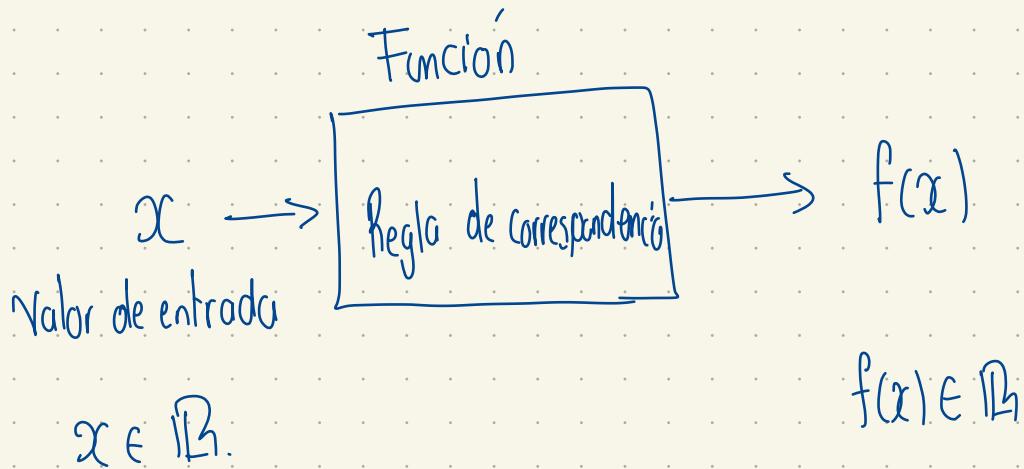


Notas  
asesorías  
Cálculo  
Diferencial

# Funciones

Función: Regla de correspondencia/regla matemática que asigna a cada valor de entrada un único valor de salida



Ejemplos:

o)  $f(x) = x + 1$  Regla de correspondencia

$f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$ .

$x=1$

$f(5) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow f(5) = 6$

Funciones Constantes.

$$f(x) = C$$

$\uparrow$   
Es un valor constante.

## Ejemplos:

•)  $f(x) = 10$

$$f(0) = 10, \quad f(-5) = 10, \quad f(11) = 10.$$

Funciones polinomiales. grado de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + \underbrace{a_0 x^0}_1$$

Coeficiente principal.

$$a_n \neq 0,$$

$n=1$ , : Función lineal (Función polinomial de grado 1).

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$n=2$ , : Función Cuadrática (Función polinomial de grado 2)

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

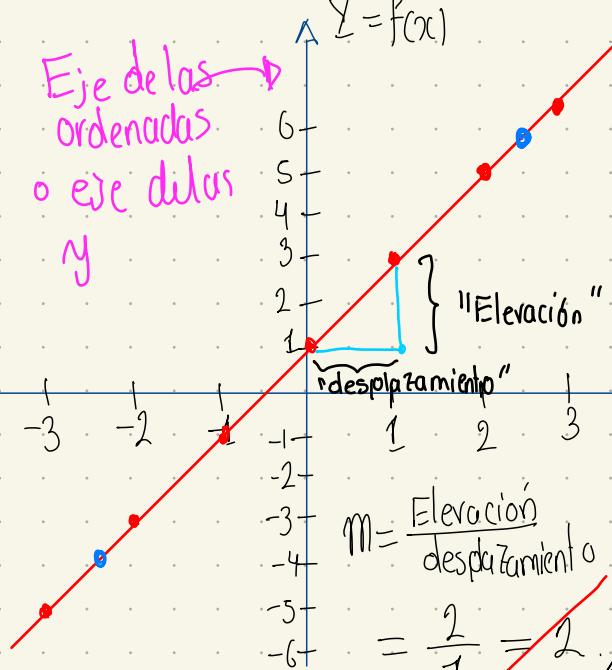
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$x$	$f(x)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	6

$(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 6)$

Eje de las ordenadas  
o eje ditus  
 $y$



$(x, f(x))$  → Representa un punto en el plano Cartesiano

La Pendiente de la recta

$$f(x) = mx + b$$

Eje de las abscisas  
o eje de las  $X$

Ordenada  
Origen.

