Ejercicio 1

a) $F : V \times V \to \mathbb{K}$ $\quad \phi : V \to V^*$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \omega \to \phi(\omega) = F(\cdot, \omega)$

Sea $B = \{e_1 \ldots e_n\}$ base de $V \Rightarrow$

$$m(F) = \begin{pmatrix} F(e_1 e_1) & F(e_1 e_2) & \ldots & F(e_1 e_n) \\ F(e_2 e_1) & F(e_2 e_2) & \ldots & F(e_2 e_n) \\ \vdots & & & \\ F(e_n e_1) & F(e_n e_2) & \ldots & F(e_n e_n) \end{pmatrix} \text{ con } F(e_i e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

$$m(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(e_1)(e_1) & \phi(e_1)(e_2) & \ldots & \phi(e_1)(e_n) \\ \phi(e_2)(e_1) & \phi(e_2)(e_2) & \ldots & \phi(e_2)(e_n) \\ \vdots & & & \\ \phi(e_n)(e_1) & \phi(e_n)(e_2) & \ldots & \phi(e_n)(e_n) \end{pmatrix} \quad \phi(e_i)(e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow m(F) = m(\phi)$

Ejercicio 2

$$P : L^2(V \times V, \mathbb{K}) \longrightarrow Q(V, \mathbb{K})$$
$$P(F) \longrightarrow Q_F$$

Ejercicio 4

$$Q(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + \alpha x_3x_4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 1 & \alpha/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha/2 \\ 1 & \alpha/2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \left[\frac{\alpha^2}{4}\right] = \alpha - \frac{\alpha^2}{4} = 0 \iff 4\alpha - \alpha^2 = 0$$

$$\iff \alpha(4-\alpha) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q \text{ es degenerada} \iff \\ \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \alpha = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ejercicio 5

a) $M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ su forma polar asociada es $f_P \Rightarrow$

$$(x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + x^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3 + 2x_1x_3$$

$$M(f_P) = M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) vector no-autoconjugado: $u_1 = e_1$

$$L\{u_1\}^c = \left\{ (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \right\} =$$

$u_2 = (1\ 0\ -1)$

b) $u_1 = 100$ $\quad u_2 = (1\,0\,-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L\{u_2\}^c = \left\{ (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ -x_2 = 2x_3 \}$$

Sea $u_3 \in L\{u_1\}^c \cap L\{u_3\}^c = \begin{cases} \cancel{x_1} + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ -\frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \end{cases} =$

$= L\{(0\ -2\ 1)\}$

$$\boxed{x_1 = 0}$$

Entonces la base obtenida $B_0 = \{ (1\,0\,0)\ (1\,0\,-1)\ (0\,-2\,1) \}$

$$m(F)_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

a) 1° buscar vector no autoconjugado tomemos $u_1 = e_1$ $\quad 1\,0\,0$

$$L\{e_1\}^c = \left\{ (x\,y\,z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x\,y\,z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x + 2y - z = L\{(1\,0\,1)\,(-2\,1\,0)\} \right.$$

Cogemos $u_2 = (1\,0\,1)$ $\quad Q(e_1) = 1$ $\quad Q(u_2) =$

$$L\{u_2\}^c = \left\{ (x\,y\,z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right. =$$

$$= \left\{ (x\,y\,z) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \{ y = 5z \} = L\{100, 051\}$$

$$u_3 \in L\{u_2\}^c \cap L\{u_1\}^c = \begin{cases} x + 2y - z = 0\ ;\ y = 5z \\ -2y + 10z = 0 \end{cases}$$

$x + 9z = 0;\ x = -9z$

$u_3 = (-9\ 5\ 1)$

$B = \{ (1\,0\,0)\,(1\,0\,1)\,(-9\,5\,1) \}$

$$m(Q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & 20 \end{pmatrix}$$

b) $q = x^2+2y^2+2z^2-2xy+4yz-2zx \Rightarrow M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$v_1 = e_1 \quad Q(v_1) = 1$

$L\{e_1\}^c = (x\,y\,z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \quad x-y-z=0 \quad = L\{(1\,1\,0)(1\,0\,1)\}$

$v_2 = 101 \quad Q(v_2) = 1$

$L\{v_2\}^c = (x\,y\,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad y+z=0; = L\{(1\,0\,0)(0\,1\,-1)\}$

$v_3 \in L\{v_2\} \cap L\{v_1\} = \begin{cases} x-y-z=0 \\ \underline{y+z=0} \end{cases} = L\{0\,1\,-1\} \quad Q(v_3) = 0$

$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

c) $Q(x_1 x_2 x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = (1\,0\,1) \quad Q(v_1) = 1$

$L\{v_1\}^c = \left\{ (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$L\{(1\,0\,-1)(-2\,1\,0)\} \Rightarrow v_2 = (-2\,1\,0) \quad Q(v_2) = -2$

$L\{v_2\}^c = \left\{ (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \} =$

$= L\{(1\,0\,1)(2\,1\,0)\}$

$\begin{cases} \cancel{x_1} -2x_2 - x_3 = 0; \\ \cancel{x_1} \cancel{+2x_2 + x_3 = 0} \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ \underline{-2x_2 = x_3} \end{matrix}} \quad \begin{matrix} v_3 = (0\,1\,-2) \\ Q(v_3) = -2 \end{matrix}$

$B = \{(1\,0\,1)(-2\,1\,0)(0\,1\,-2)\}$

$M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

d) $Q(xyz) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$v_1 = e_1 = (100)$ $\quad m(Q) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$L\{v_1\}^c = \left\{ (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \} =$

$= L\{(1\,0\,{-2})\,(0\,1\,3)\} \Rightarrow v_2 = (1\,0\,2) \quad Q(v_2) = 2$

$L\{v_2\}^c = \left\{ (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ -x_2 + x_3 = 0 \}$

$= L\{(1\,0\,0) \quad (0\,1\,1)\}$

$v_3 = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 ; \quad \boxed{x_1 = -x_2} \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow v_3 = (-1\,1\,1)$

$B = \{ (1\,0\,0)\,(1\,0\,2)\,(-1\,1\,1) \} \quad m(Q) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7

$Q(xyzt) = 2z^2 + t^2 - 2xy + 2xz + 4xt + 2yz + 4yt =$

$= t^2 + 4t(x+y) + 2z^2 - 2xy + 2xt + 2yz =$

$= \underbrace{(t + 2(x+y))}_{x_1}{}^2 - 4(x+y)^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz =$

$= x_1^2 - 4(x+y)^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz =$

$= x_1^2 - 4x^2 - 4y^2 - 10xy + 2z^2 + 2xz + 2yz =$

$= x_1^2 - 4\left(x^2 + x\left(\frac{5y}{2} - \frac{z}{2}\right)\right) - 4y^2 + 2z^2 + 2yz =$

$= x_1^2 - 4\left(x + \frac{1}{4}(5y-z)\right)^2 + \frac{1}{4}(5y-z) - 4y^2 + 2z^2 + 2yz$

$\begin{cases} x_1 = t + 2x + 2y \\ x_2 = x + \frac{5y}{4} - \frac{z}{4} \\ x_3 = y - z \\ x_4 = z \end{cases}$

Ejercicio 8

$B = \{ u_1\ u_2\ u_3 \}$ Q_F tal que $Q(u_1) = 1$, $Q(u_2) = -1$, $Q(u_3) = 0$ $\Rightarrow M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & -1 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$

$Q = x_1^2 - x_2^2$

No, no se puede determinar ni el rango y signatura

Ejercicio 9

$Q(xyz) = \underset{a}{(x-y)^2} + \underset{b}{(y-z)^2} + \underset{c}{(z-x)^2}$ $\quad 2x^2+2y^2+2z^2 -2xy-2xz-2yz$

$m(Q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_{BB_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad rg = 3$, $sg = (3,0)$

$C_{B_3B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B_0 = \{ (1 0 -1)\ (-1 1 0)\ (0 -1 1) \}$

Ejercicio 11

$A = \begin{pmatrix} a+m & b & c \\ b & d+m & e \\ c & e & g+m \end{pmatrix}$ $\quad (a+m)x^2 + (d+m)y^2 + (g+m)z^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz$

(1) $(a+m)x^2 + (d+m)y^2 + (g+m)z^2 > 2bxy + 2cxz + 2eyz$

Supongamos que no existen valores de m tales que: (1) si tomamos ej ejemplo $m=2$

$(a+2)x^2 + (d+2)y^2 + (g+m)z^2$

comparando término a término sin las incógnitas tenemos:

$(a+m) > 2b$ $\quad$ por definición de los naturales

$(d+m) > 2c$ $\quad$ siempre encontraremos $m \in \mathbb{N}$ tales

$(g+m) > 2e$ $\quad$ que serán mayores que sus respectivos términos

Ejercicio 10

$\Rightarrow (a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}) = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$Q(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + k a_{11}^2 + k a_{22}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_4 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_4^2$$

$$M(Q) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es cuadrática}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $k = 1/2 \Rightarrow rg = 3 \Rightarrow sg = (2,1)$

si $k \neq 1/2 \Rightarrow rg = 4$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $u_1 = (1\ 0\ 0\ 0)$ $Q(u_1) = k_1$

$L\{u_1\}^c = \{ x_1 + x_4 = 0 = L\{(0100)(0010)(100-1)\}$

$Q(u_2) = -1$

$u_2 = 0110$

$$L\{u_1\}^c \cap L\{u_2\}^c = \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} = L\{(100-1)(01-10)\}$$

$u_3 = 01-10$ $Q(u_3) = 1$

$$L\{u_1\}^c \cap L\{u_2\}^c \cap L\{u_3\}^c = \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(100-1)\}$$

$Q(u_4) = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad B = \{(1000)(0110)(01-10)(100-1)\}$$

Ejercicio 12

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{array}$$

$$F(A,B) = a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{13}b_{13} + a_{31}b_{31} + a_{23}b_{23} + a_{32}b_{32} =$$
$$x_2^2 + x_4^2 + x_3^2 + x_7^2 + x_6^2 + x_8^2 =$$

a) Es una forma bilineal =

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \end{pmatrix} \Rightarrow$$ signatura semi-positiva y conjugada con la canónica

b) Restringida a matrices antisimétricas, la forma bilineal queda tal que:

$$F(A,B) = a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + (-a_{12})(-b_{12}) + (a_{23}b_{23}) + (-a_{13})(-b_{13}) + (-a_{23})(-b_{23}) = 2a_{12}b_{12} + 2a_{13}b_{13} + 2a_{23}b_{23} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_F(A) = 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} \Rightarrow$$
$$Q_F(A) = 0 \iff A = 0 \text{ (siendo antisimétrica)}$$

c) $M = L\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cap$

1. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Se define una aplicación $\psi : V \to V^*$ por $\psi(v) = \langle v, \cdot\rangle \in V^*$ para cada $v \in V$; esto es, $\psi(v)(w) = \langle v, w\rangle$ para cada $w \in V$.

a) Probar que ψ es un isomorfismo.

b) Sean $B \subset V$ una base ortonormal cualquiera y $B^* \subset V^*$ su base dual. Calcular $M(\psi)_{B,B^*}$.

a) inyectiva: sean $w, u, v \in V : u = w \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(v)(u) = \langle v,u\rangle \wedge \phi(w)(u) = \langle w,u\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(\underbrace{v-w}_{0})(u) = \langle v-w, u\rangle = 0$ como $u \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$

sobreyectiva: si tomamos la matriz de Gram del producto escalar con una base ortogonal $\Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0 \Leftrightarrow i \neq j$ $\Rightarrow$ al tener $rg(A) = \dim(V)$ tenemos que es sobreyectiva

b) Sea $B = \{e_1 \ldots e_n\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(\phi) = \begin{matrix} \phi(e_1)(e_1) & \phi(e_1)(e_2) & \ldots & \phi(e_1)(e_n) \\ \phi(e_2)(e_1) & \phi(e_2)(e_2) & \ldots & \phi(e_2)(e_n) \\ \vdots & & & \\ \phi(e_n)(e_1) & \phi(e_n)(e_2) & \ldots & \phi(e_n)(e_n) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\phi) = \begin{pmatrix} \langle e_1 e_1\rangle & \cancel{\langle e_1 e_2\rangle}^{0} & \ldots & \cancel{\langle e_1 e_n\rangle}^{0} \\ \cancel{\langle e_2 e_1\rangle}^{0} & \langle e_2 e_2\rangle & \ldots & \cancel{\langle e_2 e_n\rangle}^{0} \\ \vdots & & & \\ \cancel{\langle e_n e_1\rangle}^{0} & \cancel{\langle e_n e_2\rangle}^{0} & \ldots & \langle e_n e_n\rangle \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\phi) \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & & \\ & \|e_2\|^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \|e_n\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & & \\ & 1^2 & \\ & & \ddots 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

2. En las condiciones del problema 1, consideremos $A \subset V$. Comprobar que $\omega(A) = \psi(A^{\perp})$.

$$\omega(A) = \{ g \in V^* : g(a) = 0 \ \forall a \in A \}$$

$$A^{\perp} = \{ w \in V : \langle a, w \rangle = 0 \ \forall a \in A \} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi(A^{\perp}) \in V^*$ se define como una aplicación que hace $\langle a^{\perp}, \cdot \rangle$ para algún vector $a^{\perp} \in A^{\perp} \Rightarrow$ por definición del ortogonal de A $\phi(A^{\perp}) \subset \omega(A)$

Pero por qué hacia el otro lado? $\supset$?

Ejercicio 3

$$\phi(x) = \langle \cdot, x \rangle \Rightarrow \phi^{-1}(\langle \cdot, x \rangle) = x$$

3. En las condiciones del problema 1, sean $T : V \to V$ un endomorfismo, $T^t : V \to V$ el adjunto de T y $T^* : V^* \to V^*$ la traspuesta de T. Demostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ V^* \arrow[r, "\vartheta"] & V^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo (esto significa que $T^t = \psi^{-1} \circ T^* \circ \psi$ y $T^* = \psi \circ T^t \circ \psi^{-1}$).

Dar otra demostración de que $(M(T)_{B,B})^t = M(T^t)_{B,B} = M(T^*)_{B^*,B^*}$ para toda base ortonormal B de V.

$$g = \phi^{-1} \circ \vartheta \circ \phi \Leftrightarrow g(x) = \phi^{-1}\Big(\underbrace{\vartheta(\phi(x))}_{\vartheta(\langle x, \cdot \rangle)}\Big)$$

$$\phi^{-1}(\langle \vartheta(x), \cdot \rangle) = \vartheta(x)$$

4. Sea $V = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con las operaciones usuales. Se define $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

~~a)~~ Demostrar que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio euclídeo (de dimensión infinita).

~~b)~~ Calcular el ángulo formado por los vectores $f(x) = sen\pi x$ y $g(x) = cos\pi x$.

c) Consideremos $H = L(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}) \subset V$ donde $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ y $f_4(x) = 2x^2 + 3x - 5$. Calcular una base ortonormal de H.

