dfrac{2}{2(x-1)^3}$

$$M_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$(x+h-1)$

$(x+h-1)$

$(x+h-1)^2$

$$M_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x-1+h)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}}{h}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x-1+h)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{(x-1)^2 - (x-1+h)^2}{(x-1+h)^2 (x-1)^2}$$

$$M_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x-1)h - h^2}{(x-1+h)^2 (x-1)^2}$$ desarrollo

$$M_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x-1)h^0 \quad -xh^2}{(x-1+h)^2 (x-1)^2} \div h$$

$$M_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x-1)}{(x-1)^2 (x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^3} = \frac{-2}{(0-1)^3} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$M_{tan} = 2$

Ecuación punto-pendiente de la recta

$m = 2$

$x_1 = 0$

$y_1 = \dfrac{1}{(0-1)^2} = \dfrac{1}{1}$

$y_1 = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 2(x - 0)$

$y = 2x - 0 + 1$

$y = 2x + 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2(x-1)h - h^2}{(x-1+h)^2(x-1)} \div h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh + 2h - h^2}{(x^2-2x+2xh+1-2h+h^2)h}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}[-2x+2-h]}{(x^2-2x+2xh+1-2h+h^2)\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x+2-h}{x^2-2x+\cancel{2xh}^{0}+1-\cancel{2h}^{0}+\cancel{h^2}^{0}}$$

$$= = \frac{-2x+2-0}{x^2-2x+1} \qquad (x-1)^2$$

$$= \frac{-2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^2} \qquad x \neq 1,$$

$$= \frac{-2}{x-1}$$

$$m_{tan}\Big|_{x=0} = \frac{-2}{0-1} = 2.$$

$x=0$, $y=1$

$$y-1 = 2(x-0)$$

$$y = 2x+1$$

Sean dos funciones f y g, con las cuales ejecutaremos las operaciones de meme $f(g(x))$:

a. Suma $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ **b.** Resta $f(x)-g(x)=(f-g)(x)$ **c.** Multiplicación $f(x).g(x)=(f.g)(x)$ **d.** División $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ **e.** Composición $(f\circ g)=f\left[g(x)\right]$	f (x) =  g (x) =  f (g(x)) =  g (f(x)) = 

Ejemplo 3

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x)=x+2,\ g(x)=-3$$

$f(x) = x^2$

$f(x+h) = (x+h)^2$

a. $f(x)+g(x)=(x+2)+(-3)=x+2-3=x-1$

b. $f(x)-g(x)=(x+2)-\,-=x+2+3=x+5$

c. $f(x).g(x)=(x+2)(-3)=-3x-6$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x+2)}{-3}=-\dfrac{(x+2)}{3}$

e. Composición $(f\circ g)=f(-3)=-3+2=-1$

Ejemplo 4

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x)=x^2+5x+6,\ g(x)=x+1$$

a. $f(x)+g(x)=(x^2+5x+6)+(x+1)=x^2+5x+6+x+1=x^2+6x+7$

b. $f(x)-g(x)=(x^2+5x+6)-(x+1)=x^2+5x+6-x-1=x^2+4x+5$

c. $f(x).g(x)=(x^2+5x+6)(x+1)=x^3+x^2+11x+6$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x^2+5x+6)}{x+1}$

e. Composición $(f \circ g)(x) = f(x+1) = (x+1)^2 + 5(x+1) + 6$
$$= x^2 + 2x + 1 + 5x + 5 + 6$$
$$= x^2 + 7x + 12$$

función identidad

Ejemplo 5

Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1},\ g(x) = x$$

a. $f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

b. $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$

c. $f(x).g(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)x = x\sqrt{x^2 - 1}$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

e. Composición

$(f \circ g) = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Tesoro digital

Revisa el QR o el link propuesto sobre algunas recomendaciones y ejemplos adicionales sobre el contenido de operaciones con funciones:

Ejemplo 6

En una agencia de autos compactos se pide realizar el modelado que exprese el descuento de $10,000.00 del precio regular de un auto que se ofertará en promoción. Se desea cobrar el 95% del precio regular. Esta situación se da cuando los autos no tuvieron la demanda pronosticada o llegarán nuevos modelos.

Veamos cómo podremos resolver la situación.

Planteamiento

Precio del auto: x

Precio del auto con descuento: $f(x)=x-10000$

El 95% del precio del auto: $g(x)=0.95x$

Entonces podemos decir que la expresión composición es que incluya tanto el precio del auto con descuento y el 95% a cobrar es:

$$(f \circ g) = f(g(x)) = f(.95x) = 0.95x - 10000$$

El precio del auto compacto más económico para 2024 está en razón de 230 000, considerando la versión inicial o también llamada austera.

Entonces el cálculo queda de la siguiente manera:

$$(f \circ g) = 0.95(230000) - 10000 = \$208\,500.00$$

El precio final del auto a cobrar es de $208 500.00

Reto educativo 3

Instrucciones: puedes trabajar en equipos de cuatro o cinco personas para resolver cada ejercicio. Al finalizar comparte los resultados, de esta manera se ejerce la coevaluación entre compañeros de equipo. Trabaja en tu libreta.

1. Para las siguientes funciones calcula las operaciones hasta obtener una nueva expresión.

 a. $f(x)+g(x)$ $= \boxed{(f+g)(x)} = (x+2)+(x-4) = x+2+x-4 = 2x-2.$

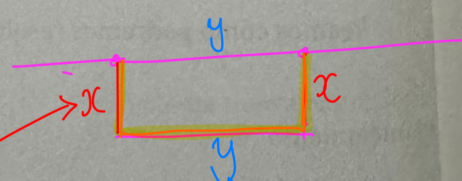
 b. $f(x)-g(x)$ $= (f-g)(x) = (x+2)-(x-4) = \cancel{x}+2-\cancel{x}+4 = 6$

 c. $f(x).g(x)$ $= (f\cdot g)(x) = (x+2)(x-4) = x^2-2x-8$

 d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $= \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

 e. $(f\circ g)(x)$ $= f[g(x)] = (x-4)+2 = x-2.$

- $f(x)=x+2$, $g(x)=x-4$
- $f(x)=x^2-3$, $g(x)=\sqrt{x}$
- $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, $g(x)=4$
- $f(x)=x^2-4x+2$, $g(x)=x+1$



$x+y+x = 800 \Leftrightarrow 2x+y=800$

2. Decidiste sembrar manzanilla y yerba buena en tu casa. Para ello requieres cercar una porción de tu jardín y cuentas con una pared, para cercar dispones de 800 metros de malla y solo vas a cercar tres lados del rectángulo.

$\Leftrightarrow y = 800-2x$

Expresa el área del jardín en términos de su ancho.

Denominemos a x como el ancho y a y como el largo del rectángulo a cercar.

$A = b\cdot h$
$= y\cdot x$
$= (800-2x)x$
$= 800x - 2x^2$

$f(x) = x^3-3 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}.$

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$
$= (\sqrt{x})^3 - 3$
$= x^{3/2} - 3$

$(g\circ f)(x) = g(f(x))$
$= \sqrt{x^3-3}$

$= \sqrt{x^3} - 3$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, $g(x) = 4$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= \sqrt{(4)^2 - 3}$

$= \sqrt{13}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= 4$

$f(x) = x^2 - 4x + 2$, $g(x) = x + 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= (x+1)^2 - 4(x+1) + 2$

$= x^2 + 2x + 1 - 4x - 4 + 2$

$= x^2 - 2x - 1$

$\therefore \; (f \circ g)(x) = x^2 - 2x - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= (x^2 - 4x + 2) + 1$

$= x^2 - 4x + 3$

Proxima semana (lunes) - 1 / hoja milimetrica
(Entrega el miercoles) 11 septiembre

3. Vamos a analizar la siguiente situación: el costo de producir playeras deportivas está dado por $C(x)=30x+1500$ y el ingreso por cada playera es de \$180.00. ¿Cuál es la utilidad, considerando las expresiones anteriores?

   Comparte el planteamiento con tus compañeros y docente, para reconocer la operación con funciones que fue necesaria realizar para encontrar la utilidad.

   Plantea el procedimiento y comenta con tus compañeros la solución a la situación.

   Es importante que reconozcas que los costos están compuestos por costo fijo y costo variable de producir una pieza, así como que el ingreso es el precio de venta por producto.