$$2) \quad f(x) = x + 3$$

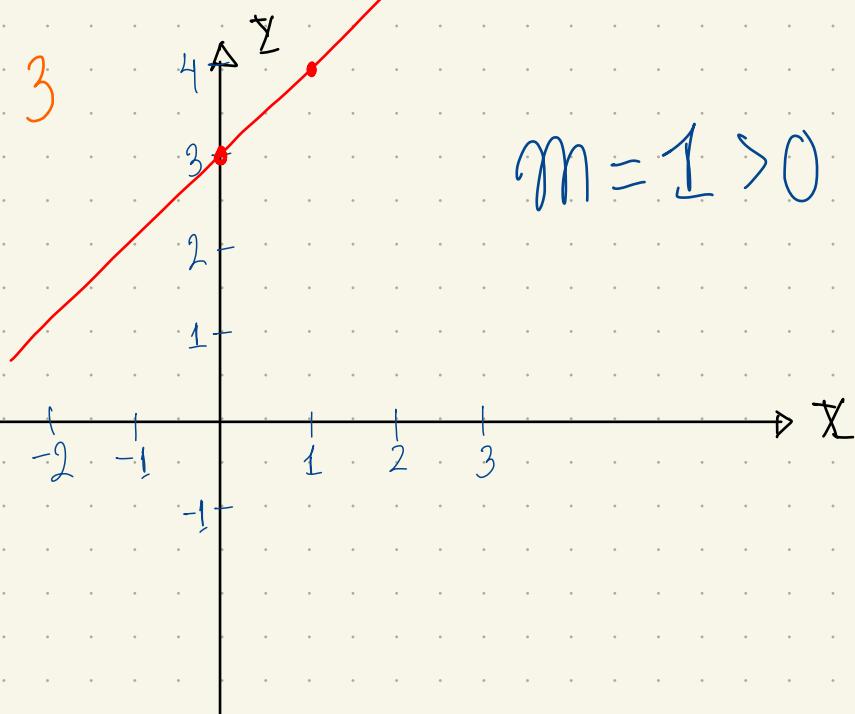
$$x=0 \Rightarrow f(0)=3$$

$$\Rightarrow (0, 3)$$

$$m=1 > 0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=4$$

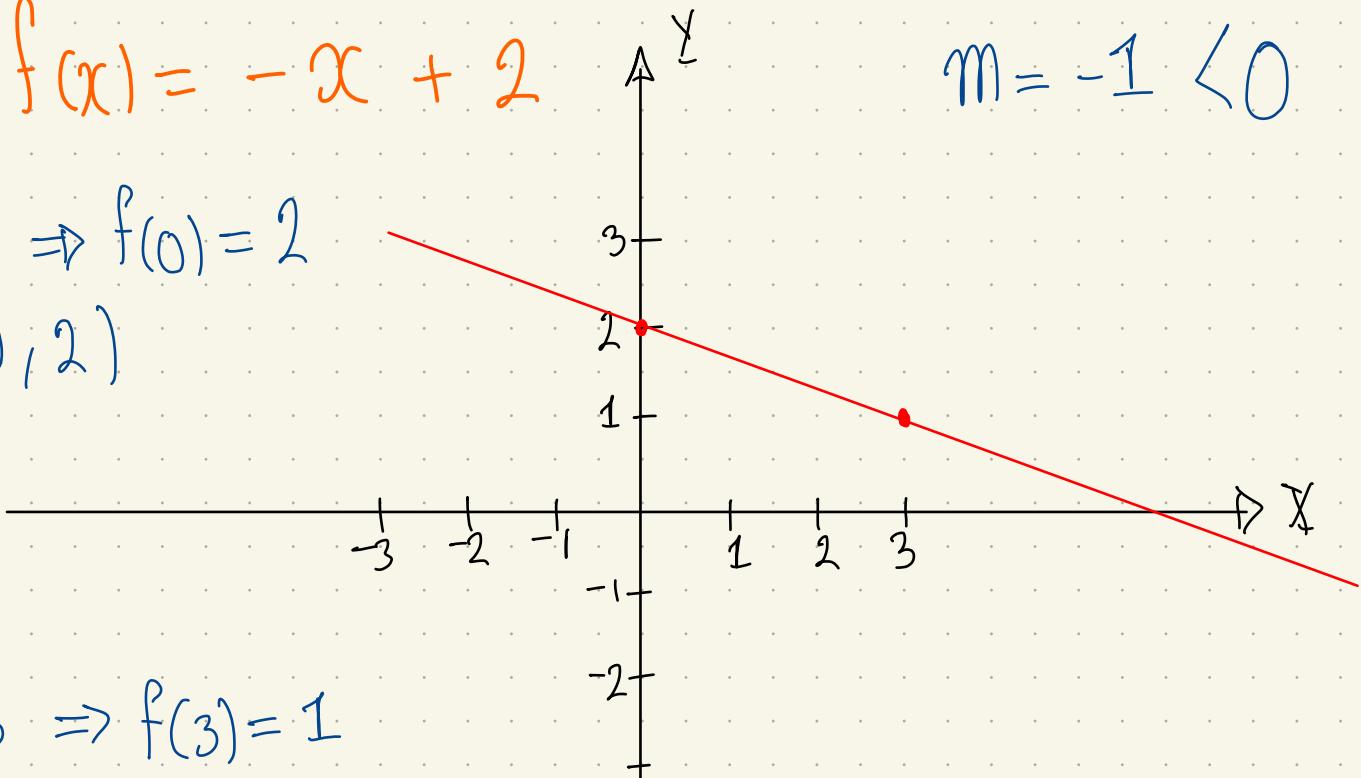
$$\Rightarrow (1, 4)$$



$$\textcircled{3} \quad f(x) = -x + 2 \quad m = -1 < 0$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=2$$