$V = C([0,1], \mathbb{R}) := \{ f \in \mathbb{R}^* : f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas $\}$

a) $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio euclídeo:

Sean $f, g \in V \wedge \lambda, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \lambda f + \beta g, \lambda f + \beta g\rangle = \int_0^1 (\lambda f + \beta g)(\lambda + f + \beta g) =$$

por prop. algebraicas

$$\int_0^1 \lambda^2 \cdot f \cdot f + \beta^2 \cdot g \cdot g + \lambda \cdot f \cdot \beta \cdot g + \beta \cdot g + \lambda \cdot f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \lambda^2 \cdot f^2 + \int_0^1 \beta^2 \cdot g^2 + \int_0^1 2\lambda\beta \cdot f \cdot g =$$

$$= \lambda^2 \int_0^1 f^2 + \beta^2 \int_0^1 g^2 + 2\lambda\beta \int_0^1 f \cdot g =$$

$$= \lambda^2 \langle f, f\rangle + \beta^2 \langle g, g\rangle + 2\lambda\beta\langle f, g\rangle$$

b) Ángulo formado por: $f(x) = sen(\pi x)$

$g(x) = cos(\pi x)$

Definimos la norma como $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 f^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sean $f, g \in V$, definiremos $arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$-1 \leq \frac{\langle f, g\rangle \to 0}{\|f\|\,\|g\|} \leq 1, \Rightarrow \qquad \cancel{2f} = \frac{1}{2\pi} sen^2(\pi x)$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 (sen(\pi x))^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{2\pi}\cancel{sen^2(\pi)} \to 0$$

El ángulo es $\frac{\pi}{2}$ rad $+ k\pi$

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 cos(\pi x)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Sea $V = C([0,1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones continuas $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ con las operaciones usuales. Se define $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

a) Demostrar que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo (de dimensión infinita).

b) Calcular el ángulo formado por los vectores $f(x) = sen\pi x$ y $g(x) = cos\pi x$.

c) Consideremos $H = L(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}) \subset V$ donde $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ y $f_4(x) = 2x^2 + 3x - 5$. Calcular una base ortonormal de H.

c) $H = L\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ con

Calcular base ortonormal de H

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x \\ f_3(x) = x^2 \\ f_4(x) = 2x^2 + 3x - 5 \end{array} \right.$$

Usaremos el método de Gram-Schmidt:

Tomemos $e_1 = f_1 \Rightarrow e_2 = \alpha e_1 + f_2 \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{2} + x$

$\langle e_1, e_2\rangle = 0 \Rightarrow \alpha \overset{1}{\cancel{\langle e_1, e_1\rangle}} + \langle e_1, f_2\rangle = \alpha + \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -1/2$

Sea $e_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + f_3$ $\qquad \|e_1\|^2 = 1$

$\langle e_1, e_3\rangle = \alpha \overset{1}{\cancel{\langle e_1, e_1\rangle}} + \beta \overset{0}{\cancel{\langle e_1, e_2\rangle}} + \langle e_1, f_3\rangle$

$\langle e_2, e_3\rangle = \overset{0}{\cancel{\alpha\langle e_2, e_1\rangle}} + \beta \underbrace{\langle e_2, e_2\rangle} + \langle e_2, f_3\rangle$

$\|e_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{4} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} =$

$$\boxed{\beta = -12\langle e_2, f_3\rangle = -1}$$

$\alpha = -\langle e_1, f_3\rangle = -\int_0^1 x^2 = -\frac{x^3}{3} = -\frac{1}{3}$

$e_3 = -\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 = -\frac{1}{3} - \cancel{x} + \frac{1}{2} + \cancel{x^3} = \boxed{x^3 - x + 1/6}$

$\langle e_3\, e_3\rangle = \int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{1}{6}\right)^2 = -1/12$

Sea $e_4 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + f_4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \langle e_1 e_4 \rangle = \alpha \langle e_1 e_1 \rangle^{1} + \cancel{\beta \langle e_1 e_2 \rangle} + \cancel{\gamma \langle e_1, e_3 \rangle} + \langle e_1, f_4 \rangle$$

$$\langle e_2 e_4 \rangle = \cancel{\alpha \langle e_2 e_1 \rangle} + \beta \langle e_2 e_2 \rangle + \cancel{\gamma \langle e_2 e_3 \rangle} + \langle e_2 f_4 \rangle$$

$$\langle e_3 e_4 \rangle = \cancel{\alpha \langle e_3 e_1 \rangle} + \cancel{\beta \langle e_3 e_2 \rangle} + \gamma \langle e_3 e_3 \rangle + \langle e_3 f_4 \rangle$$

$$\alpha = -\langle e_1, f_4 \rangle = \int_0^1 2x^2 + 3x - 5 = -17/6$$

$$\beta = -12 \langle e_2 f_4 \rangle = -12 \int_0^1 (x - 1/2)(2x^2 + 3x - 5) = -5$$

$$\gamma = -13 \langle e_3 f_4 \rangle = -\frac{247}{90}$$

5. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dotado del producto escalar usual. Consideremos $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z, \quad 2y + t = 0\}$.

a) Hallar $W^\perp$.

b) Determinar la distancia del vector $v = (1,2,0,-1)$ a W.

c) Dar una definición natural de *ángulo determinado por un vector y un subespacio* y calcularlo para v y W del apartado anterior.

$$W = \left\{ (x\,y\,z\,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \right\} = L\{\underset{e_1}{(1\,0\,1\,0)}\,\underset{e_2}{(0\,1\,0\,-2)}\}$$

a) Hallar $W^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^4 : \langle w, e_1 \rangle = 0 \wedge \langle w, e_2 \rangle = 0 \}$

$$w = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \quad W^\perp = \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} =$$

$$L\{(1\,0\,-1\,0)\,(0\,2\,0\,1)\}$$

b) $v = (1\,2\,0\,-1)$

$$(1\,2\,0\,-1) = \alpha(1\,0\,1\,0) + \beta(0\,1\,0\,-2) + \lambda(1\,0\,-1\,0) + \gamma(0\,2\,0\,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \lambda \\ 2 = \beta + 2\gamma \\ 0 = \alpha - \lambda \\ -1 = -2\beta + \gamma \end{cases} \quad \gamma = 3/5 \quad \boxed{\beta = 4/5 \quad \alpha = 1/2} \quad \lambda = 1/2$$

$$v = (1/2\; 0\; 1/2\; 0) + (0\; 4/5\; 0\; -8/5)$$

$$v = \left(\frac{1}{2}\; 4/5\; 1/2\; -8/5\right) \quad (1\,2\,0\,-1) \Rightarrow \left(\frac{5}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10}\,\frac{-16}{10}\right) - \left(\frac{10}{10}\,\frac{20}{10}\,0\,\frac{-10}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{-5}{10}\; \frac{-12}{10}\; \frac{5}{10}\; \frac{6}{10}\right)$$

$$\|v - v'\| = \sqrt{-\frac{5^2}{10} + \left(\frac{-12}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \frac{6}{10}} = \sqrt{\frac{28}{10}}\,u$$

c) $p(v) = (1/2\; 4/5\; 1/2\; -8/5) - (5\; 8\; 5\; -16)$

$$\arccos\left(\frac{\langle v, p(v) \rangle \; \frac{37}{10}}{\underset{\sqrt{6}}{\|v\|}\; \underset{\sqrt{\frac{37}{10}}}{\|p(v)\|}} \right) =$$

$\langle v, p(v) \rangle = 5 + 16 + 16 = 37$

$\langle v, v \rangle = \sqrt{1 + 4 + 0 + 1} = \sqrt{6}$

$\langle p(v) \rangle = \sqrt{25 + 64 + 25 + 256} =$

$= \sqrt{370}$

Ejercicio 6

a) $M = \left\{ (x y z t u) \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x+y+u=0 \\ x+z-t-u=0 \end{cases} \right\} =$

$= L\{(-1\ 1\ 1\ 0\ 0)\ (-1\ 0\ 2\ 0\ 1)\ (0\ 0\ 1\ 1\ 0)\}$

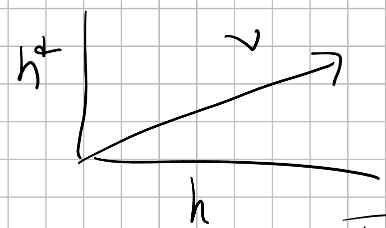
$M^{\perp} = \left\{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} \langle x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, -1\ 1\ 1\ 0\ 0 \rangle = 0 \\ \langle x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, -1\ 0\ 2\ 0\ 1 \rangle = 0 \\ \langle 0\ 0\ 1\ 1\ 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \rangle = 0 \end{cases} \right. =$

$= L\{(1\ 1\ 0\ 0\ 1)\ (1\ 0\ 1\ -1\ -1)\}$

Tenemos la base $B = \{L\{M\} + L\{M^{\perp}\}\}$

y $M(P^{\perp}_{M}) = \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$

b) Hallar $d(v, M)$ con $v = (1\ 1\ 0\ 0\ 0)$



$\alpha(-1\ 1\ 1\ 0\ 0) + \beta(-1\ 0\ 2\ 0\ 1) + \lambda(0\ 0\ 1\ 1\ 0)$
$+ \gamma(1\ 1\ 0\ 0\ 1) + \phi(1\ 0\ 1\ -1\ -1) = (1\ 1\ 0\ 0\ 0)$

$\boxed{\lambda = \phi}$ $\boxed{\phi = 1/4}$ $\boxed{\gamma = 2/3}$ $\boxed{\beta = -5/12}$ $\boxed{\alpha = 1/3}$

$V_h = \left(\frac{1}{12}\ \frac{1}{3}\ -\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ -\frac{5}{12} \right) \Rightarrow \|v - v_h\| = \sqrt{\langle v - v_h, v - v_h \rangle} =$

$= \sqrt{\left(\frac{121}{144} + \frac{4}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{25}{144} \right)} = \frac{\sqrt{57}}{6} u$

7. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Definimos el endomorfismo $\alpha : End(V) \to End(V)$ por $\alpha(T) = T^t$.

a) Demostrar que $1 \in \sigma(\alpha)$ y calcular $m_G(1)$.

b) Probar que α es diagonalizable.

a) $\alpha : End(V) \longrightarrow End(V)$

$T \longrightarrow \alpha(T) = T^t$

Ejercicio 8

Sea $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$

$M = L\{(1\,1\,1\,{-2})\,(1\,0\,0\,{-1})\}$

$W = L\{(1\,1\,1\,{-2}\,1)\,(1\,1\,{-1}\,{-2}\,{-1})\,(1\,0\,0\,{-1}\,{-1})\}$

Constrúyase T tal que $\begin{cases} M \subset Im(T) \\ T(W)^\perp = M \Leftrightarrow T(W) = M^\perp \end{cases}$

$W = L\{(0\,0\,1\,0\,0)\,(0\,1\,0\,{-1}\,2)\,(1\,0\,0\,{-1}\,{-1})\}$

$W^\perp = \left\{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{R}_5 : \begin{cases} \boxed{x_3 = 0} \\ x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\} =$

$= L\{(1\,1\,0\,1\,0)\,(0\,{-3}\,0\,{-1}\,1)$

$M = L\{(0\,1\,1\,{-1})\,(1\,0\,0\,{-1})$

$M^\perp = \left\{ (x_1 x_2 x_3 x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} =$

$= L\{(0\,{-1}\,1\,0)\,(1\,1\,0\,1)\}$

$W \xrightarrow{T} M^\perp$

Se la base de $\mathbb{R}^5$ $B_5 = \{ \overbrace{(0\,0\,1\,0\,0)\,(0\,1\,0\,{-1}\,2)\,(1\,0\,0\,{-1}\,{-1})}\ \underbrace{(1\,1\,0\,1\,0)\,(0\,{-3}\,0\,{-1}\,1)}_{T(W^\perp) = M} \}$

$$m(T) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 9

9. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (3x + 2y, x - y + z, y - 2z)$. Calcular su aplicación adjunta.

$$F(x,y,z) = (3x+2y,\ x-y+z,\ y-2z)$$

$$\left.\begin{array}{l} F(e_1) = (3,1,0) \\ F(e_2) = (2,-1,1) \\ F(e_3) = (0,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow M(F) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(F)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\to F^t(x,y,z) = (3x+y\ ,\ 2x-y+z,\ y-2z)$$

Ejercicio 10

10. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por $F(u_1) = u_1 + 2u_2$, $F(u_2) = 2u_1 - u_2$ y $F(u_3) = u_1 + u_2 - u_3$, siendo $u_1 = (2, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 3, 0)$ y $u_3 = (1, -2, 3)$. Hallar el endomorfismo adjunto de F.

$$F(200) = 200 + (-2\,6\,0) = (0\,6\,0)$$

$$F(-130) = 400 - (-130) = (5\,{-3}\,0)$$

$$F(1\,{-2}\,3) = 200 + (-130) \quad (-1+2\,3) = (0\,5\,{-3})$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow B = \{u_1 u_2 u_3\} \text{ es base de } \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow M(F)_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pero para sacar su adjunta hay que usar una base ortonormal

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/18 \\ 0 & 1/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = M(F)_{B_0B_0}$$

base ortogonal

Ejercicio 11

11. En cada uno de los siguientes apartados se da una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En cada caso, determinar para qué valores de los parámetros α, β y γ la aplicación T es ortogonal.

$$a) \begin{pmatrix} 3/5 & \alpha & 0 \\ 4/5 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ -1 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Consideramos el producto escalar usual, sea

a) $e_1 = (1\,0\,0) \quad e_2 = (0\,1\,0) \quad e_3 = (0\,0\,1)$

$T(e_1) = (3/5, 4/5, 0) \quad T(e_2) = (\alpha, \beta, 0) \quad T(e_3) = (0,0,\gamma)$

$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$\langle T(e_1), T(e_2) \rangle = \frac{3\alpha}{5} + \frac{4\beta}{5} = 0; \quad \boxed{3\alpha = -4\beta}$

$\alpha = \frac{-4}{3}\beta = \pm \frac{4}{5}$

$\langle e_2, e_3 \rangle = 0$

$\langle T(e_2), T(e_3) \rangle = 0$

$\boxed{\gamma = \pm 1}$

$\langle e_2, e_2 \rangle = 1$

$\langle T(e_2), T(e_2) \rangle = \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 1}$

$\frac{16}{9}\beta^2 + \beta^2 = 1$

$16\beta^2 + 9\beta^2 = 9$

$25\beta^2 = 9; \quad \boxed{\beta = \pm \frac{3}{5}}$

b) $T(e_1) = (1\ -1\ \alpha) \quad T(e_2) = (1/4\ \beta\ 0) \quad T(e_3) = (0\,0\,\gamma)$

$\boxed{\gamma = 1} \quad (0\,0\,1)$

$\langle e_1\, e_3 \rangle = 0$

$\langle T(e_1)\, T(e_3) \rangle = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$\langle e_2\, e_2 \rangle = 1$

$\langle T(e_2)\, T(e_2) \rangle = \frac{1}{16} - \beta^2 = 1; \quad -\beta^2 = \frac{15}{16}$

$\nexists \beta$: T sea ortogonal

c) c) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

$T(e_1) = (\alpha \ -\beta \ 0)$ $T(e_2) = (\beta \ \alpha \ 0)$ $T(e_3) = (0 0 \gamma)$

$\boxed{\gamma = 1}$

$(0 0 1)$

$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$

$\langle T(e_1) T(e_1) \rangle = \alpha^2 + \beta^2 = 1$

$\langle e_1 e_2 \rangle = 0$

$\langle T(e_1) \ T(e_2) \rangle$ $\Rightarrow \beta = 0$ y $\boxed{\alpha = \pm 1}$

Ejercicio 12

12. Se consideran la base $B = \{(1,1,1,-1),(1,1,-1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $f(v) = x + y - 3z$ si $v = (x,y,z,t)_B$. Calcular $\psi^{-1}(f)$ siendo ψ la aplicación lineal definida en el problema 1. (Observar que se trata de encontrar $w_0 \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(v) = \langle w_0, v \rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^4$).

$M(\theta) = (-1 \ 5 \ -3 \ -3)$ $w_0 = (x_1 x_2 x_3 x_4)$

$$\left\{\begin{array}{l} -3 = \qquad +x_3 + x_4 \\ 3 = \qquad -x_3 + x_4 \\ +3 = \qquad -x_3 - x_4 \end{array}\right.$$

$6 = -2x_3$

$\boxed{x_3 = -3}$ $\boxed{x_4 = 0}$

$\boxed{-3 = x_3 + x_4}$

$4 = 2x_1 + 2x_2$

$-4 = 2x_1 + 2x_3$

$-4 = 2x_2 + 2x_3$

$\boxed{x_1 = x_2 = 1}$

$\boxed{w_0 = (1 \ 1 \ -3 0)}$

Ejercicio 13

13. En un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nos dan una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y se sabe que $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$, $\langle v_2, v_2 \rangle = 2$, $\langle v_3, v_3 \rangle = 3$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 1$, $\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle = 1$ y $\langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 2$.

Sea $W = \{v = (x, y, z)_B \in V : x = -z = y\}$.

a) Hallar $W^\perp$.

b) Si $T : V \to V$ es el endomorfismo que satisface $f(v) = w - w^\perp$, donde $v = w + w^\perp$ y siendo $w \in W$ y $w^\perp \in W^\perp$. Analizar si T es una aplicación ortogonal.