Utilidad = Ingreso - Costo = $180x - C(x) = 180x - 30x - 1500$
$= 150x - 1500$

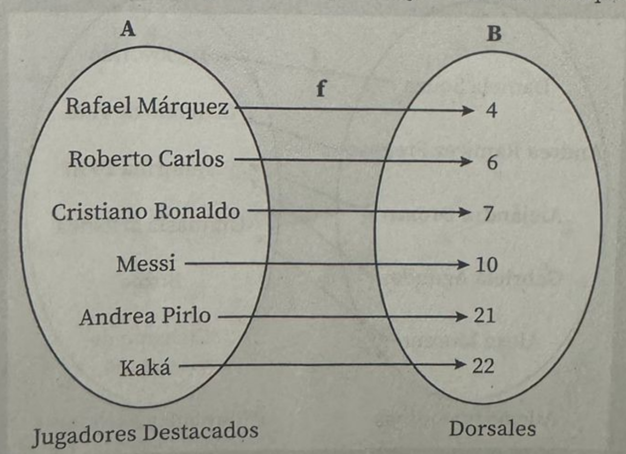
CIERRE

Reto educativo

Instrucciones: trabaja en equipos o pares para identificar de los ejemplos en sagital la función inyectiva, la función suprayectiva, la función biyectiva y la relación.

Para cerrar esta progresión será necesario que compares tus resultados con tus compañeros y el grupo pueda validar las respuestas para que todos tengan la misma información.

1. La representación sagital de los jugadores destacados y los dorsales que los identifica en sus diversos equipos por ser personajes emblemáticos para el equipo.



Reglas de derivación:

$$m_{tan}\Big|_{x=a} = \frac{d(f(x))}{dx}\Big|_{x=a}$$

Regla 1 Si $f(x) = C$, donde C es una constante, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(C) = 0}$$

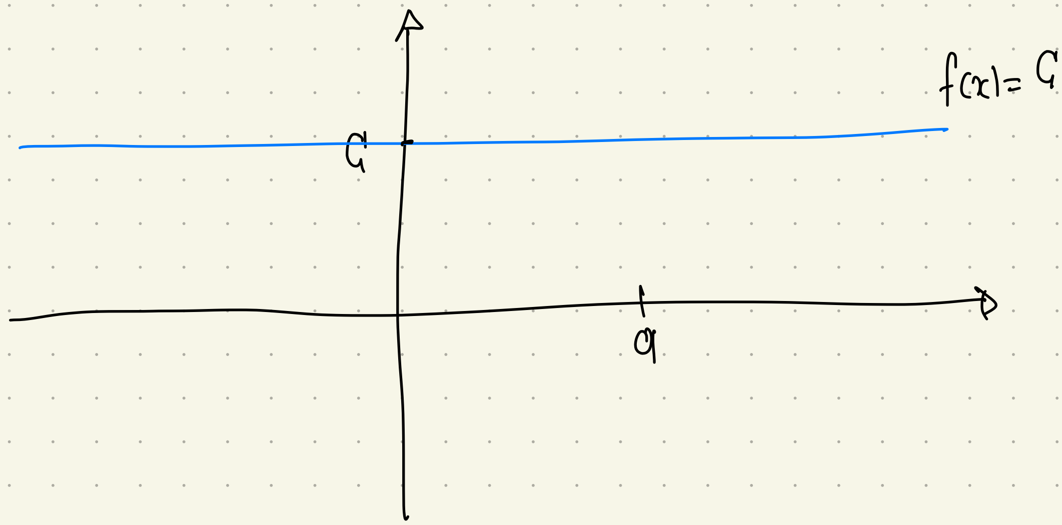
$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{C} - \cancel{C}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$$

$$= 0$$

$$m_{tan}\Big|_{x=a} = \frac{d(f(x))}{dx}\Big|_{x=a}$$



Regla (2) Si $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{R}$, ento

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}}$$

$$m_{tan}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}(x^n)\Big|_{x=a}$$

$f(x) = x^2$

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+h)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x+h$$

$$= 2x+0$$

$$m_{tan}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=a}$$

$$= 2x\Big|_{x=a}$$

$a = -1$

$$m_{tan}\Big|_{x=-1} = 2x\Big|_{x=-1}$$

$$= 2(-1)$$

$$= -2$$

$$= 2x$$

$$a = -1$$

$$\therefore \quad m_{tan} = 2(-1) = -2.$$

Regla 3 Si $g(x) = c\,f(x)$, donde f es una diferenciable, y C es constante, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}(C f(x)) = C\,\frac{d\,(f(x))}{dx}}$$

$$g(x) = 2x \quad , \quad a = 3$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x} + 2h - \cancel{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$= \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(x) \quad R2$$

$$= 2\left[1 \cdot x^{1-1}\right]$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \cancel{x^{0}} \to 1$$

$$= 2$$

$$= \lim_{h \to 0} 2$$

$$= 2$$

$$m_{tan}\Big|_{x=3} = 2.$$

$f(x) = 10x^5 \quad , \quad a = 2$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10(x+h)^5 - 10x^5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10\left[x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5\right] - 10x^5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{10x^5} + 50x^4h + 100x^3h^2 + 100x^2h^3 + 50xh^4 + 10h^5 - \cancel{10x^5}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[50x^4 + 100x^3h + 100x^2h^2 + 50xh^3 + 10h^4\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 50x^4 + 100x^3h + 100x^2h^2 + 50xh^3 + 10h^4$$

$$= 50x^4 + \cancel{100x^3(0)}^{\to 0} + \cancel{100x^2(0)^2}^{\to 0} + \cancel{50x(0)^3}^{\to 0} + \cancel{10(0)^4}^{\to 0}$$

$$= 50x^4$$

R1

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}\left(10x^5\right)$$

$$= \boxed{10\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right)}$$

R2

$$= 10 \cdot \left(5x^4\right)$$

$$= 50x^4$$

$f(x) = \sqrt{x}$

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{\sqrt{}}x+h)^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{}}x)^{\cancel{2}}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \cdot 1}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \qquad \cancel{= \lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Regla 4 Si $h(x) = f(x) \pm g(x)$, donde f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(h(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))}$$

$$h(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\left[(x+h)^2 + \sqrt{x+h}\right] - \left[x^2 + \sqrt{x}\right]\right)}{h}$$

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}\left(x^2 + \sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m_{tan}\Big|_{x=1} = 2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Regla (5) Si $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, donde f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(h(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\left[\frac{d}{dx}(g(x))\right] + g(x)\cdot\left[\frac{d}{dx}(f(x))\right]}$$

$$h(x) = x^2\cdot\sqrt[3]{x} = x^2\cdot x^{1/3} = x^{7/3}$$

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\sqrt[3]{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) = \frac{1}{3}x^{1/3-1} \qquad -2/3$$

$$= x^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) + \sqrt[3]{x}\,\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= x^2\cdot\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) + \sqrt[3]{x}\cdot(2x)$$

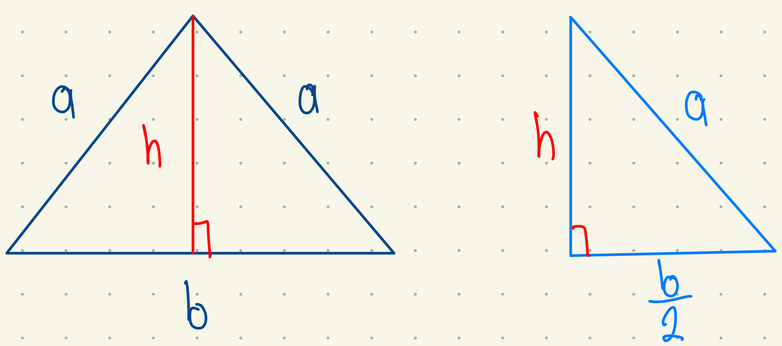
$$\frac{d}{dx}\left(x^{7/3}\right) = \frac{7}{3}x^{7/3-1} = \frac{7}{3}x^{4/3}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{x^2}{x^{2/3}} + 2x^{1/3}\cdot x$$

$$= \frac{1}{3}x^{2-\frac{2}{3}} + 2x^{1/3+1}$$

$$= \frac{1}{3}x^{4/3} + 2x^{4/3}$$

$$= \frac{7}{3}x^{4/3}$$



$(\text{Cateto}1)^2 + (\text{Cateto}2)^2 = \text{hipotenusa}^2$

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{a^2 - (b/2)^2}$$

¿Área? Si $P = 8$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$8 = 2a + b \Rightarrow$ $b = 8 - 2a$

$$\Rightarrow \text{Area} = \frac{b \times \sqrt{a^2 - (b/2)^2}}{2}$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$$

$$= \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{4}}$$

$$= \frac{b}{2}\,\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$$

$$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$$

$$A = \frac{(8-2a)}{4}\sqrt{4a^2-(8-2a)^2}$$

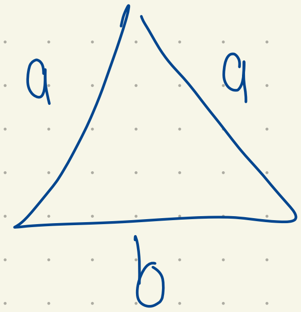
$$= \frac{(8-2a)}{4}\sqrt{\cancel{4a^2}-64+32a-\cancel{4a^2}}$$

$$= \frac{8-2a}{4}\sqrt{32a-64}$$

$$= \frac{8-2a}{4}\sqrt{16(2a-4)}$$

$$= \frac{8-2a}{4}\sqrt{16}\cdot\sqrt{2a-4}$$

$$= \frac{(8-2a)}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}\sqrt{2a-4}$$