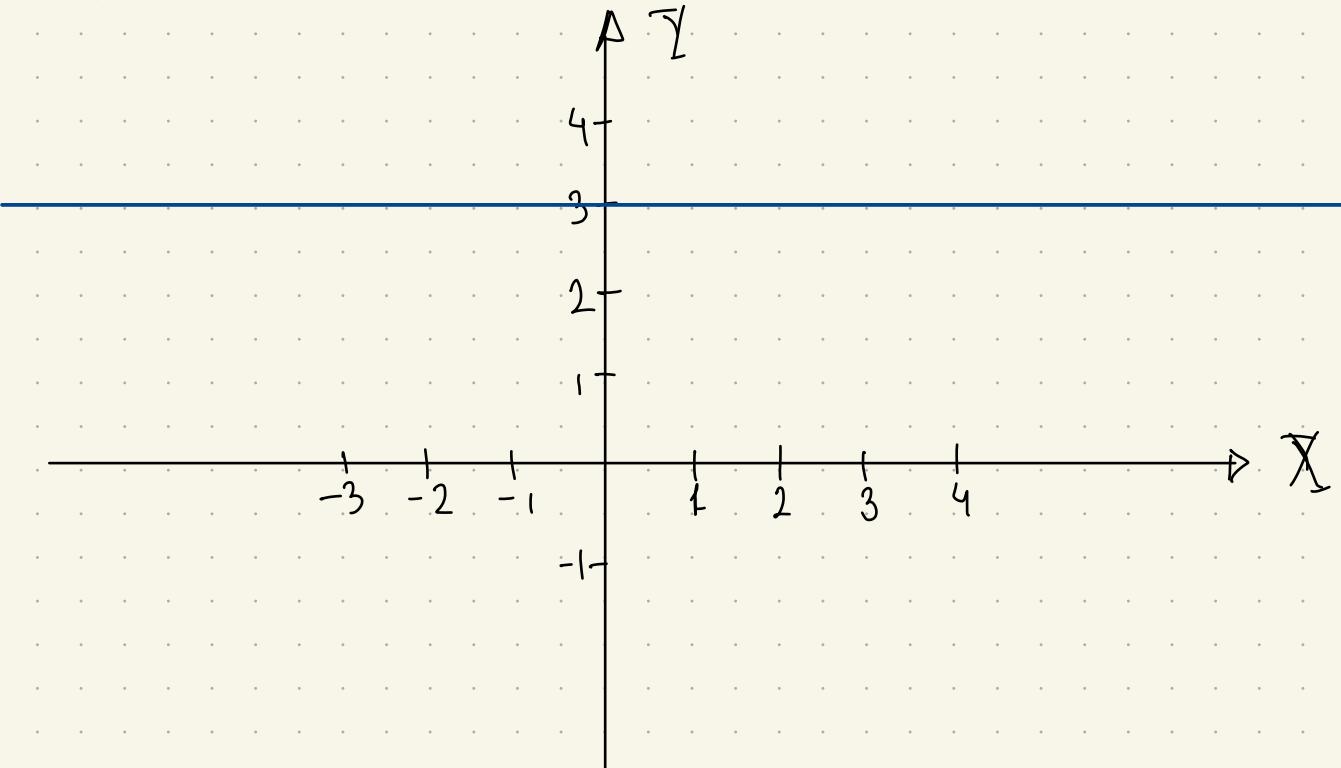
$$(0, 2)$$



$$x=3 \Rightarrow f(3)=1$$

$$(3, 1)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = 0 \cdot x + 3 = 3$$



La forma general de una ecuación lineal es:

$$Ax + By + C = 0$$

$f(x) = 2x + 1$ ,  $y = 2x + 1$

↑ Variable independiente  
Variable dependiente (depende de los valores)  
(que tome  $x$ )

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

= Funciones de la línea recta =

• Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

i)  $(a, b)$  punto por el que pasa la línea recta

ii)  $m$  pendiente.



$$y - b = m(x - a)$$

Ecuación punto  
Pendiente de una  
línea recta.

Ejemplo: Encuentra la ecuación punto-pendiente de la linea recta que pasa por el punto  $(1, 3)$  y que tiene Pendiente  $m=5$ .

la ecuación general

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

Ecuación punto-pendiente  
de la linea recta  
en cuestión

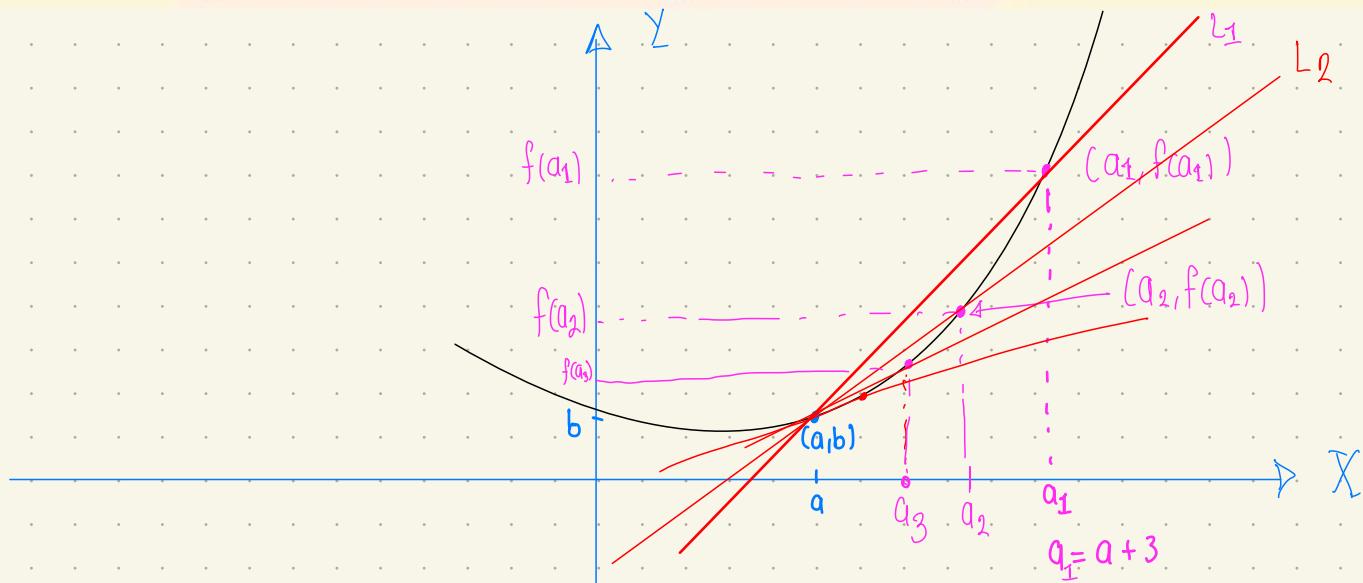
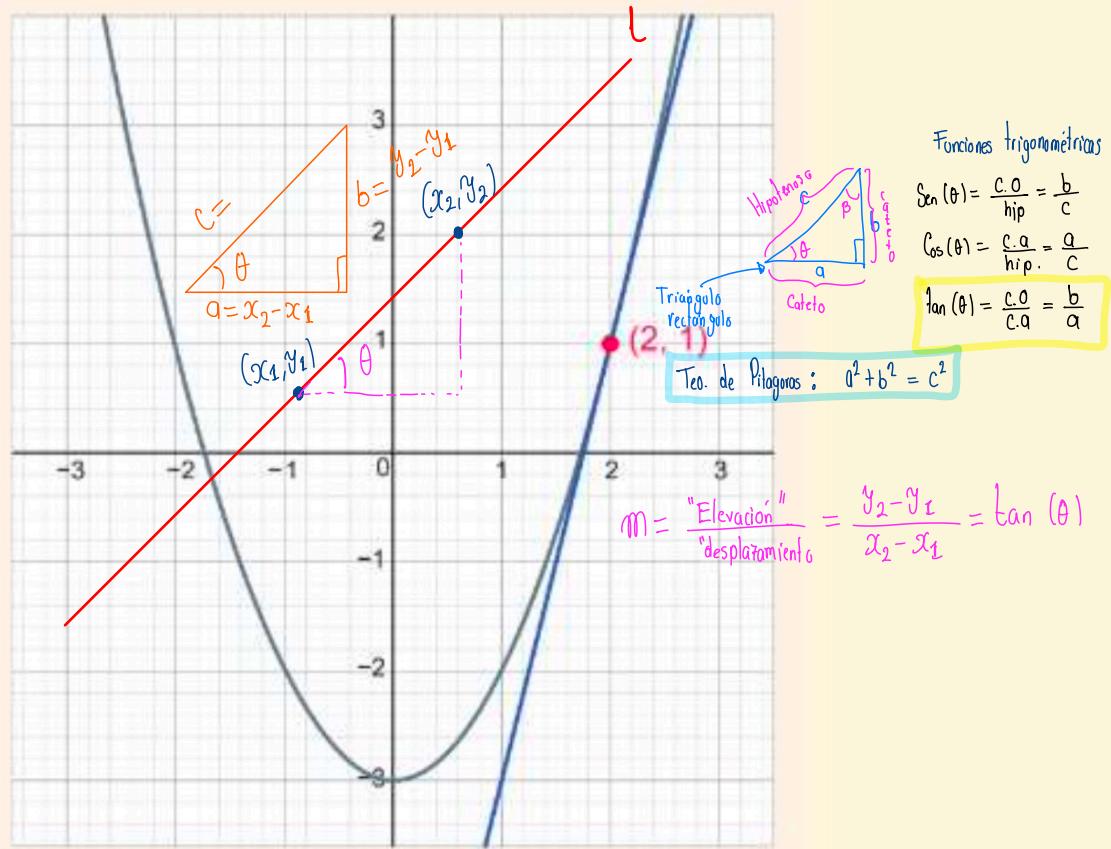
$$\Leftrightarrow y - 3 - 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 2 = 0$$

