

+

×

-

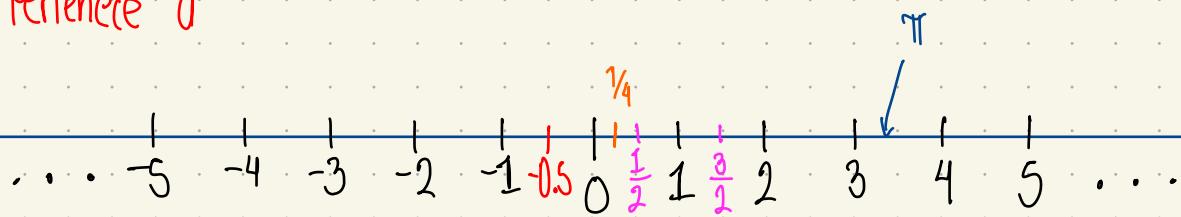
÷

El conjunto de los números reales

\mathbb{R} : Conjunto de los números reales.

$1 \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $0.\overline{3} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

↑
"Pertenece a"



Sistema de los números reales.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

-) Existe un único $a+b \in \mathbb{R}$
-) $\exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \cdot b = 1 \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sistema de números reales.

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por \mathbb{R} en el cual están definidas dos operaciones $+$ y \cdot para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$. Estas operaciones son llamadas **Suma** y **multiplicación** respectivamente y están definidas de tal manera que, para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, existen únicos elementos $a+b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen los siguientes axiomas (llamados **axiomas de campo**) para todos los elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(1) **Cerradura**: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\text{i)} a+b \in \mathbb{R}$$

y

$$\text{ii)} a \cdot b \in \mathbb{R}$$

(2) **Commutatividad**: Para cualesquiero $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen:
(ley Comutativa)

$$\text{i)} a+b = b+a$$

y

$$\text{ii)} a \cdot b = b \cdot a$$

(3) **Asociatividad**: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:
(ley Asociativa)

$$\text{i)} (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$\text{ii)} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(4) **Existencia de elemento neutro**:

i) Existe 0 en \mathbb{R} tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0+a = a+0 = a. \quad // \text{Neutro aditivo}$$

ii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad // \text{Neutro multiplicativo.}$$

C5.- Existencia de inversos:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + a_1 = 0$$

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a_2 = 1$$

C6.- Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma: (Ley distributiva)

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales arbitrarios, entonces

Se satisfacen:

$$a = 2, b = 3, c = 1$$

i) Distributividad por la izquierda $2(3+1) = 8$

$$\underline{a \cdot (b+c)} = \underline{a \cdot b + a \cdot c}$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 \\ = 8$$

ii) Distributividad por la derecha:

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$$2x + 3x = (2+3)x$$

Por lo tanto, el conjunto \mathbb{R} de los números reales junto con las operaciones de suma + y producto como ya las conocemos es un campo llamado **Sistema de los números reales.**

09/Julio/2024

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6 + 8)x = x(6 + 8)$ *Commutatividad para el producto*
2. $(x + 3)y + 2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$ *Distributividad por la derecha.*
3. $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
4. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$ *Asociatividad para la suma.*
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$ *Commutatividad para la suma*
7. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
8. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$
9. $(-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$
10. $(a - b) + [-(a - b)] = 0$ *// Existencia de inversos para la suma.*
11. $(3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$ *// Distributividad por la izquierda.*
12. $x(y + 0) + z = xy + z$ *Distributividad por la izq.*
13. $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$ $x(y+0)+z=(x\cdot y+x\cdot 0)+z$
 $= (x\cdot y) + z$
 $= xy + z$
14. $2(x + y) = 2x + 2y$

$$\cancel{(x+y) \cdot 2 = x+y \cdot 2}$$

$$x=1, y=1 \quad 1+1 \cdot 2$$

$$(1+1) \cdot 2 = 1+2$$

$$= 2 \cdot 2 = 3$$

= 4

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación " $a = b$ " significa que " a es el mismo elemento que b ". Dicho de otra forma, " $a = b$ " significa que se están usando simblos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a = b$, entonces $b = a$ // Simetría

I2) Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. // Transitividad

I3) Si $a + c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a \cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c , entonces $a = b$ implica que:

i) $a + c = b + c$ y ii) $a \cdot c = b \cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

"Si y sólo si"

$$a + 5 = 8 + 5$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

1) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

2) $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c.$

$$\begin{aligned} a \cdot 2 &= 10 \\ &= 5 \cdot 2 \end{aligned}$$

Consecuencias de las propiedades de los números reales

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y el producto]

- i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a+c = b+c$, entonces $a=b$.
- ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a=b$.

Dem. i) Por hip. Sabemos que:

$$a+c = b+c \quad \dots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (c6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ f.g.

$$c + c_1 = 0 \quad \dots (2)$$

Por propiedades de la igualdad: $b+(c+c_1)$

$$a+(c+c_1) = (a+c) + c_1 = (b+c) + c_1$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a+(c+c_1) = (a+c) + c_1 = (b+c) + c_1 = b+(c+c_1)$$

$$\Rightarrow a+(c+c_1) = b+(c+c_1)$$

$$a+0 = b+0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$\underline{a = b}.$$

10/Julio/2024

Observación: los elementos 0 y 1 que aparecen en el axioma 3 son únicos. Esto es, el neutro aditivo y el neutro multiplicativo son los únicos números reales que satisfacen: $a+0=a$ y $a \cdot 1=a$ para cualquier número real a .

$$z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } z+a=a, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow z=0.$$

"Para todo"

Productos que involucran al cero

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) $a \cdot 0 = 0$ "Si y sólo si" $\begin{cases} a=0 \text{ ó } b=0 \\ a=5 \text{ ó } b=0 \\ a=0 \text{ ó } b=0 \end{cases}$
- 2) $a \cdot b = 0 \iff a=0 \text{ ó } b=0$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Existe un único número real x tal que: $a+x=b$

2) Si $a \neq 0$, entonces existe un único número real y f.q. $a \cdot y = b$

$$a=2 \quad b=5$$

? x ?

$$2+x=5 \quad | \quad x=3$$

$$a=-1 \quad b=4$$

? x ?

$$-1+x=4 \quad | \quad x=5$$

$$a=2, \quad b=4$$

? y ?

$$2 \cdot y = 4$$

$$y=2.$$

$$a = 8, \quad b = 2$$

? y?

$$8 \cdot y = 2.$$

$$y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Observación:

- i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$.
- ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un único $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Aplicando el Teorema anterior al caso $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$, se obtiene que existe un único número real x tal que

$$a + x = 0$$

i.e. el inverso aditivo de un número real a es único.

$$a = 5, \quad x = -5$$

$$5 + (-5) = 0$$

$$a = -2$$

¿ x ?

$$(-2) + xc = 0$$

Si $x = 2$, ent.

$$(-2) + 2 = 0$$

$$a = 2$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$a = \frac{3}{2}$$

¿ x ?

$$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot xc = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{6} = 1$$

Definición:

-) Si $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $-a$ al único número real que cumple $a + (-a) = 0$ y se le llama el inverso aditivo de a .
-) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, denotamos por a^{-1} al único número real que cumple $a \cdot a^{-1} = 1$ y se le denomina el inverso multiplicativo de a .

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

Observación: Con esta definición del teorema anterior se tiene que para $a \in \mathbb{R}$,

- El único número real x que satisface la relación $a+x=b$ es $x=b+(-a)$.
- Si además $a \neq 0$, entonces el único número real x que satisface la identidad $a \cdot x = b$ es $x=b \cdot a^{-1}$.

$$2+x=5$$

$$a+x=b$$

$$x=5+(-2)$$

$$\Rightarrow (a+x)+(-a)=b+(-a)$$

$$=5-2$$

$$\stackrel{\text{"entonces"}}$$
$$\Rightarrow (x+a)+(-a)=b+(-a) \quad =3$$

$$\Rightarrow x+(a+(-a))=b+(-a)$$

$$\Rightarrow x+0=b+(-a)$$

$$\Rightarrow x=b+(-a)$$



Notación: De ahora en adelante emplearemos la siguiente notación:

$$\bullet a-b:=a+(-b)$$

$$\bullet \text{ Si } b \neq 0, \frac{a}{b}:=a \cdot b^{-1}$$

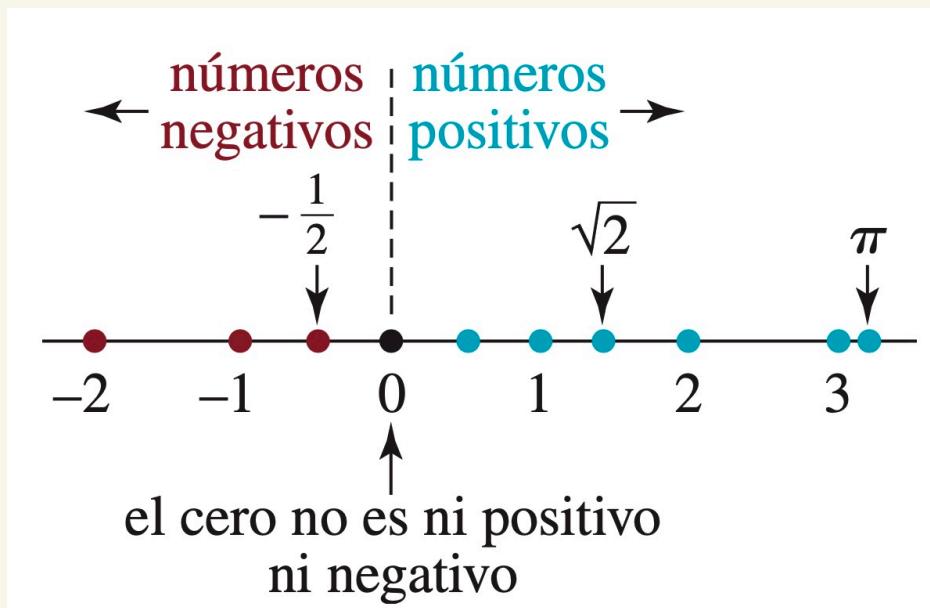
$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$$a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$5 + (-2) = 5 - 3$$

$$2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$



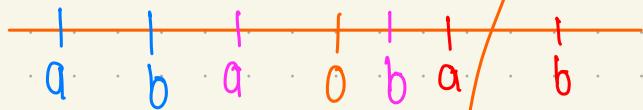
$x \in \mathbb{R}$ es positivo : $x > 0, 0 < x$.

$x \in \mathbb{R}$ es negativo : $x < 0, 0 > x$.

Dos números reales son ordenados

"a es estrictamente mas pequeño que b"

Definición: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.



- ① Se dice que a es menor que b y se denota por $a < b$ si $b - a$ es número positivo. Geometricamente esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica. O bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y se denota como $b > a$.
- ② El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a < b$, o que $a = b$. y se lee como "a es menor o igual que b".

$$\frac{10}{2} < 5$$

$$\frac{10}{2} \leq 5$$

Relaciones entre los signos de a y -a

Sea $a \in \mathbb{R}$

- 1) Si a es positivo, entonces -a es negativo.
- 2) Si a es negativo, entonces -a es positivo.

$$(2) \quad a = -1 \Rightarrow -a = 1$$

 No supongas que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a . 

Relaciones entre los signos de a y a^{-1}

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

- 1) Si a es positivo, entonces a^{-1} es positivo  $\left\{ \begin{array}{l} a=4 \\ \Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{4} \end{array} \right.$
- 2) Si a es negativo, entonces a^{-1} es negativo.

$$(2) \quad a = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$$(-1)(-1) = 1 \quad \checkmark$$

$$a = -2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-2} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} a \cdot a^{-1} &= \frac{(-2)}{1} \left(\frac{1}{-2} \right) \\ &= \frac{(-2)(1)}{1(-2)} \end{aligned}$$

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$= \frac{-2}{-2}$$

$$= 1$$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se satisfacen cada una de las siguientes proposiciones:

- i) $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = - (a \cdot b)$ $(-2)(3) = 2(-3) = -(2 \cdot 3) = -6$
 - ii) $(-1)a = a \cdot (-1) = -a$ $(-1)5 = -5$
 - iii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $-(-a) = a$. $-(-2) = 2$
 - iv) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $(-2)(-4) = 8$
 - v) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ $-(2+5) = (-2) + (-7)$
 $= -7$
 - vi) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
 - vii) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$ y $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
 - (viii) $a = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overset{-1}{a})^{-1} = b$
- $$(\overset{-1}{a})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Vii) Si $a = 2$ y $b = 3$

$$(a \circ b)^{-1} = (2 \cdot 3)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$a^{-1} \circ b^{-1} = 2^{-1} \circ 3^{-1} = \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Leyes de los Signos

• $(+)(+) = +$

• $(+)(-) = -$

• $(-)(+) = -$

• $(-)(-) = +$

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

$$b \leq 8$$

1. x es positivo
3. a es mayor o igual a π
5. b es como máximo 8
2. t es menor a 4
4. z es mayor a 1
6. 5 es menor o igual que x

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq x \quad y \quad x \leq 5$$

Intervalos de los números reales

que son mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 5.

