

ÁLGEBRA LINEAL - I

UNED

José F. Fernando

J. Manuel Gamboa

Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ -7 & (n=2) \\ -8 & (n=3) \\ 0 & (n \geq 4) \end{cases}$$

Prefacio

Este es un curso de Álgebra Lineal dividido en dos volúmenes, que totalizan cuatro capítulos y 20 lecciones. En conjunto, se cubre todo lo que a veces se denomina *geometría vectorial*, y se corresponde con los temarios de la materia que con motivo de los nuevos planes de estudios se han implantado en las Facultades de Ciencias, en particular Físicas y Matemáticas, en la Facultad de Informática y en las Escuelas Técnicas.

Basados en nuestra experiencia tras haber impartido cursos similares durante muchísimos años hemos pretendido escribir un texto muy directo, despojándolo de todos los formalismos evitables sin menoscabar el rigor ni en los enunciados ni en las pruebas de los mismos. En todo caso, nuestro objetivo esencial es explicar el significado verdadero de las cosas.

Como hemos dicho, el curso está dividido en cuatro capítulos, de los cuales este volumen contiene los dos primeros:

Capítulo I. *Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.*

Capítulo II. *Espacios vectoriales y aplicaciones lineales.*

Como su nombre indica, el capítulo I está dedicado al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales desde un punto de vista matricial, centrado en los conceptos de rango y determinante. El procedimiento elegido para ese estudio es el método de Gauss-Jordan. El capítulo II presenta y analiza los objetos propios del álgebra lineal: los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales. El énfasis se pone por supuesto en los espacios de tipo finito, y se termina con la noción clave de dualidad.

La materia está distribuida de manera que cada capítulo puede aligerarse a conveniencia sin que eso afecte a la consistencia de la presentación. En cualquier caso, confiamos en que este primer volumen pueda cubrirse en su to-

talidad, exceptuando tal vez la dualidad en la lección 10, que puede limitarse a rectas e hiperplanos.

Como pauta general, los ejemplos son muy numerosos y parte central de la exposición. Además, cada lección concluye con una colección de 15 problemas y ejercicios de dificultad variable (los que la tienen mayor están señalados con un ♣). Al final de cada capítulo hay una sección con 50 cuestiones *verdadero/falso* con las que el lector podrá contrastar cómo ha asimilado los conceptos estudiados. Se incluyen en un apéndice las soluciones de todos los ejercicios, problemas y cuestiones propuestos en él. También hemos incluido una lista de símbolos que suele ser de ayuda para encontrar con rapidez el significado de una notación, y un índice terminológico, para la búsqueda correspondiente. Hay además una lista breve de lecturas recomendadas.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a las profesoras Concepción Fuertes y Celia Martínez, que han leído muy meticulosamente versiones preliminares, detectando numerosas erratas y errores y contribuyendo sustancialmente a que la exposición sea más ágil y consistente. Otra mención debemos al profesor José F. Ruiz, cuyos atinados comentarios críticos durante muchísimas conversaciones han influido notablemente en la presentación de partes importantes de la materia.

Un agradecimiento especial le debemos al profesor Emilio Bujalance y a sus alumnos de esta asignatura en la UNED. Estos últimos pusieron de manifiesto la necesidad de completar muchos detalles en la primera edición de esta obra y Emilio tuvo la paciencia de transmitirnos aquellos puntos que resultaban oscuros para el alumnado y sugerirnos, con gran acierto, una exposición alternativa.

*Jose F. Fernando, J. Manuel Gamboa, Jesús M. Ruiz
Pozuelo, Madrid, Majadahonda*

12 de abril, 2011

Contenido

Capítulo I. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices	1
1. Sistemas de ecuaciones. El método de Gauss-Jordan	1
2. Teorema de Rouché-Frobenius	17
3. Operaciones con matrices	32
4. El determinante	44
5. Aplicaciones del determinante	61
Cuestiones	70
Apéndice: Solucionario del capítulo I	
Soluciones §1	73
Soluciones §2	84
Soluciones §3	99
Soluciones §4	111
Soluciones §5	124
Soluciones de las cuestiones	140
Capítulo II. Espacios vectoriales y aplicaciones lineales	141
6. Espacios vectoriales	141
7. Espacios vectoriales de tipo finito	156
8. Operaciones con subespacios	174
9. Aplicaciones lineales	187
10. El espacio dual	210
Cuestiones	222
Apéndice: Solucionario del capítulo II	
Soluciones §6	225
Soluciones §7	235

Soluciones §8	247
Soluciones §9	258
Soluciones §10	271
Soluciones de las cuestiones	285
Lecturas ulteriores	287
Símbolos	289
Índice	293

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Resumen. Este primer capítulo trata de lo que es consustancial al Álgebra Lineal: las *ecuaciones lineales*. En la primera lección se introducen los sistemas de ecuaciones lineales y se describe el método de Gauss-Jordan para su resolución. Para entender mejor dicha resolución, en la segunda lección se introducen las matrices y el rango, y se obtiene el teorema de Rouché-Frobenius. En la tercera lección se completa con detalle la presentación de las operaciones de matrices. La cuarta lección está dedicada al concepto de determinante y la quinta a cómo se utiliza éste para calcular rangos, matrices inversas y resolver sistemas determinados.

Todo esto se hace desde un punto de vista directo, basado en la idea elemental bien conocida de que un sistema se resuelve haciendo operaciones con sus ecuaciones. En realidad estas lecciones no pretenden descubrir al lector ningún método diferente del que ya conoce para resolver sistemas, sino explorar el contenido conceptual de ese mismo. Así, el lector no sabrá sólo resolver sistemas, sino que sabrá que lo sabe, en el sentido profundo que esto último tiene: el porqué y no sólo el para qué.

1. Sistemas de ecuaciones. El método de Gauss-Jordan

El objetivo de esta lección es obtener un algoritmo eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Recordamos que una *ecuación lineal* (en n incógnitas o variables) es una expresión del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los *coeficientes* a_i y el *término independiente* b son *escalares*, esto es, elementos del cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} sobre el que estemos trabajando, y las x_i son

las *incógnitas o variables*, que consideramos ordenadas según sus índices. Una ecuación del tipo $0x_1 + \cdots + 0x_n = b$ se abrevia como $0 = b$. Ya se aprecia que una ecuación así es muy especial: si b no es nulo, tal ecuación se denomina *incompatible*, y si lo es, se denomina *trivial*. Una ecuación que no sea del tipo anterior, se denomina *compatible*. Nótese que los tres conceptos anteriores son excluyentes.

Si en una ecuación compatible el coeficiente a_i de la variable x_i es nulo, simplemente no se escribe el sumando $a_i x_i$; dicho esto, *la primera incógnita de una ecuación compatible* es la primera variable que aparece en ella.

Un *sistema lineal* (en n incógnitas o variables) es una lista finita de ecuaciones lineales:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Si todos los términos independientes b_1, \dots, b_m del sistema anterior son 0, decimos que el sistema es *homogéneo*.

Una *solución* del sistema $(*)$ es una upla $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Se dice que dos sistemas lineales son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos 1.1 (1) Los sistemas

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + 2y = 0, \\ x - 3y = 0, \end{cases}$$

son equivalentes, pues en ambos casos la única solución es $x = y = 0$.

(2) También son equivalentes los sistemas

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 14, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 9, \\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 19x_4 = 4, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 - 6x_4 = -5, \\ x_2 + 7x_4 = 8, \\ x_3 - 7x_4 = -6, \end{cases}$$

pero esto lo comprobaremos más adelante. \square

Resolver un sistema lineal consiste en encontrar *todas* sus soluciones, o determinar que no tiene ninguna. En este último caso el sistema se llama *incompatible*. Otro caso extremo es que cualquier $c \in \mathbb{K}^n$ sea solución, y entonces el sistema se llama *trivial*. El lector entenderá ahora por qué hemos denominado como lo hemos hecho a las ecuaciones del tipo $0 = b$.

Observaciones 1.2 (1) Nótese además que los sistemas triviales son aquéllos en los que todas las ecuaciones son triviales.

En efecto, para comprobarlo procedemos por reducción al absurdo. Es claro que ninguna de las ecuaciones de un sistema trivial es incompatible. Por tanto si hay alguna no trivial ésta deberá ser compatible y la escribimos $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$; como alguno de sus coeficientes será no nulo, digamos $a_i \neq 0$, entonces ninguna upla $c = (0, \dots, 0, c_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, con $c_i \neq b/a_i$, satisface la ecuación anterior y por tanto el sistema no es trivial.

(2) Sin embargo, un sistema puede ser incompatible y no contener ninguna ecuación incompatible. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

es incompatible y ninguna de sus ecuaciones lo es. Por tanto, a diferencia de la trivialidad, la incompatibilidad no siempre se reconoce a simple vista.

(3) En cualquier caso, para resolver un sistema siempre podemos suponer que no tiene ecuaciones triviales ni incompatibles. En efecto, si hay alguna ecuación incompatible, el sistema no tiene solución, y si tiene ecuaciones triviales, suprimiéndolas obtenemos un sistema equivalente. \square

Los sistemas que no son ni incompatibles ni triviales se denominan *compatibles*. Estos sistemas pueden ser de dos tipos: (1) *compatibles determinados*, si tienen una única solución, y (2) *compatibles indeterminados*, si tienen más de una solución. *Discutir* un sistema consiste en decidir si es compatible, y en ese caso si es determinado.

(1.3) Sistema homogéneo asociado. Nótese que los sistemas homogéneos son todos compatibles, pues $(0, \dots, 0)$ es siempre solución, y son compatibles determinados cuando ésta solución, a la que denominamos *trivial*, es la única que tienen. Por otra parte, el sistema $(*)$ tiene asociado de inmediato uno homogéneo que denotaremos por $(**)$, sin más que hacer cero todos los

términos independientes. Para estudiar la relación entre las soluciones de un sistema lineal (*) y las del homogéneo (**) que le acabamos de asociar necesitamos aprender a *sumar* y *restar* uplas. Dadas dos uplas $c = (c_1, \dots, c_n)$ y $d = (d_1, \dots, d_n)$ se definen respectivamente su suma y su resta como sigue

$$c + d = (c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n) \quad \text{y} \quad c - d = (c_1 - d_1, \dots, c_n - d_n).$$

De este modo, si c y d son soluciones del sistema (*) su resta es solución del sistema homogéneo (**). En efecto, para cada i se cumple

$$\begin{aligned} a_{i1}(c_1 - d_1) + \dots + a_{in}(c_n - d_n) \\ = (a_{i1}c_1 + \dots + a_{in}c_n) - (a_{i1}d_1 + \dots + a_{in}d_n) = b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ es solución del sistema (*), cualquier otra solución $d \in \mathbb{K}^n$ de (*) se obtiene sumando a c una solución del sistema homogéneo (**). En efecto, acabamos de probar que $d - c$ es una solución de (**), por lo que basta observar que $d = c + (d - c)$.

Finalmente, debemos insistir en la necesidad de precisar siempre el número de incógnitas. En efecto, si buscamos soluciones del sistema $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ en las dos incógnitas x_1, x_2 , entonces sólo existe la solución $(0, 0)$, pero si hay tres incógnitas x_1, x_2, x_3 , entonces hay más soluciones: todas las ternas del tipo $(0, 0, c_3)$. En lo sucesivo, suponemos fijadas n incógnitas x_1, \dots, x_n .

Una consecuencia útil de lo anterior es la siguiente: *Si dos sistemas compatibles son equivalentes sus sistemas homogéneos asociados también lo son.*

En efecto, denotemos S_1 y S_2 dos sistemas compatibles y equivalentes y tomamos una solución común c . Sean H_1 y H_2 los sistemas homogéneos asociados a S_1 y S_2 , respectivamente. Entonces, si a es solución de H_1 , acabamos de probar que $a + c$ es solución de S_1 , luego también lo es de S_2 . Por tanto la resta $a = (a + c) - c$ es solución de H_2 . Así hemos demostrado que toda solución de H_1 lo es de H_2 e intercambiando los papeles de ambos sistemas concluimos que H_1 y H_2 tienen las mismas soluciones.

(1.4) Combinaciones lineales de ecuaciones. Nuestra estrategia para resolver un sistema lineal consistirá en obtener sucesivamente sistemas equivalentes a él, cada vez más sencillos, hasta llegar a uno muy fácil de resolver. Para ello utilizaremos la operación de multiplicar una ecuación f_i por un número α_i , una segunda f_j por otro α_j , y sumar los resultados para obtener una nueva ecuación, que denotaremos $\alpha_i f_i + \alpha_j f_j$. Con más precisión, si

$$f_k : a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k,$$

entonces las ecuaciones $\alpha_k f_k$ y $\alpha_i f_i + \alpha_j f_j$ son

$$\begin{aligned}\alpha_k f_k : & (\alpha_k a_{k1})x_1 + \cdots + (\alpha_k a_{kn})x_n = \alpha_k b_k, \\ \alpha_i f_i + \alpha_j f_j : & (\alpha_i a_{i1} + \alpha_j a_{j1})x_1 + \cdots + (\alpha_i a_{in} + \alpha_j a_{jn})x_n = \alpha_i b_i + \alpha_j b_j.\end{aligned}$$

Esta nueva ecuación se llama *combinación (lineal)* de las dos ecuaciones f_i y f_j , y se dice que *depende* de ellas. Por supuesto, se pueden combinar más de dos ecuaciones, lo que representamos abreviadamente utilizando un sumatorio $\sum \alpha_i f_i = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m$, si el número de ecuaciones es m .

Obsérvese que si $c = (c_1, \dots, c_n)$ es una solución de las ecuaciones que se combinan, también lo es de la combinación: al sustituir cada $x_k = c_k$ en el primer miembro de cada ecuación f_i obtenemos b_i , luego al hacer esa sustitución en el primer miembro de la nueva ecuación $\sum \alpha_i f_i$ obtenemos $\sum \alpha_i b_i$, que es el segundo miembro de esa nueva ecuación. Con fórmulas, si $a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n = b_i$ para $i = 1, \dots, m$, entonces, sumando,

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{i1}\right)c_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{in}\right)c_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i (a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i.$$

Así pues, al añadir a un sistema de ecuaciones lineales ciertas combinaciones lineales de las mismas *no perdemos soluciones*. Esto es evidentemente importante, puesto que las que nos interesan son las soluciones del sistema inicial.

Pero también podemos entender lo anterior de una manera cualitativa. En efecto, si sabemos que una ecuación dada de nuestro sistema es combinación de otras, cualquier solución de esas otras lo será automáticamente de la dada. Por tanto, *esa ecuación dada es superflua*, luego podemos eliminarla, y el nuevo sistema es equivalente al inicial. Por supuesto, tal eliminación simplifica el sistema. Decimos que esto es cualitativo, pues en realidad no necesitamos saber qué combinación lineal específica hay que hacer para obtener la ecuación, sino sólo saber que existe una tal combinación, es decir, que la ecuación depende de otras. También puede ocurrir que ninguna ecuación dependa de otras, y decimos entonces que las ecuaciones son *independientes*.

Así pues, nuestro propósito es doble. Por un lado, aprender a combinar ecuaciones para sustituir las iniciales por otras más simples. Por otro, descubrir qué ecuaciones dependen de las demás, para eliminarlas.

Ejemplo 1.5 Los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 = 5, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$$

son equivalentes, porque la tercera ecuación del primero $f_3 = f_1 + f_2$ es la suma de sus dos primeras ecuaciones. \square

(1.6) Operaciones elementales. Para conseguir el objetivo propuesto en el párrafo anterior hay que analizar con cuidado la naturaleza de la operación en la que se basa: la combinación de ecuaciones. Para ello hay que investigar las que llamaremos *operaciones elementales*:

- (i) Sustituir una ecuación por la que resulta de multiplicarla por un escalar no nulo: $f_k \rightsquigarrow \lambda f_k$.
- (ii) Sustituir una ecuación por la que resulta de sumarle otra multiplicada por un escalar no nulo: $f_k \rightsquigarrow f_k + \mu f_\ell$.
- (iii) Intercambiar la posición de dos ecuaciones del sistema: $(f_k, f_\ell) \rightsquigarrow (f_\ell, f_k)$.

Las dos primeras operaciones sirven para reemplazar una ecuación dada por una combinación de esa misma y otras cualesquiera. Las multiplicaciones por cero se excluyen para evitar trivialidades, y para que las operaciones sean reversibles: para revertir (i) basta dividir por λ (= multiplicar por $1/\lambda$) la ecuación que hemos obtenido, y para revertir (ii) basta restar (= multiplicar por -1 y sumar) lo mismo que hemos sumado. La reversibilidad garantiza que el sistema obtenido a partir de otro tras efectuar operaciones elementales es equivalente al de partida. En efecto, ya hemos señalado que las soluciones del primer sistema lo son del segundo, mientras que las del segundo han de serlo del primero pues éste se obtiene a partir del segundo mediante operaciones elementales.

La operación tercera es de otra naturaleza. En realidad no cambiamos nada en el sistema, sino tal vez nuestra percepción del mismo. Se puede considerar esto un vicio propio de los matemáticos: para ver lo que interesa necesitamos ordenar muy bien los datos.

Digamos enseguida que al aplicar una operación elemental a un sistema homogéneo, resulta otro sistema homogéneo.

Demostremos a continuación que si una ecuación del sistema depende de otras, lo mismo ocurre tras efectuar una operación elemental. En efecto, suponemos que $f_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i f_i$, y hacemos una operación del primer o segundo tipo (del tercer tipo, evidentemente, poco hay que decir aquí). Distinguimos cómo actuar en todas las posibilidades que pueden presentarse.

(i) Suponemos que la operación consiste en reemplazar la ecuación f_k por $g_k = \lambda f_k$, mientras que las demás ecuaciones permanecen inalteradas. Entonces la nueva ecuación k -ésima es combinación de las restantes: $g_k = \sum_{i \neq k} \lambda \alpha_i f_i$

(ii) Suponemos ahora que se reemplaza la ecuación f_j por $g_j = \lambda f_j$ para cierto índice $j \neq k$, y las demás se mantienen. Entonces, f_k es combinación de las nuevas ecuaciones, ya que $f_k = \alpha_j f_j + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i = \frac{\alpha_j}{\lambda} g_j + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i$.

(iii) El tercer caso es aquél en que f_k es sustituida por $g_k = f_k + \lambda f_\ell$ para cierto índice $\ell \neq k$ y mantenemos las restantes. Entonces,

$$g_k = \lambda f_\ell + \sum_{i \neq k} \alpha_i f_i = \sum_{i \neq k, \ell} \alpha_i f_i + (\alpha_\ell + \lambda) f_\ell,$$

luego también ahora la nueva ecuación k -ésima es combinación de las restantes.

(iv) El cuarto caso consiste en sustituir la j -ésima ecuación f_j , donde $j \neq k$, por la combinación $g_j = f_j + \lambda f_\ell$, para cierto índice $\ell \neq j, k$, mientras que las demás ecuaciones permanecen inalteradas. Entonces,

$$\begin{aligned} f_k = \alpha_j f_j + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i &= \alpha_j (g_j - \lambda f_\ell) + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i = \alpha_j g_j \\ &+ \sum_{i \neq k, j, \ell} \alpha_i f_i + (\alpha_\ell - \lambda \alpha_j) f_\ell. \end{aligned}$$

Una vez más, la ecuación k -ésima es combinación de las nuevas ecuaciones.

(v) El último caso consiste en cambiar, para cierto índice $j \neq k$, la ecuación f_j por $g_j = f_j + \lambda f_k$. Por tanto,

$$f_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i f_i = \alpha_j f_j + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i = \alpha_j (g_j - \lambda f_k) + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i,$$

y pasando de miembro, resulta $(1 + \alpha_j \lambda) f_k = \alpha_j g_j + \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i$. Si $\mu = 1 + \alpha_j \lambda \neq 0$, entonces f_k es combinación de las nuevas ecuaciones, pues dividiendo la última igualdad por μ y denotando $\gamma_i = \alpha_i / \mu$ resulta

$$f_k = \gamma_j g_j + \sum_{i \neq k, j} \gamma_i f_i.$$

Finalmente, si $1 + \alpha_j \lambda = 0$, entonces $\alpha_j = -1/\lambda \neq 0$ y $-\alpha_j g_j = \sum_{i \neq k, j} \alpha_i f_i$. Por tanto, si dividimos esta igualdad por $-\alpha_j$, la nueva ecuación j -ésima g_j se expresa como combinación de otras ecuaciones del sistema.

Pero lo que acabamos de demostrar es importante sobre todo porque significa que *las operaciones elementales conservan la independencia*. En efecto, si $\{f_1, \dots, f_m\}$ son ecuaciones independientes y la familia de ecuaciones $\{g_1, \dots, g_m\}$ que se obtienen tras efectuar una operación elemental son dependientes, al revertir dicha operación resultaría que las ecuaciones $\{f_1, \dots, f_m\}$ son dependientes, según acabamos de demostrar, y esto es falso. \square

Después de la detallada descripción precedente de los sistemas lineales, y de las manipulaciones a las que los queremos someter, veremos el denominado método de *eliminación de Gauss-Jordan* que nos permitirá reducir cualquier sistema a un *sistema escalonado reducido*.

Definición 1.7 Un sistema lineal se llama *esalonado reducido* cuando la primera incógnita de cada ecuación: (i) precede a la primera incógnita de la ecuación siguiente, (ii) tiene coeficiente 1 y (iii) no aparece en ninguna de las demás ecuaciones.

Obsérvese además que un sistema escalonado reducido *no puede contener ni ecuaciones incompatibles ni triviales*. Es importante señalar que *las ecuaciones de un sistema escalonado reducido son independientes*, es decir, ninguna depende de las otras. En efecto, la primera incógnita de una ecuación cualquiera no aparece en ninguna de las otras, luego no se puede obtener la ecuación dada combinando esas otras.

Las incógnitas de un sistema escalonado reducido que son la primera variable de alguna ecuación se llaman *principales*. El resto se llaman *secundarias* o *parámetros*. Nótese que si una de las n incógnitas no aparece en el sistema, entonces es necesariamente secundaria.

Ejemplo 1.8 El sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_3 + 21x_4 = 18, \end{cases}$$

no es escalonado reducido, pues aunque la primera incógnita de cada ecuación precede a la de la siguiente, la de la segunda ecuación aparece en la primera.

El siguiente sin embargo sí lo es:

$$\begin{cases} x_1 & & -6x_4 = -5, \\ & x_2 & +7x_4 = 8, \\ & & x_3 -7x_4 = -6. \end{cases}$$

□

principales

secundarias o parámetros

(1.9) Método de escalonamiento de Gauss-Jordan. Por este método se transforma, aplicando sucesivamente operaciones elementales, cualquier sistema no trivial en un sistema incompatible o en un sistema escalonado reducido. Describimos este algoritmo, que consta de varios pasos, como se programaría para que lo desarrollase una “máquina”.

Paso 0. Se toma $k = 1$.

Paso 1. Se examinan las ecuaciones a partir de la k -ésima inclusive: si hay alguna incompatible, el sistema es incompatible y hemos terminado; si hay triviales, se suprimen; si no hay otras ecuaciones, hemos terminado.

Paso 2. Si han quedado ecuaciones, se elige entre ellas una cuya primera incógnita x_{j_k} tenga índice j_k mínimo.

Paso 3. Se divide la ecuación elegida por el coeficiente de su primera incógnita x_{j_k} , y se intercambia la ecuación resultante con la k -ésima.

Paso 4. A cada ecuación distinta de la nueva k -ésima le restamos ésta multiplicada por el coeficiente que en aquella tiene la incógnita x_{j_k} .

Paso 5. Se hace $k = k + 1$ y se vuelve al paso 1.

Vamos a resumir qué se hace y para qué en los pasos anteriores. Nótese primero que sólo se hacen operaciones elementales, con lo que se obtiene siempre un sistema equivalente al de partida. En el paso 1 se decide si hay que hacer realmente algo. Si hay en efecto que hacerlo, en el paso 2 se selecciona la incógnita y la ecuación que se usarán para mejorar el posible escalonamiento que ya se tenga. En el paso 3 se hace 1 el coeficiente de esa incógnita en esa ecuación, y se coloca la ecuación en el lugar pertinente. En el paso 4 se elimina la susodicha incógnita de las demás ecuaciones; obsérvese que aquí pueden producirse ecuaciones triviales (a partir de la $(k + 1)$ -ésima). Y en el paso 5 se recommienza con otra incógnita posterior.

Haciendo esto un número finito de veces el sistema resulta incompatible o escalonado reducido. Es claro, además, que la operación elemental efectuada en cada cada paso no tiene ninguna relación con los términos independientes del sistema, luego si dos sistemas sólo difieren en términos independientes, el algoritmo de escalonamiento de Gauss-Jordan es el mismo para ambos.

Ejemplo 1.10 Vamos a explicar el ejemplo I.1.1(2), p. 2. Aligeraremos la descripción de cómo se aplica el algoritmo. Dividimos por 2 la primera ecuación:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 9, \\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 19x_4 = 4. \end{cases}$$

A continuación restamos la primera a la segunda, y sumamos el doble de la primera a la tercera:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_3 + 21x_4 = 18. \end{cases}$$

Ahora restamos a la primera el triple de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_3 + 21x_4 = 18. \end{cases}$$

A continuación dividimos la tercera ecuación por -3 :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ x_3 - 7x_4 = -6. \end{cases}$$

Para terminar sumamos la tercera ecuación a la primera y la restamos de la segunda:

$$\begin{cases} x_1 - 6x_4 = -5, \\ x_2 + 7x_4 = 8, \\ x_3 - 7x_4 = -6. \end{cases}$$

Este sistema, equivalente al de partida, es ya escalonado reducido. \square

Para discutir y resolver un sistema basta discutir y resolver cualquier otro equivalente, y acabamos de explicar cómo obtener uno equivalente escalonado reducido. Veamos pues cómo se discuten y resuelven dichos sistemas.

(1.11) Discusión y resolución de un sistema escalonado reducido.

Nótese que si las incógnitas principales de un sistema escalonado reducido son x_1, \dots, x_r (cosa que siempre podemos suponer si reordenamos los subíndices de las variables) y las incógnitas secundarias son x_{r+1}, \dots, x_n , su expresión es del tipo:

$$(*) \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & + & \alpha_{1,r+1}x_{r+1} & + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ & x_2 & & + & \alpha_{2,r+1}x_{r+1} & + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & x_r & + \alpha_{r,r+1}x_{r+1} & + \cdots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r, \end{array} \right.$$

con $\alpha_{ij}, \beta_k \in \mathbb{K}$. Para resolver este sistema basta con *despejar* las incógnitas principales en aquellas ecuaciones del sistema que las tienen. De este modo, expresamos cada incógnita principal en función del término independiente y las incógnitas secundarias. Así, nos queda lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\alpha_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ \vdots \\ x_r = -\alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{rn}x_n + \beta_r. \end{array} \right.$$

Es tradición escribir $x_j = \lambda_j$ para $j = r+1, \dots, n$, con lo que obtenemos las denominadas *ecuaciones paramétricas*:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\alpha_{1,r+1}\lambda_{r+1} - \cdots - \alpha_{1n}\lambda_n + \beta_1, \\ \vdots \\ x_r = -\alpha_{r,r+1}\lambda_{r+1} - \cdots - \alpha_{rn}\lambda_n + \beta_r, \\ x_{r+1} = \lambda_{r+1}, \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n. \end{array} \right.$$

Ahora, dando a los *parámetros* $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ todos los posibles valores de \mathbb{K} obtenemos todas las soluciones del sistema. En particular, para $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ obtenemos la solución

$$(\beta_1, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0),$$

con lo que el sistema es compatible. Distinguimos ahora dos casos:

- (1) Si $r = n$, es decir, el sistema no tiene incógnitas secundarias, entonces $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ es la única solución del sistema.

- (2) Si $r < n$, es decir, si el sistema tiene al menos una incógnita secundaria, entonces tenemos una solución diferente por cada substitución $(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-r}$. Por ejemplo, la anterior $(\beta_1, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0)$, y $(\beta_1 - \alpha_{1n}, \dots, \beta_r - \alpha_{rn}, 0, \dots, 0, 1)$. De este modo, el sistema tiene más de una solución, y es compatible indeterminado.

Con lo anterior tenemos la discusión de un sistema escalonado reducido:

Corolario 1.12 *Un sistema escalonado reducido es compatible determinado si todas sus variables son principales y compatible indeterminado en otro caso.*

Ya hemos señalado que si un segundo sistema sólo difiere del dado en todos o algunos términos independientes, el algoritmo de Gauss-Jordan es el mismo, y el sistema escalonado reducido que le corresponde sólo difiere en los β_i . En particular, las ecuaciones paramétricas del sistema homogéneo asociado al dado se obtienen haciendo nulos todos los β_i . Vemos pues que sumando la solución particular $(\beta_1, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0)$ a las soluciones del sistema homogéneo obtenemos todas las del sistema de partida. Esto confirma uno de nuestros comentarios iniciales, I.1.3, p. 3.

El análisis de las soluciones de los sistemas lineales se completa con el siguiente resultado:

Proposición 1.13 *Dos sistemas escalonados reducidos compatibles equivalentes son idénticos.*

En consecuencia se tiene:

- (1) *Un sistema compatible es equivalente a un único sistema escalonado reducido.*
- (2) *Dos sistemas compatibles equivalentes se pueden transformar uno en otro mediante operaciones elementales.*

Demostración. Vamos a probar en primer lugar que los sistemas homogéneos asociados a los dos sistemas del enunciado son idénticos. Recordemos que, por I.1.3, p. 3, son equivalentes. En particular estos dos sistemas homogéneos tienen las mismas incógnitas x_1, \dots, x_n . Veamos que, además, tienen las mismas incógnitas *principales*. Supongamos que no y reordenémoslas de manera que x_1, \dots, x_{i-1} sean principales en los dos sistemas, y x_i sólo en el segundo. Hacemos en ambos sistemas las variables $x_{i+1} = 0, \dots, x_n = 0$, y obtenemos

otros dos sistemas homogéneos que son necesariamente equivalentes. Pero esto no es así; el primer sistema es indeterminado, pues tiene a x_i como parámetro, mientras que el segundo es determinado porque su única solución es la trivial.

