

+

×

-

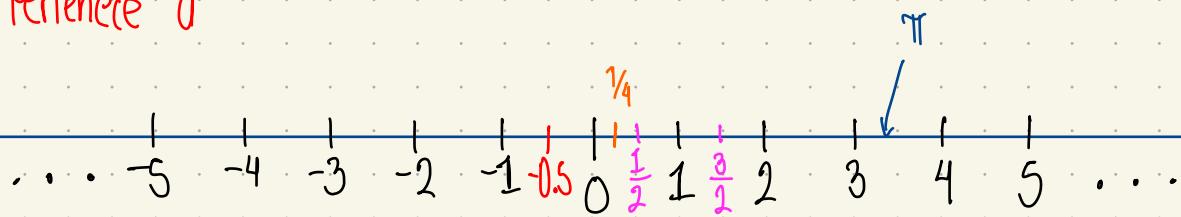
÷

El conjunto de los números reales

\mathbb{R} : Conjunto de los números reales.

$1 \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $0.\overline{3} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$

↑
"Pertenece a"



Sistema de los números reales.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

-) Existe un único $a+b \in \mathbb{R}$
-) $\exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \cdot b = 1 \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sistema de números reales.

El sistema de los números reales es un conjunto denotado por \mathbb{R} en el cual están definidas dos operaciones $+$ y \cdot para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$. Estas operaciones son llamadas **suma** y **multiplicación** respectivamente y están definidas de tal manera que, para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, existen únicos elementos $a+b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen los siguientes axiomas (llamados **axiomas de campo**) para todos los elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(1) **Cerradura**: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\text{i)} a+b \in \mathbb{R}$$

y

$$\text{ii)} a \cdot b \in \mathbb{R}$$

(2) **Commutatividad**: Para cualesquiero $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen:
(ley Comutativa)

$$\text{i)} a+b = b+a$$

y

$$\text{ii)} a \cdot b = b \cdot a$$

(3) **Asociatividad**: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:
(ley Asociativa)

$$\text{i)} (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$\text{ii)} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(4) **Existencia de elemento neutro**:

i) Existe 0 en \mathbb{R} tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$0+a = a+0 = a. \quad // \text{Neutro aditivo}$$

ii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad // \text{Neutro multiplicativo.}$$

C5.- Existencia de inversos:

i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + a_1 = 0$$

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a_2 = 1$$

C6.- Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma: (Ley distributiva)

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales arbitrarios, entonces

Se satisfacen:

$$a = 2, b = 3, c = 1$$

i) Distributividad por la izquierda $2(3+1) = 8$

$$\underline{a \cdot (b+c)} = \underline{a \cdot b + a \cdot c}$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 \\ = 8$$

ii) Distributividad por la derecha:

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$$2x + 3x = (2+3)x$$

Por lo tanto, el conjunto \mathbb{R} de los números reales junto con las operaciones de suma + y producto como ya las conocemos es un campo llamado **Sistema de los números reales.**

09/Julio/2024

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Establezca cual o cuales axiomas de los números reales justifican cada una de las siguientes igualdades:

1. $(6 + 8)x = x(6 + 8)$ *Commutatividad para el producto*
2. $(x + 3)y + 2 = (x \cdot y + 3 \cdot y) + 2$ *Distributividad por la derecha.*
3. $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
4. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$ *Asociatividad para la suma.*
5. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
6. $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$ *Commutatividad para la suma*
7. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
8. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$
9. $(-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$
10. $(a - b) + [-(a - b)] = 0$ *// Existencia de inversos para la suma.*
11. $(3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$ *// Distributividad por la izquierda.*
12. $x(y + 0) + z = xy + z$ *Distributividad por la izq.*
13. $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$ $x(y+0)+z=(x\cdot y+x\cdot 0)+z$
 $= (x\cdot y)+z$
 $= xy+z$
14. $2(x + y) = 2x + 2y$

$$\cancel{(x+y) \cdot 2 = x+y \cdot 2}$$

$$x=1, y=1 \quad 1+1 \cdot 2$$

$$(1+1) \cdot 2 = 1+2$$

$$= 2 \cdot 2 = 3$$

= 4

La relación de igualdad aparece en el sistema de los números reales. La relación " $a = b$ " significa que " a es el mismo elemento que b ". Dicho de otra forma, " $a = b$ " significa que se están usando simblos diferentes para representar el mismo elemento. Además, la relación de igualdad satisface las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

I1) Si $a = b$, entonces $b = a$ // Simetría

I2) Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. // Transitividad

I3) Si $a + c$ denota al número real que resulta de sumar a y c y $a \cdot c$ denota al número real que resulta de multiplicar a y c , entonces $a = b$ implica que:

i) $a + c = b + c$ y ii) $a \cdot c = b \cdot c$.