Suma y resta de números con signo

- 1) los **números con signos iguales** se suman y se coloca el signo de los sumandos
- 2) Los **números con signos distintos** se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Signos de agrupación

los signos de agrupación delimitan operaciones entre números :

Parentesis () Llaves { }

Corchetes []

Leyes de los signos para la división

$$\cdot) \frac{+}{+} = +$$

$$\therefore) \frac{+}{-} = -$$

$$\therefore) \frac{-}{+} = -$$

$$\therefore) \frac{-}{-} = +$$

Reescriba la expresión usando la propiedad de los números reales.

1. Propiedad conmutativa para la suma, $x + 3 =$
2. Propiedad asociativa para la multiplicación, $7(xy) =$
3. Propiedad distributiva, $4(a + b) =$
4. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$

Utiliza propiedades de los números reales para escribir la expresión sin parentesis

$$(-a)b = -(a \cdot b)$$

1. $3(x + y)$

$$5. \frac{4}{3}(-6x) = \left(\frac{4}{3} \cdot (-6)\right) \cdot x = -8x$$

2. $4(2m)$

$$6. -\frac{1}{2}(4x - 2y) = -\frac{1}{2} \cdot 4x - (-\frac{1}{2}) \cdot 2y$$

3. $\frac{4}{2}(2x - 4y) = 4x - 0y$

$$7. 3a(b + c - 2d) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)x + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)y \\ = -(1)x + 1 \cdot y \\ = x + y.$$

4. $(a - b)8$

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

1. x es positivo

3. a es mayor o igual a π

5. b es como máximo 8

2. t es menor a 4

4. z es mayor a 1

6. 5 es menor o igual que x

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

1. $-7 \underline{>} -8$



5. $\frac{8}{4} \underline{=} 2$

2. $-35 \underline{<} 32$

6. $-\frac{7}{3} \underline{<} 1.5$

3. $-844.5 \underline{<} 0$

4. $-483 \underline{<} -480$

Si x es positivo y y es negativo, determine el signo del número real:

1. $10x$

8. $\frac{x}{y}$ -

2. $-x$

3. $-y$

9. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ -

4. $(-2)x$

10. $x \cdot x$ +

5. $100y$ -

11. $y \cdot y$ +

6. $(-3)y$

12. $\frac{2x}{y}$ -

7. xy -

Suma y resta de números con Signo

1) los **números con signos iguales** se suman y se coloca el signo de los sumandos

2) los **números con signos distintos** se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Ejercicios: Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

$$1) -2 + (-4) = -6$$

$$2) 6 + (-4)$$

$$3) 7 - 2$$

$$4) 7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

$$5) -5 - (-13)$$

$$6) -5 - (-13) = -5 + 13 = 8$$

$$7) -(-a) + b = +a + b \\ = a + b$$

$$8) (-2)(9)$$

$$9) 7(-9)$$

$$10) (-2)(-12) = +24 \\ = 24$$

$$11) 19(-1)$$

$$12) -\frac{1}{-1}$$

$$13) -(-6 + x) = 6 - x$$

$$14) -7x$$

$$15) -12(x - y)$$

$$16) -[-6 + (-y)] \\ = -[-6 - y] \\ = 6 + y$$

$$17) -\frac{3}{3 \cdot 0}$$

$$18) -9 \div 27$$

$$19) \underline{[(-a) \div (-b)]} \\ = \frac{a}{b}$$

$$20) 2(-6 + 2) \\ = -12 + 4 \\ = -8$$

$$21) 3(-2(3) + 6(2)) \\ = 3(-6 + 12) \\ = 3(6) = 18.$$

$$22) (-a)(-b)(-1) \\ = a \cdot b \cdot (-1) \\ = -a \cdot b$$

$$23) (-12)(-12)$$

$$24) 3(x - 4)$$

$$25) 4(5 + x)$$

$$26) -(x - y)$$

$$27) 0 \cdot (-x)$$

Exponentes

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la n -ésima potencia de a como:

Potencia. $\rightarrow a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n - \text{Veces}}$

Exponente
base

Observación: [Exponente 0 o exponentes negativos]

Si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto de los números enteros.

$$\bullet \quad 0^0 = 1$$

$$\bullet \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$i) \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

$$ii) \quad 8^{-4} = \frac{1}{8^4}$$

$$(a^{-1})^{-1} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$$

...
N
W

• Cuidado !

$$\bullet (-3)^2 = (-3)(-3) = 9 \Rightarrow |(-3)^2 \neq -3^2|$$

$$\bullet -3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$$

Propiedades de los exponentes: [Reglas de los exponentes]

$$① a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

"El producto de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes"

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m-\text{veces}} \cdot \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-\text{veces}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times \cdots \times a}_{m+n-\text{veces}}$$

$$= a^{m+n}$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \cdot 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

$$② a \neq 0,$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

"El cociente de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes"

③

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\text{i)} (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$$

$$\text{ii)} ((-1)^3)^2 = (-1)^{3 \cdot 2} = (-1)^6 = 1$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m$$

④

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

⑤

$$b \neq 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

⑥

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}} = \boxed{\frac{a^n}{b^n}}$$

⑦

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^{-m}}{b^{-n}} &= \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^n}\right)} \\ &= \frac{1 \cdot b^n}{1 \cdot a^m} \\ &= \frac{b^n}{a^m} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot b^n}{1 \cdot a^n}$$

$$= \frac{b^n}{a^n}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Suma de fracciones

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{5 + 6}{10} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{4}{5} = \frac{15 - 32}{40} = \frac{-17}{40}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{24}{4} = 6$$

$$= \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

↑
Tienen el
mismo denominador.

Suma de fracciones con el mismo denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Obs.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Producto de fracciones

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Cociente (división) de fracciones

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Propiedades de las fracciones:

①

$$a = \frac{a}{1}$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$$

② Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$

③ $-\frac{a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$, donde $b \neq 0$

$$-x = (-1) \cdot x$$

④

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

donde $b \neq 0$



⑤

$$\frac{0}{b} = 0$$

donde $b \neq 0$

⑥ Si $b \neq 0$,

$$\frac{b}{b} = 1$$

"Todo número distinto de 0 dividido entre si mismo es igual a 1"

⑦ Si $b \neq 0$,

$$b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = a$$

⑧ Si $b \neq 0$,

$$b \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = 1$$

⑨ Si $c \neq 0$, $\frac{a \cdot b}{c} = \left(\frac{a}{c}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)$

$$\frac{x \cdot y^2}{y} = x \cdot \left[\frac{y^2}{y}\right] = x \cdot y^{2-1} = x \cdot y.$$

⑩ Si $a, b \neq 0$, $\frac{c}{a \cdot b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{c}{b}\right)$

Ejercicios: Simplifica las siguientes expresiones.

① $\frac{5}{1} = 5$

② $\frac{14 \cdot x}{21 \cdot y}, y \neq 0.$

$$\frac{14 \cdot x}{21 \cdot y} = \left(\frac{14}{21}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot y}$$

~~1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...~~

Definición: Un número entero positivo es **primo** si tiene únicamente dos divisores el 1 y el mismo número.

Un divisor es un número que lo divide de forma exacta sin usar punto decimal.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

$$14 = 2 \cdot 7$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$$

③ $0 \neq 0, \text{ Sea } \left(\frac{7}{5ab} \right) = \frac{5a}{1} \cdot \left(\frac{7}{5ab} \right) = \frac{\cancel{5} \cdot 7 \cdot \cancel{a}}{\cancel{5} \cdot \cancel{a} \cdot b} = \frac{7}{b}$

Jerarquía de operaciones:

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

1. Signos de agrupación: Los **signos de agrupación** son: Llaves { }, Corchetes [], Paréntesis ()
2. Potencias y raíces
3. Multiplicación y división
4. Suma y resta

Cuando se encuentran dos o mas operaciones del mismo nivel se realizan de izquierda a derecha como se vayan presentando.

Ejercicio 3.1. Efectua las siguientes operaciones:

1. $7 \times 2 + 8 \div 4 - 3 \times 2$
2. $12 \div 4 \times 3 + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$
3. $(10 - 2) \div 2 \times 3 + (8 + 6)(7 - 2) - 12 \times 2 \div 8$
4. $(6 + 2) \times (7 - 4) \div (14 - 2) + (12 - 8) \times (7 + 3) \div (10 - 2)$
5. $12^2 \div \sqrt{16} \div \sqrt{81} + 5^2 \times 6 \div 3$
6. $\sqrt{13^2 - 12^2} + (6 - 4)^2 \times 8 - \sqrt{(10 - 8)^2}$
7. $2 + \{8 \times (8 - 6) + [(3 + 4) \div 7 - 5 \times 6 \div 10] - 5\}$

$$\begin{aligned} 1. \quad 7 \times 2 + 8 \div 4 - 3 \times 2 &= 14 + 8 \div 4 - 3 \times 2 \\ &= 14 + 2 - 6 \\ &= \underline{\underline{10}} \end{aligned}$$

$$(10-2) \div 2 \cdot 3 = 8 \div 2 \cdot 3 = 12$$

6

$$5 \div \cancel{(15-10)}^5 \cdot 2 = 5 \div 5 \cdot 2 = 2$$

$$2. \quad \cancel{12 \div 4}^3 \times 3 + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= \cancel{3 \times 3}^9 + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 9 + \cancel{18 \div 9}^2 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 9 + \cancel{2 \times 3}^6 - \cancel{(4 \times 3)}^{12}$$

$$= 9 + 6 - 12$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

Radicales.

Definición: [Exponentes racionales].

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Obs,

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{27}$$

(ojo)

En general, no se cumple:

~~$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$~~

$$5 = \sqrt{25} = \sqrt{16+9} \quad ? \quad \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

⇒ 5 = 7 ? (ojo)

Propiedades de los radicales.

①

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt{36} = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$$

Si n es impar
 $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$

$$\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = (-2) \cdot 3 = -6$$

$-2^3 = (-1)2^3 = (-1)^3 2^3 = [(-1)2]^3$

$$-a \cdot b = (-a)(b) \\ = a \cdot (-b)$$

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\Rightarrow 216 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{-216} = -6$$

②

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{|2|}{|3|} = \frac{2}{3}$$

Si n es par,

$$\begin{array}{c|c} 81 & 3 \\ \hline 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$$\Rightarrow 81 = 3^4$$

$$\Rightarrow 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x > 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

$$|5| = 5, \quad |-1| = -(-1) = 1$$

$$\therefore \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$$

$$③ \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= a^{1/n} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} \\ &= (a^{1/n})^{1/m} \\ &= a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} \\ &= a^{\frac{1}{n \cdot m}} \\ &= \sqrt[n \cdot m]{a} \end{aligned}$$

Indice de la racine

$\sqrt[2]{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

↑ Radicando.

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = |3| = 3.$$

$$\begin{array}{r|l} 729 & 3 \\ \hline 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt[3]{729} = 3$$

$$\Rightarrow 729 = 3^6$$

④ Si n es impar, ent. $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si es par, ent. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

= Errores comunes =

Propiedad correda para el producto

$$① (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

Error común para la suma

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

② Sup. que $a, b \geq 0$.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

③ Sup. que $a, b \geq 0$

$$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$$

$$= |a| \cdot |b|$$

$$= \underline{\underline{a \cdot b}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b| = a+b$$

(4) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$

| |
0 0
| |
0 0

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$

| |
0 0
| |
0 0

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a \cdot b}$

(5) Sup. que $b \neq 0$,

| |
0 0
| |
0 0

$\frac{a \cdot b}{b} = a$

$\frac{a+b}{b} \neq a$

(6) Sup. que $a, b \neq 0$

| |
0 0
| |
0 0

$(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$

|
0 0

$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$



Matemáticas III



Notas Ejercicios

Ejercicios. Propiedades de los números reales

Ejercicio 1.1.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6 + 8)x = x(6 + 8)$
2. $(x + 3)y + 2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$
3. $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
4. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$
7. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
8. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$

$$9. (-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$$

$$10. (a - b) + [-(a - b)] = 0$$

$$11. (3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$$

$$12. x(y + 0) + z = xy + z$$

$$13. (x + 2) + [-(x + 2)] = 0$$

$$14. 2(x + y) = 2x + 2y$$

$$15. (x + 5) + y = y + (x + 5)$$

$$16. 2(3z) = (2 \cdot 3)z$$

$$17. y + (x + y) = (y + x) + y$$

$$18. 5(4 + 7) = 5(7 + 4)$$

$$19. (8 + a)b = 8b + ab$$

$$20. (-1)[-3 + 4] = (-1)[-3] + (-1)[4]$$

Ejercicio 1.2.