Visto ya que los dos sistemas homogéneos tienen las mismas incógnitas principales, sabemos por I.1.11, p. 11, que el primero de ellos viene dado por (*) donde cada $\beta_i = 0$, y el otro es de la forma

$$\begin{cases} x_1 & + \alpha'_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha'_{1n}x_n = 0, \\ \ddots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_r & + \alpha'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha'_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

Hemos probado en I.1.11, p. 11 que el primero de estos sistemas tiene soluciones del tipo

$$(-\alpha_{1k}, \dots, -\alpha_{rk}, 0, \dots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0), \quad k = r+1, \dots, n,$$

y estas soluciones han de serlo del segundo. Así, al sustituir en este sistema las incógnitas x_1, \dots, x_n por los valores $x_1 = -\alpha_{1,r+1}, \dots, x_r = -\alpha_{r,r+1}, x_{r+1} = 1$ y las demás incógnitas por 0 resulta

$$\begin{cases} -\alpha_{1,r+1} & + \alpha'_{1,r+1} = 0, \\ \ddots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -\alpha_{r,r+1} & + \alpha'_{r,r+1} = 0, \end{cases}$$

es decir, cada $\alpha_{i,r+1} = \alpha'_{i,r+1}$. Argumentando de igual modo con las restantes incógnitas concluimos que $\alpha_{i,k} = \alpha'_{i,k}$ para cada $i = 1, \dots, r$ y $k = r+1, \dots, n$, luego los sistemas homogéneos asociados son los mismos.

Se trata ahora de probar que los sistemas equivalentes de partida, posiblemente no homogéneos, tienen los mismos términos independientes. Denotamos β_1, \dots, β_r los términos independientes del primer sistema y $\beta'_1, \dots, \beta'_r$ los del segundo. Si hacemos nulas todas las variables secundarias (las mismas en los dos sistemas por lo que ya sabemos), obtenemos dos sistemas determinados equivalentes

$$\begin{cases} x_1 & = \beta_1, \\ \ddots & \vdots \\ x_r & = \beta_r, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 & = \beta'_1, \\ \ddots & \vdots \\ x_r & = \beta'_r, \end{cases}$$

luego $\beta_i = \beta'_i$ para $i = 1, \dots, r$. Así hemos completado la prueba de la primera parte del enunciado.

Ahora deducimos las afirmaciones (1) y (2). La primera es inmediata: si un sistema compatible es equivalente a dos escalonados reducidos, éstos son compatibles y equivalentes, luego por la primera parte del enunciado, son iguales. Para probar (2), supongamos dados dos sistemas compatibles equivalentes. Aplicando a los dos el método de Gauss-Jordan, obtenemos dos sistemas escalonados reducidos. Estos últimos son compatibles equivalentes por serlo los de partida, luego por la primera parte del enunciado de nuevo, son el mismo sistema. Por construcción, este sistema se puede transformar en cualquiera de los dos de partida mediante operaciones elementales, y se tiene (2). \square

Ejemplos 1.14 (1) Veamos cómo discutir y resolver el sistema del ejemplo I.1.1(2), p. 2. Comenzamos sustituyéndolo por el escalonado reducido equivalente (ejemplo I.1.10, p. 10):

$$\begin{cases} x_1 & & - 6x_4 = -5, \\ & x_2 & + 7x_4 = 8, \\ & & x_3 - 7x_4 = -6. \end{cases}$$

En este sistema las incógnitas x_1, x_2 y x_3 son principales, y x_4 es secundaria. Para resolverlo hacemos $x_4 = \lambda$, y las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 6\lambda, \\ x_2 = 8 - 7\lambda, \\ x_3 = -6 + 7\lambda, \\ x_4 = \lambda. \end{cases}$$

En consecuencia las soluciones son las uplas

$$(-5 + 6\lambda, 8 - 7\lambda, -6 + 7\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Si hacemos $\lambda = 0, 1$ obtenemos las dos soluciones $(-5, 8, -6, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ y así vemos que el sistema es compatible indeterminado.

(2) Discutimos a continuación el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 3, \\ 8x_1 - x_2 - 7x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$$

Restamos a las ecuaciones segunda y tercera el producto de la primera por 2 y 8, respectivamente, y multiplicamos por -1 las ecuaciones resultantes. Así el sistema dado es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 11, \\ 9x_2 + 15x_3 + 9x_4 = 46. \end{cases}$$

Ahora restamos el triple de la segunda ecuación a la tercera, para obtener,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 11, \\ 0 = 13. \end{cases}$$

y la última ecuación nos dice que el sistema es incompatible. \square

Y con esto concluimos la lección. Hemos cumplido el primero de nuestros dos objetivos: describir un método eficiente para manipular las ecuaciones de un sistema lineal hasta obtener sus soluciones. Queda pendiente el segundo: cómo reconocer la dependencia de ecuaciones lineales. Pero esto es mucho más complicado y, de hecho, nos va a ocupar todas las lecciones que quedan de este capítulo I.

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 9x + 4y = 108, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 2z = 9, \\ 2x - y + 4z = 4, \\ 2x - y + 6z = -1. \end{cases}$$

Número 2. Leia y Chewbacca juegan una partida de ajedrez. El tiempo que emplea Leia en los primeros 14 movimientos es triple que el tiempo empleado por Chewbacca, mientras que en los restantes movimientos ambos emplearon 35 minutos. Sabiendo que en el total de la partida el tiempo empleado por Chewbacca es $3/4$ partes del empleado por Leia, calcular el tiempo utilizado por cada uno de los jugadores. (Por supuesto, la partida la gana el wookiee.)

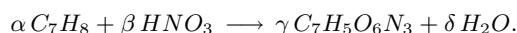
Número 3. Hallar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos $P_1 = (-1, -10)$, $P_2 = (1, -6)$ y $P_3 = (2, -13)$.

Número 4. Un excursionista comprueba, tras recorrer 7 km en la primera hora, que manteniendo ese ritmo llegaría con una hora de retraso al tren que pretende tomar. Acelera el paso, y durante el resto del camino recorre 10 km cada hora, por lo que llega con media hora de adelanto a la estación. ¿Cuánto tiempo estuvo andando? ¿Qué distancia recorrió?

Número 5. Un comerciante de telas vende cada metro un 30,2 % más caro que el precio al que lo compra. Desea aumentar sus ganancias sin incrementar los precios, para lo cual decide emplear un *falso metro* para medir la tela delante de sus clientes. ¿Cuánto ha de medir este falso metro para que sus ganancias pasen a ser del 40 %?


Número 6. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán entonces, y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Número 7. Bajo ciertas condiciones se puede mezclar tolueno con ácido nítrico para obtener trinitrotolueno (también conocido como TNT) y agua. Ajustar la correspondiente reacción química:



¿Qué ocurre si reemplazamos el agua H_2O por agua oxigenada H_2O_2 ? ¿Cómo se interpreta ese resultado?

Número 8. Sean x, y, z tres números enteros tales que los enteros $x + y + z$, $x - y - 2z$ y $3x + 4y - 2z$ son múltiplos de 5. Demostrar que x, y y z son múltiplos de 5.

 **Número 9.** En la siguiente suma

$$zyzyz + xwyw = xwyzv,$$

las letras sustituyen a ciertos dígitos. Sabiendo que letras distintas reemplazan a dígitos distintos, calcular éstos.

Número 10. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor de a :

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + az = 3, \\ x + ay + 3z = 2. \end{cases}$$

Número 11. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor de a , y hallar sus soluciones cuando sea posible.

$$\begin{cases} 2x - y = a, \\ ax - 2y = 4, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$$

Número 12. Discutir en función del valor de a el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 2ay + z = a, \\ ax + y - az = a, \\ 4ax + 4ay + az = 9. \end{cases}$$

Número 13. Discutir en función del valor de los números reales α y β , y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ \alpha x + \alpha y + z = \beta, \\ \alpha x + \alpha y + \alpha z = \beta, \\ \beta x + y + z = 1, \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ \beta x + y + z = 0, \\ x + \beta y - z = 0. \end{cases}$$

Número 14. Estudiar para qué valores del número complejo λ el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^3, \\ x + \lambda y = 1, \end{cases}$$

carece de solución, para qué valores la solución es única y para qué valores existe más de una solución.

Número 15. Resolver, empleando el método de Gauss-Jordan, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 3x + z = 3, \\ 5x - 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

2. Teorema de Rouché-Frobenius

Introducimos en esta lección los conceptos adecuados para sistematizar la discusión y resolución de los sistemas lineales. Observemos en primer lugar que el sistema

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

se puede representar simbólicamente utilizando tablas de coeficientes y de variables:

$$(\bullet) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Para hacer más fácil la escritura y la representación simbólica antes mencionada, es preferible utilizar *filas*, como (x_1, \dots, x_n) y (b_1, \dots, b_m) , en lugar de las respectivas *columnas* que aparecen en (\bullet) . Pero entonces hacen falta notaciones que relacionen las filas y columnas anteriores. Así, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ es la fila de incógnitas y $b = (b_1, \dots, b_m)$ es la fila de términos independientes, denotaremos por x^t y b^t las columnas correspondientes. De esta manera (\bullet) se abrevia

$$A \cdot x^t = b^t,$$

donde, por supuesto, A representa la tabla de coeficientes del sistema.

Esta forma de denotar los sistemas lineales mediante tablas de números e incógnitas se puede entender rigurosamente como un producto, definiendo éste del modo evidente que el sistema nos propone: se multiplican ordenadamente los elementos de cada fila de la tabla A por las incógnitas de la columna x^t , y se suman esos productos. Así resulta una columna con los primeros miembros de las ecuaciones del sistema. Ahora la igualdad de esta columna y la de los términos independientes b^t es el sistema dado.

Definiciones 2.1 Una *matriz* $m \times n$ es una tabla de números del cuerpo \mathbb{K} formada por m filas y n columnas. El elemento o *coeficiente* de una matriz A que está en la fila i y en la columna j se denota a_{ij} , y diremos que es su coeficiente (i, j) . Escribiremos

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Si $m = n$ y los coeficientes a_{ij} son nulos si $i \neq j$ y valen 1 para $i = j$, la correspondiente matriz se llama *matriz identidad de orden n* y se denota por I_n . Habitualmente se denota la matriz identidad por $I_n = (\delta_{ij})$, donde el símbolo δ_{ij} es la denominada *delta de Kronecker* dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \text{ y} \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Denotaremos $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Se denota por 0 y se llama *nula* la matriz cuyos coeficientes son todos cero.

Los conceptos de combinación, dependencia e independencia, y operaciones elementales desarrollados en la lección anterior para ecuaciones se transcriben para filas sin dificultad.

Si denotamos por $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ la fila i -ésima de la matriz A , una combinación $\sum \alpha_i a_i$ se define haciendo las operaciones componente a componente como antes explicamos al sumar y restar uplas. Únicamente añadiremos aquí que la fila nula $(0, \dots, 0)$ es combinación de cualesquiera otras: basta tomar cada $\alpha_i = 0$.

Las operaciones elementales por filas son las siguientes:

- (i) Sustituir una fila por el resultado de multiplicarla por un escalar no nulo.

- (ii) Sustituir una fila por el resultado de sumarle otra multiplicada por un escalar no nulo.
- (iii) Intercambiar dos filas.

Las propiedades de estas operaciones en relación con las combinaciones de filas son las mismas que para ecuaciones; en particular se deduce de I.1.6, p. 6 que conservan la independencia. Además, si las filas

$$a'_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik}), \quad 1 \leq i \leq r,$$

de la matriz $A' = (a'_{ij})$ con $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq k$, son independientes (para algún índice $k \leq n$) también lo son las filas a_1, \dots, a_r de la matriz A . En efecto, si estas últimas fuesen dependientes podemos suponer, tras reordenarlas, que $a_1 = \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r$ para ciertos escalares $\lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Esto significa, si la matriz A tiene m columnas, que

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}) = \lambda_2(a_{21}, \dots, a_{2m}) + \dots + \lambda_r(a_{r1}, \dots, a_{rm}),$$

y quedándonos con las k primeras componentes de cada fila de esta igualdad resulta

$$a'_1 = (a_{11}, \dots, a_{1k}) = \lambda_2(a_{21}, \dots, a_{2k}) + \dots + \lambda_r(a_{r1}, \dots, a_{rk}) = \sum_{i=2}^r \lambda_i a'_i,$$

lo que implica que las filas a'_1, \dots, a'_r son dependientes, lo que es falso.

Nótese que hacer una operación elemental a un sistema $Ax^t = b^t$, para obtener otro $A_1 x^t = b_1^t$, es lo mismo que hacer la correspondiente operación elemental por filas a las matrices A y b^t , para obtener A_1 y b_1^t . Esto reduce la manipulación de sistemas a la de matrices. Con este fin, introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.2 Diremos que dos matrices A y B son *equivalentes por filas* si podemos transformar la primera en la segunda mediante una cantidad finita de operaciones elementales por filas.

Es evidente que toda matriz es equivalente a sí misma; basta no hacer nada. Además, si las matrices A y B son equivalentes por filas y también lo son B y C , entonces las matrices A y C son equivalentes por filas, pues C se obtiene a partir de A tras efectuar una cantidad finita de operaciones elementales.

Además, si B se obtiene a partir de A mediante una cantidad finita de operaciones elementales, también lo es A a partir de B , por el carácter reversible de estas operaciones, I.1.6, p. 6. Por tanto, ser equivalentes por filas es una relación de equivalencia entre matrices $m \times n$. Asimismo, inspirados por la noción de sistema escalonado reducido definimos:

Definición 2.3 Una matriz se llama *escalonada reducida por filas* si todas sus filas no nulas preceden a las nulas y, además, el primer coeficiente no nulo de cada fila no nula cumple las siguientes tres condiciones: (i) precede a los coeficientes no nulos de las siguientes, (ii) es 1, y (iii) es el único no nulo de su columna.

En particular, convenimos que la matriz nula es escalonada reducida.

Ejemplo 2.4 Consideramos las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí, A_1 es escalonada reducida hasta la tercera fila pero no más, por no ser 1 el primer coeficiente no nulo de la última fila. La matriz A_2 sí es escalonada reducida. \square

Lo primero que se observa ahora es lo siguiente.

(2.5) Escalonamiento de matrices. *Toda matriz no nula es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida.*

Demostración. Para probarlo basta aplicar a la matriz A un algoritmo equivalente al de Gauss-Jordan de la lección anterior, pero adaptado a las matrices.

Paso 0. Se toma $k = 1$.

Paso 1. Si todas las filas a partir de la k -ésima inclusive son nulas, hemos terminado.

Paso 2. Si no, se busca en ellas un coeficiente no nulo $a_{i_k j_k}$ con j_k mínimo.

Paso 3. Se divide la fila i_k -ésima por su primer coeficiente no nulo, que es $a_{i_k j_k}$, y se intercambia con la k -ésima fila.

Paso 4. A cada fila distinta de la nueva k -ésima le restamos ésta multiplicada por el coeficiente j_k -ésimo de aquélla.

Paso 5. Se hace $k = k + 1$ y se vuelve al paso 1.

El algoritmo va cambiando la matriz fila a fila. Como cada modificación que se hace en el proceso es una operación elemental, obtenemos siempre una matriz equivalente por filas a la de partida. En el paso 1 se mira si en realidad hay algo que hacer. Si lo hay, en el paso 2 se busca una fila que deba ir la k -ésima atendiendo a su primer coeficiente no nulo. En el paso 3 se hace 1 ese coeficiente, y se coloca la fila efectivamente en el lugar k -ésimo. En el paso 4 se hacen nulos todos los coeficientes que hay por encima y por debajo de ése no nulo en su misma columna. Y en el paso 5 se recomienza.

Esta versión del método de Gauss-Jordan proporciona una matriz escalonada reducida equivalente por filas a la inicial. \square

Veamos cómo se aplica el algoritmo anterior a un ejemplo concreto:

Ejemplo 2.6 Vamos a encontrar una matriz escalonada reducida equivalente por filas a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, aligeramos la descripción de cómo se aplica el algoritmo. Como $a_{11} \neq 0$ y vale 1, restamos a las filas segunda y tercera la primera multiplicada por 3 y 2, respectivamente, y se obtiene la matriz equivalente por filas

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si ahora restamos a la primera y a la tercera fila de A_1 el doble de la segunda obtenemos otra matriz equivalente por filas

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A continuación dividimos la tercera fila entre 2:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sumamos a la primera fila el triple de la tercera, y a la segunda le restamos el doble, y se obtiene la matriz equivalente por filas

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es una matriz escalonada reducida. \square

Hasta aquí, el tratamiento de una matriz A se corresponde rigurosamente con el del sistema homogéneo $Ax^t = 0$. Tal vez la definición de equivalencia parezca algo distinta para matrices y sistemas, pero no lo es realmente:

Proposición 2.7 *Dos matrices A_1 y A_2 de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes por filas si y sólo si los sistemas homogéneos $A_1x^t = 0$ y $A_2x^t = 0$ son equivalentes, esto es, tienen las mismas soluciones.*

Demostración. Si A_1 y A_2 son equivalentes por filas, las operaciones elementales que transforman la primera matriz en la segunda se traducen en operaciones elementales que transforman el sistema $A_1x^t = 0$ en el sistema $A_2x^t = 0$. Como las operaciones elementales no alteran el conjunto de soluciones, deducimos que los sistemas $A_1x^t = 0$ y $A_2x^t = 0$ tienen las mismas. Recíprocamente, si los sistemas tienen las mismas soluciones, el resultado I.1.13(2), p. 12, dice que podemos transformar el sistema primero en el segundo mediante operaciones elementales (nótese que todo sistema homogéneo es compatible). Esas mismas operaciones elementales dicen como transformar la matriz A_1 en la matriz A_2 , y por tanto las dos matrices son equivalentes por filas. \square

Asímismo, la unicidad de los sistemas escalonados reducidos asociados a un sistema dado vale para matrices escalonadas reducidas:

Proposición 2.8 *Si dos matrices escalonadas reducidas R_1 y R_2 son equivalentes por filas, entonces son iguales.*

En particular, una matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida.

Demostración. Por el resultado anterior, si R_1 y R_2 son equivalentes por filas los sistemas $R_1x^t = 0$ y $R_2x^t = 0$ tienen las mismas soluciones. Como estos

sistemas son escalonados reducidos, I.1.13, p. 12, dice que los dos sistemas son idénticos, o sea, $R_1 = R_2$.

Probado esto, si una matriz A es equivalente a dos matrices escalonadas reducidas R_1 y R_2 , éstas son equivalentes entre sí, luego $R_1 = R_2$. \square

Después de lo anterior, ya podemos definir el invariante fundamental para la discusión de los sistemas lineales:

Proposición y Definición 2.9 (1) *Se llama rango por filas de una matriz A , y se denota $\text{rg}_f(A)$, aunque en lo sucesivo lo llamaremos rango, al número de filas no nulas de la única matriz escalonada reducida equivalente por filas a A , que es igual al máximo número de filas independientes de A .*

(2) *Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces $\text{rg}_f(A) \leq \min\{m, n\}$. Cuando se da la igualdad se dice que A tiene rango por filas máximo.*

(3) *Si dos matrices son equivalentes por filas sus rangos por filas coinciden.*

Demostración. (1) Supongamos que A tiene r filas independientes de las que dependen todas las demás. Debemos demostrar que $\text{rg}_f(A) = r$. Para ello recurrimos al siguiente artificio. Denotemos B la matriz que resulta de sustituir las restantes, digamos s , filas de A , (que dependen de las r anteriores), por filas nulas. Por I.1.4, p. 4 los sistemas $Ax^t = 0$ y $Bx^t = 0$ son equivalentes, luego se deduce de I.2.7, p. 22 que A y B son equivalentes por filas, así que, en virtud de I.2.8, p. 22, son equivalentes por filas a la misma matriz escalonada reducida R . Hay que ver que R , que se obtiene efectuando operaciones por filas en B tiene, exactamente, r filas no nulas. Más no puede tener, pues no las hay en B . Pero menos tampoco, pues entonces el número de filas independientes de B sería menor que r .

(2) Por el escalonamiento, el número de filas no nulas de R no puede exceder al número de sus columnas, ni obviamente, al de sus filas.

(3) Sean A_1 y A_2 dos matrices equivalentes por filas, y denotemos R_1 y R_2 , respectivamente, a las matrices escalonadas reducidas por filas equivalentes a A_1 y A_2 , I.2.8, p. 22. Puesto que la equivalencia por filas es relación de equivalencia, I.2.2, p. 19, las matrices R_1 y R_2 son equivalentes por filas, luego $R_1 = R_2$ en virtud de I.2.8, p. 22. En particular, $\text{rg}_f(A_1) = \text{rg}_f(R_1) = \text{rg}_f(R_2) = \text{rg}_f(A_2)$. \square

Ejemplo 2.10 Pretendemos calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) En primer lugar, buscamos una matriz escalonada reducida equivalente por filas a A . Restamos a las filas segunda y tercera el triple y el doble de la primera, respectivamente, lo que nos proporciona una matriz equivalente por filas

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Restando el doble de la segunda fila a las filas primera y tercera se tiene

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es escalonada reducida y tiene 2 filas no nulas. Por tanto, $\text{rg}_f(A) = 2$.

(2) La proposición I.2.9, p. 23, nos dice también que en la matriz A anterior hay dos filas independientes pero no tres. El proceso desarrollado en (1) nos permite hallar una relación de dependencia entre las filas de A . Si llamamos f_1 , f_2 y f_3 a las filas de A , en la primera etapa hemos obtenido que $f'_1 = f_1$, $f'_2 = f_2 - 3f_1$ y $f'_3 = f_3 - 2f_1$ son las de A' . En la segunda etapa hemos comprobado que la tercera fila $f''_3 = f'_3 - 2f'_2$ de A'' es la fila nula. En consecuencia, $f_3 - 2f_1 = 2(f_2 - 3f_1)$ y por tanto $f_3 = 2f_2 - 4f_1$ nos da una relación entre las filas de A .

(3) Calculemos ahora el rango de A utilizando una matriz equivalente por filas que no es escalonada reducida, pero en la que es inmediato determinar el número de filas independientes. Hemos visto en (1) que la matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

es equivalente por filas a A . Las dos últimas filas de A' son proporcionales y las dos primeras son independientes. Por tanto, $2 \leq \text{rg}_f(A') < 3$, luego $\text{rg}_f(A) = \text{rg}_f(A') = 2$. \square

Podemos simplificar el cálculo de rangos mediante el siguiente resultado:

Proposición 2.11 *Si varias filas son independientes, y les añadimos una que no depende de ellas, obtenemos de nuevo filas independientes.*

En particular, dada una fila a no nula, entonces

$$\operatorname{rg}_f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & A \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}_f(A).$$

Demostración. Supongamos que ciertas filas a_1, \dots, a_r son independientes, y otra c no depende de ellas. Que c, a_1, \dots, a_r fuesen dependientes significaría que existe una combinación del tipo

$$a_i = \gamma c + \sum_{j \neq i} \alpha_j a_j.$$

En tal caso $\gamma \neq 0$, ya que a_1, \dots, a_r son independientes, luego

$$c = \frac{1}{\gamma} a_i - \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\gamma} a_j,$$

y c dependería de a_1, \dots, a_r .

Para la otra afirmación, hay que ver que al ir eliminando filas dependientes en la matriz descrita por cajas, al final nos quedan $1 + \operatorname{rg}_f(A)$ independientes. Para ello, eliminamos primero en la caja A , hasta que queden en ella $\operatorname{rg}_f(A)$ filas independientes. Finalmente, al añadir la primera fila sigue habiendo independencia. En efecto, esto es consecuencia de lo probado antes, ya que la primera fila no puede ser combinación de las otras: esas otras tienen nulos todos los coeficientes por debajo de a y, sin embargo, no todos los coeficientes de la fila a son nulos. \square

Ejemplo 2.12 Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia de I.2.11, p. 25, el rango de A es igual a $1 + \text{rg}_f(A_1)$ donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por I.2.11, p. 25, otra vez, $\text{rg}_f(A_1) = 1 + \text{rg}_f(A_2)$, donde

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como A_2 tiene una única fila no nula, su rango es 1. Por tanto

$$\text{rg}_f(A) = 1 + \text{rg}_f(A_1) = 1 + (1 + \text{rg}_f(A_2)) = 1 + (1 + 1) = 3,$$

lo que concluye el cálculo. \square

Definición y Observaciones 2.13 (1) Se llama *traspuesta* de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ a la matriz $A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ definida por $b_{ij} = a_{ji}$. En palabras, *las filas de la matriz traspuesta son las columnas de la matriz dada*. Obsérvese que $(A^t)^t = A$.

(2) En nuestra representación matricial de los sistemas de ecuaciones las filas han desempeñado un papel primordial. Pero también podíamos haber representado nuestro sistema $Ax^t = b^t$ *por columnas*, escribiendo $xA^t = b$. De este modo, habríamos desarrollado todo de forma similar trabajando ahora con las *columnas* de las matrices. Se tendría entonces:

- (i) Combinaciones de columnas, dependencia e independencia de columnas.
- (ii) Operaciones elementales por columnas y matrices equivalentes por columnas.
- (iii) Matriz escalonada reducida por columnas equivalente por columnas a una dada.
- (iv) Rango (por columnas) de una matriz A , que denotamos $\text{rg}_c(A) = \text{rg}_f(A^t)$. Nótese que $\text{rg}_f(A) = \text{rg}_f((A^t)^t) = \text{rg}_c(A^t)$.

Todo es completamente análogo, y en realidad cualquier propiedad que probemos en la teoría por filas tiene una traducción inmediata en la teoría por

columnas, sin más que intercambiar filas por columnas. Así por ejemplo, dos matrices A y B son *equivalentes por columnas* si sus traspuestas A^t y B^t son equivalentes por filas, lo que equivale a que sus matrices escalonadas reducidas por columnas coinciden. En particular, para una misma matriz se tienen dos rangos: uno por filas y otro por columnas. Lo importante es que son iguales:

Proposición 2.14 *El rango por filas de una matriz coincide con su rango por columnas, o en otras palabras, el máximo número de filas independientes es igual al máximo número de columnas independientes. Por eso en lo sucesivo denotamos $\text{rg}(A) = \text{rg}_f(A) = \text{rg}_c(A)$, y se le llama rango de A . Lo anterior equivale a decir que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que para cualquier matriz A se cumple la desigualdad $\text{rg}_c(A) \leq \text{rg}_f(A)$. Supongamos por un momento que esta desigualdad ya está probada. La aplicamos entonces a la matriz traspuesta y se obtiene la otra desigualdad:

$$\text{rg}_f(A) = \text{rg}_c(A^t) \leq \text{rg}_f(A^t) = \text{rg}_c(A).$$

Pasamos ahora a demostrar que el rango por columnas de una matriz cualquiera A con n columnas es menor o igual que su rango por filas r . Por I.2.9, p. 23, sabemos que $r \leq n$, y si $r = n$, como el rango por columnas no puede exceder a n , hemos terminado. Supongamos pues $r < n$, y consideremos el sistema homogéneo $Ax^t = 0$. Obsérvese que reordenar las incógnitas de este sistema, esto es, las columnas de A , no afecta al enunciado. Por tanto, tras reordenar adecuadamente las incógnitas del sistema podemos suponer que x_1, \dots, x_r son las principales y x_{r+1}, \dots, x_n las secundarias. Ahora aplicamos (*) en I.1.11, p. 11, donde cada $\beta_j = 0$ porque en nuestro caso el sistema es homogéneo. Tomando $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$, encontramos una solución del sistema $Ax^t = 0$ de la forma

$$(c_{1r+1}, \dots, c_{rr+1}, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0)$$

para ciertos escalares $c_{1r+1}, \dots, c_{rr+1} \in \mathbb{K}$. A continuación tomamos $x_{r+2} = 1$ y $x_j = 0$ para las restantes incógnitas secundarias x_j donde $j \neq r+2$. Esto nos proporciona otra solución

$$(c_{1r+2}, \dots, c_{rr+2}, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0)$$

del sistema $Ax^t = 0$, donde $c_{1r+2}, \dots, c_{rr+2} \in \mathbb{K}$. Repitiendo el proceso, dando el valor 1 a cada incógnita secundaria x_j , donde $j = r+1, \dots, n$, y 0 a las restantes incógnitas secundarias, encontramos soluciones del tipo

$$(c_{1j}, \dots, c_{rj}, 0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots, 0) \quad \text{para cada } j = r+1, \dots, n.$$

Escribamos explícitamente que una de estas uplas es solución del sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}c_{1j} + \dots + a_{1r}c_{rj} + a_{1j} = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}c_{1j} + \dots + a_{mr}c_{rj} + a_{mj} = 0, \end{cases}$$

para cada $j = r+1, \dots, n$. Esto nos dice que cada una de las columnas $j = r+1, \dots, n$ de A es combinación lineal de sus primeras r columnas. Por tanto, en la matriz A hay a lo más r columnas independientes, es decir, $\text{rg}_c(A) \leq r = \text{rg}_f(A)$. \square

(2.15) Matriz ampliada. Decíamos, al comienzo de esta lección, que un sistema de ecuaciones lineales

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

admite una *escritura matricial* $Ax^t = b^t$, donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes del sistema. Para tener en cuenta también los términos independientes en las manipulaciones de filas, consideramos *la matriz ampliada*

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) = (A|b^t).$$

Con más generalidad, dadas dos matrices $A_1 \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $A_2 \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, denotamos $(A_1|A_2) \in \mathcal{M}_{m \times (n+p)}(\mathbb{K})$ a la matriz que se obtiene al colocar las columnas de A_2 a continuación de las de A_1 .

El hecho fundamental es el siguiente:

(2.16) Teorema de Rouché-Frobenius. *Un sistema lineal $Ax^t = b^t$ en n incógnitas es compatible si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A})$. En tal caso, el sistema es determinado si y sólo si $\text{rg}(A) = n$.*

Demostración. La compatibilidad del sistema equivale a que la columna b^t sea combinación de las columnas de A , o lo que es igual, $\text{rg}_c(A) = \text{rg}_c(\tilde{A})$. Para la segunda parte, obsérvese que si aplicamos el algoritmo de Gauss-Jordan a \tilde{A} obtenemos su matriz escalonada reducida \tilde{R} y sin más que eliminar la última columna de \tilde{R} obtenemos la matriz escalonada reducida R de A . El sistema $Ax^t = b^t$ es compatible determinado si y sólo si lo es el sistema $Rx^t = d^t$, donde d^t es la última columna de \tilde{R} . Ahora por I.1.12, p. 12, este último es determinado si y sólo si todas sus variables son principales, esto es, $\text{rg}(A) = \text{rg}(R) = n$, en virtud de I.2.9, p. 23 (iii). \square

Observación 2.17 Es importante insistir en que los tratamientos por filas y por columnas de una matriz A son cosas diferentes en lo tocante a sistemas de ecuaciones. En efecto, hemos demostrado muy fácilmente el teorema de Rouché-Frobenius I.2.16, p. 28, observando que la condición $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b^t)$ dice exactamente que la columna b^t es combinación de las columnas de la matriz A , y los coeficientes de tales combinaciones son exactamente las soluciones del sistema $Ax^t = b^t$. ¡Pero no es tan sencillo demostrarlo empleando el rango por filas! Ya se ve que es muy importante entender bien las cosas.

Para terminar esta lección probaremos lo siguiente, que relaciona la equivalencia por columnas con la compatibilidad de sistemas escritos por filas.

