Ejercicios propuestos

Tabla de contenido

Ejercicio 1. Crecimiento de poblaciones

Supongamos que la población del Lince ibérico crece a razón de un 13% anual. En el año 2002 se reintrodujeron 94 ejemplares en la península ibérica para intentar evitar su extinción. Hagamos que p_0 sea la población inicial de Linces y x_n la población después de n años:

$$p_{n+1} = p_n + 0.13p_n = 1.13p_n$$

(Δ)

Ejercicio 2. Ley de enfriamiento de Newton

Supongamos que una taza de café, inicialmente a una temperatura de 65ºC se coloca en una habitación que se mantiene a una temperatura constante de 20ºC. Después de 1 minuto, el café se ha enfriado a 60ºC. Si necesitamos encontrar la temperatura del café después de 15 minutos, utilizaremos la ley de Newton del enfriamiento, que establece que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura ambiente (es decir, la temperatura de su entorno). Matemáticamente, esto significa,

$$t_{n+1} - t_n = k\,(S - t_n)$$

donde t_n es la temperatura del café después de n minutos, Ses la temperatura de la habitación y k es la constante de proporcionalidad. Tomar $k = \frac{1}{8}$.

(Δ)

Ejercicio 3. Amortización de un préstamo (1)

Cálcular el capital que queda por amortizar de un préstamo de 15000 euros al cabo de 100 meses, si se ha establecido una cuota de 200 euros/mes a un interés mensual (i) del 1% (12% anual).

(Δ)

Ejercicio 4. Amortización de un préstamo (2)

Considerando la amortización del préstamo del ejercicio anterior, realizar el cálculo del balance a final de mes calculado según:

$$b(k) = b(k-1) + \int_{T(k-1)}^{T(k)} \lfloor i\, b(k-1) - p \rfloor dt$$

($\Delta\Delta\Delta$)

Ejercicio 5. Ecuación en diferencias

Estudiar la ecuación en diferencias:

$y(k+2) + y(k) = 0, \text{siendo } y(0) = 1 \ e \ y(1) = 0$

($\Delta\Delta$)

Ejercicio 6. Sistema con limitación en la fuente

Analizar el comportamiento del sistema y su estabilidad:

$k\, y_{k+1} = 1 + (k-1) y_{k-1}$

con $k > 3$, y condiciones iniciales igual a cero.

($\Delta\Delta\Delta$)

Ejercicio 7. Serie de Fibonacci

Construir un modelo que calcule cualquier número de la serie de Fibonacci, sabiendo que:

$$
\begin{aligned}
&F(n) = F(n-1) + F(n-2) \\
&y \\
&F(0) = 0 \\
&F(1) = 1
\end{aligned}
$$

($\Delta\Delta$)

Ejercicio 8. Cálculo de mínimos

El método de Newton para calcular un mínimo de una función reduce el problema a encontrar el límite de una serie, por tanto este método puede ser visto como un sistema discreto.

Calcular el mínimo de la función:

$$f(x) = e^x + x^3 \operatorname{sen} x$$

verificando que se trata del estado estacionario (estable) de la serie:

$$x_{k+1} = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} + x_k$$

($\Delta\Delta\Delta$)

Ejercicio 9. Cálculo de raíces cuadradas

Una forma de evaluar la raíz cuadrada de un número es por medio de aproximaciones sucesivas. Verificar que el estado estable solución del sistema

$$x(k+1) = x(k) + \alpha - x(k)^2$$

para $\alpha = \frac{1}{3}$, y $\alpha = \frac{1}{4}$, es la raíz cuadrada de α, siempre que la condición inicial sea $0 \leq x(0) \leq 1$. Este método es válido sólo para valores de α menores que 1.

($\Delta\Delta$)

Ejercicio 10. Temperatura sobre el suelo

Sea t_n la temperatura en grados centígrados y n el número de metros por encima del suelo. El aire se enfría unos $c = 0,02$ ◦C por cada metro de elevación sobre el nivel del suelo.

