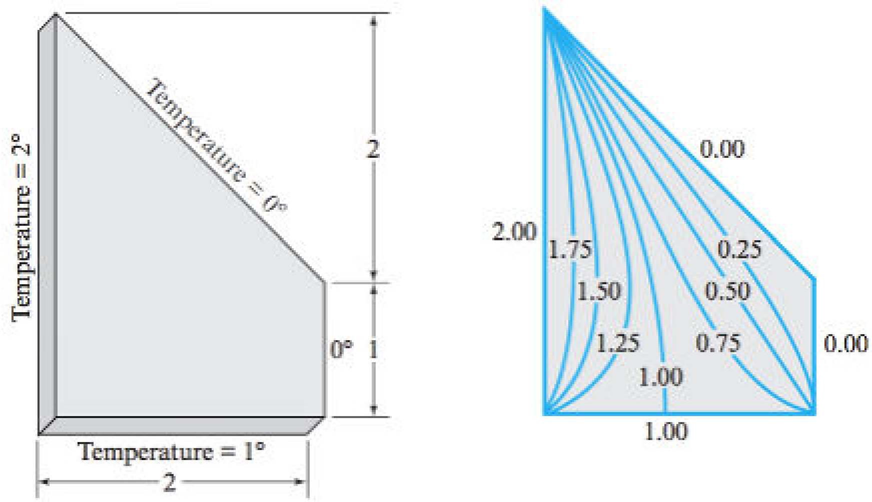
T3_GB_P01. Temperatura de equilibrio en una placa metálica

Fundamento teórico

Supongamos que las dos caras de una placa delgada de forma trapezoidal como la que se muestra están aisladas del calor. Supongamos que conocemos las temperaturas en los cuatro bordes que delimitan la forma de la placa. Por ejemplo, imaginemos que la temperatura en cada borde es constante y de valores 0º, 0º, 1º y 2º como en la Figura

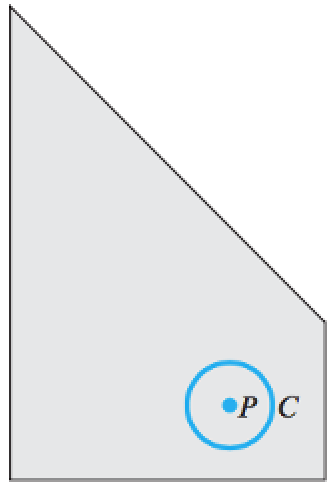


Después de un cierto tiempo, la temperatura en el interior de la placa se estabilizará. El objetivo es determinar la distribución de temperaturas en los puntos interiores de la placa una vez alcanzado el equilibrio térmico. Como veremos, la temperatura de equilibrio interior está determinada únicamente por los *datos de contorno*, es decir, por las temperaturas a lo largo de sus bordes.

La distribución de temperaturas de equilibrio puede representarse mediante curvas que unen puntos de igual temperatura, llamadas *isotermas*como las que se muestran el la Figura. Aunque los cálculos los realizaremos en base a una placa de forma trapezoidal, la técnica es aplicable a cualquier otra forma geométrica. También puede emplearse para encontrar la temperatura de equilibrio en un cuerpo tridimensional, de hecho la placa mostrada podría representar la sección de cualquier cuerpo sólido si despreciamos el flujo de calor en dirección perpendicular (hacia el papel). Por ejemplo, la figura podría representar la sección de una presa expuesta a tres temperaturas distintas: la de la tierra en su base, la del agua en un lado y la del aire en el otro. Conociendo la distribución de temperaturas en el interior de la presa podemos calcular los esfuerzos térmicos a los que está sometida.

El cálculo de la distribución de temperatura de equilibrio en un cuerpo se fundamenta en el Teorema de la Propiedad del Valor Medio que se enuncia de la siguiente manera:

Dada una placa en equilibrio térmico y P un punto en su interior. Si C es cualquier círculo con centro en P totalmente contenido en la placa, la temperatura en P es el promedio de la temperatura en el círculo.

