Notas asesorías Cálculo Diferencial

Funciones

Función: Regla de correspondencia/regla matemática que asigna a cada valor de entrada un único valor de salida

Función

$x \longrightarrow$ Regla de correspondencia $\longrightarrow f(x)$

Valor de entrada

$x \in \mathbb{R}.$ $\qquad f(x) \in \mathbb{R}.$

Ejemplos:

Regla de correspondencia

∘) $f(x) = x+1$

$f(1) = 1+1 = 2 \implies f(1) = 2.$

$x = 1$

$f(5) = 5+1 = 6 \implies f(5) = 6$

Funciones Constantes.

$f(x) = c$

Es un valor constante.

Ejemplos:

- $f(x) = 10$

$$f(0) = 10 \quad , \quad f(-5) = 10 \ , \quad f(11) = 10 .$$

Funciones polinomiales.

grado de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + \underbrace{a_0 \cancel{x^0}^{\,1}}_{a}$$

Coeficiente principal.

$a_n \neq 0$,

n=1 : Función Lineal (función polinomial de grado 1).

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

$$f(x) = ax + b \ , \quad a, b \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$$

n=2 : Función Cuadrática (Función polinomial de grado 2)

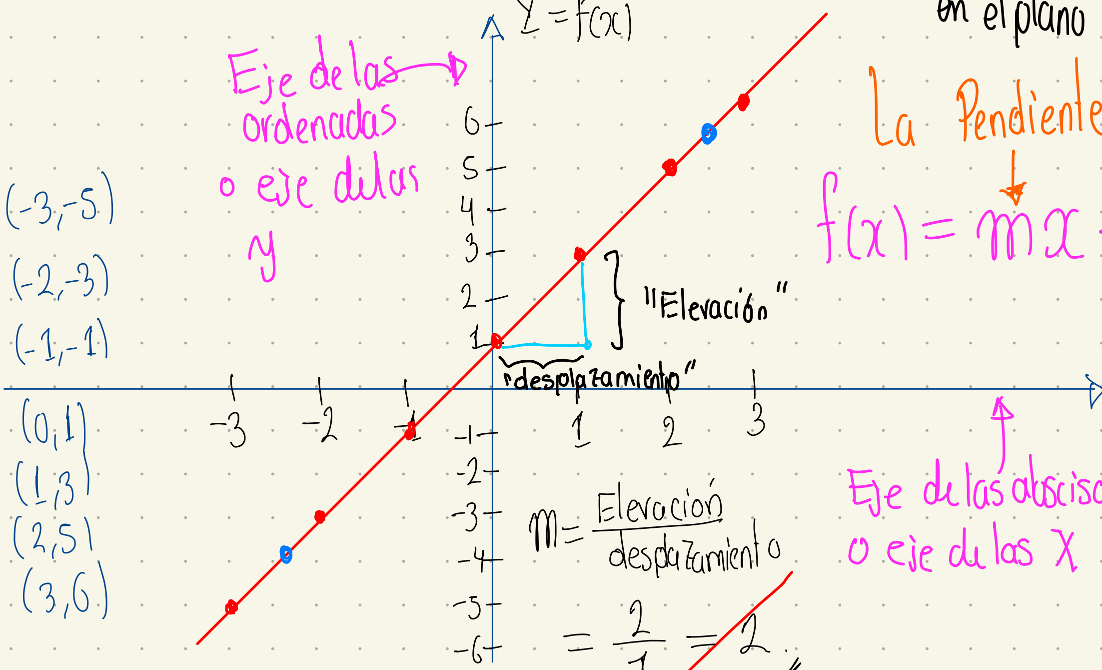
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0 .$$

$f(x) = 2x + 1$

$(x, f(x))$ ← Representa un punto en el plano Cartesiano

x	$f(x)$	
-3	-5	$(-3,-5)$
-2	-3	$(-2,-3)$
-1	-1	$(-1,-1)$
0	1	$(0,1)$
1	3	$(1,3)$
2	5	$(2,5)$
3	6	$(3,6)$



$m = \dfrac{\text{Elevación}}{\text{desplazamiento}} = \dfrac{2}{1} = 2$

La Pendiente de la recta

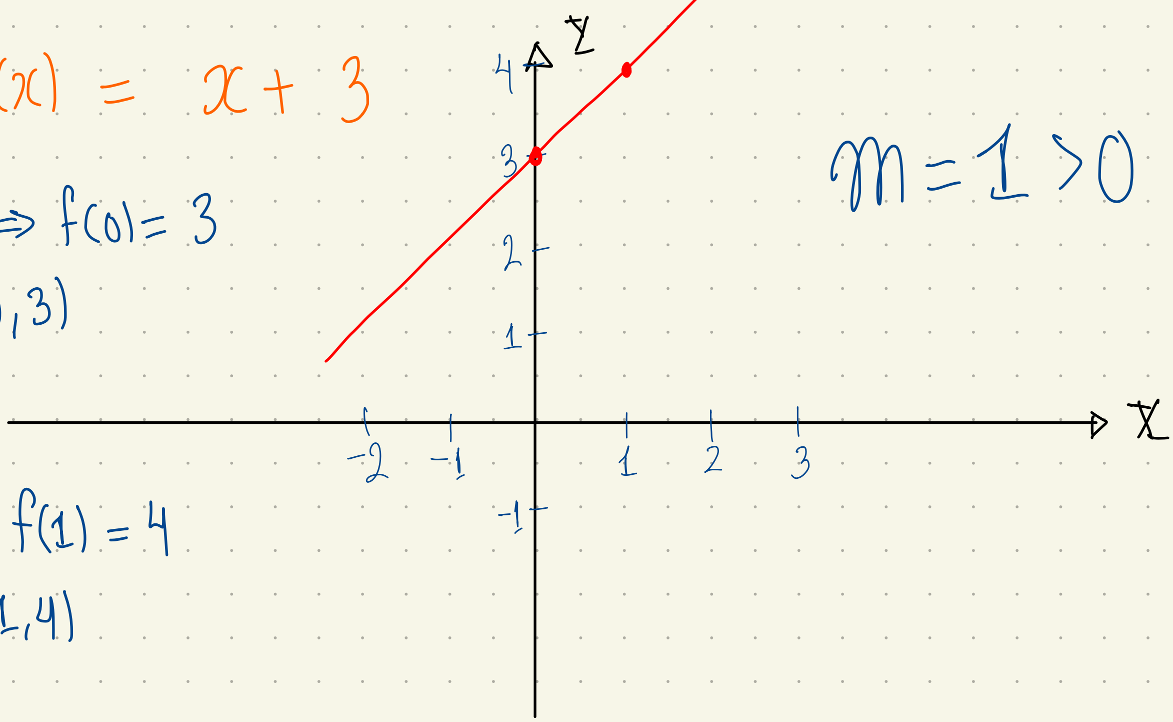
$f(x) = mx + b$

Ordena al Origen.

