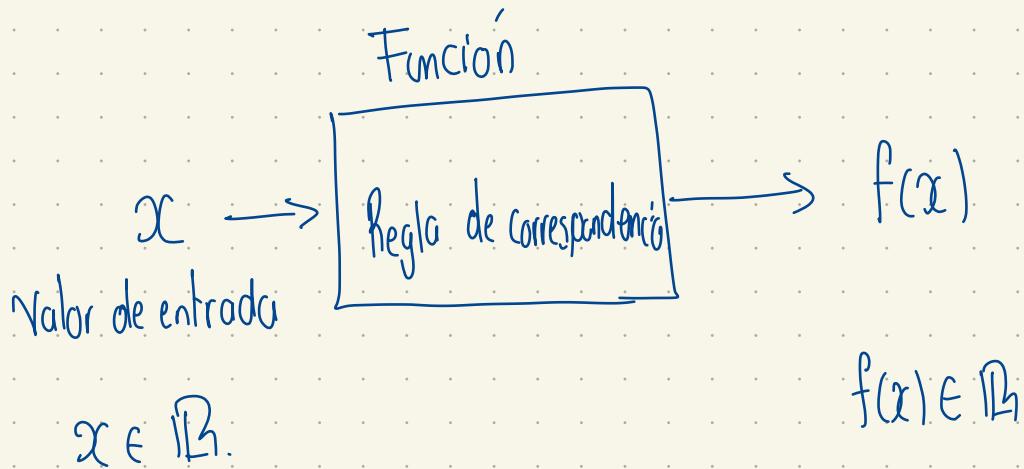


Notas
asesorías
Cálculo
Diferencial

Funciones

Función: Regla de correspondencia/regla matemática que asigna a cada valor de entrada un único valor de salida



Ejemplos:

o) $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$

$x=1$

$f(5) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow f(5) = 6$

Funciones Constantes.

$$f(x) = C$$

↑
Es m valor constante.

Ejemplos:

•) $f(x) = 10$

$$f(0) = 10, \quad f(-5) = 10, \quad f(11) = 10.$$

Funciones polinomiales. grado de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + \underbrace{a_0 x^0}_1$$

Coeficiente principal.

$$a_n \neq 0,$$

$n=1$, : Función lineal (Función polinomial de grado 1).

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$n=2$, : Función Cuadrática (Función polinomial de grado 2)

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

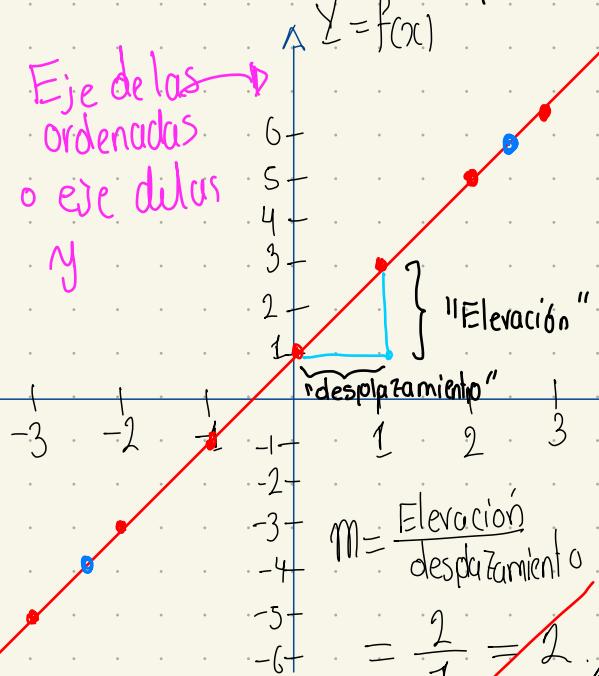
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$f(x) = 2x + 1$$

x	$f(x)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	6

(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 6)

