$+ \quad \times$

$- \quad \div$

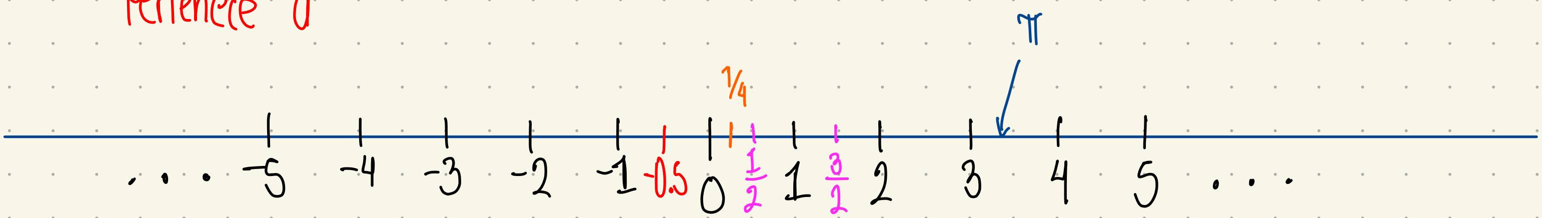
08/Julio/2024

El conjunto de los números reales

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales.

$1 \in \mathbb{R}$, $1/2 \in \mathbb{R}$, $0.3\bar{3} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

"Pertenece a"



Sistema de los números reales.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a, b \in \mathbb{R} \implies$

•) Existe un único $a+b \in \mathbb{R}$

••) " " " $a \cdot b \in \mathbb{R}$

Sistema de números reales.

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por $\mathbb{R}$ en el cual estan definidas dos operaciones $+$ y $\cdot$ para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$. Estas operaciones son llamadas suma y multiplicacion respectivamente y estan definidas de tal manera que, para cada para de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, existen únicos elementos $a+b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen los siguientes axiomas (llamados axiomas de campo) para todos los elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$

C1.- Cerradura: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

i) $a+b \in \mathbb{R}$ y ii) $a \cdot b \in \mathbb{R}$

C2. Conmutatividad: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen:
(Ley Conmutativa)

i) $a+b = b+a$ y ii) $a \cdot b = b \cdot a$.

C3.- Asociatividad: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:
(Ley asociativa)

i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

C4. Existencia de elemento neutro:

i) Existe 0 en $\mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0+a = a+0 = a.$$ // Neutro aditivo

ii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$ // Neutro multiplicativo.

C5.- Existencia de inversos:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + a_1 = 0$$

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a_2 = 1.$$

C6.- Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:

(Ley distributiva).

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales arbitrarios, entonces se satisfacen:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 1$

i) Distributividad por la izquierda

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$2(3+1) = 8$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2$
$= 8$

ii) Distributividad por la derecha:

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$2x + 3x = (2+3)x$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales junto con las operaciones de suma $+$ y producto como ya las conocemos es un campo llamado Sistema de los números reales.

09/Julio/2024

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6+8)x = x(6+8)$ Conmutatividad para el producto
2. $(x+3)y+2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$ Distributividad por la derecha.
3. $(3+5)+2 = 3+(5+2)$
4. $(2+3)+5 = 2+(3+5)$ Asociatividad para la suma.
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x+y)+3 = (y+x)+3$ Conmutatividad para la suma
7. $(1+2)(-3) = 1(-3)+2(-3)$
8. $[(w+3)2]z = [2(w+3)]z$
9. $(-13+z)(2)+7 = [z+(-13)](2)+7$
10. $(a-b)+[-(a-b)] = 0$ // Existencia de inversos para la suma.
11. $(3+4)(5+2) = (3+4)5+(3+4)2$ // Distributividad por la izquierda.
12. $x(y+0)+z = xy+z$
13. $(x+2)+[-(x+2)] = 0$
14. $2(x+y) = 2x+2y$

Distributividad por la izq.

$$x(y+0)+z = (x \cdot y + x \cdot 0) + z$$
$$= (x \cdot y) + z$$
$$= x \cdot y + z$$

$$\cancel{(x+y) \cdot 2 = x + y \cdot 2}$$

$x = 1$, $y = 1$

$$(1+1) \cdot 2 \qquad 1 + 1 \cdot 2$$
$$= 2 \cdot 2 \qquad = 1 + 2$$
$$= 3$$

$= 4$

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación "$a=b$" significa que "a es el mismo elemento que b". Dicho de otra forma, "$a=b$" significa que se estan usando simbolos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a=b$, entonces $b=a$ // Simetría

I2) Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$. // Transitividad.