2) $f(x) = x + 3$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3$

$\Rightarrow (0,3)$



$m = 1 > 0$

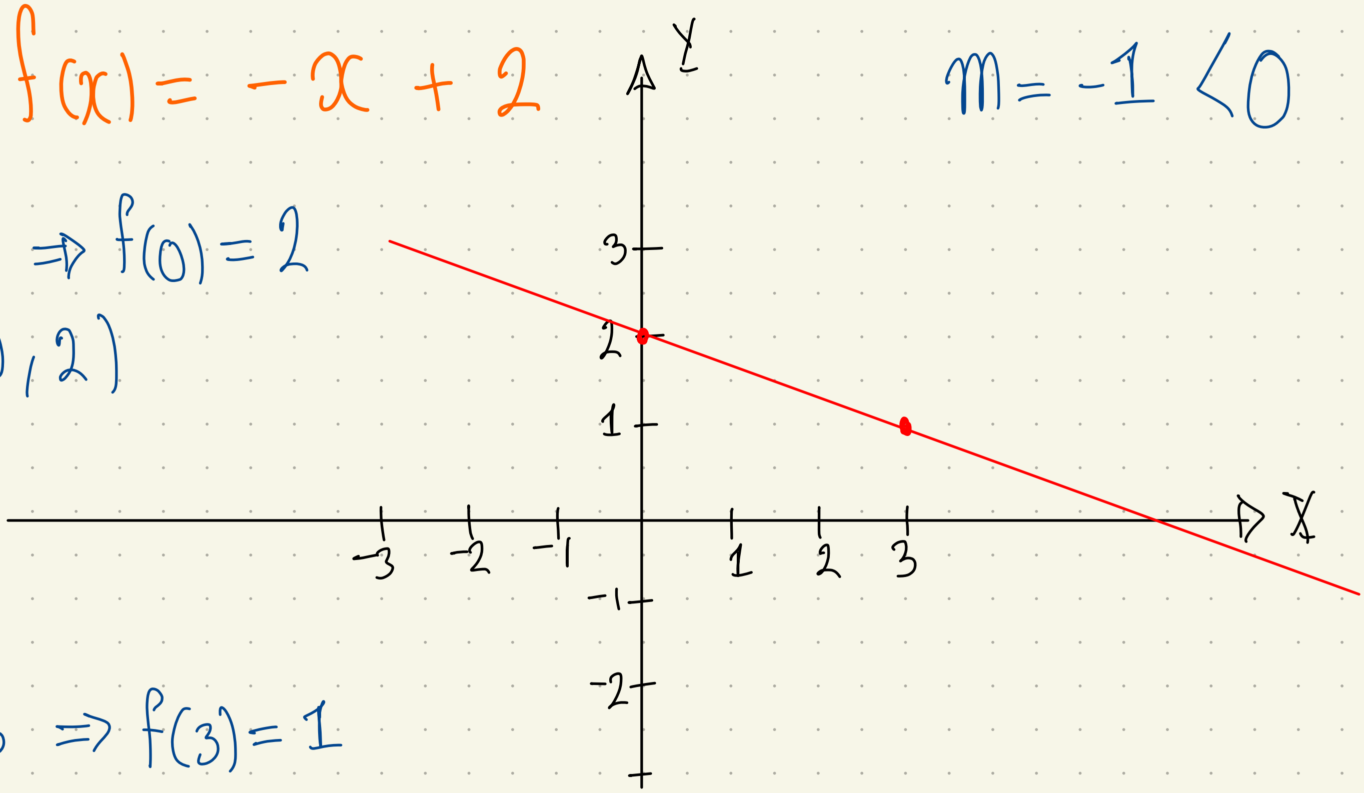
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 4$

$\Rightarrow (1,4)$

③ $f(x) = -x + 2$ $\qquad m = -1 < 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

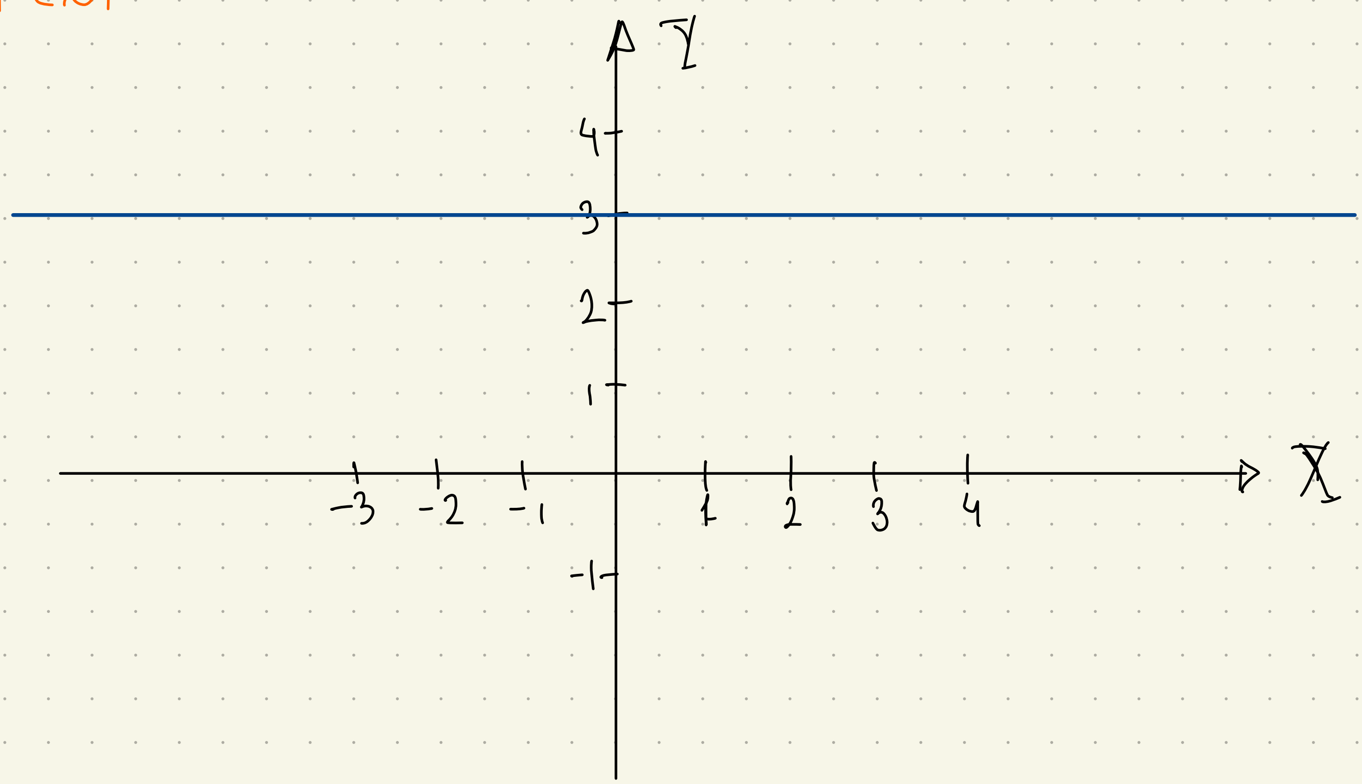
$(0, 2)$



$x = 3 \Rightarrow f(3) = 1$

$(3, 1)$

④ $f(x) = 0 \cdot x + 3 = 3$



La forma general de una ecuación lineal es:

$$Ax + By + C = 0$$

$f(x) = 2x + 1$, $\quad y = 2x + 1$

Variable dependiente (depende de los valores que tome x)

Variable independiente

$$y = 2x + 1 \iff 2x - y + 1 = 0$$

= Ecuaciones de la línea recta =

⊙ Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

i) (a, b) punto por el que pasa la línea recta

ii) m pendiente.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y - b = m(x - a)}$$

Ecuación punto Pendiente de una línea recta.

la ecuación general

Ejemplo: Encuentra la ecuación ~~Punto - pendiente~~ de la línea recta que pasa por el punto $(1,3)$ y que tiene Pendiente $m=5$.

Ecuación punto - pendiente de la línea recta en cuestión

$$y-3=5(x-1)$$

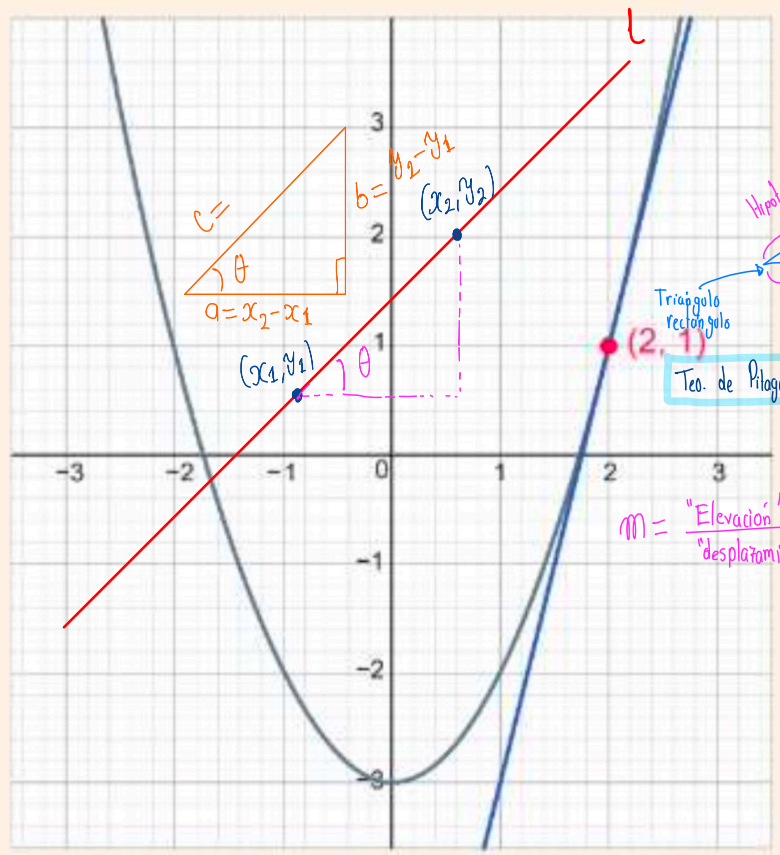
$$\Longleftrightarrow \quad y-3-5x+5=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y-5x+2=0$$

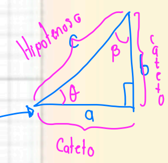
$$\Longleftrightarrow \quad 5x-y-2=0$$

Ecuación general de la línea recta que pasa por $(1,3)$ y tiene pendiente $m=5$.

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Funciones trigonométricas



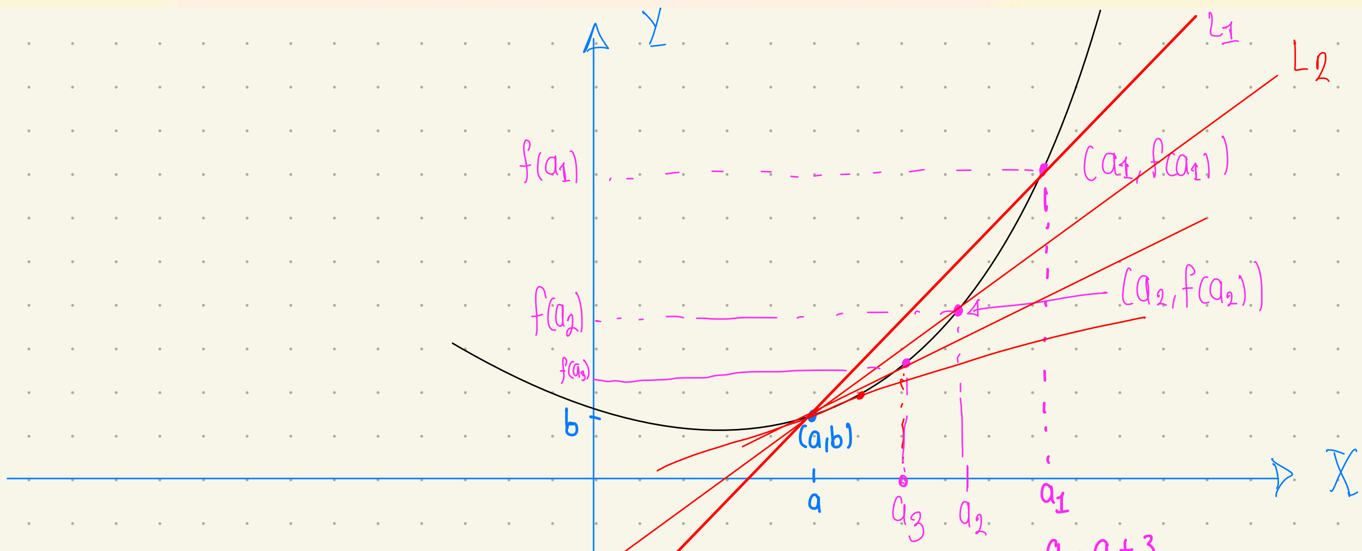
$Sen(\theta) = \frac{c.o}{hip} = \frac{b}{c}$