$\underbrace{\cancel{e_1 = (100) \quad e_2 = (110) \quad e_3 = (111)}}$ $\quad M_{\langle\rangle} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

El problema hay que sacar una base con ese producto escalar

$W = \{v \in V : x = -z = y\} = L\{(1, 1, -1)\} = L\{(0\ 2\ -1)_B\}$

a) $W^\perp = \{v \in V : \langle x_1 x_2 x_3, 1\ 1\ -1 \rangle = 0\} = L\{(1 0 1)(0 1 1)\} =$

$= L\{(1 -1 1)_B (-1 0 1)_B\} = L\{(1\ -1\ 0)\ (0\ 0\ -1)\} = x + y = 0$

$\boxed{(1 -1 1)} \perp (1 -1 0)$

$B = \{(1 -1 0)(1 -1 1)(1 1 -1)\}$

b) Sea la base $B = \{\cancel{(1 1 -1)(1 1 2)(1 -1 0)}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\ \frac{1}{\sqrt{14}}\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$T \in End(V) \quad f(v) = w - w^\perp$

con $v = w + w^\perp$

T es ortogonal ¿ T es un isomorfismo ✓

Sea la base canónica, $\Rightarrow$ T es ortogonal $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M(T)^t = M(T)^{-1}$

$M(T)_{B_c B_c} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(T)^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$M(T)^t \cdot M(T) = Id$ ✓ $\Rightarrow$ Es ortogonal

Ejercicio 14

14. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + 2yy' + 2zz' + xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z$. Comprobar que $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio euclídeo y determinar la simetría ortogonal respecto de $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.

$$\langle (x\,y\,z)(x'\,y'\,z')\rangle = xx' + 2yy' + 2zz' + xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z$$
$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

La matriz de gram con la base canónica sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es simétrica y definida positiva} \Rightarrow \text{Es un}$$

producto escalar y por tanto es un espacio euclídeo

$$H = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} = L\{(1\,0\,-1)\,(1\,-1\,0)\}$$

$$\langle (x\,y\,z)(1\,0\,-1)\rangle = (x\,y\,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x\,y\,z)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \{-z=0\} = L\{(1\,0\,0)\,(0\,1\,0)\}$$

$$\langle (x\,y\,z)(1\,-1\,0)\rangle = (x\,y\,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (x\,y\,z)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y=0 = L\{(1\,0\,0)\,(0\,0\,1)\}$$

$$H^\perp = L\{(1\,0\,0)\}$$

Tenemos la base ortonormal $B_0 =$
$= \{(1\,0\,-1)\,(1\,-1\,0)\,(1\,0\,0)\}$ y por tanto la
matriz de la simetría es $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15

15. Probar que la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

es un endomorfismo ortogonal (se supone que $\mathbb{R}^4$ está dotado del producto escalar usual). Determínese una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual T esté representada por una matriz reducida.

a) Determinar que es ortogonal

$$A^2 = 1/4 \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow T \text{ es aplicación } \text{~~bilineal~~ ortogonal}$$

ya que $|A^2| = |Id| = 1 = |A| \circ |A| \Rightarrow \boxed{|A| = 1}$

b) Sea $e_1 = (1000) \perp a+b+c+d = 0 = L\{(1-100)\ (10-10)\ (100-1)\}$

Sea $e_2 = (100-1)$

Sea $e_3 = (10-10)$

$ax + ay + az + \cancel{tat}\ t + bx + by - bz - bt$
$+ cx - cy - cz + ct + xd - yd + zd - td$

$\Downarrow$

$x^2 + 2xy + 2xz + 2xt - 2yz - 2yt + 2zt$
$+ y^2 - z^2 - t^2$

$$(e_1 \cap e_2)^\perp = \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} = L\{(010-1)\ \boxed{(10-10)}\}$$

$$(e_1 \cap e_2 \cap e_3)^\perp = \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ b+d = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} = L\{(1\ 1\ -1\ -1)\}$$

Sea la base $B = \{(1000)\ (100-1)\ (10-10)\ (11-1-1)\}$

16. Clasificar las transformaciones ortogonales en el espacio, dadas por las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad b)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad c)1/3\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

$|T| = 9 > 0$ giro

a) $\shortparallel$ 1 giro

b) -1 $\Rightarrow$ simetrica

22. Final de Junio 96. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Sean H un subespacio vectorial de V y $v_0 \in V$.

a) Demostrar que $d(v_0, H) = \|v_0\|$ si y sólo v_0 es ortogonal a H.

b) Si $V = \mathbb{R}^3$, $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ y $v_0 = (1,1,1)$. Definir un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ en $\mathbb{R}^3$, dando su matriz respecto de la base canónica, tal que $d(v_0, H) = \|v_0\|$ $\Leftrightarrow$ v_0 es ortogonal a H

a) $d(v_0, H) = \|v_0\| \Leftrightarrow v_0$ es ortogonal

$\Rightarrow)$ $d(v_0,H) = \|v_0 - h\| = \sqrt{\langle v_0-h, v_0-h\rangle} = \sqrt{\langle v_0, v_0\rangle}$

$\langle v_0-h, v_0-h\rangle = \langle v_0, v_0\rangle \qquad \langle v_0-h, v_0-h\rangle - \langle v_0, v_0\rangle = 0$

$\cancel{\langle v_0, v_0\rangle} + \langle h, h\rangle - 2\langle v_0, h\rangle \cancel{-\langle v_0, v_0\rangle} = 0$

$\langle h, h\rangle + \langle -2v_0, h\rangle = \langle h - 2v_0, h\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h - 2v_0 = 0 \\ h = 0 \end{cases}$

$\langle v_0 - h, v_0 - h\rangle = \langle v_0, v_0\rangle$

$\langle h^\perp, h^\perp\rangle = \langle h + h^\perp, h + h^\perp\rangle$

$\cancel{\langle h^\perp, h^\perp\rangle} = \langle h, h\rangle + \cancel{2\langle h^\perp, h\rangle} + \cancel{\langle h^\perp, h^\perp\rangle}$

$0 = \langle h, h\rangle$

b) $H = \{x + y = 0\} = L\{(0\,0\,1)(1\,-1\,0)\}$ y $v_0 = (1\,1\,1)$

Sea la base $B = \{(1\,1\,1)(0\,0\,1)(1\,-1\,0)\} \Rightarrow M_{\langle\rangle_B} = Id$

$$M_{\langle\rangle_{B_3}} = \underbrace{C_{BB_3}}_{(C_{B_3B})^t} \cdot M_{\langle\rangle_B} \cdot C_{B_3B}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

18. Segundo Parcial 95. Se considera $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Definir un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ en $\mathbb{R}^3$, dando su matriz respecto de la base canónica, tal que S sea autoadjunto.

b) Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmación, dando una demostración o un contraejemplo según proceda:

"Un endomorfismo $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y sólo si S es autoadjunto con respecto a algún producto escalar definido en $\mathbb{R}^n$".

$M(S)_{B_3 B_3} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Sean $u, w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ S es autoadjunto $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle S(u), w \rangle = \langle u, S(w) \rangle$

Sea la base $B = \{(1\,0\,0)(0\,1\,1)(0\,0\,-1)\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

tal que

$S(1\,0\,0) = (1\,0\,0)$

$S(0\,0\,1) = (0\,0\,1)$

$S(0\,1\,1) = (0\,1\,1)$

$\overrightarrow{(0\,0\,1)} \downarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\,0\,-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$

$\overrightarrow{(0\,0\,-1)} \downarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\,0\,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\Leftarrow]$ S autoadjunto $\Rightarrow \langle S(u), w \rangle = \langle S(w), u \rangle$

Sea $S(u) = \alpha u + \beta w$ $S(w) = \lambda u + \phi w$

$\langle \alpha u + \beta w, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle w, w \rangle$

$\langle \lambda u + \phi w, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle + \phi \langle w, u \rangle \Rightarrow$

$\alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle w, w \rangle = \lambda \langle u, u \rangle + \phi \langle w, u \rangle$

20. Final Junio 95. Se considera $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$-3x_3 = +x_2$

a) Definir un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ en $\mathbb{R}^3$, dando su matriz respecto de la base canónica, tal que S sea ortogonal.

b) Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, dando una demostración o un contraejemplo según proceda:

"Todo endomorfismo $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que es diagonalizable y $\sigma(S) \subset \{-1, 1\}$ es ortogonal con respecto a algún producto escalar definido en $\mathbb{R}^n$".

a)

$$M(S) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} S(e_1) = e_1 \\ S(e_2) = e_2 \\ S(e_3) = (0\ 6\ -1) = u \end{array}$$

$$M_{\langle\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & a & b-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= |1-\lambda| \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((1-\lambda)(b-\lambda) - a^2)\big)$$

$$B = \{(1 0 0)\ (0 1 0)\ (0 -3\ 1)\} \Rightarrow M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\langle\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(0 1 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 10\ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$$

$$(0 -3\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} (0 -3\ 1) = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

1. Se considera $\mathbb{R}^3$ con su estructura afín usual.

Demostrar que $R = \{(1,1,0),(1,1,2),(0,2,1),(0,1,1)\}$ es un sistema de referencia afín. Hallar el sistema de referencia de la forma $R' = \{p_0; B\}$, con B base de $\mathbb{R}^3$, asociado a R. Hallar las coordenadas cartesianas y baricéntricas del punto $(1,1,1)$ respecto de R' y R respectivamente.

$$R = \{ \overset{P_1}{(110)} \overset{P_2}{(112)} \overset{P_3}{(021)} \overset{P_4}{(011)} \} = \{ \overrightarrow{P_1P_2} \quad \overrightarrow{P_1P_3} \quad \overrightarrow{P_1P_4} \} =$$

$$\Rightarrow \{ (110); (002) (-1\,1-1) (-1\,0-1) \} = R'$$

$$(111) = P \quad \overrightarrow{P_0P} = (001) \Rightarrow (1/2\ 0\ 0)_{R'} \Leftrightarrow (1/2\ 1/2\ 0\ 0)_R$$

$$B = (x_1\, x_2 x_3)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BP_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BP_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BP_2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-x_1, 1-x_2, -x_3) + \frac{1}{2}(1-x_1, 1-x_2, 2-x_3) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-x_1 + 1-x_1 = 0 \\ 1-x_2 + 1-x_2 = 0 \\ -x_3 + 2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} -2x_1 = -2 ; \boxed{x_1 = 1} \quad \boxed{x_2 = 1} \quad \boxed{x_3 = 1}$$

El propio punto es baricentro $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

2. Sea $\mathbb{R}^n_1 = \{(1, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ y $\mathbb{R}^n_0 = \{(0, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ Consideremos la aplicación $\Delta : \mathbb{R}^n_1 \times \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^n_0$ definida por $\Delta(a, b) = b - a$ para cada $a, b \in \mathbb{R}^n_1$.

a) Demostrar que $(\mathbb{R}^n_1, \mathbb{R}^n_0, \Delta)$ es un espacio afín (afínmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con su estructura usual).

b) Sea $S = \{p_0, p_1, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{R}^n_1 (\subset \mathbb{R}^{n+1})$. Demostrar que S es afínmente independiente si y sólo si S es linealmente independiente en $\mathbb{R}^{n+1}$. Deducir que un conjunto R es sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^n_1$ si y sólo si es base de $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Para demostrar que $\mathbb{R}^n_1$ y $\mathbb{R}^n_0$ que $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ es un espacio vectorial y que 1,0 es un espacio de puntos y por último demostrar que Δ es una biyección y todas sus características:

1) $\forall\, a \in \mathbb{R}^n_1$ $\Delta_a(b)$ es inyectiva

2) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\Delta(a,b) + \Delta(b,c) = \Delta(a,c)$

1) Fijado un $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\Delta(a,b) = \Delta(a,c) \iff$

$b - a = c - a \iff b = c \Rightarrow \Delta_a$ es inyectiva

2) $\Delta(a,b) + \Delta(b,c) = \cancel{b} - a + c - \cancel{b} = c - a = \Delta(a,c)$

b)

Ejercicio 3

a) Hipótesis: H - subespacio vectorial $\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \not\subseteq \mathbb{R}^n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = H \cap \mathbb{R}^n_1$ - subespacio afín $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: $H \cap \mathbb{R}^n_0$ es su dirección asociada

Ejercicio 5

$R_3 = \{(000); (100)(010)(001)\}$

$A(\{(212)(0-11)(110)\}) \subseteq \mathbb{R}^3$

Ecuaciones paramétricas:

$A = A(\{\overset{p_1}{(212)}\overset{p_2}{(0-11)}\overset{p_3}{(110)}\}) \Leftrightarrow$ tomemos el vector

$\vec{v} = \overrightarrow{p_2p_1} = (2\ 2\ 1)$ y $\vec{w} = \overrightarrow{p_2p_3} = (-1 0 -2) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = p_2 + L\{(\overrightarrow{p_2p_1})(\overrightarrow{p_2p_3})\} = (0-11) + L\{(221)(-10-2)\}$

$= L\{(02-3)(102)\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\lambda - \gamma \\ x_2 = -1 + 2\lambda \\ x_3 = 1 + \lambda - 2\gamma \end{cases}$$

Ecuaciones implícitas: Hay que calcular la ecuación de $\vec{A} =$

$$\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = -3\alpha + 2\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = x_1 \\ \alpha = \frac{x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$\Rightarrow A = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1$

Ejercicio 6

$a_0 = (101)$
$a_1 = (2-12)$
$a_2 = (112)$
$a_3 = (011)$

$R = \{a_0\ a_1\ a_2\ a_3\}$ es un sistema de referencia afín?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

Forma un sistema de referencia afín ya que son a.o.b y la dimensión coincide con la del espacio

Ejercicio 6 $\quad a_0 = (1\,0\,1)\; a_1 = (2\,-1\,2)\; a_2 = (1\,1\,2)$

$a_3 = (0\,1\,1) \Rightarrow \{a_0 - a_3\}$ forma un sistema de referencia afín $\Leftrightarrow \{a_i a_0\; a_i a_1\; a_i a_2\; a_i a_3\}$ forma una base $\Rightarrow$ Sea $B = \{\overrightarrow{a_0a_1}\; \overrightarrow{a_0a_2}\; \overrightarrow{a_0a_3}\} = \underbrace{\{(1\,-1\,1)(0\,1\,1)(-1\,1\,0)\}}_{B}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-(-1+1) \neq 0 \Rightarrow \text{forman base}$$

$\Rightarrow$ Sea el sistema de referencia cartesiano:

$R = \{(1\,0\,1);\; (1\,-1\,1)\,(0\,1\,1)\,(-1\,1\,0)\}$

$$\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_1}) = \overrightarrow{f(a_0)\,f(a_1)} = \overrightarrow{a_0a_2}$$
$$\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_2}) = \overrightarrow{f(a_0)\,f(a_2)} = \overrightarrow{a_0a_1} \Rightarrow M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_3}) = \overrightarrow{f(a_0)\,f(a_3)} = \overrightarrow{a_0a_3}$$

Sea el $R_3 = \{(0\,0\,0);\; \underbrace{(1\,0\,0)\,(0\,1\,0)\,(0\,0\,1)}_{B_3}\}$

$$C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_3B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\vec{f})_{B_3B_3} = C_{BB_3} \cdot M(\vec{f})_{BB} \cdot C_{B_3B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{a_0O} = (-1\,0\,-1)_{B_3} = (0\,-1\,1)_B \Rightarrow$

$\vec{f}(\overrightarrow{a_0O}) = f(a_3 - a_2) = (-1\,0\,1)_B =$

$= (-1\,1\,-1) + (-1\,1\,0) = (-1\,2\,0)$

$= (-2\,2\,-1)_{B_3} \Rightarrow$

$f(O) = f(a_0)_{B_3} + \vec{f}(\overrightarrow{a_0O})_{B_3} = (1\,0\,1) + (-2\,2\,-1)$

Ejercicio 7

$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad N = \left\{ y \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_5 = 5 \end{cases} \right\}$

M es sub. afín $\Leftrightarrow$ $\vec{M}$ es subespacio vectorial $\Rightarrow$

Sea $a \in M : a = (10100) \Rightarrow \Delta_a(M)$ tendría que ser sub. vectorial $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta_a(M) = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in M : \Delta_a(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \} =$

$= \{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) - (10100) : (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in M \} =$