Eje de las ordenadas
o eje delas y



$$2) \quad f(x) = x + 3$$

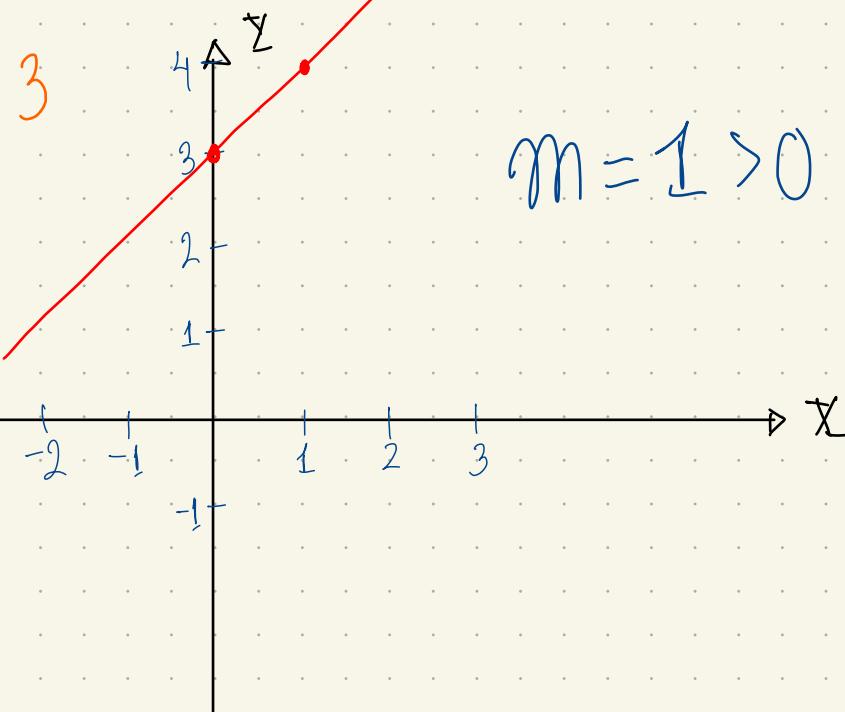
$$x=0 \Rightarrow f(0)=3$$

$$\Rightarrow (0, 3)$$

$$m = 1 > 0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=4$$

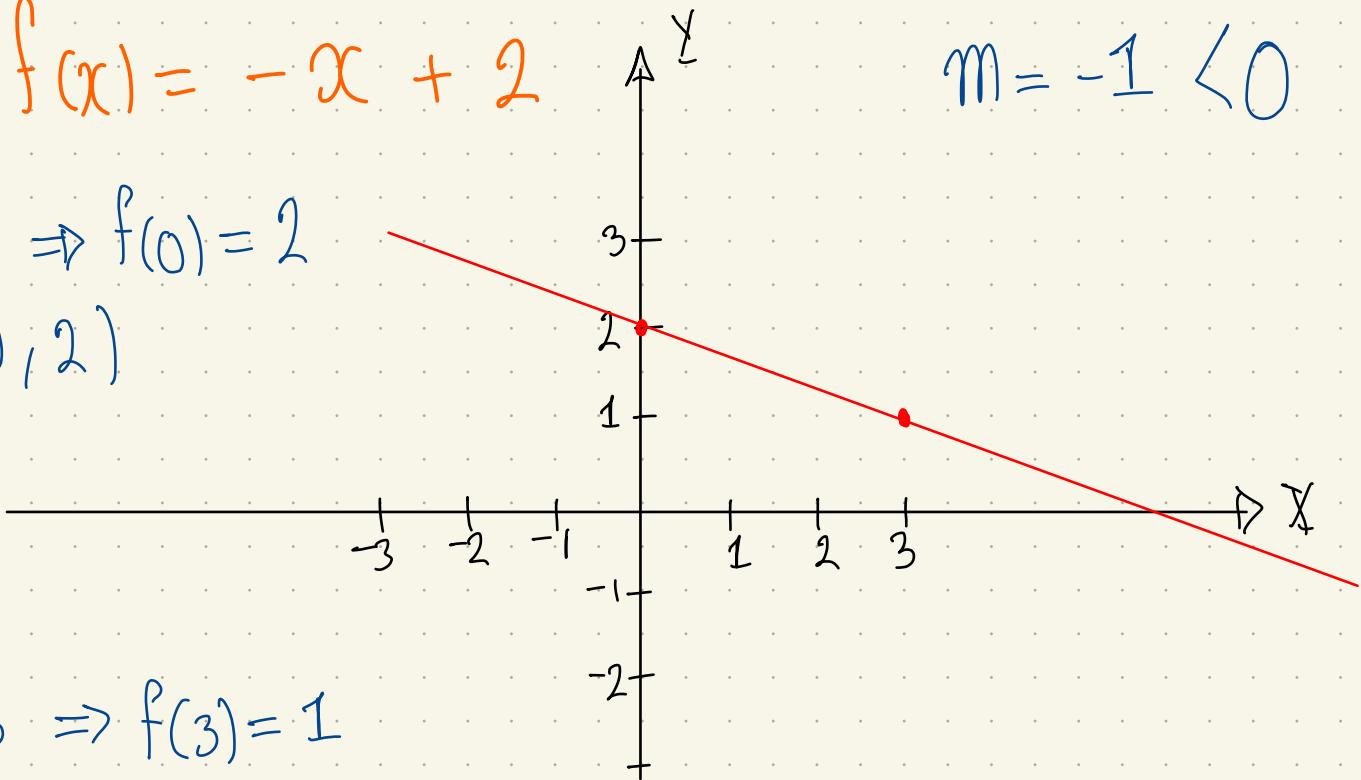
$$\Rightarrow (1, 4)$$



$$\textcircled{3} \quad f(x) = -x + 2 \quad m = -1 < 0$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=2$$