(i) Formule un sistema dinámico discreto para modelar esta situación.

(ii) Si la temperatura actual a nivel del suelo es de 30◦C, encuentre la temperatura a 500 m sobre el suelo.

(iii) Encuentre la altura sobre el nivel del suelo en la que la temperatura es de 0◦C.

Para la resolución del problema, formule un modelo de simulación.

(ΔΔ)

Ejercicio 11. Contaminantes en unos lagos

Sean U_n y V_n la cantidad total de contaminante en los lagos A y B, respectivamente, en el año n, y que el 38% del contaminante del lago A y el 13% del contaminante del lago B se eliminan cada año. Además, el contaminante que se elimina del lago A se añade al lago B debido al flujo de agua del lago A al lago B. También se supone que 3 toneladas de contaminante se añaden directamente al lago A y se añaden 9 toneladas de contaminante al lago B.

(i) Desarrolle un sistema dinámico discreto a partir de la información anterior. Encuentre los puntos de equilibrio y diga si son estables o no.

(ii) Suponga que se determina que un nivel de equilibrio de un total de 10 toneladas de contaminante en el lago A y un total de 30 toneladas en el lago B sería aceptable. ¿Qué restricciones habría que imponer a las cantidades totales de contaminantes que se añaden directamente, para que se puedan alcanzar estos equilibrios?

(ΔΔΔ)

Ejercicio 12. Alcohol en sangre

El sistema dinámico que modela la cantidad de alcohol en cuerpo de una persona viene dado por

$$U_{n+1} = U_n - \frac{9U_n}{4,2 + U_n} + d$$

donde U_n es el número de gramos de alcohol en el cuerpo al comienzo de la hora n y d es la cantidad constante de alcohol consumida por hora. Encuentre el valor de equilibrio, sabiendo que esta persona consume 7 gr/h ¿Es estable el sistema?

(ΔΔΔ)

Ejercicio 13. Descomposición en plomo

Supongamos que cada día, el 3% del material A se descompone en material B y el 9% del material B se descompone en plomo. Supongamos que inicialmente hay 50 gramos de A y 7 gramos de B.

(i) Formule un sistema dinámico discreto para modelar esta situación. ¿Qué cantidad de cada material quedará después de 5 días?

(ii) Hacer una gráfica de A_n y B_n para n de 0 a 50, y observar cómo se comportan.

(iii) Supongamos que después de 30 días quedan 20 gramos de material B, pero al principio sólo había 10 gramos de B. ¿Cuántos gramos de material A había al principio, con una precisión de un gramo?

(ΔΔΔ)

Ejercicio 14. Rollo de papel

Supongamos que tienes un rollo de papel, por ejemplo, de toallas de papel. El radio del núcleo de cartón es de 0,5 centímetros y el papel tiene un grosor de $t = 0,002$ centímetros. Sea R_n el radio, en centímetros, del rollo cuando el papel se ha enrollado alrededor del núcleo n veces. Sea L_n la longitud total del papel cuando se envuelve alrededor del núcleo n veces. Observar que $R_0 = 0,5$ y $L_0 = 0$.

Construir el correspondiente modelo de simulación

¿Cuál es la longitud del papel cuando el rollo tiene un radio de 2 centímetros?

($\Delta\Delta$)

Ejercicio 15. El peso ideal

Supongamos que una persona pesa actualmente 76 kilos y consume x kg de calorías a la semana. Suponga que su cuerpo quema el equivalente a 3% de su peso cada semana a través del metabolismo normal. Además, quema 0,1 kg de peso por semana, mediante el ejercicio diario. Queremos encontrar x si la persona quiere pesar entre 65 y 66 kg en 1 año (52 semanas). Nota: se estima que x tiene que estar entre 1,5 y 2,5.