$Cos(\theta) = \frac{c.a}{hip.} = \frac{a}{c}$

$\boxed{tan(\theta) = \frac{c.o}{c.a} = \frac{b}{a}}$

$\boxed{\text{Teo. de Pitagoras}: \ a^2 + b^2 = c^2}$

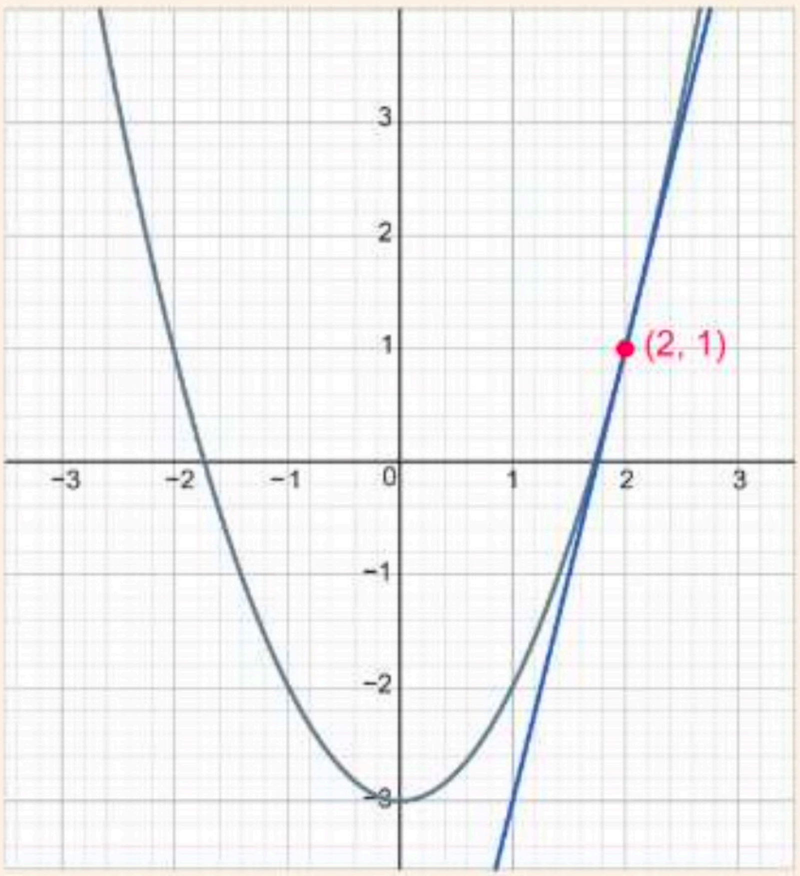
$m = \frac{\text{"Elevación"}}{\text{"desplazamiento"}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tan(\theta)$



Pendiente de l_1 : $\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}$

Pendiente " L_2 : $\frac{f(a_2) - f(a)}{a_2 - a}$

3. Si $f(x) = x^2 - 3$, encuentra por medio de aproximaciones la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $A(2, 1)$.



Derivada de la función $f(x) = x^2 - 3$ en el punto $x = 2$ Coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. en el punto $(2, 1)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=2} = 2 \cdot x \Big|_{x=2}$$

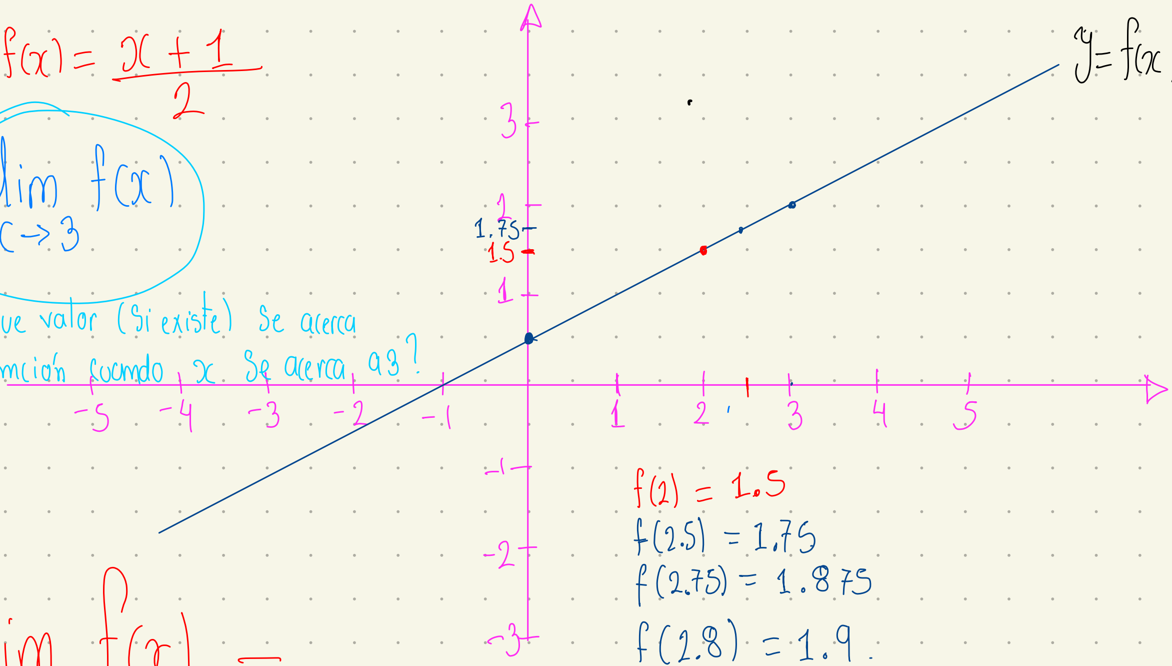
$$= 4$$

$f'(2)$

$f(x) = \frac{x+1}{2}$

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

"A que valor (si existe) se acerca la función cuando x se acerca a 3?



$$\lim_{x \to 3} f(x) =$$

$f(2) = 1.5$
$f(2.5) = 1.75$
$f(2.75) = 1.875$
$f(2.8) = 1.9$
$\vdots$
$f(3) = 2.$

La pendiente de la recta tangente (En caso de que exista) a la gráfica de una función en $(a, f(a))$.

$$= \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= La derivada de la función f en el punto $x = a$.

Calcula los siguientes términos de la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, márcalos en la recta numérica y responde las siguientes dos preguntas.