$= \left\{ (x_1 - 1, x_2, x_3 - 1, x_4, x_5 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\} =$

$= \{ y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 : y_i = 0 \ \forall i \in \{1-4\} \} =$

$= L\{(00001)\}$

N es sub. afín $\Leftrightarrow$ $\vec{N}$ es sub. vectorial $\Rightarrow$

Sea $a \in N : a = (01005) \Rightarrow \Delta_a(N)$ tendría que ser sub. vectorial

$\Rightarrow \Delta_a(N) = \{ \Delta_a(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) : (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in N \} =$

$= \{ (x_1, x_2 - 1, x_3, x_4, x_5 - 5) : (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in N \} =$

$= \left\{ (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5 : \begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 1 \\ y_5 = 0 \end{matrix} \right\} =$

$= L\{(00100)\ (00010)\}$

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad N = \left\{ y \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_5 = 5 \end{cases} \right\}$$

$$\begin{cases} M = (10100) + L\{(00001)\} \\ N = (01005) + L\{(00100)(00010)\} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Es obvio ver que ni se cortan ni son paralelas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ se cruzan

Ejercicio 8: Sea $f: X \to X$

a) Demostrar: $Fix(f) \neq \phi \Rightarrow Fix(f)$ es subo afín $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Fix}(\vec{f}) = \ker(\overrightarrow{f - Id}) \Leftrightarrow \forall x \in Fix(f)\, \Delta_a(x) = \ker(\overrightarrow{f - Id}) : a \in Fix(f)$

$\subset)$ Sean $x \in Fix(f) \Rightarrow \Delta_a(x) = \vec{ax} \Rightarrow$

$\vec{f}(\vec{ax}) = \overrightarrow{f(a)f(x)} = \vec{ax} \Rightarrow \vec{ax} \in \ker(\overrightarrow{f - Id})$

$\supset)$ $Fix(f) \supset a + \ker(\vec{f} - Id) = \Delta_a^{-1}(\ker(\vec{f} - Id))$

Sea $y \in \ker(f - Id) : y = a + \vec{w} : \vec{w} \in \ker(\vec{f} - Id)$

$\Leftrightarrow \vec{f}(\vec{w}) = \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{ay} \Rightarrow$

$f(y) = f(a) + \overrightarrow{f(a)f(y)} = f(a) + \vec{f}(\vec{ay}) =$

$= a + \vec{ay} = y \Rightarrow y \in Fix(f)$

b) M - subo afín $\Rightarrow$ sea $p \in M$: $p = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n \Rightarrow$

$\Rightarrow f(p) = f(\lambda_0 p_0) + \ldots + f(\lambda_n p_n) = \lambda_0 f(p_0) + \ldots + \lambda_n f(p_n)$

Ejercicio 9

Sean $x, y \in X$, se define $[x,y]$ como el segmento determinado por x, y como $[x,y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$

$\Rightarrow$ Diremos que $C \subset X$ es convexo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, x, y \in C \quad [x,y] \subset C$

a) Sea $M \subset X$ - subespacio afín arbitrario

Sean $a, b \in M \wedge t \in \mathbb{K} \Rightarrow [x,y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$

$P = \{p_0 \ldots p_n\} : A(P) = M \Rightarrow$ Sea $x \in M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n \\ b = \alpha_0 p_0 + \ldots + \alpha_n p_n \end{cases}$$

$[a,b] = \{ta + (1-t)y : t \in [0,1]\} =$

$= \{t(\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n) + (1-t)(\alpha_0 p_0 + \ldots + \alpha_n p_n) : t \in [0,1]\}$

$= \{t\lambda_0 p_0 + \ldots + t\lambda_n p_n + (1-t)\alpha_0 p_0 + \ldots + (1-t)\alpha_n p_n\}$

$\Rightarrow$ Sean $a_i = t\lambda_i$, $b_i = t\alpha_i$ $\Rightarrow [a,b] = \{(a_0 + b_0)p_0 + \ldots + (a_n + b_n)p_n\}$

$= \{c_0 p_0 + \ldots + c_n p_n\} \subset M$

b) Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - familia de sub. afines convexos

$\Rightarrow$ Sean $x, y \in \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \Rightarrow x, y \in C_\alpha \;\forall \alpha \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow [x,y] \subset \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \Rightarrow C_\alpha$ es convexo

c) Sea $\emptyset \neq S \subset X$, demostrar que $\exists\, C(S)$ - conjunto convexo mínimo : $S \subset C(S)$

Ejercicio 10

a)

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{ccc|c} 28 & 14 & 0 & -21 \\ -28 & -12 & 0 & 28 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \boxed{x_2 = 7/2} \quad \boxed{x_1 = -5/2} \quad \boxed{x_3 = 2}$$

b) $M = \{(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\} \Rightarrow$

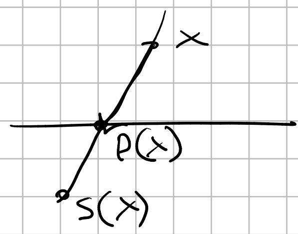
$M = \{\underbrace{(1\ 0\ 0)}_{P} + L\{\underbrace{(1\ -1\ 0)}_{\vec{e}_1}\underbrace{(1\ 0\ -1)}_{\vec{e}_2}\}\} \Rightarrow$

$\vec{f}(\vec{e}_1) = (0\ 1\ 0) \quad \vec{f}(\vec{e}_2) = (0\ 1/2\ 0) \quad f(P) = (1\ -3/2\ 4\ 1)$

$f(M) = \{(-3/2\ 4\ 1) + L\{(0\ 1\ 0)\}\}$

Ejercicio 11: Demostrar que $\mathcal{S}$ es una simetría

$$\mathcal{S}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(xyz) \to \mathcal{S}(xyz) = (-1+2x+y+z,\ 1-x-z,\ 2-2x-2y-z)$$



$$\mathcal{S}(000) = (-1\ 1\ 2)$$
$$\vec{\mathcal{S}}(\overrightarrow{xyz}) = (2x+y+z,\ -x-z,\ -2x-2y-z)$$

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{e}_1) = (2\ -1\ -2)$$
$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{e}_2) = (1\ 0\ -2) \Rightarrow m(\vec{\mathcal{S}}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{e}_3) = (1\ -1\ -1)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+-1-\lambda) = (-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\ker(\vec{\mathcal{S}}+Id) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{0} = \begin{cases} -2x_1 = x_3 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} = \boxed{\underbrace{L\{(1\ -1\ -2)\}}_{\vec{D}}}$$

$$\ker(\vec{\mathcal{S}}-Id) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) = \{x_1+x_2+x_3=0\} = \underbrace{L\{(1\ -1\ 0)(1\ 0\ -1)\}}_{\vec{m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \{(100) + L\{(1-10)(10-1)\}\}}$$

$$Fix(\mathcal{S}) = \left\{(x_1x_2x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1+x_2 = 1 \end{cases}\right\} \qquad p(x) = \frac{1}{2}S(x) + \frac{x}{2}$$

$$p(x) = 1/2\,(-1+3x+2y+2z,\ 1,\ 2-x-y)$$

Ejercicio 12

$\mathrm{Fix}(I) = \{(x y z) \in \mathbb{R}^3 : x-1 = y+1 = z\}$

$I|_{\pi}$ es una homotecia de razón $\lambda = 2$ con

$\pi = \{(x y z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 1\}$

$\mathrm{Fix}(I) = \{(x y z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x-1-y-1=0 \\ y+1-z=0 \end{cases} \begin{cases} x-y=2 \\ z-y=1 \end{cases}$

$\mathrm{Fix}(I) \cap \pi = \begin{cases} x-y=2 \\ z-y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$; $\boxed{x = 3/2}$ $\boxed{y = -1/2}$ $\boxed{z = 1/2}$

El punto $c = (3/2\ -1/2\ 1/2)$ será el centro de la homotecia

$\overrightarrow{\mathrm{Fix}}(\vec{I}) = \begin{cases} x-y=0 \\ z-y=0 \end{cases} \begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases} = L\{(1 1 1)\}$

$\vec{\pi} = x+y=0 = L\{(0 0 1)(1 -1 0)\}$

Si tomamos el sistema cartesiano R, tal que

$R = \{(3/2\ -1/2\ 1/2); (1 1 1)(0 0 1)(1 -1 0)\}$

$$M(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Se considera $\mathbb{R}^4$ con su estructura afín usual. Construir dos planos afines π_1 y $\pi_2 \subset \mathbb{R}^4$ tales que
a) Sean paralelos.
b) Se corten en una recta.
c) Se corten en un punto.

a) Sea el sistema de Ref canónico R

$R = \{(0000); (1000)(0100)(0010)(0001)\}$

$\pi_1 = (0000) + L\{(1000)(0100)\}$
$\pi_2 = (0100) + L\{(1000)(0100)\}$

b) $\pi_1 = (0000) + L\{(1000)(0100)\}$
$\pi_2 = (0000) \quad L\{(1000)(0010)\}$

c) $\pi_1 = (0000) + L\{(1000)(0100)\}$
$\pi_2 = (0000) + L\{(0010)(0001)\}$

2. En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ se consideran el punto $p = (0,1,0)$ y los subespacios $A = (-3/2\, 0\, 1)$

$$A : \begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ y = 0 \\ -2x + 2y + z = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad B : \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$$

a) Determinar los puntos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a,p) = d(A,p)$ y $d(b,p) = d(B,p)$.

$$b = (xyz) \quad \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4z^2 = 13 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$$

$1 + 4/5$

$2 \cdot 3\alpha + 4(1-4\alpha) = 2$

$B^{\perp} = (3\alpha, 1-4\alpha, 0)\} \quad -2(3\alpha) + (1-4\alpha) = 7$

$\{b = (-3/5, 9/5, 0)\}$

$5(1-4\alpha) = 9$

$5 - 20\alpha = 9$

$-20\alpha = 4$

$\boxed{\alpha = -1/5}$

3. Demostrar que cada una de las matrices que se dan a continuación determina un movimiento en los espacios afines euclídeos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$. Encontrar en cada caso un sistema de referencia euclídeo respecto del cual la matriz de la transformación sea la matriz reducida o canónica.

$$1/5\begin{pmatrix}5&0&0\\0&4&3\\-5&-3&4\end{pmatrix},\qquad 1/3\begin{pmatrix}3&0&0&0\\3&2&-1&2\\3&-1&2&2\\0&2&2&-1\end{pmatrix},\qquad 1/2\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&1&1&-1\\2&1&1&-1&1\\2&1&-1&1&1\\0&-1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$S(000)=(110)$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\3&2&-1&2\\3&-1&2&2\\0&2&2&-1\end{pmatrix}\quad \begin{vmatrix}(2/3-\lambda)&-1/3&2/3\\-1/3&(2/3-\lambda)&2/3\\2/3&2/3&(-1/3-\lambda)\end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\-1&2-\lambda&2\\2&2&-1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(-1-\lambda)-4-4-\Big(4(2-\lambda)+4(2-\lambda)-1-\lambda\Big)=$$

$$=(2-\lambda)^2(-1-\lambda)-8-\big(8(2-\lambda)-1-\lambda\big)=$$

$$=\cancel{(4+\lambda^2-4\lambda)(\ldots)}-8-\big(15-9\lambda\big)=$$

$$=-4\ldots-8-15\ldots=$$

$$=(-\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-27)\,1/3^3=(\lambda-3)^2(\lambda+3)\,1/3^3=$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$V_1=\ker(\vec{f}-I\!d)=\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&2/3\\-1/3&-1/3&2/3\\2/3&2/3&-4/3\end{pmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\cancel{-x_1-x_2+2x_3=0}\\x_1+x_2-2x_3=0\end{array}\right.$$

$$=\{(11\,1)(1-1\,0)\}\qquad \vec{\pi}=\{(111)(1-10)\}$$

$$V_{-1}\ \ker(\vec{f}+I\!d)=\begin{pmatrix}5/3&-1/3&2/3\\-1/3&5/3&2/3\\2/3&2/3&2/3\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{l}5x_1-x_2+2x_3=0\\-x_1+5x_2+2x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{array}\right.$$

$\boxed{2x_2=x_3}\ \boxed{x_1=x_2}\qquad =\{(1\,1\,-2)\}$

$$
1/2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow
\begin{array}{c|cccc}
-1/2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -1/2-\lambda & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\
1 & 1/2 & -1/2-\lambda & -1/2 & 1/2 \\
1 & 1/2 & -1/2 & -1/2-\lambda & 1/2 \\
0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2-\lambda
\end{array}
$$

$$\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\3&2&-1&2\\3&-1&2&2\\0&2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\3&2&-1&2\\3&-1&2&2\\0&2&2&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{array}{cccc}9&0&0&0\\12&&&\\12&&&\\12&&&\end{array}$$

$$g = T_{\vec{\omega}}\circ\underbrace{T_{-\vec{\omega}}\circ g}_{S}$$

$$\tfrac{12}{9}\quad\tfrac{12}{9}\quad\tfrac{12}{9}=\left(\tfrac{4}{3}\quad\tfrac{4}{3}\quad\tfrac{4}{3}\right)\Rightarrow\left(\tfrac{2}{3}\quad\tfrac{2}{3}\quad\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\tfrac{1}{9}\left(6\quad 6\quad 6\right)=\tfrac{1}{3}\left(2\quad 2\quad 2\right)=\vec{\omega}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2/3&1&0&0\\-2/3&0&1&0\\-2/3&0&0&1\end{pmatrix}}_{T_{-\vec{\omega}}}\underbrace{\begin{pmatrix}3&0&0&0\\3&2&-1&2\\3&-1&2&2\\0&2&2&-1\end{pmatrix}}_{g}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\1&2&-1&2\\1&-1&2&2\\1&2&2&-1\end{pmatrix}$$

$$S(0\,0\,0)=\left(\tfrac{1}{3}\quad\tfrac{1}{3}\quad\tfrac{1}{3}\right)$$

4. Sea X un espacio afín euclídeo. Se llama *simetría euclídea con desplazamiento* a un movimiento $f : X \to X$ que se descompone en composición de una simetría euclídea σ con base B y una traslación de vector $\vec{v} \in \vec{B}$.

a) Demostrar que $T_{\vec{v}} \circ \sigma = \sigma \circ T_{\vec{v}}$.

b) Demostrar que la composición de una simetría euclídea con una traslación arbitraria es una simetría euclídea con deslizamiento.

c) Demostrar que un movimiento f es una simetría euclídea con deslizamiento si y sólo si $f \circ f$ es una traslación.

a) Tomando el sistema de referencia

$R = \{$

obtener las correspondientes matrices reducidas.

22. Final Septiembre, 97. Sea X un espacio afín euclídeo arbitrario. Una aplicación afín $F: X \to X$ se dice que es una **semejanza** si existe $k > 0$ tal que para todo $a, b \in X$ se verifica que $d(F(a), F(b)) = kd(a, b)$ (se dice entonces que F es una **semejanza de razón** k). Es obvio que los movimientos son semejanzas de razón 1.

a) Demostrar que las homotecias son semejanzas. Hallar su razón. Probar que la composición de semejanzas es una semejanza. Concluir que las composiciones de movimientos y homotecias son semejanzas.

b) Caracterizar las semejanzas en términos de su aplicación lineal asociada. Deducir que las semejanzas son isomorfismos afines. Probar que las semejanzas forman un grupo (con la composición).

c) Sea $F: X \to X$ una semejanza de razon $k \neq 1$. Demostrar que $1 \notin \sigma(\vec{F})$.

d) Sea $F: X \to X$ una semejanza de razon $k \neq 1$. Demostrar que F tiene un único punto fijo.

e) Sea $F: X \to X$ una semejanza de razon $k \neq 1$. Demostrar que existen una homotecia H (de razón k) y un movimiento T, únicos, tales que $F = H \circ T = T \circ H$. Comprobar que el centro de H coincide con el único punto fijo de F.

