$+ \quad \times$

$- \quad \div$

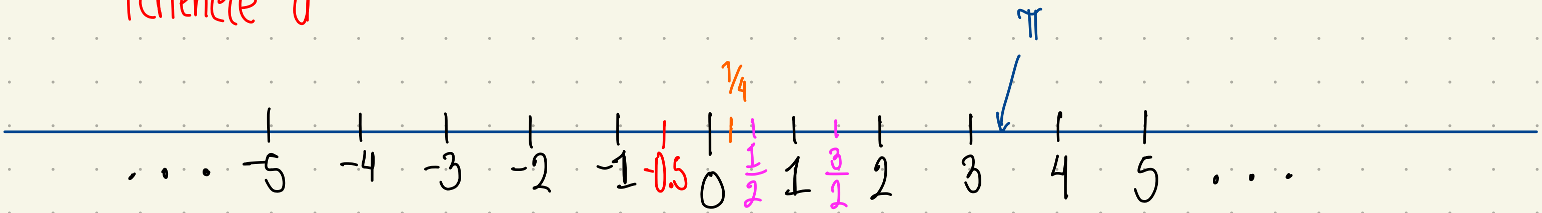
08/Julio/2024

El conjunto de los números reales

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales.

$1 \in \mathbb{R}$, $1/2 \in \mathbb{R}$, $0.3\bar{3} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

"Pertenece a"



Sistema de los números reales.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a, b \in \mathbb{R} \implies$

•) Existe un único $a+b \in \mathbb{R}$

••) " " " $a \cdot b \in \mathbb{R}$

Sistema de números reales.

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por $\mathbb{R}$ en el cual estan definidas dos operaciones $+$ y $\cdot$ para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$. Estas operaciones son llamadas suma y multiplicacion respectivamente y estan definidas de tal manera que, para cada para de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, existen únicos elementos $a+b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen los siguientes axiomas (llamados axiomas de campo) para todos los elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$

C1.- Cerradura: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

i) $a+b \in \mathbb{R}$ y ii) $a \cdot b \in \mathbb{R}$

C2. Conmutatividad: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen:
(Ley Conmutativa)

i) $a+b=b+a$ y ii) $a \cdot b = b \cdot a$.

C3.- Asociatividad: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:
(Ley asociativa)

i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

C4. Existencia de elemento neutro:

i) Existe 0 en $\mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0+a = a+0 = a.$$ //Neutro aditivo

ii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$ // Neutro multiplicativo.

C5.- Existencia de inversos:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + a_1 = 0$$

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a_2 = 1.$$

C6.- Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:
(Ley distributiva).

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales arbitrarios, entonces se satisfacen:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 1$

i) Distributividad por la izquierda

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$2(3+1) = 8$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2$
$= 8$

ii) Distributividad por la derecha:

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$2x + 3x = (2+3)x$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales junto con las operaciones de Suma $+$ y producto como ya las conocemos es un campo llamado Sistema de los números reales.

09/Julio/2024

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6+8)x = x(6+8)$ Conmutatividad para el producto
2. $(x+3)y+2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$ Distributividad por la derecha.
3. $(3+5)+2 = 3+(5+2)$
4. $(2+3)+5 = 2+(3+5)$ Asociatividad para la suma.
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x+y)+3 = (y+x)+3$ Conmutatividad para la suma
7. $(1+2)(-3) = 1(-3)+2(-3)$
8. $[(w+3)2]z = [2(w+3)]z$
9. $(-13+z)(2)+7 = [z+(-13)](2)+7$
10. $(a-b)+[-(a-b)] = 0$ // Existencia de inversos para la suma.
11. $(3+4)(5+2) = (3+4)5+(3+4)2$ // Distributividad por la izquierda.
12. $x(y+0)+z = xy+z$
13. $(x+2)+[-(x+2)] = 0$
14. $2(x+y) = 2x+2y$

Distributividad por la izq.

$$x(y+0)+z = (x \cdot y + x \cdot 0) + z$$
$$= (x \cdot y) + z$$
$$= x \cdot y + z$$

$$\cancel{(x+y)\cdot 2 = x+y\cdot 2}$$

$x=1,\ y=1$

$$(1+1)\cdot 2 = 2\cdot 2$$

$$1+1\cdot 2 = 1+2 = 3$$

$= 4$

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación "$a=b$" significa que "a es el mismo elemento que b". Dicho de otra forma, "$a=b$" significa que se estan usando simbolos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a=b$, entonces $b=a$ // Simetría

I2) Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$. // Transitividad.