$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$

$a_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$

$a_{50} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$

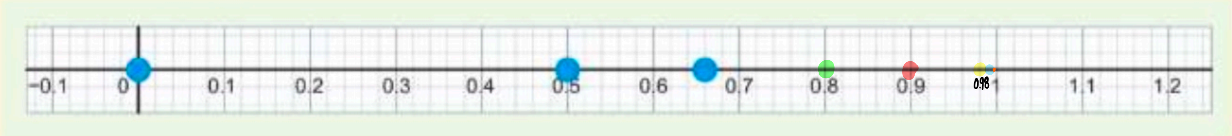
$a_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$

$a_{500} = 1 - \frac{1}{500} = 0.998$

$a_{1\,000} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Los puntos a_1, a_2 y a_3 ya están marcados en la recta numérica, ahora marca los valores a_n que obtuviste.



a) ¿Qué pasa con los valores de a_n cuando n va creciendo?

....

....

b) ¿Qué crees que pase si calculas a_{5000}, a_{10000} y a_{50000}? 0.99998

....

....

Problemario.

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$

$f(x) = x^2+2$

1.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$, en $x = 1$ $a=1$

Solución:

Def. de m_{tan}

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(x+h)$ $f(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2+2] - [1^2+2]}{h}$$

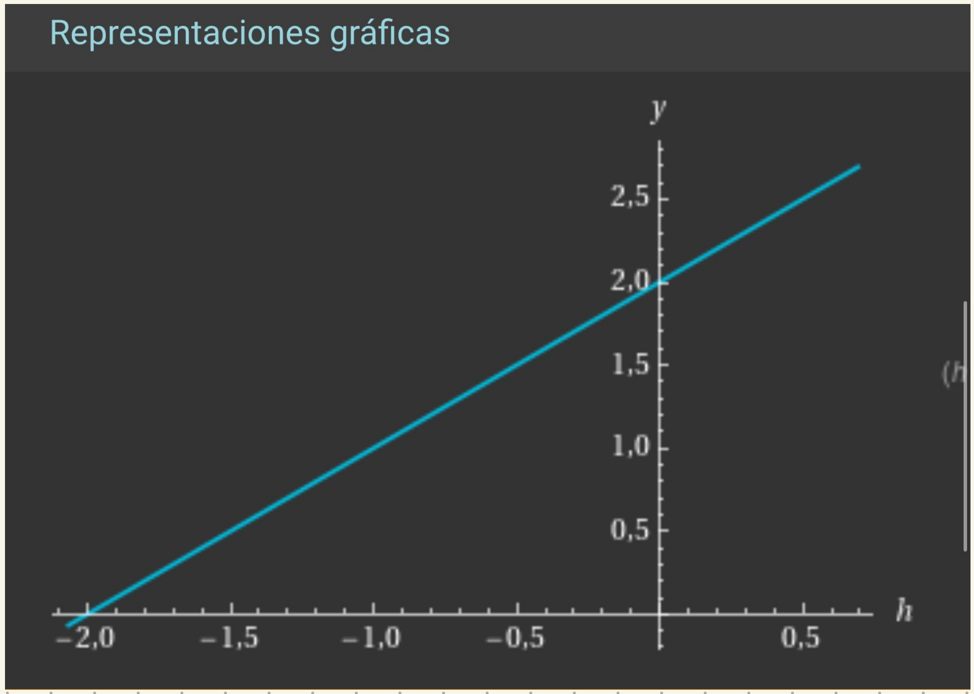
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1^2+2\cdot 1\cdot h + h^2+2] - 3}{h}$$

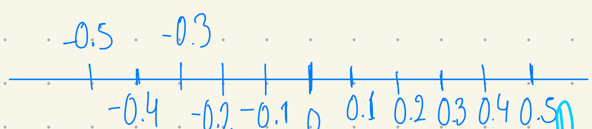
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+2h+3) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+3-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = 2$$

h	$\frac{h^2+2h}{h}$
-0.5	1.5
-0.4	1.6
-0.3	1.7
-0.2	1.8
-0.1	1.9
0	2
0.1	2.1
0.2	2.2
0.3	2.3
0.4	2.4
0.5	2.5





Cuando $h \neq 0$

$$\frac{h^2+2h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = h+2$$

Prop. de límites:
Si f es una función polinomica i.e.
$f(h) = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \dots + a_0$
$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(h) = f(0)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} h+2 = 0+2 = 2.$$

Si $f(h) = g(h)$ para todo $h \neq 0$
ent. $\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} g(x)$

$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = 2$

límite de las
Pendiente de las
rectas secante cuando
$x=1$ y esto sabemos
que es igual a la
Pendiente de la recta tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x=1$ es: 2

i.e.

$$\underline{m_{tan} = 2}$$

2.- Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

$f(x) = x^2 + 2$, $x = 1$, $y = f(1) = 3$

$m_{tan} = 2$, $(1, 3)$

$y - 3 = 2(x - 1)$

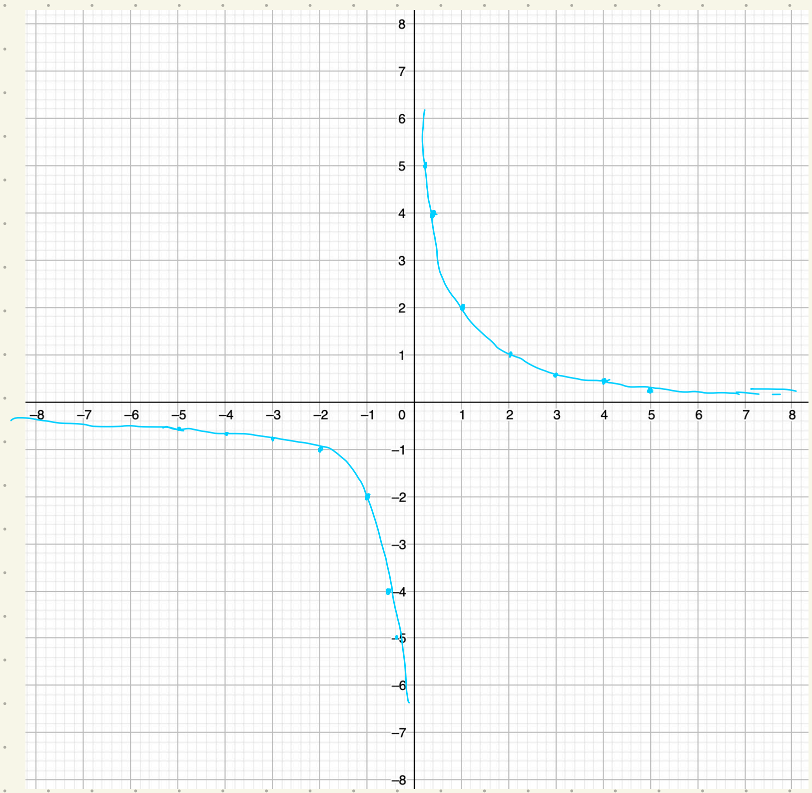
$\iff y = 2x - 2 + 3$

$\iff \underline{y = 2x + 1}$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = 1$.