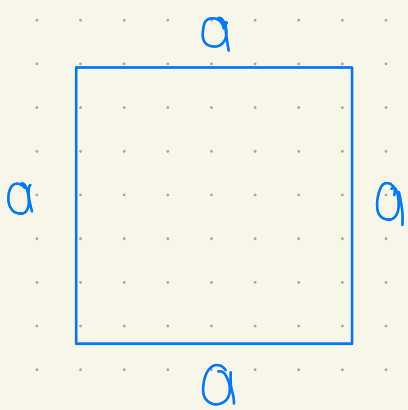
$$= (8-2a)\sqrt{2a-4}$$

$8 = 2a + b$

$b = 2$, $a = 3$ la No cumplen

$$= (8-2(3))\sqrt{2(3)-4}$$
$$= (8-6)\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$A = b\sqrt{4-b}$
$= 2\sqrt{4-2}$
$= 2\sqrt{2}$.



$P = 10$
¿Area?

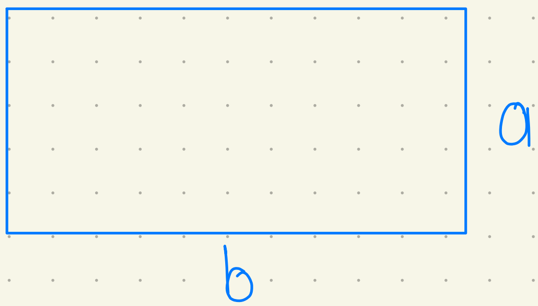
Area = lado · lado
$= a \cdot a$
$= a^2$

$10 = a+a+a+a$
$\Rightarrow 10 = 4a$
$\Rightarrow a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$a = 5/2$

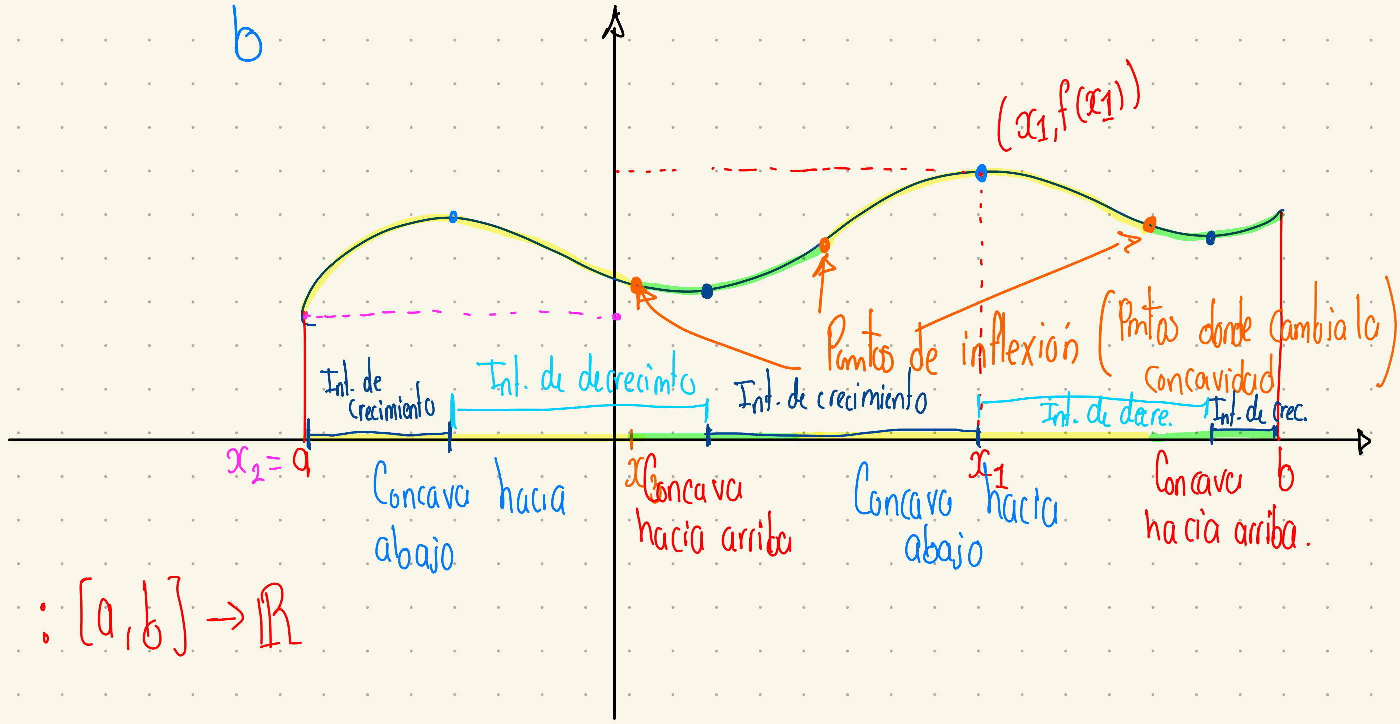
$A = (5/2)^2 = \frac{25}{4}$

Perimetro = 10



¿Area? Area = base · altura

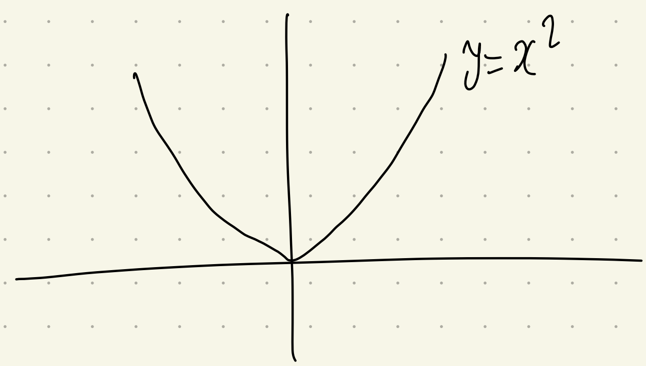
=



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

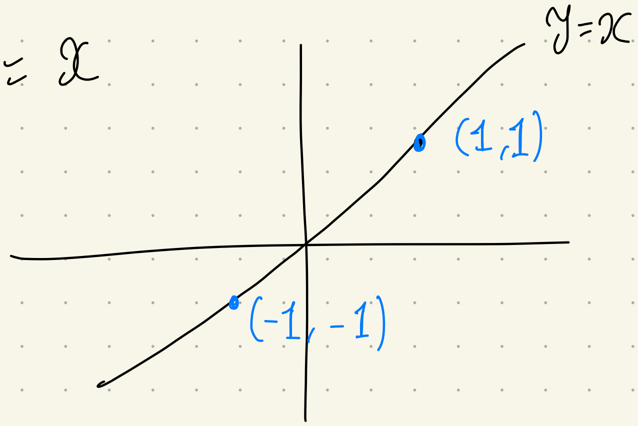
· Simetria con respecto al eje Y : $f(x) = f(-x)$