I3) Si $a+c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a\cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c, entonces $a=b$ implica que:

i) $a+c=b+c$ y ii) $a\cdot c = b\cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ "Si y sólo si"

1) $a=b \iff a+c=b+c$

2) $a=b \iff a\cdot c = b\cdot c$.

$a+\underline{5}=8+\underline{5}$

$\iff a=8$

$a\cdot 2 = 10$

$= 5\cdot 2$

Consecuencias de las propiedades de los números reales

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y el producto]

i) Si $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

ii) Si $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a=b$.

Dem. i) Por hip. sabemos que:

$$a+c=b+c \quad \ldots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (C6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$c+c_1=0 \quad \ldots (2)$$

Por propiedades de la igualdad:

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1$$

$$b+(c+c_1)$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a+(c+c_1) = (a+c)+c_1 = (b+c)+c_1 = b+(c+c_1)$$

$$\Longrightarrow \quad a+\underbrace{(c+c_1)}_{0} = b+\underbrace{(c+c_1)}_{0}$$

$$a+0 = b+0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$a = b.$$

10/Julio/2024

Observación: los elementos 0 y 1 que aparecen en el axioma 3 son únicos. Esto es, el neutro aditivo y el neutro multiplicativo son los únicos números reales que satisfacen: $a+0=a$ y $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a.

$$z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } z + a = a, \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = 0.$$

"Para todo"

Productos que involucran al cero

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1) $a \cdot 0 = 0$

2) $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ó $b = 0$.

"Si y sólo si"

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$ ✓

$a = 0$ ó $b = 2$

$a = 5$ ó $b = 0$

$a = 0$ ó $b = 0$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Existe un único número real x tal que: $a + x = b$

2) Si $a \neq 0$, entonces existe un único número real y t.q.

$$a \cdot y = b.$$

$a = 2$ $b = 5$

¿x?

$2 + x = 5$ / $x = 3$

$a = -1$ $b = 4$

¿x?

$-1 + x = 4$ | $x = 5$

$a = 2$, $b = 4$

¿y?

$2 \cdot y = 4$ | $y = 2$.

$a = 8 \quad , \quad b = 2$

¿y?

$8 \cdot y = 2$.

$$y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Observación:

i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$.

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un unico $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Aplicando el Teorema anterior al caso $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$, se obtiene que existe un único número real x tal que

$$a + x = 0$$

i.e. el inverso aditivo de un número real a es único.

$a = 5 \quad , \quad x = -5$

$$5 + (-5) = 0$$

$a = -2$

¿x?

$(-2) + x = 0$

Si $x = 2$, ent.

$(-2) + 2 = 0$

$a = 2$

$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$a = \frac{3}{2}$ ¿x?

$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x = 1$

$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{6} = 1$

Definición:

- •) Si $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $-a$ al único número real que cumple $a + (-a) = 0$ y se le llama el inverso aditivo de a.
- ••) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, denotamos por a^{-1} al único número real que cumple $a \cdot a^{-1} = 1$ y se le denomina el inverso multiplicativo de a.

$x \cdot x^{-1} = 1$

Observación: Con esta definición del teorema anterior se tiene que para $a \in \mathbb{R}$,

- El único número real x que satisface la relación $a + x = b$ es $x = b + (-a)$.

- Si ademas $a \neq 0$, entonces el único número real x que satisface la identidad $a \cdot x = b$ es $x = b \cdot a^{-1}$.

$$2 + x = 5$$

$$x = 5 + (-2)$$
$$= 5 - 2$$
$$= 3$$

$$a + x = b$$
$$\Rightarrow (a + x) + (-a) = b + (-a)$$

"entonces"

$$\Rightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a)$$
$$\Rightarrow x + \cancel{(a + (-a))} = b + (-a)$$
$$\Rightarrow x + 0 = b + (-a)$$
$$\Rightarrow x = b + (-a)$$

Notación: De ahora en adelante emplearemos la siguiente notación:

- $a - b := a + (-b)$
- Si $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$5 + (-2) = 5 - 3$$

$$2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$