1°) Probar que las semejanzas son aplicaciones afines:

si $k = 1 \Rightarrow F$ conserva las distancias $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es una isometría $\Rightarrow f$ es una aplicación afín

si $k > 1$: Podemos comprobar que F es afín componiéndola con una homotecia de razón $1/k$ y ver que $\Rightarrow F$ es una isometría y tendríamos el 1° caso:

$\vec{h} = 1/k \, \vec{Id_X} \qquad f = F \circ h \Rightarrow \overset{*}{F} = h^{-1} \circ f$

$\vec{F} = \vec{h}^{-1} \circ \vec{f}$

$d(f(a), f(b)) = d(F \circ h(a), F \circ h(b)) = k\vec{Id_X}$

$= 1/k \, d(F(a), F(b)) = 1/k \, d(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es isometría $\Rightarrow f$ es afín $\Rightarrow$

$\Rightarrow F = h^{-1} \circ f$ es afín

También hemos deducido que las aplicaciones lineales asociadas a las semejanzas, son múltiplos de una aplicación ortogonal *

Las semejanzas conservan los ángulos a pesar de aumentar la distancia y las normas, al igual que las distancias aumentan, las normas también con la misma razón

La composición de semejanzas da lugar a una tercera semejanza cuya razón es el producto de ambas razones

b) Probar que las semejanzas tienen inversa y ésta a su vez es una semejanza

Las semejanzas son isomorfismos afines

$$d(a,b) = d(F\circ F^{-1}(a), F\circ F^{-1}(b)) =$$
$$= k\, d(F^{-1}(a), F^{-1}(b)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(F^{-1}(a)\, F^{-1}(b)) = d(a,b)\cdot 1/k \Rightarrow$$
$\Rightarrow F^{-1}$ es una semejanza por definición con razón $1/k$

c) si $k \neq 1$ probar que $1 \notin \sigma(\vec{F})$

si $1 \in \sigma(\vec{F}) \Rightarrow \exists\, \vec{v} \in \vec{X} : \vec{F}(\vec{v}) = \vec{v} = \vec{F}(\vec{ab}) =$
$= \overrightarrow{F(a)F(b)} = \vec{ab}$, pero esto no puede ocurrir ya que $k \neq 1$ ¡¡¡

$1 - 1$

si $1 \in \sigma(\vec{F}) \Leftrightarrow \exists\, \vec{v} \neq 0 : \vec{F}(\vec{v}) = \vec{v} = \vec{ab}$

$\Delta_a : X \to \vec{X}$ biyectiva

$d(a,b) = \|\vec{ab}\|$

$d(F(a), F(b)) = \|\overrightarrow{F(a), F(b)}\| = \|\vec{F}(\vec{ab})\|$

pero estos valores no pueden ser lo mismo ya que $k \neq 1$

$$M(F) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & & \\ a_2 & M(\vec{F})_{BB} & \\ \vdots & & \\ a_m & & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ a la hora de hallar puntos fijos saldrá un sistema

$$\underbrace{(M(\vec{F}) - I_m)}_{\substack{\text{invertible} \\ \text{ya que } k \neq 1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ tiene solución única

Sea la matriz $A = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{matrix}$

Calcular el polinomio característico.

- caso base $k=2$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_0 \\ 1 & a_1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda a_1 - a_0$$

Supongamos que se verifica la propiedad para k, entonces

$$|A-\lambda Id| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k+1}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k+1}-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{k+2} a_0 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1)^{k+1}\left(\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} a_{i+1}\lambda^i\right) + (-1)^{k+3} a_0 =$$

$$= (-1)^{k+1}\left(\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i\right)$$

Sea $A \in M(\mathbb{K})_{r\times r}$ y $B \in M(\mathbb{K})_{n-r\times n-r}$

Considerando la matriz $C \in M(\mathbb{K})_{n\times n}$: $C = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Diferenciación de casos:

i) si $|A| = 0 \Rightarrow |C| = 0$, con lo que la igualdad es cierta.

ii) Si $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists\ \phi : B \to \dfrac{|C|}{|A|}$

Como dicha aplicación cumple las propiedades de los determinantes y por ser la única aplicación con esas propiedades, entonces $\phi(B) = |B|$, con lo que obtenemos:

$$|B| = \frac{|C|}{|A|} \Rightarrow |C| = |A||B|$$

10.

a) A diagonal $\Rightarrow \exists P$-invertible : $D = P \cdot A \cdot P^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow D^t = (P \cdot A \cdot P^{-1})^t = (P^{-1})^t \cdot A^t \cdot P^t$

b) A diagonalizable $\Rightarrow \exists P$-invertible : $D = P \cdot A \cdot P^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow D^2 = P \cdot A \cdot \cancel{P^{-1} \cdot P} \cdot A \cdot P^{-1} = P \cdot A^2 \cdot P^{-1}$

Pero la recíproca no.

c) Si A es diagonalizable e invertible $\Rightarrow$
$(|A| \neq 0) \wedge (\exists P$-invertible : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}) \Rightarrow$
$\Rightarrow A^{-1} \cdot A = Id \Leftrightarrow A^{-1} P \cdot D \cdot P^{-1} = Id \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$

El ejercicio de demostrar $\begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

se puede demostrar por inducción con el tamaño de a

15.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda - 1\right) = (2-\lambda)\,(2-\sqrt{5}-\lambda)\,(2+\sqrt{5}-\lambda)$$

$$\ker(A - 2Id) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \boxed{x_2 = 0} \\ \boxed{x_1 = 0} \end{cases}$$

$$\ker(A - 2Id) = L\{(0\,0\,1)\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda Id| = (\lambda - 1)^3 \qquad L\{(3,1,1)\}$$

$$T_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)\left(-\lambda(2-\lambda) - 1\right) =$$

$$= (1-\lambda)\left(-2\lambda + \lambda^2 - 1\right) =$$

$$= (1-\lambda)^3$$

$m_a(1) = 3$, como la matriz no es la identidad la matriz no es diagonalizable.

$$\ker(T - Id) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$L\{(101)(110)\}$ $\quad \text{Dim}(\ker(T-Id)) = 2 = m_g(1)$

$$\{\bar{0}\} \subsetneq \ker(T - Id) \subsetneq \ker(T-Id)^2 = \mathbb{R}^3 \qquad v(J) = 2$$

Sea $v_1 = (100) \Rightarrow L\{(100)\} \oplus L\{(101)(110)\} = \mathbb{R}^3 = \ker(T-Id)^2$

$(T-Id)(v_1) = (-1\,-1\,0)$

$B = \{(T-Id)(v_1), v_1, v_2\}$

$$M(T)_{BB} = (Id) + (T-Id) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_T(x) = (x-1)^2$$

2. Dar matrices $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tales que $P_A = P_B$ pero A y B no sean semejantes.

Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si $tr(A)^2 - 4|A| > 0$.

b) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Si $m_G(\lambda_1) = 2$ se verifica que A es diagonalizable.

c) Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y existe $k \geq 2$ tal que $A^k = A$, entonces $\sigma(A) \neq \emptyset$.

a) Falso

$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ diagonalizable $\Leftrightarrow tr(A)^2 - 4|A| > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Verdadero

c) $A = A^k \Rightarrow A - A^k = 0 \Rightarrow A(A^{k-1} - I) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |A|\,|A^{k-1} - I| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A^{k-1} - I| = 0 \end{cases}$

si $|A| \neq 0 \Rightarrow |A^{k-1} - I| = 0 \Rightarrow 1 \in \sigma(T) \Rightarrow A^{k-1} \cdot x = x \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 \cdot A^{k-1} x = A^2 x$

4. Demostrar que todo endomorfismo $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para alguna base B

$$M(T)_{B,B} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & -\lambda \end{pmatrix}$$

1. $F_1 = F_1 + \sum_{i=2}^{n} F_i$

2. $F_i = F_i - F_1$

$\Downarrow$

$P_T(\lambda) = (-\lambda + n - 1)(-\lambda - 1)^{n-1}$

es diagonalizable. (Indicación: Calcular P_T.)

5. Encontrar una matriz diagonal equivalente a las siguientes. Determinar una matriz de paso P tal que $D = P^{-1} \cdot A_i \cdot P$, donde D es la forma diagonal de A_i :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

9. Sean V un espacio vectorial y H un subespacio vectorial de V. Demostrar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(a) $H \neq V$, y para todo subespacio vectorial W de V tal que $H \subset W$ se tiene que $W = H$ o $W = V$.

(b) Existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $V = H \oplus [v]$.

(c) Existe una forma lineal sobre V, $f \neq 0$, tal que $H = \operatorname{Ker} f$.

V- espacio vectorial y $M \subset V \Rightarrow$

a) si $M \neq V$ $\forall$ $M \subset W$ se tiene que: $W = M$ ó $W = V$

b) $\exists\, v \in V$: $V = H \oplus L\{v\}$

c) $\exists\, f \in End(V)$: $Ker(f) = M$

b) $\Rightarrow$ a)

$\exists\, w \in V$: $V = M \oplus L\{w\} \Rightarrow \partial(V) - \partial(M) = 1 = \partial(w) \Rightarrow$
$\partial(M) = n-1 \Rightarrow$ Sea W- sub. vectorial : $M \subseteq W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial(W) - \partial(M) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial(W) - \partial(M) > 0 \text{ ó } (1) \\ \partial(W) - \partial(M) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1): si $\partial(W) - \partial(M) > 0 \Rightarrow \partial(W) = \partial(V) \Rightarrow W = V$
ya que la diferencia de las dimensiones es 1 y no $\exists$ dimensión intermedia

(2) si $\partial(W) - \partial(H) = 0 \Rightarrow$ Añadiendo que por hipótesis tenemos que $M \subset W \Rightarrow W = M$

a) $\Rightarrow$ b)

Supongamos que $\exists\, W \subset V$: $M \subsetneq W \subsetneq V \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Como mínimo $\partial(M) = n-2$ $\partial(W) = n-1$ $\partial(V) = n$
en dicho caso b) no se cumpliría pues serían necesarios (como mínimo) más vectores !!
$\Rightarrow$ Se cumple que $\partial(M) = n-1$ para que no $\exists$ un subespacio que le contenga que no sea él mismo, o la totalidad del espacio vectorial.

10. Demostrar que si H es un hiperplano vectorial de V y u es un vector de V - H entonces V = H $\oplus$ [u].

M es hiperplano $\Rightarrow d(M) = n-1 \Rightarrow \exists u \in V : V = M \oplus L\{u\}$

En particular este vector pertenece a $V - M$ pues si no, no sería suma directa

11. Sea Y un subespacio afín de un espacio afín X, con $Y \neq X$. Recordemos que, por definición, Y es un hiperplano de X si $\vec{Y}$ es un hiperplano vectorial de $\vec{X}$. Demostrar que Y es un hiperplano de X si y solamente si para todo subespacio afín A de X se tiene que $A \not\subset Y$ o $A \cap Y \neq \emptyset$.

Sea $Y \subsetneq X$ Y es hiperplano $\Leftrightarrow \vec{Y}$ es hiperplano

Demostrar : Y es hiperplano $\Leftrightarrow \forall A \subset X \; A \not\subset Y$ ó $A \cap Y \neq \emptyset$

$\Rightarrow)$ Y hiperplano $\Rightarrow d(Y) = n-1 \Rightarrow$ Sea A un subespacio afín arbitrario $\Rightarrow A \cap Y \neq \emptyset$ ó $A \oplus Y = V$

$A \cap Y \neq \emptyset$ ó

$A \oplus Y = V \Rightarrow A \cap Y = \emptyset \Rightarrow A \not\subset Y$

$\Leftarrow)$ $\forall A \subset X$ se tiene $A \not\subset Y$ ó $A \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow$

(1) Todo subespacio interseca con Y ó

(2) No esta contenido en Y

Es decir, el subespacio Y divide a X en 2 partes:

(1) Aquellos subespacios que intersecan con Y

(2) Aquellos subespacios que no están contenidos

(1) y (2). Supongamos que no, en cuyo caso

$\exists B \subset V : B \subset Y \wedge B \cap Y = \emptyset$

Corrección del 11:

$\Leftarrow)$ Supongamos que $\dim(\varphi) \leq n-2$ $\;\; Y = a + \vec{\varphi}$

$B_{\vec{Y}} = \{\vec{v_1} \ldots \vec{v_r}\}$ $r \leq n-2 \Rightarrow$ Podemos añadir $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ tales que $\{\underbrace{\underbrace{\vec{v_1} \ldots \vec{v_r}}_{\vec{Y}}\, \vec{w_1}}_{\vec{A}}\, \vec{w_2}\}$ son l.i.

$A = b + L\{\vec{w_1}\}$ $\quad \vec{A} \not\subset \vec{W} \Rightarrow A$ e Y no son paralelas y además no se cortan

$b = a + \vec{w_2}$ $\quad$ porque $\vec{ab} = \vec{w_2} \notin \vec{Y} + \vec{A}$

$\Rightarrow$ si Y no es un hiperplano podemos tomar puntos y rectas que no sean paralelas o intersequen

$\Rightarrow)$ hipótesis $d(Y) = n-1$ Sea $A \subset X \Rightarrow \begin{cases} \text{si } A \parallel Y \;\checkmark \\ \text{si no son paralelas} \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow A$ e Y intersecan porque sino, en caso contrario sea $\vec{ab} \notin \vec{A} + \vec{\varphi}$ con $a \in A$ y $b \in Y$ y $\Rightarrow d(A+Y) = n$, pero no es así pues sino, $\vec{ab}$ sí pertenecería a $\vec{A} + \vec{\varphi}$

12. Sean A, B subespacios afines de un espacio afin X (con dim. X = n) tales que $A \nparallel B$, dim. A = dim. B = m.

Demostrar que: $A \parallel B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ y existe un subespacio afin Y de X con dim. Y = m+1, $A \subset Y$, $B \subset Y$.

$A, B \subset X \qquad \partial(A) = \partial(B) = m \qquad \partial(X) = n$

$A \parallel B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$) A y B son paralelas por definición si tienen los mismos vectores de dirección, pero pasan por puntos diferentes $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Al pasar por puntos distintos y sus vectores de dirección son los mismos, su intersección es el vacío.

Además al pasar por puntos distintos, su unión dará lugar a un subespacio que incluirá a ambas

Corrección:

$A \parallel B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ~ $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \nparallel B$

Ahora:

$^* A \parallel B \Rightarrow \vec{A} = \vec{B}$ con $\partial(A) = \partial(B)$

si $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ \vec{ab} \in \vec{A} + \vec{B} \overset{*}{=} \vec{A} = \vec{B} \Rightarrow$

$b \in a + \vec{A} \Rightarrow b \in A \Rightarrow A = B \Rightarrow A \nparallel B$

pero esto llega a contradicción con el enunciado y por tanto son paralelas

Por último por definición de la suma de variedades afines, $A + B = A + B + \langle \vec{ab} \rangle \Rightarrow \exists\ Y \subset X : A \subset Y \wedge B \subset Y$

$\Leftarrow)$ $A \cap B = \emptyset$, $\partial(A) = m = \partial(B)$, y
$\exists\, C \subset X : \partial(C) = m+1 \wedge A \subset C \wedge B \subset C \Rightarrow$

- C podría ser la unión de subespacios idénticos, pero no, pues la intersección es nula y su dimensión es mayor, lo que no ocurriría si fueran idénticos
- A y B podrían cruzarse, pero eso no ocurre porque tienen la misma dimensión, y sino $\dim(C) = \max\{\partial(A), \partial(B)\}$

$\Rightarrow$ Al no quedar más opciones A y B han de ser paralelos.

Corrección:

$A \cap B = \emptyset$ y $\exists\, Y \subset X : A \subset Y \wedge B \subset Y$ con $\partial(Y) = m+1$

$\Rightarrow$ C podría ser:

↳ Resultado de subespacios idénticos, lo cual no ocurre por que $A \cap B = \emptyset$

↳ Resultado de espacios que se cortan, tampoco, por lo anterior

↳ Resultado de espacios que se cruzan: Por la fórmula de Grassman cuando $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \partial(A+B) = \partial(A) + \partial(B) + 1 - \cancel{\partial(A \cap B)}$
$\Rightarrow \partial(A) + \partial(B) + 1 = \partial(A+B)$ y entonces $\partial(A+B) = 2m+1$ ¡¡!!

↳ Por tanto, A y B tienen que ser paralelos

13. Sea X un espacio afin de dimensión mayor o igual que 3. Demostrar que un punto y una recta que no pasa por ese punto engendran un plano. Demostrar que dos rectas que se cortan segun un punto engendran tambien un plano.