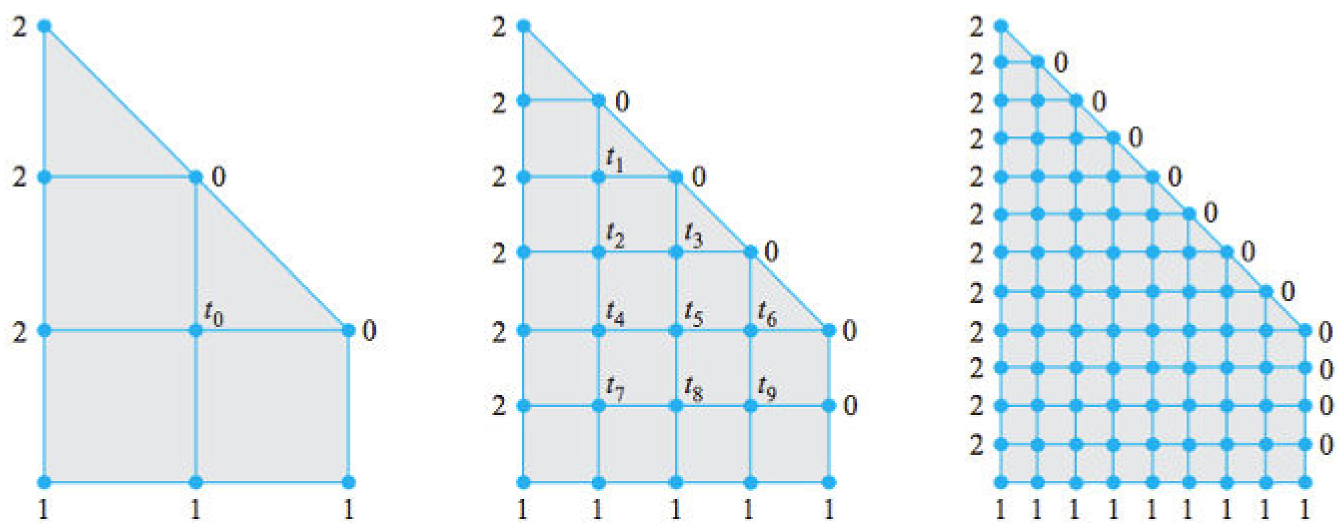


Esta propiedad que no demostraremos es consecuencia de las leyes básicas del movimiento molecular. Básicamente establece que, en equilibrio, la energía térmica tiende a distribuirse uniformemente de acuerdo con las condiciones de contorno. Se observa que esta propiedad determina por si sola la distribución de temperaturas de equilibrio de una placa.

Desafortunadamente, determinar la distribución de temperaturas de equilibrio a partir de esta propiedad no es fácil. Sin embargo, el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales si nos limitamos a encontrar las temperaturas en un número finito de puntos de la placa.

<u>Formulación discreta del problema</u>

Podemos superponer sobre la placa una red de puntos cada vez más densa. En la figura se representan tres distintas redes de puntos cada una de ellas con la mitad de distancia que la anterior de forma que la red se hace más densa. En la figura (a) se representa un solo punto interior, en la (b) 9 puntos y en la (c) 49 puntos. Dichos puntos situados en las intersecciones de la red se denominan *puntos de red* y pueden ser de dos tipos: *puntos de límite* (aquellos que están situados en los bordes de la placa) o *puntos interiores*.



(*a*) 1 interior mesh point (*b*) 9 interior mesh points (*c*) 49 interior mesh points

Trataremos de hallar la temperatura de equilibrio en los puntos interiores de la red. Cuanto más densa sea la red el resultado se aproximará más a la realidad. En los puntos de límite la temperatura de equilibrio coincide con la del borde, en los puntos interiores aplicaremos la siguiente versión discreta de la propiedad del valor medio:

En cada punto interior de una red, su temperatura es aproximadamente la media de las temperaturas de los cuatro puntos que le rodean.

Esta versión "discreta" produce una aproximación razonable a las temperaturas reales de los puntos interiores. A medida que la red se haga más densa (más puntos interiores) la aproximación será mejor. A medida que la distancia entre los puntos de la red tiende a cero nos acercamos a la distribución real de temperaturas de equilibrio (lo que no demostraremos).

El caso (a) de la figura es sencillo de resolver, si llamamos a la temperatura del único punto de red, aplicando la propiedad del valor medio obtenemos: $t_0 = \frac{1}{4}(2+1+0+0) = 0.75$ºC

En el caso (b) debemos calcular las temperaturas $t_1, t_2, \ldots, t_9$ de los 9 puntos interiores (el orden no es importante, siempre que se identifique su situación en la placa). Aplicando la propiedad del valor medio a cada uno de ellos obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$t_1 = \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0)$$

$$t_2 = \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2)$$

$$t_3 = \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 0 + 0)$$

$$t_4 = \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + t_7 + 2)$$

$$t_5 = \frac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + t_8)$$

$$t_6 = \frac{1}{4}(t_5 + t_9 + 0 + 0)$$

$$t_7 = \frac{1}{4}(t_4 + t_8 + 1 + 2)$$

$$t_8 = \frac{1}{4}(t_5 + t_7 + t_9 + 1)$$

$$t_9 = \frac{1}{4}(t_6 + t_8 + 1 + 0)$$

Se trata, por tanto, de un sistema de 9 ecuaciones lineales con 9 incógnitas que matricialmente es:

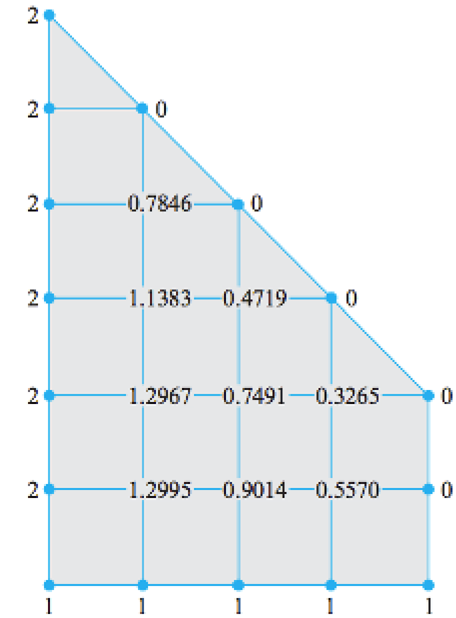
$$
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