Ecuación general de  
la linea recta que  
pasa por  $(1, 3)$  y  
tiene pendiente  $m=5$ .

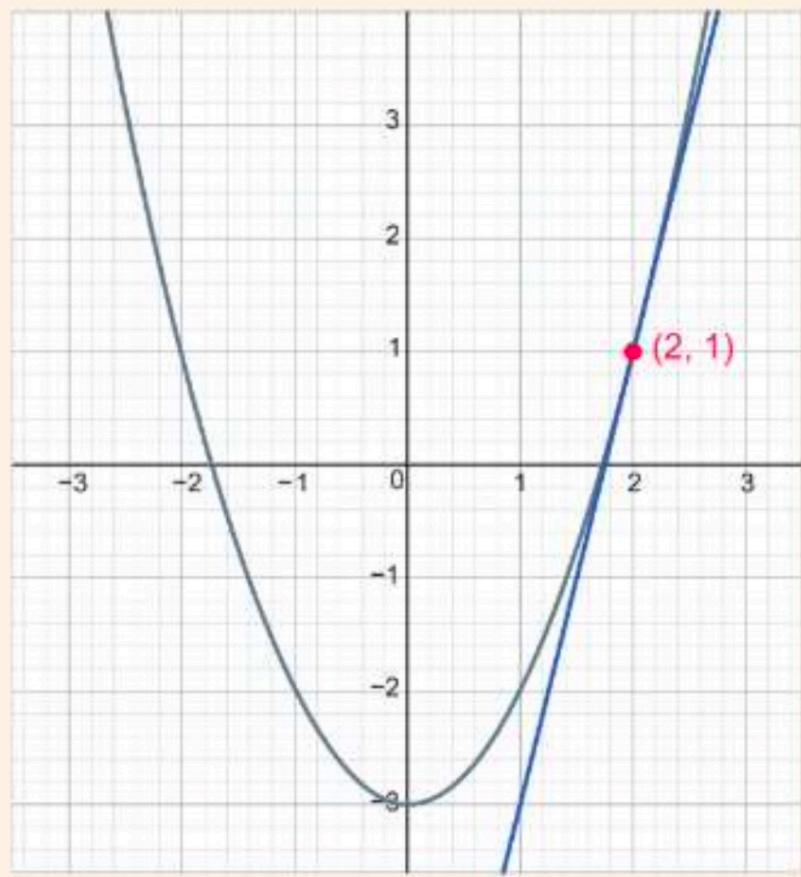
3. Si  $f(x) = x^2 - 3$ , encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto  $A(2, 1)$ .



Pendiente de  $L_1$  :  $\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}$

Pendiente de  $L_2$  :  $\frac{f(a_2) - f(a)}{a_2 - a}$

3. Si  $f(x) = x^2 - 3$ , encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto  $A(2, 1)$ .



Derivada de la función  $f(x) = x^2 - 3$  en el punto  $x=2$   
Coincide con la pendiente de la recta tangente a  
la gráfica de la función en el punto  $(2, 1)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=2} = 2 \cdot x \Big|_{x=2}$$

$= 4$

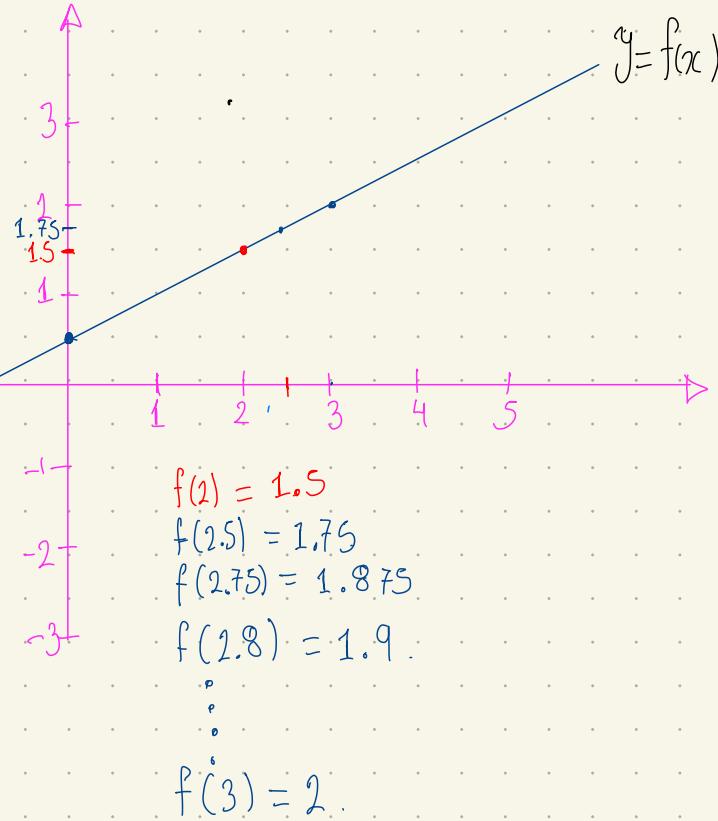
$$f'(2)$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

"A que valor (si existe) se acerca la función cuando  $x$  se acerca a 3?"