X- espacio afín : $d(X) \geq 3$

Por definición de suma afín, la suma de 2 subespacios afines L_1 y L_2, se define como: $L_1 + L_2 = p_{1/2} + W_1 + W_2 + L\{\overrightarrow{p_1 p_2}\}$

por definición de dimensión $d(L_1 + L_2) = d(\overrightarrow{L_1 + L_2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(W_1) = 0$ pues es un punto

$d(W_2) = 1$ pues es una recta

$d(L\{\overrightarrow{p_1 p_2}\}) = 1$ también es una recta $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d(\overrightarrow{L_1 + L_2}) = 2 \Rightarrow L_1 + L_2$ es un plano

$L_1 = p_1 + W_1$

$L_2 = p_2 + W_2$ tales que $L_1 \cap L_2 = p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si tomamos que $p_1 = p$ y $p_2 = p \Rightarrow$

$L_1 + L_2 = p_1 + W_1 + W_2 + \cancel{L\{\overrightarrow{p_1 p_2}\}} \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 + L_2 = p + W_1 + W_2$ y por tanto al igual que antes engendran un plano

(14) Estudiar las aplicaciones afines entre espacios vectoriales. Demostrar que toda aplicación lineal es afín.

(15) Estudiar $t_v . t_u$, t_u^{-1}. Probar que si $t_u = t_v$ entonces $u = v$

$T_{\vec v} : X \to X$ $\qquad$ $T_{\vec u} : X \to X$

$x \to T_{\vec v}(x) = x + \vec v$ $\qquad$ $x \to T_{\vec u}(x) = x + \vec u$

$\Rightarrow (T_{\vec u} \circ T_{\vec v})(x) = T_{\vec u}(T_{\vec v}(x)) = T_{\vec u}(x + \vec v) =$

$= (x + \vec v) + \vec u$ Da lugar a una traslación también

si $T_{\vec v} = T_{\vec u} \Rightarrow \forall x \in X$ $T_{\vec v}(x) = T_{\vec u}(x) \Leftrightarrow x + \vec v = x + \vec u$

$\Leftrightarrow \vec v = \vec u$

(16) Sean $f : X \to X$ afín, $Y = \{p \in X \mid f(p) = p\}$. Demostrar que si $Y \neq \emptyset$ entonces Y es un subespacio afín de X. ¿Cuál es su dirección?

$Fix(f) \neq \emptyset \Rightarrow Fix(f)$ es un subespacio afín $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Fix(f)$ es igual a otro subespacio afín $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Sea $a \in Fix(f) \Rightarrow \Delta_a(Fix(f)) = \ker(\vec f - Id)$

$\subset]$ Sea $x \in Fix(f)$ $\Delta_a(x) = \vec{ax}$

$\vec f(\vec{ax}) = \overrightarrow{f(a)f(x)} = \vec{ax}$

$\supset]$ $\ker(\vec f - Id) \subset \Delta_a(Fix(f)) \Leftrightarrow \Delta_a^{-1}(\ker(\vec f - Id)) \subset Fix(f)$

Sea $y \in \ker(f - Id)^{+a} \Rightarrow y = a + \vec w$; $\vec w \in \ker(\vec f - Id) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec f(\vec w) = \vec w = \vec{ay} \Rightarrow f(y) = f(a) + \vec f(\vec w) = a + \vec{ay} = y$

(17) Sea $f: X \to K$ afín. Demostrar que f es constante o suprayectiva.

f - afín $\Rightarrow$ f es cte. o f es suprayectiva

$\Leftrightarrow$ si f no es cte $\Rightarrow$ f es suprayectiva

si f no es suprayectiva $\Rightarrow$ f es cte.

f no es cte $\Rightarrow$ $\vec{f}$ no es constante $\Rightarrow$

$\vec{f}$ representa valores reales y manda el 0 al 0

$\Rightarrow$ se puede representar todo número con imágenes de puntos de $\vec{f}$ $\Rightarrow$ $\vec{f}$ es sobreyectiva

$\Rightarrow$ f es sobreyectiva

f no es suprayectiva $\Rightarrow$ f no abarca la totalidad del espacio de llegada

(18) Sea $f:K \longrightarrow K$ afín no constante. Demostrar que f es una traslación o una homotecia.

$f: k \to k$ es traslación: $f: k \to k$

$x \to f(x) = x + \vec{w}$

ó es una homotecia $f: k \to k$

$x \to f(x) = c + \lambda \vec{cx}$

22. Sea $J : X \to X : J^2 = J$, demuestra que es una proyección:

$$J^2 - J = 0 \iff J(J-1) = 0 \Rightarrow \sigma(J) = \{1, 0\}$$

$\ker(J - Id) \Rightarrow$ Este es el plano sobre el qué se hace la proyección

$\ker(J - 0) = \ker(J) \Rightarrow$ este es el subespacio que varía

$\Rightarrow \ker(J - Id) \oplus \ker(J) = X$

$\Rightarrow$ Como son los únicos autovalores, tenemos que $N(0) \oplus N(1) = X$, pero quedaría demostrar que $N(0) = \ker(J)$ y que $N(1) = \ker(J - Id)$

1º $\ker(J) = \ker(J^2) \Rightarrow N(0) = \ker(J)$

2º $\ker(J - Id) = \ker(J^2 - Id) = \ker((J + Id)(J - Id))$

24) Estudiar si $\{(1,2,3),(-1,3,1),(7,-1,9)\}$ es a.i. $\iff$

($p_0 = (1,2,3)$, $p_1 = (-1,3,1)$, $p_2 = (7,-1,9)$)

$\iff \{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}\}$ son l.i.

$\overrightarrow{p_0p_1} = (-1\ 3\ 1) - (1\ 2\ 3) = (-2\ 1\ -2)$

$\overrightarrow{p_0p_2} = (7\ -1\ 9) - (1\ 2\ 3) = (6\ -3\ 6)$

$\overrightarrow{p_0p_2} = -2\overrightarrow{p_0p_1}$ por tanto, no son l.i.

25) Demostrar que $\{(1,-1,2),(2,0,2),(2,-2,2),(1,-1,3)\}$, $\{(0,1,1),(1,1,2)$ $(1,1,0),(0,2,1)\}$ son referencias afines de $\mathbb{R}^3$. Determinar la expresión analítica del cambio de referencia. Obtener las coordenadas baricéntricas del punto $(0,1,1)$ en ambas.

1) Sea $p_0 = (2\,0\,2)$ $p_1 = (1\,-1\,2)$ $p_2 = (2\,-2\,2)$ $p_3 = (1\,-1\,3)$

$\overrightarrow{p_0p_1} = (1\,-1\,2) - (2\,0\,2) = (-1\,-1\,0) \sim (1\,1\,0)$

$\overrightarrow{p_0p_2} = (2\,-2\,2) - (2\,0\,2) = (0\,-2\,0) \sim (0\,1\,0)$

$\overrightarrow{p_0p_3} = (1\,-1\,3) - (2\,0\,2) = (-1\,-1\,1) \sim (1\,1\,-1)$

$\Rightarrow R = \{\underbrace{(2\,0\,2)}_{O};\ \underbrace{(1\,1\,0)\ (0\,1\,0)\ (1\,1\,-1)}_{B}\}$

2) Sea $p_0 = (0\,1\,1)$ $p_1 = (1\,1\,2)$ $p_2 = (1\,1\,0)$ $p_3 = (0\,2\,1)$

$\overrightarrow{p_0p_1} = (1\,1\,2) - (0\,1\,1) = (1\,0\,1)$

$\overrightarrow{p_0p_2} = (1\,1\,0) - (0\,1\,1) = (1\,0\,-1)$

$\overrightarrow{p_0p_3} = (0\,2\,1) - (0\,1\,1) = (0\,1\,0)$

$\Rightarrow R' = \{\underbrace{(0\,1\,1)}_{O'};\ \underbrace{(1\,0\,1)\,(1\,0\,-1)\,(0\,1\,0)}_{B'}\} = \begin{cases} \alpha+\beta \\ \lambda \\ \alpha-\beta \end{cases}$

$$C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{RR'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

25) Demostrar que $\{(1,-1,2),(2,0,2),(2,-2,2),(1,-1,3)\},\{(0,1,1),(1,1,2)$ $(1,1,0),(0,2,1)\}$ son referencias afines de $\mathbb{R}^3$. Determinar la expresión analítica del cambio de referencia. Obtener las coordenadas baricéntricas del punto $(0,1,1)$ en ambas.

a)
$$\begin{cases} \lambda_1(1\,-1\,2)+\lambda_2(2\,0\,2)+\lambda_3(2\,-2\,2)+\lambda_4(1\,-1\,3)=(0\,1\,1) \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4=0 \\ -\lambda_1-2\lambda_3-\lambda_4=1 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=1 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_4=-1}$ $\boxed{\lambda_3=-3/2}$

$\boxed{\lambda_1=3}$ $\boxed{\lambda_4=1/2}$

b)
$$\begin{cases} \lambda_1(0\,1\,1)+\lambda_2(1\,1\,2)+\lambda_3(1\,1\,0)+\lambda_4(0\,2\,1)=(0\,1\,1) \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4=1 \\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_4=1 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_4=0}$

$\boxed{\lambda_1=1}$

$\boxed{\lambda_2=0}$

$\boxed{\lambda_3=0}$

26) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación afín tal que $f(1,-1,2)=(0,1,1)$, $f(2,0,2)=(0,0,1)$, $f(2,-2,2)=(1,0,0)$, $f(1,-1,3)=(1,1,1)$. Determinar la matriz de f en la referencia cartesiana formada por el punto $(0,0,0)$ y la base canónica de R^3 (referencia cartesiana canónica).

$$f(\underset{p_0}{1\,-1\,2}) = (0\,1\,1) \qquad f(\underset{p_1}{2\,0\,2}) = (0\,0\,1)$$

$$f(\underset{p_2}{2\,-2\,2}) = (1\,0\,0) \qquad f(\underset{p_3}{1\,-1\,3}) = (1\,1\,1)$$

$p_0 = (1\,-1\,2)$

$p_1 = (2\,0\,2) \qquad \overrightarrow{p_0p_1} = (2\,0\,2)-(1\,-1\,2) = (1\,1\,0)$

$p_2 = (2\,-2\,2) \qquad \overrightarrow{p_0p_2} = (2\,-2\,2)-(1\,-1\,2) = (1\,-1\,0)$

$p_3 = (1\,-1\,3) \qquad \overrightarrow{p_0p_3} = (1\,-1\,3)+(-1+1-2) = (0\,0\,1)$

$$\vec{f}(1\,1\,0) = \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_1}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_1)} = (0\,0\,1)-(0\,1\,1) = (0\,-1\,0)$$

$$\vec{f}(1\,-1\,0) = \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_2}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_2)} = (0\,0\,1)-(1\,0\,0) = (-1\,0\,1)$$

$$\vec{f}(0\,0\,1) = \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_3}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_3)} = (0\,0\,1)-(1\,1\,1) = (-1\,-1\,0)$$

$$R' = \{(1\,-1\,2);\ (1\,1\,0)(1\,-1\,0)(0\,0\,1)\}$$

$$M(f)_{RR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(f)_{RR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(\vec{f})_{BB}$$

$$\overrightarrow{p_0O} = (-1\,1\,2)_B = (0\,-1\,2)_{B'}$$

$$f(O)_B = (p_0)_B + \vec{f}(\overrightarrow{p_0O})_B = (1\,-1\,2)_{B_3} + (-1\,-2\,-1)_{B_3} = (0\,-3\,1)_{B_3}$$

27) Sean $R=\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$ la referencia afín de $\mathbb{R}^3$ asociada a la cartesiana canónica (referencia afín canónica), $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación afín tal que $f(a_0)=(1,-1,1)$, $f(a_1)=(0,0,1)$, $f(a_2)=(1,0,1)$, $f(a_3)=(0,1,1)$. Determinar la expresión analítica de f en R y en la referencia cartesiana canónica. Estudiar si f es biyectiva. Si no lo es, determinar $f(\mathbb{R}^3)$ y establecer de forma concreta que f no es inyectiva.

$a_0=(000)$ $a_1=(100)$ $a_2=(010)$ $a_3=(001)$

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(a_0)=(1-11)$ $f(a_1)=(001)$ $f(a_2)=(101)$ $f(a_3)=(011)$

$R=\{(000);\underbrace{(100)}_{\overrightarrow{a_0a_1}}\underbrace{(010)}_{\overrightarrow{a_0a_2}}\underbrace{(001)}_{\overrightarrow{a_0a_3}}\}$

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ no es biyectiva

$f(x_1x_2x_3)=(1-x_1-x_3,\ -1+x_1+x_2+2x_3,\ 1)$

28) Sea R como en el problema anterior y $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación afín tal que $f(a_0)=a_1$, $f(a_1)=$ [redacted] $+3a_1-a_2+2a_3$, $f(a_2)=$ [redacted] $+4a_2-4a_3$, $f(a_3)=$ [redacted] $+2a_2-2a_3$. Hallar las matrices de f en R y en la referencia cartesiana canónica. Determinar los puntos fijos de f.

$f(000) = (100) \quad f(100) = (3\ -1\ 2)$

$f(010) = (0\ 4\ -4) \quad f(001) = (0\ 2\ -2)$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_1}) &= (2\ -1\ 2) \\ \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_2}) &= (-1\ 4\ -4) \\ \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_3}) &= (2\ -4\ -2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \right.$$

$3 + (-4) = -1$

$(-4\ 1\ -4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$0 + 4 + 4 - 8 = 0$

$0 \cancel{-8} - 4 \cancel{+8}$

29) Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio $V((1,2,3),(-1,3,1),(3,1,5),(5,0,6))\subset \mathbb{R}^3$, en la referencia afín canónica y en la cartesiana canónica.

$$V(\underset{a_0}{(1\,2\,3)}\underset{a_1}{(-1\,3\,1)}\underset{a_2}{(3\,1\,5)}\underset{a_3}{(5\,0\,6)})$$

$$\overrightarrow{a_0a_1} = (-2\ 1\ -2)$$

$$\overrightarrow{a_0a_2} = (2\ -1\ 2) \Rightarrow L = (1\,2\,3) + L\{(2\ -1\ 2)(4\ -2\ 3)\} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{a_0a_3} = (4\ -2\ 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2\alpha \\ x_2 = 2 - \alpha \\ x_3 = 3 + \beta \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

30) Hallar el centro y la expresión analítica en la referencia cartesiana canónica de una homotecia $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, de razón 2, tal que $f(2,0,1,0)=(-1,0,1,1)$.