Proposición 2.18 *Dos matrices A_1 y A_2 son equivalentes por columnas si y sólo si las columnas b^t para las que el sistema $A_1x^t = b^t$ es compatible son las mismas que aquéllas para las que es compatible el sistema $A_2x^t = b^t$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que A_1 y A_2 son equivalentes por columnas. Entonces, también lo son $(A_1|b^t)$ y $(A_2|b^t)$ para cualquier b^t , luego

$$\text{rg}(A_1|b^t) = \text{rg}(A_2|b^t)$$

(usando el rango por columnas). Como asimismo $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_2)$, el Teorema de Rouché, I.2.16, p. 28, dice que $A_1x^t = b^t$ es compatible si y sólo si lo es $A_2x^t = b^t$.

Recíprocamente, si los sistemas son compatibles para los mismos términos independientes b^t , cualquier columna que dependa de las de A_2 , en particular cualquier columna de la propia A_2 , depende de las de A_1 , luego el sistema

$y(A_1|A_2) = 0$ (¡escrito por columnas!) tiene las mismas soluciones que $yA_1 = 0$, donde $y = (y_1, \dots, y_m)$ y m es el número (común) de filas de A_1 y A_2 . Cambiando los papeles de A_1 y A_2 , deducimos que $y(A_2|A_1) = 0$ tiene las mismas soluciones que $yA_2 = 0$. En consecuencia, los dos sistemas homogéneos $yA_1 = 0$ e $yA_2 = 0$ son equivalentes. Así, por la versión para columnas del teorema fundamental I.2.7, p. 22, A_1 y A_2 son equivalentes por columnas. \square

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Se considera, para cada escalar $a \in \mathbb{K}$, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + az = 4, \\ 2x - y + 2z = 5, \\ -x + 3y - z = 0. \end{cases}$$

Discutirlo en función del parámetro a y resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Número 2. Estudiar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 6x_5 = b_1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = b_2, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 - 19x_5 = b_3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = b_4, \end{cases}$$

en los casos en que los términos independientes de dicho sistema de ecuaciones lineales son $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (-1, 4, -7, 0)$ y $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 2, 1, 1)$.

Número 3. Escribir todas las matrices escalonadas reducidas por filas de $\mathcal{M}_{n \times 3}(\mathbb{K})$ para $n \leq 4$.

Número 4. Determinar para qué valores de los escalares a, b tiene solución el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + by + az = 1, \\ ax + by + z = a, \\ x + aby + z = b. \end{cases}$$

Resolver el sistema en los casos en que la solución sea única.

 **Número 5.** ¿Qué deben cumplir los números reales a, b y c para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 2a^2 + \frac{1}{2}x^2, \\ x^2 + z^2 = 2b^2 + \frac{1}{2}y^2, \\ x^2 + y^2 = 2c^2 + \frac{1}{2}z^2, \end{cases}$$

tenga una solución en la que x, y y z sean números reales?

Número 6. Calcular el rango de la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}.$$

Número 7. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$


Comprobar que el rango de A es 3, que es también el rango de C . Comprobar también que C no es la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A . ¿Es esto inconsistente?

Número 8. Demostrar que si una matriz A de tamaño $m \times n$ tiene rango m , entonces cualquier submatriz con n columnas también tiene rango máximo.

Número 9. Comprobar para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

que el rango por columnas coincide con el rango por filas.

 **Número 10.** Una matriz B cuyas filas son todas no nulas se dice que es *escalonada* si el primer coeficiente no nulo de cada una de sus filas posterior a la primera está situado en una columna de índice estrictamente mayor que el índice de la columna que contiene al primer coeficiente no nulo de la fila anterior. En general una matriz A es escalonada si o bien es nula o bien admite una escritura del tipo

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que todas las filas de B son no nulas y B es escalonada.

(1) Decir cuáles de las siguientes matrices son escalonadas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Demostrar que el rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas. Esto nos proporciona un nuevo método para calcular el rango de una matriz A , pues basta con encontrar una matriz escalonada N equivalente por filas a A y contar el número de filas no nulas de N .

(3) Calcular por este procedimiento el rango de las matrices del apartado (1).

Número 11. Hallar en función de los valores del escalar $a \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Número 12. Decir cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas hallando su

forma escalonada reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Número 13. Determinar según los valores de $a \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & a \end{pmatrix}.$$


Número 14. Sea n un entero positivo.

(1) Calcular el rango de la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

(2) Discutir el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + nx_2 + nx_3 + \cdots + nx_{n-1} = n, \\ nx_1 + 2x_2 + nx_3 + \cdots + nx_{n-1} = n, \\ nx_1 + nx_2 + 3x_3 + \cdots + nx_{n-1} = n, \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + nx_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = n, \\ nx_1 + nx_2 + nx_3 + \cdots + nx_{n-1} = n. \end{cases}$$

 **Número 15.** Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distintos, con $n \geq 2$. Calcular el rango de la matriz

$$A(a_1, \dots, a_n) = A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Operaciones con matrices

En esta lección desarrollamos de manera sistemática las operaciones algebraicas que se hacen con matrices.

Una forma a menudo útil de representar matrices es *por cajas*. Esto significa que se forma una matriz mayor combinando varias menores. En ese caso las dimensiones deben ser las adecuadas. Por ejemplo, si escribimos

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

el número de filas de A y B debe ser el mismo, el número de columnas de A y de C también debe coincidir, ... Ya se ve cuáles son las restricciones. Con este cuidado, las operaciones con matrices que vamos a describir se pueden hacer con cajas igual que con elementos. El lector lo podrá ir comprobando sin dificultad.

Ejemplo 3.1 La siguiente matriz

$$M = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 7 & 2 & 6 & 8 & 9 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (7, 2) \quad \text{y} \quad D = (6, 8, 9),$$

está representada por cajas según la explicación anterior. \square

(3.2) Las operaciones lineales. En $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ se definen las dos operaciones siguientes:

- (i) **Suma:** La suma de dos matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es la matriz suma $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Esta operación es asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$ y conmutativa $A + B = B + A$. Tiene elemento neutro (la matriz nula) y toda matriz $A = (a_{ij})$ tiene una opuesta $-A = (-a_{ij})$. Además, $(A + B)^t = A^t + B^t$.

- (ii) **Producto por escalares.** El producto de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y un número $\lambda \in \mathbb{K}$ es la matriz $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Este producto es distributivo respecto de las sumas: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ y $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. También es asociativo: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ y, trivialmente, el producto por el escalar $\lambda = 1$ no altera la matriz. En fin, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Con estas operaciones, las matrices $m \times n$ se pueden interpretar como filas de $m \cdot n$ escalares, sin más que imaginar que las filas de una matriz se escriben una a continuación de la otra en una sola fila, y éstas se operan como hemos explicado en la lección anterior.

Ejemplo 3.3 El siguiente caso particular ilustra lo que acabamos de decir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow a = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1),$$

identifica la matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{K})$ con la upla $a \in \mathbb{K}^{12}$. \square

Obsérvese que el rango de una matriz no varía al multiplicarla por un escalar no nulo. En cuanto a la suma se tiene:

Proposición 3.4 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se cumple que:

$$|\operatorname{rg}(A) - \operatorname{rg}(B)| \leq \operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B).$$

Demostración. Para probar la segunda desigualdad hacemos lo siguiente

$$\operatorname{rg}(A + B) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A + B \\ 0 \end{pmatrix} \leq \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A + B \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B).$$

Para probar la primera desigualdad es suficiente, por la simetría, probar que $\operatorname{rg}(A) - \operatorname{rg}(B) \leq \operatorname{rg}(A + B)$, o lo que es igual, que $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(A + B) + \operatorname{rg}(B)$. Pero, usando la desigualdad ya probada, tenemos que

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}((A + B) + (-B)) \leq \operatorname{rg}(A + B) + \operatorname{rg}(-B) = \operatorname{rg}(A + B) + \operatorname{rg}(B),$$

como queríamos. \square

(3.5) Producto de matrices. Esta es la operación que realmente hace las matrices interesantes. Está inspirada directamente en el producto de una matriz por una columna, que utilizamos en la lección anterior para estudiar sistemas lineales. En general, involucra matrices de tamaños diferentes.

El producto de dos matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ es la matriz $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ cuyos coeficientes están definidos por la suma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Este producto es asociativo:

$$A(BC) = (AB)C; \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{K},$$

y es distributivo respecto de la suma: $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$. Por otra parte, se cumple que $I_m A = A = A I_n$ para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, donde I_m e I_n son las matrices identidad de órdenes m y n respectivamente introducidas en I.2.1, p. 18. Señalemos por último que el producto de matrices se comporta respecto de la trasposición como sigue: $(AB)^t = B^t A^t$.

Las comprobaciones de las propiedades anteriores son cálculos sencillos y es muy educativo que los realice el lector por sí mismo. Como ilustración haremos la última. Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$.

Escribimos $C = A^t = (c_{ij})$, $D = B^t = (d_{ij})$, $E = AB = (e_{ij})$, $F = E^t = (AB)^t = (f_{ij})$ y $G = DC = B^t A^t = (g_{ij})$. Veamos que las matrices F y G coinciden. Se cumple que

$$f_{ij} = e_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \quad \text{y} \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik} c_{kj} = \sum_{j=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{jk} b_{ki},$$

y por tanto $f_{ij} = g_{ij}$, como se quería. \square

Observaciones 3.6 (1) Es muy importante señalar que el producto de matrices *no es conmutativo*. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cuando dos matrices A y B cumplen $AB = BA$, se dice que A y B *conmutan*.

(2) También hay que observar que un producto de matrices puede ser nulo sin que lo sea ninguno de los factores. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz cuyos coeficientes son todos nulos se denomina matriz nula y la denotamos 0 . Obsérvese que en el ejemplo anterior cada columna de la segunda matriz es una solución no nula del sistema definido por la primera, lo que sugiere muchos otros ejemplos similares. Se ilustra así también el hecho de que en el producto de matrices no se puede simplificar. \square

(3.7) Combinaciones de filas y columnas en un producto de matrices. Supongamos que tenemos un producto de dos matrices: $C = AB$. Es natural preguntarse cómo interpretar en A y B las combinaciones de filas y columnas que hagamos en C . Se cumple que *una combinación de filas (resp. columnas) en C se obtiene haciendo esa misma combinación en A y después multiplicando por B (resp. en B y después multiplicando por A)*. Lo mismo vale para las operaciones elementales, incluido el intercambio de filas o de columnas. Esta sencilla observación será muy útil, *incluso en el caso aparentemente trivial en que una de las matrices sea la identidad*.

Demostración. Haremos sólo la parte del enunciado relativa a las filas. La relativa a las columnas se deduce de la de las filas aplicada a las traspuestas de las matrices involucradas, empleando que la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas, ¡cambiando el orden! Obsérvese que la fila i -ésima de $C = (c_{ij})$ es el resultado de multiplicar la fila i -ésima de $A = (a_{ij})$ por las columnas de $B = (b_{ij})$. De este hecho se deduce la afirmación del enunciado en el caso del intercambio de dos filas.

En cuanto a las otras dos operaciones elementales, y en general a las combinaciones de filas, todo se reduce al caso de una combinación de dos filas. Sean por tanto $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ dos escalares y elegimos dos índices i, j . Para cada índice k denotamos a_k la fila k -ésima de A . Sean A' la matriz que se obtiene al cambiar la fila i -ésima a_i de A por la combinación $\alpha a_i + \beta a_j$ y $C' = (c'_{ij})$ la que resulta de hacer lo mismo en la matriz C . Tenemos que ver que las matrices C' y $D = A'B = (d_{ij})$ son iguales. Sólo hay que comprobar que son iguales las filas i -ésimas de ambas matrices. Ahora bien, para cada índice ℓ ,

$$\begin{aligned} d_{i\ell} &= \sum_k a'_{ik} b_{k\ell} = \sum_k (\alpha a_{ik} + \beta a_{jk}) b_{k\ell} \\ &= \alpha \sum_k a_{ik} b_{k\ell} + \beta \sum_k a_{jk} b_{k\ell} = \alpha c_{i\ell} + \beta c_{j\ell} = c'_{i\ell}, \end{aligned}$$

con lo que hemos terminado. \square

Usemos ahora lo anterior para estimar el rango de un producto:

Proposición 3.8 Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. Se cumple que:

$$\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}.$$

Demostración. Por I.3.7, p. 36, si la fila i -ésima de A depende de sus filas i_1 -ésima, \dots , i_r -ésima, lo mismo pasa en $C = AB$. Pero el rango es el número máximo de filas independientes, luego $\text{rg}(C) \leq \text{rg}(A)$.

Para probar la desigualdad $\text{rg}(C) \leq \text{rg}(B)$ procedemos como sigue:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(C^t) = \text{rg}(B^t A^t) \leq \text{rg}(B^t) = \text{rg}(B).$$

□

De especial importancia son las *matrices cuadradas*, que son las que tienen el mismo número de filas que de columnas, que en este caso se denomina *orden*. El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n se denota por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La *diagonal principal* de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ está formada por los coeficientes a_{ii} . Una *matriz triangular* es una matriz cuadrada cuyos coeficientes no nulos están o en la diagonal principal o del mismo lado respecto de ella. Una matriz *diagonal* es una matriz cuadrada cuyos coeficientes no nulos están todos en la diagonal principal. Por ejemplo, la matriz identidad I_n es una matriz diagonal.

Obsérvese que la multiplicación de matrices es una operación bien definida en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y se plantea la cuestión de la existencia de inversos para ella.

(3.9) Matrices invertibles. Una matriz cuadrada A de orden n se llama *invertible* o *regular* si existe otra matriz C de orden n tal que $CA = AC = I_n$. Probaremos en primer lugar que C es única, se llama *matriz inversa de A* y se denota A^{-1} .

En realidad vamos a probar bastante más que la unicidad de A^{-1} . En primer lugar, supongamos que existen C y C' tales que $CA = I_n = AC'$. Resulta que

$$C' = I_n C' = (CA)C' = C(AC') = CI_n = C.$$

En conclusión, si la matriz C cumple que $CA = I_n$ y otra matriz C' cumple que $AC' = I_n$, entonces también $AC = I_n$.

Pero más aún, supongamos que tenemos una matriz C de la que sólo sabemos que $CA = I_n$. Entonces el sistema $Ax^t = 0$ es determinado, porque si c es una solución entonces $Ac^t = 0$, luego $c^t = I_n c^t = CAc^t = C0 = 0$. En consecuencia, por el teorema de Rouché-Frobenius, cualquier sistema $Ax^t = b^t$ tiene solución, y en particular la tiene para $b = (0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)$. La solución c_j^t para ese b es la columna j -ésima de una matriz C' tal que $AC' = I_n$. Pero ya sabemos que tal C' sólo puede ser la misma C , y concluimos que $AC = I_n$.

Lo anterior muestra que para saber si una matriz A es invertible es suficiente saber que existe una matriz C de orden n tal que $CA = I_n$. También es suficiente que exista una matriz C tal que $AC = I_n$. En efecto, en tal caso

$I_n = I_n^t = (AC)^t = C^t A^t$ y, por lo que acabamos de probar, esto implica que también $A^t C^t = I_n$, esto es, $I_n = (A^t C^t)^t = CA$.

Por tanto, para buscar la inversa C de una matriz invertible A sólo hay que resolver la ecuación $AC = I_n$, esto es, hay que resolver varios sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes A y distintos términos independientes.

Más aún, *una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si tiene rango máximo*. En efecto, si A es invertible existe C tal que $AC = I_n$, y por I.3.8, p. 36, $n = \text{rg}(I_n) = \text{rg}(AC) \leq \text{rg}(A) \leq n$, luego $\text{rg}(A) = n$. Recíprocamente, si $\text{rg}(A) = n$ todos los sistemas $Ax^t = b^t$ son compatibles, por el teorema de Rouché-Frobenius, y según acabamos de ver esto implica la existencia de una matriz C tal que $AC = I_n$.

Señalemos además que el producto AB de dos matrices cuadradas es invertible si y sólo si lo son ambas, o sea, *el rango del producto es máximo si y sólo si lo es el de cada factor*. En efecto, si AB es invertible, existe C tal que $C(AB) = I_n = (AB)C$, luego CA es la inversa de B y BC la de A . Recíprocamente, si A y B son invertibles, $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB (obsérvese que se cambia el orden), pues $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B^{-1}B)A^{-1} = I_n$.

Una propiedad importante de las matrices invertibles es que el rango no varía al multiplicar por ellas: *si A es una matriz cuadrada invertible de orden m , y B es una matriz $m \times n$, entonces $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$* . En efecto, $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$ en virtud de I.3.8, p. 36 y, empleando este mismo resultado, $\text{rg}(B) = \text{rg}((A^{-1}A)B) = \text{rg}(A^{-1}(AB)) \leq \text{rg}(AB)$.

Veamos que también $\text{rg}(BA) = \text{rg}(B)$. Utilizando lo que acabamos de probar, y puesto que A^t tiene rango máximo, ya que coincide con el de A , y por ello es invertible,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t) = \text{rg}(A^t B^t) = \text{rg}((BA)^t) = \text{rg}(BA).$$

El conjunto de las matrices invertibles de orden n se denota $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ o $\text{GL}(n)$, y es un grupo con la multiplicación de matrices, denominado *grupo lineal*. \square

(3.10) Cálculo de la inversa. En el párrafo anterior hemos visto cómo la matriz inversa se obtiene en realidad resolviendo sistemas lineales, y esto proporciona un método de cálculo muy efectivo. Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n , y consideremos los sistemas

$$Ax^t = (1, 0, \dots, 0)^t, \dots, Ax^t = (0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)^t, \dots, Ax^t = (0, \dots, 0, 1)^t,$$

cuyas soluciones, si existen, son las columnas de la matriz A^{-1} . Podemos resolverlos simultáneamente aplicando operaciones elementales a la matriz $(A|I_n)$, y obtendremos una matriz escalonada reducida. Esa matriz será de la forma $(I_n|C)$ exactamente cuándo A sea invertible. Entonces las columnas de C serán las soluciones de los sistemas anteriores, con lo que $AC = I_n$, luego $C = A^{-1}$. Abreviadamente: $(A|I_n) \rightsquigarrow (I_n|A^{-1})$.

Se puede desarrollar un discurso similar por columnas, lo que correspondería a buscar la (misma) matriz C tal que $CA = I_n$.

Ejemplo 3.11 Comprobemos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es invertible y calculemos su inversa, según acabamos de explicar. En primer lugar restamos la primera fila a la tercera y su cuádruplo a la segunda, para obtener

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Restamos a la segunda fila el triple de la tercera e intercambiamos después las dos últimas filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Sumamos a la primera fila $\frac{2}{3}$ de la tercera y restamos a la segunda $\frac{1}{3}$ de la tercera para obtener

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Por último, sumamos la segunda fila a la primera, dividimos la segunda por -2 y la tercera por 3 para llegar a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array} \right).$$

En consecuencia A es invertible y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$. \square

Una de las ventajas de las matrices cuadradas es que para ellas es posible definir la *potenciación*, una operación a la que estamos habituados siempre que hay un producto. La potenciación de matrices desempeña un papel esencial en el estudio de muchos problemas importantes, por ejemplo en teoría de grafos o en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

(3.12) Potenciación. Las *potencias* de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se definen del modo esperado:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^{k+1} = A^k A, \quad k \geq 1,$$

lo que es posible porque el número de filas es igual al número de columnas. Es consecuencia inmediata de la propiedad asociativa que se cumple la regla de suma de exponentes $A^p A^q = A^{p+q}$. Sin embargo, por no ser el producto de matrices cuadradas conmutativo, no son ciertas igualdades como $(AB)^p = A^p B^p$ que estamos habituados a emplear al multiplicar números. Sí lo son, por supuesto, si A y B conmutan. El lector comprobará en ese caso que la igualdad anterior es cierta, y todas las esperables para productos y sumas de las dos matrices. Nos detenemos un poco en la *fórmula de Newton*, bien conocida para números:

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}, \quad \text{si } A \text{ y } B \text{ conmutan.}$$

En efecto, para calcular el producto $(A + B) \cdot \dots \cdot (A + B)$, hay que sumar todos los productos formados al escoger una matriz de cada binomio (propiedad asociativa). Por conmutar A y B , los productos que obtenemos son de la

forma $A^k B^{p-k}$, con $0 \leq k \leq p$. ¿Cuántos hay de cada uno? Tantos como las $\binom{p}{k}$ maneras de elegir los k binomios (de los p dados) en los que se toma A como factor. Y resulta la fórmula de Newton.

Ejemplos 3.13 (1) Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces se tiene:

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

luego, en general, el cuadrado de la suma no se puede calcular mediante la fórmula de Newton. El lector comprobará con estas dos matrices, que lo mismo ocurre para el cuadrado de la diferencia, y para el producto de la suma por la diferencia.

(2) En algunas ocasiones podemos emplear de forma muy ventajosa la fórmula de Newton para calcular potencias de matrices. Supongamos que necesitamos calcular las de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Descomponemos $M = A + I_3$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y como $AI_3 = I_3A$, la fórmula de Newton nos proporciona

$$M^p = (A + I_3)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k I_3^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k.$$

Al calcular las potencias de A resulta que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $A^3 = 0$, luego $A^k = 0$ para cada $k \geq 3$. Por tanto, para cada entero $p \geq 2$,

$$M^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k = \sum_{k=0}^2 \binom{p}{k} A^k = I_3 + pA + \binom{p}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & p & -\frac{p(p+1)}{2} \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es una expresión sencilla de las potencias de M . \square

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. (1) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden n que conmutan con todas las matrices diagonales de orden n .

Número 2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Existe alguna matriz no nula X que cumpla $XA = BX^t$?

Número 3. Sean m, n y p enteros positivos y consideremos dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que exista una matriz $X \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $B = XA$. Estúdiese si existe tal matriz X cuando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Número 4. Recordamos que las operaciones elementales por filas que podemos aplicar a una matriz A son:

- (i) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- (ii) Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar no nulo.
- (iii) Intercambiar dos filas.

Comprobar que el resultado de aplicar cualquiera de estas operaciones elementales a la matriz A es el mismo que el de multiplicar la matriz A por la izquierda por la matriz I' que se obtiene al aplicar a la matriz identidad I dicha operación elemental. Una tal matriz I' se denomina *matriz elemental*.

Demostrar que cada matriz elemental es invertible y que su inversa es de nuevo una matriz elemental, y que una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.

Número 5. Demostrar que si todas las filas de una matriz A suman α y todas las filas de una matriz B suman β , entonces todas las filas de su producto suman $\alpha\beta$.

Número 6. Demostrar que la siguiente matriz A es invertible y calcular su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Número 7. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular, por el método de Gauss, el rango de A , la matriz inversa de B , y el rango de AB^{-1} .


Número 8. Sea A una matriz cuadrada. Demostrar que si el sistema homogéneo $Ax^t = 0$ tiene alguna solución no trivial, entonces existe algún sistema no homogéneo $Ax^t = b^t$ que es incompatible.

Número 9. Dadas dos matrices, $K \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $L \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuyo producto $KL = I_n$ es la matriz identidad, decimos que K (resp. L) tiene *inversa por la derecha* (resp. *por la izquierda*). Esto generaliza la noción de matriz invertible. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) K tiene inversa por la derecha.
- (ii) $\text{rg}(AK) = \text{rg}(A)$ para cualquier matriz A con n columnas.
- (iii) $\text{rg}(K) = n$.

¿Qué se puede decir de la unicidad de la inversa de K por la derecha si admite alguna?

Formular y probar la caracterización análoga para la inversa por la izquierda.

 **Número 10.** Probar que si dos matrices $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ cumplen $AB = 0$, entonces

$$\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n.$$

Número 11. Dadas tres matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que existan matrices $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que satisfagan las condiciones

$$\begin{cases} X + Y^t A = B, \\ Y - AX^t = C. \end{cases}$$

Calcular la solución de este sistema cuando sea única.

Número 12. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que para cada entero $k \geq 1$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}.$$

⚡ **Número 13.** Desde el punto de vista computacional las multiplicaciones son mucho más costosas que las sumas. Por eso, un objetivo recurrente consiste en sustituir procesos algorítmicos que involucran muchas multiplicaciones por otros que requieran menos, aún a costa de aumentar el número de sumas. Esto dicho, proponemos en este ejercicio multiplicar dos matrices cuadradas de orden 2 efectuando sólo 7 multiplicaciones, en lugar de las 8 que exige el algoritmo clásico.

⚡ **Número 14.** Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz *nilpotente*, es decir, que tiene una potencia A^n nula. Para cada $t \in \mathbb{R}$ se define la matriz

$$M_t = I_m + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t^i}{i!} A^i \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m . Estudiar si el conjunto $G = \{M_t : t \in \mathbb{R}\}$, con la operación producto de matrices, es un grupo. ¿Es conmutativo el producto de matrices de G ?

Número 15. Sean a y b dos números reales e I_n la matriz identidad de orden n . Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que satisfacen la igualdad $A = 2aI_n + bA^t$.

4. El determinante

En esta lección introducimos el concepto de función determinante, que asocia a cada matriz cuadrada un escalar. Esta herramienta nos permitirá decidir cuándo una matriz cuadrada es invertible, y desarrollar un método alternativo para calcular el rango de una matriz no necesariamente cuadrada. Por tanto, dicha función deberá comportarse bien en relación con las nociones centrales al respecto: combinaciones e independencia. Por supuesto tendrá también un comportamiento especial para con las operaciones elementales.

Para que la escritura sea más cómoda, vamos a representar cada matriz de orden n como una upla de longitud n^2 (como ya hicimos en I.3.2, p. 33):

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \mathbb{K}^n \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{K}^n : A = (a_{ij}) \rightsquigarrow (a_1, \dots, a_n), \quad a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n.$$

Por ejemplo, reescribiremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

como $A = (a_1, a_2)$, donde $a_1 = (1, 3)$ y $a_2 = (2, -1)$. Este tipo de notación, completamente inútil para hacer cálculos, sólo se utiliza para el desarrollo teórico. En los ejemplos y en los ejercicios emplearemos la notación usual, en la que las matrices aparecen representadas como lo que son, tablas.

Definición 4.1 (Determinante por filas) Vamos a definir una aplicación, que llamaremos *determinante por filas* y que denotamos $\det_f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. El procedimiento tiene carácter inductivo o, con más precisión, recurrente, con respecto al orden n de las matrices cuyo determinante queremos definir.

En primer lugar, las matrices de orden $n = 1$ son escalares y, dado $a \in \mathbb{K}$ definimos $\det_f(a) = a$. En particular, $\det_f(1) = 1$.

Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con $n \geq 2$, y fijados dos índices i, j con $1 \leq i, j \leq n$, denotamos $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matriz que se obtiene al suprimir en A la fila i -ésima y la columna j -ésima. Suponemos ya definido el determinante de las matrices de orden $n - 1$ y se define el determinante por filas de A como

$$(*) \quad \det_f(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det_f(A_{1j}).$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de *regla de Laplace*. Así por ejemplo, aplicándola para matrices de orden 2 se obtiene

$$\det_f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \det_f(A_{11}) - a_{12} \det_f(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por su parte, la regla de Laplace utilizada con las matrices de orden 3 nos proporciona

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &+ a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Esta última expresión se conoce comúnmente como *regla de Sarrus*.

Los cálculos precedentes ejemplifican cómo, conocido el determinante de las matrices de orden $n - 1$, la regla de Laplace nos permite calcular el de las matrices de orden n . Un caso particular de interés es el siguiente.

Observación 4.2 Se deduce directamente de la regla de Laplace, argumentando por inducción, que el determinante de una matriz diagonal es el producto de los coeficientes de su diagonal principal. \square

Proposición 4.3 La aplicación $\det_f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, que abreviamos determinante, definida en (*) cumple las propiedades siguientes:

(1) $\det_f(I_n) = 1$.

(2) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $a'_i, a''_i, a_1, \dots, a_i = \alpha a'_i + \beta a''_i, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$ se cumple

$$\det_f(a_1, \dots, \alpha a'_i + \beta a''_i, \dots, a_n) = \alpha \det_f(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) + \beta \det_f(a_1, \dots, a''_i, \dots, a_n).$$

(3) Si la matriz A tiene dos filas iguales, entonces $\det_f(A) = 0$.

Demostración. Para $n = 1$ la fórmula $\det_f(a) = a$ cumple evidentemente las propiedades (1) y (2), y en este caso no ha lugar a considerar si se cumple o no la tercera propiedad, pues no hay dos filas.

Supondremos pues que $n > 1$, y comprobemos que la fórmula (*) satisface lo propuesto. Veamos por inducción que se cumple la propiedad (1). El caso $n = 1$ ya lo hemos visto, y si $n > 1$ al aplicar la regla de Laplace a la matriz identidad $A = I_n$, el único coeficiente no nulo de la primera fila es el primero, que vale 1, mientras que $A_{11} = I_{n-1}$, que por inducción tiene determinante 1. Por ello, $\det_f(I_n) = \det_f(I_{n-1}) = 1$. Para probar la propiedad (2)

$$\det_f(\dots, \alpha a'_i + \beta a''_i, \dots) = \alpha \det_f(\dots, a'_i, \dots) + \beta \det_f(\dots, a''_i, \dots),$$

supongamos primero $i = 1$. Si las restantes filas de A son a_2, \dots, a_n , tenemos

$$\begin{aligned} \det_f(\alpha a'_1 + \beta a''_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{j=1}^n (\alpha a'_{1j} + \beta a''_{1j}) (-1)^{1+j} \det_f(A_{1j}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n a'_{1j} (-1)^{1+j} \det_f(A_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^n a''_{1j} (-1)^{1+j} \det_f(A_{1j}) \\ &= \alpha \det_f(a'_1, a_2, \dots, a_n) + \beta \det_f(a''_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Nótese que para $i = 1$ la combinación de filas no ha afectado a los determinantes que aparecen en el término de la derecha de la regla de Laplace (*).

Ahora, si la fila es $i > 1$, vamos a aplicar la regla de Laplace al cálculo del

determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a'_{i1} + \beta a''_{i1} & \alpha a'_{i2} + \beta a''_{i2} & \dots & \alpha a'_{in} + \beta a''_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Consideramos las matrices

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En este caso, la operación de combinar filas se reproduce en todos los determinantes del sumatorio que proporciona la regla de Laplace, y por inducción en cada uno podemos aplicar la propiedad (2), de manera que obtenemos:

$$\begin{aligned} \det_f(B) &= \det_f(a_1, \dots, \alpha a'_i + \beta a''_i, \dots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} (\alpha \det_f(A'_{1j}) + \beta \det_f(A''_{1j})) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det_f(A'_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det_f(A''_{1j}) \\ &= \alpha \det_f(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) + \beta \det_f(a_1, \dots, a''_i, \dots, a_n) \\ &= \alpha \det_f(A') + \beta \det_f(A''). \end{aligned}$$

Sólo queda probar la propiedad (3), es decir, que el determinante vale cero si hay dos filas iguales. Argumentamos por inducción sobre n , siendo inmediato el caso $n = 2$, pues calculamos directamente

$$\det_f(A) = \det_f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$$

Suponemos pues $n \geq 3$ y que A tiene dos filas iguales. Antes de seguir necesitamos probar el siguiente lema auxiliar, con interés en sí mismo.