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$



la pendiente de la recta

tangente (en caso de que exista)  
 a la gráfica de mi función  
 en  $(a, f(a))$ .

$$= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= la derivada de la función  $f$   
 en el punto  $x=a$ .

Calcula los siguientes términos de la sucesión  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ , márcalos en la recta numérica y responde las siguientes dos preguntas.

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$a_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$$

$$a_{50} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$$

$$a_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

$$a_{500} = 1 - \frac{1}{500} = 0.998$$

$$a_{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Los puntos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  ya están marcados en la recta numérica, ahora marca los valores  $a_n$  que obtuviste.



a) ¿Qué pasa con los valores de  $a_n$  cuando  $n$  va creciendo?

.....

b) ¿Qué crees que pase si calculas  $a_{5000}$ ,  $a_{10000}$  y  $a_{50000}$ ? ? 0.99998

.....

## Problemario.

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^2 + 2$ , en  $x = 1$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{x}$  en  $x = 2$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  en  $x = 5$

$$f(x) = x^2 + 2$$

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^2 + 2$ , en  $x = 1$   $a=1$

Solución:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Def: de } m_{\tan} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2] - [1^2 + 2]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1^2 + 2 \cdot 1 \cdot h + h^2 + 2] - 3}{h}$$

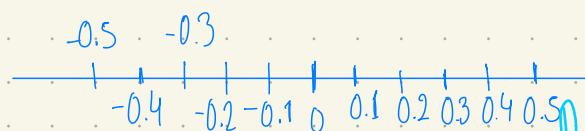
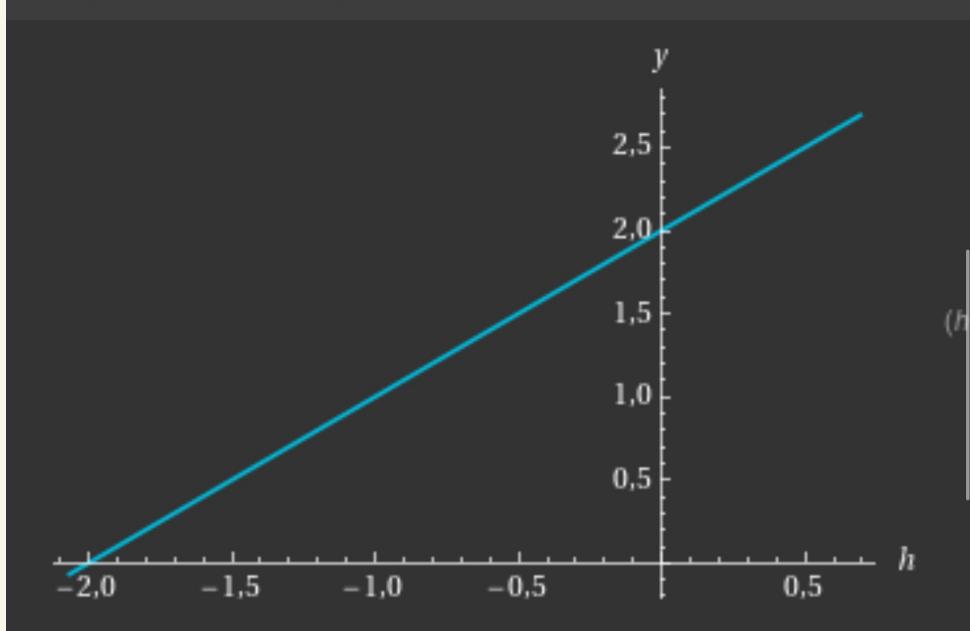
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h + 3) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 3 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

$h$	$\frac{h^2 + 2h}{h}$
-0.5	1.5
-0.4	1.6
-0.3	1.7
-0.2	1.8
-0.1	1.9
0	2
0.1	2.1
0.2	2.2
0.3	2.3
0.4	2.4
0.5	2.5

### Representaciones gráficas



Cuando  $h \neq 0$

$$\frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 = 0 + 2 = 2$$

Si  $f(h) = g(h)$  para todo  $h \neq 0$   
ent.  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)$

Prop. de límites:  
Si  $f$  es una función polinómica i.e.  
 $f(h) = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \dots + a_0$   
 $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0)$ .

•  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$

Límite de los  
Pendientes de los  
rectas secantes cuando  
 $x=1$  y esto sabemos  
que es igual a la  
Pendiente de la recta tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en  $x=1$  es: 2

i.e.

$$\underline{m_{\text{tan}} = 2}$$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

$$f(x) = x^2 + 2 \quad , \quad x=1 \quad , \quad y = f(1) = 3$$

$$m_{tan} = 2, \quad (1, 3)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

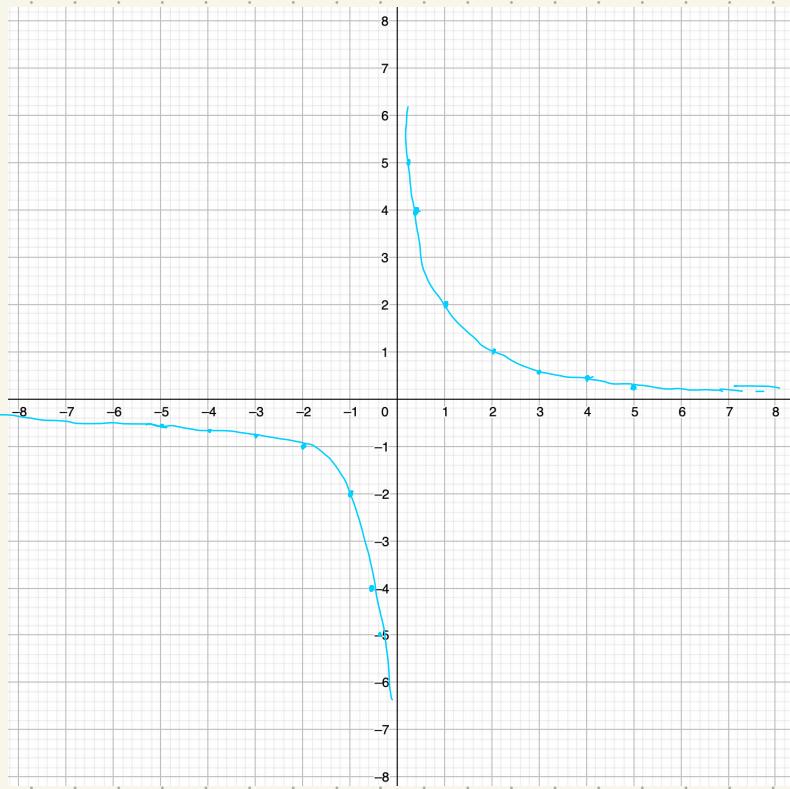
$$\Leftrightarrow y = 2x - 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 2x + 1}$$

Ecuación de la recta tangente a  
la gráfica de la función  $f$   
en el punto  $x=1$ .

