Teoría de la Comunicación

Práctica 1. Procesos estocásticos

10 de febrero de 2015

Introducción

En esta práctica vamos a realizar una serie de simulaciones con el objetivo de clarificar conceptos vistos en clase sobre procesos estocásticos. Para ello, usted tiene que completar dos hitos.

Observará que el enunciado de la práctica está organizado en secciones. Cada sección tiene un último apartado denominado *Hito*. Debe contestar **todas** las cuestiones que se realizan en esos hitos, y realizar **todas** las tareas que en ellos se indican, si bien no es necesario que elabore una memoria con ello. El resto de cada sección es simplemente una guía para ayudarlo. Acompañando este enunciado hay dos archivos de Matlab que usted puede, si quiere, utilizar como base para realizar la simulación. Además hay un archivo de datos. Es muy importante que recuerde que los archivos de Matlab proporcionados son solamente una ayuda. Usted tendrá que completarlos. Hay líneas que están completas, otras no están, y otras están a medias (y comienzan con los símbolos %?). Adicionalmente en el código hay comentarios para ayudarlo.

Los parámetros iniciales de cada script pueden ser modificados por el alumno. En especial, el número de realizaciones y la longitud de cada realización **deben** ser modificados con el objetivo de que los resultados sean representativos, sin que la simulación tarde demasiado.

A medida que la asignatura avance cada vez recibirá menos ayuda con Matlab, por lo que le recomendamos fuertemente que entienda el código que ya está escrito, y utilice la función help de Matlab con frecuencia para saber qué hace cada función que desconozca.

1. Procesos estocásticos estacionarios y ergódicos

En este apartado generaremos diferentes realizaciones de un proceso estocástico, y comprobaremos de forma experimental si es estacionario, en el sentido amplio, aunque únicamente observaremos la evolución de su media.

Abra el archivo `TC_Practica1_Hito1_ALUMNOS.m`. En este archivo encontrará ya escrito parte del código necesario para la realización de este hito. Vaya quitando los comentarios del código y añadiendo el código necesario para ir completando cada apartado. Debe entender todas las líneas de código, las que ya están escritas y las que escriba usted, utilizando si es necesario la ayuda de Matlab para saber qué hace cada función. La ayuda de Matlab se ejecuta de la siguiente forma:

```
>> help nombre_de_la_funcion
```

Es importante que no deje ninguna parte del código sin entender, porque a medida que vayamos avanzando en esta y en las siguientes prácticas, cada vez tendrá que programar más parte de la práctica usted mismo.

1.1. Definición de parámetros y del proceso estacionario

El proceso estacionario estudiado en este apartado consiste en la medida de un valor de tensión $x(t)$ (medido en voltios) en un punto de un circuito eléctrico. En el punto donde se realiza la medida existe una tensión continua de 5 V más un ruido Gaussiano incorrelacionado de media cero y potencia unidad, por lo que el proceso medido se puede modelar como G(5,1). Cada realización consta de N_m medidas con un intervalo entre medidas igual a T_s, dando lugar a un proceso discreto (que es el que nosotros vamos a estudiar).

En las primeras líneas del archivo de Matlab se definen algunos parámetros útiles, y se generan N_r realizaciones del proceso estacionario, cada una de ellas con N_m medidas. El resultado de las medidas las guardamos en una matrix, X, que representa nuestro proceso estocástico. Cada fila de la matriz es una realización, y cada columna es un instante de tiempo (una medida). Por tanto, la tercera columna X(:,3), representa las N_r realizaciones de la variable aleatoria correspondiente a la tercera medida, es decir X[3], según la nomenclatura usada en clase. Tenga en cuenta que este proceso es un proceso discreto, no continuo.

1.2. Estacionariedad y ergodicidad de un proceso estocástico

A continuación vamos a comparar la media del proceso en cada instante de tiempo. Para ello, escriba (o complete) el código que realice los siguientes pasos:

- Obtener la variable aleatoria X[1], correspondiente a la primera medida de cada realización de X.

- Calcular la media de X[1]. Esta media realizada a partir de N_r realizaciones de la primera medida se denomina media muestral, y es un buen estimador de la verdadera media estadística de X[1].
- Repetir el proceso para todas las N_m variables aleatorias X[n] que forman el proceso X, y almacene dichas medias en un vector.
- Dibujar las medias en una gráfica. Ajuste los ejes, active el grid, etiquete los ejes, y añada el título. Para ello, debería aprender a utilizar las funciones `figure`, `plot`, `axis`, `grid`, `xlabel`, `ylabel` y `title`. Para su aprendizaje utilice la función `help` de Matlab.
- Obtener la media temporal de cada realización (fila) de X. Para que los resultados sean representativos aumente N_m y disminuya N_r.
- Dibujar en una gráfica las N_r medias temporales y compárelas con las medias estadísticas.