Hallar centro y matriz de f-homotecia tal que $f(2010) = (-1011)$ $\quad c = (x_1x_2x_3x_4)$

$$f(2010) = (x_1x_2x_3x_4) + 2(2-x_1, -x_2, 1-x_3, -x_4);$$

$$f(2010) = (\cancel{x_1x_2x_3x_4}) + (4\cancel{-2x_1}, \cancel{-2x_2}, 2\cancel{-2x_3}, \cancel{-2x_4});$$

$$f(2010) = (4-x_1, -x_2, 2-x_3, -x_4) = (-1011)$$

$$\boxed{x_1 = 5} \quad \boxed{x_3 = 1} \qquad c = (5\,0\,1\,-1)$$

$$\boxed{x_2 = 0} \quad \boxed{x_4 = -1} \qquad f(x) = c + 2\vec{x}$$

$$\vec{f}(1000) = (2000) \quad \vec{f}(0100) = (0200)$$

$$\vec{f}(0010) = (0020) \quad \vec{f}(0001) = (0002)$$

$$R_4 = \{(0000); (1000)(0100)(0010)(0001)\}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

31) Hallar el centro, la razón y la expresión analítica en la referencia cartesiana canónica de una homotecia $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,-1,0,1)=(0,1,1,0)$, $f(1,0,0,1)=(0,3,1,0)$.

$$f(1\ -1\ 0\ 1) = (0\,1\,1\,0) \qquad c=(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$$
$$f(1\,0\,0\,1) = (0\,3\,1\,0)$$

$$\begin{cases} (0110) = (x_1x_2x_3x_4) + \lambda(1-x_1, -1-x_2, -x_3, 1-x_4) \\ (0310) = (x_1x_2x_3x_4) + \lambda(1-x_1, -x_2, -x_3, 1-x_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+\lambda(1-x_1)=0 \\ x_2+\lambda(-1-x_2)=1 \\ x_3+\lambda(-x_3) = 1 \\ x_4+\lambda(1-x_4)=0 \\ x_2+\lambda(-x_2) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+\lambda-\lambda x_1=0 \\ x_2-\lambda-\lambda x_2 = 1 \\ x_4+\lambda-\lambda x_4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda+x_1(1-\lambda)=0 \\ -\lambda+x_2(1-\lambda)=1 \\ +\lambda\ x_4(1-\lambda)=0 \end{cases}$$

$$x_4(1-\lambda)=-\lambda$$

$$x_3=\frac{1}{1-\lambda}=-1 \qquad x_1=\frac{-\lambda}{1-\lambda}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$\boxed{c=(2\ 3\ -1\ 2)}$$

$$x_4=\frac{-\lambda}{1-\lambda}=\frac{-2}{-1}=2 \qquad x_2=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}=\frac{3}{1}=3$$

$$\boxed{\lambda=2}$$

52) Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$f(x_1,x_2,x_3)=(1+\frac{2}{3}x_1,-1+\frac{2}{3}x_2,2+\frac{2}{3}x_3)$

es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

$$f(100) = (1+2/3, -1, 2) = (5/3 \;\; -1 \;\; 2)$$

$$f(010) = (1, -1+2/3, 2) = (1 \;\; -1/3 \;\; 2)$$

$$f(001) = (1, -1, 2+2/3) = (1 \;\; -1 \;\; 8/3)$$

$$f(000) = (1 \; -1 \; 2)$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c = (3 \; -3 \; 6)}$$

$$\boxed{\lambda = 2/3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 1/3\,x_1 = 0 \\ -1 - 1/3\,x_2 = 0 \\ 2 - 1/3\,x_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 6 \end{array}$$

33) Determinar la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $Y: 3x_1+2x_2-x_3=0=$ $=x_1+x_2-2$, paralelamente a $W=[(1,1,0),(0,1,1)] \equiv \vec{D}$

$$Y = \begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2 = 2 \end{cases} \qquad W = \{(110)(011)\} = \vec{D}$$

$$\vec{Y} = \begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} = L\{(1-11)\}$$

$$p=(115)$$

Sea $R = \{(115); (1-11)(110)(011)\}$

$$M(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

34) Determinar la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $Y: x_1+x_2+1=0$, paralelamente a $W=[(1,1,-1)] \equiv \vec{D}$

$$M = \{x_1+x_2+1=0\} \Rightarrow \vec{M} = \{x_1+x_2=0\} =$$
$$= L\{(001)(1-10)\}$$

Sea $R = \{(0-10); (001)(1-10)(11-1)\}$

$$M(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

35) Demostrar que la aplicación $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1,x_2,x_3)=(-1-x_2+x_3,-1-x_1+x_3,-1-x_1-x_2+2x_3)$ es una proyección. Determinar la base, la dirección y la simetría asociada.

$\vec{f} = (-x_2+x_3, -x_1+x_3, -x_1-x_2+2x_3)$

$f(000) = (-1,-1,-1)$

$\vec{f}(100) = (0\ -1\ -1)$

$\vec{f}(010) = (-1\ 0\ -1)$

$\vec{f}(001) = (1\ 1\ 2)$

$$M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda)+2 - (\lambda+\cancel{\lambda}+2\cancel{\lambda}) =$$

$$= 2\lambda^2-\lambda^3+\cancel{2}-\lambda\cancel{-2} = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda; \quad \boxed{\lambda=0}$$

$$+\lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$(\lambda-1)^2 \quad \boxed{\lambda=1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} -x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_3=0 \\ -x_1-x_2+2x_3=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_2=x_3 \\ x_1=x_3 \end{array} =$$

$$= L\{(111)\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1+x_2-x_3=0 = L\{(101)(011)\}$$

Tomando la base $B=\{(101)(011)(111)\}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R=\{(001);B\}$$

36) Demostrar que la aplicación $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1,x_2,x_3)=(-1+2x_1+x_2+x_3, 1-x_1-x_3, 2-2x_1-2x_2-x_3)$ es una simetría. Determinar la base, la dirección y la proyección asociada.

$\vec{J} = (2x_1+x_2+x_3 \quad -x_1-x_3 \quad -2x_1-2x_2-x_3)$

$J(000) = (-1\ 1\ 2)$

$\vec{J}(100) = (2,-1,-2) \quad \vec{J}(010) = (1\ 0\ -2) \quad \vec{J}(001) = (1\ -1\ -1)$

$$M(\vec{J}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\ker(\vec{J} - 1 I) = L\{(1\ -1\ 0)\ (1\ 0\ -1)\} = \vec{M}$ (base)

$$\ker(\vec{J}+1 I) = \begin{cases} -x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1=+x_2 \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2x_2 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} = \underbrace{L\{(1\ -1\ -2)\}}_{\vec{D}}$$

$M = (-1\ 1\ 2) + L\{(1\ -1\ 0)(1\ 0\ -1)\}$ base

$\vec{D} = L\{(1\ -1\ -2)\}$ dirección

$$\boxed{p(x) = \tfrac{1}{2}(-1+3x_1+x_2+x_3,\ 1-x_1-x_3+x_2,\ 2-2x_1-2x_2)}$$

37) Estudiar la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $y_1=-x_2+x_3+2$, $y_2=-x_1+x_3+2$, $y_3=x_1+x_2-2x_3$.

Hallar las imágenes de los planos $x_1-x_2+1=0$ y $x_1-2x_2+2x_3-1=0$ y la imagen inversa del punto $(1,1,2)$.

$$f(x_1x_2x_3) = (-x_2+x_3+2,\ -x_1+x_3+2,\ x_1+x_2-2x_3)$$

$$\vec{f}(x_1x_2x_3) = (-x_2+x_3,\ -x_1+x_3,\ x_1+x_2-2x_3)$$

$$\pi_1 = x_1-x_2+1=0 \Rightarrow \vec{\pi}_1 = x_1-x_2=0 = L\{\underset{\vec{v}_1}{(1\,1\,0)}\underset{\vec{v}_2}{(0\,0\,1)}\}$$

$$p=(0\,1\,0) \quad \pi_1 = (0\,1\,0) + L\{(1\,1\,0)(0\,0\,1)\}$$

$$\pi_2 = x_1-2x_2+2x_3-1=0 \Rightarrow \vec{\pi}_2 = x_1-2x_2+2x_3=0 =$$

$$q=(1\,0\,0) \qquad = L\{\underset{\vec{w}_1}{(0\,1\,1)}\underset{\vec{w}_2}{(2\,1\,0)}\}$$

$$\vec{f}(\vec{v}_1) = (-1,-1,2) \quad \vec{f}(\vec{v}_2) = (1\,1\,-2) \quad f(p) = (1\,2\,1)$$

$$\Rightarrow f(\pi_1) = (1\,2\,1) + L\{(1\,1\,-2)\} \subseteq \pi_1$$

$$\vec{f}(\vec{w}_1) = (0\,1\,-1) \quad \vec{f}(\vec{w}_2) = (-1\,-2\,3) \quad f(q) = (2\,1\,1)$$

$$\Rightarrow f(\pi_2) = (2\,1\,1) + L\{(0\,1\,-1)(-1\,2\,3)\}$$

$$f^{-1}(1\,1\,2) = \left\{ (x_1x_2x_3)\in\mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2-1 \end{cases} \right\}$$

$$\boxed{x_1 = x_2}$$

$$\boxed{x_3 = x_2 - 1}$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_2+x_3+2 \\ y_2 = -x_1+x_3+2 \\ y_3 = x_1+x_2-2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -\cancel{x_2}+\cancel{x_2}-1+2 = 1 \\ y_2 = -\cancel{x_1}+\cancel{x_1}-1+2 = 1 \\ y_3 = \cancel{2x_1}-\cancel{2x_1}+2 \end{cases}$$

38) Estudiar la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $y_1=x_2+x_3$, $y_2=2x_1+2x_2-1$, $y_3=x_1-x_3+2$.

Determinar las imágenes y las imágenes inversas del plano $x_1+x_2+2x_3-3=0$ y de la recta $2x_1-x_2+x_3-2=0=x_1-2x_2-6$.

$f(x_1) = x_2 + x_3$

$f(x_2) = 2x_1 + 2x_2 - 1$

$f(x_3) = x_1 - x_3 + 2$

$\pi_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \quad P = (1\,0\,1)$

$\vec{\pi_1} = x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 = L\{\underset{\vec{v_1}}{(2\,0\,-1)}\underset{\vec{v_2}}{(1\,-1\,0)}\}$

$r_1 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow q = (0\,-3\,-1)$

$\vec{r_1} = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} = L\{\underset{\vec{w_1}}{(2\,1\,-3)}\}$

$\vec{f}(x_1) = x_2 + x_3$

$\vec{f}(x_2) = 2x_1 + 2x_2$

$\vec{f}(x_3) = x_1 - x_3$

$\vec{f}(\vec{v_1}) = (-1\,4\,3) \quad \vec{f}(\vec{v_2}) = (-1\,0\,1) \quad f(P) = (1\,1\,2)$

$f(\pi_1) = (1\,1\,2) + L\{(-1\,4\,3)(-1\,0\,1)\}$

$\vec{f}(\vec{w_1}) = (-2\,6\,5) \quad f(q) = (-4\,-7\,3)$

$f(r_1) = (-4\,-7\,3) + L\{(-2\,6\,5)\}$

$\vec{f}(\vec{e_1}) = (0\,2\,1) \quad \vec{f}(\vec{e_2}) = (1, 2, 0) \quad \vec{f}(\vec{e_3}) = (1\,0\,-1)$

$x_1 = \alpha$

$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 \\ y_3 = x_1 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = y_1 - x_3 \\ 2x_1 = y_2 - 2x_2 \\ x_3 = x_1 - y_3 \end{cases}$

39) Determinar una aplicación afín $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sabiendo que deja fijos los puntos de la recta $x_1=x_2=x_3+1$, y que induce sobre el plano $x_1+x_2+1=0$ una homotecia de razón 3. Hallar la imagen del punto (1,3,1) por f.

$$Fix(g) = r = \{x_1 = x_2 = x_3 + 1\} = \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 + 1 \end{cases}$$

$$\vec{r} = \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 \end{cases} = L\{(111)\}$$

$$\pi = x_1 + x_2 + 1 = 0 \qquad g|_\pi : \pi \to \pi, \quad x \to g(x) = c + 3\vec{cx}$$

$$\vec{\pi} = x_1 + x_2 = 0 = L\{(1-10)(001)\}$$

Sea la base $B = \{(111)(1-10)(001)\}$

$$\Rightarrow m(\vec{g}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = +1/2} \quad \boxed{x_2 = +1/2} \quad \boxed{x_3 = -1/2}$$

Tomaremos el punto $p = (-1/2 \; -1/2 \; 1/2)$ para crear el sistema de referencia R,

$R = \{(1/2 \;\; 1/2 \; -1/2); (111)(1-10)(001)\}$

$$m(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C_{R_3 R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \;\; 3/2 \; -1 \;\; 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

40) Determinar una aplicación afín $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sabiendo que induce una traslación sobre el plano $x_1+x_2+1=0$, y que transforma la recta $x_1+x_3+2=0=x_2-2$ en la recta $x_1+1=0=3x_2+x_3-5$, dejando fijo el punto de intersección de ambas.

$$\vec{f}|_{\pi} = Id_{\vec{\mathbb{R}}_3}$$

$\pi: x_1+x_2+1=0$ $\qquad$ $f|_\pi$ es una traslación

$$r: \begin{cases} x_1+x_3+2=0 \\ x_2-2=0 \end{cases} \qquad f(r)=r' \qquad r' = \begin{cases} x_1+1=0 \\ 3x_2+x_3-5=0 \end{cases}$$

$$Fix(f) = r \cap r'$$

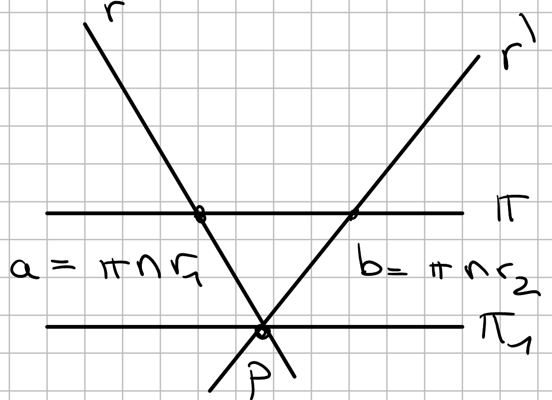
$$\vec{r} = \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases} = L\{(1\ 0\ -1)\} \qquad \vec{r}' = \begin{cases} x_1=0 \\ x_3=-3x_2 \end{cases} = L\{(0\ 1\ -3)\}$$

$$\vec{\pi} = \{x_1+x_2=0\} = L\{(1\ -1\ 0)(0\ 0\ 1)\} \Rightarrow p = (-1\ 2\ -1)$$

Tomando la base $B = \{(1\ -1\ 0)(0\ 0\ 1)(1\ 0\ -1)\}$

$$M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Tomando p como punto del sistema de referencia



$$B = \{\vec{u}_1, \vec{ab}, \vec{pa}\}$$

$$\vec{f}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$$

$$\vec{f}(\vec{ab}) = \vec{ab}$$

$$\vec{f}(\vec{pa}) = \vec{pa} + \vec{ab} = \vec{pb}$$

$a = (-3\ 2\ 1)$ $\quad$ $b = (-1\ 0\ 5)$ $\quad$ $\vec{ab} = (2\ -2\ 4)$

$\vec{u}_1 = (0\ 0\ 1)$

$\vec{pa} = (2\ 0\ -2)$

$$\Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41) Sean X espacio afín sobre K, $f: X \to X$ una proyección de base Y, y dirección W, $\lambda \in K-\{0\}$. Se define una aplicación $h: X \to X$ mediante $h(p)=f(p)+\lambda\overrightarrow{f(p)p}$. Demostrar que h es afín, determinar la aplicación lineal asociada y los puntos fijos de h. h se denomina dilatación de base Y, dirección W, y razón λ. Probar que toda simetría es una dilatación.

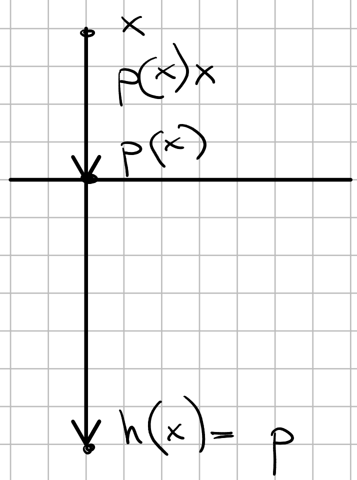
f : proyección base Y y dirección W, $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$

$h : X \to X$

$p \to h(p) = f(p) + \lambda\overrightarrow{f(p)p}$

$h(x) = p(x) + \lambda\overrightarrow{p(x)x}$

$\vec{h}(\vec{ax}) = \lambda\overrightarrow{p(x)x}$



$h : X \to X$ es afín $\iff$ $\vec{h} : \vec{X} \to \vec{X}$ es lineal

$\vec{h}(\vec{ax}) = \overrightarrow{h(a)h(x)} = f(x) + \lambda\overrightarrow{f(x)x} - \left(f(a) + \lambda\overrightarrow{f(a)a}\right) =$

$= f(x) - f(a) + \lambda\overrightarrow{f(x)x} - \lambda\overrightarrow{f(a)a} =$

$= \overrightarrow{f(a)f(x)} + \lambda\overrightarrow{f(x)x} - \lambda\overrightarrow{f(a)a} =$

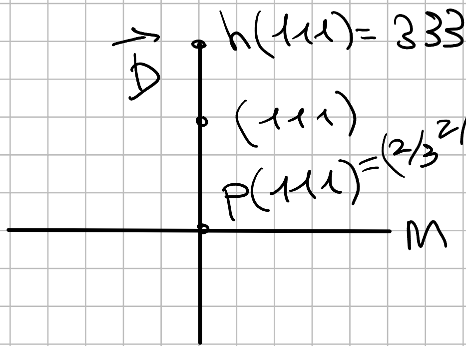
$= \overrightarrow{f(a)f(x)} + \lambda\overrightarrow{f(x)x} + \overrightarrow{af(a)} = \lambda\overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)f(x)} + \lambda\overrightarrow{f(x)x}$

42) Determinar la dirección, la razón y la expresión analítica de una dilatación de R^3 cuya base es el plano $x_1+x_2+x_3=2$, sabiendo que transforma el punto (1,1,1) en el (3,3,3).