$f(x) = x^2$,



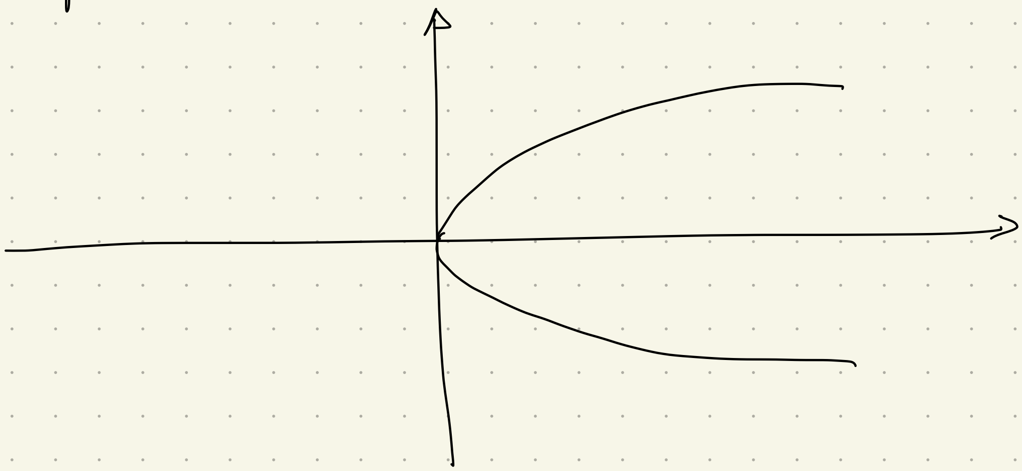
·) Simetria con respecto al origen. $y = x$

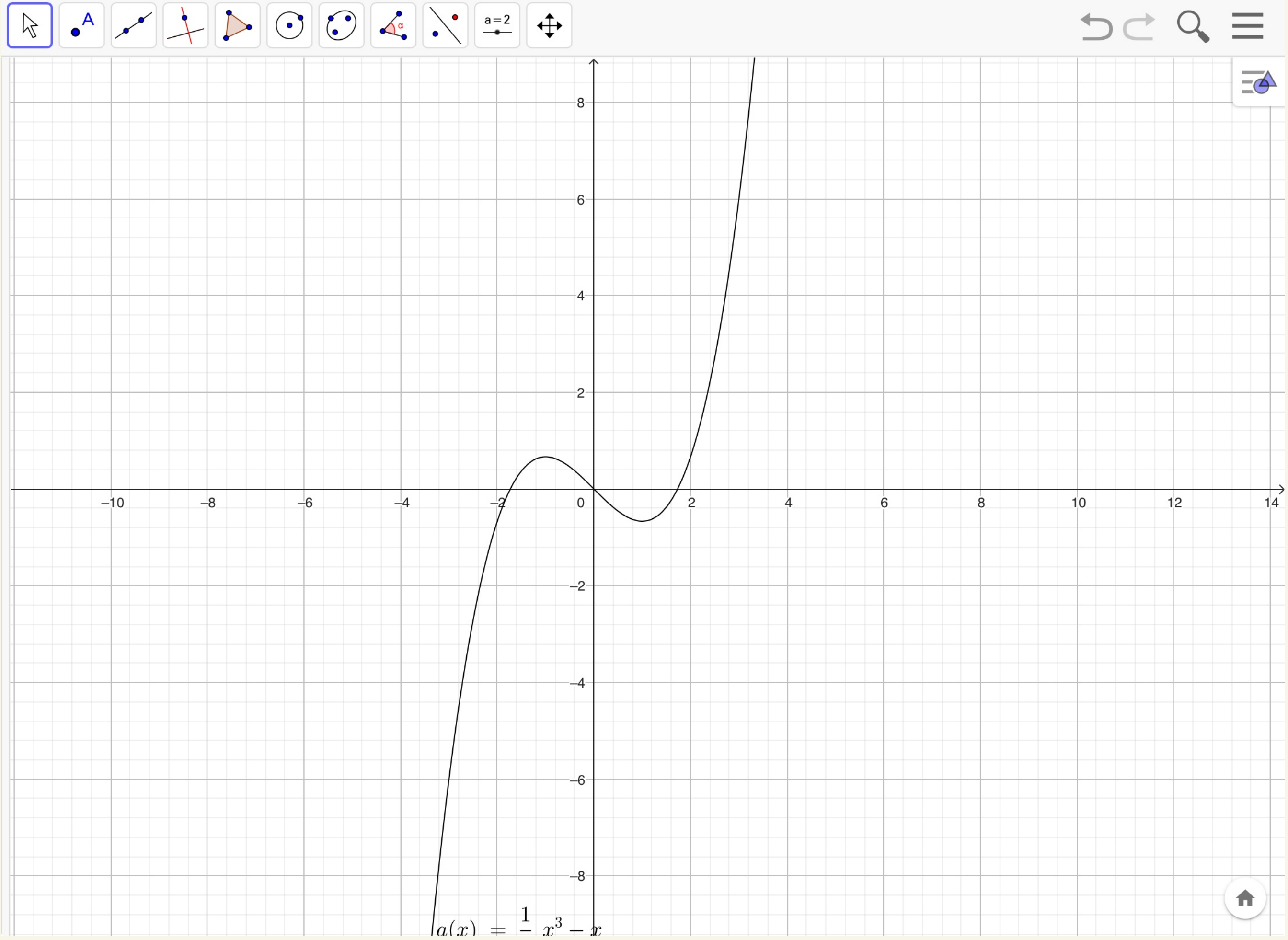
$f(-x) = -f(x)$



∴ Simetría con respecto al eje X

$$y^2 = x$$
$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}.$$





Intersecciones:

Eje X :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{3}x^3 - x = 0$$

$$\iff x\left[\frac{1}{3}x^2 - 1\right] = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ó } \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ o } x^2 = 3$$

$$\iff x = 0 \text{ o } x = \sqrt{x} \text{ o } x = -\sqrt{3}$$

$\therefore$ Las intersecciones con el eje X ocurren en: $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$

Eje Y: De la gráfica se observa que la única intersección con el eje Y ocurre en $y = 0$.

Simetrías:

Eje X: La gráfica de la función no es simétrica con respecto al eje X.

Eje Y: " " " " " " " " " " " eje Y

Origen: ¿ $f(-x) = -f(x)$?

$$f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)$$
$$= \frac{1}{3}(-x^3) + x$$
$$= (-1)\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]$$
$$= (-1)\, f(x)$$
$$= -f(x).$$

$$(-x)^3 = ((-1)\cdot x)^3$$
$$= (-1)^3 \cdot x^3$$
$$= (-1)\cdot x^3$$
$$= -x^3$$

$\Longrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ f es simétrica respecto al origen.

Intervalos de Crecimiento:

$(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento: $(-1, 1)$

Concavida:

Concavidad hacia arriba: $(0, +\infty)$

" " abajo: $(-\infty, 0)$

Puntos máximos y mínimos:

Máximos: En $x = -1$, la función alcanza un valor máximo local.

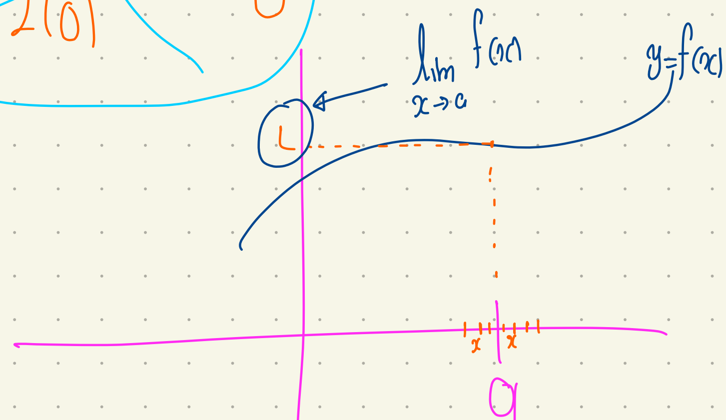
Mínimos: En $x = 1$, la función alcanza un valor mínimo local.

Puntos de inflexión: $(0, 0)$.

(11)

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{8x^2 - 2x}{2x} \cancel{= \frac{8(0) - 2(0)}{2(0)} = \frac{0}{0}}$

(3) $\lim_{x \to 2} x^2 - 4 = 2^2 - 4$
$= 0$



$$\lim_{x \to 0} \frac{8x^2 - 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{(2x)}\,[4x - 1]}{\cancel{2x}} \quad \text{Si } x \neq 0$$

$f(x)$ $\qquad$ $g(x)$

$$= \lim_{x \to 0} 4x - 1$$

$$= 4(0) - 1$$

$$= -1$$

Obs. Para todo $x \neq 0$, $f(x) = g(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{8x^2-2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}[8x-2]}{2\cancel{x}}, \text{ Si } x \neq 0$$

$f(x)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8x-2}{2}$$

$g_1(x)$

$$= \frac{8(0)-2}{2}$$

$$= \frac{0-2}{2}$$

$$= \frac{-2}{2}$$

$$= -1$$

$f(x)$ y $g(x)$ Son iguales en todo punto $x \neq 0$.