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$

x	$f(x) = \frac{2}{x}$
-5	$\frac{2}{-5} = -0.4$
-4	-0.5
-3	$-0.66\overline{6}$
-2	-1
-1	-2
0	
1	2
2	1
3	$0.666\overline{6}$
4	0.5
5	0.4



X	F(x)
-5	-0.4
-4	-0.5
-3	-0.666666666666667
-2	-1
-1	-2
0	
1	2
2	1
3	0.666666666666667
4	0.5
5	0.4

X	F(x)
-1	-2
-0.9	-2.22222222222222
-0.8	-2.5
-0.7	-2.85714285714286
-0.6	-3.33333333333333
-0.5	-4
-0.4	-5
-0.3	-6.66666666666667
-0.2	-10
-0.1	-20
0	
0.1	20
0.2	10
0.3	6.66666666666667
0.4	5
0.5	4
0.6	3.33333333333333
0.7	2.85714285714286
0.8	2.5
0.9	2.22222222222222
1	2

Geogebra

3.- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 2$ $a=2$

Solución

$$m_{tan} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$f(a+b) = \frac{2}{a+b}$

$f(x) = \frac{2}{x}$

$f(a) = \frac{2}{a}$

$f(1+1) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$f(2)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h}$$

$\cancel{4} - \cancel{4} - 2h = -2h$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{4 - 2(2+h)}{2(2+h)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{-2h}{2(2+h)}\right] \div h$$

$(-1)\ \cancel{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2h)\cdot 1}{\cancel{2h}(2+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2+h}$$

$$= \frac{-1}{2+0}$$

$$= \frac{-1}{2} \qquad \therefore m_{tan} = -\frac{1}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $(2, f(2)) = (2, 1)$

(a, b)

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad \boxed{a = 2}$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{a+h} - \frac{2}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{2a - 2(a+h)}{a(a+h)}\right]}{h}$$

$$\cancel{2a} - \cancel{2a} - 2h = -2h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{-2h}{a(a+h)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2h}{a(a+h)}\right] \div \frac{h}{1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(a(a+h))}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-2}{a(a+0)}$$

$$= \frac{-2}{a^2}$$

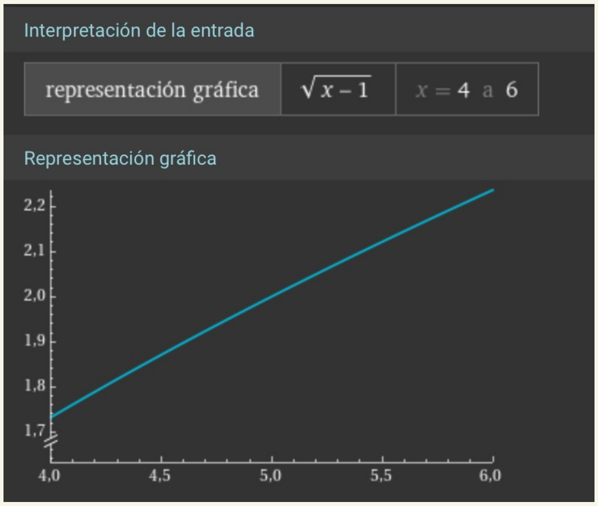
$$\therefore \boxed{m_{tan} = \frac{-2}{a^2}}$$

Para $a = 2$

$$m_{tan}\Big|_{a=2} = \frac{-2}{2^2} = \frac{-1}{2}$$

4.- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$

Solución:



$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(5+h)-1} - \sqrt{5-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+4} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}{(\sqrt{h+4} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h+\cancel{4}) - \cancel{4}}{h(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{h+4} + 2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = 1/4$$

Por lo tanto, $m_{tan} = \frac{1}{4}$.

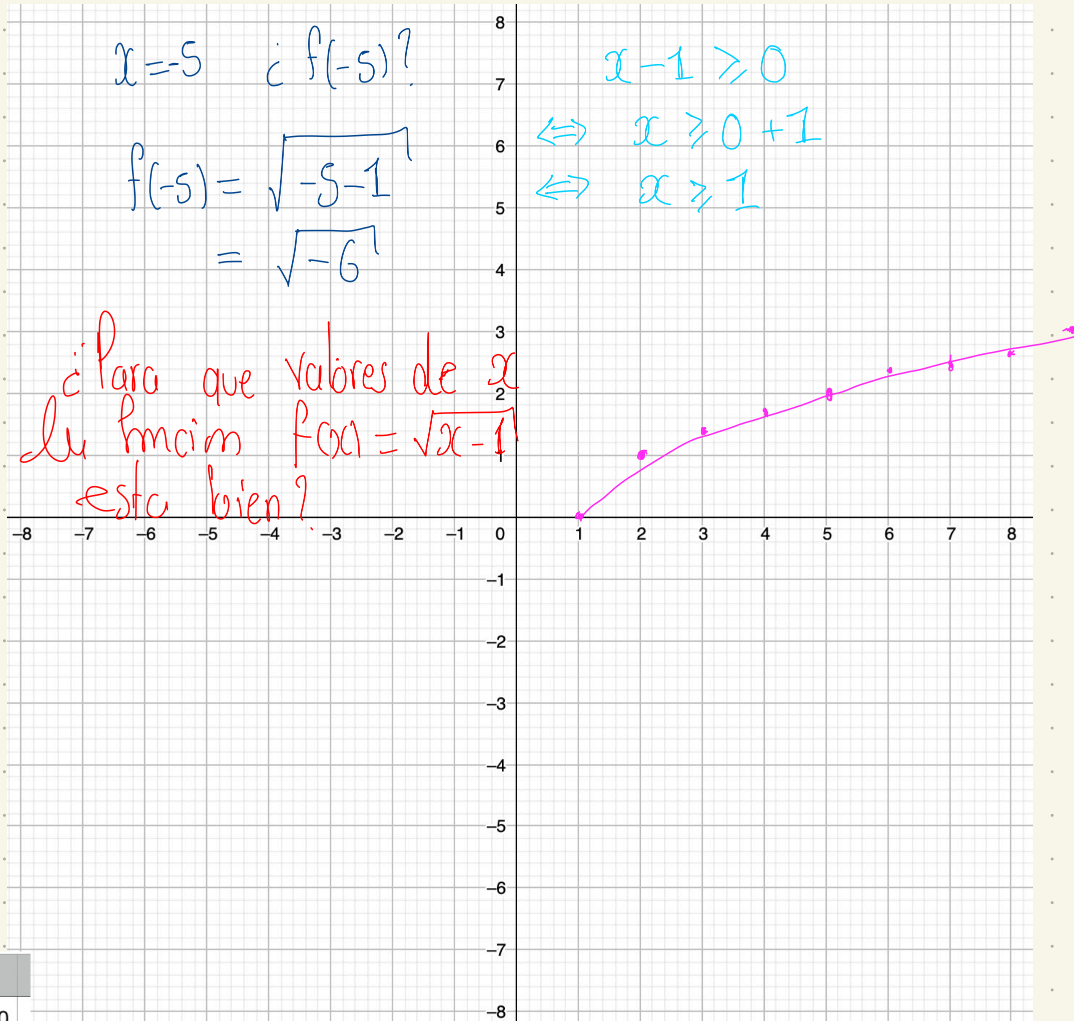
x	$f(x)=\sqrt{x-1}$
1	0
2	1
3	1.41...
4	1.73...
5	2
6	2.23...
7	2.44
8	2.64