A continuación asumimos que, en todas las realizaciones, a partir de la medida $N_m/2$ el valor de continua pasa de 5 a 0 voltios. El nombre del nuevo proceso estocástico generado es Y. Siguiendo un procedimiento similar al explicado anteriormente, obtenga las medias estadísticas de las N_m variables aleatorias que componen el proceso Y y las N_r medias temporales.

Hito 1. Realice las siguientes tareas y conteste a las cuestiones: **[5 puntos]**

1. Dibuje la gráfica de las medias estadísticas de cada una de las medidas de X, es decir, las N_m medias correspondientes a cada variable aleatoria $X[n]$, indicando el valor elegido para N_r y N_m. Dibuje la gráfica de las medias temporales de cada una de las N_r realizaciones de X, indicando el valor elegido para N_r y N_m. Dibuje ambas gráficas en un mismo `figure` de Matlab utilizando para ello dos subplots (ver la ayuda de la función `subplot`). Comente el resultado. [2 puntos]
2. ¿Es el proceso X estacionario en cuanto a la media? ¿Por qué? Fijándonos solamente en la media, ¿es el proceso ergódico? ¿Por qué? [0.5 puntos]
3. Repita los Hitos 1.1 y 1.2 para el proceso Y. [2 puntos]
4. Para asegurar que el proceso es estacionario en el sentido amplio (también válido para ergodicidad), ¿qué otro parámetro estadístico necesitaríamos calcular? ¿qué propiedad debe tener ese parámetro? [0.5 puntos]

2. Procesos estocásticos con señales reales

2.1. Análisis temporal y espectral de procesos aleatorios

A continuación vamos a observar una señal generada por un mecanismo aleatorio. En concreto, la señal corresponde con el final de una canción. En esta sección puede utilizar el archivo `TC_Practica1_Hito2.m`. En él, se ven las partes del script que usted tiene que completar. Comienza cargando los datos. El archivo de sonido contiene una variable con la señal (`x`) y otra variable que informa sobre la frecuencia de muestreo a la que se almacenó (`Fs`). Cargue el fichero y escúchelo (es posible que no pueda hacerlo en los ordenadores del laboratorio). Dibuje la señal (la frase) en el tiempo, teniendo cuidado en generar el vector de tiempos de forma adecuada. Calcule la autocorrelación de dicha señal (puede usar la función xcorr de Matlab) y dibújela. A continuación obtenga la Densidad Espectral de Energía (DEE) de esta señal y dibújela. Tenga en cuenta que lo que tenemos es solamente una realización del proceso estocástico (el fragmento de música grabado), del cual no conocemos sus propiedades. Sin embargo, existen formas de *estimar* la DEE a partir de un fragmento. Por ello, vamos a utilizar una de esas técnicas (denominada periodograma de Welch) para estimar la DEE del proceso. Esto se realiza mediante la función `pwelch` de Matlab.

Hito 2. Realice las siguientes tareas y conteste a las cuestiones: **[5 puntos]**

1. Utilizando 3 subplots en la misma figura (uno debajo de otro) dibuje la señal de voz en el tiempo, la autocorrelación de la misma, y la estimación de la DEE. Describa lo que observa en cada gráfica (tendrá que hacer zoom sobre alguna de ellas para que se observe algo significativo, es decir, no es necesario que en las gráficas muestre la señal al completo). Preste mucha atención a los ejes. Recuerde que la DEE es par (puede dibujarla entera o solamente la mitad). También lo es la autocorrelación, que además está centrada en 0. [4 puntos]

2. Definimos el ancho de banda a 10 dB como la diferencia entre la frecuencia central del espectro de una señal, y la frecuencia a la que la densidad espectral de potencia de la misma ha caído 10 dB desde su máximo. ¿Qué ancho de banda a 10 dB tiene la señal de audio? [0.5 puntos]

3. La autocorrelación calculada, ¿es la autocorrelación como promedio temporal o como promedio estadístico? ¿Cómo debe ser el proceso para que coincidan? [0.5 puntos]