(2) $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x-3)}{\cancel{(x+1)} \cdot 1}$

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x+1 \overline{\big)\, \cancel{2x^2} - x - 3} \\ -\cancel{2x^2} - 2x \\ \hline -\cancel{3x} - \cancel{3} \\ \cancel{3x} + \cancel{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

$= \lim_{x \to -1} 2x - 3$

$= 2(-1) - 3$

$= -2 - 3$

$= -5$

$\underline{2x^2 - x - 3} = (x+1)(2x-3)$

$= 2x^2 - 3x + 2x - 3$

$= \underline{2x^2 - x - 3}$

$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x+1} = -5$

(3) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2+4x-21}{x-3} = \lim_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+7)}{\cancel{x-3}}$

$$\begin{array}{r|l} & x+7 \\ \hline x-3 & x^2+4x-21 \\ & -x^2+3x \\ \hline & 7x-21 \\ & -7x+21 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$= \lim_{x \to 3} x+7$

$= 3+7$

$= 10$

$x^2+4x-21 = (x+7)(x-3)$

(4) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-8x+12}{x-2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-6)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$

$= \lim_{x \to 2} x-6$

$= 2-6$

$= -4$

1. $$\lim_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4} = \frac{2-\sqrt{4}}{4} = \frac{2-2}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}\right)\left(\frac{2+\sqrt{4-x}}{2+\sqrt{4-x}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{4-(4-x)}{x(2+\sqrt{4-x})}\right)$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{4}-\cancel{4}+x}{x(2+\sqrt{4-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot 1}{\cancel{x}(2+\sqrt{4-x})}$$

$$\cancel{= \lim_{x \to 0} 2+\sqrt{4-x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2+\sqrt{4-x}}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{4-0}}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \frac{1}{4}$$

$$③ \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$(a-b)(a+b)$
$= a^2-b^2$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1^2+3}+2}{1+1}$$

$$= \frac{\sqrt{4}+2}{2}$$

$$= 2$$

4 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{\sqrt{\,}}x+3)^{\cancel{2}} - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot 1}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{4}$$

Definición: Una función $f(x)$ es continua en $x=a$ si se satisface lo siguiente:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ exista

2) $f(a)$ esté bien definida

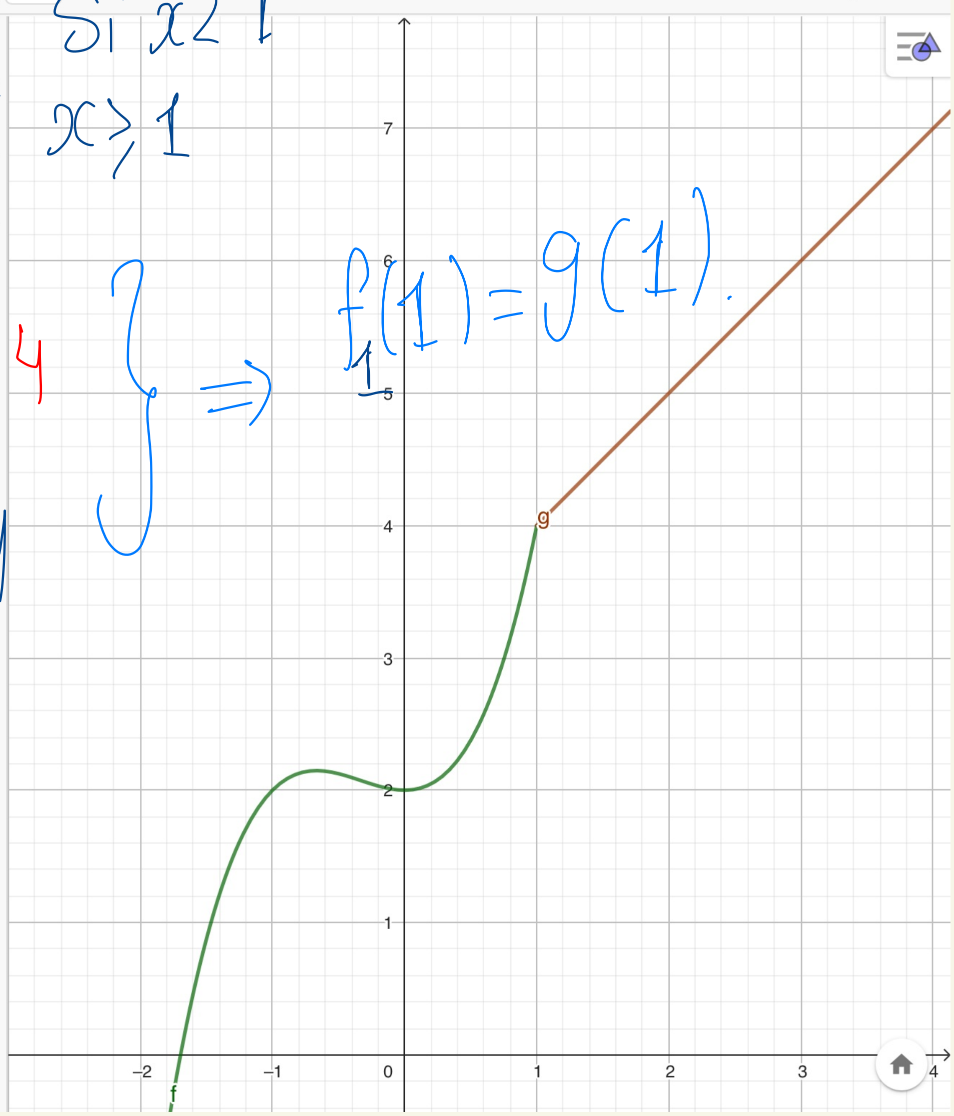
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

9:41 Mar 9 de ene 100%

$f(x) = \begin{cases} x^3+x^2+2, & (-\infty \le x \le 1) \quad \text{Si } x \le 1 \\ x+3, & (1 \le x \le \infty) \quad \text{Si } x > 1 \end{cases}$

$g(x) = x+3, \quad (1 \le x \le \infty)$

Entrada...