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{x}$  en  $x = 2$

$x$	$f(x) = \frac{2}{x}$
-5	$\frac{2}{-5} = -0.4$
-4	-0.5
-3	-0.666
-2	-1
-1	-2
0	⚠️
1	2
2	1
3	0.6666
4	0.5
5	0.4



$x$	$F(x)$
-5	-0.4
-4	-0.5
-3	-0.6666666666666667
-2	-1
-1	-2
0	⚠️
1	2
2	1
3	0.666666666666667
4	0.5
5	0.4

$x$	$F(x)$
-1	-2
-0.9	-2.222222222222222
-0.8	-2.5
-0.7	-2.85714285714286
-0.6	-3.33333333333333
-0.5	-4
-0.4	-5
-0.3	-6.66666666666667
-0.2	-10
-0.1	-20
0	⚠️
0.1	20
0.2	10
0.3	6.66666666666667
0.4	5
0.5	4
0.6	3.33333333333333
0.7	2.85714285714286
0.8	2.5
0.9	2.22222222222222
1	2

Geogebra

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{x}$  en

$$x = 2$$

$$a = 2$$

Solución

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{4 - 2(2+h)}{2(2+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{-2h}{2(2+h)} \right]}{h} \stackrel{0}{\circ} h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2h) \cdot 1}{2h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h}$$

$$f(a+b) = \frac{2}{a+b}$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f(a) = \frac{2}{a}$$

$$\textcircled{f(1+1)} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$4 - 4 - 2h = -2h$$

(-1) ✓

$$= \frac{-1}{2+0}$$

$$= \frac{-1}{2} \quad \therefore m_{\tan} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad (2, f(2)) = (2, 1) \\ (a, b)$$

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{a+h} - \frac{2}{a}}{h}$$

$$2a - 2a - 2h = -2h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{2a - 2(a+h)}{a(a+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{-2h}{a(a+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{-2h}{a(a+h)} \right] \stackrel{0}{\div} \stackrel{0}{1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-2}{a(a+0)}$$

$$= \frac{-2}{a^2}$$

Paru  $a = 2$

$$m_{\tan} \Big|_{a=2} = \frac{-2}{2^2} = \frac{-1}{2}$$

$$m_{\tan} = \frac{-2}{a^2}$$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  en  $x = 5$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(5+h)-1} - \sqrt{5-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+4} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+4) - 4}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 1/4$$

Por lo tanto,  $m_{tan} = \frac{1}{4}$ .



$$x \quad f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1	0
2	1
3	1.41
4	1.73
5	2
6	2.23
7	2.44
8	2.64

$$x = -5 \quad ? \quad f(-5) ?$$

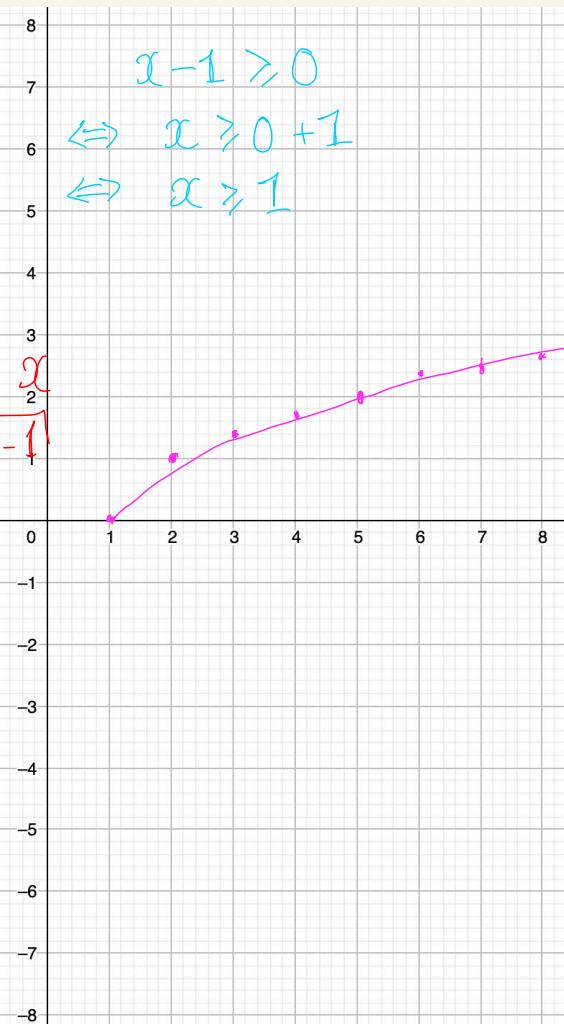
$$f(-5) = \sqrt{-5-1} \\ = \sqrt{-6}$$

¿Porque los valores de  $x$  en la función  $f(x) = \sqrt{x-1}$  estan bien?

$$x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



x	F(x)
1	0
2	1
3	1.4142135623731
4	1.73205080756888
5	2
6	2.23606797749979
7	2.44948974278318
8	2.64575131106459
9	2.82842712474619
10	3
11	3.16227766016838
12	3.3166247903554
13	3.46410161513775
14	3.60555127546399
15	3.74165738677394
16	3.87298334620742
17	4
18	4.12310562561766
19	4.24264068711928
20	4.35889894354067
21	4.47213595499958

### ACTIVIDAD PARA EL CUADERNO

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de  $x$ .