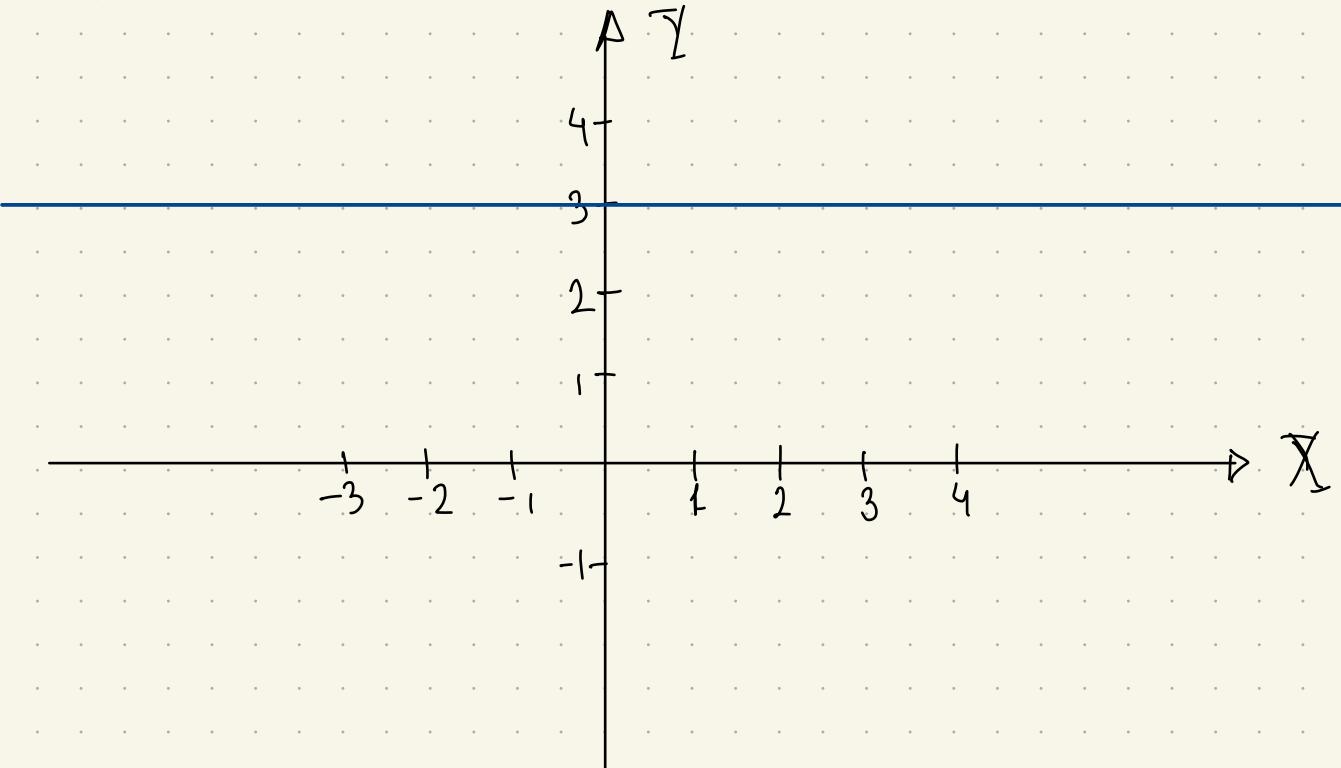
$$(0, 2)$$



$$x=3 \Rightarrow f(3)=1$$

$$(3, 1)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = 0 \cdot x + 3 = 3$$



La forma general de una ecuación lineal es:

$$Ax + By + C = 0$$

$f(x) = 2x + 1$, $y = 2x + 1$

↑ Variable independiente
Variable dependiente (depende de los valores)
(que tome x)

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$$

= Funciones de la línea recta =

• Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

i) (a, b) punto por el que pasa la línea recta

ii) m pendiente.



$$y - b = m(x - a)$$

Ecuación punto
Pendiente de una
línea recta.

