

Прикладной вейвлет-анализ

Лабораторная работа №2 Дискретное преобразование Фурье в приложениях

Вариант 1. Сжатие изображений

Общая постановка задачи

Написать программу, которая осуществляет сжатие изображений с использованием дискретного преобразования Фурье. Для вычисления ДПФ можно использовать как встроенные функции выбранного вами языка программирования, так и самостоятельно реализованный алгоритм БПФ из ЛР №1.

Пусть X — матрица тестового черно-белого изображения (выбирается самостоятельно), $Y = F_n X F_n$ — ДПФ матрицы X , Y^ϵ — матрица, полученная из Y после обнуления всех элементов, по модулю не превосходящих ϵ , X^ϵ — матрица, полученная после применения обратного ДПФ к матрице Y^ϵ . Процент нулевых элементов в матрице Y^ϵ обозначим $Z(\epsilon)$.

Задания

1) Экспериментально подобрать значения параметра ϵ_{80} , ϵ_{90} , ϵ_{99} , при которых $Z(\epsilon_k) \approx k$. Для указанных значений ϵ необходимо

- построить «сжатое» изображение, т. е. изображение матрицы X^ϵ ;
- вычислить значение PSNR (см. ниже).

Коэффициент **PSNR** — стандартная количественная оценка искажений для изображений. PSNR расшифровывается как peak signal-to-noise

ratio (пиковое отношение сигнал/шум) и вычисляется по формуле

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{M_{gray}}{\text{rms}} \right), \quad \text{где}$$

- M_{gray} — количество градаций серого;
- $\text{rms} = \sqrt{\frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - X_{ij}^{\epsilon})^2}$ — среднеквадратичное отклонение между точками X_{ij} исходного и точками X_{ij}^{ϵ} «сжатого» изображения;
- m и n — соответственно число строк и столбцов в матрице изображения.

2) Изменяя значение ϵ так, чтобы $Z(\epsilon)$ изменялось от 0 до 100, построить диаграмму « $Z(\epsilon)$ — $\text{PSNR}(\epsilon)$ », содержащую как минимум 10 значений. Сделать выводы.

Содержание отчета

- 1) постановка задачи (скриншот);
- 2) тестовое изображение;
- 3) значения ϵ_{80} , ϵ_{90} , ϵ_{99} , соответствующие им значения $Z(\epsilon)$, и все изображения из пункта 1;
- 4) диаграмма из пункта 2;
- 5) выводы и комментарии;
- 6) исходные тексты всех программ.

Вариант 2. Распознавание звукового сигнала

Общая постановка задачи

Цель работы — распознавание телефонного сигнала в **двухтональном многочастотном формате**. Даны звуковые файлы в формате WAV с **частотой дискретизации** 8000 Гц, которые содержат код в формате DTMF. Необходимо расшифровать данные коды, используя дискретное преобразование Фурье.

Содержание отчета

- 1) постановка задачи (скриншот);
- 2) графики звуковых волн для каждого файла;
- 3) описание принципа распознавания;

- 4) результаты распознавания;
- 5) код программы.

Вариант 3. Тригонометрическая интерполяция

Общая постановка задачи

Написать программу, которая для вещественной функции f (см. далее) на отрезке $[a, b]$ строит тригонометрическую интерполяционную функцию ϕ_n (тригонометрический многочлен) по n равноотстоящим точкам, используя для вычисления коэффициентов дискретное преобразование Фурье. Провести вычислительные эксперименты.

Погрешность интерполяции обозначим $r_n = f - \phi_n$. Величину погрешности будем измерять как

$$\|r_n\| = \max_{x_i \in X} |r_n(x_i)|,$$

где X — равномерная сетка из 1024 узлов на отрезке $[a, b]$.

Задания

- 1) Для $n = 3, 5, 10$ изобразить совмещенные графики функций f и ϕ_n , график погрешности r_n , а также привести коэффициенты тригонометрического многочлена ϕ_n .
- 2) Для $n = 5, 10, 15 \dots, 100$ построить **логарифмический график** зависимости $\|r_n\|$ от n .

Содержание отчета

- 1) постановка задачи (скриншот);
- 2) функция, соответствующая вашему варианту;
- 3) расчетные формулы для случаев четного и нечетного n ;
- 4) формула вычисления коэффициентов через ДПФ;
- 5) графики и данные из пункта 1;
- 6) график сходимости из пункта 2;
- 7) комментарии и выводы;
- 8) код программы.

Варианты функций

- 1) $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad [a, b] = [-1, 1].$
- 2) $f(x) = ||x| - 1|, \quad [a, b] = [-2, 2].$
- 3) $f(x) = |\cos x|, \quad [a, b] = [0, 2\pi].$
- 4) $f(x) = (x + 1) \operatorname{sign} x, \quad [a, b] = [-1, 1].$