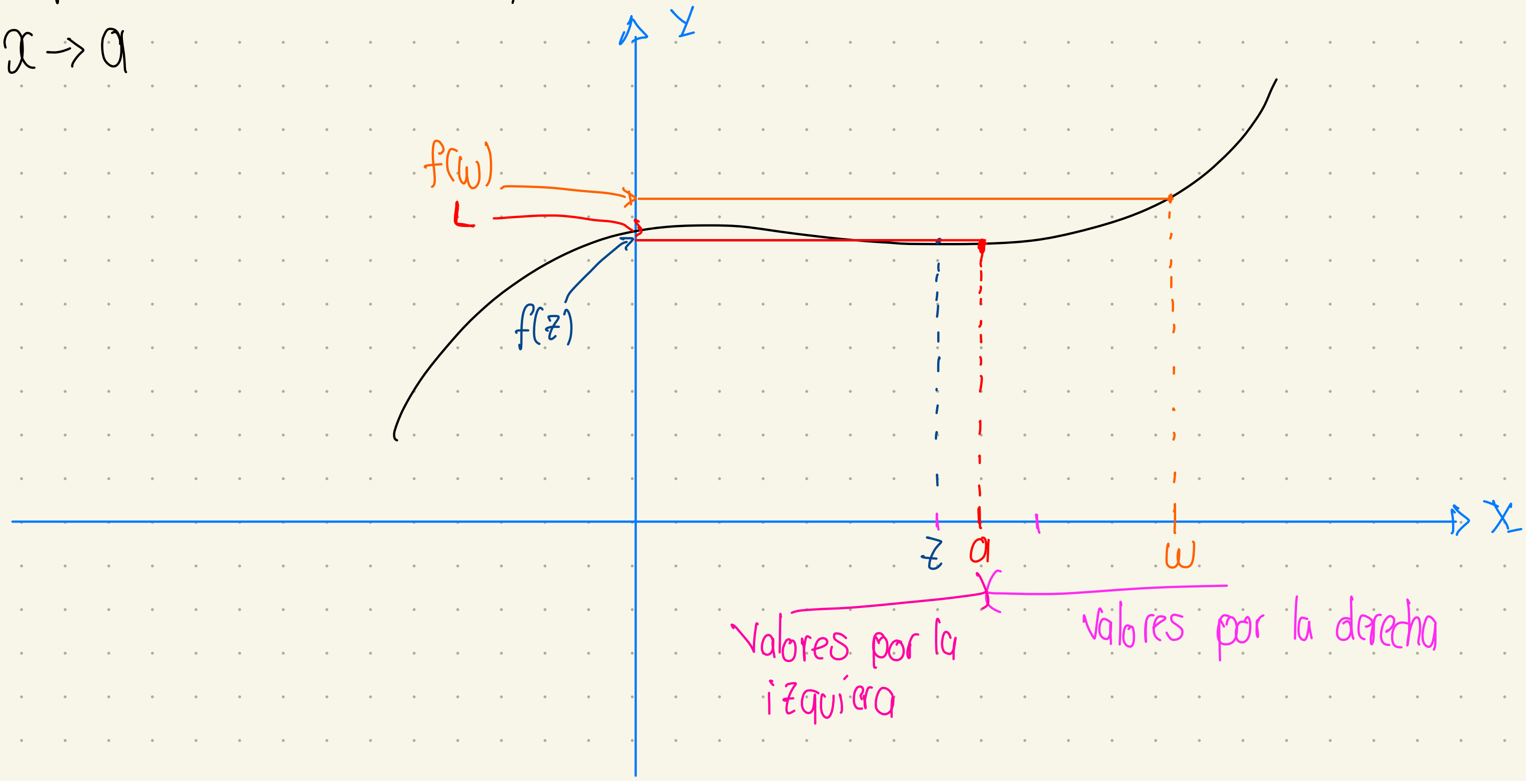


$f_1(1) = 1^3 + 1^2 + 2 = 4$

$g(1) = 1 + 3 = 4$

$\Rightarrow f_1(1) = g(1)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad , \quad L \in \mathbb{R}$$

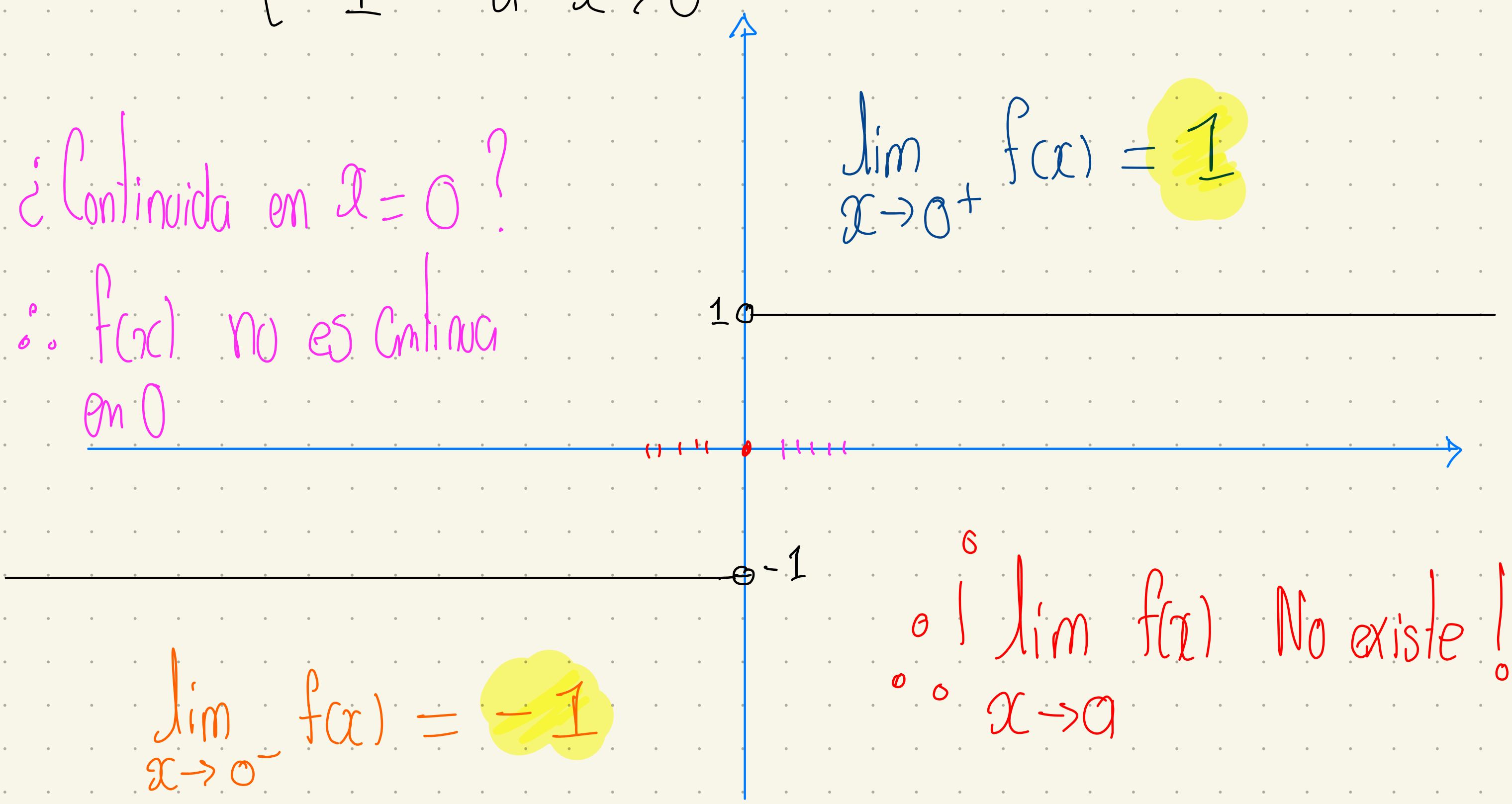


$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿ $\lim_{x \to 0} f(x)$?

¿Continuida en $x = 0$?

$\therefore$ f(x) no es continua en 0



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

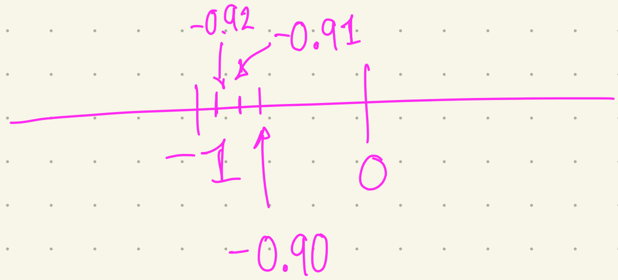
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

¡ $\lim_{x \to a} f(x)$ No existe !

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad y$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

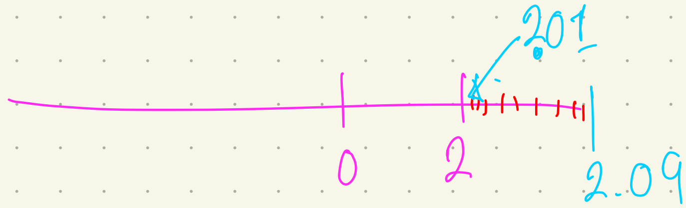
1) $$\lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1}$$



x	$f(x) = \frac{3}{x+1}$
-0.90	30
-0.91	33.333
-0.92	37.5
-0.93	42.85
-0.94	50
-0.95	60
-0.96	75
-0.97	100
-0.98	150
-0.99	300
-1	

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$$

b) $$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2}.$$

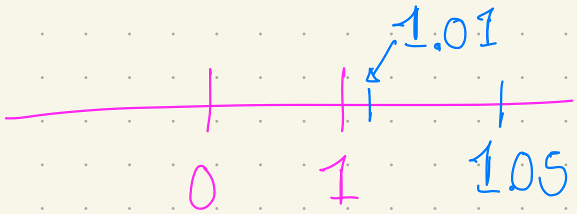


x	$f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$
2.	INDEFINIDO / ERROR
2.01	501
2.02	251
2.03	157.66
2.04	126
2.05	101
2.06	
2.07	
2.08	
2.09.	