I3) Si $a+c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a \cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c, entonces $a=b$ implica que:

i) $a+c=b+c$ y ii) $a \cdot c = b \cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ "Si y sólo si"

1) $a=b \iff a+c=b+c$

2) $a=b \iff a \cdot c = b \cdot c$.

$a+\underline{5}=8+\underline{5}$

$\iff$ $a=8$

$a \cdot 2 = 10$

$= 5 \cdot 2$

Consecuencias de las propiedades de los números reales

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y el producto]

i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a = b$.

Dem. i) Por hip. sabemos que:

$$a + c = b + c \quad \ldots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (C6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$c + c_1 = 0 \quad \ldots (2)$$

Por propiedades de la igualdad:

$$a + (c + c_1) = (a + c) + c_1 = (b + c) + c_1 = b + (c + c_1)$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a + (c + c_1) = (a + c) + c_1 = (b + c) + c_1 = b + (c + c_1)$$

$$\Longrightarrow \quad a + (\cancel{c + c_1}) = b + (\cancel{c + c_1})$$

$$a + 0 = b + 0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$a = b.$$

10/Julio/2024

Observación: los elementos 0 y 1 que aparecen en el axioma 3 son únicos. Esto es, el neutro aditivo y el neutro multiplicativo son los únicos números reales que satisfacen: $a+0=a$ y $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a.

$$z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } z + a = a, \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = 0.$$

"Para todo"

Productos que involucran al cero

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1) $a \cdot 0 = 0$

"Si y sólo si"

2) $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ó $b = 0$.

$$\begin{cases} a = 0 \text{ ó } b = 2 \\ a = 5 \text{ ó } b = 0 \\ a = 0 \text{ ó } b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Existe un único número real x tal que: $a + x = b$

2) Si $a \neq 0$, entonces existe un único número real y t.q.

$$a \cdot y = b.$$

$a = 2$ $\quad$ $b = 5$

¿x?

$2 + x = 5$ $\quad$ / $\quad$ $x = 3$

$a = -1$ $\quad$ $b = 4$

¿x?

$-1 + x = 4$ $\quad$ | $\quad$ $x = 5$

$a = 2$, $b = 4$

¿y?

$2 \cdot y = 4$ $\quad$ | $\quad$ $y = 2$.

$a = 8 \quad , \quad b = 2$

¿y?

$8 \cdot y = 2$.

$$y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Observación:

i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$.

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un unico $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Aplicando el Teorema anterior al caso $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$, se obtiene que existe un único número real x tal que

$$a + x = 0$$

i.e. el inverso aditivo de un número real a es único.

$a = 5 \quad , \quad x = -5$

$$5 + (-5) = 0$$

$a = -2$

¿x?

$(-2) + x = 0$

Si $x = 2$, ent.

$(-2) + 2 = 0$

$a = 2$

$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$a = \frac{3}{2}$ ¿x?

$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x = 1$

$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{6} = 1$

Definición:

- •) Si $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $-a$ al único número real que cumple $a + (-a) = 0$ y se le llama el inverso aditivo de a.
- ••) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, denotamos por a^{-1} al único número real que cumple $a \cdot a^{-1} = 1$ y se le denomina el inverso multiplicativo de a.

$x \cdot x^{-1} = 1$

Observación: Con esta definición del teorema anterior se tiene que para $a \in \mathbb{R}$,

- El único número real x que satisface la relación $a + x = b$ es $x = b + (-a)$.

- Si además $a \neq 0$, entonces el único número real x que satisface la identidad $a \cdot x = b$ es $x = b \cdot a^{-1}$.

$$2 + x = 5$$

$$x = 5 + (-2)$$
$$= 5 - 2$$
$$= 3$$

$$a + x = b$$

"entonces"

$$\Rightarrow (a + x) + (-a) = b + (-a)$$
$$\Rightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a)$$
$$\Rightarrow x + \underbrace{(a + (-a))}_{0} = b + (-a)$$
$$\Rightarrow x + 0 = b + (-a)$$
$$\Rightarrow x = b + (-a)$$

Notación: De ahora en adelante emplearemos la siguiente notación:

- $a - b := a + (-b)$
- Si $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

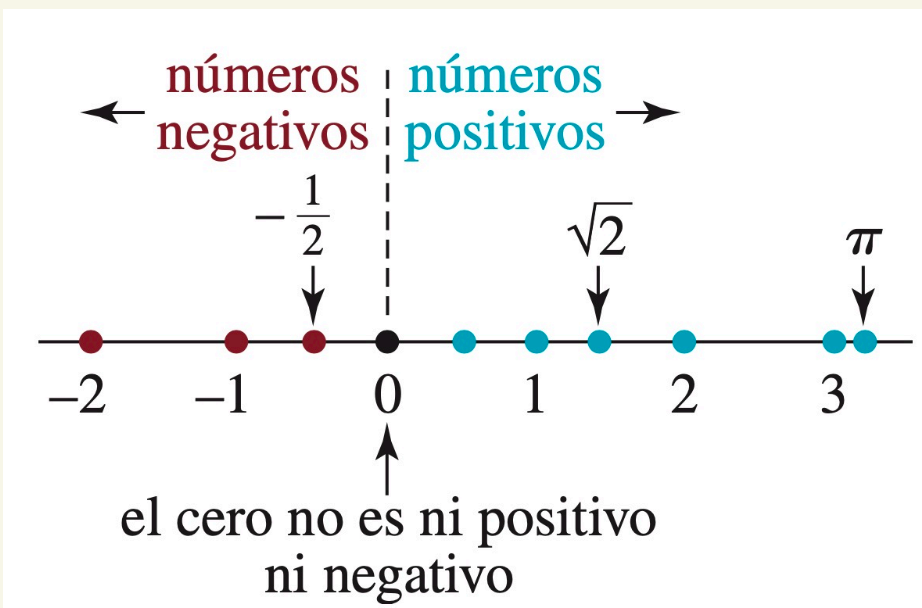
$a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$

$$a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$5 + (-2) = 5 - 3$$

$$2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$

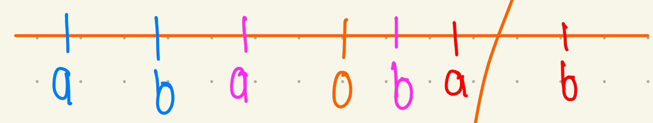


$x \in \mathbb{R}$ es positivo: $x > 0$, $0 < x$.

$x \in \mathbb{R}$ es negativo: $x < 0$, $0 > x$.

Los números reales son ordenados:

"a es estrictamente mas pequeño que b"



Definición: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

- Se dice que **a es menor que b** y se denota por $a<b$ si $b-a$ es número positivo. Geometricamente esto significa que a esta a la izquierda de b en la recta númerica. O bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y se denota como $b>a$.

$$\cancel{\frac{10}{2} < 5}$$

- El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a<b$ o que $a=b$. y se lee como "a es menor o igual que b".

$$\frac{10}{2} \leq 5$$

Relaciones entre los signos de a y $-a$

Sea $a \in \mathbb{R}$

1) Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo

2) Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

(2) $a=-1 \Rightarrow -a = 1$

No supongas que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a.

Relaciones entre los signos de a y a^{-1}

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

1) Si a es positivo, entonces a^{-1} es positivo $\left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

2) Si a es negativo, entonces a^{-1} es negativo.

(2) $a = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$(-1)(-1) = 1$ ✓

$a = -2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-2}$ ✓

$5 = \frac{5}{1}$

$$a \cdot a^{-1} = (\underbrace{-2}_{1})\left(\frac{1}{-2}\right)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$= \frac{(-2)(1)}{1(-2)}$$

$$= \frac{-2}{-2}$$

$$= 1$$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se satisfacen cada una de las siguientes proposiciones:

$(-2)(3) = 2(-3) = -(2 \cdot 3) = -6$

i) $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

ii) $(-1)a = a \cdot (-1) = -a$ $\quad (-1)5 = -5.$

iii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $-(-a) = a$. $\quad -(-2) = 2$

iv) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $\quad (-2)(-4) = 8$

v) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ $\quad -(2+5) = (-2)+(-7)$

$= -7$

vi) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

vii) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$ y $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

(vi) $\quad a = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{(a^{-1})}_{b}{}^{-1} =$

$$(a^{-1})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2.$$

vii) Si $a = 2$ y $b = 3$

$$(a \cdot b)^{-1} = (2 \cdot 3)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Leyes de los signos

- $(+)(+) = +$
- $(+)(-) = -$
- $(-)(+) = -$
- $(-)(-) = +$

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

1. x es positivo
2. t es menor a 4
3. a es mayor o igual a π
4. z es mayor a 1
5. b es como máximo 8 $b \leq 8$
6. 5 es menor o igual que x

$$1 \leq x \leq 5 \iff 1 \leq x \text{ y } x \leq 5$$

Intervalo de los números reales que son mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 5.