Ejemplo: Encuentra la ecuación punto-pendiente de la linea recta que pasa por el punto $(1, 3)$ y que tiene Pendiente $m=5$.

la ecuación general

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

Ecuación punto-pendiente
de la linea recta
en cuestión

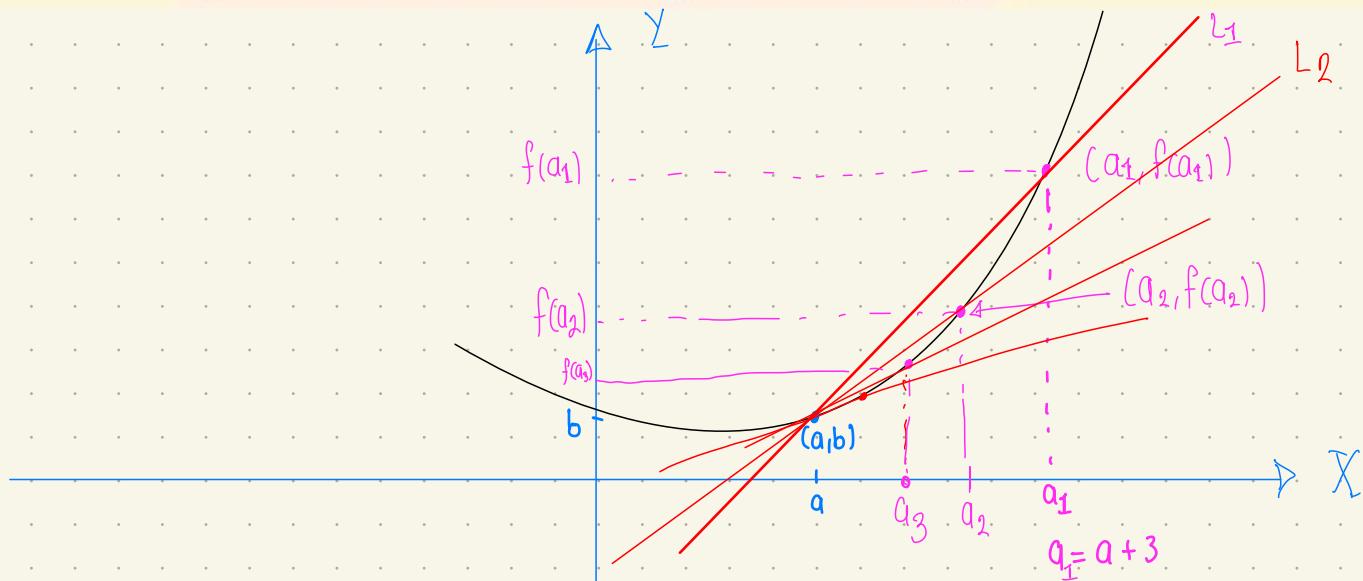
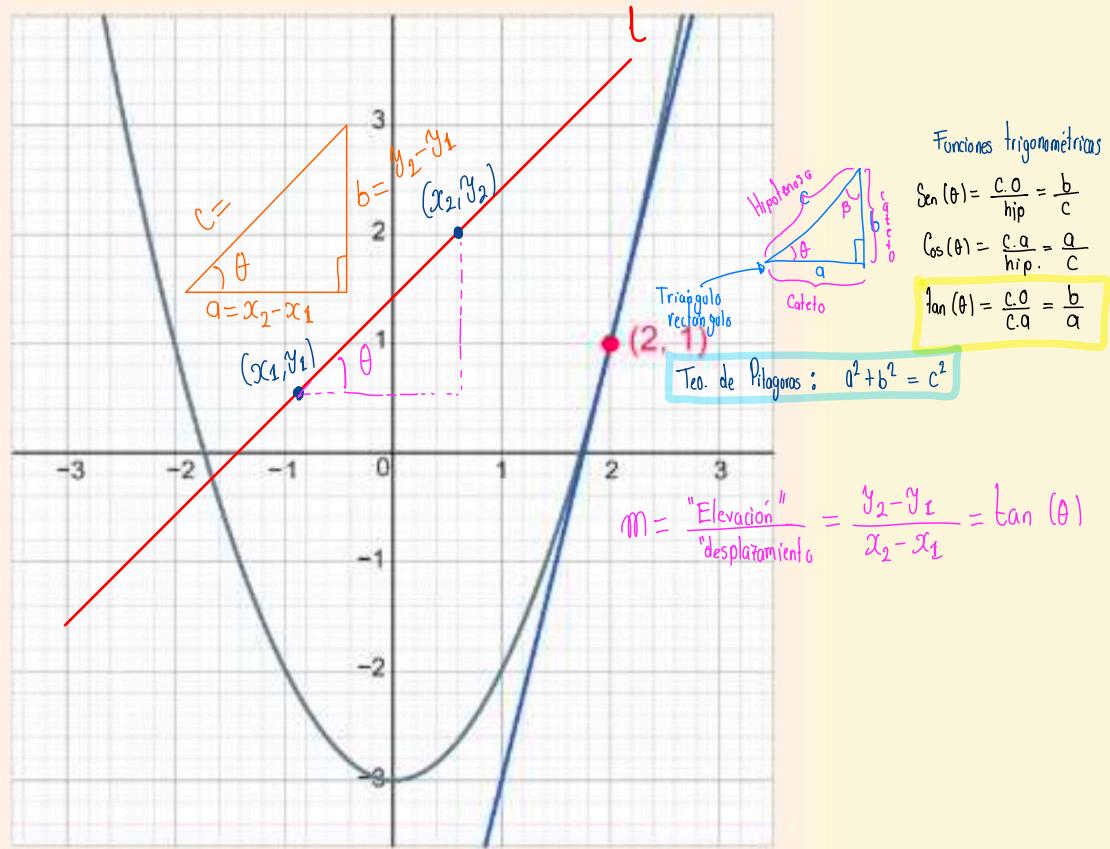
$$\Leftrightarrow y - 3 - 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 2 = 0$$