Lema 4.4 *Si para las matrices de orden n con dos filas iguales se cumple que su determinante es 0 (propiedad (3) de I.4.3), entonces el determinante por filas de la matriz B que se obtiene al intercambiar la posición de dos filas de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es el opuesto del determinante de A , esto es, $\det_f(B) = -\det_f(A)$.*

Demostración. En efecto, supongamos que intercambiamos las filas a_i y a_j de A . Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \det_f(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n) \\ &= \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n) + \det_f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n) \\ &= \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ &\quad + \det_f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det_f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ &= 0 + \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \det_f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) + 0, \end{aligned}$$

aplicando sucesivamente las propiedades (3), (2) y (3). Vemos así que

$$\det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det_f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n),$$

o lo que es igual, $\det_f(B) = -\det_f(A)$. \square

Pasamos ya a demostrar, por inducción, que se cumple la propiedad (3) del enunciado. Sea pues A una matriz con dos filas iguales. Si ninguna de ellas es la primera, entonces todas las matrices A_{1j} de la regla de Laplace (*) tienen un par de filas repetidas, y por inducción tienen determinante nulo, luego también es nulo el sumatorio de Laplace. Por tanto, podemos suponer que una de las filas es la primera, y queremos reducir la comprobación al caso en que la otra es la segunda. Para ello, si la otra es la i -ésima con $i > 2$, la intercambiamos con la segunda. Este intercambio de filas produce otro igual en todas las matrices A_{1j} , que tienen orden $n-1$, y por inducción y el Lema I.4.4, p. 48 sus determinantes cambian de signo, con lo que cambia el signo de todo el sumatorio de Laplace. Pero esto nos da igual, pues se trata de comprobar que dicho sumatorio es nulo. En resumen, podemos suponer que las filas primera y segunda de la matriz A son iguales. Utilizando en esta situación la regla de Laplace, (*) en I.4.1, p. 45, vamos a probar que $\det_f(A) = 0$. Para ello debemos calcular el determinante de cada matriz

$$A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para cada índice $k \neq j$ denotemos B_{jk} la matriz obtenida al suprimir en A_{1j} la fila y la columna en las que está el coeficiente a_{2k} , esto es, al suprimir en A las filas primera y segunda y las columnas j -ésima y k -ésima. En particular, las matrices B_{jk} y B_{kj} coinciden para $j \neq k$. Observamos, además, que para $k < j$ el coeficiente a_{2k} ocupa en la segunda fila de la matriz A_{1j} la posición k -ésima, mientras que para $k > j$ ocupa la posición $(k-1)$ -ésima. Por eso, si denotamos

$$\sigma_k = \begin{cases} 1+k & \text{si } k < j \\ k & \text{si } k > j \end{cases}$$

y aplicamos la regla de Laplace al cálculo del determinante de A_{1j} obtenemos:

$$\begin{aligned} \det_f(A_{1j}) &= \sum_{k \neq j} (-1)^{\sigma_k} a_{2k} \det_f(B_{jk}) = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k} a_{2k} \det_f(B_{jk}) \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^n (-1)^k a_{2k} \det_f(B_{jk}) = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k} a_{2k} \det_f(B_{jk}) \\ &\quad - \sum_{k=j+1}^n (-1)^{1+k} a_{2k} \det_f(B_{jk}). \end{aligned}$$

Llevando esto a la expresión $\det_f(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det_f(A_{1j})$, y usando el hecho señalado previamente de que $B_{kj} = B_{jk}$ para $j \neq k$ resulta:

$$\begin{aligned} \det_f(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k} a_{2k} \det_f(B_{jk}) - \sum_{k=j+1}^n (-1)^{1+k} a_{2k} \det_f(B_{jk}) \right) \\ &= \sum_{1 \leq k < j \leq n} (-1)^{j+k} a_{1j} a_{2k} \det_f(B_{jk}) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (-1)^{j+k} a_{1j} a_{2k} \det_f(B_{jk}) \\ &= \sum_{1 \leq k < j \leq n} (-1)^{j+k} a_{1j} a_{2k} \det_f(B_{jk}) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (-1)^{j+k} a_{1j} a_{2k} \det_f(B_{kj}) \end{aligned}$$

Hacemos ahora un cambio de índices de sumación, lo que nos proporciona:

$$\det_f(A) = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (-1)^{p+q} (a_{1q} a_{2p} - a_{1p} a_{2q}) \det(B_{pq}).$$

Finalmente, como las dos primeras filas de la matriz A son iguales, se tiene

$$a_{1q} a_{2p} - a_{1p} a_{2q} = a_{1q} a_{1p} - a_{1p} a_{1q} = 0,$$

con lo que todos los sumandos del último miembro se anulan, y $\det_f(A) = 0$ como se quería. Esto termina la demostración. \square

Observación 4.5 La propiedad (2) en I.4.3, p. 46 nos dice que las combinaciones de filas, esenciales en todo lo que hacemos con sistemas y matrices, son *compatibles* con el determinante. Conviene destacar una consecuencia inmediata pero importante de esta propiedad: tomando $\alpha = \beta = 0$ se deduce que *si una fila de una matriz es nula su determinante es cero*. \square

(4.6) Reglas de cálculo. (1) Las propiedades del determinante son en realidad *reglas de cálculo*. De hecho en ocasiones es más sencillo calcular el determinante de una matriz empleándolas que utilizar la regla de Laplace. Veamos cómo se utilizan para medir la variación del determinante de una matriz al aplicarle a ésta una operación elemental por filas.

(i) *Multiplicar una fila por un escalar λ multiplica el determinante por λ .*

Esto se deduce de la propiedad (2) para $\alpha = \lambda$ y $\beta = 0$:

$$\det_f(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

(ii) *Si se suma a una fila un múltiplo de otra, no cambia el determinante.*

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \det_f(a_1, \dots, a_i + \mu a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) &= \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ &\quad + \mu \det_f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det_f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n), \end{aligned}$$

aplicando la propiedad (2) con $\alpha = 1$, $\beta = \mu$, y la propiedad (3) después. Vemos, como decíamos, que el determinante es el mismo.

(iii) Finalmente, como hemos demostrado en I.4.4, p. 48, *un intercambio de filas cambia el signo del determinante*.

(2) Las tres reglas de cálculo anteriores consisten en multiplicar por un escalar bien determinado μ , donde $\mu = \lambda$ para las operaciones de tipo (i), $\mu = +1$ para las operaciones de tipo (ii) y $\mu = -1$ para las operaciones de tipo (iii). Señalemos también que *si revertimos una operación elemental el factor correspondiente es el inverso del de la operación original*, ya que revertir la operación “multiplicar una fila por $\lambda \neq 0$ ” es multiplicarla por $1/\lambda$ y los números ± 1 coinciden con su inverso. En el siguiente corolario nos quedamos con lo sustancial de lo que acabamos de exponer.

Corolario 4.7 *Si una matriz B se obtiene a partir de otra A mediante operaciones elementales por filas, entonces $\det(B)$ se obtiene multiplicando $\det(A)$ por los factores asociados a las operaciones realizadas.*

(4.8) Relación del determinante con el escalonamiento. Podemos calcular el determinante de una matriz cuadrada A de orden n utilizando, únicamente, I.4.6, p. 50. En efecto, haciendo operaciones elementales convertimos A en una matriz escalonada reducida R . Por ser cuadrada, o bien R es la matriz identidad, si $\text{rg}(A) = n$, o bien tiene alguna fila nula, si $\text{rg}(A) < n$. En virtud de I.4.3, p. 46 (1) y (2), $\det_f(R)$ vale 1 en el primer caso y 0 en el segundo. Podemos representar este proceso mediante el esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & B & \rightsquigarrow B' & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & R \\ \det_f(A) & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & \det_f(B) & \overset{\mu}{\rightsquigarrow} \det_f(B') & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & \det_f(R) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \end{array}$$

La primera fila simboliza que, mediante operaciones elementales, transformamos la matriz A en la matriz R , pasando en el camino por varias matrices, entre ellas B y B' , donde B' es el resultado de realizar cierta operación elemental en B . Esto se refleja en la segunda fila en la que se pasa, multiplicando por ciertos factores según hemos probado en I.4.6, p. 50, desde $\det_f(A)$ hasta $\det_f(R)$, señalando que $\det_f(B') = \mu \det_f(B)$, porque denotamos μ al factor asociado a la operación elemental que transforma B en B' . Lo más importante es destacar que el factor $\mu \neq 0$ asociado a cualquier operación elemental *sólo depende de la naturaleza de dicha operación*, y no de las matrices a las que se aplique. Más explícitamente, si sometemos a dos matrices B y C a la misma operación elemental y obtenemos las matrices B' y C' , respectivamente, entonces existe un escalar $\mu \neq 0$ tal que $\det_f(B') = \mu \det_f(B)$ y $\det_f(C') = \mu \det_f(C)$.

En consecuencia, si para pasar de A a R mediante operaciones elementales necesitamos efectuar r de ellas, cuyos factores asociados son μ_1, \dots, μ_r , entonces $\det_f(R) = \mu_1 \cdots \mu_r \det_f(A)$, lo que nos proporciona el valor

$$(**) \quad \det_f(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \det_f(R) = 0 \\ \frac{1}{\mu_1 \cdots \mu_r} & \text{si } \det_f(R) = 1. \end{cases}$$

Corolario 4.9 (1) La aplicación $\det_f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $(*)$ en I.4.1, p. 45 es la única que cumple las propiedades (1), (2) y (3) en I.4.3, p. 46.

(2) El determinante de una matriz cuadrada es no nulo si y sólo si su rango es máximo.

Demostración. (1) Que \det_f cumple lo requerido se probó en I.4.3, p. 46. Si $\widehat{\det}_f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ es otra función que también satisface las propiedades

(1), (2) y (3) en I.4.3, p. 46, y fijamos una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cuya matriz escalonada reducida por filas denotamos R resulta que, si $\text{rg}(A) < n$, entonces

$$\widehat{\det}_f(A) = \widehat{\det}_f(R) = 0 = \det_f(R) = \det_f(A).$$

Supongamos ahora que $\text{rg}(A) = n$, y sean μ_1, \dots, μ_r los factores asociados a ciertas operaciones elementales que permiten pasar de A a la matriz escalonada reducida $R = I_n$ de A . Entonces,

$$\widehat{\det}_f(A) = \frac{\widehat{\det}_f(I_n)}{\mu_1 \cdots \mu_r} = \frac{1}{\mu_1 \cdots \mu_r} = \frac{\det_f(I_n)}{\mu_1 \cdots \mu_r} = \det_f(A).$$

(2) En realidad ya hemos probado esto en el apartado anterior. En todo caso observamos que se deduce de (**) que $\det_f(A) = 0$ si y sólo si $\det_f(R) = 0$, y en I.4.8, p. 51 hemos visto que esto último sucede si y sólo si R tiene alguna fila nula. Esto equivale, por I.2.9, p. 23, a que $\text{rg}(A) = \text{rg}(R)$ no es máximo. \square

Presentamos a continuación otro procedimiento para calcular el determinante por filas de una matriz cuadrada.

Proposición 4.10 (1) Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $1 \leq i \leq n$. Entonces,

$$\det_f(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det_f(A_{ij}).$$

Esta fórmula se denomina *regla de Laplace* para la fila i -ésima.

Demostración. Podemos suponer que $i \geq 2$. Sea $C = (c_{ij})$ la matriz que se obtiene a partir de A al intercambiar sus filas primera e i -ésima. Se tiene

$$\det_f(A) = -\det_f(C) = -\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} c_{1j} \det_f(C_{1j}).$$

Pero $c_{1j} = a_{ij}$ y C_{1j} es igual a la matriz que se obtiene a partir de A_{ij} al colocar su primera fila en el lugar $i-1$. Esto es lo mismo que efectuar $i-2$ intercambios de filas consecutivas, lo que da lugar a $i-2$ cambios de signo. Así pues, $\det_f(C_{1j}) = (-1)^{i-2} \det_f(A_{ij})$, y por tanto,

$$\det_f(A) = -\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{ij} (-1)^{i-2} \det_f(A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det_f(A_{ij}),$$

que es la igualdad buscada. \square

Veamos cómo podemos emplear dos estrategias (una directa y otra indirecta) para probar de dos maneras diferentes un resultado muy importante:

Proposición 4.11 *El determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de sus determinantes.*

Demostración. Consideremos un producto AB de dos matrices cuadradas A y B de orden n . Si alguno de los determinantes $\det_f(A)$ o $\det_f(B)$ es nulo, el mínimo de los rangos de A y B es menor que n luego, por I.3.8, p. 36, también $\text{rg}(AB) < n$, lo que implica que $\det_f(AB) = 0 = \det_f(A) \det_f(B)$. Podemos pues suponer que A y B tienen rango máximo, es decir, determinante no nulo. Entonces podemos razonar de las dos formas siguientes:

Cálculo directo de $\det_f(AB)$. Como A tiene rango máximo, mediante operaciones elementales por filas, A es equivalente a una matriz escalonada reducida R con todas las filas no nulas, que es por tanto la identidad. Por otra parte, por I.3.7, p. 36, si aplicamos esas mismas operaciones elementales a AB obtenemos $RB = B$. Así, los factores que se aplican para obtener $1 = \det_f(R)$ a partir de $\det_f(A)$, I.4.8, p. 51, son los mismos que se aplican para obtener $\det_f(RB) = \det_f(B)$ a partir de $\det_f(AB)$. Esto significa que

$$\det_f(A) = \frac{\det_f(A)}{\det_f(R)} = \frac{\det_f(AB)}{\det_f(B)},$$

que es la igualdad que pretendíamos demostrar. \square

Ésta ha sido la primera prueba. Veamos la segunda.

Razonamiento indirecto empleando la unicidad del determinante. Puesto que $\det_f(B) \neq 0$, podemos definir la aplicación

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} : A \mapsto \frac{\det_f(AB)}{\det_f(B)}.$$

Se comprueba que esta aplicación cumple las sempiternas propiedades (1), (2) y (3) de I.4.3, p. 46, teniendo en cuenta una vez más que las operaciones por filas en A se traducen en operaciones por filas en AB (I.3.7, p. 36 otra vez). Por tanto, la aplicación que acabamos de definir es el determinante por filas, esto es,

$$\frac{\det_f(AB)}{\det_f(B)} = \det_f(A),$$

y se sigue el resultado deseado. \square

Así hemos completado la presentación del determinante por filas, y todo se transcribe sin dificultad hasta definir el determinante *por columnas*, mediante la regla de Laplace *por columnas*. Todas las propiedades que se cumplen para filas se cumplen también para columnas. Las comprobaciones no tienen misterio y por ello no las escribimos. Señalemos eso sí, qué se cumple. Para facilitar la escritura denotaremos por c_1, \dots, c_n las columnas de una matriz A de orden n , y realizamos, sólo por conveniencia notacional, la identificación

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \mathbb{K}^n \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{K}^n : A = (a_{ij}) \rightsquigarrow (c_1, \dots, c_n), \quad c_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n.$$

El enunciado análogo al apartado (1) en I.4.9, p. 51 es el siguiente:

Proposición y Definición 4.12 *Existe una única aplicación, que denotamos $\det_c : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, que cumple las propiedades siguientes:*

(1) $\det_c(I_n) = 1$.

(2) *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $c'_j, c''_j, c_1, \dots, c_j = \alpha c'_j + \beta c''_j, \dots, c_n \in \mathbb{K}^n$ se cumple*

$$\det_c(c_1, \dots, \alpha c'_j + \beta c''_j, \dots, c_n) = \alpha \det_c(c_1, \dots, c'_j, \dots, c_n) + \beta \det_c(c_1, \dots, c''_j, \dots, c_n).$$

(3) *Si la matriz A tiene dos columnas iguales, entonces $\det_c(A) = 0$.*

Esta aplicación se llama determinante por columnas.

Observaciones 4.13 (1) Se deduce de la Proposición I.4.3, p. 46 que la aplicación $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \det_f(A^t)$ cumple las condiciones (1), (2) y (3) de la definición anterior luego, por la unicidad, $\det_c(A) = \det_f(A^t)$.

(2) En particular se cumple que dadas matrices cuadradas A y B del mismo orden, $\det_c(AB) = \det_c(A) \det_c(B)$, ya que, por I.4.11, p. 53,

$$\begin{aligned} \det_c(AB) &= \det_f((AB)^t) = \det_f(B^t A^t) = \det_f(B^t) \det_f(A^t) \\ &= \det_c(B) \det_c(A) = \det_c(A) \det_c(B). \end{aligned}$$

Pero lo interesante es la comparación de los dos determinantes, por filas y por columnas, de una misma matriz. Como para el rango, tenemos la mejor respuesta posible, es decir, que son iguales.

Proposición y Definición 4.14 *Los determinantes por filas y por columnas coinciden. En lo sucesivo denotamos $\det(A) = \det_f(A) = \det_c(A)$ y lo llamamos determinante de la matriz cuadrada A . En particular, $\det(A^t) = \det(A)$.*

Demostración. Por segunda vez, vamos a presentar dos pruebas diferentes de un resultado sobre determinantes.

Por cálculo directo. Comenzamos observando que si A no es invertible tanto su rango por filas como su rango por columnas, que coinciden, son menores que su orden y por tanto ambos determinantes son nulos. Supondremos pues en lo que sigue que A es invertible, luego ambos determinantes son no nulos. Recordemos, I.4.8, p. 51, que para calcular el determinante *por filas* de A se hacen operaciones elementales *por filas* hasta obtener la matriz identidad, y el $\det_f(A)$ es el inverso del producto de los factores asociados a esas operaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & B \rightsquigarrow B' & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & R = I_n \\ \det_f(A) & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & \det_f(B) \overset{\mu}{\rightsquigarrow} \det_f(B') & \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow & \det_f(R) = 1 \end{array}$$

También podemos utilizar esta sucesión de operaciones elementales *por filas* para calcular el determinante *por columnas*, siempre que sepamos cómo varía éste último con cada una de aquéllas. En realidad, se trata de comprobar que \det_c varía como \det_f , es decir, que lo mismo que para filas, se cumple

$$(***) \quad \det_c(B) \overset{\mu}{\rightsquigarrow} \det_c(B'), \text{ o sea, } \det_c(B') = \mu \det_c(B).$$

Para ver esto, empecemos por considerar la matriz I' que se obtiene a partir de la identidad I mediante la misma operación elemental por filas que proporciona B' a partir de B . Por la forma en que se comporta el producto respecto a estas operaciones, I.3.7, p. 36, como $B = IB$ se tiene $B' = I'B$. Así:

$$\det_c(B') = \det_c(I'B) = \det_c(I')\det_c(B),$$

y todo se reduce a probar que $\det_c(I') = \mu$, esto es, basta probar (***) para la matriz identidad I . Pero para ésta, la operación elemental *multiplicar la fila i -ésima por el escalar λ* coincide con la operación elemental *multiplicar la columna por i -ésima por el escalar λ* , y la operación elemental *intercambiar las*

filas i -ésima y j -ésima es la misma que *intercambiar las columnas i -ésima y j -ésima*, por lo que la comprobación de (***) para la matriz identidad en estos dos casos es inmediata. No ocurre lo mismo con las operaciones *sumar a una fila un múltiplo de otra* y *sumar a una columna un múltiplo de otra*. Pero estas operaciones son irrelevantes en lo que respecta al cálculo de determinantes, pues el factor asociado es $+1$ en ambos casos. Hemos terminado.

Por razonamiento indirecto basado en la unicidad del determinante. Será suficiente probar por inducción que el determinante por columnas, definido mediante la *regla de Laplace por columnas*:

$$\det_c(A) = \sum_{j=1}^n a_{j1}(-1)^{j+1}\det_c(A_{j1}),$$

cumple las propiedades (1), (2) y (3) de I.4.3, p. 46. Como muestra, veamos la propiedad (3), esto es, $\det_c(A) = 0$ si la matriz A tiene dos filas iguales.

En efecto, supongamos que las filas iguales son la k -ésima y la ℓ -ésima, $k < \ell$. Entonces todas las matrices A_{j1} tienen dos filas iguales (y por inducción nulos los determinantes) salvo A_{k1} y $A_{\ell1}$ luego, argumentando por inducción,

$$\det_c(A) = a_{k1}(-1)^{k+1}\det_c(A_{k1}) + a_{\ell1}(-1)^{\ell+1}\det_c(A_{\ell1}).$$

Por ser iguales las filas en cuestión, $a_{k1} = a_{\ell1}$, y todo se reduce a ver que

$$\det_c(A_{k1}) = -(-1)^{\ell-k}\det_c(A_{\ell1}) = (-1)^{\ell-k-1}\det_c(A_{\ell1}).$$

De nuevo por ser iguales las dos filas, las dos matrices A_{k1} y $A_{\ell1}$ sólo difieren en la ordenación de sus filas, a saber: la fila $(\ell - 1)$ -ésima de A_{k1} es la fila k -ésima de $A_{\ell1}$. Por inducción, al intercambiar dos filas en $A_{\ell1}$ cambia el signo del determinante. Por tanto, intercambiando la fila k -ésima de $A_{\ell1}$ con todas las siguientes, hasta la $(\ell - 1)$ -ésima, tenemos $\ell - 1 - k$ cambios de signo, que es precisamente lo que se quería comprobar. \square

Observaciones 4.15 (1) Por el resultado anterior al calcular el determinante de una matriz podemos efectuar sobre ella operaciones elementales por filas en un paso y por columnas en el siguiente, y después volver a usar operaciones por filas o viceversa, según convenga. Esto es debido a que, por I.4.14, p. 55, coinciden los determinantes por filas y por columnas de las matrices intermedias obtenidas en cada paso.

(2) Se puede decir que el determinante $\det(A)$ es el invariante numérico más importante de una matriz $A = (a_{ij})$, pero hay otro que tiene también gran interés: la suma $\sum_i a_{ii}$ de los elementos de la diagonal principal, que se llama *traza* y se denota $\text{tr}(A)$. La traza es *lineal*: conserva la suma y el producto por escalares. Sin embargo, no se comporta bien respecto del producto de matrices. Mencionaremos la traza en algún ejercicio, en espera de su aparición más específica en el capítulo III.

Ejemplo 4.16 Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Vamos a calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

llamado *de Vandermonde*, y que denotaremos $\Delta(a_1, \dots, a_n)$. Para $n = 2, 3$ se tiene

$$\Delta(a_1, a_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_1, \quad \Delta(a_1, a_2, a_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Si en este último determinante restamos a las filas segunda y tercera el producto de la anterior por a_1 , al desarrollar por la primera columna y extraer los factores $a_2 - a_1$ y $a_3 - a_1$ fuera del determinante, resulta lo siguiente

$$\begin{aligned} \Delta(a_1, a_2, a_3) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{pmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2). \end{aligned}$$

Parece plausible conjeturar una fórmula similar para n arbitrario:

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Vamos a demostrarla por inducción sobre n . Ya sabemos que vale para $n = 2, 3$ y en general, restando a cada fila, salvo la primera, el producto de a_1 por la

anterior resulta

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{pmatrix}.$$

Desarrollamos este determinante por la primera columna, y después extraemos de cada columna los factores $a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1$ para obtener

$$\begin{aligned} \Delta(a_1, \dots, a_n) &= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \Delta(a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción,

$$\Delta(a_2, \dots, a_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i),$$

lo que sustituido en la anterior igualdad concluye el proceso inductivo:

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

De la fórmula que acabamos de probar se desprende inmediatamente que *el determinante de Vandermonde es no nulo si y sólo si todos los escalares a_i son distintos.* \square

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Hallar los determinantes de las matrices siguientes:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Número 2. Probar que para todo número real x se tiene

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{pmatrix} = 0.$$

Número 3. Hallar los determinantes de las matrices siguientes:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}, \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{pmatrix}.$$

Número 4. Resolver la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x \end{pmatrix} = 0.$$


Número 5. Sea \mathcal{M} el conjunto de las matrices de orden 3 cuyos coeficientes valen 1 o -1 .

(1) Calcular cuántos elementos tiene \mathcal{M} y demostrar que el determinante de cualquier matriz de \mathcal{M} es un entero múltiplo de 4.

(2) Describir explícitamente el conjunto $\mathcal{D} = \{\det(A) : A \in \mathcal{M}\}$. ¿Cuántos elementos tiene?

Número 6. Calcular el determinante de la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

 **Número 7.** (1) Dados escalares $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, calcular el determinante

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

(2) Suponemos $n = 6$, $a_1 = \dots = a_6 = 1$ y cada $b_k = x^k$. Calcular el valor del entero x sabiendo que $D_6 = 1093$.

🚩 **Número 8.** Calcular, para cada entero $n \geq 2$, el determinante

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

🚩 **Número 9.** Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ una matriz *mágica* de orden 3, esto es, sus coeficientes son números enteros y la suma de los elementos de cada fila coincide con la suma de los elementos de cada columna y coincide también con lo que suma cada una de las diagonales. Demostrar que el determinante de A es múltiplo entero de la suma de los coeficientes de A .

Número 10. Sean A y B dos matrices cuadradas. Demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Número 11. Demostrar utilizando matrices elementales (véase el ejercicio número 4 de la lección I.3, p. 42) que el determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.

Número 12. Sean A y B dos matrices $m \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Calcular los rangos de ambas sabiendo que $\det(AB) \neq \det(BA)$.

🚩 **Número 13.** Consideremos la siguiente disposición del *triángulo de Tartaglia*

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & & \\ 1 & 4 & 10 & \cdots & & & \\ 1 & 5 & \cdots & & & & \\ 1 & \cdots & & & & & \end{array}$$

Calcular el determinante de la matriz cuadrada de orden n que forman los n^2 coeficientes de la esquina superior izquierda.

🚩 **Número 14.** (1) Demostrar la siguiente fórmula para el cálculo del determinante:

$$\det(A) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=1 \\ j_k \neq j_\ell}}^n (-1)^{\#(j)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n},$$

donde $\#(j)$ es el número de intercambios de columnas que hay que hacer para ordenar consecutivamente las columnas j_1, \dots, j_n .

(2) Demostrar que la paridad del número de intercambios de columnas que hay que hacer para reordenar las columnas de una matriz de una manera prescrita no depende de la manera en que se elijan los intercambios.

Número 15. Demostrar que una aplicación

$$\text{deter} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

que cumple las reglas de cálculo (i), (ii), (iii) de I.4.6, p. 50, y tal que $\det(I_n) = 1$ es la función determinante. Esto proporciona una definición del determinante ligada directamente a las operaciones elementales.

5. Aplicaciones del determinante

Para completar la presentación del determinante, debemos comprobar su utilidad para abordar los problemas que estamos estudiando. Dedicamos a eso esta lección.

En primer lugar mostramos cómo se calcula el rango de una matriz mediante determinantes. Obsérvese que el determinante se calcula para matrices cuadradas, y el rango para matrices arbitrarias.

Primero un poco de terminología. Un *menor de orden s* de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es el determinante de una matriz cuadrada de orden s que se obtenga a partir de A eliminando $m - s$ de sus filas y $n - s$ columnas. Diremos que un menor contiene a otro si la matriz del uno contiene a la del otro. Ahora podemos enunciar:

Proposición 5.1 *Sea A una matriz no necesariamente cuadrada, y sea D un menor no nulo de A . Entonces el rango de A es el mayor de los órdenes de los menores no nulos que contienen a D .*

Demostración. Se trata de demostrar que si \overline{D} es un menor de orden s no nulo, cuya matriz denotamos M y que contiene a D , entonces $\text{rg}(A) \geq s$ y si la desigualdad es estricta, es decir, $\text{rg}(A) > s$, podemos añadir a M una fila y una columna para obtener otro menor no nulo de orden $s + 1$. Para la primera parte observamos que, por tener determinante no nulo, el rango de M es máximo, luego sus s filas son independientes. Cada una de estas filas es parte de alguna fila de A , luego entre estas últimas tampoco puede haber dependencias, y concluimos que A tiene al menos esas s filas independientes. Así, $\text{rg}(A) \geq s$.

Para la segunda parte, supongamos que $\text{rg}(A) > s$. Hemos de encontrar una matriz M' de orden $s + 1$ y determinante no nulo que contenga a M . Ya hemos señalado que las s filas de A que contienen a las de M son independientes, luego A tiene alguna fila que no depende de esas s . Con ella y las s que ya tenemos formamos un submatriz A' de A que tiene $s + 1$ filas independientes (I.2.11, p.

25), y tantas columnas como A . Además A' contiene a nuestra submatriz M . Ahora usaremos que el rango de A' es también el número máximo de columnas independientes. Nos fijamos en las columnas c_{j_1}, \dots, c_{j_s} de A' que contienen a las de M , y que son independientes por serlo éstas. Por tanto si las demás columnas de A' dependieran de c_{j_1}, \dots, c_{j_s} , el rango de A' sería s , que no es el caso. Por ello, hay alguna columna c de A' que no depende de las columnas c_{j_1}, \dots, c_{j_s} . Sea M' la submatriz cuadrada de orden $s+1$ de A' cuyas columnas son las columnas independientes $c_{j_1}, \dots, c_{j_s}, c$ de A' . Por tanto, $\det(M') \neq 0$ y M' contiene a M , luego hemos terminado. \square

La demostración anterior muestra cómo *calcular el rango por menores*: se elige uno no nulo, y se va ampliando hasta que se obtiene un menor no nulo de un orden r tal que todos los de orden $r+1$ que lo contienen son nulos. Entonces el rango es r .

Ejemplo 5.2 En I.2.10, p. 23, calculamos por escalonamiento el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora ese rango por menores. En primer lugar, el menor de A formado por las dos primeras filas y columnas es no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Como el único menor de orden 3 que contiene al anterior es

$$\det(A) = -12 + 8 + (18 - 14) = 0,$$

concluimos que $\text{rg}(A) = 2$.

Consideramos ahora la matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Para calcular su rango, empezamos con el mismo menor de orden 2 no nulo de antes, y buscamos los menores de orden 3 de A' que lo contienen. Corresponden

a las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

y se comprueba que todos son nulos. Por tanto, $\text{rg}(A') = 2$, *sin necesidad de calcular ningún menor de orden 4*.