Propiedades de la igualdad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

"Si y sólo si"

$$a + 5 = 8 + 5$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = 8}$$

1) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

2) $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c.$

$$\begin{aligned} a \cdot 2 &= 10 \\ &= 5 \cdot 2 \end{aligned}$$

Consecuencias de las propiedades de los números reales

Teorema: [Ley de la cancelación para la suma y el producto]

- i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a+c = b+c$, entonces $a=b$.
- ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$, ent. $a=b$.

Dem. i) Por hip. Sabemos que:

$$a+c = b+c \quad \dots (1)$$

Como $c \in \mathbb{R}$, por axioma (c6) existe $c_1 \in \mathbb{R}$ f.g.

$$c + c_1 = 0 \quad \dots (2)$$

Por propiedades de la igualdad: $b+(c+c_1)$

$$a+(c+c_1) = (a+c) + c_1 = (b+c) + c_1$$

Por asociatividad y propiedades de la igualdad

$$a+(c+c_1) = (a+c) + c_1 = (b+c) + c_1 = b+(c+c_1)$$

$$\Rightarrow a+(c+c_1) = b+(c+c_1)$$

$$a+0 = b+0$$

Como 0 es el neutro aditivo, se tiene que:

$$\underline{a = b}.$$

10/Julio/2024

Observación: los elementos 0 y 1 que aparecen en el axioma 3 son únicos. Esto es, el neutro aditivo y el neutro multiplicativo son los únicos números reales que satisfacen: $a+0=a$ y $a \cdot 1=a$ para cualquier número real a .

$$z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } z+a=a, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow z=0.$$

"Para todo"

Productos que involucran al cero

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) $a \cdot 0 = 0$ "Si y sólo si" $\begin{cases} a=0 \text{ ó } b=0 \\ a=5 \text{ ó } b=0 \\ a=0 \text{ ó } b=0 \end{cases}$
- 2) $a \cdot b = 0 \iff a=0 \text{ ó } b=0$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Existe un único número real x tal que: $a+x=b$

2) Si $a \neq 0$, entonces existe un único número real y f.q. $a \cdot y = b$

$$a=2 \quad b=5$$

? x ?

$$2+x=5 \quad | \quad x=3$$

$$a=-1 \quad b=4$$

? x ?

$$-1+x=4 \quad | \quad x=5$$

$$a=2, \quad b=4$$

? y ?

$$2 \cdot y = 4$$

$$y=2.$$

$$a = 8, \quad b = 2$$

? y?

$$8 \cdot y = 2.$$

$$y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Observación:

- i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$.
- ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un único $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Aplicando el Teorema anterior al caso $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$, se obtiene que existe un único número real x tal que

$$a + x = 0$$

i.e. el inverso aditivo de un número real a es único.

$$a = 5, \quad x = -5$$

$$5 + (-5) = 0$$

$$a = -2$$

¿ x ?

$$(-2) + xc = 0$$

| Si $x = 2$, ent.

$$(-2) + 2 = 0$$

$$a = 2$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$a = \frac{3}{2}$$

¿ x ?

$$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot xc = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{6} = 1$$

Definición:

-) Si $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $-a$ al único número real que cumple $a + (-a) = 0$ y se le llama el inverso aditivo de a .
-) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, denotamos por a^{-1} al único número real que cumple $a \cdot a^{-1} = 1$ y se le denomina el inverso multiplicativo de a .

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

Observación: Con esta definición del teorema anterior se tiene que para $a \in \mathbb{R}$,

- El único número real x que satisface la relación $a+x=b$ es $x=b+(-a)$.
- Si además $a \neq 0$, entonces el único número real x que satisface la identidad $a \cdot x = b$ es $x=b \cdot a^{-1}$.