El resultado obtenido es:

```
clc, clear
B= [1 -0.25 0 0 0 0 0 0 0
    -0.25 1 -0.25 -0.25 0 0 0 0 0
    0 -0.25 1 0 -0.25 0 0 0 0
    0 -0.25 0 1 -0.25 0 -0.25 0 0
    0 0 -0.25 -0.25 1 -0.25 0 -0.25 0
    0 0 0 0 -0.25 1 0 0 -0.25
    0 0 0 -0.25 0 0 1 -0.25 0
    0 0 0 0 -0.25 0 -0.25 1 -0.25
    0 0 0 0 0 -0.25 0 -0.25 1];
b = [0.5 0.5 0 0.5 0 0 3/4 0.25 0.25]';
[x,~] = Gauss_Seidel(B,b,1e-5);
for i = 1: length(x)
    fprintf('t(%i) = %6.4f ºC\n',i,x(i))
end
```

```
t(1) = 0.7846 ºC
t(2) = 1.1383 ºC
t(3) = 0.4719 ºC
t(4) = 1.2967 ºC
t(5) = 0.7491 ºC
t(6) = 0.3265 ºC
t(7) = 1.2995 ºC
t(8) = 0.9014 ºC
t(9) = 0.5570 ºC
```

En la Figura se representan los valores de las temperaturas obtenidas para cada punto interior.



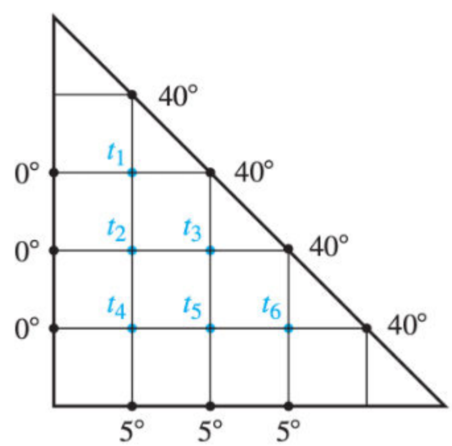
Problema:

Se desea determinar las temperaturas interiores de la placa de la siguiente figura en los 6 puntos indicados

a) Escribe, mediante el editor de ecuaciones, las ecuaciones de equilibrio de cada nodo identificando claramente las variables

b) Escribe, mediante el editor de ecuaciones, la ecuación matricial del sistema detallando cada uno de los elementos de cada matriz

c) Evalúa si es posible resolver el sistema mediante un método iterativo y explica por qué. Si es posible, resuélvelo con un error menor de 10^{-5}. Da el resultado identificando cada variable. Calcula el residuo del resultado y comprueba que es del mismo orden que el error de cálculo



Respuesta

a) Nodo 1: $t_1 = \frac{1}{4}(t_2 + 40 + 40 + 0) \Longrightarrow t_1 - \frac{1}{4}t_2 = 20$

Nodo 2: $t_2 = \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 0) \Longrightarrow -\frac{1}{4}t_1 + t_2 - \frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t_4 = 0$

Nodo 3: $t_3 = \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 40 + 40) \Longrightarrow -\frac{1}{4}t_2 + t_3 - \frac{1}{4}t_5 = 20$

Nodo 4: $t_4 = \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 5 + 0) \Longrightarrow -\frac{1}{4}t_2 + t_4 - \frac{1}{4}t_5 = \frac{5}{4}$

Nodo 5: $t_5 = \frac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + 5) \Longrightarrow -\frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t_4 + t_5 - \frac{1}{4}t_6 = \frac{5}{4}$

Nodo 6: $t_6 = \frac{1}{4}(t_5 + 40 + 40 + 5) \Longrightarrow -\frac{1}{4}t_5 + t_6 = \frac{85}{4}$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 20 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{85}{4} \end{bmatrix}$$

c) La matriz de coeficientes es diagonalmente dominante, por lo que podemos resolverla mediante un método iterativo, en este caso, Gauss-Seidel

```
clc, clear
A = [1 -0.25 0 0 0 0
    -0.25 1 -0.25 -0.25 0 0
    0 -0.25 1 0 -0.25 0
    0 -0.25 0 1 -0.25 0
    0 0 -0.25 -0.25 1 -0.25
    0 0 0 0 -0.25 1];
b = [20 0 20 5/4 5/4 85/4]';
[x,~] = Gauss_Seidel(A,b,1e-5);
for i=1:length(x);
fprintf('  t%i = %.4fºC\n',i,x(i))
end
```

```
t1 = 23.8257ºC
t2 = 15.3030ºC
t3 = 28.0682ºC
t4 = 9.3182ºC
```

```
t5 = 16.9697ºC
t6 = 25.4924ºC
```

```
res = norm(A * x - b);
fprintf('El residuo de la solución es %6.4e < 1e-5\n',res)
```

```
El residuo de la solución es 5.0138e-05 < 1e-5
```