Reescriba la expresión usando la propiedad de los números reales.

1. Propiedad commutativa para la suma, $x + 3 =$
2. Propiedad asociativa para la multiplicación, $7(xy) =$
3. Propiedad distributiva, $4(a + b) =$
4. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$

Ejercicio 1.3.

Utiliza propiedades de los números reales para escribir la expresión sin parentesis

1. $3(x + y)$
2. $4(2m)$
3. $\frac{4}{2}(2x - 4y)$
4. $(a - b)8$
5. $\frac{4}{3}(-6x)$
6. $-\frac{1}{2}(4x - 2y)$
7. $3a(b + c - 2d)$

Ejercicio 1.4.

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

1. x es positivo
2. t es menor a 4
3. a es mayor o igual a π
4. z es mayor a 1
5. b es como máximo 8
6. 5 es menor o igual que x

Ejercicio 1.5.

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

1. $-7 \underline{\hspace{1cm}} -8$
2. $-35 \underline{\hspace{1cm}} 32$
3. $-844.5 \underline{\hspace{1cm}} 0$
4. $-483 \underline{\hspace{1cm}} -480$

$$5. \frac{○}{4} \underline{\quad} 2$$

$$6. -\frac{7}{3} \underline{\quad} 1.5$$

Ejercicio 1.6.

Si x es positivo y y es negativo, determine el signo del número real:

$$1. 10x$$

$$2. -x$$

$$3. -y$$

$$4. (-2)x$$

$$5. 100y$$

$$6. (-3)y$$

$$7. xy$$

$$8. \frac{x}{y}$$

$$9. \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$10. \ x \cdot x$$

$$11. \ y \cdot y$$

$$12. \ \frac{2x}{y}$$

Ejercicio 1.7.

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

$$1. \ -2 + (-4)$$

$$2. \ -6 + 2$$

$$3. \ 6 + (-4)$$

$$4. \ 7 - 2$$

$$5. \ 7 - (-4)$$

$$6. \ -5 - (-13)$$

$$7. \ -a - (-b)$$

$$8. \ (-2)(-12)$$

$$9. \ -[-6 + (-y)]$$

$$10. (-2)(9)$$

$$11. (-2)(-12)$$

$$12. -12(x - y)$$

$$13. -(-6 + x)$$

$$14. \frac{-3}{3 \cdot 9}$$

$$15. \frac{-9}{27}$$

$$16. b \neq 0, \frac{-a}{-b}$$

$$17. (-12)(-12)$$

$$18. 2(-6 + 2)$$

$$19. 4(5 + x)$$

$$20. -(x - y)$$

$$21. 0 \cdot x$$

$$22. 3(-2(3) + 6(2))$$

$$23. \frac{5}{1}$$

$$24. y \neq 0, \frac{14x}{21y}$$

$$\textcircled{25} \quad 2x$$

$$25. \frac{1}{-2}$$

$$26. x \neq 0, \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2x}$$

$$27. \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{2}, \text{ siempre que } x \neq 0$$

$$28. a, b \neq 0, 5a \cdot \frac{7}{5a \cdot b}$$

$$29. a, x \neq 0, \frac{-abx}{ax}$$

$$30. \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$31. \frac{5}{12} + \frac{3}{4}$$

$$32. \frac{3}{10} - \frac{7}{10}$$

$$33. \frac{2}{3} - \frac{3}{8}$$

Ejercicio 1.8.

Realice las siguientes operaciones

$$1. -2 + 6$$

$$2. -6 - (-2)$$

$$3. -(-5) - (-9)$$

$$4. 15 + (-8)$$

$$5. -6 - (-5)$$

$$6. -7 + 4$$

$$7. -9 + 11$$

$$8. -20 + 15$$

$$9. 15 - 23$$

$$10. 49 - 35$$

$$11. -8 + 8$$

$$12. -14 + 25$$

$$13. 105 - 143$$

$$14. -2 - 5 + 8$$

$$15. -13 - 15 + 6 + 11$$

$$16. -6 - 10 - 3 + 12 + 13 + 14$$

$$17. (-8) + (-3)$$

$$18. (8 + 5) - (-13 + 2)$$

$$19. (-5 - 9) - (5 - 1)$$

$$20. 15 - (4 + 6) + (-3 - 7)$$

$$21. 6 - (-8)$$

$$22. -14 - (-10)$$

$$23. (-6) + (-3) - (-11)$$

$$24. (6 - 8) + (5 - 2)$$

$$25. -(-2 + 5)$$

$$26. -3 + [4 - (5 - 3)]$$

$$27. -3 + [4 - 26 - 3 + 4(5 - 7) + 3]$$

$$28. -3 + [4 - 5 - 2 + 1]$$

$$29. 10 + 6 - (9 - 10) + 5$$

$$30. 5 - [3 - (8 - 7 + 1) + (4 - 3)]$$

$$31. (8 - 3) - (-4 + 6) + (2 - 7 - 3) + 5$$

$$32. (-8 + 6) - (-3 - 2) + [4 - (-2 - 1)]$$

$$33. (9 + 5) - (8 + 5) + (13 + 11)$$

$$34. (8 - 25) - (8 + 5) + (13 + 11)$$

$$35. -(5 - 7) + (6 + 4) - (4 + 7)$$

$$36. -(-7 - 2) + (6 + 4) - (-3) - 4$$

$$37. \ 1 - (-3 - 2 + 8) + (2 + 3 + 1)$$

$$38. \ 4 - \{6 + [-5 + (12 - 8)]\}$$

$$39. \ -5 + \{4 + [3 - (4 - 8) + (-5 - 10)]\}$$

$$40. \ -[(8 + 3) - (5 - 1)] + [(8 - 3) - (5 - 1)]$$

$$41. \ \{9 - [2 - (1 - 5)]\} - [4 - (5 - 4) + (-5)]$$

$$42. \ 3(4 - 2) - 5(1 - 4) - (8 + 9)$$

$$43. \ -6 - (-2 - 7) + (2 - 1)$$

$$44. \ 2(7 - 4) + 3(1 - 5) + 8$$

$$45. \ -4(2 - 3 - 1) + 2(8 - 5) + 3(4 - 5)$$

$$46. \ -6 + \{3 - [4 - 2(4 - 7)]\}$$

Ejercicio 1.9.

Realice las siguientes operaciones:

$$1. \ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}$$

$$2. \ \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$$

$$3. \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9}$$

$$4. \frac{7}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$$

$$5. \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{7}$$

$$6. \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$7. \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$$

$$8. \frac{5}{10} + \frac{3}{2}$$

$$9. \frac{7}{24} + \frac{11}{30}$$

$$10. \frac{5}{8} - \frac{1}{4}$$

$$11. \frac{5}{12} - \frac{7}{24} = \frac{10 - 7}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$12. \frac{11}{64} - \frac{5}{8} = \frac{11 - 40}{64} = \frac{-29}{64}$$

$$13. \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{8} = \frac{88 - 320}{512} = \frac{-232}{512} = \frac{-116}{256} = \frac{-58}{128}$$

$$14. \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{-29}{64}$$

M.C.M [Mínimo Común Multiplo]

5 : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

8 : 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...

$$\Rightarrow M.C.M(5, 8) = 40$$

$$\begin{array}{r} 5 | 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 5 = 5$$

$$\begin{array}{r} 8 | 2 \\ 4 | 2 \\ \hline 2 | 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 8 = 2^3$$

$$M.C.M(5, 8) = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = \underline{\underline{40}}$$

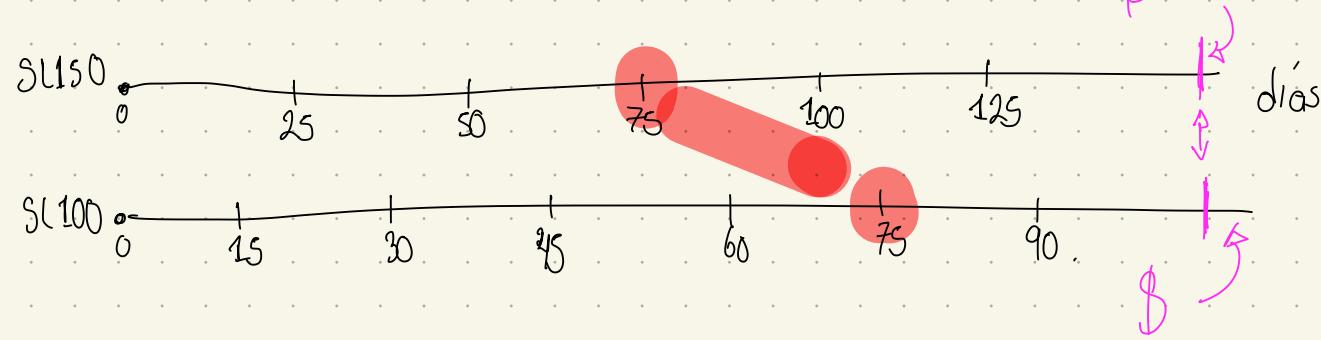
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\begin{array}{r} 12 \quad 24 | 2 \\ \hline 6 \quad 12 | 2 \\ 3 \quad 6 | 2 \\ 3 \quad 3 | 3 \end{array}$$

$$M.C.M(12, 24) = 2^3 \cdot 3$$

$$= 24$$

$$\begin{array}{l} \$150 : 25 \text{ días} \Rightarrow 75 \text{ días} \\ \$100 : 15 \text{ días} \Rightarrow 5 \text{ recargas} : \$500 \end{array}$$



$$\begin{array}{r|rr} 15 & 3 \\ \hline 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$25 = 5^2$$

$$\Rightarrow 15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{M.C.M}(15, 25) = 3 \cdot 5^2 = 75$$

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{9}{24} + \frac{14}{24} = \underline{\underline{\frac{23}{24}}}$$

$$\begin{array}{r} 8 & 12 & | & 2 \\ \hline 4 & 6 & | & 2 \\ 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 3 & | & 3 \\ 1 & 1 & | & \end{array} \Rightarrow \text{MCM}(8, 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \underline{\underline{\frac{9+14}{24}}} = \frac{23}{24}$$

$$15. \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{9}$$

$$16. \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{3}$$

$$17. \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

$$18. \frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$$

$$19. \frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$$

$$20. \frac{6}{8} \div \frac{1}{4}$$

$$21. \frac{13}{9} \div \frac{4}{3}$$

$$22. \frac{5}{12} \div \frac{5}{6}$$

$$23. \frac{7}{8} \div \frac{21}{16}$$

$$24. \frac{4}{3} \div \frac{5}{30}$$

$$25. \frac{28}{7} \div \frac{4}{5}$$

$$26. \frac{1}{2} \div 2$$

Ejercicio 1.10.

Realice las siguientes operaciones:

$$1. \quad 2 \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$2. \quad \frac{5}{4} \div \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$$

$$3. \quad \left(\frac{7}{2} \right) 2 - \left(\frac{5}{14} \right) 4$$

$$4. \quad 3 \left(\frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2}$$

$$5. \quad \left(\frac{3}{8} \right) (4 - 2) + \left(\frac{5}{16} \right) (8 - 4) = \frac{1+2+3+6}{12}$$

$$6. \quad \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{12}{12} = 1$$

$$7. \quad \left(\frac{5}{8} \right) \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{3}{4} \right) \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$8. \quad \left(\frac{7}{10} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right)$$

1.11. Ejercicio

Indica si las siguientes fracciones son equivalentes:

1. $\frac{2}{5}, \frac{6}{15}$

2. $\frac{3}{8}, \frac{48}{17}$

3. $\frac{1}{6}, \frac{12}{72}$

4. $\frac{4}{9}, \frac{28}{72}$

5. $\frac{18}{24}, \frac{6}{8}$

6. $\frac{80}{15}, \frac{18}{3}$

1.12. Ejercicio

Compare las siguientes parejas de números mediante la

relación de orden mediante alguna de las relaciones de orden:
 $>$, $<$, \geq , \leq

1. $120000 \underline{\quad} 12000$

2. $-1000000 \underline{\quad} -100000$

3. $-\frac{7}{3} \underline{\quad} 1.5$

4. $-\frac{1273}{9} \underline{\quad} 0.5$

5. $15 \underline{\quad} 3$

6. $-9 \underline{\quad} 0$

7. $-\frac{1}{2} \underline{\quad} -1$

8. $-6 \underline{\quad} -10$

9. $\frac{10}{2} \underline{\quad} \frac{12}{13}$

10. $\frac{2}{3} \underline{\quad} 0.67$

11. $\frac{4}{3} \underline{\quad} 1.33$

12. $\frac{2}{3} \underline{\quad} -0.67$

13. $-2 \underline{\quad} -7$

14. $-\frac{1}{7} \underline{\quad} -0.143$

$$15. -\frac{7}{15} \underline{\quad} - \frac{5}{11}$$

$$16. -\pi \underline{\quad} - 3$$

$$17. \pi \underline{\quad} 3.14$$

$$18. 8 \underline{\quad} 9$$

$$19. \pi \underline{\quad} \frac{5\pi}{5}$$

$$20. 2.5 \underline{\quad} -\frac{5}{2}$$

$$21. -3 \underline{\quad} - \frac{7}{2}$$

$$22. 0.333 \underline{\quad} \frac{1}{3}$$

Ejercicio 1.13.