$$2+x=5$$

$$a+x=b$$

$$x=5+(-2)$$

$$\Rightarrow (a+x)+(-a)=b+(-a)$$

$$=5-2$$

$$\stackrel{\text{"entonces"}}$$
$$\Rightarrow (x+a)+(-a)=b+(-a) \quad =3$$

$$\Rightarrow x+(a+(-a))=b+(-a)$$

$$\Rightarrow x+0=b+(-a)$$

$$\Rightarrow x=b+(-a)$$



Notación: De ahora en adelante emplearemos la siguiente notación:

$$\bullet a-b:=a+(-b)$$

$$\bullet \text{ Si } b \neq 0, \frac{a}{b}:=a \cdot b^{-1}$$

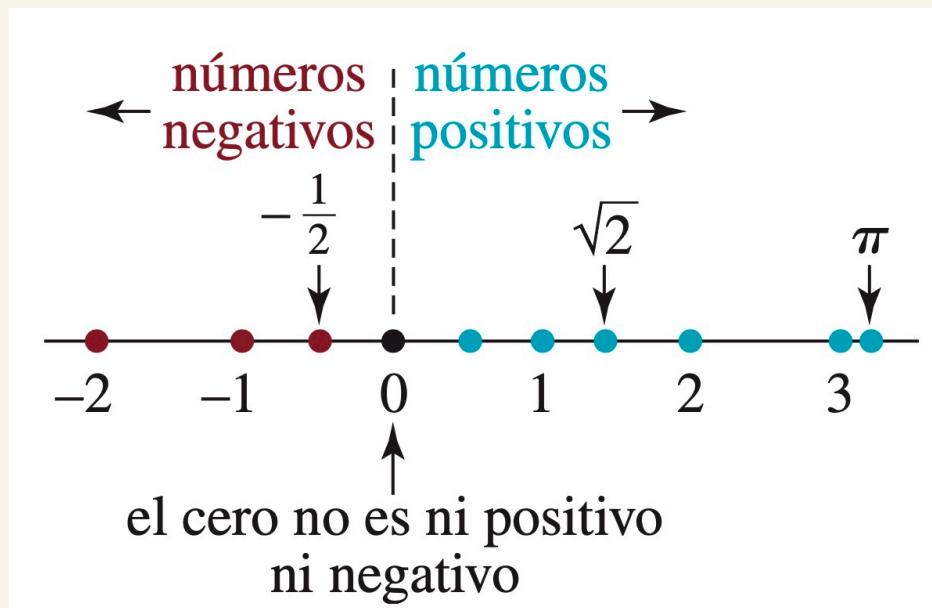
$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$$a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$5 + (-2) = 5 - 3$$

$$2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$



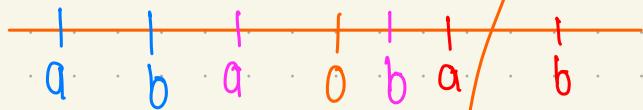
$x \in \mathbb{R}$ es positivo : $x > 0, 0 < x$.

$x \in \mathbb{R}$ es negativo : $x < 0, 0 > x$.

Dos números reales son ordenados

"a es estrictamente mas pequeño que b"

Definición: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.



- ① Se dice que a es menor que b y se denota por $a < b$ si $b - a$ es número positivo. Geometricamente esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica. O bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y se denota como $b > a$.
- ② El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a < b$, o que $a = b$. y se lee como "a es menor o igual que b".

$$\frac{10}{2} < 5$$

$$\frac{10}{2} \leq 5$$

Relaciones entre los signos de a y -a

Sea $a \in \mathbb{R}$

- 1) Si a es positivo, entonces -a es negativo.
- 2) Si a es negativo, entonces -a es positivo.

$$(2) \quad a = -1 \Rightarrow -a = 1$$

 No supongas que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a . 

Relaciones entre los signos de a y a^{-1}

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

- 1) Si a es positivo, entonces a^{-1} es positivo  $\begin{cases} a=4 \\ \Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{4} \end{cases}$
- 2) Si a es negativo, entonces a^{-1} es negativo.

$$(2) \quad a = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$$(-1)(-1) = 1 \quad \checkmark$$

$$a = -2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{-2} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} a \cdot a^{-1} &= \frac{(-2)}{1} \left(\frac{1}{-2} \right) \\ &= \frac{(-2)(1)}{1(-2)} \end{aligned}$$

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$= \frac{-2}{-2}$$

$$= 1$$

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se satisfacen cada una de las siguientes proposiciones:

- i) $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = - (a \cdot b)$ $(-2)(3) = 2(-3) = -(2 \cdot 3) = -6$
 - ii) $(-1)a = a \cdot (-1) = -a$ $(-1)5 = -5$
 - iii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $-(-a) = a$. $-(-2) = 2$
 - iv) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $(-2)(-4) = 8$
 - v) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ $-(2+5) = (-2) + (-7)$
 $= -7$
 - vi) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
 - vii) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$ y $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
 - (viii) $a = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overset{-1}{a})^{-1} = b$
- $$(\overset{-1}{a})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Vii) Si $a = 2$ y $b = 3$

$$(a \circ b)^{-1} = (2 \cdot 3)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$a^{-1} \circ b^{-1} = 2^{-1} \circ 3^{-1} = \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Leyes de los Signos

• $(+)(+) = +$

• $(+)(-) = -$

• $(-)(+) = -$

• $(-)(-) = +$

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

$$b \leq 8$$

1. x es positivo
3. a es mayor o igual a π
5. b es como máximo 8
2. t es menor a 4
4. z es mayor a 1
6. 5 es menor o igual que x

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq x \quad y \quad x \leq 5$$

Intervalos de los números reales

que son mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 5.