Ecuación general de
la linea recta que
pasa por $(1, 3)$ y
tiene pendiente $m=5$.

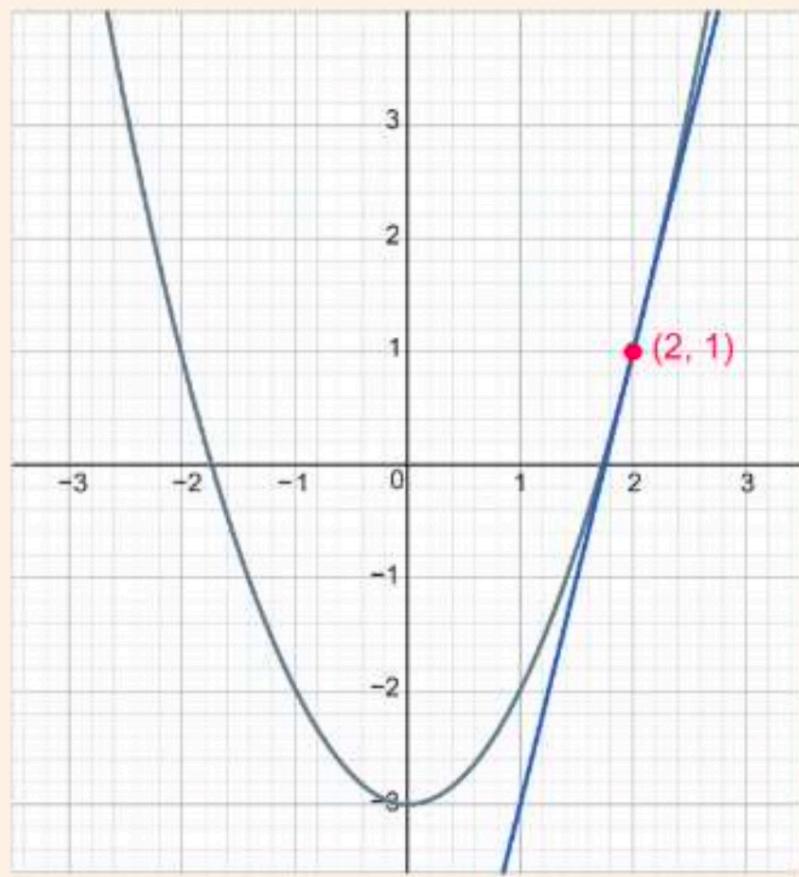
3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Pendiente de L_1 : $\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}$

Pendiente de L_2 : $\frac{f(a_2) - f(a)}{a_2 - a}$

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ en el punto $x=2$
Coincide con la pendiente de la recta tangente a
la gráfica de la función en el punto $(2, 1)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=2} = 2 \cdot x \Big|_{x=2}$$

$= 4$

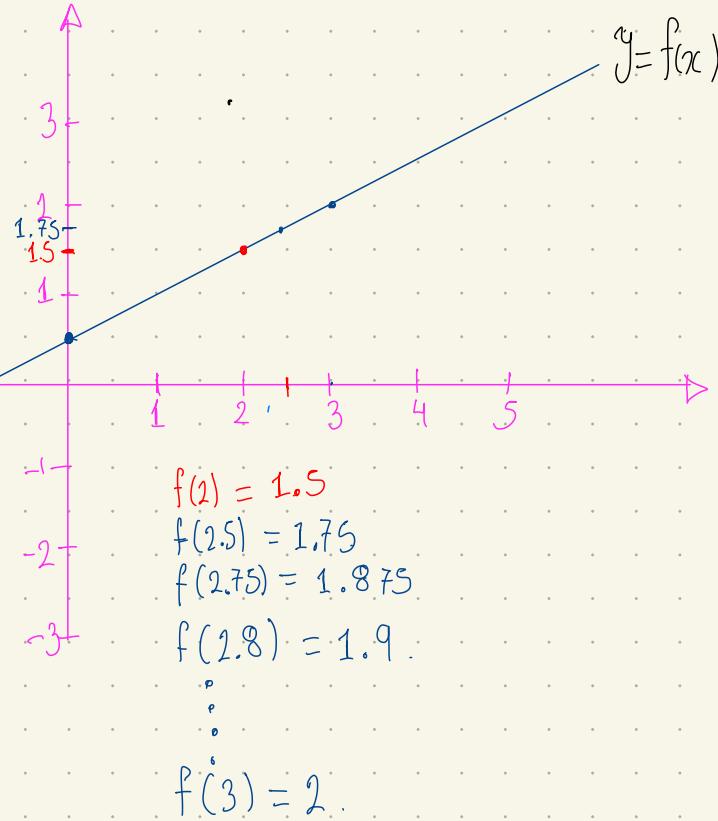
$$f'(2)$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