$M = \{x_1+x_2+x_3=2\} \Rightarrow \vec{M} = \{x_1+x_2+x_3=0\} = L\{(1\,-1\,0)\,(1\,0\,-1)\}$

$h(111)=(333) \qquad \vec{D} = L\{(222)\} = L\{(111)\}$

$M = (110) + L\{(1\,-1\,0)(1\,0\,-1)\} \qquad (111)h(111) \perp M$



$h(x) = p(x) + \lambda\, \overrightarrow{p(x)x}$

$\vec{h}(x) = \quad + \lambda\, \overrightarrow{p(x)x}$

$\vec{h}(x) = \vec{p} + \lambda(Id - p(x))$

sea la base $B = \{(1\,-1\,0)(1\,0\,-1)(1\,1\,1)\}$

$D_{111} = (111) + \alpha(111) = (1+\alpha,\ 1+\alpha,\ 1+\alpha) \qquad p_i = (2/3\ 2/3\ 2/3)$

$1+\alpha+1+\alpha+1+\alpha = 2$

$3\alpha = -1; \quad \alpha = -1/3$

$(333) = (2/3\ 2/3\ 2/3) + \lambda(1/3\ 1/3\ 1/3);$

$3 = \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{3} \qquad 9 = 2+\lambda \qquad \boxed{7=\lambda}$

$\Rightarrow M(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M(\vec{h}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ para la base

$B = \{(1\,-1\,0)\,(1\,0\,-1)(1\,1\,1)\}$

y tomando para formar un sistema de referencia el punto $p = (1\,1\,0)$

43) Una dilatación de R^3 tiene como base el plano $2x_2+3x_3+4=0$ y su aplicación lineal asociada transforma el vector $u=(1,1,-1)$ en $2u$. Determinar su expresión analítica.

$M = \{2x_2 + 3x_3 + 4 = 0\} \Rightarrow M = (0\,-2\,0) + L\{(1\,0\,0)(0\,3\,-2)\}$

$\vec{M} = \{2x_2 + 3x_3 = 0\} = L\{(1\,0\,0)(0\,3\,-2)\}$

$h(1\,1\,-1) = (2\,2\,-2) \Rightarrow \vec{D} = L\{(1\,1\,-1)$

Tomamos la base $B = \{(1\,0\,0)(0\,3\,-2)(1\,1\,-1)\}$

$h(x) = p(x) + \lambda \overrightarrow{p(x)x}$

$D_{11-1} = (1\,1\,-1) + L\{(1\,1\,-1)\} = (1\,1\,-1) + \alpha(1\,1\,-1)$
$= (1+\alpha\;\; 1+\alpha\;\; -1-\alpha)$

$\cancel{2} + \cancel{2\alpha} - 3 \cancel{-3\alpha} + 4 = 0; \qquad 3 = \alpha$

$\Rightarrow p(x) = (1\,1\,-1) + 3(1\,1\,-1) = (1\,1\,-1) + (3\,3\,-3) = (4\,4\,-4)$

$h(1\,1\,-1) = (4\,4\,-4) + \lambda(-3\,-3\,3) = (2\,2\,-2)$

$4 - 3\lambda = 2; \quad +3\lambda = +2; \quad \boxed{\lambda = 2/3}$

$\Rightarrow M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 2/3 \end{pmatrix}$ tomando $R = \{p; B\}$ con $p = (0\,-2\,0)$

44) Sea $h:R^3 \longrightarrow R^3$ la aplicación afín definida por

$$y_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1+x_2-\frac{3}{2}x_3,\quad y_2=-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3,\quad y_3=-x_2+2x_3.$$

(a) Demostrar que h es una dilatación. Determinar su base, su dirección y su razón.

(b) Sea $g:R^3 \longrightarrow R^3$ la homotecia de centro $(-1,2,2)$ y razón 2. Demostrar que g.h es una dilatación. Determinar su base, su dirección y su razón.

a) $g(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3$

$g(x_2) = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3$ $\qquad g(000)=(1/2\ 0\ 0)$

$g(x_3) = -x_2 + 2x_3$

Tomando el sistema de referencia canónico

$\boxed{x_2 = x_3}$

$$m(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$M = (100) + L\{(1\,-1\,-1)\}$ $\quad \lambda = 1/2 \Rightarrow m(\vec{g}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$

$\vec{D} = L\{(0\,3\,2)(1\,0\,0)\}$

$h(x) = p(x) + \lambda\, \overrightarrow{p(x)x} \Rightarrow \qquad h = p + \lambda(Id - p)$

Sea la proyección sobre la recta M y con dirección D: $p(x)$ $R = \{(100); (100)(032)(100)\}$

$$m(p) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = m(h)$$

con $\lambda = 1/2$

44) Sea $h:R^3 \to R^3$ la aplicación afín definida por

$y_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1+x_2-\frac{3}{2}x_3,\quad y_2=-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3,\quad y_3=-x_2+2x_3.$

(a) Demostrar que h es una dilatación. Determinar su base, su dirección y su razón.

(b) Sea $g:R^3 \to R^3$ la homotecia de centro (-1,2,2) y razón 2. Demostrar que g.h es una dilatación. Determinar su base, su dirección y su razón.

b) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de centro $c(-122)$ $\lambda=2$

$g(x) = c+\lambda\vec{cx}; \quad g(x) = (-122)+2\vec{cx}$

Con la base canónica

$g(000) = (1-2-2)$

$g(1-2-2) = (1-2-2)$

$$m(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } R=\{000;(100)(010)(001)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{M = (-122)+L\{(100)(032)\}}_{\text{plano de puntos fijos (base)}} \quad \underbrace{\vec{D} = L\{(1-1-1)\}}_{\text{dirección}}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\Rightarrow m(g\circ h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

45) Sean h:X $\longrightarrow$ X una dilatación, g:X $\longrightarrow$ X una homotecia. Obtener condiciones necesarias y suficientes para que g.h sea una dilatación. Si se cumplen dichas condiciones, determinar la base, la dirección y la razón de g.h.

$\partial(x) = p(x) + \lambda \overrightarrow{p(x)x}$ $\qquad h(x) = c + \lambda \overrightarrow{cx}$

$\partial = p + \lambda(\partial - p)$ $\qquad h = c + \lambda(\partial - c)$

46) Una aplicación afín $f: R^3 \longrightarrow R^3$ transforma el origen en el punto $(3,9,-6)$ y tiene como subespacio de puntos fijos el plano $x_1+x_2+2x_3+3=0$. Obtener su expresión analítica. Estudiar si f es una dilatación.

$f(000) = (39-6)$ $\qquad$ $\overrightarrow{f(x)x} = (-3-96) = \vec{v}$

$Fix(f) = \{x_1+x_2+2x_3+3=0\} = M = (0-1-1) + L\{(1-10)(20-1)\}$

$\vec{M} = \{x_1+x_2+2x_3=0\} = L\{(1-10)(20-1)\}$

Al ser $\overrightarrow{f(x)x} = \vec{D}$ si fuera una dilatación $\vec{M} \oplus \vec{D} = \mathbb{R}^3$ pero no ocurre, así que no es una dilatación

Si $\mu \cdot 1/\lambda = 1$ y $c \in m \Rightarrow g \circ h =$ dilatación

14. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $T : V \to V$ un endomorfismo. Se sabe que $\sigma(T) = \{3, 1, -1, -2, 0\}$ con

- $\dim \operatorname{Ker}(T - 3Id_V) = \dim \operatorname{Ker}(T - 3Id_V)^2 = 2$,
- $\dim \operatorname{Ker}(T - Id_V) = 1$, $\dim \operatorname{Ker}(T - Id_V)^2 = \dim \operatorname{Ker}(T - Id_V)^3 = 2$,
- $\dim \operatorname{Ker}(T + Id_V) = 3$, $\dim \operatorname{Ker}(T + Id_V)^2 = \dim \operatorname{Ker}(T + Id_V)^3 = 5$,
- $\dim \operatorname{Ker}(T + 2Id_V) = 3$, $\dim \operatorname{Ker}(T + 2Id_V)^2 = 6$, $\dim \operatorname{Ker}(T + 2Id_V)^3 = \dim \operatorname{Ker}(T + 2Id_V)^4 = 7$.
- $\dim \operatorname{Ker} T = 4$, $\dim \operatorname{Ker} T^2 = 6$, $\dim \operatorname{Ker} T^3 = 8$, $\dim \operatorname{Ker} T^4 = \dim \operatorname{Ker} T^5 = 10$.

Se pide:

a) Demostrar que T no es un isomorfismo.

b) Determinar razonadamente la dimensión de V.

c) Calcular las multiplicidades e índice de cada autovalor.

d) Calcular los polinomios característico y mínimo de T.

e) Obtener la matriz de Jordan de T.

a) $0 \in \sigma(T) \Rightarrow \ker(T) \neq 0 \Rightarrow$ T no es inyectiva $\Rightarrow$ T no es un isomorfismo

b) $3)$ $\dim(N(3)) = 2$ $\qquad$ $-2)$ $\dim(N(-2)) = 7$

$1)$ $\dim(N(1)) = 2$ $\qquad$ $0)$ $\dim(N(0)) = 10$

$-1)$ $\dim(N(-1)) = 5$

$\dim(V) = 26$

c) $3)$ $m_A = 2 \mid m_g = 2$ $\qquad$ $-2)$ $m_A = 7 \mid m_g = 3$

$1)$ $m_A = 2 \mid m_g = 1$ $\qquad$ $0)$ $m_A = 10 \mid m_g = 4$

$-1)$ $m_A = 5 \mid m_g = 3$

d) $P_T = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^5 (\lambda + 2)^7 (\lambda)^{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_T = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)^3 (\lambda)^4$

e)
$$\begin{pmatrix} -3 & & & & & & & & \\ & -3 & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 2 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow 3 \rightarrow 6 \longrightarrow 7$

$(T+2)^2(v_1) \leftarrow (T+2)(v_1) \leftarrow v_1$

$(T+2)(v_1)$ $\quad v_1$

$(T+2)(v_2)$ $\quad v_2$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ & -2 & 1 & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & 1 & & \\ & & & & -2 & & \\ & & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\Rightarrow \lambda(\lambda^2-1) =$

20. Final Junio 96. Se considera el conjunto
$M = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : A(A^2 - I_3) = 0\}$ $\Leftrightarrow A^3 - A = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda$ polinomio anulador

a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que, para alguna base B de $\mathbb{R}^3$, $M(T)_{B,B} \in M$. Demostrar que T es diagonalizable.

b) Sea $A \in M$. Hallar todas las posibles matrices diagonales semejantes a A.

a) Sea $Q(\lambda)$ el polinomio característico $\Rightarrow$
$Q(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)$ al tener todos los $m_a = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow T$ es diagonalizable

b) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

18. Sea $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ una matriz nilpotente. Demostrar:

a) Si el índice de nilpotencia de A es 3, no existe una matriz $M \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ tal que $M^3 = A$.

b) Si el índice de nilpotencia de A es 2, no existe ningún polinomio P tal que $P(A)^3 = A$.

a) $A^3 = 0 \Rightarrow \nexists M : M^3 = A$;

$(M^3)^3 = M^9 = A^3 = 0 \Rightarrow M$ nilpotente $\Rightarrow \sigma(T) = \{0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow P_T = \lambda^5 \Rightarrow M^5 = 0 \Leftrightarrow M^3 \cdot M^2 = 0 \Leftrightarrow A \cdot M^2 = 0 \Rightarrow$
$A \cdot M^2 \cdot M = 0 \cdot M \Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow$ el índice de nilpotencia de A es 2

b) $A^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{P(A)^3 - A}_{=0} \Rightarrow \sum a_i A^i = a_1 A + a_0 I$;

$A + \frac{a_0}{a_1 - 1} I = 0 \Rightarrow \left(A + \frac{a_0 I}{a_1 - 1}\right) x = 0 \Rightarrow \frac{a_0 I}{a_1 - 1} \in \sigma(A)$

$\Rightarrow a_0 = 0$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$, pruébese que $\forall a \in \mathbb{R},\ a < 0$, la matriz A no es diagonalizable (consideramos A como matriz real). Diagonalícese el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene asociada (en la base canónica) a la matriz A para $a = 1$, localizando una base en la que f tenga forma diagonal.

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & a & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-4a) \Rightarrow$$

$a=1$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-4) = (2-\lambda)(\lambda-2)(2+\lambda) = (2-\lambda)^2(2+\lambda)$$

$$\ker(A-2Id) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & +1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \qquad x_2 = 2x_3$$

$$= L\{(0\,2\,1)(1\,0\,0)\}$$

$$\ker(A+2Id) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ 4x_1+2x_2+6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$L\{(2\,1\,-1)\}$$

7. Determinar, según los valores de a, cuándo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ -2+2a & -a & -1+2a \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

es diagonalizable. Determinar una matriz no singular P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$$\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix} \qquad (\lambda-1)^2(\lambda-a)$$

si $a=1$ A no es diagonalizable pues A-Id tiene rango 3 y por tanto no hay suficientes vectores.

si $a \neq 1$

λ	ma	mg
a	1	1
1	2	

$$\ker(A-Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_1 = -x_3$$

$$= L\{(1\,0\,-1)\,(0\,1\,0)$$

$$\ker(A-aId) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ 2x_1 = -x_3 \end{matrix}$$

$$L\{(-1\,0\,2)$$

12. (Primer Parcial 95). Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $T: V \to V$ un endomorfismo tal que $T \circ T = -Id_V$.

a) Demostrar que T es un isomorfismo y que $\sigma(T) = \emptyset$.

b) Supongamos que el subconjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ es tal que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_{n-1})\}$ es l.i.

Demostrar que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_{n-1}), T(u_n)\}$ también es l.i..

c) Demostrar que la dimensión de V es par.

Consideremos ahora un $\mathbb{C}$-espacio vectorial W y sea $F: W \to W$ un endomorfismo tal que $F \circ F = -Id_W$.

d) Calcular los posibles $\sigma(F) \subset \mathbb{C}$ (exactamente tres).

e) Demostrar que F es diagonalizable y encontrar las posibles matrices diagonales asociadas a F.

a) T es isomorfismo $\Leftrightarrow$ $T \in End(V) \wedge T$ es inyectiva $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ como $A^2 = -Id \Rightarrow$

$\Rightarrow |A^2| = -1 \Leftrightarrow |A||A| = -1 \Leftrightarrow |A| = -1/|A|$ como

$|A| \neq 0$ ya que $|A^2| = -1 \Rightarrow$

Por tanto T es un isomorfismo

b)

c) $|T^2| = (-1)^n$; $|T||T| = (-1)^n \Rightarrow T \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 2p$

d) $|T| = \pm i \Rightarrow \sigma(F) = \{i\}$

$\sigma(F) = \{-i\}$ ya que,

$\sigma(F) = \{-i, i\}$

$Fx = \lambda x$

$F^2 - \lambda^2 x = -x \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

10. Demostrar que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda)(\lambda^2+1)$

no es diagonalizable como elemento de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ pero sí lo es si la consideramos como elemento de $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$. En este caso, encontrar matrices $D, P \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ donde D es diagonal y P es invertible tales que $D = P^{-1}MP$. Hallar M^{1000}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_T = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = (1-\lambda)(i-\lambda)^2$$

$\sigma(T) = \{1, i\}$

λ	Ma	Mg
1	1	1
i	1	1
$-i$	1	1

$$\ker(T-I) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right. \qquad \boxed{x_1 = -x_2}$$

$L\{(1\,-1\,0)(0\,0\,1)\}$

$$\ker(T-iI) = \begin{pmatrix} 1/2 - i & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 - i & 1/2 \\ -1 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$V(i) = L\{(1\ 1\ 2i)\}$

$V(-i) = L\{(1\ 1\ -2i)\}$