Realiza las siguientes operaciones respetando la jerarquía de operaciones:

$$1. 7 \times 2 + 8 \div 4 - 3 \times 2$$

$$2. 12 \div 4 \times 3 + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$$

3. $(10 - 2) \div 2 \times 3 + (8 + 6)(7 - 2) - 12 \times 2 \div 8$
4. $(6 + 2) \times (7 - 4) \div (14 - 2) + (12 - 8) \times (7 + 3) \div (10 - 2)$
5. $12^2 \div \sqrt{16} \div \sqrt{81} + 5^2 \times 6 \div 3$
6. $\sqrt{13^2 - 12^2} + (6 - 4)^2 \times 8 - \sqrt{(10 - 8)^2}$
7. $2 + \{8 \times (8 - 6) + [(3 + 4) \div 7 - 5 \times 6 \div 10] - 5\}$

1.14. Ejercicio

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1. $(-4)^2$
2. -5^3
3. $(2)^{-5}$
4. $(-1)^8$
5. $(-3)^3$
6. $(-1)^{10}$
7. $(-3)^4$

$$8. -2^{-5}$$

$$9. \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$10. \left(-\frac{1}{4}\right)^4$$

$$11. \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$12. \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$$

$$13. \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$14. \left(\frac{5}{9}\right)^3$$

$$15. -(-1 + 3)^2$$

$$16. (3 - 1)^2$$

$$17. (5 + 11)^2$$

$$18. \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^3$$

$$19. \left(5 + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$20. \left(\frac{1}{10} + 1 \right)^{-1}$$

$$\left(2^2 \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \underline{2^{-1}} = 2^3 \cdot \underline{2^{-1}} = \underline{\underline{2}}$$

$$21. 3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{\frac{7}{3}}$$

$$22. \left(4^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \right) \left(2^{-1} \cdot 3^{-\frac{7}{3}} \right) = \cancel{4^{\frac{3}{2}}} \cdot \cancel{2^{-1}} \cdot \cancel{3^{\frac{1}{3}}} \cdot \cancel{3^{-\frac{7}{3}}} = 2^2 \cdot 3^{-2} = 4 \cdot \left[\frac{1}{3^2} \right] \\ 3^{\frac{1}{3}-\frac{7}{3}} = 3^{-2} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$$

$$23. (2^7 \cdot 3^{-4}) (2^{-5} \cdot 4^4)$$

$$24. \sqrt{16}$$

$$25. \sqrt{64}$$

$$26. \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$27. \sqrt[4]{9}$$

$$(-1)^5 = -1 \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$-2^5 = (-1)2^5 \downarrow \quad (-1)^5 2^5 \downarrow \quad [(-1) \cdot 2]^5 = (-2)^5$$

$$28. \sqrt[3]{-64}$$

$$29. \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{-2^5} = \sqrt[5]{(-2)^5} = (-2)^{\frac{5}{5}} = (-2)^1 = -2.$$

$$30. \sqrt[4]{256}$$

$$31. \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$$

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$32. \sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{7 \cdot 2^2 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = \sqrt[2]{(2 \cdot 7)^2} = (2 \cdot 7)^{\frac{2}{2}} = (2 \cdot 7)^1 = 2 \cdot 7 = 14$$

$$33. \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2^1 \cdot \sqrt{7}}}{\sqrt{3}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 7 = 14$$

$$34. \sqrt[4]{24} \cdot \sqrt[4]{54}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\frac{(\sqrt{3})^2}{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{\frac{3}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{21}}}$$

$$35. \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$36. (-32)^{\frac{2}{5}}$$

$$37. -32^{\frac{2}{5}} \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$38. \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \stackrel{\text{red arrow}}{=} \left(\frac{-27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{-3^3}{2^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{(-3)^3}{2^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{-3}{2}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{-3}{2}\right)^{\frac{3 \cdot 2}{3}} = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$39. \left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$40. \frac{6^7}{6^4}$$

$$41. \frac{5^8}{5^{10}} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$42. \frac{3^{-6}}{3^{-10}} \stackrel{\text{red arrow}}{=} 3^{-6-(-10)} = 3^{-6+10} = 3^4 = \underline{81}$$

$$43. \frac{5^{100}}{5^{100}}$$

$$44. \frac{2^7 \cdot 3^{-5}}{2^5 \cdot 3^{-4}}$$

$$45. \frac{3^5 \cdot 4^{-6}}{3^7 \cdot 4^{-8}}$$

$$46. \frac{7^5 \cdot 3^3}{}$$

$$7^3 \cdot 3^5 \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$47. \frac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}} \cdot 5^{-\frac{5}{2}}} = \left(\frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{7}{4}}} \right) \cdot \left(\frac{5^{-\frac{3}{2}}}{5^{-\frac{5}{2}}} \right) = \frac{\left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right]}{2} \cdot \frac{\left[\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2} \right) \right]}{5} = 2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

$$48. \frac{2^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot 4^2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4} \right)}{2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{4}{4}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2} \right)}{2} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$49. \frac{4^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{8}} \cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{-\frac{5}{8}} \cdot 6^{-3}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{x \cdot y \cdot z} = \left(\frac{a}{z} \right) \cdot \left(\frac{b}{x} \right) \cdot \left(\frac{c}{y} \right)$$

$$50. \frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \left(\frac{b}{c} \right) = \frac{a}{c} \cdot b \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$51. \frac{12^3 \cdot 3^3}{6^3 \cdot 2^2} = \left(\frac{12^3}{6^3} \right) \cdot \left(\frac{3^3}{2^2} \right) = \left(\frac{12}{6} \right)^3 \left(\frac{3^3}{2^2} \right) = 2^3 \cdot \left(\frac{3^3}{2^2} \right) = \left(\frac{2^3}{2^2} \right) \cdot 3^3 = 2^{3-2} \cdot 3^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$$

$$52. ((-5)^2)^3 = \frac{(6 \cdot 2)^3 \cdot 3^3}{6^3 \cdot 2^2} = \frac{6^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{6^3 \cdot 2^2} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{2^2} = \left(\frac{2^3}{2^2} \right) \cdot 3^3 = 2^{3-2} \cdot 3^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$$

$$53. (-5^2)^3 = (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$54. \left(4^{\frac{1}{3}} \right)^6$$

$$55. \left(5^{-\frac{1}{5}} \right)^{-10}$$

$$56. \left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2} \right)^2 = \left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot (2^2)^2}{2^4 \cdot 3^2} \right]^2 = \left[\frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2} \right]^2 = \left[\frac{2^6 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2} \right]^2 = \left[\left(\frac{2^6}{2^4} \right) \cdot \left(\frac{3^5}{3^2} \right) \right]^2$$

$$57. \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 \right]^4 = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$= \left[2^{6-4} \cdot 3^{5-2} \right]^2$$

$$7^3 \cdot 3^5$$

47. $\frac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}} \cdot 5^{-\frac{5}{2}}}$

48. $\frac{2^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot 4^2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{5}{2}}}\right) \cdot \left(\frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{-\frac{1}{4}}}\right) \cdot \left(\frac{4^2}{4^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{4})}{4} \cdot \frac{2 - \frac{3}{2}}{4} = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{4} \cdot \frac{2 - \frac{3}{2}}{4} = \frac{-\frac{17}{6}}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$

49. $\frac{4^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{8}} \cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{-\frac{5}{8}} \cdot 6^{-3}} \Rightarrow \frac{\frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}}{2^{\frac{17}{6}} = 2^{2+\frac{5}{6}}} = \frac{1}{2^{\frac{17}{6}}} \cdot 3 \cdot 2$

50. $\frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{2^3}{2^2}\right)^4 = \frac{2^3 \cdot 2^{\frac{5}{6}}}{4 \sqrt[6]{32}} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{32}} = \frac{3}{2 \sqrt[6]{32}}$

51. $\frac{12^3 \cdot 3^3}{6^3 \cdot 2^2}$

52. $((-5)^2)^3$

53. $(-5^2)^3$

54. $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^6$

55. $\left(5^{-\frac{1}{5}}\right)^{-10}$

56. $\left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right)^2 = \left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot (2^2)^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 = \left[\frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 = \left[\frac{2^6 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 = \left[\left(\frac{2^6}{2^4}\right) \cdot \left(\frac{3^5}{3^2}\right)\right]^2 = \left[2^{6-4} \cdot 3^{5-2}\right]^2$

57. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^4 \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$\begin{aligned}
 \frac{2^3 \cdot 5^3}{2^2} &= \left(\frac{2^3}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{5^3}{2^2}\right) \\
 &= \left(\frac{2^3}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{5^3}{5^2}\right) \\
 &= 2^{3-2} \cdot 5^{3-2} \\
 &= 2 \cdot 5 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
 $= [2^2 \cdot 3^3]^2$
 $= (2^2)^2 \cdot (3^3)^2$
 $= 2^4 \cdot 3^6$
 $= 16 \cdot 729$
 $= \underline{\underline{1264}}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{1}{1}\right) \circ \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$49. \frac{4^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{8}} \cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{-\frac{5}{8}} \cdot 6^{-3}}$$

$$= \frac{3}{2 \sqrt[6]{32}}$$

"Racionalización"

- del denominador.
- del numerador.

$$= \frac{3}{2 \sqrt[6]{32}} \cdot 1$$

$$= \frac{3}{2 \sqrt[6]{2^5}} \cdot \frac{\sqrt[6]{2^1}}{\sqrt[6]{2^1}}$$

"Quitar radicales
o raíces de denominador o numerador
respectivamente."

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^n}$$

$$= \sqrt[n]{a^{m+n}}$$

$$= \frac{3 \cdot \sqrt[6]{2^1}}{2 \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^1}}$$

$$= \frac{3 \sqrt[6]{2^1}}{2 \sqrt[6]{2^5 \cdot 2^1}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$= \frac{3 \sqrt[6]{2^1}}{2 \sqrt[6]{2^6}}$$

$$2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$$

$$= \frac{3 \sqrt[6]{2^1}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{3 \sqrt[6]{2^1}}{4}$$

58. $\left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^3$

59. $\left[\left(\frac{3}{4} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}}$

60. $\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{5}} \right)^2 = \frac{1^3}{3^{-3}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-3}$

61. $\left(-\frac{1}{3^{-3}} \right)^{-2} = \left[-\left(\frac{1}{3} \right)^{-3} \right]^{-2} = \left[-\left(\frac{3}{1} \right)^3 \right]^{-2} = \left[-\left(\frac{3}{1} \right)^3 \right]^{-2} = \left[-3^3 \right]^{-2} = \left[(-1) \cdot 3^3 \right]^{-2}$

62. $\left(\frac{1}{2^{-3}} - \frac{1}{2^{-1}} \right)^{-3} = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-3} - \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right]^{-3} = \left[\left(\frac{2}{1} \right)^3 - \left(\frac{2}{1} \right)^1 \right]^{-3}$

$$= \left[2^3 - 2^1 \right]^{-3} = [8-2]^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n = \frac{b^n}{a^n} \\ & (-1)^3 \\ & = (-1)^2 \cdot (3^3)^{-2} \\ & = \frac{1}{(-1)^2} \cdot 3^{3 \cdot (-2)} \\ & = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3^6} \\ & = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}. \end{aligned}$$

1.15. Ejercicio

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{49}$

2. $\sqrt{729}$

3. $\sqrt{289}$

$$4. \sqrt[3]{-512}$$

$$5. \sqrt[4]{81}$$

$$6. \sqrt[4]{625}$$

$$7. \sqrt{196}$$

$$8. \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 2^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$9. \sqrt{2^2 \cdot 3^2} \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$10. \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ \hline 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$11. \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$2^{\frac{4}{4}} = 2^{\frac{1}{1}} = 2$$

$$12. \sqrt[5]{18} + \sqrt[5]{3}$$

$$13. \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} - \sqrt[4]{3} = \cancel{\sqrt[4]{2^4}} \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3}$$

$$14. \sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sqrt[4]{3} - \cancel{\sqrt[4]{3}} \cdot 1 \\ &= \sqrt[4]{3} [2 - 1] \\ &= \underline{\underline{\sqrt[4]{3}}} \end{aligned}$$

$$15. \sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{ab+a \cdot c}{=} a(b+c) \\ &\stackrel{a}{=} \end{aligned}$$