"A que valor (si existe) se acerca la función cuando x se acerca a 3?"

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$



la pendiente de la recta

tangente (en caso de que exista)
 a la gráfica de mi función
 en $(a, f(a))$.

$$= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= la derivada de la función f
 en el punto $x=a$.

Calcula los siguientes términos de la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, márcalos en la recta numérica y responde las siguientes dos preguntas.

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$a_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$$

$$a_{50} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$$

$$a_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

$$a_{500} = 1 - \frac{1}{500} = 0.998$$

$$a_{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Los puntos a_1 , a_2 y a_3 ya están marcados en la recta numérica, ahora marca los valores a_n que obtuviste.



a) ¿Qué pasa con los valores de a_n cuando n va creciendo?

.....

b) ¿Qué crees que pase si calculas a_{5000} , a_{10000} y a_{50000} ? ? 0.99998

.....

Problemario.

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

$$f(x) = x^2 + 2$$

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$ $a=1$

Solución:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{Def: de } m_{\tan} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2] - [1^2 + 2]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1^2 + 2 \cdot 1 \cdot h + h^2 + 2] - 3}{h}$$

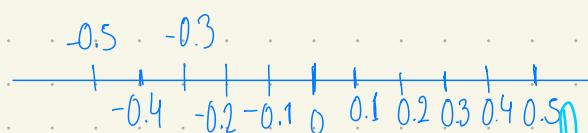
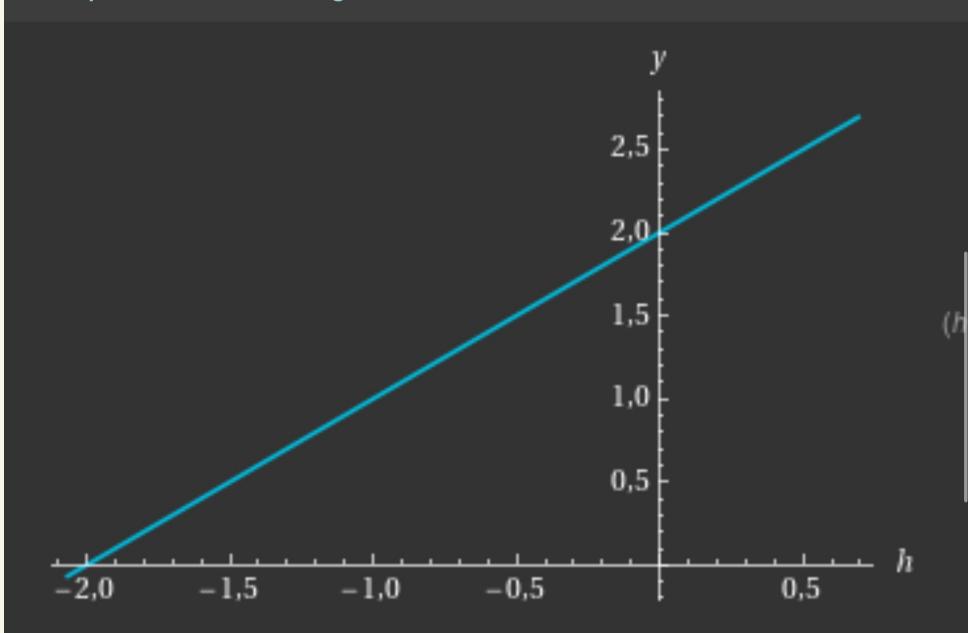
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h + 3) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 3 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

h	$\frac{h^2 + 2h}{h}$
-0.5	1.5
-0.4	1.6
-0.3	1.7
-0.2	1.8
-0.1	1.9
0	2
0.1	2.1
0.2	2.2
0.3	2.3
0.4	2.4
0.5	2.5

Representaciones gráficas



Cuando $h \neq 0$

$$\frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 = 0 + 2 = 2$$

Si $f(h) = g(h)$ para todo $h \neq 0$
ent. $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)$

Prop. de límites:
Si f es una función polinómica i.e.
 $f(h) = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \dots + a_0$
 $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0)$.