Obsérvese además que este método de los menores nos dice con precisión qué filas (o columnas) dependen de cuáles. Por ejemplo, con los cálculos anteriores, la tercera y la cuarta filas dependen de las dos primeras. Pero fijémonos en el menor de A' siguiente

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 18 \neq 0.$$

Como ya sabemos que el rango es 2, todos los menores de orden 3 que contienen a éste son nulos, luego las filas primera y segunda dependen de las filas tercera y cuarta (que son las involucradas en el menor anterior). En contrapartida, toda esta información es sólo cualitativa, pues nada nos dice explícitamente sobre qué combinaciones hay que hacer con unas filas para obtener otras. \square

A continuación queremos utilizar los determinantes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados (con igual número de ecuaciones que de incógnitas). Esto es, un sistema del tipo $Ax^t = b^t$, donde A es una matriz cuadrada de orden n y rango n (teorema de Rouché-Frobenius). Como el rango de la matriz A es máximo, la matriz es invertible, y tenemos:

$$x^t = (A^{-1}A)x^t = A^{-1}(Ax^t) = A^{-1}b^t,$$

de manera que en realidad lo que hay que hacer es calcular la inversa de A .

(5.3) Matriz adjunta y matriz inversa. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . El *adjunto* (con signo) de un elemento a_{ij} es

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

donde A_{ij} es la matriz que resulta de A al prescindir de la fila i -ésima y de la columna j -ésima. Se cumple:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ik} \det(A_{ij}) = \begin{cases} \det(A) & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

En efecto, vemos el sumatorio como una regla de Laplace según *la columna j -ésima*, es decir, vemos un determinante, y lo que hay que distinguir en cada caso es de qué matriz. Si $k = j$ la matriz es A , luego obtenemos $\det(A)$. Si $k \neq j$, la matriz es la matriz A' que se obtiene a partir de A al sustituir su columna j -ésima por una copia de la k -ésima. Así las columnas j -ésima y k -ésima de A' son iguales, luego $\det(A') = 0$.

Estas fórmulas sugieren considerar la denominada *matriz adjunta de A* ,

$$\text{Adj}(A) = (\alpha_{ij})^t,$$

y observamos que las igualdades (*) nos dicen, exactamente, que al multiplicar la j -ésima fila de $\text{Adj}(A)$ por la k -ésima columna de A el resultado es 0 si $j \neq k$, mientras que si $j = k$ dicho producto vale $\det(A)$. En consecuencia, $\text{Adj}(A)A = \det(A)I_n$. En resumen, si A es invertible, $\det(A) \neq 0$, y deducimos la siguiente expresión para la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}.$$

Ésta es otra forma de ver por qué A es invertible si y sólo si su determinante es no nulo. \square

Señalemos que en numerosos textos la matriz $\text{Adj}(A)$ se denomina adjunta traspuesta, por las razones evidentes. No lo hacemos aquí así, para seguir a muchos textos clásicos que prefieren decir simplemente adjunta.

Ejemplos 5.4 (1) Vamos a calcular por el procedimiento anterior, que es distinto del empleado en I.3.11, p. 39, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, A es invertible, ya que $\det(A) = 6 \neq 0$.

Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{6} \text{Adj}(A)$, y la matriz adjunta $\text{Adj}(A)$ se calcula como

sigue:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2, & \alpha_{21} &= -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, & \alpha_{31} &= \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0, \\ \alpha_{12} &= -\det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, & \alpha_{22} &= \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1, & \alpha_{32} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = -6, \\ \alpha_{13} &= \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2, & \alpha_{23} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2, & \alpha_{33} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -6.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Para matrices invertibles de orden 2 la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

nos proporciona su inversa. □

Después de lo anterior, volvemos a la resolución explícita de un sistema compatible determinado.

Proposición 5.5 (Regla de Cramer) *Consideremos un sistema $Ax^t = b^t$ con n incógnitas y matriz $A = (a_{ij})$ de rango n . Para cada índice $j = 1, \dots, n$ denotamos B_j la matriz cuya columna j -ésima es b^t , es decir, la de los términos independientes del sistema, y cuyas restantes columnas son las de A . Entonces, para cada $j = 1, \dots, n$ se cumple que*

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}.$$

Demostración. Si $Ax^t = b^t$ podemos despejar x^t multiplicando ambos miembros por la izquierda por la matriz inversa A^{-1} , esto es,

$$x^t = (A^{-1}A)x^t = A^{-1}(Ax^t) = A^{-1}b^t = \frac{\text{Adj}(A)b^t}{\det(A)},$$

y calculamos el numerador de este cociente. Si nos interesa la incógnita j -ésima,

$$x_j = \frac{(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})(b_1, \dots, b_n)^t}{\det(A)} = \frac{\alpha_{1j}b_1 + \dots + \alpha_{nj}b_n}{\det(A)},$$

y lo que leemos en el numerador es la regla de Laplace según la columna j -ésima de la matriz B_j , esto es, $\det(B_j)$. \square

Ejemplo 5.6 Vamos a discutir el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = b_3. \end{cases}$$

En este caso la matriz de coeficientes A del sistema es invertible, ya que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -9,$$

y aplicando la regla de Cramer obtenemos

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & 1 & -1 \\ b_2 & -1 & 1 \\ b_3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-9}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & b_1 & -1 \\ 1 & b_2 & 1 \\ 3 & b_3 & 1 \end{pmatrix}}{-9} \quad \text{y}$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & b_1 \\ 1 & -1 & b_2 \\ 3 & 2 & b_3 \end{pmatrix}}{-9}.$$

Al desarrollar los determinantes en los numeradores resulta

$$x_1 = \frac{b_1 + b_2}{3}, \quad x_2 = \frac{-2b_1 - 5b_2 + 3b_3}{9} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{-5b_1 + b_2 + 3b_3}{9}.$$

\square

Como veremos a continuación, la regla de Cramer sirve para resolver cualquier sistema compatible.

(5.7) Sistemas compatibles arbitrarios. Consideremos un sistema con m ecuaciones y n incógnitas $Ax^t = b^t$. Supongamos que el sistema es compatible. Por tanto, I.2.16, p. 28, la matriz del sistema $A = (a_{ij})$ y la ampliada tienen el mismo rango $r \leq n$. Así, A tiene un menor de orden r no nulo, digamos que

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{pmatrix}, \quad \det(B) \neq 0.$$

Esto significa que las ecuaciones i_1 -ésima, \dots , i_r -ésima son independientes, y las demás dependen de ellas. En consecuencia, el nuevo sistema obtenido prescindiendo de estas últimas es equivalente al inicial. Ahora separamos las incógnitas $y = (x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$, $z = (x_j)_{j \neq j_1, \dots, j_r}$, y el nuevo sistema se escribe como sigue:

$$\begin{cases} a_{i_1 j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{i_1 j_r} x_{j_r} = b_{i_1} - \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_1 j} x_j = g_{i_1}(z), \\ \vdots \\ a_{i_r j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{i_r j_r} x_{j_r} = b_{i_r} - \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_r j} x_j = g_{i_r}(z). \end{cases}$$

Para cada especialización $z = \lambda \in \mathbb{K}^{n-r}$ obtenemos un sistema con r ecuaciones y r incógnitas:

$$\begin{cases} a_{i_1 j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{i_1 j_r} x_{j_r} = g_{i_1}(\lambda), \\ \vdots \\ a_{i_r j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{i_r j_r} x_{j_r} = g_{i_r}(\lambda), \end{cases}$$

que abreviamos $By^t = g(\lambda)^t$. Este sistema es compatible determinado, pues su matriz B tiene rango máximo. Por tanto podemos resolverlo como antes:

$$y^t = (B^{-1}B)y^t = B^{-1}(By^t) = B^{-1}g(\lambda)^t = \frac{\text{Adj}(B)g(\lambda)^t}{\det(B)},$$

y la solución del sistema inicial es

$$\begin{cases} y^t = \frac{\text{Adj}(B)g(\lambda)^t}{\det(B)}, \\ z^t = \lambda^t. \end{cases}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Comprobar que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible y determinado, y resolverlo mediante la regla de Cramer

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

Número 2. Discutir en función del parámetro $t \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Número 3. Discutir en función del parámetro $t \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & t & 0 & t \\ 0 & t & t & 0 & -1 \\ 1 & t & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Número 4. Utilizando la matriz de adjuntos calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Número 5. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ tiene inversa la matriz siguiente, y calcularla


$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Número 6. Discutir el sistema del ejercicio número 11 de la lección I.1, p. 16, utilizando determinantes para el cálculo de rangos.

Número 7. Discutir el sistema del ejercicio número 12 de la lección I.1, p. 16, utilizando determinantes para calcular rangos.


Número 8. Discutir el sistema no homogéneo del ejercicio número 13 de la lección I.1, p. 16, utilizando determinantes para el cálculo de rangos.

Número 9. Discutir el sistema del ejercicio número 14 de la lección I.1, p. 17, utilizando determinantes para el cálculo de rangos.

 **Número 10.** Sean n un número entero mayor que 1 y u, v dos números reales. Discutir,

en función de los valores de estos dos últimos, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} u x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1, \\ x_1 + u x_2 + x_3 + \cdots + x_n = v, \\ x_1 + x_2 + u x_3 + \cdots + x_n = v^2, \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + u x_n = v^{n-1}. \end{cases}$$

 **Número 11.** Encontrar todas las ternas de números complejos a, b, c que satisfacen las igualdades

$$\begin{cases} a + b + c = 3, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3. \end{cases}$$

Número 12. Comprobar que, para cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Deducir que si A es invertible, entonces $\text{Adj}(A) = \text{tr}(A)I_2 - A$, y obtener la fórmula de cálculo de A^{-1} del ejemplo I.5.4(2), p. 65. ¿Cuándo es A su propia inversa?

Número 13. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$.


(1) Encontrar una condición necesaria y suficiente, que involucre sólo a la matriz A , para que P sea la única solución de la ecuación $AX = AP$, donde la incógnita es $X \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$.

(2) Obtener una matriz $X \neq P$ que cumpla $AX = AP$ en el caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Hallar todas las matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ que satisfagan, simultáneamente, las ecuaciones $AX = AP$ y $BX = BP$, donde P y A son las del apartado anterior y


$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

 **Número 14.** Sean k un entero positivo y para cada par de enteros no negativos $j > i$ denotamos $c_{ij} = \binom{j}{i}$. Definimos el polinomio

$$f(T) = \det \begin{pmatrix} c_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & T \\ c_{02} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 & T^2 \\ c_{03} & c_{13} & c_{23} & \cdots & 0 & T^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{0k} & c_{1k} & c_{2k} & \cdots & c_{k-1,k} & T^k \\ c_{0,k+1} & c_{1,k+1} & c_{2,k+1} & \cdots & c_{k-1,k+1} & T^{k+1} \end{pmatrix}.$$

(1) Demostrar que $f(T+1) - f(T)$ es un monomio de grado k .

(2) Demostrar la igualdad $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{f(n+1)}{(k+1)!}$.

 **Número 15.** (1) Demostrar que si dos polinomios

$$f(T) = a_0T^m + a_1T^{m-1} + \cdots + a_{m-1}T + a_m, \quad g(T) = b_0T^n + b_1T^{n-1} + \cdots + b_{n-1}T + b_n,$$

tienen alguna raíz común, entonces el determinante

$$R(f, g) = \det \left(\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ filas} \\ \\ \\ n \text{ filas} \end{array}$$

es nulo. Se dice que $R(f, g)$, que es el determinante de una matriz de orden $m+n$, es la *resultante* de f y g .

(2) ¿Tiene alguna raíz múltiple (es decir, común con su derivada) el polinomio $f(T) = T^3 + T + 1$?

Cuestiones sobre sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si tiene rango máximo.

Número 2. Un sistema lineal no homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene siempre solución.

Número 3. El rango del producto de dos matrices es el máximo de los rangos de cada una.

Número 4. Si dos matrices no necesariamente cuadradas A y B cumplen $AB = I$, entonces ambas tienen rango máximo.

Número 5. Si los rangos de dos matrices cuadradas A y B de igual orden coinciden, y coinciden con el de su producto AB , entonces A , B y AB son invertibles las tres.

Número 6. Si un sistema lineal homogéneo es compatible, está asociado a infinitos sistemas lineales no homogéneos también compatibles.

Número 7. Sean $Ax^t = b^t$ un sistema lineal incompatible, y C una matriz invertible. Entonces el sistema $CAx^t = b^t$ es incompatible.

Número 8. Sean $Ax^t = b^t$ un sistema lineal compatible, y C una matriz invertible. Entonces el sistema $CAx^t = b^t$ es compatible.

Número 9. La matriz adjunta de la adjunta de una matriz invertible dada es la misma matriz.

Número 10. Toda matriz de rango n contiene una submatriz cuadrada regular de orden n .

Número 11. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = 0$. Entonces $I_n + A$ e $I_n - A$ son invertibles y mutuamente inversas.

Número 12. Dos matrices A y B de igual orden son iguales si y sólo si $Ax^t = Bx^t$ para cualquier x .

Número 13. Si dos matrices cuadradas de orden n invertibles son equivalentes por filas, entonces sus inversas también son equivalentes por filas.

Número 14. Un sistema lineal homogéneo con tantas incógnitas como ecuaciones es compatible determinado.

Número 15. El determinante de la matriz opuesta de una dada es el opuesto del determinante de ésta.

Número 16. Un sistema lineal homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas es compatible determinado.

Número 17. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden n , cuyo producto tiene determinante nulo. Entonces ambas tienen rango $< n$.

Número 18. Sean A y C matrices cuadradas no nulas de igual orden. Si C^tAC no es invertible, entonces C tampoco lo es.

Número 19. La suma de dos matrices escalonadas reducidas es escalonada, pero puede no ser escalonada reducida.

Número 20. Si el rango de la suma de dos matrices cuadradas y el de su diferencia son ambos 0, las dos matrices tienen determinante nulo.

Número 21. El rango de un producto de dos matrices es el mínimo rango de las dos.

Número 22. Si la matriz adjunta de una matriz cuadrada dada es idénticamente nula, también lo es la matriz dada.

Número 23. Dos matrices equivalentes por operaciones elementales de filas lo son también por operaciones elementales de columnas.

Número 24. Dos sistemas lineales no homogéneos compatibles que tienen las mismas soluciones, tienen sistemas homogéneos asociados equivalentes.

Número 25. La matriz adjunta de la adjunta de una matriz regular A es proporcional a A , pero no necesariamente igual.

Número 26. El determinante de una combinación lineal de matrices cuadradas de orden n es nulo si y sólo si alguna de las matrices tiene rango $< n$.

Número 27. El determinante de un producto de matrices es no nulo si y sólo si las dos matrices tienen rango máximo.

Número 28. El producto de dos matrices de rango no nulo puede tener rango nulo.

Número 29. Ninguna matriz 3×4 tiene rango 4.

Número 30. Si un sistema lineal homogéneo tiene solución no trivial, está asociado a infinitos sistemas lineales no homogéneos también compatibles.

Número 31. Si un sistema lineal homogéneo sólo tiene solución trivial, no está asociado a ningún sistema lineal no homogéneo incompatible.

Número 32. Si la matriz A de orden $n \times m$ tiene rango m , entonces existe una matriz B tal que $AB = I_n$.

Número 33. No existe ninguna matriz A cuyo producto AB por la fila $B = (1, \dots, 1)$ sea una matriz identidad de orden ≥ 2 .

Número 34. El determinante de la suma de dos matrices es la suma de los determinantes de cada una.

Número 35. Si un sistema lineal $Ax^t = b^t$ es incompatible, entonces el homogéneo asociado $Ax^t = 0$ tiene solución no trivial.

Número 36. Si A es una matriz regular de orden n , entonces $\det(\text{Adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

Número 37. Si una matriz no tiene 5 filas independientes, entonces tampoco tiene 5 columnas independientes.

Número 38. Si una matriz tiene 5 filas independientes, entonces tiene 5 columnas independientes.

Número 39. Si una matriz A es invertible, cualquier submatriz cuadrada suya lo es también.

Número 40. Todo sistema lineal homogéneo compatible determinado tiene más incógnitas que ecuaciones.

Número 41. El rango de una matriz es mayor o igual que el de su cuadrado.

Número 42. Dos sistemas equivalentes tienen el mismo sistema escalonado reducido asociado.

Número 43. Si el producto de dos matrices cuadradas tiene rango máximo, entonces ambas son invertibles.

Número 44. Si una matriz A tiene la propiedad de que para cierto exponente p se cumple $\sum_{i=0}^p A^i = 0$, entonces A es invertible.

Número 45. Sea A una matriz cuadrada cuyo rango no es máximo. Si los sistemas $Ax^t = 0$ y $xA = 0$ tienen las mismas soluciones, entonces $A = A^t$.

Número 46. Si el determinante de una matriz cuadrada es nulo, su traza debe ser asimismo nula.

Número 47. Si dos sistemas son equivalentes y uno de ellos es homogéneo, el otro también lo es.

Número 48. Si el producto de dos matrices es una matriz cuadrada invertible de orden n , entonces el rango de las dos matrices es precisamente n .

Número 49. Sea A una matriz regular y B el resultado de aplicar a A ciertas operaciones elementales por filas. Entonces B es también regular, y haciendo esas mismas operaciones por filas a A^{-1} se obtiene B^{-1} .

Número 50. Hay infinitas matrices cuadradas A y B de orden 2 tales que $AB = A + B = I$.

Apéndice: Solucionario del capítulo I

Soluciones §1

Número 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 9x + 4y = 108, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 2z = 9, \\ 2x - y + 4z = 4, \\ 2x - y + 6z = -1. \end{cases}$$

Solución. (1) El sistema es equivalente al que resulta al multiplicar por 3 la primera ecuación, esto es,

$$\begin{cases} 9x - 6y = 18, \\ 9x + 4y = 108, \end{cases}$$

que equivale al obtenido tras restar a la segunda de estas ecuaciones la primera:

$$\begin{cases} 9x - 6y = 18, \\ 10y = 90, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 9x - 6y = 18, \\ y = 9. \end{cases}$$

Sumando a la primera ecuación 6 veces la segunda obtenemos la única solución del sistema:

$$\begin{cases} 9x = 72, \\ y = 9, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 9. \end{cases}$$

(2) Restamos a las ecuaciones segunda y tercera el doble de la primera, y en el nuevo sistema restamos a la tercera la segunda :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9, \\ -3y + 8z = -14, \\ -3y + 10z = -19, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x + y - 2z = 9, \\ -3y + 8z = -14, \\ 2z = -5. \end{cases}$$

Ahora sumamos la tercera ecuación a la primera, y restamos a la segunda cuatro veces la tercera para obtener la única solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ -3y = 6, \\ 2z = -5, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -2, \\ z = -5/2. \end{cases} \quad \square$$

Número 2. Leia y Chewbacca juegan una partida de ajedrez. El tiempo que emplea Leia en los primeros 14 movimientos es triple que el tiempo empleado por Chewbacca, mientras que en los restantes movimientos ambos emplearon 35 minutos. Sabiendo que en el total de la partida el tiempo empleado por Chewbacca es $3/4$ partes del empleado por Leia, calcular el tiempo utilizado por cada uno de los jugadores. (Por supuesto, la partida la ganó el wookiee.)

Solución. Denotemos por s y t el tiempo, expresado en minutos, empleado por Leia y Chewbacca, respectivamente, en ejecutar los primeros 14 movimientos. De este modo, el tiempo empleado en total por cada jugador es $s + 35$ y $t + 35$, respectivamente. Por lo que nos dice el enunciado,

$$t + 35 = \frac{3(s + 35)}{4} \rightsquigarrow 4t + 140 = 3s + 105 \rightsquigarrow 3s - 4t = 35.$$

En consecuencia, s y t son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} s - 3t = 0, \\ 3s - 4t = 35, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3s - 9t = 0, \\ 3s - 4t = 35, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} s - 3t = 0, \\ 5t = 35, \end{cases}$$

luego $t = 7$ y $s = 21$. Por tanto, Leia empleó 56 minutos mientras que Chewbacca sólo necesitó 42 minutos. \square

Número 3. Hallar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos $P_1 = (-1, -10)$, $P_2 = (1, -6)$ y $P_3 = (2, -13)$.

Solución. Que el punto $P_1 = (-1, -10)$ esté en la parábola significa que $x = -1, y = -10$ cumplen la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, es decir, $-10 = a - b + c$. De la misma manera,

con P_2 obtenemos la ecuación $-6 = a + b + c$, y con P_3 obtenemos $-13 = 4a + 2b + c$. En resumen, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a - b + c = -10, \\ a + b + c = -6, \\ 4a + 2b + c = -13. \end{cases}$$

Pero restando la primera ecuación de la segunda queda: $2b = 4$, y ya se tiene el valor $b = 2$. Ahora las otras dos ecuaciones dan

$$\begin{cases} a + c = -6 - b = -8, \\ 4a + c = -13 - 2b = -17. \end{cases}$$

Aquí, restando a la segunda la primera, queda $3a = -9$, y $a = -3$. En fin, la penúltima ecuación proporciona $c = -8 - a = -5$. Una vez resuelto el sistema vemos que la parábola buscada es

$$y = -3x^2 + 2x - 5. \quad \square$$

Número 4. Un excursionista comprueba, tras recorrer 7 km en la primera hora, que manteniendo ese ritmo llegaría con una hora de retraso al tren que pretende tomar. Acelera el paso, y durante el resto del camino recorre 10 km cada hora, por lo que llega con media hora de adelanto a la estación. ¿Cuánto tiempo estuvo andando? ¿Qué distancia recorrió?

Solución. Sean x la distancia, medida en km, recorrida por el excursionista y t el tiempo, medido en horas, que transcurre desde que inicia su caminata hasta la salida del tren que pretende tomar. El enunciado dice que

$$7(t+1) = x = 7 + 10\left(t - \frac{3}{2}\right),$$

luego $7t = 10t - 15$, es decir, $t = 5$. Como al excursionista le sobró media hora, estuvo andando cuatro horas y media. Además, la distancia recorrida es $x = 7(t+1) = 42$ km. \square

Número 5. Un comerciante de telas vende cada metro un 30,2% más caro que el precio al que lo compra. Desea aumentar sus ganancias sin incrementar los precios, para lo cual decide emplear un *falso metro* para medir la tela delante de sus clientes. ¿Cuánto ha de medir este falso metro para que sus ganancias pasen a ser del 40%?

Solución. Sea p el precio al que el comerciante compra el metro de tela. El precio al que inicialmente vende cada metro es

$$y = p + \frac{302}{1000}p = \frac{1302}{1000}p.$$

Si c es el número de centímetros que mide el falso metro, el comerciante va a cobrar y por c centímetros, que a él le costaron $x = \frac{1}{100}cp$. Como quiere ganar un 40% debe

cumplirse $y = x + \frac{40}{100}x = \frac{7}{5}x$. Por tanto,

$$\frac{1302}{1000}p = y = \frac{7}{5}x = \frac{7}{500}cp,$$

o lo que es igual, $c = 93$ cm. \square

Número 6. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán entonces, y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución. Llamamos x, y, z a las edades actuales de la madre y los hijos mayor y menor, respectivamente. Sus edades hace 14 años eran $x - 14$, $y - 14$ y $z - 14$, luego

$$x - 14 = 5(y - 14 + z - 14), \text{ esto es, } x - 5y - 5z = -126.$$

Sus edades dentro de 10 años serán $x + 10$, $y + 10$ y $z + 10$, por lo que

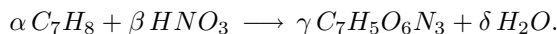
$$x + 10 = (y + 10) + (z + 10), \text{ esto es, } x - y - z = 10.$$

Además, dentro de $x - y$ años el hijo mayor tendrá la edad actual de la madre, y la del hijo menor será $z + (x - y) = 42$. Se trata, por tanto de resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 5y - 5z = -126, \\ x - y - z = 10, \\ x - y + z = 42. \end{cases}$$

Al restar la segunda ecuación a la tercera se tiene $2z = 32$, o sea, $z = 16$, mientras que si a la primera ecuación le quitamos el resultado de multiplicar por 5 la segunda, se tiene $-4x = -176$, es decir, $x = 44$. Por último, $y = x - z - 10 = 44 - 16 - 10 = 18$. Por tanto, la madre tiene 44 años y sus hijos tienen 18 y 16 años. \square

Número 7. Bajo ciertas condiciones se puede mezclar tolueno con ácido nítrico para obtener trinitrotolueno (también conocido como TNT) y agua. Ajustar la correspondiente reacción química:



¿Qué ocurre si reemplazamos el agua H_2O por agua oxigenada H_2O_2 ? ¿Cómo se interpreta ese resultado?

Solución. Se trata de encontrar los enteros positivos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ para que haya el mismo número de átomos de cada elemento antes y después de la reacción. En consecuencia:

$$\begin{cases} C : 7\alpha & = 7\gamma, \\ H : 8\alpha + \beta & = 5\gamma + 2\delta, \\ N : \beta & = 3\gamma, \\ O : 3\beta & = 6\gamma + \delta. \end{cases}$$

Así pues, hay que resolver el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} 7\alpha & - & 7\gamma & = & 0, \\ 8\alpha & + & \beta & - & 5\gamma & - & 2\delta & = & 0, \\ & & \beta & - & 3\gamma & = & 0, \\ & & 3\beta & - & 6\gamma & - & \delta & = & 0. \end{cases}$$

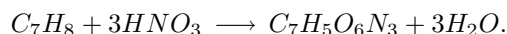
La primera ecuación dice que $\alpha = \gamma$, y la tercera que $\beta = 3\gamma$, lo que sustituido en las otras dos da:

$$\begin{cases} 6\gamma & - & 2\delta & = & 0, \\ 3\gamma & - & \delta & = & 0. \end{cases}$$

Como estas ecuaciones son proporcionales, podemos prescindir de una de ellas, y concluir $\delta = 3\gamma$. Así hay infinitas soluciones:

$$\alpha = p, \beta = 3p, \gamma = p, \delta = 3p.$$

Como queremos enteros positivos, lo más sencillo es tomar $p = 1$, y la reacción queda ajustada como sigue:



Si tenemos H_2O_2 en lugar de H_2O , el recuento de átomos de oxígeno cambia a

$$O : 3\beta = 6\gamma + 2\delta,$$

y al repetir el proceso terminamos con las dos ecuaciones

$$\begin{cases} 6\gamma & - & 2\delta & = & 0, \\ 3\gamma & - & 2\delta & = & 0. \end{cases}$$

Restando la segunda de la primera obtenemos $3\gamma = 0$, luego $\gamma = 0$ y $\delta = 0$, y $\alpha = \beta = 0$. Esto significa que la única solución del sistema inicial es la trivial. Es decir, no hay posibilidad de ajuste de la reacción, que por tanto no puede tener lugar. \square

Número 8. Sean x, y, z tres números enteros tales que los enteros $x+y+z, x-y-2z$ y $3x+4y-2z$ son múltiplos de 5. Demostrar que x, y y z son múltiplos de 5.

Solución. Existen números enteros a, b y c tales que

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 5a, \\ x & - & y & - & 2z & = & 5b, \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 5c. \end{cases}$$

Vamos a eliminar la incógnita y , para lo que sumamos las dos primeras ecuaciones y restamos la tercera al producto de la primera por 4. Se obtiene así:

$$\begin{cases} 2x & - & z & = & 5(a+b), \\ x & + & 6z & = & 5(4a-c), \end{cases} \rightsquigarrow 3x + 5z = 5(5a + b - c) \rightsquigarrow 3x = 5(5a + b - c - z).$$

Por tanto $3x$ es múltiplo de 5, luego también lo es x , digamos $x = 5u$ para cierto $u \in \mathbb{Z}$.

En consecuencia, tanto $y + z = 5a - x = 5(a - u)$ como $y + 2z = x - 5b = 5(u - b)$, son múltiplos de 5, y al restar, $z = 5(2u - a - b)$ es múltiplo de 5. Finalmente,

$$y = 5a - x - z = 5(a - u) - 5(2u - a - b) = 5(2a - 3u + b)$$

es también múltiplo de 5. \square

Número 9. En la siguiente suma

$$zyzyz + xwyw = xwyzv,$$

las letras sustituyen a ciertos dígitos. Sabiendo que letras distintas reemplazan a dígitos distintos, calcular éstos.

Solución. Para facilitar la comprensión de la solución de este ejercicio comenzamos escribiendo la suma anterior como lo haría un niño pequeño:

$$\begin{array}{rcccccc} & z & y & z & y & z & \\ + & & x & w & y & w & \\ \hline & x & w & y & z & v & \end{array}$$

El primer sumando tiene iguales las cifras de las unidades y de las decenas. El segundo sumando tiene esta misma propiedad. Sin embargo, no sucede lo mismo con el número que se obtiene al sumar ambos términos. Esto implica que al sumar las decenas *me llevo una*. Por tanto, $2y + \varepsilon = 10 + z$ donde $\varepsilon = 0$ si al sumar las unidades *no me llevo* y $\varepsilon = 1$ en caso contrario. En cualquier caso $z < y$, pues

$$10 + z = 2y + \varepsilon \leq 2y + 1 \rightsquigarrow 9 + z \leq 2y \rightsquigarrow 0 \leq 9 - y \leq y - z,$$

y como $y \neq z$, se deduce que $z < y$.

Veamos ahora que la suma $z + w$ de las cifras de las unidades (y las decenas) de ambos sumandos es menor que 10. En caso contrario se tendrían las igualdades

$$\begin{cases} 2y + 1 = 10 + z & (\text{decenas}), \\ z + w + 1 = 10 + y & (\text{centenas}), \end{cases}$$

y en consecuencia,

$$10 + z = 1 + 2y = 1 + 2(z + w - 9) \rightsquigarrow 27 = z + 2w,$$

y como z y w son dígitos esto obliga a que $z = 9 = w$, lo que es imposible.

Por otro lado, la cifra z de las decenas de millar del primer sumando no coincide con la correspondiente x de la suma, por lo que al sumar las unidades de millar *me llevo una*, es decir, $y + x = w + 10$ y $z + 1 = x$. En resumen,

$$\begin{cases} z + w - v = 0, \\ 2y - z = 10, \\ y - z - w = 1, \\ x + y - w = 10, \\ x - z = 1. \end{cases}$$

Al restar la tercera ecuación a la cuarta se obtiene $x + z = 9$, lo que junto con la última nos proporciona $x = 5$, $z = 4$. Así de la segunda ecuación resulta $y = 7$, y sustituyendo este valor en la tercera se tiene $w = 2$, y finalmente $v = z + w = 6$.