Suma y resta de números con signo

- 1) los números con signos iguales se suman y se coloca el signo de los sumandos
- 2) Los números con signos distintos se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Signos de agrupación

los signos de agrupación delimitan operaciones entre números :

Parentesis () Llaves { }

Corchetes []

Leyes de los signos para la división

$$\cdot) \frac{+}{+} = +$$

$$\therefore) \frac{+}{-} = -$$

$$\therefore) \frac{-}{+} = -$$

$$\therefore) \frac{-}{-} = +$$

Reescriba la expresión usando la propiedad de los números reales.

1. Propiedad conmutativa para la suma, $x + 3 =$
2. Propiedad asociativa para la multiplicación, $7(xy) =$
3. Propiedad distributiva, $4(a + b) =$
4. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$

Utiliza propiedades de los números reales para escribir la expresión sin parentesis

$$(-a)b = -(a \cdot b)$$

1. $3(x + y)$

$$5. \frac{4}{3}(-6x) = \left(\frac{4}{3} \cdot (-6)\right) \cdot x = -8x$$

2. $4(2m)$

$$6. -\frac{1}{2}(4x - 2y) = -\frac{1}{2} \cdot 4x - (-\frac{1}{2}) \cdot 2y$$

3. $\frac{4}{2}(2x - 4y) = 4x - 0y$

$$7. 3a(b + c - 2d) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)x + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)y \\ = -(1)x + 1 \cdot y \\ = x + y.$$

4. $(a - b)8$

Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

1. x es positivo

3. a es mayor o igual a π

5. b es como máximo 8

2. t es menor a 4

4. z es mayor a 1

6. 5 es menor o igual que x

Compara las siguientes cantidades y coloca los símbolos: $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

1. $-7 \underline{>} -8$



5. $\frac{8}{4} \underline{=} 2$

2. $-35 \underline{<} 32$

6. $-\frac{7}{3} \underline{<} 1.5$

3. $-844.5 \underline{<} 0$

4. $-483 \underline{<} -480$

Si x es positivo y y es negativo, determine el signo del número real:

1. $10x$

8. $\frac{x}{y}$ -

2. $-x$

3. $-y$

9. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ -

4. $(-2)x$

10. $x \cdot x$ +

5. $100y$ -

11. $y \cdot y$ +

6. $(-3)y$

12. $\frac{2x}{y}$ -

7. xy -

Suma y resta de números con Signo

1) los **números con signos iguales** se suman y se coloca el signo de los sumandos

2) los **números con signos distintos** se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Ejercicios: Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

$$1) -2 + (-4) = -6$$

$$2) 6 + (-4)$$

$$3) 7 - 2$$

$$4) 7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

$$5) -5 - (-13)$$

$$6) -5 - (-13) = -5 + 13 = 8$$

$$7) -(-a) + b = +a + b \\ = a + b$$

$$8) (-2)(9)$$

$$9) 7(-9)$$

$$10) (-2)(-12) = +24 \\ = 24$$

$$11) 19(-1)$$

$$12) -\frac{1}{-1}$$

$$13) -(-6 + x) = 6 - x$$

$$14) -7x$$

$$15) -12(x - y)$$

$$16) -[-6 + (-y)] \\ = -[-6 - y] \\ = 6 + y$$

$$17) -\frac{3}{3 \cdot 0}$$

$$18) -9 \div 27$$

$$19) \underline{[(-a) \div (-b)]} \\ = \frac{a}{b}$$

$$20) 2(-6 + 2) \\ = -12 + 4 \\ = -8$$

$$21) 3(-2(3) + 6(2)) \\ = 3(-6 + 12) \\ = 3(6) = 18.$$

$$22) (-a)(-b)(-1) \\ = a \cdot b \cdot (-1) \\ = -a \cdot b$$

$$23) (-12)(-12)$$

$$24) 3(x - 4)$$

$$25) 4(5 + x)$$

$$26) -(x - y)$$

$$27) 0 \cdot (-x)$$