Suma y resta de números con signo.

1) los números con signos iguales se suman y se coloca el signo de los sumandos

2) Los números con signos distintos se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Signos de agrupación.

los signos de agrupación delimitan operaciones entre números :

Parentesis ( )

Llaves { }

Corchetes [ ]

Leyes de los signos para la división

•) $\frac{+}{+} = +$

••) $\frac{+}{-} = -$

∴) $\frac{-}{+} = -$

∷) $\frac{-}{-} = +$

Reescriba la expresión usando la propiedad de los números reales.

1. Propiedad conmutativa para la suma, $x + 3 =$
2. Propiedad asociativa para la multiplicación, $7(xy) =$
3. Propiedad distributiva, $4(a + b) =$
4. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$

Utiliza propiedades de los números reales para escribir la expresión sin parentesis

$(-a)b = -(a \cdot b)$

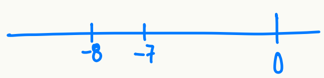
1. $3(x+y)$
2. $4(2m)$
3. $\frac{4}{2}(2x-4y) = 4x - 0\,y$
4. $(a-b)8$
5. $\frac{4}{3}(-6x) = \left(\frac{4}{3} \cdot (-6)\right) \cdot x = -8x$
6. $-\frac{1}{2}(4x-2y) = -\frac{1}{2} \cdot 4x - \left(-\frac{1}{2}\right)2y$
   $= -\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)x + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)y$
   $= -(1)x + 1 \cdot y$
   $= x + y.$
7. $3a(b+c-2d)$

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

1. x es positivo
2. t es menor a 4
3. a es mayor o igual a π
4. z es mayor a 1
5. b es como máximo 8
6. 5 es menor o igual que x

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: $>, <$ o $=$, según corresponda.

1. $-7 \underline{\;>\;} -8$



2. $-35 \underline{\;<\;} 32$
3. $-844.5 \underline{\;<\;} 0$
4. $-483 \underline{\;<\;} -480$
5. $\frac{8}{4} \underline{\;=\;} 2$
6. $-\frac{7}{3} \underline{\;<\;} 1.5$

Si x es positivo y y es negativo, determine el signo del número real:

1. $10x$
2. $-x$
3. $-y$
4. $(-2)x$
5. $100y$ $-$
6. $(-3)y$
7. xy $-$
8. $\frac{x}{y}$ $-$
9. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $-$
10. $x \cdot x$ $+$
11. $y \cdot y$ $+$
12. $\frac{2x}{y}$ $-$

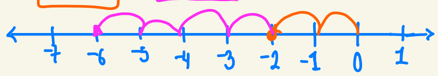
Suma y resta de números con signo.

1) los números con signos iguales se suman y se coloca el signo de los sumandos

2) Los números con signos distintos se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Ejercicios: Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1) $\boxed{-2}+\boxed{(-4)}=-6$



2) $6+(-4)$

3) $7-2$

4) $7-(-4)=7+4=11$

5) $-5-(-13)$

6) $-5-(-13)=-5+13$
$=8$

7) $-(-a)+b=+a+b$
$=a+b$

8) $(-2)(9)$

9) $7(-9)$

10) $(-2)(-12)=+24$
$=24$

11) $19(-1)$

12) $\dfrac{-1}{-1}$

13) $-(-6+x)=6-x$

14) $-7x$

15) $-12(x-y)$

16) $-[-6+(-y)]$
$=-[-6-y]$
$=6+y$

17) $\dfrac{-3}{3\cdot 9}$

18) $-9\div 27$

19) $\boxed{(-a)\div(-b)}=\dfrac{-a}{-b}$
$=\dfrac{a}{b}$

20) $2(-6+2)$
$=-12+4$
$=-8$

$=2(-4)$
$=-8$

21) $3(-2(3)+6(2))$
$=3(-6+12)$
$=3(6)=18.$

22) $(-a)(-b)(-1)$
$=a\cdot b\cdot(-1)$
$=-a\cdot b.$

23) $(-12)(-12)$

24) $3(x-4)$

25) $4(5+x)$

26) $-(x-y)$

27) $0\cdot(-x)$

Exponentes

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la n-ésima potencia de a como:

Exponente

Potencia $\rightarrow$ $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ - veces}}$

base

Observación: [Exponente 0 o exponentes negativos]

Si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Conjunto de los números enteros.

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

i) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2}$

ii) $8^{-4} = \dfrac{1}{8^4}$

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{1}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$$

¡Cuidado!

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

$$-3^2 = -[3\cdot 3] = -9$$

Propiedades de los exponentes: [Leyes de los exponentes]

(1) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

"El producto de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes"

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{-veces}} \cdot \underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{-veces}} = \underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times\cdots\times a}_{m+n\text{-veces}}$$

$$= a^{m+n}.$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2\times 2\times 2\cdot 2\times 2\times 2\times 2 = 2^7$$

(2) $a \neq 0$, $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

"El cociente de potencias con la misma es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes"

③ $$\boxed{(a^m)^n = a^{m\cdot n}}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m$$

i) $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6$

ii) $((-1)^3)^2 = (-1)^6 = 1$

④ $$\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

⑤ $$\boxed{b \neq 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

⑥ $$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{1}\right)}{\left(\frac{a^n}{b^n}\right)} = \frac{1\cdot b^n}{1\cdot a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

⑦ $$\boxed{\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}}$$

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^n}\right)} = \frac{1\cdot b^n}{1\cdot a^m} = \frac{b^n}{a^m}$$

Suma de fracciones

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d \pm bc}{b\cdot d}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 3}{2\cdot 5} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{4}{5} = \frac{15 - 32}{40} = \frac{-17}{40}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{24}{4} = 6$$

$$= \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Tienen el mismo denominador.

Suma de fracciones con el mismo denominador

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$$

Obs. $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Producto de fracciones

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Cociente de fracciones:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Propiedades de las fracciones:

① $a = \frac{a}{1}$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$$

② Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$

③ $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, donde $b \neq 0$

$$-x = (-1) \cdot x$$

④ $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$

⑤ $\frac{0}{b} = 0$ donde $b \neq 0$ ¡! $\cancel{\frac{x}{0}}$

⑥ Si $b \neq 0$, $\frac{b}{b} = 1$

"Todo número distinto de 0 dividido entre sí mismo es igual a 1"

⑦ Si $b \neq 0$, $b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = a$

⑧ Si $b \neq 0$, $b \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = 1$

9. Si $c \neq 0$, $\dfrac{a \cdot b}{c} = \left(\dfrac{a}{c}\right) \cdot b = a \cdot \left(\dfrac{b}{c}\right)$

$$\frac{x \cdot y^2}{y} = x \cdot \left[\frac{y^2}{y}\right] = x \cdot y^{2-1} = x \cdot y.$$

10. Si $a, b \neq 0$, $\dfrac{c}{a \cdot b} = \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a} \cdot \left(\dfrac{c}{b}\right)$

Ejercicios: Simplifica las siguientes expresiones.

(1) $\frac{5}{1} = 5$

(2) $\frac{14 \cdot x}{21 \cdot y}$, $y \neq 0$.

$$\frac{14 \cdot x}{21 \cdot y} = \left(\frac{14}{21}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot y}$$

$\cancel{1}$, 2, 3, $\cancel{4}$, 5, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$, 11, $\cancel{12}$, ...

Definición: Un número entero positivo es primo si tiene únicamente dos divisores el 1 y el mismo número.

Un divisor es un número que lo divide de forma exacta sin usar punto decimal.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

$$14 = 2 \cdot 7$$
$$21 = 3 \cdot 7$$
$$\Longrightarrow \frac{14}{21} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{3}$$

(3) $a \neq 0$, $5a \cdot \left(\frac{7}{5 \cdot a \cdot b}\right) = \frac{5a}{1} \cdot \left(\frac{7}{5ab}\right) = \frac{\cancel{5} \cdot 7 \cdot \cancel{a}}{\cancel{5} \cdot \cancel{a} \cdot b} = \frac{7}{b}$

Jerarquía de operaciones:

Indica el orden en el que se deben realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz, así como signos de agrupación. De esta forma se garantiza que se obtendrá el resultado correcto.