• $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$

Límite de los
Pendientes de los
rectas secantes cuando
 $x=1$ y esto sabemos
que es igual a la
Pendiente de la recta tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x=1$ es: 2

i.e.

$$\underline{m_{\text{tan}} = 2}$$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

$$f(x) = x^2 + 2 \quad , \quad x=1 \quad , \quad y = f(1) = 3$$

$$m_{tan} = 2, \quad (1, 3)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

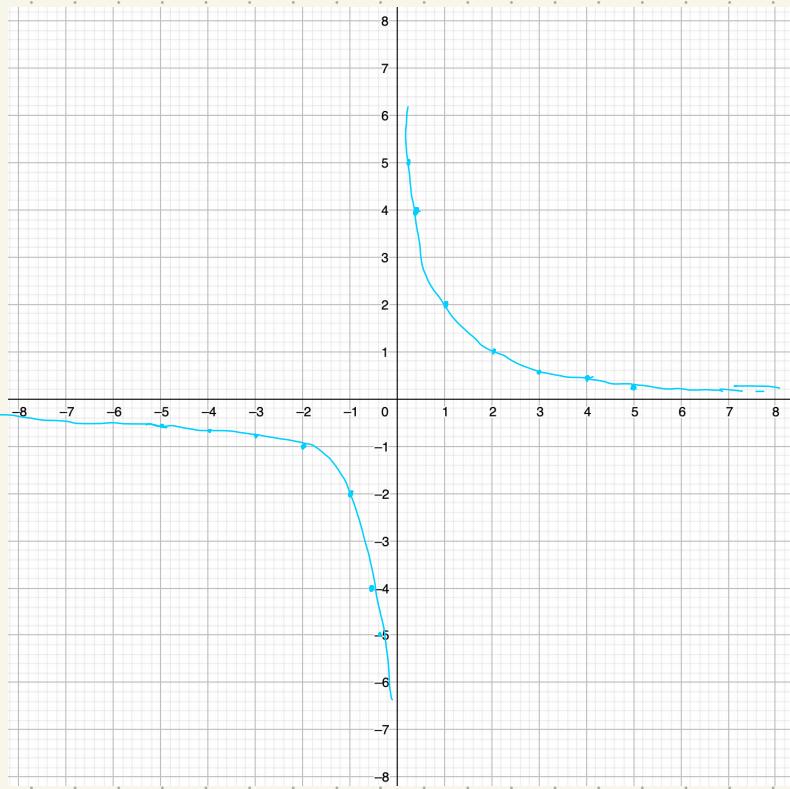
$$\Leftrightarrow y = 2x - 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 2x + 1}$$

Ecuación de la recta tangente a
la gráfica de la función f
en el punto $x=1$.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

x	$f(x) = \frac{2}{x}$
-5	$\frac{2}{-5} = -0.4$
-4	-0.5
-3	-0.666
-2	-1
-1	-2
0	⚠️
1	2
2	1
3	0.6666
4	0.5
5	0.4



x	$F(x)$
-5	-0.4
-4	-0.5
-3	-0.6666666666666667
-2	-1
-1	-2
0	⚠️
1	2
2	1
3	0.6666666666666667
4	0.5
5	0.4

x	$F(x)$
-1	-2
-0.9	-2.222222222222222
-0.8	-2.5
-0.7	-2.85714285714286
-0.6	-3.333333333333333
-0.5	-4
-0.4	-5
-0.3	-6.666666666666667
-0.2	-10
-0.1	-20
0	⚠️
0.1	20
0.2	10
0.3	6.666666666666667
0.4	5
0.5	4
0.6	3.333333333333333
0.7	2.85714285714286
0.8	2.5
0.9	2.222222222222222
1	2

Geogebra

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en

$$x = 2$$

$$a = 2$$

Solución

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{4 - 2(2+h)}{2(2+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-2h]}{2(2+h)} \div h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2h) \cdot 1}{2h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h}$$

$$f(a+b) = \frac{2}{a+b}$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f(a) = \frac{2}{a}$$

$$\textcircled{f(1+1)} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$4 - 4 - 2h = -2h$$

(-1) ✓

$$= \frac{-1}{2+0}$$

$$= \frac{-1}{2} \quad \therefore m_{\tan} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad (2, f(2)) = (2, 1) \\ (a, b)$$