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

c) $\lim_{x \to 1^+} x^3 - 3x - 2$

x	$f(x) = x^3 - 3x - 2$
1	2
1.01	2.0603
1.02	2.1212
1.03	2.1827
1.04	2.2448
1.05	2.3076

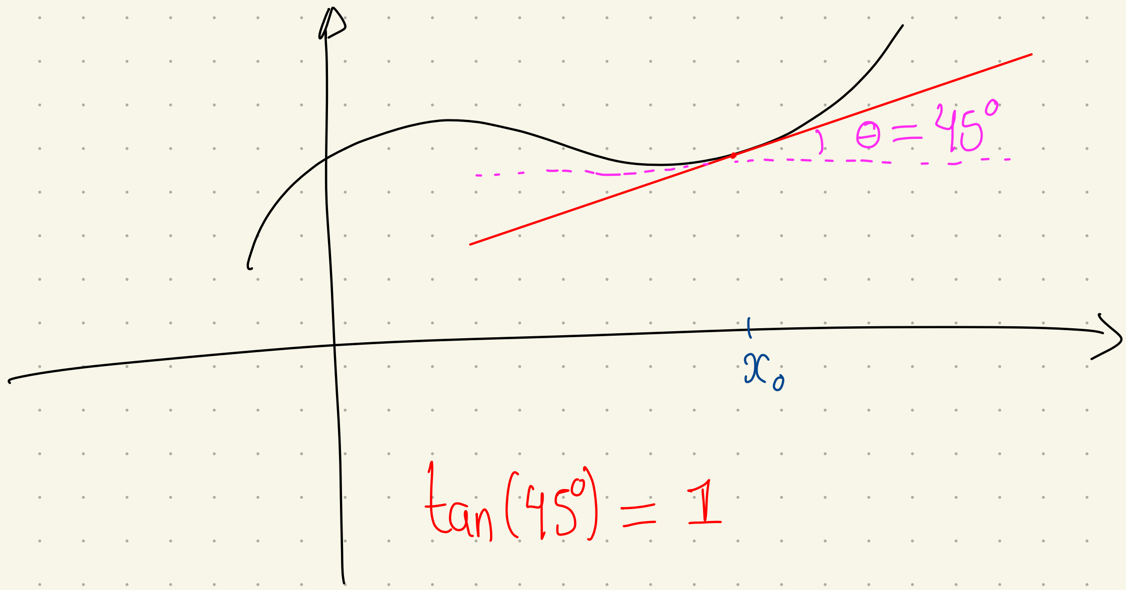


(x_0, y_0)

$f(x) = 5x - x^2$

$f'(x_0) =$ Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en x_0

$= \tan(\theta)$



$\tan(45°) = 1$

$f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = 5 - 2x_0 = 1$

$\iff 5 - 2x_0 = 1$

$\iff 5 - 1 = 2x_0$

$\iff 4 = 2x_0$

$\iff \underline{x_0 = 2}$

¿y_0?

$y_0 = f(2)$

$= 5(2) - 2^2$

$= 10 - 4$

$= 6$

$\therefore (x_0, y_0) = (2, 6)$

$$f(x) = \frac{x-8}{x^2-64}$$ ¿Para $x_0 = 8$?

$$f(x) = \frac{x-8}{(x-8)(x+8)} = \frac{1}{x+8}$$ Para todo $x \neq 8$

Respuesta: En $x = 8$, la función es continua.

$f(x) = 3x - 1$ ¿ $x_0 = 2$?

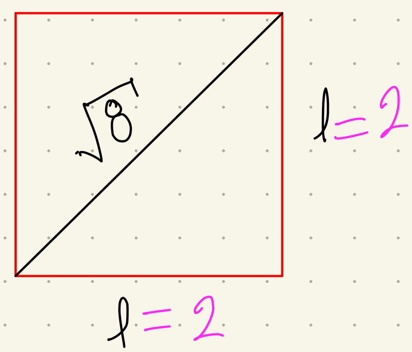
Respuesta: La función es continua, la gráfica de la función es una línea recta.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+2}$$ ¿ $x_0 = -2$?

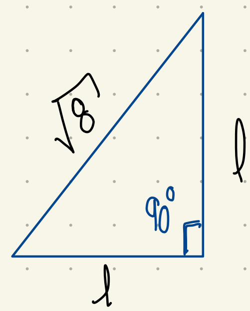
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{x+2}}$$

$= x - 1$ Para $x \neq -2$

Respuesta: La función es discontinua en el punto $\underline{x=-2}$



¿Área?



Como se trata de un triángulo rectángulo se debe satisfacer el Teo. de Pitágoras:

$$l^2 + l^2 = (\cancel{\sqrt{8}})^{\cancel{2}}$$

$$\iff 2l^2 = 8$$

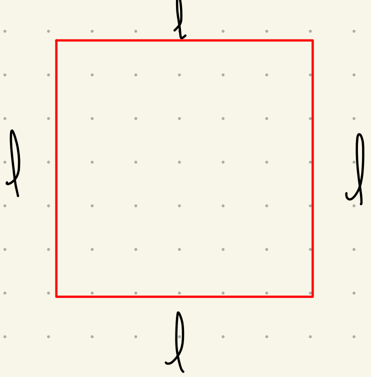
$$\iff l^2 = 4$$

$$\iff \sqrt{l^2} = \sqrt{4}$$

$$\iff |l| = 2$$

$$\iff \underline{l = 2}$$

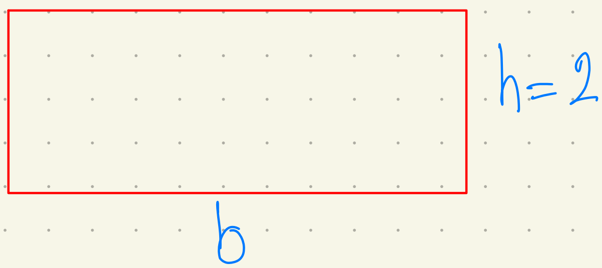
$$\text{Área} = 2^2 = \underline{4}.$$



$\text{Perimetro} = 32 = 4 \cdot l \Rightarrow \underline{l = 8}$

¿Área?

$\underline{\text{Área} = 64}$

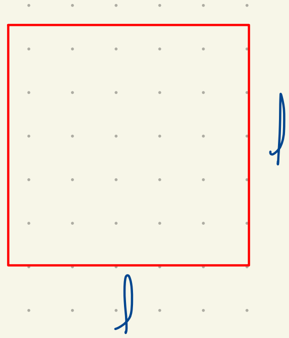


$\text{Perimetro} = 14 \text{ cm}$

¿Área?

$$14 = 2h + 2b$$
$$= 4 + 2b$$
$$\Rightarrow 2b = 10$$
$$\Rightarrow \underline{b = 5}$$

$$\text{Área} = (5)(2) = \underline{10 \text{ cm}^2}$$



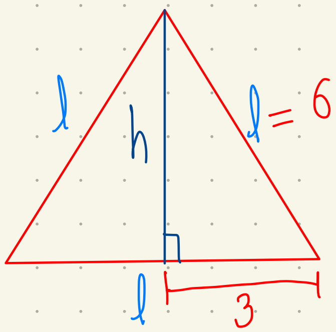
$\text{Área} = 20 \text{ cm}^2$

¿Perimetro?

$$\Rightarrow l^2 = 20$$
$$\Rightarrow l = \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 4} = \sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{4}}^{\,2} = 2\sqrt{5}.$$

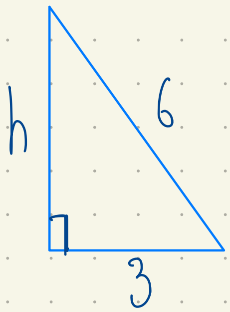
$\therefore \quad \underline{l = 2\sqrt{5}}$

$\text{Perimetro} = 4(2\sqrt{5}) = \underline{8\sqrt{5}}$



$\text{Perimetro} = 18 \Rightarrow 3l = 18 \Rightarrow \underline{l = 6}$

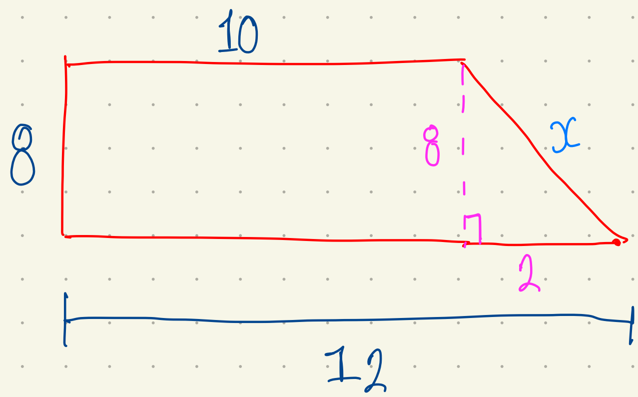
¿Área ?



$$h^2 + 3^2 = 6^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 = 6^2 - 3^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 = 27$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{h^2} = \sqrt{27}$$
$$\Leftrightarrow |h| = \sqrt{27}$$
$$\Leftrightarrow h = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$$
$$= 3\sqrt{3}$$

$\therefore \quad \underline{h = 3\sqrt{3}}$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{18\sqrt{3}}{2}$$
$$= \underline{9\sqrt{3}}$$



¿Perímetro? ¿Área?