Por tanto, el primer sumando es 47474, el segundo sumando es 5272, y el resultado de su suma es 52746. \square

Número 10. Discutir el siguiente sistema según el valor de a :

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + az = 3, \\ x + ay + 3z = 2. \end{cases}$$

Solución. Empezamos restando a la segunda ecuación el doble de la primera, y a la tercera la primera:

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ y + (a+2)z = 1, \\ (a-1)y + 4z = 1. \end{cases}$$

Ahora queremos eliminar la y de la tercera ecuación, para lo que le restamos la segunda multiplicada por $(a-1)$ (obsérvese que si $a = 1$ esto es no hacer nada); queda

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ y + (a+2)z = 1, \\ (2-a)(3+a)z = 2-a. \end{cases}$$

Si $a = 2$ la última ecuación es trivial, y el sistema se reduce a

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ y + 4z = 1. \end{cases}$$

Ya se ve que x e y son incógnitas principales, y z no, luego el sistema es compatible indeterminado. Si por el contrario $a \neq 2$, el factor $2-a$ se simplifica, y el sistema se convierte en

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ y + (a+2)z = 1, \\ (3+a)z = 1. \end{cases}$$

Ahora, si $a = -3$ la última ecuación es incompatible, y consecuentemente lo es el sistema. Si por el contrario $a \neq -3$, calculamos z dividiendo por $3 + a$, y después y en la segunda ecuación, y finalmente x en la primera. Es pues un sistema compatible determinado.

En resumen, el sistema es:

$$\begin{cases} \text{incompatible si } a = -3, \\ \text{compatible determinado si } a \neq 2, -3, \text{ y} \\ \text{compatible indeterminado si } a = 2. \end{cases} \quad \square$$

Número 11. Discutir el siguiente sistema según el valor de a , y hallar sus soluciones cuando sea posible.

$$\begin{cases} 2x & - & y & = & a, \\ ax & - & 2y & = & 4, \\ 3x & - & y & = & 2. \end{cases}$$

Solución. Restando la tercera ecuación a la primera, y su doble a la segunda, se obtiene

$$\begin{cases} -x & & & = & a - 2, \\ (a - 6)x & & & = & 0, \\ 3x & - & y & = & 2. \end{cases}$$

El aspecto de la segunda ecuación nos lleva a distinguir los siguientes casos.

Caso 1. $a = 6$. Entonces el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x & & = & -4, \\ 3x & - & y & = & 2, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x & = & -4, \\ y & = & -14, \end{cases}$$

luego en este caso existe una única solución y el sistema es compatible y determinado.

Caso 2. En lo que sigue suponemos $a \neq 6$, por lo que el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x & & = & 2 - a, \\ x & & = & 0, \\ 3x & - & y & = & 2. \end{cases}$$

Este sistema es incompatible si $a \neq 2$, mientras que para $a = 2$ su única solución es $x = 0$, $y = -2$, por lo que es compatible y determinado. \square

Número 12. Discutir en función del valor de a el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x & + & 2ay & + & z & = & a, \\ ax & + & y & - & az & = & a, \\ 4ax & + & 4ay & + & az & = & 9. \end{cases}$$

Solución. Sumamos a la segunda ecuación a veces la primera y restamos a la tercera ecuación a veces la primera. Obtenemos así el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + 2ay + z = a, \\ 3ax + (1 + 2a^2)y = a(1 + a), \\ 2ax + 2a(2 - a)y = 9 - a^2. \end{cases}$$

Como en la primera ecuación se puede despejar $z = a - 2x - 2ay$, el sistema tiene solución si y sólo si la tiene el sistema

$$\begin{cases} 3ax + (1 + 2a^2)y = a(1 + a), \\ 2ax + 2a(2 - a)y = 9 - a^2, \end{cases}$$

formado por las dos últimas ecuaciones. Restando al doble de la primera el triple de la segunda obtenemos el sistema equivalente

$$(*) \quad \begin{cases} 2(5a^2 - 6a + 1)y = 5a^2 + 2a - 27, \\ 2ax + 2a(2 - a)y = 9 - a^2. \end{cases}$$

Supongamos que $5a^2 - 6a + 1 \neq 0$ y $a \neq 0$. La primera condición nos permite despejar y en la primera ecuación, para obtener

$$y = y_0 = \frac{5a^2 + 2a - 27}{2(5a^2 - 6a + 1)}.$$

Al reemplazar este valor de y en la segunda ecuación y, por ser a no nulo, despejar, resulta

$$x = x_0 = \frac{(9 - a^2)}{2a} - (2 - a)y_0 = \frac{-2a^3 + 13a^2 + 9}{2a(5a^2 - 6a + 1)}.$$

Como $5a^2 - 6a + 1 = (a - 1)(5a - 1)$ concluimos que:

Caso 1. Si $a \neq 0, 1, 1/5$, el sistema es compatible y determinado.

Caso 2. Si $a = 0$ la segunda ecuación de $(*)$ es $0 = 9$, si $a = 1$ la primera ecuación de $(*)$ es $0 = -20$, y si $a = 1/5$ la primera ecuación de $(*)$ es $0 = -132/5$. Vemos que en todos estos casos el sistema es incompatible. \square

Número 13. Discutir en función del valor de los números reales α y β , y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ \alpha x + \alpha y + z = \beta, \\ \alpha x + \alpha y + \alpha z = \beta, \\ \beta x + y + z = 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ \beta x + y + z = 0, \\ x + \beta y - z = 0. \end{cases}$$

Solución. En el primero de estos sistemas estudiamos inicialmente el caso $\alpha = 1$, pues entonces las ecuaciones segunda y tercera coinciden, por lo que se reescribe como

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + z = \beta, \\ \beta x + y + z = 1. \end{cases}$$

Al restar las dos primeras ecuaciones resulta $0 = \beta - 1$, luego el sistema es incompatible si $\beta \neq 1$, mientras que para $\beta = 1$ el sistema es compatible e indeterminado, pues consta de una única ecuación $x + y + z = 1$, cuyas soluciones son:

$$x = s, \quad y = t, \quad z = 1 - s - t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Suponemos ahora que $\alpha \neq 1$. Al restar las ecuaciones segunda y tercera se tiene $(\alpha - 1)z = 0$, luego $z = 0$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1, \\ \alpha x + \alpha y = \beta, \\ \beta x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha x + y = 1, \\ \alpha x + \alpha y = \beta, \\ (\beta - \alpha)x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Si $\alpha \neq \beta$ la tercera ecuación es equivalente a $x = 0$ luego ahora la primera ecuación es equivalente a $y = 1$ y la segunda nos conduce a contradicción: $\alpha = \alpha y = \beta$. En lo que sigue suponemos $\alpha = \beta$, por lo que la tercera ecuación es superflua y el sistema equivale a

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1, \\ \alpha x + \alpha y = \alpha, \\ z = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha x + y = 1, \\ (\alpha - 1)y = \alpha - 1, \\ z = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha x + y = 1, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Restando las dos primeras ecuaciones llegamos a

$$\begin{cases} \alpha x = 0, \\ y = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es $x = z = 0, y = 1$ si $\alpha \neq 0$, mientras que si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado, y sus soluciones son $x = s$ arbitrario, $y = 1, z = 0$. En resumen, la discusión del primero de los sistemas del enunciado es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{incompatible:} & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \text{compatible indeterminado:} & \text{si } \alpha = \beta = 1 \text{ o } \alpha = \beta = 0, \\ \text{compatible determinado:} & \text{si } \alpha = \beta \neq 0, 1. \end{cases}$$

En el caso en que el sistema es compatible determinado su solución es $x = z = 0, y = 1$, mientras que si $\alpha = \beta = 1$ la solución general es $x = s, y = t, z = 1 - s - t : s, t \in \mathbb{R}$, y si $\alpha = \beta = 0$, la solución general es $x = s, y = 1, z = 0$ donde $s \in \mathbb{R}$.

Pasamos a discutir el segundo sistema. Sumando la segunda ecuación a la tercera y restándosela a la cuarta se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ (\beta + 1)x = 0, \\ (\beta + 1)y = 0. \end{cases}$$

Por ello, si $\beta = -1$ podemos suprimir las ecuaciones tercera y cuarta, y así el sistema es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 4x + (\alpha - 1)z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases}$$

luego el sistema es compatible indeterminado en este caso, y las soluciones son

$$x = (\alpha - 1)t, \quad y = (3 + \alpha)t, \quad z = -4t.$$

Por otro lado, si $\beta \neq -1$ han de ser x e y nulas, lo que sustituido en la segunda ecuación del sistema nos dice que también $z = 0$. Así en este caso el sistema es compatible determinado y su única solución es $x = y = z = 0$. \square

Número 14. Estudiar para qué valores del número complejo λ el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^3, \\ x + \lambda y = 1, \end{cases}$$

carece de solución, para qué valores la solución es única y para qué valores existen infinitas soluciones.

Solución. Si $\lambda = 0$, la única solución es $x = 1, y = 0$. Suponemos en lo que sigue que $\lambda \neq 0$; multiplicamos la segunda ecuación por λ y le restamos la primera:

$$\begin{cases} (\lambda^2 - 1)y = \lambda(1 - \lambda^2), \\ x + \lambda y = 1. \end{cases}$$

Si $\lambda^2 \neq 1$ la primera ecuación equivale a $y = -\lambda$, luego $x = 1 - \lambda y = 1 + \lambda^2$. Así, también en este caso la solución es única. Sólo queda estudiar qué sucede si $\lambda^2 = 1$.

Si $\lambda = 1$ las dos ecuaciones del sistema original coinciden, así que las soluciones son todos los puntos de la recta $x + y = 1$. Lo mismo sucede si $\lambda = -1$; las soluciones son todos los puntos de la recta $x - y = 1$.

Por tanto, para cada valor de λ el sistema tiene alguna solución, y ésta es única salvo que $\lambda^2 = 1$, en cuyo caso las soluciones son los puntos de la recta $x + \lambda y = 1$. \square

Número 15. Resolver, empleando el método de Gauss-Jordan, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 3x + z = 3, \\ 5x - 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

Solución. El sistema equivale al que queda al restar a las filas segunda y tercera el resultado de multiplicar la primera por 3 y 5, respectivamente. Se obtiene así

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 3y - 2z = 0, \\ 3y - 2z = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

y sumando a la primera ecuación $\frac{1}{3}$ de la segunda el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}z = 1, \\ y - \frac{2}{3}z = 0, \end{cases}$$

y por tanto, el sistema, del que x e y son variables principales y z es variable secundaria, es compatible indeterminado. Podemos escribir todas sus soluciones como $z = 3t$, $y = 2t$, $x = 1 - t$ donde $t \in \mathbb{K}$. \square

Soluciones §2

Número 1. Se considera, para cada escalar $a \in \mathbb{K}$, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + az = 4, \\ 2x - y + 2z = 5, \\ -x + 3y - z = 0. \end{cases}$$

Discutirlo en función del parámetro a y resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución. Escribimos la matriz que resulta de añadir a la matriz de coeficientes la columna de términos independientes

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Restamos a la fila segunda el doble de la primera y sumamos la primera a la tercera para obtener

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & -3 & 2(1-a) & -3 \\ 0 & 4 & a-1 & 4 \end{array} \right).$$

Sumando ahora la tercera fila a la segunda obtenemos la matriz

$$M_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & 4 & a-1 & 4 \end{array} \right).$$

Restamos a la tercera fila cuatro veces la segunda y se obtiene

$$M_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 5(a-1) & 0 \end{array} \right).$$

En consecuencia, para $a \neq 1$ el sistema es compatible y determinado, mientras que para $a = 1$ el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ y = 1, \end{cases}$$

que es compatible indeterminado, y cuyas infinitas soluciones son $x = t$, $y = 1$, $z = 3 - t$, $t \in \mathbb{K}$. \square

Número 2. Estudiar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 6x_5 = b_1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = b_2, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 - 19x_5 = b_3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = b_4, \end{cases}$$

en los casos en que los términos independientes de dicho sistema de ecuaciones lineales son $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (-1, 4, -7, 0)$ y $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 2, 1, 1)$.

Solución. Escribimos la matriz que resulta de añadir a la matriz de coeficientes las dos columnas de términos independientes

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & 10 & -19 & -7 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Restamos a las filas segunda, tercera y cuarta la primera multiplicada por 2, 1 y 3, respectivamente, para obtener

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & 13 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 7 & -13 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 15 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

Sumando la segunda fila a la tercera resulta

$$M_3 = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & 13 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 15 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

La tercera fila de esta matriz muestra que el sistema es incompatible cuando los términos independientes son $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 2, 1, 1)$. En lo que sigue eliminamos la última columna, y también la fila tercera, que corresponde a la ecuación $0 = 0$ para el sistema cuando $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (-1, 4, -7, 0)$. Queda por tanto la matriz

$$M_4 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & 13 & 6 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 15 & 3 \end{array} \right).$$

Sumamos a la primera fila la mitad de la tercera, y a la segunda le restamos $\frac{3}{2}$ de la tercera, para obtener

$$M_5 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{19}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 15 & 3 \end{array} \right),$$

y ahora podemos multiplicar por 2 las filas primera y segunda, e intercambiar a continuación las filas segunda y tercera:

$$M_6 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & -19 & 3 \end{array} \right).$$

Intercambiamos ahora las columnas tercera y cuarta (luego x_3 y x_4 se intercambian también). De este modo resulta la matriz

$$M_7 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 15 & -19 & 3 \end{array} \right).$$

Sumamos a la segunda fila la tercera, y a la primera $\frac{1}{7}$ de la tercera:

$$M_8 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 2 & 0 & 8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 15 & -19 & 3 \end{array} \right),$$

y quitando denominadores en la primera fila llegamos a

$$M_9 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 15 & -19 & 3 \end{array} \right).$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones para los términos independientes $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (-1, 4, -7, 0)$, es equivalente a

$$\begin{cases} 7x_1 = 5 + 3x_3 - x_5, \\ x_2 = 3 - 4x_3 + 2x_5, \\ 7x_4 = 3 - 15x_3 + 19x_5, \end{cases}$$

luego en este caso el sistema es compatible indeterminado. \square

Número 3. Escribir todas las matrices escalonadas reducidas por filas de $\mathcal{M}_{n \times 3}(\mathbb{K})$ para $n \leq 4$.

Solución. Las de orden 1×3 son de uno de los cuatro tipos siguientes

$$(1, a, b), (0, 1, a), (0, 0, 1), (0, 0, 0), \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

Las de orden 2×3 se reparten en dos grupos: aquéllas que se obtienen a partir de las anteriores añadiendo la fila nula y aquéllas que no tienen ninguna fila nula. Las primeras no hace falta escribirlas, y las segundas son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

En total, encontramos siete tipos de matrices escalonadas reducidas de orden 2×3 .

Enumeremos ahora las matrices escalonadas reducidas de orden 3×3 . En una tal matriz las dos primeras filas deben constituir una matriz escalonada reducida de orden 2×3 , luego es de uno de los siete tipos encontrados antes. Así, en primer lugar obtenemos siete tipos de matrices escalonadas reducidas añadiendo una fila de ceros a esos tipos 2×3 . Por último, si la fila que añadimos no es de ceros, debe ser $(0, 0, 1)$, y la única matriz 3×3 escalonada reducida con esta última fila es la identidad. En total, ocho tipos de matrices escalonadas reducidas 3×3 .

En fin, una matriz escalonada reducida por filas de orden 3×4 tiene necesariamente la última fila nula, luego se obtiene de las de orden 3×3 añadiendo esa fila nula, lo que da otra vez 8 tipos posibles. \square

Número 4. Determinar para qué valores de los escalares a, b tiene solución el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + by + az = 1, \\ ax + by + z = a, \\ x + aby + z = b. \end{cases}$$

Resolver el sistema en los casos en que la solución sea única.

Solución. Estudiamos primero el caso $b = 0$, pues entonces la incógnita y no aparece en el sistema, que se convierte en

$$\begin{cases} x + az = 1, \\ ax + z = a, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación deducimos que $z = -x$. Sustituido en las dos primeras se lee

$$\begin{cases} (a-1)x = -1, \\ (a-1)x = a. \end{cases}$$

Por tanto el sistema es compatible indeterminado, si $a = -1$, e incompatible en caso contrario. Suponemos en lo que sigue que $b \neq 0$, y denotamos $t = by$, por lo que, intercambiando además las ecuaciones segunda y tercera, el sistema original se convierte en

$$\begin{cases} x + t + az = 1, \\ x + at + z = b, \\ ax + t + z = a. \end{cases}$$

La matriz ampliada de este sistema es

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & 1 & a \end{array} \right).$$

Restando a las filas segunda y tercera la primera y el producto de a por la primera, respectivamente, se obtiene

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & b-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{array} \right),$$

lo que nos lleva a tratar separadamente el caso $a = 1$, pues entonces el sistema es

$$\begin{cases} x + t + z = 1, \\ x + t + z = b, \\ x + t + z = 1, \end{cases}$$

que es compatible indeterminado si $b = 1$, e incompatible en otro caso. Así, en lo que sigue suponemos $b \neq 0$ y $a \neq 1$. Dividiendo las filas segunda y tercera de M_2 por $1-a$ y denotando $c = \frac{b-1}{1-a}$ se obtiene la matriz

$$M_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \end{array} \right).$$

Restamos la tercera fila a la primera, se la sumamos a la segunda, y cambiamos el orden de las filas segunda y tercera para obtener

$$M_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & c \end{array} \right), \text{ es decir, } (*) \left\{ \begin{array}{rcl} x & - & z = 1, \\ t & + & (1+a)z = 0, \\ & & (2+a)z = c. \end{array} \right.$$

Esto nos lleva a estudiar el caso $a + 2 = 0$, o sea, $a = -2$, para el que la tercera fila es $(0 \ 0 \ 0 \ c)$ por lo que el sistema es incompatible cuando $c \neq 0$, es decir, para $a = -2$ y $b \neq 1$ el sistema es incompatible.

Sin embargo, para $c = 0$ (es decir, $b = 1$ y $a = -2$), el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & - & z = 1, \\ t & - & z = 0, \end{array} \right. \text{ que es compatible indeterminado.}$$

Suponemos de ahora en adelante que $a \neq 1, -2$. Con eso, la tercera ecuación del sistema $(*)$ nos proporciona

$$z = \frac{c}{2+a} = \frac{b-1}{(1-a)(2+a)}.$$

Además, tenemos que

$$x = 1 + z = 1 + \frac{b-1}{(1-a)(2+a)} \quad \text{y} \quad t = -(1+a)z = \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(2+a)} \quad (\text{e } y = t/b),$$

luego ahora el sistema tiene una única solución, que es la que acabamos de calcular.

Resumiendo tenemos que:

$b = 0$	$a = -1$		Compatible indeterminado
	$a \neq -1$		Incompatible
$b \neq 0$	$a = 1$	$b = 1$	Compatible indeterminado
		$b \neq 1$	Incompatible
	$a \neq 1$	$a = -2$	$b = 1$ Compatible indeterminado
		$b \neq 1$	Incompatible
	$a \neq -2$		Compatible determinado

□

Número 5. ¿Qué deben cumplir los números reales a, b y c para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 2a^2 + \frac{1}{2}x^2, \\ x^2 + z^2 = 2b^2 + \frac{1}{2}y^2, \\ x^2 + y^2 = 2c^2 + \frac{1}{2}z^2, \end{cases}$$

tenga una solución en la que x, y y z sean números reales?

Solución. Denotamos $u = \frac{1}{2}x^2, v = \frac{1}{2}y^2$ y $w = \frac{1}{2}z^2$. De este modo el sistema se convierte en uno de ecuaciones lineales, que en forma matricial se escribe

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 \\ 2b^2 \\ 2c^2 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada del sistema. Escribimos a continuación varios pasos del proceso:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2a^2 \\ 2 & -1 & 2 & 2b^2 \\ 2 & 2 & -1 & 2c^2 \end{array} \right) & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2a^2 \\ 0 & 3 & 6 & 4a^2 + 2b^2 \\ 0 & 6 & 3 & 4a^2 + 2c^2 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}b^2 \\ 0 & 0 & -9 & -4a^2 - 4b^2 + 2c^2 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{4}{9}c^2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{9}b^2 + \frac{4}{9}c^2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}b^2 - \frac{2}{9}c^2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x^2 = 2u = \frac{4}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2), \\ y^2 = 2v = \frac{4}{9}(-b^2 + 2a^2 + 2c^2), \\ z^2 = 2w = \frac{4}{9}(-c^2 + 2a^2 + 2b^2). \end{cases}$$

Así, una condición necesaria y suficiente para que el sistema de partida admita alguna solución con x, y y z reales es que

$$2(b^2 + c^2) \geq a^2, \quad 2(a^2 + c^2) \geq b^2, \quad 2(a^2 + b^2) \geq c^2,$$

que, por ejemplo, satisfacen $a = b = c = 1$. □

Número 6. Calcular el rango de la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}.$$

Solución. Aquí sólo hay que observar que operamos con números complejos. Empezamos por restar de la segunda fila la primera multiplicada por $2 + i$, y de la tercera la primera multiplicada por $-1 + i$. Queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 0 & 2 - 2i & 4 - 4i & -2 - 2i \\ 0 & 2 + 2i & 4 + 4i & 2 - 2i \end{pmatrix}.$$

A continuación, dividimos la segunda fila por $2 - 2i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -i \\ 0 & 2 + 2i & 4 + 4i & 2 - 2i \end{pmatrix}.$$

En fin, restamos la segunda fila multiplicada $2 + 2i$ de la tercera:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya no hay que hacer más, pues aplicando dos veces I.2.11, p. 25, el rango de la matriz es 2. \square

Número 7. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que el rango de A es 3, que es también el rango de C . Comprobar también que C no es la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A . ¿Es esto inconsistente?

Solución. La matriz C es ya escalonada reducida, luego obtenemos inmediatamente su rango, que es 3. Por otra parte, hagamos operaciones elementales por filas para conseguir una matriz escalonada reducida equivalente por filas a A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto muestra que el rango de A es también 3. Que no hayamos obtenido C significa que, aún teniendo el mismo rango, A y C no son equivalentes por filas. Como comprobación adicional, constataremos que los sistemas homogéneos $Ax^t = 0$ y $Cx^t = 0$ no tienen las mismas soluciones: $x = (0, 0, 0, 1)$ no es solución del primero y sí lo es del segundo. No hay pues inconsistencia. \square

Número 8. Demostrar que si una matriz A de tamaño $m \times n$ tiene rango m , entonces cualquier submatriz con n columnas también tiene rango máximo.

Solución. Si el rango de A es el número de filas m , resulta que $m \leq n$, y todas las filas son independientes. Ahora bien, una submatriz de A con n columnas es simplemente una submatriz formada por ciertas filas de A : digamos que por $r \leq m \leq n$. Como todas las filas de A son independientes, esas r deben serlo también, y el rango de la submatriz es r , luego máximo. \square

Número 9. Comprobar para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

que el rango por columnas coincide con el rango por filas.

Solución. El rango por filas de A coincide con el de la matriz que resulta de restar a las filas segunda, tercera y cuarta el resultado de multiplicar la primera por 2, -1 y 3, respectivamente:

$$\text{rg}_f(A) = \text{rg}_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -13 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sumando a las filas tercera y cuarta 6 y -13 veces la segunda obtenemos una matriz cuyo rango por filas es el de A :

$$\text{rg}_f(A) = \text{rg}_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & -32 & 5 \\ 0 & 0 & -60 & 64 & -10 \end{pmatrix} = \text{rg}_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & -32 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde, en el último paso, hemos sumado a la cuarta fila el doble de la tercera. En esta última matriz podemos suprimir la última fila y después aplicar I.2.11, p. 25, dos veces, para concluir que $\text{rg}_f(A) = 3$.

En cuanto al rango por columnas, restando a cada una, excepto la primera, un múltiplo adecuado de ésta, y restando a continuación a las columnas tercera, cuarta y quinta ciertos múltiplos de la segunda se tiene

$$\text{rg}_c(A) = \text{rg}_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -5 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -13 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 30 & -32 & 5 \\ 3 & -13 & -60 & 64 & -10 \end{pmatrix}.$$

Por último, al sumar a la cuarta columna $\frac{16}{15}$ de la tercera y restar a la última columna la sexta parte de la tercera obtenemos

$$\text{rg}_c(A) = \text{rg}_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 30 & 0 & 0 \\ 3 & -13 & -60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí podemos prescindir de las dos columnas nulas, y de la versión para columnas de I.2.11, p. 25, resulta, como ya sabíamos, que $\text{rg}_c(A) = 3$. \square

Número 10. Una matriz B cuyas filas son todas no nulas se dice que es *escalonada* si el primer coeficiente no nulo de cada una de sus filas posterior a la primera está situado en una columna de índice estrictamente mayor que el índice de la columna que contiene al primer coeficiente no nulo de la fila anterior. En general una matriz A es escalonada si o bien es nula o bien admite una escritura del tipo

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que todas las filas de B son no nulas y B es escalonada.

(1) Decir cuáles de las siguientes matrices son escalonadas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Demostrar que el rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas. Esto nos proporciona un nuevo método para calcular el rango de una matriz A , pues basta con encontrar una matriz escalonada N equivalente por filas a A y contar el número de filas no nulas de N .

(3) Calcular por este procedimiento el rango de las matrices del apartado (1).

Solución. (1) Solamente A_1 es escalonada.

(2) Lo demostramos por inducción sobre el número de filas. Si sólo hay una fila, es evidente. Supongámoslo pues cierto para cualquier matriz A escalonada con n filas, y consideremos una matriz B escalonada con $n + 1$ filas. Si todas las filas de B son nulas, la cosa es trivial. Por tanto, supondremos

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

para cierta fila $a \neq 0$, y cierta matriz escalonada A . Por hipótesis de inducción, el rango de A es su número de filas no nulas, y observamos que tiene una menos que B .

Pero por I.2.11, p. 25, $\text{rg}(B) = 1 + \text{rg}(A)$, luego el rango de B coincide con su número de filas no nulas. Esto completa la inducción.

(3) Como A_1 es escalonada, por (2) su rango es 3, pues tiene tres filas no nulas.

En cuanto a A_2 , empezamos por restar a la tercera fila el doble de la segunda, de modo que la nueva tercera fila es nula, y la matriz equivalente obtenida es escalonada con dos filas no nulas, luego de rango 2 por (2). Así, el rango de A_2 es también 2.

Para A_3 procedemos de modo similar. Primero restamos a la segunda fila el triple de la primera, y a la tercera fila el doble de la primera, para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora restamos a la tercera fila el doble de la segunda, y queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta última matriz es escalonada, y por (2) tiene rango 3, luego 3 es el rango de A_3 . \square

Número 11. Hallar en función de los valores del escalar $a \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Restando a las filas primera y segunda la tercera se tiene

$$\text{rg}(A_a) = \text{rg} \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora distinguimos dos casos. Si $a = 2$ resulta

$$\text{rg}(A_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

pues la última matriz es escalonada y tiene, exactamente, dos filas no nulas. Por otro lado, si $a \neq 2$, se tiene, dividiendo la primera fila por $a-2$,

$$\text{rg}(A_a) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Intercambiando el orden de las filas segunda y tercera y restando después a la tercera $a - 1$ veces la segunda nos queda

$$\operatorname{rg}(A_a) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a & 1-2a \end{pmatrix} = 3,$$

porque bien $a^2 - a$, bien $1 - 2a$ es no nulo. \square

Número 12. Decir cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas hallando su forma escalonada reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución. La forma escalonada reducida por filas A_{red} de A se obtiene multiplicando por -1 su segunda fila, es decir,

$$A_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a B , multiplicamos por -1 la segunda fila, dividimos la tercera por 2 e intercambiamos las dos primeras filas, de modo que B es equivalente por filas a

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restando la primera fila a la tercera y dividiendo luego la tercera por -3 , y sumando la segunda a la primera obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

equivalente por filas a B . Por fin, sumando a la segunda fila el resultado de multiplicar la tercera por 4 y dividiendo la segunda fila resultante por 3 obtenemos la forma escalonada reducida por filas de B , que es

$$B_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, colocando la tercera fila de C en primer lugar y multiplicándola por -1 , intercambiando a continuación las filas restantes, y multiplicando por -1 la nueva

tercera fila se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

equivalente por filas a C . Restando a la segunda fila el doble de la primera y dividiendo el resultado por 3 se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y sumando y restando la segunda fila a la primera y a la tercera respectivamente, se concluye

$$C_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $A_{\text{red}} = C_{\text{red}} \neq B_{\text{red}}$, por lo que A y C son equivalentes por filas pero no lo son a B . \square

Número 13. Determinar según los valores de $a \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & a \end{pmatrix}.$$

Solución. Restamos a la segunda fila cuatro veces la primera, y a la tercera la suma de la primera y el doble de la segunda. Se obtiene así una matriz B_a cuyo rango es el de A_a :

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & -6 & a - 41 \end{pmatrix}.$$

Restamos a la segunda columna el producto de la primera por 4, a la tercera el producto de la primera por 9, y cambiamos el signo de los coeficientes de las dos últimas filas. Obtenemos así otra matriz C_a cuyo rango coincide con el de A_a , que es,

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 20 \\ 0 & 6 & 41 - a \end{pmatrix}.$$

Restamos a la tercera fila de C_a el producto por $\frac{6}{7}$ de su segunda fila. Obtenemos así la matriz D_a siguiente, cuyo rango es el de A_a .

$$D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{167}{7} - a \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es escalonada, así que su rango es 3, salvo si $\frac{167}{7} - a = 0$. Por tanto, $\text{rg}(A_a) = 3$, si $a \neq \frac{167}{7}$, y $\text{rg}(A_a) = 2$ si $a = \frac{167}{7}$. \square

Número 14. Sea n un entero positivo.

(1) Calcular el rango de la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

(2) Discutir el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + nx_2 + nx_3 + \cdots + nx_{n-1} = n, \\ nx_1 + 2x_2 + nx_3 + \cdots + nx_{n-1} = n, \\ nx_1 + nx_2 + 3x_3 + \cdots + nx_{n-1} = n, \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + nx_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = n, \\ nx_1 + nx_2 + nx_3 + \cdots + nx_{n-1} = n. \end{cases}$$

Solución. (1) Sean B_n la matriz que se obtiene a partir de A_n restando a cada una de sus $n-1$ primeras filas la última, y C_n la que resulta de multiplicar la última fila de B_n por $1/n$. Las matrices A_n y C_n tienen el mismo rango y

$$C_n = \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz D_n que se obtiene restando a cada una de las $n-1$ primeras columnas de C_n la última es escalonada (casi reducida) y equivalente a A_n , lo que nos permite calcular el rango de ésta:

$$\text{rg}(A_n) = \text{rg}(D_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = n.$$

(2) La matriz ampliada del sistema lineal del enunciado es A_n , y acabamos de probar que su rango es n . Sin embargo, el rango de la matriz de coeficientes es, a lo sumo, $n - 1$, pues sólo tiene $n - 1$ columnas. Por tanto el sistema es incompatible. \square

Número 15. Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distintos, con $n \geq 2$. Calcular el rango de la matriz

$$A(a_1, \dots, a_n) = A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Solución. Estudiamos primero el caso más sencillo, esto es, $n = 2$. Efectuando operaciones elementales se tiene

$$\text{rg}(A(a_1, a_2)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

donde en la primera igualdad hemos restado a la segunda fila el producto de la primera por a_1 , en la segunda hemos restado la primera columna a la segunda y en la tercera hemos multiplicado la segunda fila por el inverso de $(a_2 - a_1)$.