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{a+h} - \frac{2}{a}}{h}$$

$$2a - 2a - 2h = -2h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{2a - 2(a+h)}{a(a+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{-2h}{a(a+h)} \right]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-2h}{a(a+h)} \right] \stackrel{0}{\div} \frac{h}{1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-2}{a(a+0)}$$

$$= \frac{-2}{a^2}$$

Paru $a = 2$

$$m_{\tan} \Big|_{a=2} = \frac{-2}{2^2} = \frac{-1}{2}$$

$$m_{\tan} = \frac{-2}{a^2}$$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

Solución:

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

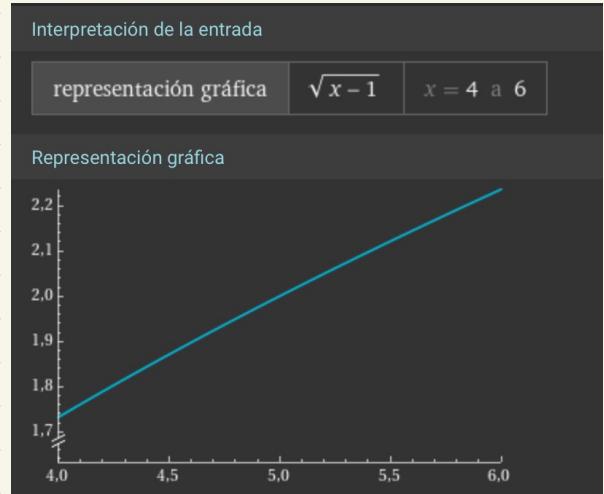
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(5+h)-1} - \sqrt{5-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+4} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+4) - 4}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 1/4$$

Por lo tanto, $m_{tan} = \frac{1}{4}$.



$$x \quad f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1	0
2	1
3	1.41
4	1.73
5	2
6	2.23
7	2.44
8	2.64

$$x = -5 \quad ? \quad f(-5) ?$$

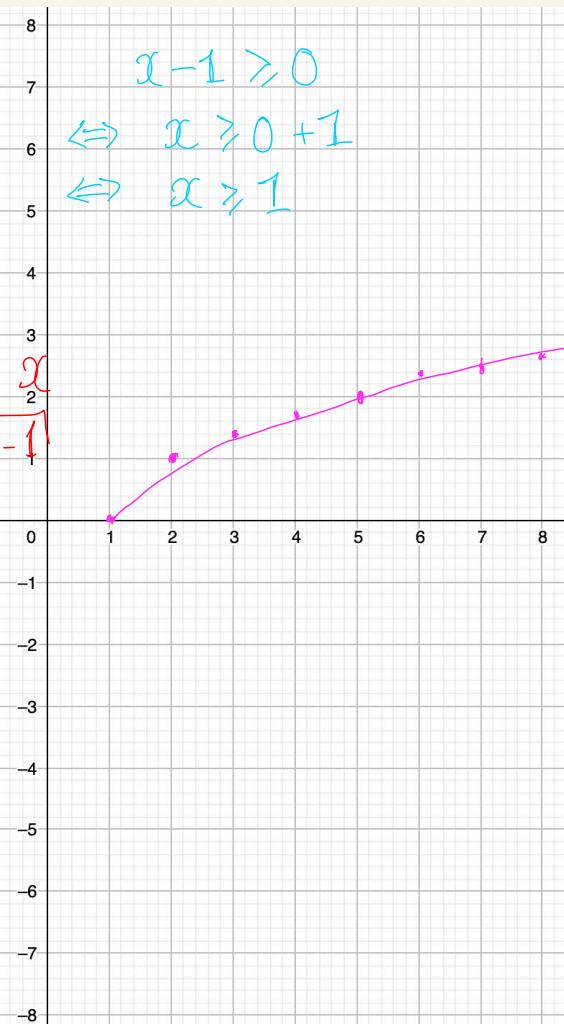
$$f(-5) = \sqrt{-5-1} \\ = \sqrt{-6}$$

¿Porque los valores de x en la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ estan bien?

$$x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



x	F(x)
1	0
2	1
3	1.4142135623731
4	1.73205080756888
5	2
6	2.23606797749979
7	2.44948974278318
8	2.64575131106459
9	2.82842712474619
10	3
11	3.16227766016838
12	3.3166247903554
13	3.46410161513775
14	3.60555127546399
15	3.74165738677394
16	3.87298334620742
17	4
18	4.12310562561766
19	4.24264068711928
20	4.35889894354067
21	4.47213595499958

ACTIVIDAD PARA EL CUADERNO

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x .

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$

2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$

4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$

8. $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

11. $f(x) = -2x^3 + x$, $x = 2$ 12. $f(x) = 8x^3 - 4$, $x = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x = -1$ 14. $f(x) = \frac{4}{x - 1}$, $x = 2$