1. Signos de agrupación: Los ***signos de agrupación*** son: Llaves { }, Corchetes [ ], Paréntesis ( )
2. Potencias y raíces
3. Multiplicación y división
4. Suma y resta

Cuando se encuentran dos o mas operaciones del mismo nivel se realizan de izquierda a derecha como se vayan presentando.

Ejercicio 3.1. Efectua las siguientes operaciones:

1. $7 \times 2 + 8 \div 4 - 3 \times 2$
2. $12 \div 4 \times 3 + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$
3. $(10 - 2) \div 2 \times 3 + (8 + 6)(7 - 2) - 12 \times 2 \div 8$
4. $(6 + 2) \times (7 - 4) \div (14 - 2) + (12 - 8) \times (7 + 3) \div (10 - 2)$
5. $12^2 \div \sqrt{16} \div \sqrt{81} + 5^2 \times 6 \div 3$
6. $\sqrt{13^2 - 12^2} + (6 - 4)^2 \times 8 - \sqrt{(10 - 8)^2}$
7. $2 + \{8 \times (8 - 6) + [(3 + 4) \div 7 - 5 \times 6 \div 10 - 5\}$

$$1.\ 7 \times 2 + 8 \div 4 - 3 \times 2 = 14 + 8 \div 4 - 3 \times 2$$

$$= 14 + 2 - 6$$

$$= \underline{10}$$

$$(10-2) \div 2 \cdot 3 = 8 \div 2 \cdot 3 = 12$$

6

$$5 \div (\cancel{15-10})^{5} \cdot 2 = 5 \div 5 \cdot 2 = 2.$$

$$2.\ \cancel{12 \div 4}^{3} \times 3 + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= \cancel{3 \times 3}^{9} + 18 \div 9 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 9 + \cancel{18 \div 9}^{2} \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 9 + \cancel{2 \times 3}^{6} - \overset{12}{4 \times 3}$$

$$= 9 + 6 - 12$$

$$= \underline{3}$$

Radicales.

Definición: [Exponentes racionales].

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Obs

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{27}.$$

Ojo En general, no se cumple:

$$\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$5 = \sqrt{25} = \sqrt{16+9} \ne \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3 = 7$$

$\Rightarrow 5 = 7$?!

Propiedades de los radicales.

(1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Si n es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$

$$\sqrt{36} = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = (-2) \cdot 3 = -6$$

$$-2^3 = (-1)2^3 = (-1)^3 2^3 = [(-1) \cdot 2]^3 = (-2)^3$$

$$-a \cdot b = (-a)(b) = a \cdot (-b)$$

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow 216 = 2^3 \cdot 3^3$

$$\therefore \sqrt[3]{-216} = -6$$

② $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{|2|}{|3|} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{Si } n \text{ es par, } \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|}$

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow 81 = 3^4$

$\Rightarrow 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

$|5| = 5$, $|-1| = -(-1) = 1$

$$\therefore \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$$

③ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}}$

$= \left(a^{1/n}\right)^{1/m}$

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

$= a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}$

Índice de la raiz

$= a^{\frac{1}{n\cdot m}}$

$\boxed{\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}}$

Radicando.

$= \sqrt[n\cdot m]{a}$

$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = |3| = 3.$

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\therefore \boxed{\sqrt{\sqrt[3]{729}} = 3}$

$\Rightarrow 729 = 3^6$

(4) (i) Si n es impar, ent. $\sqrt[n]{a^n} = a$

(ii) Si es par, ent. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

= Errores comunes =

Propiedad correcta para el producto | Error común para la suma

(1) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ | $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$

(2) Sup. que $a, b \geq 0$.

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ | $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(3) Sup. que $a, b \geq 0$

$$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$$
$$= |a| \cdot |b|$$
$$= a \cdot b$$

$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b| = a+b$

(4) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a \cdot b}$

(5) Sup. que $b \neq 0$,

$\frac{a \cdot b}{b} = a$

$\frac{a+b}{b} \neq a$

(6) Sup. que $a, b \neq 0$

$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

$(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$