1.16. Ejercicio

Simplifique cada expresión

$$1. (3y^2)(4y^5)$$

$$15. \sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{y^4} - \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{2} \cdot y \cdot \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y} [\sqrt[3]{2} \cdot y - 1] \\ = \sqrt[3]{y} [y^{\frac{1}{3}} - 1]$$

$$\sqrt[3]{y^4} = y^{\frac{4}{3}} = y^{1 + \frac{1}{3}} = y^1 \cdot y^{\frac{1}{3}} = y \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$\frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{1}}{3\sqrt[3]{4}}$$

$$2. \ x^{-5}x^3$$

$$3. \ x^2x^{-6}$$

$$4. \ w^{-2}w^{-1}w^6$$

$$5. \ z^5z^{-3}z^{-4}$$

$$6. \ \frac{y^{10}y^0}{y^7}$$

$$7. \ x^6x^{10}$$

$$8. \ \frac{a^9a^{-2}}{a}$$

$$9. \ \frac{z^2z^4}{z^3z^{-1}}$$

$$10. \ (2y^2)^3$$

$$11. \ (8x)^2$$

$$12. \ (a^2a^4)^3$$

$$13. \ x^8x^2$$

$$14. \ \frac{a^2}{4}^3$$

$$15. \ (3z)^2(6z)^{-3}$$

$$16. \ (2z^2)^{-5}z^10$$

$$17. (2a^3a^2)^4$$

$$18. \frac{3x^4}{4x^2}^2$$

1.17. Ejercicio

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

$$1. (4x^2y^2)(2x^5y)$$

$$2. (8a^2z) \left(\frac{1}{2}a^3z^4 \right)$$

$$3. b^4(3ab^3)(2a^2b^{-5})$$

$$4. (2s^3t^{-2}) \left(\frac{1}{4}s^7t \right) (16t^4)$$

$$5. (5x^2y^3)(3x^2y^5)^4$$

$$6. (2a^3b^2)(5a^2b^5)^3$$

$$7. (s^{-2}t^2)(s^2t)^3$$

$$8. (2u^2v^3)^3(3u^{-3}v)^2$$

$$9. \underline{6y^3z}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad (2s^3t^{-2}) \left(\frac{1}{4}s^7t\right)(16t^4) &= \left[2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 \cdot s^3 \cdot s^7 \cdot t^{-2} \cdot t^4\right] \\ &= \left[\frac{2 \cdot 16}{4} \cdot s^{10} \cdot t^2\right] \\ &= \underline{\underline{8 \cdot s^{10} \cdot t^2}} \end{aligned}$$

$$a^m \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$10. \frac{(xy^2z^3)^4}{(x^2y^2z)^3} = \frac{x^4 \cdot (y^2)^4 \cdot (z^3)^4}{(x^2)^3 \cdot (y^2)^3 \cdot z^3} = \left[\frac{x^4}{x^6} \right] \cdot \left[\frac{y^8}{y^6} \right] \cdot \left[\frac{z^{12}}{z^3} \right] = x^{-2} \cdot y^2 \cdot z^9$$

$$11. \frac{2x^3y^4}{x^5y^3} = \frac{1}{x^2} \cdot y^2 \cdot z^9$$

$$12. \frac{(2v^3w)^2}{v^3w^2} = \frac{y^2 \cdot z^9}{x^2}$$

$$13. \left(\frac{a^2}{b} \right)^5 \left(\frac{a^3b^2}{c^3} \right)^3$$

$$14. \frac{2x^3y^4}{x^5y^3}$$

$$15. \frac{(2v^3w)^2}{v^3w^2}$$

$$16. \left(\frac{a^2}{b} \right)^5 \left(\frac{a^3b^2}{c^3} \right)^3$$

$$17. \frac{(u^{-1}v^2)^3}{(u^3v^{-2})^2}$$

$$18. \frac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^3}$$

$$19. \frac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$$

$$20. \left(\frac{y}{x} \right)^{-3}$$

$$5x^{-2}$$

$$21. \left(\frac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}} \right)$$

$$22. \left(\frac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}} \right)^{-3}$$

$$23. \left(\frac{3a}{b^3} \right)^{-1}$$

$$24. \left(\frac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}} \right)^{-1}$$

$$25. \frac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}$$

$$26. \left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}} \right)^{-3}$$

1.18. Ejercicio

Simplifique cada una de las siguientes expresiones. Suponga que las letras denotan cualesquiera numeros reales positivos.

$$1. \sqrt[4]{x^4}$$

$$2. \sqrt[4]{16x^8}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \sqrt[6]{64a^6b^7} \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \\
 & = \left[(64x^6)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = \left(64x^6 \right)^{\frac{(1)}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \left(64x^6 \right)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6 \cdot x^6 \right)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6 \right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(x^6 \right)^{\frac{1}{6}} \\
 4. \quad & \sqrt[3]{\sqrt{64x^6}} = \sqrt[3]{\left(64x^6 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 2^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{6}{6}} = 2^{\frac{5}{6}} \cdot x^1 \\
 5. \quad & \sqrt[5]{x^10} \quad 2^5 = 32 \\
 & \qquad \qquad \qquad 2^6 = 64 \\
 6. \quad & \sqrt[3]{x^3y^6} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\
 7. \quad & \sqrt[3]{a^2b} \sqrt[3]{64a^4b} = \sqrt[3]{(a^2b) \cdot 64 \cdot a^4 \cdot b} = \sqrt[3]{a^2 \cdot a^4 \cdot 64 \cdot b \cdot b} = \sqrt[3]{a^6 \cdot 64 \cdot b^2} = \sqrt[3]{a^6 \cdot 2^6 \cdot b^2} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{b^2} \\
 & = a^2 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{b^2} \\
 & = a^2 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{b^2} \\
 & = 4a^2 \sqrt[3]{b^2} \\
 8. \quad & \sqrt[4]{x^4y^2z^2} \\
 & \qquad \qquad \qquad \begin{array}{c|c} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array} \\
 & \Rightarrow 64 = 2^6
 \end{aligned}$$

1.19. Ejercicio

Simplifique cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3x - 8x$
2. $6a^2 + 5b^2 + 7a^2$
3. $-3a + 5a - 10a$
4. $4x - 3x - 2x$
5. $7ab + 4ab - 3ab$
6. $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$

$$7. -m + n + m + n$$

$$8. \frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$$

$$9. 0.25x - 0.4x + 0.2x$$

$$10. \frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c - ab^3c$$

$$11. 8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$$

$$12. 10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$$

$$13. -12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$$

$$14. 12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$$

$$15. 9a^3b^2c - 5a^2b^2 - 12a^3b^2c + 3a^3bc^2 + 4a^3b^2c$$

$$16. 10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$$

$$17. -6x^2 + y^2 - 3x^2 + 2y^2$$

$$18. 6a^2b + 7a^2b$$

$$19. -6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$$

$$20. 4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$$

$$21. -2a^2b + 12a^2b$$

1.20. Ejercicio

Simplifique cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

$$1. \ 7(2a - 4b) - 3(4a - 2b)$$

$$2. \ 6a^2 + 5b^2 + 7a^2$$

$$3. \ -3a + 5a - 10a$$

$$4. \ 4x - 3x - 2x$$

$$5. \ 7ab + 4ab - 3ab$$

$$6. \ 5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$$

$$7. \ -m + n + m + n$$

$$8. \ \frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$$

$$9. \ 0.25x - 0.4x + 0.2x = x[0.25 - 0.4 + 0.2] = x(0.05) = \underline{\underline{0.05x}}$$

$$10. \ \frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c - ab^3c$$

$$11. \ 8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$$

$$12. \ 10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$$

$$13. \ -12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$$

$$14. \ 12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$$

$$15. \ 9a^3b^2c - 5a^2b^2 - 12a^3b^2c + 3a^3bc^2 + 4a^3b^2c$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$5x + 3x = x[5+3] = x \cdot 8 = 8x$$

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ + 0.20 \\ \hline 0.45 \\ - 0.40 \\ \hline 0.05 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ - 0.4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0.25 - 0.4 &= (-1)(-1)0.25 + (-1)0.4 \\ &= (-1)[(-1)0.25 + 0.4] \\ &= (-1)[0.4 - 0.25] \\ &= (-1)[0.15] \\ &= -0.15 \end{aligned}$$

$$3-7 = -[7-3] = -4$$

$$\begin{array}{r} 0.20 \\ - 0.15 \\ \hline 0.05 \end{array}$$

$$16. \ 10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$$

$$17. \ -6x^2 + y^2 - 3x^2 + 2y^2$$

$$18. \ 6a^2b + 7a^2b$$

$$19. \ -6\cancel{xy^2} - \cancel{xy^2} - 3\cancel{xy^2} = (-6-1-3)xy^2 \\ = -10xy^2$$

$$20. \ 4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$$

$$21. \ -2a^2b + 12a^2b$$

Ejercicio 1.21.

Realiza y simplifica las siguientes operaciones

$$1. 3\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$2. \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$3. \frac{1}{3}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$$

$$4. 4\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$

$$5. 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2}$$

$$6. \frac{2}{5}\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \frac{7}{4}\sqrt{6}$$

$$7. \sqrt{8} + \sqrt{18}$$

$$8. \sqrt{12} - \sqrt{3}$$

$$9. 2\sqrt{5} + \sqrt{80}$$

$$10. \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$$

$$1. 3\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5} = \sqrt{5} \left(3 + \frac{1}{4} \right) = \sqrt{5} \left(\frac{13}{4} \right) = \frac{13}{4} \cdot \sqrt{5}$$

$$2. \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$3. \frac{1}{3}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$$

$$4. 4\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$

$$5. 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2}$$

$$7. \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt[3]{2^3} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = \cancel{2}^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ = (2+3) \cdot \sqrt{2} \\ = 5\sqrt{2}$$

$$8. \sqrt{12} - \sqrt{3}$$

$$9. 2\sqrt{5} + \sqrt{80}$$

$$10. \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$$

$$\frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 8 = 40 \cdot 2 = 80$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 5 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$= 2\sqrt{5} + \sqrt{16 \cdot 5}$$

$$= 2\sqrt{5} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}$$

$$= (2+4)\sqrt{5}$$

$$= \underline{6 \cdot \sqrt{5}}$$

1. $3\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$
2. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$
3. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$
4. $4\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$
5. $5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2}$
6. $\frac{2}{5}\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \frac{7}{4}\sqrt{6}$
7. $\sqrt{8} + \sqrt{18}$
8. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
9. $2\sqrt{5} + \sqrt{80}$
10. $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

Ejercicio 1.22.

En cada uno de los siguientes ejercicios racionaliza el denominador

1. $\frac{2}{\underline{\hspace{1cm}}}$

$$\sqrt{5}$$

$$2. \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$3. \frac{5}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{5\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}}$$

$$4. \frac{2}{\sqrt[4]{8}} = \frac{5\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3 \cdot 3^2}}$$

$$5. \frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} \quad 3^3 = 3^1 = 3$$

$$6. \frac{2}{3 + \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt[3]{3^2}}{3}$$

$$7. \frac{4}{\sqrt{6} + 2}$$

$$8. \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$9. \frac{3 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right] \cdot \left[\frac{2 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \right] = \frac{(3 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} \quad \text{Prod. de binomios conjugados.}$$

$$10. \frac{1}{1 - \sqrt{7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} \cdot \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}} \quad \boxed{\frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}}}$$

$$= \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^{m-n}}}$$

$$= \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n} \cdot a^{m-n}}$$

$$= \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a}^{n+m-n}}$$

$$= \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} \rightarrow a^{\frac{m}{m}} = 1$$

$$= \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{4 - 5} \quad (\sqrt{5})^2 =$$

$$= \frac{11 + 5\sqrt{5}}{-1} \quad 5 \times \sqrt{5}$$

$$= \left(\frac{1}{-1}\right) \cdot (11 + 5\sqrt{5}) = (-1)[11 + 5\sqrt{5}] = \underline{-11 - 5\sqrt{5}}$$

$$(3 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 3(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5}(2 + \sqrt{5}) \\ = 6 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5 \\ = \underline{11 + 5\sqrt{5}}$$

$$5 \cdot \sqrt[2]{5} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ = 5^{\frac{1+1}{2}} \\ = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+b}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}\right) = \frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)} = \frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$$

$$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b) = \sqrt{a}(\sqrt{a}-b) + b(\sqrt{a}-b)$$

$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{a} \cdot b + b \sqrt{a} - b \cdot b$$

$$= (\sqrt{a})^2 - b\cancel{\sqrt{a}} + b\cancel{\sqrt{a}} - b^2$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = a - b^2$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Producto Notable:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 \quad \text{← Producto de binomios Conjugados}$$

Ejercicio 1.23.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

Realiza y simplifica las siguientes operaciones

$$1. \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{36 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{36} = 6 .$$

$$2. \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

$$3. \frac{7\sqrt{140}}{8\sqrt{7}}$$

$$4. \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$$

$$5. \left(\frac{1}{2}\sqrt{10} \right) + \left(2\sqrt{2} \right)$$

$$6. \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} \right) + \left(2\sqrt[3]{2} \right)$$

$$7. \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$8. \frac{5\sqrt{16}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$9. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$10. \frac{5\sqrt{4}}{10\sqrt[3]{16}}$$

Ejercicio 1.24.