1.  $f(x) = -x^2 + 9$ ,  $(2, 5)$ ;  $x = 2$ ,  $x = 2.5$

2.  $f(x) = x^2 + 4x$ ,  $(0, 0)$ ;  $x = -\frac{1}{4}$ ,  $x = 0$

3.  $f(x) = x^3$ ,  $(-2, -8)$ ;  $x = -2$ ,  $x = -1$

4.  $f(x) = 1/x$ ,  $(1, 1)$ ;  $x = 0.9$ ,  $x = 1$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de  $x$ . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7.  $f(x) = x^2 - 6$ ,  $x = 3$

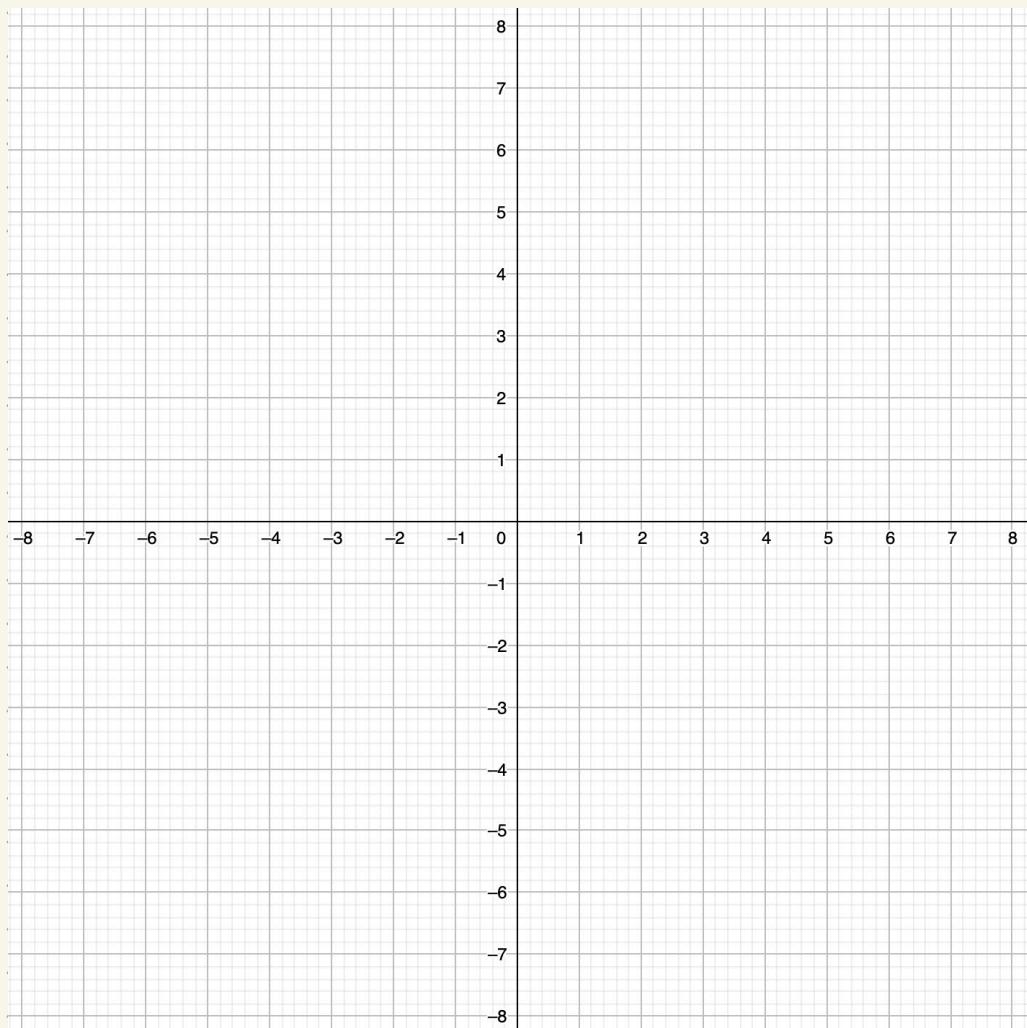
8.  $f(x) = -3x^2 + 10$ ,  $x = -1$

9.  $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $x = 1$

10.  $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ ,  $x = -2$

11.  $f(x) = -2x^3 + x$ ,  $x = 2$       12.  $f(x) = 8x^3 - 4$ ,  $x = \frac{1}{2}$

13.  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $x = -1$       14.  $f(x) = \frac{4}{x - 1}$ ,  $x = 2$



$$\textcircled{1} \quad f(x) = x^2 - 6 \quad , \quad x = 3 \quad / \quad a = 3$$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^n \\ h'(x) &= nx^{n-1} \\ g(x) &= C \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ h'(x) &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

#### Definición 4.1.1 Recta tangente con pendiente

Sea  $y = f(x)$  continua en el número  $a$ . Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existe, entonces la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(a, f(a))$  es la recta que pasa por el punto  $(a, f(a))$  con pendiente  $m_{\tan}$ .

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3+h)^2 - 6] - [3^2 - 6]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[9 + 6h + h^2 - 6] - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h \\ &= 6 + 0 \\ &= 6 \\ \therefore m_{\tan} &= 6 \end{aligned}$$

Ecu. punto-pendiente

$$y - y_1 = \textcolor{blue}{m}(x - x_1)$$

$m_{\tan}$

$$(x_1, y_1) = (3, 3)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, \quad y_1 = f(x_1) \\ &= f(3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$m_{\tan} = 6, \quad (x_1, y_1) = (3, 3)$$

$$y - 3 = 6(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 6x - 18 + 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 6x - 15}$$

Ecación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 6$  en el punto  $(3, 3)$ .