En el caso general repetimos el primero de los pasos anteriores, esto es, el rango de A_n coincide con el de la matriz B_n que se obtiene restando a cada fila, a partir de la segunda, el producto de la anterior por a_1 . Esta nueva matriz es

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Sacando factor común en cada coeficiente

$$a_i^k - a_1 a_i^{k-1} = a_i^{k-1} (a_i - a_1),$$

donde $2 \leq i \leq n$ y $2 \leq k \leq n - 1$, y restando la primera columna de B_n a las demás obtenemos una matriz C_n cuyo rango es el de B_n :

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{pmatrix}.$$

Multiplicando cada columna j -ésima de C_n por el inverso de $(a_j - a_1)$ para $j > 1$, obtenemos la matriz D_n siguiente, que es equivalente a C_n ,

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{rg}(A(a_1, \dots, a_n)) = \operatorname{rg}(D_n) = 1 + \operatorname{rg}(A(a_2, \dots, a_n)).$$

Empleando esta igualdad se comprueba inmediatamente, por ejemplo por inducción, que

$$\operatorname{rg}(A(a_1, \dots, a_n)) = n - 2 + \operatorname{rg}(A(a_1, a_2)) = n,$$

pues ya vimos que el rango de la matriz $A(a_1, a_2)$ es 2. \square

Soluciones §3

Número 1. (1) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden n que conmutan con todas las matrices diagonales de orden n .

Solución. (1) Para cada matriz $X = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ se tiene

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{21} & x_{22} \\ 0 & x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \text{ y } AX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego ambos productos coinciden si y sólo si

$$\begin{cases} x_{11} = x_{22} = x_{33}, \\ x_{12} = x_{23}, \\ x_{21} = x_{31} = x_{32} = 0. \end{cases}$$

Denotando $u = x_{11} = x_{22} = x_{33}$, $v = x_{12} = x_{23}$ y $w = x_{13}$, las matrices buscadas son las de la forma

$$X = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad u, v, w \in \mathbb{K}.$$

(2) Sea $X = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz que conmuta con todas las matrices diagonales. En particular $XD_0 = D_0X$ donde

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Fijados dos índices i, j el coeficiente b_{ij} del producto $B = XD_0$ es $b_{ij} = jx_{ij}$, mientras que el coeficiente c_{ij} del producto $C = D_0X$ es $c_{ij} = ix_{ij}$. Entonces,

$$(i - j)x_{ij} = c_{ij} - b_{ij} = 0, \text{ luego } x_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j,$$

esto es, X es una matriz diagonal. Recíprocamente, dadas matrices diagonales X, D los productos XD y DX coinciden:

$$XD = \begin{pmatrix} x_{11}d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{nn}d_{nn} \end{pmatrix} = DX.$$

En conclusión, una matriz cuadrada X conmuta con todas las matrices diagonales de su mismo orden si y sólo si X es diagonal. \square

Número 2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Existe alguna matriz no nula X que cumpla $XA = BX^t$?

Solución. Si la matriz $X \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ cumple el enunciado existe el producto XA , luego $n = 2$ y $XA \in \mathcal{M}_{m \times 3}(\mathbb{K})$, mientras que por existir BX^t la traspuesta X^t debe tener 2 filas, así que X tiene 2 columnas, como ya sabíamos, y $BX^t \in \mathcal{M}_{3 \times m}(\mathbb{K})$. Por ser $XA = BX^t$ necesariamente $m = 3$, luego

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{12} & x_{12} - x_{11} & 2x_{11} + 3x_{12} \\ x_{21} + 2x_{22} & x_{22} - x_{21} & 2x_{21} + 3x_{22} \\ x_{31} + 2x_{32} & x_{32} - x_{31} & 2x_{31} + 3x_{32} \end{pmatrix},$$

$$BX^t = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ -x_{12} & -x_{22} & -x_{32} \\ 2x_{11} + x_{12} & 2x_{21} + x_{22} & 2x_{31} + x_{32} \end{pmatrix}.$$

Al igualar los elementos de la diagonal de ambas matrices se deduce $x_{12} = 0$, $2x_{22} - x_{21} = 0$ y $x_{32} = 0$, y al igualar los primeros coeficientes de la segunda fila, sale que $2x_{22} + x_{21} = -x_{12}$. Estas ecuaciones dan $x_{12} = x_{21} = x_{22} = x_{32} = 0$. Igualando los restantes coeficientes de la primera fila se tiene

$$\begin{cases} x_{12} - x_{11} = x_{21}, \\ 2x_{11} + 3x_{12} = x_{31}, \end{cases}$$

y puesto que $x_{12} = x_{21} = 0$ la primera ecuación nos dice que $x_{11} = 0$. Finalmente, $x_{31} = 2x_{11} + 3x_{12} = 0$, luego sólo la matriz nula cumple $XA = BX^t$. \square

Número 3. Sean m, n y p enteros positivos y consideremos dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que exista una matriz $X \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $B = XA$. Estudiar si existe tal matriz X cuando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Busquemos la condición pedida en general. Si existe tal matriz X , también se cumple $B^t = A^t X^t$, es decir, tienen solución todos los sistemas de ecuaciones $A^t x^t = b_i^t$, donde $b_i \in \mathcal{M}_{1 \times p}(\mathbb{K})$ es la i -ésima fila de B (o lo que es lo mismo, b_i^t es la i -ésima columna de B^t). Por tanto,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t) = \text{rg}(A^t | b_i^t),$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Dicho de otro modo, se cumple la igualdad

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{rg}(A).$$

Hemos probado que ésta es una condición necesaria para la existencia de X y desandando el camino andado, se observa que esta condición es también suficiente.

En el caso de las matrices particulares propuestas, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 3$, luego no existe ninguna matriz $X \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{K})$ tal que $B = XA$. \square

Número 4. Recordamos que las operaciones elementales por filas que podemos aplicar a una matriz A son:

- (i) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.

- (ii) Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar no nulo.
- (iii) Intercambiar dos filas.

Comprobar que el resultado de aplicar cualquiera de estas operaciones elementales a la matriz A es el mismo que el de multiplicar la matriz A por la izquierda por la matriz I' que se obtiene al aplicar a la matriz identidad I dicha operación elemental. Una tal matriz I' se denomina *matriz elemental*.

Demostrar que cada matriz elemental es invertible y que su inversa es de nuevo una matriz elemental, y que una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.

Solución. Veamos qué matrices I' podemos obtener aplicando operaciones elementales a la matriz identidad:

- (i) Multiplicando la fila i -ésima de la matriz identidad I por $\lambda \neq 0$:

$$I'_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Sumando a la fila i -ésima de la matriz identidad I la j -ésima multiplicada por λ para cierto $j \neq i$:

$$I'_{ij}(\lambda) \underset{i < j}{=} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ o } I'_{ij}(\lambda) \underset{i > j}{=} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & \lambda & & 1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Intercambiando las filas i -ésima y j -ésima de la matriz identidad I :

$$I'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \text{ (i)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \text{ (j)} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Una vez detallados los posibles tipos de matrices I' , la comprobación de que $I'A$ se obtiene aplicando la correspondiente operación elemental a A es un cálculo sencillo. Por otra parte, esa comprobación no hace sino confirmar el ya conocido (I.3.7, p. 36) buen comportamiento del producto de matrices respecto de las operaciones con filas.

Por otra parte, para ver que las matrices elementales son invertibles, y sus inversas son matrices elementales, basta comprobar que:

$$I'_{ij}(\lambda)I'_{ij}(-\lambda) = I, \quad I'_i(\lambda)I'_i(1/\lambda) = I, \quad I'_{ij}I'_{ij} = I.$$

Finalmente, una matriz invertible A se convierte en una matriz escalonada reducida por filas N mediante operaciones elementales. Si las matrices correspondientes a esas operaciones son I'_1, \dots, I'_q , entonces podemos escribir:

$$N = I'_1 \cdots I'_q A.$$

Como A es invertible y las I'_k también, la matriz escalonada reducida N debe ser invertible a su vez, luego debe ser la identidad, y por tanto

$$A = I_q'^{-1} \cdots I_1'^{-1}.$$

Pero sabemos también que cada inversa $I_k'^{-1}$ es una matriz elemental, lo que prueba que efectivamente A es producto de matrices elementales.

Recíprocamente, si A es producto de matrices elementales, es producto de matrices invertibles, y por tanto es invertible. \square

Número 5. Demostrar que si todas las filas de una matriz A suman α y todas las filas de una matriz B suman β , entonces todas las filas de su producto suman $\alpha\beta$.

Solución. Sean $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$ tales que

$$\sum_k a_{ik} = \alpha, \quad \sum_j b_{kj} = \beta.$$

Denotamos $C = AB = (c_{ij})$, y tenemos

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

de manera que la suma de los coeficientes de una fila de C es:

$$\sum_j c_{ij} = \sum_j \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_j b_{kj} \right) = \sum_k a_{ik} \beta = \left(\sum_k a_{ik} \right) \beta = \alpha \beta. \quad \square$$

Número 6. Demostrar que la siguiente matriz A es invertible y calcular su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Denotamos por I la matriz identidad de orden 3 y empleamos el método de las operaciones elementales para demostrar que A es invertible y calcular la inversa A^{-1} de A . En primer lugar, restamos a las filas segunda y tercera el doble y el triple de la primera, respectivamente:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora, dividiendo la segunda fila por -2 y restando a la tercera fila el doble de la segunda se obtiene

$$(A|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Por último, restando a las filas primera y segunda $\frac{2}{3}$ de la tercera, y multiplicando esta última por $-\frac{1}{3}$ llegamos a

$$(A|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) = (I|A^{-1}),$$

donde el último paso ha consistido en restar a la primera fila el triple de la segunda. Por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) = \frac{1}{6} \left(\begin{array}{ccc} -4 & -7 & 8 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \end{array} \right). \quad \square$$

Número 7. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular, por el método de Gauss, el rango de A , la matriz inversa de B , y el rango de AB^{-1} .

Solución. Intercambiando las filas primera y segunda y sumando la segunda fila a la cuarta se tiene

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde, para la última igualdad hemos sumado la cuarta fila a la segunda y hemos restado a la tercera fila el cuádruplo de la cuarta. A continuación intercambiamos las filas segunda y cuarta y, puesto que dos filas coinciden, resulta

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Denotamos por I la matriz identidad de orden 4 y empleamos el método de las operaciones elementales para demostrar que B es invertible y a la vez calcular la inversa B^{-1} de B . Intercambiando las filas primera y cuarta se tiene

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Sumando la primera fila a la segunda y restando a la cuarta el doble de la primera resulta

$$(B|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Ahora restamos la fila segunda a las dos últimas y tras ello cambiamos la última de signo, con lo que

$$(B|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

A continuación restamos la cuarta fila a las filas primera y tercera, y se la sumamos a la segunda, de modo que

$$(B|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Por último, restando la tercera fila a las dos primeras obtenemos B^{-1} :

$$(B|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En cuanto al rango de AB^{-1} , es 3 como el de A , puesto que B^{-1} es regular. \square

Número 8. Sea A una matriz cuadrada. Demostrar que si el sistema homogéneo $Ax^t = 0$ tiene alguna solución no trivial, entonces existe algún sistema no homogéneo $Ax^t = b^t$ que es incompatible.

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo, que todos esos sistemas no homogéneos tienen solución. Aplicando esto sucesivamente para los términos independientes $b = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ encontramos una matriz cuadrada C tal que $AC = I$, y por tanto, A es invertible, tiene rango máximo, y el sistema homogéneo $Ax^t = 0$ tiene solución única, que necesariamente es la trivial. \square

Número 9. Dadas dos matrices, $K \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $L \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuyo producto $KL = I_n$ es la matriz identidad, decimos que K (resp. L) tiene inversa por la derecha (resp. por la izquierda). Esto generaliza la noción de matriz invertible. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) K tiene inversa por la derecha.
- (ii) $\text{rg}(AK) = \text{rg}(A)$ para cualquier matriz A con n columnas.
- (iii) $\text{rg}(K) = n$.

¿Qué se puede decir de la unicidad de la inversa de K por la derecha si admite alguna?

Formular y probar la caracterización análoga para la inversa por la izquierda.

Solución. (i) *implica* (ii): Por la hipótesis, existe una matriz $L \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $KL = I_n$. Sea ahora A cualquier matriz con n columnas. La desigualdad $\text{rg}(AK) \leq \text{rg}(A)$ se da siempre por el comportamiento del rango respecto del producto, pero por ese mismo comportamiento, tenemos

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(AI_n) = \text{rg}(A(KL)) = \text{rg}((AK)L) \leq \text{rg}(AK).$$

(ii) *implica* (iii): Aplicando la hipótesis para $A = I_n$ resulta que $n = \text{rg}(I_n) = \text{rg}(I_n K) = \text{rg}(K)$.

(iii) *implica* (i): Supongamos que $\text{rg}(K) = n$. Entonces, todo sistema $Kx^t = b^t$ es compatible, pues el rango de su matriz es igual a su número de ecuaciones. Resolviendo

estos sistemas para los términos independientes $b = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, donde el 1 va cambiando de posición, obtenemos las columnas de una matriz L tal que $KL = I_n$.

En cuanto a la unicidad, para $m = n$ es conocida ya, pues en ese caso K y L son cuadradas, y cada una es la inversa de la otra. Pero si $m > n$ no hay tal unicidad. De hecho, retomando el final del argumento anterior, dada K , al buscar una cualquiera de las columnas de L , resolvemos un sistema $Kx^t = b^t$ compatible *indeterminado*, pues tiene más incógnitas que ecuaciones. Por tanto, tiene más de una solución, y encontramos así distintas matrices L tales que $KL = I_n$.

Consideremos ahora la inversa por la izquierda. Como las igualdades $KL = I_n$ y $L^t K^t = I_n$ son equivalentes, L tiene inversa por la izquierda si y sólo si su matriz traspuesta L^t la tiene por la derecha. Además $\text{rg}(L) = \text{rg}(L^t)$, y por último, una matriz B tiene n filas si y sólo si B^t tiene n columnas. Por tanto basta aplicar lo anterior a L^t . Por supuesto esto también hace referencia al comentario acerca de la unicidad. \square

Número 10. Probar que si dos matrices $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ cumplen $AB = 0$, entonces

$$\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n.$$

Solución. Sea N la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A . La condición $AB = 0$ dice que las columnas de B son soluciones del sistema $Ax^t = 0$, luego del sistema equivalente $Nx^t = 0$, de modo que $NB = 0$. Ahora reordenamos las columnas de N para que

$$N = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reordenando del modo correspondiente las filas de B , se sigue cumpliendo la igualdad $NB = 0$ (pues la reordenación de columnas de N es una reordenación de las incógnitas del sistema $Nx^t = 0$). Como una reordenación no cambia el rango de B podemos suponer que en efecto N tiene la forma anterior. Ahora consideramos las matrices

$$P = \begin{pmatrix} I_r & -M \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Un cálculo inmediato muestra que son inversas una de la otra, y por tanto

$$0 = NB = (NP)(QB), \quad \text{rg}(QB) = \text{rg}(B).$$

Hemos elegido esta P porque

$$NP = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -M \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & -I_r M + M I_{n-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora escribimos QB por cajas separando las r primeras filas de las $n - r$ siguientes y tenemos:

$$0 = (NP)(QB) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (QB)_r \\ (QB)_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (QB)_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que $(QB)_r = 0$, y ya podemos concluir

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(QB) \leq n - r = n - \text{rg}(A),$$

que es la desigualdad buscada. \square

Número 11. Dadas tres matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que existan matrices $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que satisfagan las condiciones

$$\begin{cases} X + Y^t A = B, \\ Y - AX^t = C. \end{cases}$$

Calcular la solución de este sistema cuando sea única.

Solución. Al despejar $Y = AX^t + C$ en la segunda ecuación, y trasponer, se obtiene $Y^t = XA^t + C^t$. Sustituimos este valor en la primera ecuación, y resulta

$$B = X + Y^t A = X + (XA^t + C^t)A = X(I_n + A^t A) + C^t A,$$

o lo que es igual, $X(I_n + A^t A) = B - C^t A$. Para cada solución de esta ecuación, digamos X_0 , necesariamente $Y = Y_0 = AX_0^t + C$, luego el sistema original tiene solución si y sólo si la tiene la ecuación

$$X(I_n + A^t A) = B - C^t A,$$

en la incógnita X . Más aún, el sistema tiene solución única si y sólo si es también única la solución de esta última.

Se deduce ahora de la solución del ejercicio 3 de esta lección I.3, p. 101, que una condición necesaria y suficiente para que el sistema inicial tenga solución es que las matrices $I_n + A^t A$ y

$$\begin{pmatrix} I_n + A^t A \\ B - C^t A \end{pmatrix}$$

tengan igual rango. Además la solución es única si y sólo si $I_n + A^t A$ es invertible. En tal caso,

$$X = (B - C^t A)(I_n + A^t A)^{-1}.$$

Como sabemos que $Y = AX^t + C$, hemos terminado. \square

Número 12. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que para cada entero $k \geq 1$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}.$$

Solución. Denotamos $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ y razonaremos por inducción sobre k . Para $k = 1$ es trivialmente cierto, y demostramos que lo es para $k + 1$ suponiendo que para k lo es. Al multiplicar A por A^k obtenemos

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos(k\alpha) - \sin \alpha \sin(k\alpha) & -\cos \alpha \sin(k\alpha) - \sin \alpha \cos(k\alpha) \\ \cos \alpha \sin(k\alpha) + \sin \alpha \cos(k\alpha) & \cos \alpha \cos(k\alpha) - \sin \alpha \sin(k\alpha) \end{pmatrix},$$

y aplicando las identidades trigonométricas clásicas deducimos que:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k+1)\alpha) & -\sin((k+1)\alpha) \\ \sin((k+1)\alpha) & \cos((k+1)\alpha) \end{pmatrix},$$

que es la identidad buscada. \square

Número 13. Desde el punto de vista computacional las multiplicaciones son mucho más costosas que las sumas. Por eso, un objetivo recurrente consiste en sustituir procesos algorítmicos que involucran muchas multiplicaciones por otros que requieran menos, aún a costa de aumentar el número de sumas. Esto dicho, proponemos en este ejercicio multiplicar dos matrices cuadradas de orden 2 efectuando sólo 7 multiplicaciones, en lugar de las 8 que exige el algoritmo clásico.

Solución. No trataremos de explicar cómo se obtiene la solución. Sólo instamos al lector a que efectúe las operaciones que le sugerimos.

Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

efectuamos en primer lugar 7 multiplicaciones

$$\begin{aligned} u_1 &= a\alpha, & u_2 &= b\gamma, & u_3 &= (a - c - d)(\alpha - \beta + \delta), & u_4 &= (c + d)(\beta - \alpha), \\ u_5 &= (a + b - c - d)\delta, & u_6 &= (a - c)(\delta - \beta), & u_7 &= d(\alpha - \beta - \gamma + \delta), \end{aligned}$$

y operando se comprueba que

$$XY = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 & u_1 - u_3 + u_4 + u_5 \\ u_1 - u_3 + u_6 - u_7 & u_1 - u_3 + u_4 + u_6 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Número 14. Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz *nilpotente*, es decir, existe un entero positivo n tal que A^n es la matriz nula. Para cada $t \in \mathbb{R}$ se define la matriz

$$M_t = I_m + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t^i}{i!} A^i \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m . Estudiar si el conjunto $G = \{M_t : t \in \mathbb{R}\}$, con la operación producto de matrices, es un grupo. ¿Es conmutativo el producto de matrices de G ?

Solución. El elemento neutro en G es $I_m = M_0$. Además se cumple la propiedad asociativa, pues la tiene el producto de matrices.

Comprobemos que el producto es una operación interna en G , es decir, que el producto de dos matrices $M_t, M_s \in G$ es otra matriz de G . Como las potencias A^k de A son nulas si $k \geq n$, se tiene

$$M_t \cdot M_s = I_m + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k$$

para ciertos escalares $a_k \in \mathbb{R}$ que calculamos a continuación. De hecho,

$$a_k = \frac{s^k}{k!} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t^i}{i!} \cdot \frac{s^{k-i}}{(k-i)!} + \frac{t^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i s^{k-i} = \frac{1}{k!} (t+s)^k,$$

es decir, $M_t \cdot M_s = I_m + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (t+s)^k A^k = M_{t+s}$.

Esta fórmula prueba además que cada $M_t \in G$ tiene inverso en G , que es M_{-t} , ya que $M_t \cdot M_{-t} = M_0 = I_m$. Por tanto G es un grupo. Como además se cumple que

$$M_t \cdot M_s = M_{t+s} = M_{s+t} = M_s \cdot M_t,$$

las matrices de G conmutan. □

Número 15. Sean a y b dos números reales e I_n la matriz identidad de orden n . Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que satisfacen la igualdad $A = 2aI_n + bA^t$.

Solución. Sea A una matriz que cumple $A = 2aI_n + bA^t$. Al trasponer ambos miembros se tiene

$$A^t = (2aI_n + bA^t)^t = (2aI_n)^t + (bA^t)^t = 2aI_n + bA.$$

Al sustituir este valor de A^t en la ecuación inicial, tenemos que:

$$A = 2aI_n + bA^t = 2aI_n + b(2aI_n + bA) = 2a(1+b)I_n + b^2A.$$

Por tanto, deducimos que

$$2a(1+b)I_n = (1-b^2)A = (1+b)(1-b)A.$$

Esto nos lleva a distinguir varios casos:

Caso 1: $b = -1$. Entonces no se puede simplificar el factor $1+b$ en la última ecuación, pero la de partida se lee $A + A^t = 2aI_n$. Si denotamos $A = (a_{ij})$ se tiene $2a_{ii} = 2a$ y $a_{ij} + a_{ji} = 0$ si $i \neq j$. Por tanto, la matriz $M = (m_{ij})$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

es *antisimétrica* (es decir, $m_{ij} + m_{ji} = 0$ para cada i, j) y $A = M + aI_n$.

Hemos probado que si $b = -1$, la matriz A es el resultado de sumar aI_n con una matriz antisimétrica. Recíprocamente, si M es antisimétrica la suma $A = aI_n + M$ satisface la igualdad inicial, ya que

$$2aI_n - A^t = 2aI_n - (aI_n + M)^t = aI_n - M^t = aI_n + M = A.$$

Caso 2: $b \neq -1$. Ahora simplificamos el factor $1+b$ para obtener $2aI_n = (1-b)A$, lo que de nuevo nos lleva a distinguir dos subcasos:

Subcaso 2.1: $b = 1$. Ahora la ecuación inicial es $A = 2aI_n + A^t$, luego $a_{ii} = 2a + a_{ii}$ para cada índice i , así que si $a \neq 0$ no hay solución, mientras que para $a = 0$ la ecuación se lee $A = A^t$, esto es, A es simétrica.

Subcaso 2.2: $b \neq 1$. En este caso, sin más que despejar, obtenemos que $A = \frac{2a}{1-b}I_n$.

En resumen:

$$A = \begin{cases} aI_n + \text{matriz antisimétrica} & \text{si } b = -1, \\ \text{matriz simétrica} & \text{si } b = 1, a = 0, \\ \text{no existe} & \text{si } b = 1, a \neq 0, \\ \frac{2a}{1-b}I_n & \text{si } b \neq \pm 1. \end{cases} \quad \square$$

Soluciones §4

Número 1. Hallar los determinantes de las matrices siguientes:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Sumando a la cuarta columna de A las tres primeras se tiene

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 0 \\ -4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

porque una de las columnas es nula. En cuanto a la matriz B , sumamos a la primera columna las otras tres, y resulta

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora restamos la última fila a las restantes, para obtener

$$\det(B) = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este determinante se calcula aplicando la regla de Laplace por filas, empezando por la primera, luego la segunda, y la tercera, teniendo cuidado al arrastrar los signos de los adjuntos: $\det(B) = 2(-1)(-2)(+1)(-2)(-1)(-2) = -16$. \square

Número 2. Probar que para todo número real x se tiene

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{pmatrix} = 0.$$

Solución. Llamemos A a la matriz del enunciado. Restando a la segunda columna el resultado de multiplicar la primera por $\cos x$ y a la tercera columna el de multiplicarla por $\cos 2x$ obtenemos

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos x & \cos 2x - \cos^2 x & \cos 3x - \cos x \cos 2x \\ \cos 2x & \cos 3x - \cos x \cos 2x & \cos 4x - \cos^2 2x \end{pmatrix},$$

y desarrollando el determinante por la primera fila,

$$\det(A) = (\cos 2x - \cos^2 x)(\cos 4x - \cos^2 2x) - (\cos 3x - \cos x \cos 2x)^2.$$

Ahora bien, por la fórmula del coseno de una suma se tiene

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos^2 x &= -\sin^2 x, \\ \cos 4x - \cos^2 2x &= -\sin^2 2x, \\ \cos 3x &= \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x, \end{aligned}$$

y sustituyendo estos valores en la expresión anterior resulta

$$\det(A) = \sin^2 x \sin^2 2x - (\sin x \sin 2x)^2 = 0. \quad \square$$

Número 3. Hallar los determinantes de las matrices siguientes:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}, \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{pmatrix}.$$

Solución. (1) Restando la primera fila a todas las demás queda

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

de manera que aplicando la regla de Laplace por columnas obtenemos $\det(A) = abc$.

(2) Para empezar restamos la primera fila de las otras dos:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} x+a & b & c \\ -x & x & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\det(B) = x^2 \det \begin{pmatrix} x+a & b & c \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora sumamos las columnas segunda y tercera a la primera:

$$\det(B) = x^2 \det \begin{pmatrix} x+a+b+c & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y la regla de Laplace por columnas nos dice que $\det(B) = x^2(x+a+b+c)$. \square

Número 4. Resolver la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x \end{pmatrix} = 0.$$

Solución. Calculamos el determinante como sigue. Sumamos las columnas segunda, tercera, cuarta y quinta a la primera para obtener

$$\det \begin{pmatrix} 10+x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10+x & x & 2 & 3 & 4 \\ 10+x & 2 & x & 3 & 4 \\ 10+x & 2 & 3 & x & 4 \\ 10+x & 2 & 3 & 4 & x \end{pmatrix} = (10+x) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x \end{pmatrix}.$$

Ahora restamos a cada fila la anterior, y queda

$$(10+x) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x & x-4 \end{pmatrix} = (10+x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Por tanto las soluciones de la ecuación $\det(\cdots) = 0$ son $x = -10, 1, 2, 3, 4$. \square

Número 5. Sea \mathcal{M} el conjunto de las matrices de orden 3 cuyos coeficientes valen 1 o -1 .

(1) Calcular cuántos elementos tiene \mathcal{M} y demostrar que el determinante de cualquier matriz de \mathcal{M} es un entero múltiplo de 4.

(2) Describir explícitamente el conjunto $\mathcal{D} = \{\det(A) : A \in \mathcal{M}\}$. ¿Cuántos elementos tiene?

Solución. (1) Cada matriz de \mathcal{M} tiene 9 coeficientes, y cada uno de ellos puede tomar dos valores. Por tanto \mathcal{M} tiene $2^9 = 512$ elementos.

Fijamos una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$ y denotamos por $\xi_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ la i -ésima fila de A . Al sumar la primera de ellas a las dos restantes resultan las filas

$$\xi_1 + \xi_2 = (a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22}, a_{13} + a_{23}) \quad \text{y} \quad \xi_1 + \xi_3 = (a_{11} + a_{31}, a_{12} + a_{32}, a_{13} + a_{33})$$

Cada $a_{1j} + a_{2j}$ y cada $a_{1j} + a_{3j}$ valen 0, 2 o -2 . En particular son pares, luego se escriben $a_{1j} + a_{2j} = 2b_j$, $a_{1j} + a_{3j} = 2d_j$ con $b_j, d_j \in \mathbb{Z}$. Resulta entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{11} + a_{31} & a_{12} + a_{32} & a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2d_1 & 2d_2 & 2d_3 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \in 4\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(2) Por la regla de Sarrus, $\det(A)$ es la suma de seis productos de coeficientes de A . Cada uno de esos seis sumandos es ± 1 , luego $-6 \leq \det(A) \leq 6$, y $\det(A) \in \{-4, 0, 4\}$.

Recíprocamente, existen matrices en \mathcal{M} cuyos determinantes valen 0, 4 y -4 . Por ejemplo, las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

pertenecen a \mathcal{M} y sus determinantes valen 0, 4 y -4 , respectivamente. En conclusión,

$$\mathcal{D} = \{\det(A) : A \in \mathcal{M}\} = \{-4, 0, 4\}. \quad \square$$

Número 6. Calcular el determinante de la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

Solución. Restamos a cada una de las $n-1$ primeras filas la última, y así obtenemos una matriz cuyo determinante se calcula desarrollando por filas. Resulta el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix} \\ &= (1-n)(2-n)\cdots(-1)n = (-1)^{n-1}n! \end{aligned} \quad \square$$

Número 7. (1) Dados escalares $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, calcular el determinante

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

(2) Suponemos $n = 6, a_1 = \cdots = a_6 = 1$ y cada $b_k = x^k$. Calcular el valor del entero x sabiendo que $D_6 = 1093$.