Aplica las definiciones y propiedades de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones:

$$1. \sqrt{49}$$

$$2. \sqrt{729}$$

$$3. \sqrt{289}$$

$$4. \sqrt[3]{-512}$$

$$5. \sqrt[4]{81}$$

$$6. \sqrt[4]{625}$$

$$7. \sqrt[5]{-243}$$

$$8. \sqrt{196}$$

$$9. \sqrt[3]{16}$$

$$10. \sqrt[3]{135}$$

$$11. \sqrt[3]{250}$$

$$12. \sqrt{162}$$

$$13. \sqrt{180}$$

$$14. 2^4\sqrt{405}$$

$$15. \frac{2}{7}\sqrt[3]{686}$$

$$16. \frac{1}{3}\sqrt[4]{540}$$

$$17. \frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$$

$$18. \frac{1}{3}\sqrt[4]{3600}$$

Ejercicio 1.20.

Realiza y simplifica las siguientes operaciones

$$1. \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$$

$$5. \sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{9}$$

$$2. \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$$

$$6. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$3. (3\sqrt{2})(5\sqrt{6})\sqrt{12}$$

$$7. \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$$

$$4. (2\sqrt{5})\left(\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$$

$$8. \left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} & a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\
 &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} \\
 &= 2^{1 + \frac{1}{12}} & = \frac{13}{12} \\
 a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad \Downarrow &= 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{12}} & = 1 \frac{1}{12} \\
 &= \underline{\underline{2^{\frac{13}{12}}}} & = 1 + \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \quad \left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right) \left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right) = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{6}\right) \cdot \left(\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{12}\right)$$

$$= \left[\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 6}\right] \left[\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{12 \cdot 6}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (\sqrt[6]{2}) \cdot 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[6]{2} \cdot 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt[6]{2} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \quad -\frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-6+1}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{6^2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{6} = \frac{-6+1}{6} = \frac{-5}{6}$$

$$= \frac{4}{6} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{36}$$

$$= \frac{2}{3} = 2^{-1 + \frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{36}$$

$$36 = 3^2 \cdot 2^2$$

$$= 2^{-\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[3]{36} \quad // \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$$

$$= 2^{-\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{-5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{-5+4}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$= 2^{-\frac{5}{6} + \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

$$= 2^{-\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}} \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[6]{2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[6]{2^5}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^5}}{(\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{2^5})}$$

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} &= 2^{\frac{1}{6} + \frac{5}{6}} \\ &= 2^{\frac{6}{6}} \\ &= 2^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^5}}{2}$$

$$8. \left(\frac{3}{2} \sqrt{6} \right) \left(\frac{2}{6} \sqrt[6]{12} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \left[\sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{12} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left[1 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{12} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{12} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt[6]{12}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt[6]{12}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{(12)^{\frac{1}{2}} \cdot (12)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \cdot (12)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{(3 \cdot 2^2)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= 3^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(2)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[3]{3^2} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[6]{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}} &= 2^{\frac{4}{3} - \frac{3}{2}} \\ &= 2^{\frac{8-9}{6}} \\ &= 2^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Expresiones algebraicas

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado: x, y, z representan algunos números reales.

A una combinación de variables y números reales mediante suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces se le llama **expresión algebraica**.

Cuando una expresión algebraica consta de varias partes o las partes que se suman se les llama **términos**.

Observemos que la expresión: $2x - 3y - 5$ se puede escribir como:

$$2x + (-3y) + (-5)$$

por lo que podemos decir que la expresión $2x - 3y - 5$ tiene tres términos:

$$2x, -3y, -5, \text{ } \textcolor{red}{(1)}x = x$$

Expresión algebraica

términos

$$\begin{aligned} \bullet) \quad & 2x^2 + 5x - 8 \\ & = 2x^2 + 5x + (-8) \end{aligned}$$

$$2x^2, 5x, -8$$

$$\bullet) (x+1)^2 + 3(x+1) - 1 \quad (x+1)^2, 3(x+1), -1$$

$$(x+1)^2 + 3(x+1) + (-1)$$

$$8x^n$$

$$3(x+1)$$

Terminos Semejantes: Son aquellos que tienen las mismas variables, elevadas al mismo exponente.

Ejemplo: Identifica los términos semejantes:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 2x^2 + 8x - 5x^2 - 12 + 14x^2 - 5x \\ & = (2 - 5 + 14) \cdot x^2 + (8 - 5)x - 12 \\ & = 9x^2 + 3x - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & 6x^6 - 7y^3 - 3z^6 + 6 - 9x^4 - 4z^6 - x^2 + 4y^3 + z^6 - 8 \\ & = (2 - 9 - 1) \cdot x^4 + (-7 + 4) \cdot y^3 + (-3 + 1)z^6 + (6 - 8) \\ & = -8x^4 - 3y^3 - 2z^6 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ③ \quad & \frac{1}{2}y - 4 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{5}y + x \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)y + \left(\frac{4}{3} + 1\right)x - 4 \\
 &= \frac{3}{10}y + \frac{7}{3}x - 4
 \end{aligned}$$

$$④ \quad 2\left(3 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) - 3\left(2 - \frac{5}{3}y + \frac{2}{5}x\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 + \frac{2}{3}x - y - 6 + 5y - \frac{6}{5}x \\
 &= \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5}\right)x + (-1 + 5)y \\
 &= -\frac{8}{15}x + 4y \\
 &\qquad\qquad\qquad = \frac{-8}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ⑤ \quad & 4x^2 + 5y^2 - 6(3x^2 - 5y^2) - 4x + 3(-2x + 5y) \\
 & - 4x + 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{4x^2} + \underline{5y^2} - \underline{18x^2} + \underline{30y^2} - \overline{4x} - \overline{6x} + \underline{\overline{15y}} - \overline{\overline{4x+3}} \\
 &= -14x^2 + 35y^2 - 14x + 15y + 3
 \end{aligned}$$

= Productos notables =

Binomio al cuadrado : El cuadrado de una Soma o diferencia

$$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 \pm 2a \cdot b + b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b) \\&= a^2 + a \cdot b \pm b \cdot a + b^2 \\&= a^2 \pm a \cdot b \pm a \cdot b + b^2 \\&= a^2 \pm 2a \cdot b + b^2\end{aligned}$$

Producto de binomios. Conjugados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) \\&= a^2 - ab + ba - b^2 \\&= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Producto de binomios con término común:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x(x+b) + a(x+b) \\&= x^2 + b \cdot x + ax + ab \\&= x^2 + (b+a)x + ab.\end{aligned}$$

Binomio al cubo : El cubo de una suma o una diferencia.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot \underbrace{(a+b) \cdot (a+b)}_{(a+b)^2} &= (a+b)[a^2 + 2ab + b^2] \\&= a^3 + \underline{2a^2 \cdot b} + \underline{a \cdot b^2} + \underline{b \cdot a^2} + \underline{2ab^2} + b^3 \\&= \textcircled{a^3} + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3$$

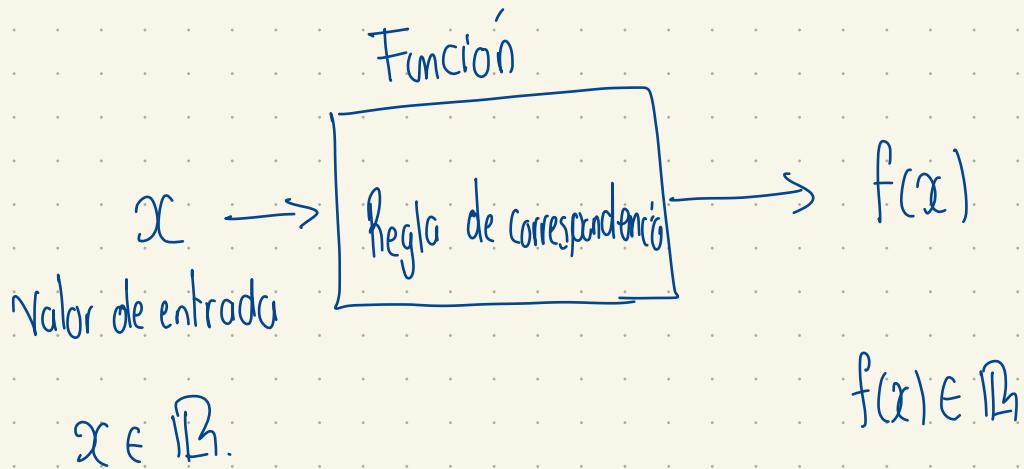
Triàngol de Pascal.

	1	$1 \leftarrow^0$	$1 \leftarrow^1$	$1 \leftarrow^2$	$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1	2	$1 \leftarrow^0$	$(a+b)^1 = a+b$	
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1	3	3	$1 \leftarrow^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	1	4	6	$1 \leftarrow^4$	
	1	5	10	10	$1 \leftarrow^5$
				5	
				1	

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ba^4 + b^5$$

Funciones

Función: Regla de correspondencia/regla matemática que asigna a cada valor de entrada un único valor de salida



Ejemplos:

o) $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$

$x=1$

$f(5) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow f(5) = 6$

Funciones Constantes.

$$f(x) = C$$

↑
Es m valor constante.

Ejemplos:

•) $f(x) = 10$

$$f(0) = 10, \quad f(-5) = 10, \quad f(11) = 10.$$

Funciones polinomiales. grado de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + \underbrace{a_0 x^0}_1$$

Coeficiente principal.

$$a_n \neq 0,$$

$n=1$, : Función lineal (Función polinomial de grado 1).

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$n=2$, : Función Cuadrática (Función polinomial de grado 2)

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

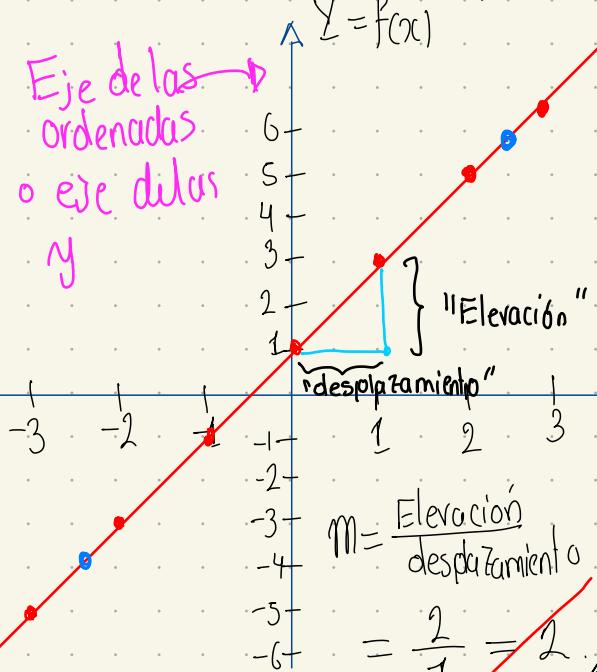
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$f(x) = 2x + 1$$

x	$f(x)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	6

(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 6)