($\Delta\Delta$)

Ejercicio 16. Fármaco para tratamiento

Un determinado fármaco es eficaz en el tratamiento de una enfermedad si la concentración se mantiene por encima de 100 mg/L. La concentración inicial es de 640 mg/L. Se sabe, por experimentos de laboratorio, que el fármaco decae a razón del 20% de la cantidad presente cada hora.

(i) Formule un sistema lineal discreto que modele la concentración de fármaco después de cada hora.

(ii) Encuentra gráficamente a qué hora la concentración alcanza los 100 mg/L.

(iii) Modifique su modelo para incluir una dosis de mantenimiento administrada cada hora.

(iv) Trabaje gráficamente, o de otro modo, para determinar las dosis de mantenimiento que mantendrán la concentración por encima del nivel mínimo efectivo de 100 mg/L, y por debajo del nivel máximo seguro de 800 mg/L.

(v) Trabajando con las dosis de mantenimiento que se han encontrado en (iv), pruebe a variar la concentración inicial. ¿Qué se observa sobre la tendencia a mantenerse dentro de los límites necesarios, así como la tendencia a largo plazo?

($\Delta\Delta\Delta$)

Ejercicio 17. Las cigarras en verano

Las pruebas de investigación han demostrado que el número de chirridos que hacen algunas cigarras depende de la temperatura. A $21^{\circ}C$, una especie de cigarra emite unos 124 chirridos por minuto. El número de chirridos aumenta en 4 por minuto por cada grado que sube la temperatura. Formular un sistema dinámico discreto para modelar la situación que relacione el número de chirridos por minuto en función de la temperatura y utiliza esta expresión para encontrar la temperatura aproximada, si se cuentan unos 24 chirridos en 10 segundos.

(Δ)

Ejercicio 18. Ecuaciones de Cremona

Construir un esquema que modele la ecuación en diferencias de Cremona expresado por las siguientes ecuaciones:

$$x_1(k+1) = x_1(k)\cos(a) - \left(x_2(k) - x_1(k)^2\right)\sin(a)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k)\sin(a) + \left(x_2(k) - x_1(k)^2\right)\cos(a)$$

Siendo $a = 1.328$ y para las condiciones iniciales:

$$(0.1, 0.1), (0.2, 0.2), (0.5, 0.5) \ y \ (0.6, 0.6)$$

Representar todas las soluciones en un mismo plano de fase (x_1, x_2), usando la función '`plot`' con tipo de línea '.' y con una duración de la simulación de, al menos, 20 segundos.

($\Delta\Delta\Delta$)

Ejercicio 19. Modelo de aprendizaje

Cuando aprendemos un nuevo tema, se puede aplicar el siguiente principio: si la cantidad actual aprendida es L_n, entonces L_{n+1} es igual a L_n menos la fracción r de L_n olvidada, más la nueva cantidad aprendida, que suponemos es inversamente proporcional a la cantidad ya aprendida, es decir, L_n. Bajo estos supuestos, el modelo viene dado por

$$L_{n+1} = L_n - r\,L_n + \frac{k}{L_n} \text{ con } 0 \le r < 1, k > 0$$

Hacer estimaciones sobre los parámetros $k \ y \ r$. Realizar el modelo y discutir los resultados obtenidos para diferentes valores de los parámetros.

(Δ)

Ejercicio 20. Bucle algebraico

Resolver la siguiente ecuación:

$f(z) = z^2 + 4z + 3 + \text{sen}(z) - z\cos(z) = 0$

utilizando el bloque *Algebraic Constraint*

($\Delta\Delta$)

Ejercicio 21. Ecuación de Van der Pol discreta

Modelar las siguiente ecuación:

$$u_{t+2} + \mu\left(u_t^2 - 1\right)u_{t+1} + u_t = 0$$

Haciendo $\mu = 1, u_0 = 1, u_1 = -1$

Obtener la gráfica de u_{t+1} y de u_t con respecto al tiempo, así como la gráfica de u_t contra u_{t+1}(gráfica en el plano de fase)

(ΔΔ)

(Δ) Nivel de dificultad.