Por el Teo. de Pitagoras:

$$8^2 + 2^2 = x^2$$

$$\iff 64 + 4 = x^2$$

$$\iff x^2 = 68$$

$$\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{68}$$

$$\iff x = 2\sqrt{17}$$

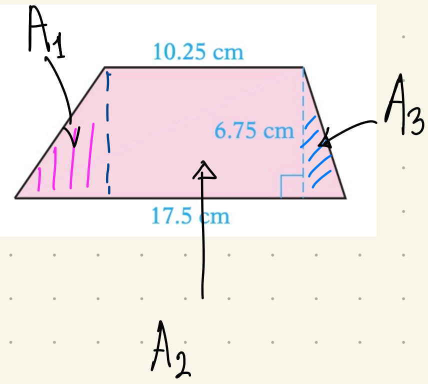
Perímetro $= 30 + 2\sqrt{17}$ unidades (u).

Área $= 88$ unidades cuadradas (u^2)

72. Geometría El radio de la base de un cilindro circular recto es 3.75 pies. La altura del cilindro es 9.5 pies. Calcula el área de la superficie del cilindro.

73. Geometría El largo de una base de un trapezoide es 17.5 cm y el largo de la otra base es 10.25 cm. La altura es 6.75 cm ¿Cuál es el área del trapezoide?

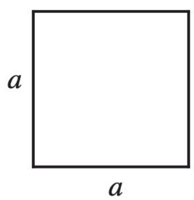
74. Geometría Un cono circular recto tiene una altura de 2.75 pulgadas. El diámetro de



$$A = \boxed{\cancel{A_1 + A_2} + A_3} = \frac{(10.25 + 17.5)\cdot(6.75)}{2} = 93.65\ cm^2$$

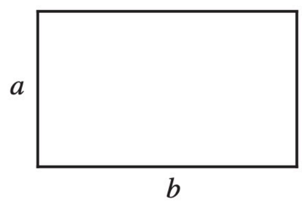
$$A_2 = \text{base} \times \text{altura} = (10.25)(17.5) = 179.375\ cm^2$$

Cuadrado



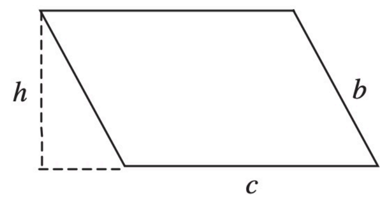
Perímetro: $P = 4a$
Área: $A = a^2$

Rectángulo



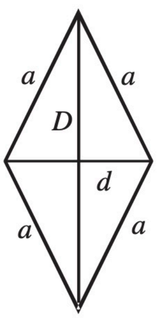
Perímetro: $P = 2\ (a + b)$
Área: $A = ab$

Paralelogramo



Perímetro: $P = 2\ (b + c)$
Área: $A = hc$

Rombo



Perímetro: $P = 4a$

Área: $A = \dfrac{Dd}{2}$

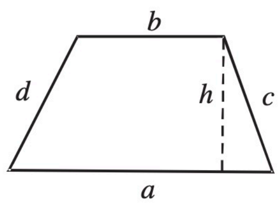
Donde:

d = Diagonal menor

D = Diagonal mayor

a = Lado del rombo

Trapecio



Perímetro:

$P = a + b + c + d$

Área:

$$A = \frac{(a+b)\ h}{2}$$

Donde:

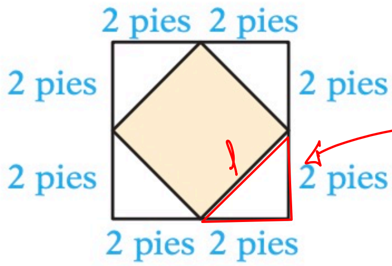
a, b, c, d = Lados del trapecio

a = Base mayor

b = Base menor

h = Altura

75. Calcula el área de la parte sombreada de la figura.



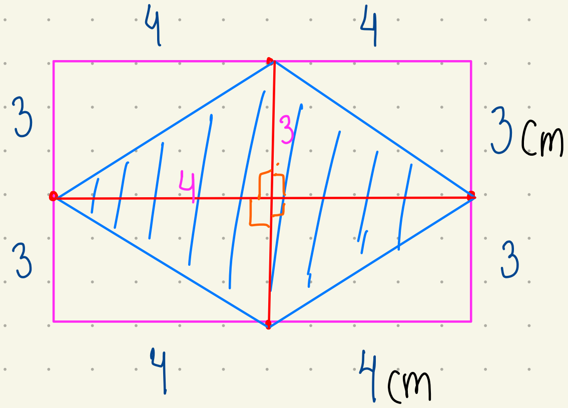
$$2^2 + 2^2 = l^2$$
$$\Rightarrow 4 + 4 = l^2$$
$$\Rightarrow 8 = l^2$$
$$\Rightarrow l = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$$
$$\underline{l = 2\sqrt{2}}$$

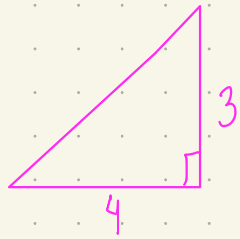
Area_cuadrado_mayor = 16 ft^2

Area_cuadrado_$\underline{\text{inscrito}}$ $= l \cdot l$

"dentro de"

$$= (2\sqrt{2})(2\sqrt{2})$$
$$= (2\sqrt{2})^2$$
$$= 2^2 (\sqrt{2})^{\cancel{2}}$$
$$= 4(2)$$
$$= \underline{8} \text{ ft}^2$$





$\text{Area\_triangulo} = \underline{6}$

$\text{Area\_total} = 4(6) = 24 \text{ cm}^2$

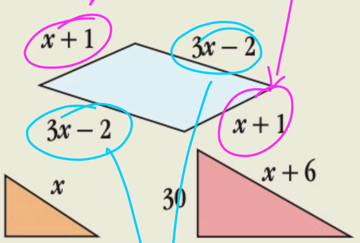
$\frac{7}{4} + 1 = 2.75$

25. Números impares ¿Cuáles tres impares consecutivos suman 99?

26. Geometría Obtén cada lado del paralelogramo, si su perímetro mide 12 cm.

27. Geometría Calcula el lado de cada triángulo, sabiendo que éstos son semejantes entre sí.

28. Física y juegos infantiles ¿A qué distancia del



3.25

$$12 = (x+1) + (3x-2) + (3x-2) + (x+1)$$

$$= 8x - 2$$

$2(2.75) + 2(3.25) = 12$ ✓

$$\Rightarrow 12 + 2 = 8x$$

$$\Rightarrow x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \underline{x = \frac{7}{4}} = \underline{1.75}$$

Si f y g son dos funciones para las cuales $f(x) = g(x)$, para toda $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

(lo que significa que si alguno de los límites existe, entonces el otro también existe y son iguales).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} x-2$$

$$= 0-2$$

$$= -2$$

$$-0-2$$

$$= -2$$

$$\frac{x^2-2x}{x} = \frac{x(x-2)}{x}$$

$$\Rightarrow \text{Si } x \neq 0, \text{ ent. } \frac{x^2-2x}{x} = x-2$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+2x}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{x\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to -2} x \left[\cancel{\frac{x+2}{x+2}} \right] \to 1$$

$$= \lim_{x \to -2} x$$

$$= \underline{-2}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^3+3t^2}{t^3-4t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2}(t+3)}{\cancel{t^2}(t-4)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t+3}{t-4}$$

$$= \frac{0+3}{0-4}$$

$$= \underline{-\frac{3}{4}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(t^2+3t)}{\cancel{t}(t^2-4t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2+3t}{t^2-4t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(t+3)}{\cancel{t}(t-4)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t+3}{t-4}$$

$$= \frac{3}{-4}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} x+4 = 0+4$$

$$= 4$$

$$(x+2)^2 - 4 = ([x+2]-2)([x+2]+2)$$

$$2^2 \quad = (x)(x+4)$$

Productos notables: $(x-2)(x+2) = x^2 - 2^2$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-4)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$

$$= \lim_{x\to -4} x-4$$

$$= -4-4$$

$$= -8$$