Eje de las ordenadas
o eje delas y



$$2) \quad f(x) = x + 3$$

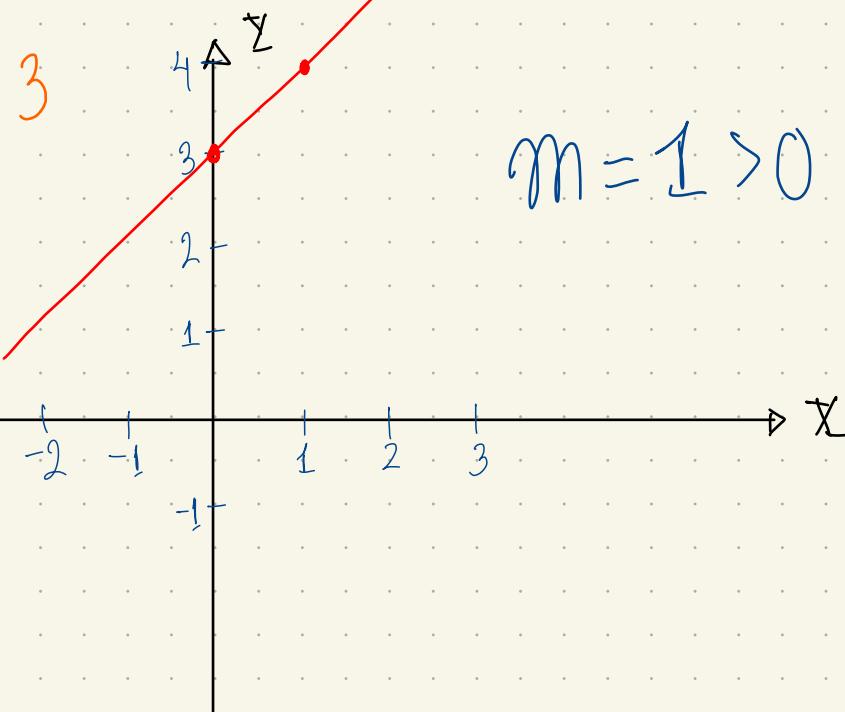
$$x=0 \Rightarrow f(0)=3$$

$$\Rightarrow (0, 3)$$

$$m = 1 > 0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=4$$

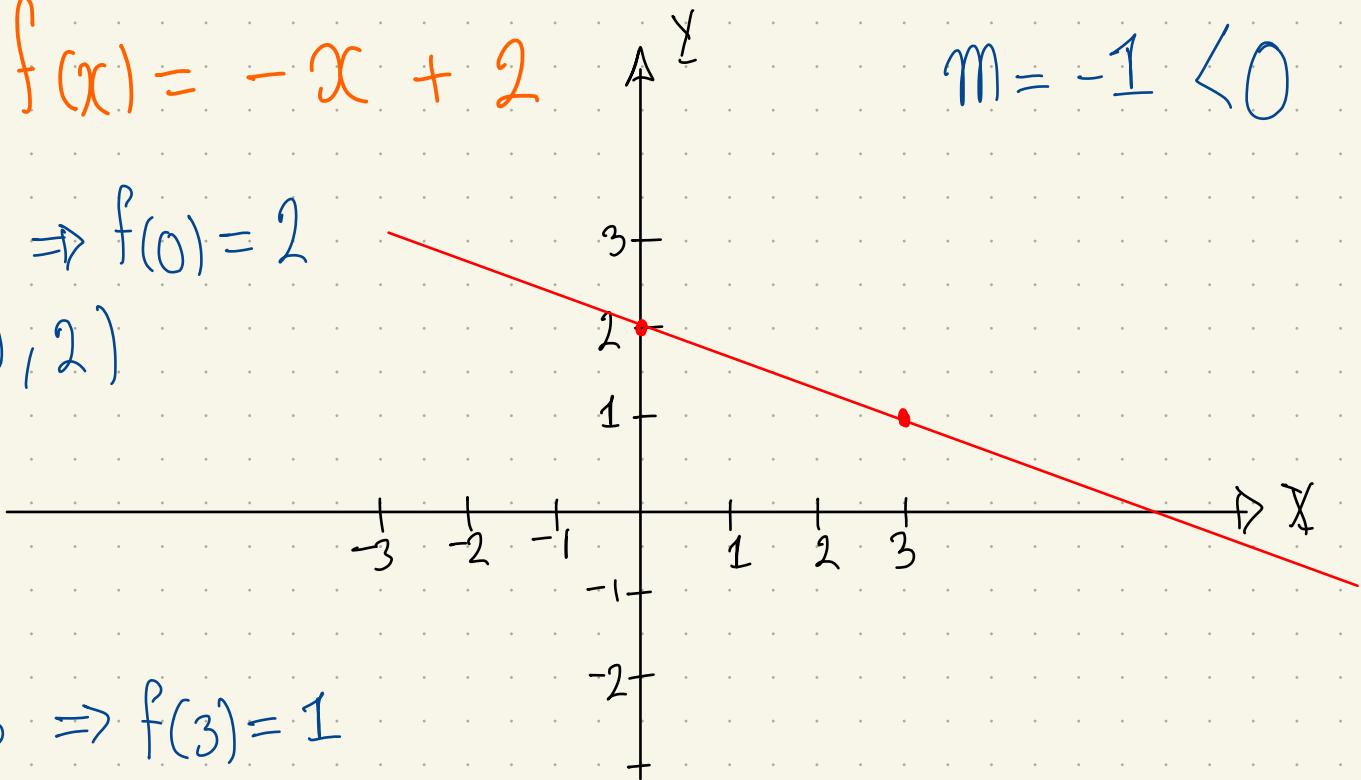
$$\Rightarrow (1, 4)$$



$$\textcircled{3} \quad f(x) = -x + 2 \quad m = -1 < 0$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=2$$

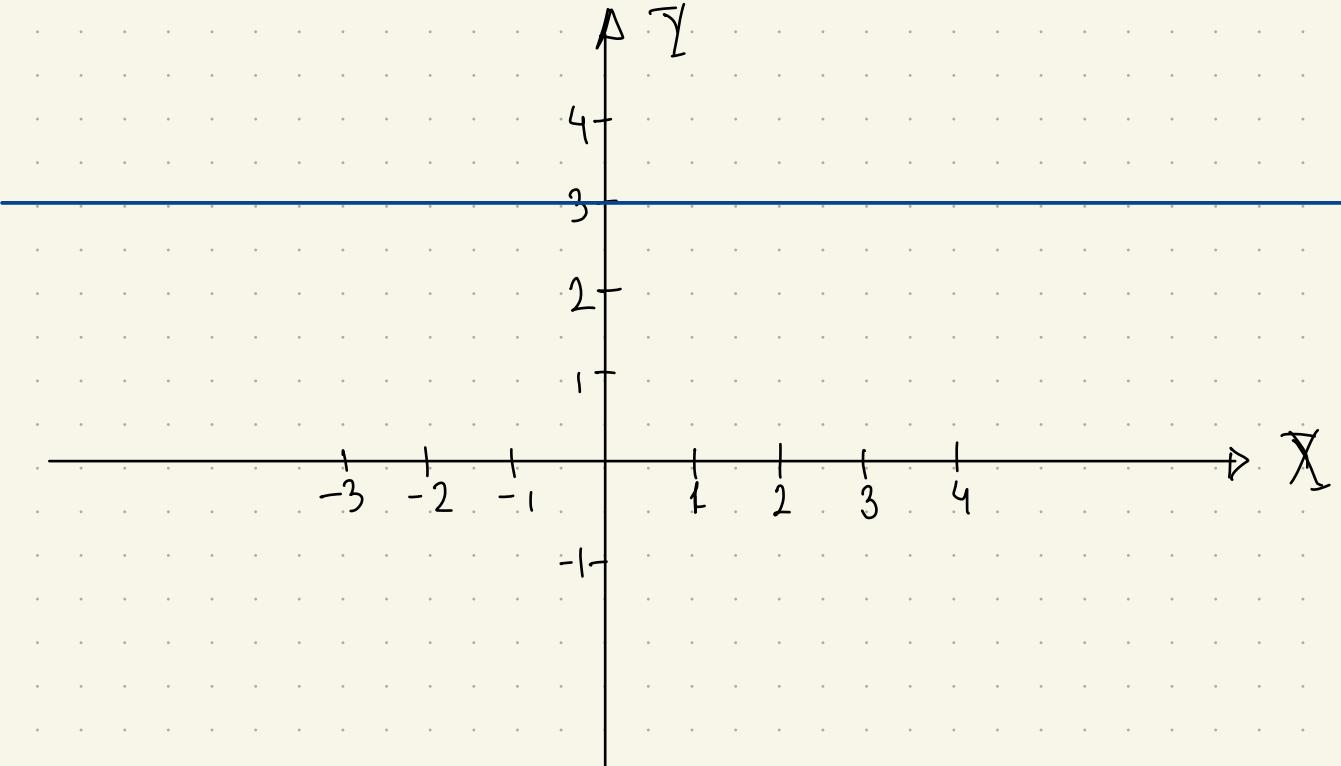
$$(0, 2)$$



$$x=3 \Rightarrow f(3)=1$$

$$(3, 1)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = 0 \cdot x + 3 = 3$$



La forma general de una ecuación lineal es:

$$Ax + By + C = 0$$

$f(x) = 2x + 1$, $y = 2x + 1$

↑ Variable independiente
Variable dependiente (depende de los valores)
(que tome x)

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

= Funciones de la línea recta =

• Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

i) (a, b) punto por el que pasa la línea recta

ii) m pendiente.



$$y - b = m(x - a)$$

Ecuación punto
Pendiente de una
línea recta.

Ejemplo: Encuentra la ecuación punto-pendiente de la linea recta que pasa por el punto $(1, 3)$ y que tiene Pendiente $m=5$.

la ecuación general

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

Ecuación punto-pendiente
de la linea recta
en cuestión

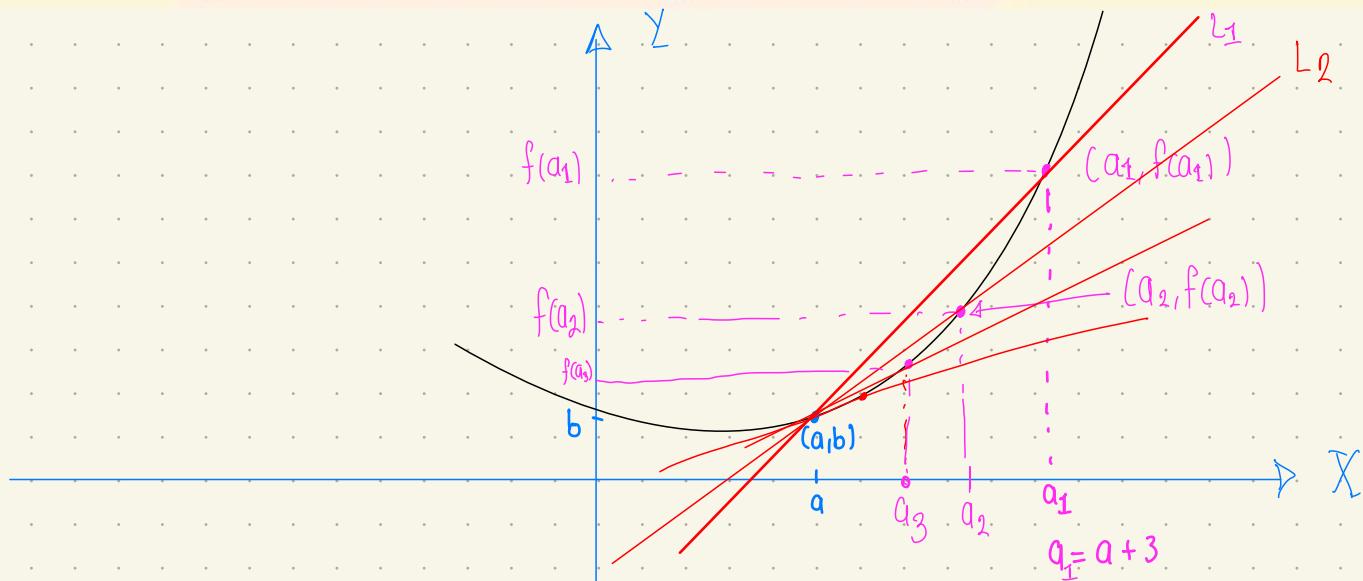
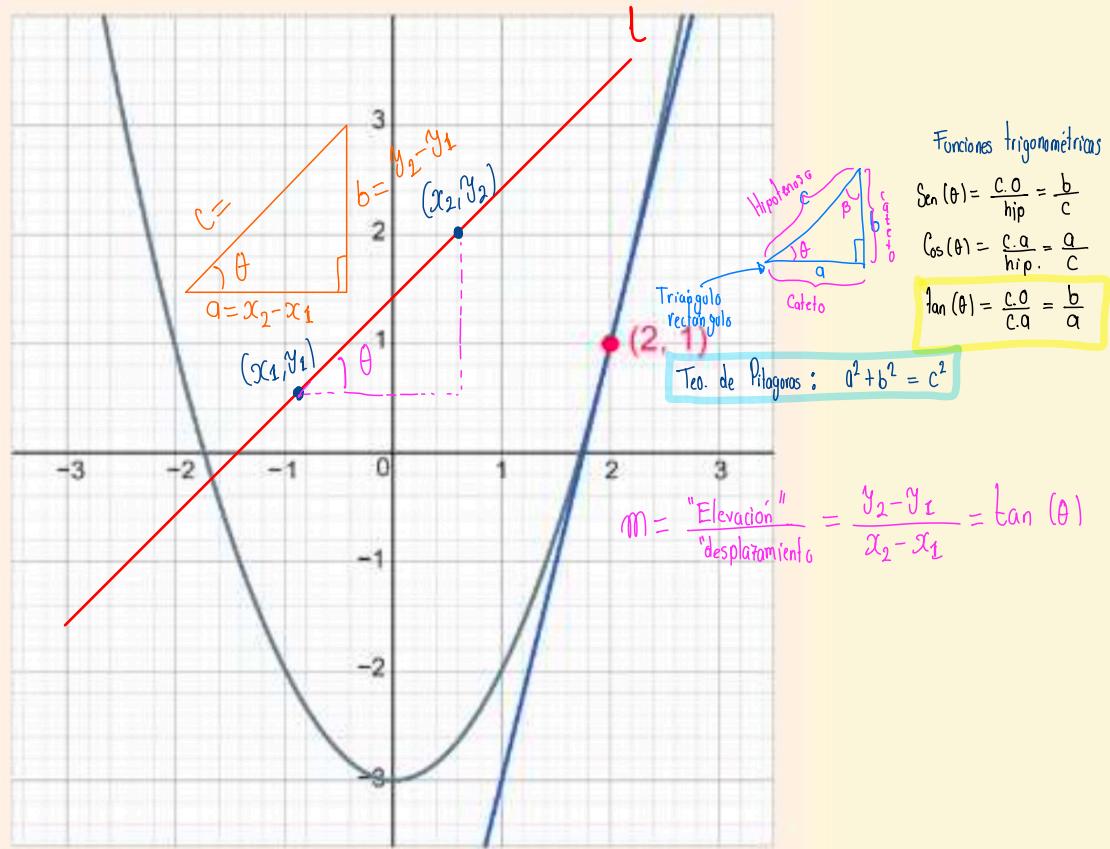
$$\Leftrightarrow y - 3 - 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 2 = 0$$