$$\textcircled{14} \quad f(x) = \frac{4}{x-1}, \quad x=2 / a=2$$

$$\begin{aligned}
 m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{4}{(2+h)-1} \right] - \left[ \frac{4}{2-1} \right]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{1+h} - 4}{h} \quad \frac{4}{1+h} - 4 = \frac{4-4-4h}{1+h} \\
 &\quad = \frac{-4h}{1+h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-4h}{1+h}}{h} \quad \frac{-4h}{1+h} \div \frac{h}{1} = \frac{-4h}{h(1+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{1+h} \quad = \frac{-4}{1+h}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{1+0}$$

$$= -4$$

$$\therefore M_{tan} = -4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$k(x) = \frac{\textcircled{4} f(x)}{(x-1) g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{\cancel{(x-1) \cdot 0} - 4 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad k'(2) = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1} = \underline{\underline{-4}}$$

$$M_{tan} = -4, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = f(x_1) = f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$$
$$(2, 4)$$

$$y - 4 = -4(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y = -4x + 8 + 4$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = -4x + 12} \rightarrow$$

la ecuación de la recta tangente  
a la gráfica de la función  
 $f(x) = \frac{4}{x-1}$  en el punto  $(2, 4)$ .

$$16. f(x) = 4 - \frac{8}{x}, x = -1$$

$$-8 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= +8x^2 \\ = \frac{8}{x^2}$$

$$x = -1 \\ = \frac{8}{1} = 8$$

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[4 - \frac{8}{(-1+h)}\right] - \left[4 - \frac{8}{-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{4(-1+h) - 8}{h-1}\right] - 12}{h}$$

$$\frac{-4+4h-8}{h-1} = \frac{4h-12}{h-1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4h-12}{h-1} - 12}{h}$$

$$\frac{4h-12}{h-1} - 12 = \frac{4h-12-12h+12}{h-1}$$

$$= \frac{-8h}{h-1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-8h}{h-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{-8h}{h-1} \right] \stackrel{0}{\circ} \frac{h}{1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8h}{h(h-1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8}{h-1}$$

$$= \frac{-8}{0-1} \quad \therefore m_{\tan} = 8$$

$\xrightarrow{}$

$$= \underline{8}$$

$$x_1 = -1, \Rightarrow y_1 = f(-1) = 4 - \frac{8}{(-1)} = 4 + 8 = 12$$

$(-1, 12)$

$$y - 12 = 8(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 8x + 8 + 12$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 8x + 20}$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = -3x^2 + 10, \quad x = -1$$

$$-3(-1+h)^2 = -3(1-2h+h^2)$$

$$= -3 + 6h - 3h^2$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-3(-1+h)^2 + 10] - (-3(-1)^2 + 10)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 + 6h - 3h^2 + 10 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h^2 + 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[-3h + 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -3h + 6$$

$$= -3(0) + 6$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

$$\therefore m_{\tan} = \underline{\underline{6}}, \quad x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-1) = 7$$

$$\underline{\underline{(-1, 7)}}$$

$$y - 7 = 6(x - (-1)) \Leftrightarrow y - 7 = 6(x + 6)$$

$$\Leftrightarrow y = 6x + 6 + 7$$

$$\Leftrightarrow y = 6x + 13$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = -3x + 1$  en el punto  $(-1, 7)$  es:

$$\underline{y = 6x + 13}$$

⑨  $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $x = 1$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$(1+h)^2 - 3(1+h)$$
$$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h$$
$$= h^2 - h - 2$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h - 2 + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h - 1$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\therefore m_{\tan} = -1$$

$$x_1 = 1 \quad y \quad y_1 = f(1) = -2, \quad (1, -2)$$

$$y - (-2) = (-1)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -x - 1}}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 3x$  en el punto  $(1, -2)$  es:

$$\underline{\underline{y = -x - 1}}$$

¿Pendiente en  $x=3/2$ ?

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3/2 + h) - f(3/2)}{h}$$
$$\frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{2}}{h} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{18}{4}}{h} = \frac{-\frac{9}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \left( \frac{9}{4} + 3h + h^2 \right) - \frac{9}{2} - 3h \right] - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}}{h}$$
$$\frac{-\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}{h} = \frac{-\frac{18}{4}}{h} = \frac{-\frac{9}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h^{2-1} \quad // \quad \frac{h^2}{h} = \frac{h \cdot h}{h} = h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h$$

$$= 0.$$

$$m_{\tan} = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad y_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{4} - \left(\frac{9}{2}\right) \frac{18}{4}$$
$$= \underline{\underline{-\frac{9}{4}}}$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$y - \left(-\frac{9}{4}\right) = 0 \cdot (x - \frac{3}{2})^0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{9}{4}}}$$

$$⑩ f(x) = -x^2 + 5x - 3, \quad x = -2$$

$$-(x+h)^2 = -x^2 - 2xh - h^2$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h - 3] - [-x^2 + 5x - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h - 3 + x^2 - 5x + 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 5h - 2xh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[-h + 5 - 2x]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2x + 5 - h$$

$$= -2x + 5 - 0$$

$$\overline{-2x + 5}$$

$$\therefore m_{\tan} = -2x + 5$$

$$En \text{ el pmf} \quad x = -2, \quad m_{tan} = -2(-2) + 5 = 9$$

$$\therefore m_{tan} \Big|_{x=-2} = 9$$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2 + 5x - 3)$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= -\frac{d}{dx}(x^2) + 5 \frac{d}{dx}(x)$$

$$= -2 \cdot x^{2-1} + 5 \cdot 1 \cdot x^{1-1}$$

$$= -2 \cdot x + 5$$

$$m_{\tan} \Big|_{x=-2} = 9 \quad f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2, \quad y_1 = f(-2) = -(-2)^2 + 5(-2) - 3 \\ &= -4 - 10 - 3 \\ &= -17 \end{aligned}$$

$$(-2, -17)$$

$$y - (-17) = 9(x - (-2))$$

$$\Leftrightarrow y = 9x + 18 - 17$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 9x + 1} \quad \cancel{\text{}}$$

(14)

$$f(x) = \frac{4}{x-1}, \quad x=2.$$

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{(x+h)-1} - \frac{4}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4x-4 - 4x-4h+4}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{(x-1)[(x+h)-1]} \stackrel{0}{\underset{0}{\longrightarrow}} h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{h(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$\therefore m_{\tan} = \frac{-4}{(x-1)^2}$

$$m_{\tan} \Big|_{x=2} = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1^2} = -4$$

$$\therefore m_{\tan} = -4$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = f(x_1) = \frac{4}{2-1} = 4$$

(2, 4)

$$y - 4 = -4(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -4x + 8 + 4$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -4x + 12}}$$