$x=-5$ ¿$f(-5)$?

$$f(-5)=\sqrt{-5-1}$$
$$=\sqrt{-6}$$

¿Para que valores de x la funcion $f(x)=\sqrt{x-1}$ esta bien?

$$x-1\geq 0$$
$$\iff x\geq 0+1$$
$$\iff x\geq 1$$



X	F(x)
1	0
2	1
3	1.4142135623731
4	1.73205080756888
5	2
6	2.23606797749979
7	2.44948974278318
8	2.64575131106459
9	2.82842712474619
10	3
11	3.16227766016838
12	3.3166247903554
13	3.46410161513775
14	3.60555127546399
15	3.74165738677394
16	3.87298334620742
17	4
18	4.12310562561766
19	4.24264068711928
20	4.35889894354067
21	4.47213595499958

ACTIVIDAD PARA EL CUADERNO

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x.

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$

2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$

4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x. Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$

8. $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

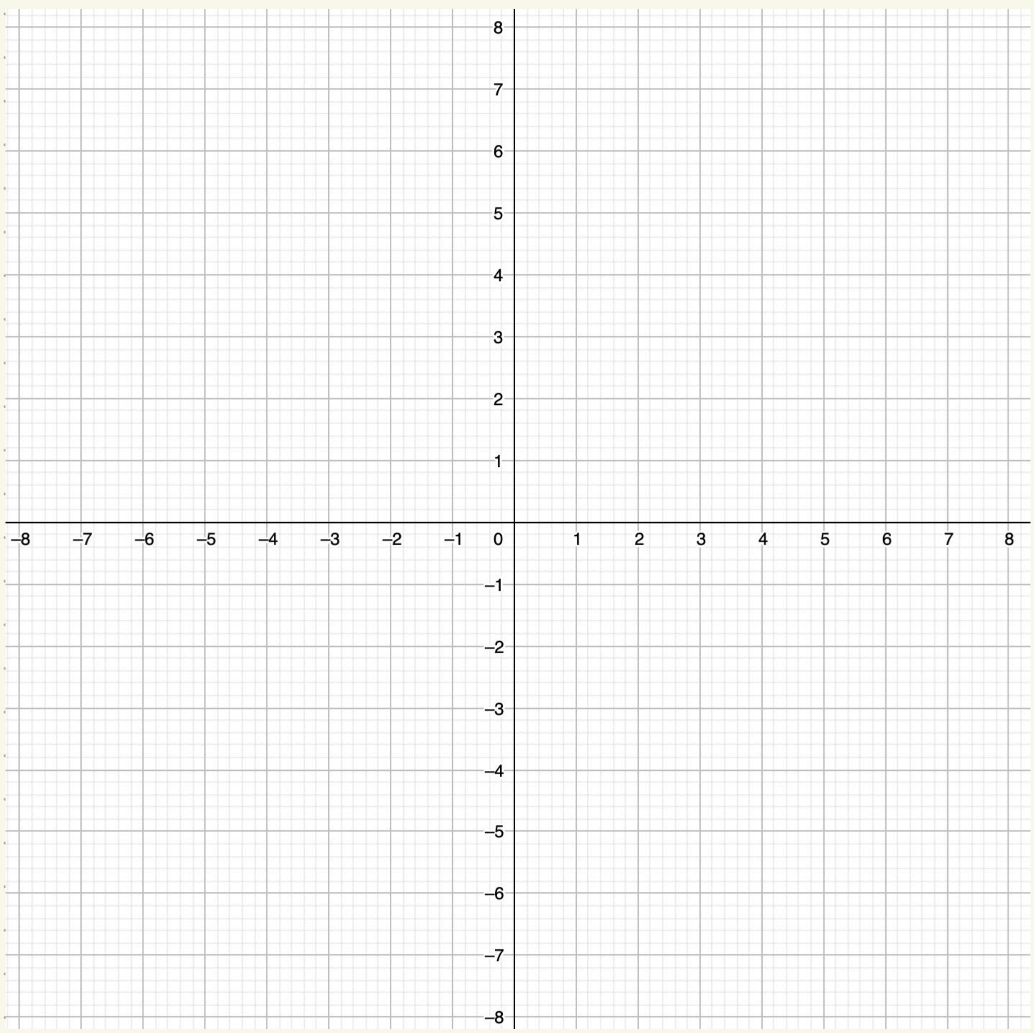
10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

11. $f(x) = -2x^3 + x$, $x = 2$

12. $f(x) = 8x^3 - 4$, $x = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x = -1$

14. $f(x) = \frac{4}{x - 1}$, $x = 2$



① $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$ / $a = 3$

$h(x) = x^n$

$h'(x) = n x^{n-1}$

$g(x) = c$

$g'(x) = 0$

$h(x) = f(x) \pm g(x)$

$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Definición 4.1.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a. Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $m_{\tan}$.

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(3+h)^2 - 6] - [3^2 - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[9 + 6h + h^2 - 6] - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6 + h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6 + h$$

$$= 6 + 0$$

$$= 6$$

$\therefore$ $m_{\tan} = 6$

Eco. punto – pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$m_{\tan}$

$(x_1, y_1) = (3, 3)$

$x_1 = 3$, $y_1 = f(x_1)$

$= f(3)$

$= 3$

$m_{tan} = 6$, $(x_1, y_1) = (3,3)$

$$y - 3 = 6(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 6x - 18 + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y = 6x - 15}$$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6$ en el punto $(3,3)$.