Ecuación general de
la linea recta que
pasa por $(1, 3)$ y
tiene pendiente $m=5$.

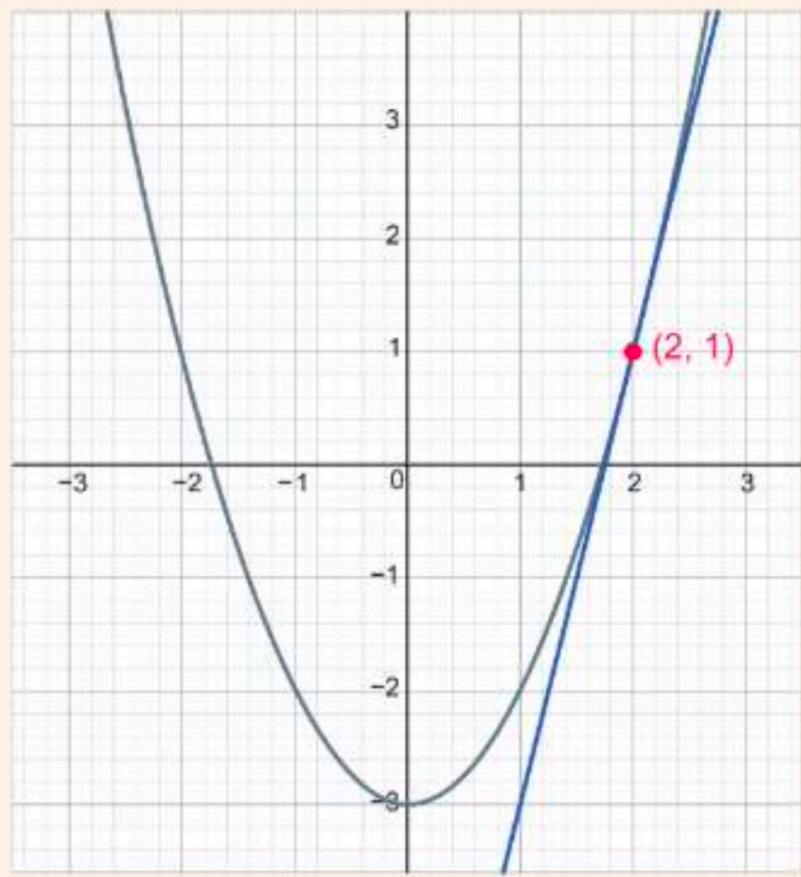
3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



$$\text{Pendiente de } L_1 : \frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}$$

$$\text{Pendiente de } L_2 : \frac{f(a_2) - f(a)}{a_2 - a}$$

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ en el punto $x=2$
Coincide con la pendiente de la recta tangente a
la gráfica de la función en el punto $(2, 1)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=2} = 2 \cdot x \Big|_{x=2}$$

$= 4$

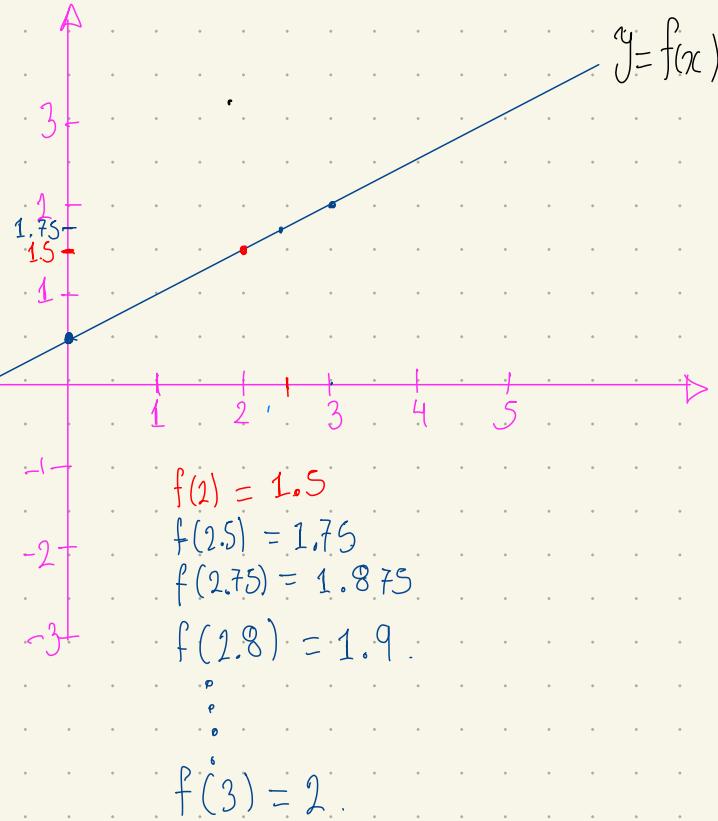
$$f'(2)$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

"A que valor (si existe) se acerca la función cuando x se acerca a 3?"

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$



la pendiente de la recta

tangente (en caso de que exista)
 a la gráfica de mi función
 en $(a, f(a))$.

$$= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= la derivada de la función f
 en el punto $x=a$.

Calcula los siguientes términos de la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, márcalos en la recta numérica y responde las siguientes dos preguntas.

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$a_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$$

$$a_{50} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$$

$$a_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

$$a_{500} = 1 - \frac{1}{500} = 0.998$$

$$a_{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Los puntos a_1 , a_2 y a_3 ya están marcados en la recta numérica, ahora marca los valores a_n que obtuviste.



a) ¿Qué pasa con los valores de a_n cuando n va creciendo?

.....

b) ¿Qué crees que pase si calculas a_{5000} , a_{10000} y a_{50000} ? ? 0.99998

.....

Problemario.

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

$$f(x) = x^2 + 2$$

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$ $a=1$

Solución:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Def: de } m_{\tan} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2] - [1^2 + 2]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1^2 + 2 \cdot 1 \cdot h + h^2 + 2] - 3}{h}$$

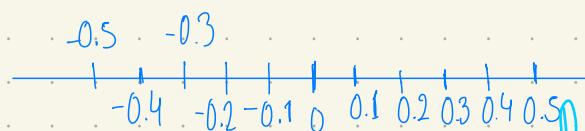
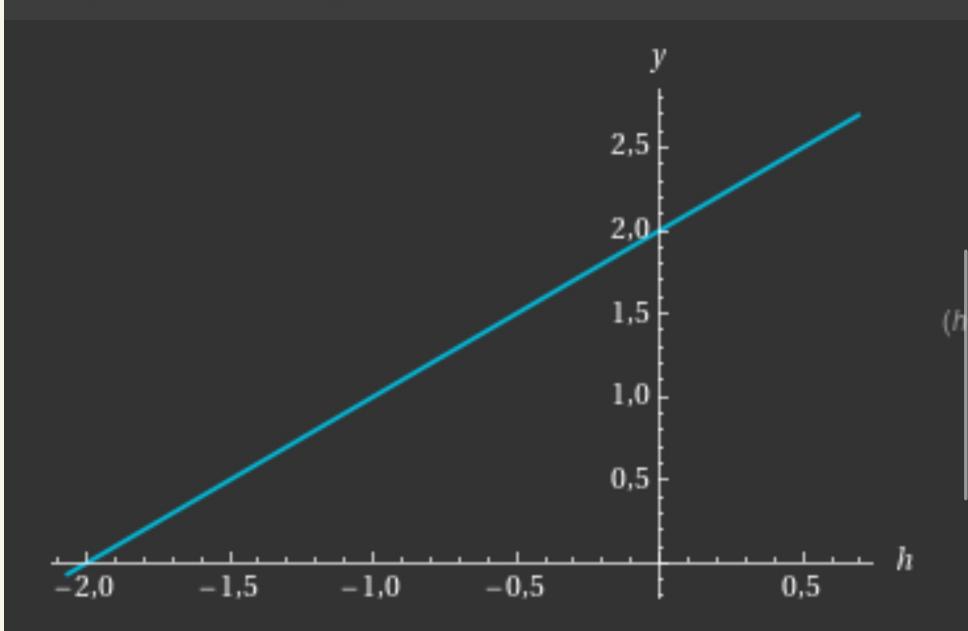
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h + 3) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 3 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

h	$\frac{h^2 + 2h}{h}$
-0.5	1.5
-0.4	1.6
-0.3	1.7
-0.2	1.8
-0.1	1.9
0	2
0.1	2.1
0.2	2.2
0.3	2.3
0.4	2.4
0.5	2.5

Representaciones gráficas



Cuando $h \neq 0$

$$\frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 = 0 + 2 = 2$$

Si $f(h) = g(h)$ para todo $h \neq 0$
ent. $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)$

Prop. de límites:
Si f es una función polinómica i.e.
 $f(h) = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \dots + a_0$
 $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0)$.

• $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$

Límite de los
Pendientes de los
rectas secantes cuando
 $x=1$ y esto sabemos
que es igual a la
Pendiente de la recta tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x=1$ es: 2

i.e.

$$\underline{m_{tan} = 2}$$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

$$f(x) = x^2 + 2, \quad x=1, \quad y = f(1) = 3$$

$$m_{tan} = 2, \quad (1, 3)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 2x + 1}$$

Ecuación de la recta tangente a
la gráfica de la función f
en el punto $x=1$.

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

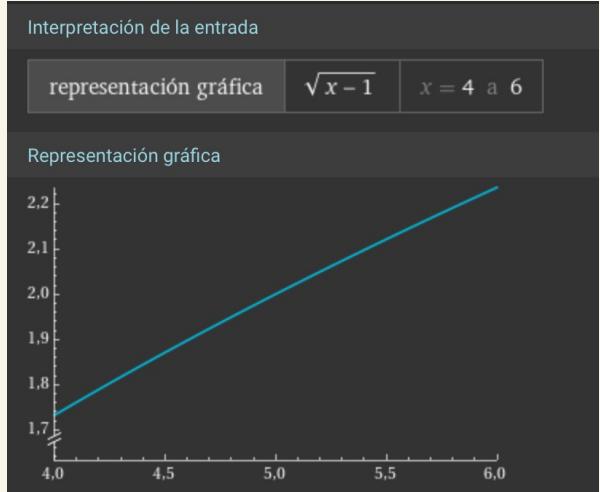
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(5+h)-1} - \sqrt{5-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+4} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+4) - 4}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 1/4$$

Por lo tanto, $m_{tan} = \frac{1}{4}$.



3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

Solución

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4 - 2(2+h)]}{2(2+h)}$$

$$4 - 4 - 2h = -2h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{2(2+h)} \stackrel{0}{\circ} h$$

$$(-1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2h) \cdot 1}{2h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h}$$

$$= \frac{-1}{2+0}$$

$$= \frac{-1}{2} \quad \therefore m_{\tan} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad (2, f(2)) = (2, 1) \\ (a, b)$$

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$$