(14) $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$, $x = 2$ / $a = 2$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{4}{(2+h)-1}\right] - \left[\dfrac{4}{2-1}\right]}{h}$$

$$\frac{4}{1+h} - \frac{4}{1} = \frac{\cancel{4} - \cancel{4} - 4h}{1+h} = \frac{-4h}{1+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{4}{1+h} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-4h}{1+h}}{h}$$

$$\frac{-4h}{1+h} \div \frac{h}{1} = \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)} = \frac{-4}{1+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{1+h}$$

$$= \frac{-4}{1+0}$$

$$= -4.$$

$$\therefore \; m_{tan} = -4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$k(x) = \frac{\overset{f(x)}{4}}{\underset{g(x)}{x-1}}$$

$$k'(x) = \frac{\cancel{(x-1) \cdot 0}^{0} - 4 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad k'(2) = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$m_{tan} = -4 \;, \quad x_1 = 2 \;, \quad y_1 = f(x_1) = f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$$

$$(2, 4)$$

$$y - 4 = -4(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -4x + 8 + 4$$

$\iff \quad y = -4x + 12$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{4}{x-1}$ en el punto $(2,4)$.

16. $f(x) = 4 - \frac{8}{x}, x = -1$

$-8 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -8 \cdot \left(-1 \cdot x^{-2}\right)$

$= +8x^{-2}$

$= \frac{8}{x^2}$

$x = -1$

$= \frac{8}{1} = 8$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[4 - \frac{8}{(-1+h)}\right] - \left[4 - \frac{8}{-1}\right]}{h}$$

$-4 + 4h - 8 \over h-1$ $= \frac{4h-12}{h-1}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{4(-1+h) - 8}{h-1}\right] - 12}{h}$$

$\frac{4h-12}{h-1} - 12 = \frac{4h\cancel{-12} - 12h \cancel{+12}}{h-1}$

$= \frac{-8h}{h-1}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4h-12}{h-1} - 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{-8h}{h-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-8h}{h-1}\right] \div h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-8\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-8}{h-1}$$

$$= \frac{-8}{0-1} \qquad \therefore \underline{m_{tan} = 8}$$

$$= \underline{8}$$

$$x_1 = -1 \quad , \quad \Rightarrow y_1 = f(-1) = 4 - \frac{8}{(-1)} = 4+8$$

$$(-1, 12) \qquad = 12$$

$$y - 12 = 8(x+1)$$

$$\Leftrightarrow y = 8x + 8 + 12$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = 8x + 20}$$

⑧ $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

$$-3(-1+h)^2 = -3(1-2h+h^2)$$
$$= -3 + 6h - 3h^2$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[-3(-1+h)^2 + 10\right] - \left(-3(-1)^2 + 10\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3 + 6h - 3h^2 + 10 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h^2 + 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[-3h + 6\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} -3h + 6$$

$$= -3(0) + 6$$

$$= 6$$

$\therefore$ $m_{tan} = 6$

$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-1) = 7$

$(-1, 7)$

$y - 7 = 6(x - (-1)) \Leftrightarrow y - 7 = 6x + 6$

$$\iff y = 6x + 6 + 7$$

$$\iff y = 6x + 13$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -3x + 1$ en el punto $(-1, 7)$ es:

$$y = 6x + 13$$

(9) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$(1+h)^2 - 3(1+h)$$
$$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h$$
$$= h^2 - h - 2$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - h - \cancel{2} + \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} h - 1$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$\therefore \quad m_{tan} = -1$

$x_1 = 1 \quad y \quad y_1 = f(1) = -2 \quad , \quad (1,-2)$

$$y-(-2) = (-1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y+2 = -x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -x+1-2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y = -x-1}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto $(1,-2)$ es:

$$\underline{y = -x-1}$$

¿ Pendiente en $3/2$?

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3/2+h) - f(3/2)}{h}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\left(\frac{9}{4} + 3h + h^2\right) - \frac{9}{2} - 3h\right] - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \underbrace{\cancel{- \frac{9}{4} - \frac{9}{4}}}_{-9/2} \cancel{+ \frac{9}{2}}}{h}$$

$$-\frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h^{2-1} \qquad // \quad \frac{h^2}{h} = \frac{h \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = h$$

$$= \lim_{h \to 0} h$$

$$= 0.$$

$$m_{tan} = 0$$

$x_1 = 3/2 \quad , \quad y_1 = f(3/2) = (3/2)^2 - 3(3/2)$

$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \quad \frac{18}{4}$

$= -\frac{9}{4}$

$(3/2, -9/4)$

$y - (-9/4) = \cancel{0 \cdot (x - 3/2)} \to 0$

$\Rightarrow \quad y = -9/4$

(10) $f(x) = -x^2 + 5x - 3 \quad , \quad x = -2$

$-(x+h)^2 = -x^2 - 2xh - h^2$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h - 3] - [-x^2 + 5x - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-x^2} - 2xh - h^2 + \cancel{5x} + 5h \cancel{-3} + \cancel{x^2} \cancel{-5x} \cancel{+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 + 5h - 2xh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}[-h + 5 - 2x]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} -2x + 5 - h$$

$$= -2x + 5 - 0$$

$$= -2x + 5$$

$\therefore \quad m_{tan} = -2x + 5$

En el punto $x=-2$, $m_{tan} = -2(-2)+5 = 9$

$$\therefore \; m_{tan}\Big|_{x=-2} = 9$$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$m_{tan} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2+5x-3)$$

$$= \frac{d}{dx}(-x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \cancel{\frac{d}{dx}(3)}^{\,0}$$

$$= -\frac{d}{dx}(x^2) + 5\frac{d}{dx}(x^1)$$

$$= -2 \cdot x^{2-1 \; \to 1} + 5 \cdot 1 \cdot \cancel{x^0}^{\,1}$$

$$= -2 \cdot x + 5$$

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$

$$m_{\tan}\Big|_{x=-2} = 9$$

$x_1 = -2, \quad y_1 = f(-2) = -(-2)^2 + 5(-2) - 3$

$$= -4 - 10 - 3$$

$$= -17$$

$(-2, -17)$

$$y - (-17) = 9(x - (-2))$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 9x + 18 - 17$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y = 9x + 1}$$

$$f(x) = \frac{4}{x-1}, \quad x = 2.$$

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{(x+h)-1} - \frac{4}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cancel{4x} \cancel{-4} - \cancel{4x} - 4h + \cancel{4}}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4\cancel{h}}{\cancel{h}\,(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{(x-1)[(x+h)-1]}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \quad m_{tan} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$m_{tan}\Big|_{x=2} = \frac{-4}{(2-1)^2} = \frac{-4}{1^2} = -4 .$$

$$\therefore \underline{m_{tan} = -4}$$

$x_1 = 2$, $\quad y_1 = f(x_1) = \frac{4}{2-1} = \underline{4}$

$(2,4)$

$$y - 4 = -4(x-2)$$

$$\iff y = -4x + 8 + 4$$

$$\iff \underline{y = -4x + 12}$$