Solución. (1) Expresamos la última fila de la matriz D_n como suma de las matrices fila (b_n, \dots, b_n) y $(0, \dots, 0, a_n)$ y así D_n es suma de dos determinantes:

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & b_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Para calcular el primero de estos determinantes restamos la última columna a cada una de las anteriores, mientras que para calcular el segundo lo desarrollamos por su última fila. Queda entonces

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} + a_n \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & a_{n-1} + b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

El primer determinante es el de una matriz triangular, luego vale el producto de los elementos de la diagonal principal, esto es, $a_1 \cdots a_{n-1} b_n$, mientras que el segundo es $a_n D_{n-1}$, donde el significado de D_{n-1} es el obvio. Esto nos proporciona una ley de recurrencia para los D_n , y conocemos

$$D_2 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - b_1 b_2 = a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 a_2.$$

Por tanto, la sucesión de determinantes $\{D_n : n \geq 2\}$ cumple

$$D_n = a_1 \cdots a_{n-1} b_n + a_n D_{n-1} \quad \text{y} \quad D_2 = a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 a_2.$$

Para encontrar la fórmula general, que probaremos por inducción sobre n , calculamos

$$D_3 = a_1 a_2 b_3 + a_3 D_2 = a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3.$$

A partir de estos valores para D_2 y D_3 no es descabellado intentar probar que

$$D_n = a_1 \cdots a_{n-1} b_n + a_1 \cdots a_{n-2} b_{n-1} a_n + \cdots + b_1 a_2 \cdots a_n + a_1 \cdots a_n.$$

Desde luego es cierto para $n = 2$, y si asumimos la igualdad para n , veamos que es también cierta para $n + 1$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= a_1 \cdots a_n b_{n+1} + a_{n+1} D_n \\ &= a_1 \cdots a_n b_{n+1} \\ &\quad + a_{n+1} (a_1 \cdots a_{n-1} b_n + a_1 \cdots a_{n-2} b_{n-1} a_n + \cdots + b_1 a_2 \cdots a_n + a_1 \cdots a_n) \\ &= a_1 \cdots a_n b_{n+1} \\ &\quad + a_1 \cdots a_{n-1} b_n a_{n+1} + a_1 \cdots a_{n-2} b_{n-1} a_n a_{n+1} + \cdots + a_1 \cdots a_n a_{n+1}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

(2) En este caso,

$$1093 = D_6 = x^6 + x^5 + \cdots + x + 1 = \frac{x^7 - 1}{x - 1}.$$

El miembro de la derecha es una función creciente que vale 127 para $x = 2$. En el siguiente ensayo, esto es, para $x = 3$ resulta $\frac{3^7 - 1}{2} = 1093$, luego $x = 3$. \square

Número 8. Calcular, para cada entero $n \geq 2$, el valor del determinante

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para $n = 2$ y $n = 3$ se tiene

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 \end{pmatrix} = -7, \text{ mientras que } \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{pmatrix} = -8.$$

Para $n \geq 4$, la diferencia $g_n = f_n - f_{n-1}$ entre las filas n -ésima y $(n-1)$ -ésima es

$$g_n = (2n-1, 2n+1, \dots, 4n-3),$$

y análogamente,

$$g_{n-1} = (2n-3, 2n-1, \dots, 4n-5) \quad \text{y} \quad g_{n-2} = (2n-5, 2n-3, \dots, 4n-7).$$

Los coeficientes de las columnas j -ésimas de g_n , g_{n-1} y g_{n-2} son respectivamente,

$$u_j = (2n-1) + 2(j-1), \quad v_j = (2n-3) + 2(j-1) \quad \text{y} \quad w_j = (2n-5) + 2(j-1).$$

En consecuencia,

$$u_j + w_j = 4n - 6 + 4(j - 1) = 2((2n - 3) + 2(j - 1)) = 2v_j,$$

o lo que es igual, $g_n + g_{n-2} = 2g_{n-1}$, es decir, $f_n = 3f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}$, y por tanto $\Delta_n = 0$ para cada $n \geq 4$. \square

Número 9. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ una matriz *mágica* de orden 3, esto es, sus coeficientes son números enteros y la suma de los elementos de cada fila coincide con la suma de los elementos de cada columna y coincide también con lo que suma cada una de las diagonales. Demostrar que el determinante de A es múltiplo entero de la suma de los coeficientes de A .

Solución. Escribimos

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

y se trata de probar que $\Delta = \det(A)$ es múltiplo de la suma $\sigma = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij}$ de los coeficientes de A . Denotamos por $n = \frac{\sigma}{3}$ al valor común de la suma de coeficientes de cada fila, cada columna y cada diagonal, y comprobamos que $n = 3x_{22}$. En efecto, al sumar la fila y columna segunda con las dos diagonales resulta

$$\begin{aligned} 4n &= (x_{12} + x_{22} + x_{32}) + (x_{21} + x_{22} + x_{23}) + (x_{11} + x_{22} + x_{33}) \\ &\quad + (x_{13} + x_{22} + x_{31}) = 3x_{22} + \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} = 3x_{22} + \sigma = 3x_{22} + 3n, \end{aligned}$$

y tras pasar de miembro, $n = 3x_{22}$. En consecuencia, $\sigma = 3n = 9x_{22}$. Por eso, sumando a la última fila de A las dos anteriores, y haciendo después lo mismo con las columnas obtenemos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ n & n & n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & n \\ x_{21} & x_{22} & n \\ n & n & 3n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 3x_{22} \\ x_{21} & x_{22} & 3x_{22} \\ 3x_{22} & 3x_{22} & 9x_{22} \end{pmatrix}.$$

Esto permite sacar fuera del determinante dos veces el factor 3 y una vez el factor x_{22} , esto es,

$$\Delta = 9 \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{22} \\ x_{21} & x_{22} & x_{22} \\ x_{22} & x_{22} & x_{22} \end{pmatrix} = 9x_{22} \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{22} & x_{22} & 1 \end{pmatrix} = \sigma \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{22} & x_{22} & 1 \end{pmatrix}.$$

Este último determinante es $(x_{22} - x_{21})(x_{12} - x_{22}) \in \mathbb{Z}$, luego $\Delta \in \sigma\mathbb{Z}$. \square

Número 10. Sean A y B dos matrices cuadradas. Demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Solución. Si $\det(A) = 0$, alguna columna de A depende de las otras, luego lo mismo pasa en la matriz $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$, y su determinante es también nulo, con lo que la igualdad del enunciado es bien cierta: $0 = 0$. Suponemos pues $\det(A) \neq 0$, y consideramos la aplicación:

$$\delta : B \mapsto \det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} / \det(A).$$

Se aprecia inmediatamente que δ cumple las propiedades (1), (2) y (3) que definen el determinante, luego *es* el determinante:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} / \det(A),$$

y se sigue lo que se quería. \square

Número 11. Demostrar utilizando matrices elementales (véase el ejercicio número 4 de la lección I.3, p. 42) que el determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.

Solución. Sean A, B dos matrices cuadradas de orden n . Si A no es invertible, entonces $\text{rg}(A) < n$ y $\det(A) = 0$. Como consecuencia de I.3.8, p. 36, se tiene que

$$\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\} < n,$$

y por tanto $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$. Veamos qué pasa si A es invertible.

En primer lugar, por las reglas de cálculo del determinante descritas en I.4.6, p. 50,

$$\det(I'_i(\lambda)) = \lambda, \quad \det(I'_{ij}(\lambda)) = 1, \quad \det(I'_{ij}) = -1,$$

y más generalmente

$$\det(I'B) = \det(I') \det(B),$$

para cualquier matriz elemental I' . De esto se deduce lo que queremos. En efecto, si A es invertible, entonces A es un producto de matrices elementales, $A = I'_1 \cdots I'_q$, y por lo que acabamos de decir,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(I'_1 \cdots I'_q) = \det(I'_1) \det(I'_2 \cdots I'_q) = \cdots = \det(I'_1) \cdots \det(I'_q), \\ \det(AB) &= \det(I'_1 \cdots I'_q B) \\ &= \det(I'_1) \det(I'_2 \cdots I'_q B) = \cdots = \det(I'_1) \cdots \det(I'_q) \det(B), \end{aligned}$$

con lo que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. \square

Número 12. Sean A y B dos matrices $m \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Calcular los rangos de ambas sabiendo que $\det(AB) \neq \det(BA)$.

Solución. Por la hipótesis, no pueden ser matrices cuadradas. Supongamos por ejemplo $m < n$. Entonces, por I.3.8, p. 36, $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}(A) \leq m < n$, y como BA es una matriz cuadrada de orden n , su rango no es máximo y su determinante es nulo. Por hipótesis entonces, $\det(AB) \neq 0$, y como AB tiene orden m , resulta $m = \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A), \text{rg}(B)$. Pero tanto A como B tienen rango $\leq m$, luego concluimos que su rango es exactamente m . \square

Número 13. Consideremos la siguiente disposición del triángulo de Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & & \\ 1 & 4 & 10 & \cdots & & & \\ 1 & 5 & \cdots & & & & \\ 1 & \cdots & & & & & \end{array}$$

Calcular el determinante de la matriz cuadrada de orden n que forman los n^2 coeficientes de la esquina superior izquierda.

Solución. Los enteros del enunciado son números combinatorios, y vamos a calcular cuál es el coeficiente a_{ij} que ocupa la fila i -ésima y la columna j -ésima. Los de la primera fila son de la forma $\binom{*}{0}$, los de la segunda $\binom{*}{1}$, y en general los de la i -ésima son $\binom{*}{i-1}$.

Además, los números de la segunda diagonal son $\binom{1}{*}$, los de la tercera son $\binom{2}{*}$, y así los de la diagonal k -ésima son $\binom{k-1}{*}$. El coeficiente a_{ij} está en la fila i -ésima y la diagonal $(i+j-1)$ -ésima, luego $a_{ij} = \binom{i+j-2}{i-1}$.

Denotamos por A_n la matriz del enunciado y Δ_n su determinante. Desde luego $\Delta_1 = 1$ y también

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Para calcular Δ_3 restamos a cada columna de A_3 distinta de la primera la columna anterior, esto es,

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora restamos a la segunda fila de la última matriz la anterior y concluimos

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \Delta_2 = 1.$$

Vemos a continuación que esto sucede siempre, es decir, $\Delta_n = \Delta_{n-1}$, lo que demuestra que cada $\Delta_n = 1$. Para ello restamos a cada columna de A_n , a partir de la segunda, la anterior. La nueva matriz B_n tiene a Δ_n por determinante, y el único coeficiente no nulo en su primera fila es $b_{11} = 1$, por lo que al desarrollar el determinante de B_n por la primera fila obtenemos

$$\Delta_n = \det(B_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & B_{n-1} & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \det(B_{n-1}).$$

Analicemos ahora los coeficientes de la caja B_{n-1} . Para cada $i, j > 1$ el coeficiente b_{ij} de la fila i -ésima y la columna j -ésima es

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i,j-1} = \binom{i+j-2}{i-1} - \binom{i+j-3}{i-1} = \binom{i+j-3}{i-2} = a_{i-1,j}.$$

Así, los coeficientes de la primera fila de B_{n-1} son $b_{2j} = a_{1j} = 1$, $j \geq 2$. Ahora, para convertir B_{n-1} en A_{n-1} restamos de cada fila la anterior:

$$b_{ij} - b_{i-1,j} = a_{i-1,j} - a_{i-2,j} = \binom{i+j-3}{i-2} - \binom{i+j-4}{i-3} = \binom{i+j-4}{i-2} = a_{i-1,j-1},$$

para $i \geq 3$. De esta manera:

$$\Delta_n = \det(B_{n-1}) = \det(A_{n-1}) = \Delta_{n-1}.$$

En consecuencia, $\Delta_n = 1$ para cada $n \geq 1$. □

Número 14. (1) Demostrar la siguiente fórmula para el cálculo del determinante:

$$\det(A) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=1 \\ j_k \neq j_\ell}}^n (-1)^{\#(j)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n},$$

donde $\#(j)$ es el número de intercambios de columnas que hay que hacer para ordenar consecutivamente las columnas j_1, \dots, j_n .

(2) Demostrar que la paridad del número de intercambios de columnas que hay que hacer para reordenar las columnas de una matriz de una manera prescrita no depende de la manera en que se elijan los intercambios.

Solución. (1) Escribimos la matriz dada por filas $A = (a_1, \dots, a_n)$, y cada fila como combinación:

$$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad e_j = (0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots, 0).$$

De este modo:

$$\det(A) = \det \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} e_{j_n} \right),$$

teniendo buen cuidado en distinguir los sumatorios según el lugar que ocupan. Por conservar el determinante las combinaciones de filas, resulta:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} \det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}). \end{aligned}$$

Nótese ahora que si $j_k = j_\ell$, entonces la matriz $(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ tiene dos filas iguales, y su determinante es nulo, de manera que se puede prescindir de él en el sumatorio, y queda

$$\det(A) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=1 \\ j_k \neq j_\ell}}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}).$$

Intercambiando filas en la matriz $(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ se obtiene la matriz identidad $I_n = (e_1, \dots, e_n)$. Pero cada intercambio es un cambio de signo en el determinante, luego

$$\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = (-1)^{\#(j)} \det(e_1, \dots, e_n) = (-1)^{\#(j)} \det(I_n) = (-1)^{\#(j)}.$$

Por tanto

$$\det(A) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=1 \\ j_k \neq j_\ell}}^n (-1)^{\#(j)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}.$$

(2) En realidad la matriz que se considere es irrelevante, así que podemos suponer que es la identidad I_n . Tenemos que probar que si unos intercambios consecutivos dados $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ dejan las columnas ordenadas de la misma manera que otros τ_1, \dots, τ_s , entonces $(-1)^r = (-1)^s$, o en otras palabras, $r + s$ es un número par. Ahora bien, si hacemos consecutivamente los $r + s$ intercambios de columnas

$$\sigma_1, \dots, \sigma_r, \tau_s, \dots, \tau_1,$$

entonces dejamos todas las columnas de A donde estaban. Por ello, podemos representar estas operaciones elementales con el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} I_n & \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_r} & \bar{I} & \xrightarrow{\tau_s} \cdots \xrightarrow{\tau_1} & I_n \\ \det(I_n) & \xrightarrow{-1} \cdots \xrightarrow{-1} & \det(\bar{I}) & \xrightarrow{-1} \cdots \xrightarrow{-1} & \det(I_n) \end{array}$$

Como cada operación de las $r + s$ realizadas multiplica el determinante por -1 , $\det(I_n) = (-1)^{r+s} \det(I_n)$, luego $1 = (-1)^{r+s}$, y $r + s$ es par como se quería. \square

Número 15. Demostrar que una aplicación

$$\text{deter} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

que cumple que las reglas de cálculo (i), (ii), (iii) de I.4.6, p. 50, y tal que $\text{deter}(I_n) = 1$ es la función determinante. Esto proporciona una definición del determinante ligada directamente a las operaciones elementales.

Solución. Basta comprobar que una tal función deter cumple las propiedades (2) y (3) de I.4.3, p. 46. La propiedad (3) se deduce directamente de la regla I.4.6(iii), dado que el único escalar que coincide con su opuesto es el cero.

Antes de comprobar que se cumple la propiedad (2) veamos que si el rango de una matriz A es menor que su orden, entonces $\text{deter}(A) = 0$. En efecto, si aquello ocurre, alguna fila de A es combinación de las demás. De este modo, aplicando la regla de cálculo (ii), $\text{deter}(A) = \text{deter}(B)$ para cierta matriz B que tiene una fila idénticamente nula. Sea C la matriz que se obtiene al sumar a dicha fila cualquiera de las filas de B . De nuevo por la regla de cálculo (ii), $\text{deter}(C) = \text{deter}(B)$ y ahora por la propiedad (3), que ya hemos probado para deter , concluimos que $\text{deter}(A) = \text{deter}(B) = \text{deter}(C) = 0$.

Veamos finalmente que se cumple la propiedad (2). Como consecuencia de las reglas de cálculo (i) y (iii), es suficiente demostrar que

$$(*) \quad \text{deter}(a'_1 + a''_1, a_2, \dots, a_n) = \text{deter}(a'_1, a_2, \dots, a_n) + \text{deter}(a''_1, a_2, \dots, a_n).$$

Sea C la matriz de tamaño $(n-1) \times n$ cuyas filas son a_2, \dots, a_n . Por otra parte, denotamos $A' = (a'_1, a_2, \dots, a_n)$, $A'' = (a''_1, a_2, \dots, a_n)$ y $B = (a'_1 + a''_1, a_2, \dots, a_n)$.

Distinguimos ahora varios casos:

(a) Si $\text{rg}(C) < n-1$, entonces necesariamente cualquier matriz $n \times n$ de la forma (b, a_2, \dots, a_n) tiene rango $\leq 1 + \text{rg}(C) < n$ y por tanto deter aplicada a dicha matriz vale 0. De este modo, se cumple la igualdad (*), pues $\text{deter}(A') = \text{deter}(A'') = \text{deter}(B) = 0$. En lo sucesivo supondremos que $\text{rg}(C) = n-1$.

(b) Si $\text{rg}(A') = \text{rg}(A'') = n-1$, entonces las filas a'_1 y a''_1 son combinación lineal de las filas a_2, \dots, a_n , y, por tanto, también su suma $a'_1 + a''_1$ es combinación lineal de esas mismas filas. En consecuencia, de nuevo $\text{deter}(A') = \text{deter}(A'') = \text{deter}(B) = 0$ y se cumple la igualdad (*).

(c) El último caso es aquél en el que una de las matrices A' o A'' tiene rango n , por ejemplo, podemos suponer $\text{rg}(A') = n$. Consideramos el sistema $A'^t x^t = a''^t_1$, que es compatible determinado porque $\text{rg}(A') = n$. Por tanto, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que $a''_1 = \lambda_1 a'_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j$. En consecuencia, aplicando la reglas de cálculo (i)

y (ii), tenemos

$$\begin{aligned}
 \det(B) &= \det(a'_1 + a''_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= \det\left(a'_1 + \lambda_1 a'_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j, a_2, \dots, a_n\right) \\
 &= \det(a'_1 + \lambda_1 a'_1, a_2, \dots, a_n) = \det((1 + \lambda_1)a'_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= (1 + \lambda_1) \det(a'_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= \det(a'_1, a_2, \dots, a_n) + \det(\lambda_1 a'_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= \det(a'_1, a_2, \dots, a_n) + \det(\lambda_1 a'_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j, a_2, \dots, a_n) \\
 &= \det(a'_1, a_2, \dots, a_n) + \det(a''_1, a_2, \dots, a_n) = \det(A') + \det(A''),
 \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración. \square

Soluciones §5

Número 1. Comprobar que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible y determinado, y resolverlo mediante la regla de Cramer

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

Solución. El determinante Δ de la matriz de coeficientes es no nulo, por lo que el sistema es compatible y determinado, y de hecho vale

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix} = 48.$$

Por otra parte, al sustituir las columnas de esta matriz por la de términos independientes se tiene:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} -13 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 23 & 17 & 0 \\ 15 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 48,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -13 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -13 & 4 \\ 0 & 36 & -10 \\ 0 & -30 & 11 \end{pmatrix} = 96,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 8 & 36 \\ 0 & -4 & -30 \end{pmatrix} = -96.$$

En consecuencia, la única solución del sistema es

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2.$$

□

Número 2. Discutir en función del parámetro $t \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Solución. Sumando a la primera fila las otras dos se tiene

$$\det(A_t) = \det \begin{pmatrix} t+2 & t+2 & t+2 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = (t+2) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Restando ahora la primera columna a las otras dos resulta

$$\det(A_t) = (t+2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t+2)(t-1)^2.$$

En particular, $\text{rg}(A_t) = 3$ si $t \neq 1, -2$. Por otro lado,

$$\text{rg}(A_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

mientras que $\text{rg}(A_{-2}) = 2$, ya que $\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$.

□

Número 3. Discutir en función del parámetro $t \in \mathbb{K}$ el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & t & 0 & t \\ 0 & t & t & 0 & -1 \\ 1 & t & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Empezamos buscando un menor no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & t & -1 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

(usando la regla de Laplace según la última columna). De este modo, $\text{rg}(A) \geq 3$ para todo t . Examinamos ahora los menores de orden 4 que contienen éste no nulo que tenemos. Hay dos:

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} t & -1 & t & t \\ 0 & t & t & -1 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & t \\ 0 & t & 0 & -1 \\ 1 & t & t & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el primero:

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -1-t^2 & 0 & t \\ 0 & t & t & -1 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1-t^2 & 0 & t \\ t & t & -1 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$$

(restando de la primera fila la tercera multiplicada por t , y aplicando Laplace por la primera columna)

$$= \det \begin{pmatrix} -1 & t^2 & 0 \\ t & t & -1 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} = -(-1) \det \begin{pmatrix} -1 & t^2 \\ 1 & t \end{pmatrix} = -t(t+1)$$

(primera fila más segunda multiplicada por t , Laplace por la tercera columna). Ahora, el segundo menor:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} t & -1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & -1 \\ 1 & t & t & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} t & -1+t^2 & 0 \\ 1 & t & t \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(primera fila más segunda multiplicada por t , Laplace por la cuarta columna)

$$= -\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -t^2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & -t^2 \\ 1 & t \end{pmatrix} = t(t-1)$$

(primera fila menos segunda multiplicada por t , Laplace por la primera columna).

Si los dos menores son nulos, es decir, para $t = 0$, el rango es 3. En otro caso, es decir, para $t \neq 0$, el rango es 4. \square

Número 4. Utilizando la matriz de adjuntos calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Comenzamos confirmando que A es invertible, para lo que basta calcular su determinante:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

Ahora calculamos con paciencia los 16 adjuntos de la matriz A . Así tenemos,

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A_{14} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad A_{22} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4, \quad A_{24} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A_{34} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{41} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad A_{42} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{43} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A_{44} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4.$$

En consecuencia, si denotamos $\alpha_{ij} = A_{ji}$ se obtiene finalmente

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\alpha_{ij}) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

Número 5. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ tiene inversa la matriz siguiente, y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. En primer lugar calculamos el determinante de A , por ejemplo por la regla de Sarrus:

$$\det(A) = -a^2 + 3a + 2a = a(5 - a).$$

Por otra parte, la matriz adjunta de A es:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3a & a & a^2 \\ 2 - a & 1 & a \\ 6 & 3 - a & -2a \end{pmatrix},$$

y su inversa para $a \neq 0, 5$, es $A^{-1} = \frac{1}{a(5-a)} \text{Adj}(A)$. \square

Número 6. Discutir el sistema del ejercicio número 11 de la lección I.1, p. 16, utilizando determinantes para el cálculo de rangos.

Solución. Denotamos por A y \tilde{A} , respectivamente, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema, que son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de \tilde{A} vale

$$\det(\tilde{A}) = -8 - a^2 - 12 + 6a + 8 + 2a = -(a^2 - 8a + 12) = -(a - 2)(a - 6).$$

En consecuencia, si $a \neq 2, 6$, resulta que $\text{rg}(\tilde{A}) = 3 > \text{rg}(A)$, luego el sistema es incompatible. Por otro lado, el menor de A formado por sus filas primera y tercera es no nulo, independientemente del valor de a , así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2$ si $a = 2, 6$, y en estos dos casos el sistema es compatible determinado. \square

Número 7. Discutir el sistema de ecuaciones lineales del ejercicio número 12 de la lección I.1, p. 16, utilizando determinantes para el cálculo de rangos.

Solución. Denotamos A la matriz de coeficientes del sistema, cuyo determinante vale

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2a & 1 \\ a & 1 & -a \\ 4a & 4a & a \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 2 & 2a & 1 \\ a & 1 & -a \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restando a las dos primeras columnas un múltiplo adecuado de la tercera y desarrollando después por la primera fila se tiene

$$\det(A) = a \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3a & 1+2a^2 & -a \\ 2 & 4-2a & 1 \end{pmatrix} = a(12a - 6a^2 - 2 - 4a^2) = -2a(5a^2 - 6a + 1).$$

Las raíces del polinomio de segundo grado $5T^2 - 6T + 1$ son $T = 1, 1/5$, y en consecuencia, si $a \neq 0, 1, 1/5$, entonces $\text{rg}(A) = 3$ y el sistema es compatible y determinado. Se trata ahora de comparar los rangos de A y la matriz ampliada

$$\tilde{A}_a = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 1 & a \\ a & 1 & -a & a \\ 4a & 4a & a & 9 \end{pmatrix}$$

en los casos $a = 0, a = 1$ y $a = 1/5$. Para $a = 0$ se tiene

$$\text{rg}(\tilde{A}_0) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 3,$$

pues el menor obtenido prescindiendo de la tercera columna es no nulo. Para $a = 1$,

$$\text{rg}(\tilde{A}_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 3,$$

porque al prescindir de la primera columna obtenemos un menor no nulo (vale -20). Por último, si $a = 1/5$,

$$\text{rg}(\tilde{A}_{1/5}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2/5 & 1 & 1/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 45 \end{pmatrix} = 3,$$

pues el menor formado por las columnas primera, segunda y cuarta de la última matriz vale $2112 \neq 0$. Así en estos tres casos $\text{rg}(\tilde{A}_a) = 3 > \text{rg}(A_a)$ y el sistema es incompatible. \square

Número 8. Discutir el sistema no homogéneo del ejercicio número 13 de la lección I.1, p. 16, utilizando determinantes para el cálculo de rangos.

Solución. La matriz ampliada \tilde{A} del sistema es

$$\tilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Empezamos por calcular el determinante de \tilde{A} . Para ello, restamos la primera fila de las siguientes, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 & \beta - 1 \\ \beta - \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación, restamos la segunda fila de la tercera:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ \beta - \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta última matriz, que naturalmente es el de \tilde{A} , se calcula aplicando sucesivamente la regla de Laplace, según la última y la penúltima fila:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ \beta - \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= -(\beta - \alpha) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha - 1 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\beta - \alpha)(\alpha - 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha - 1 & \beta - 1 \end{pmatrix} = (\beta - \alpha)^2(\alpha - 1). \end{aligned}$$

Por tanto, si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq \beta$, este determinante es no nulo y $\text{rg}(A) \leq 3 < 4 = \text{rg}(\tilde{A})$, de manera que el sistema es incompatible.

Supongamos ahora $\alpha = 1 \neq \beta$. En tal caso $\text{rg}(\tilde{A}) \leq 3$ porque $\det(\tilde{A}) = 0$. Además,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ \beta & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $\text{rg}(A) = 2$. Es ≤ 2 pues las tres primeras filas coinciden, y de hecho es 2 porque $\beta \neq 1$. Por otra parte $\text{rg}(\tilde{A}) = 3$, pues tiene un menor no nulo de orden 3, a saber:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ \beta - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\beta - 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = (\beta - 1)^2 \neq 0.$$

Así pues en este caso el sistema también es incompatible.

Ahora, supongamos $\alpha = \beta$, de modo que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las columnas segunda y cuarta de \tilde{A} coinciden, luego $\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg}(A)$ y el sistema es compatible. Queda calcular ese rango. Como las filas primera y última de A son iguales:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Pero el determinante de esta última matriz es $\alpha(\alpha - 1)^2$, luego el sistema es determinado si $\alpha \neq 0, 1$ e indeterminado en otro caso. \square

Número 9. Discutir el sistema del ejercicio número 14 de la lección I.1, p. 17, utilizando determinantes para calcular rangos.

Solución. La matriz ampliada de ese sistema es

$$\tilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz del sistema es

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

que es no nulo si $\lambda \neq \pm 1$. Por tanto en ese caso ambas matrices tienen rango 2 y el sistema es compatible determinado. En cambio, si $\lambda = +1$ (resp. $= -1$), las dos ecuaciones del sistema son iguales (resp. opuestas), y basta resolver la primera, de modo que el sistema es compatible indeterminado. \square

Número 10. Sean n un número entero mayor que 1 y u, v dos números reales. Discutir, en función de los valores de estos dos últimos, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ux_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1, \\ x_1 + ux_2 + x_3 + \cdots + x_n = v, \\ x_1 + x_2 + ux_3 + \cdots + x_n = v^2, \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + ux_n = v^{n-1}. \end{cases}$$

Solución. Comenzamos calculando el determinante Δ de la matriz de coeficientes,

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} u & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & u & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & u & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & u \end{pmatrix} = (u + n - 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & u & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & u & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & u \end{pmatrix}$$

$$= (u + n - 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & u-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u-1 \end{pmatrix} = (u + n - 1)(u - 1)^{n-1}.$$

En consecuencia, si $u \neq 1$ y $u \neq 1 - n$, el sistema es compatible y determinado, pues tanto la matriz de coeficientes como la ampliada tienen rango n .

Para $u = 1$ todos los miembros de la izquierda en el sistema son iguales, luego será compatible cuando lo sean también los de la derecha, esto es, si $v = 1$. Además, en tal caso hay una única ecuación y al menos dos incógnitas, pues $n > 1$, por lo que el sistema es indeterminado.

Así, ya sólo falta estudiar el caso $u = 1 - n$. La suma de todas las ecuaciones da:

$$(u + n - 1)(x_1 + \cdots + x_n) = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \begin{cases} n & \text{si } v = 1, \\ \frac{v^n - 1}{v - 1} & \text{si } v \neq 1. \end{cases}$$

En nuestro caso el miembro de la izquierda es nulo y, para que lo sea el de la derecha, necesariamente $v^n = 1$ y $v \neq 1$. Esto equivale, al ser v real, a que n es par y $v = -1$. Por tanto, si $u = 1 - n$ el sistema es incompatible, salvo tal vez para n par y $v = -1$, que es el único caso que falta por discutir.

En ese caso que falta, el sistema se lee

$$\begin{cases} (1-n)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1, \\ x_1 + (1-n)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -1, \\ x_1 + x_2 + (1-n)x_3 + \cdots + x_n = 1, \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1-n)x_n = -1. \end{cases}$$

Denotemos $s = x_1 + \cdots + x_n$. Si el sistema es compatible, entonces $1 + nx_i = s = -1 + nx_j$, para i impar y j par, luego en particular las variables con subíndice impar coinciden entre sí, digamos que valen a , y también lo hacen las de subíndice par, con valor común b .

Por tanto, estos valores cumplen $1 + na = s = -1 + nb$, esto es, $b = a + \frac{2}{n}$, y es inmediato comprobar que, sea cual sea el valor del número real a , una solución del sistema en este caso es $x_i = a$ y $x_j = a + \frac{2}{n}$. Así, si $u = 1 - n$, n es par y $v = -1$, el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo todo lo anterior tenemos que

$u \neq 1, 1 - n$		Compatible determinado
$u = 1$	$v = 1$	Compatible indeterminado
	$v \neq 1$	Incompatible
$u = 1 - n$	n impar	Incompatible
	n par, $v = -1$	Compatible indeterminado
	n par, $v \neq -1$	Incompatible

□

Número 11. Encontrar todas las ternas de números complejos a, b, c que satisfacen las igualdades

$$\begin{cases} a + b + c = 3, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3. \end{cases}$$

Solución. Este sistema, de ecuaciones no lineales en las variables a, b, c , se puede reinterpretar diciendo que $x = y = z = 1$, $t = -3$ es una solución distinta de la trivial del sistema homogéneo de cuatro ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ ax + by + cz + t = 0, \\ a^2x + b^2y + c^2z + t = 0, \\ a^3x + b^3y + c^3z + t = 0. \end{cases}$$

Por ello, el determinante de la matriz de coeficientes, que es un determinante de Vandermonde, es nulo. Esto es,

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & 1 \end{pmatrix} = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(b - a)(c - a)(c - b).$$

En consecuencia, bien alguno de los números a, b, c vale 1, bien hay dos iguales entre sí. Como los papeles de los tres son intercambiables, podemos suponer que bien $a = 1$, bien $a = b$. En el primer caso, las dos primeras de las igualdades iniciales se convierten en

$$\begin{cases} b + c = 2, \\ b^2 + c^2 = 2, \end{cases} \rightsquigarrow 4 = (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 2 + 2bc,$$

luego $b + c = 2$ y $bc = 1$, es decir, b y c son las soluciones de la ecuación de segundo grado $X^2 - 2X + 1 = 0$, o sea, $b = c = 1$. En el caso $a = b$ las dos primeras igualdades

del enunciado se leen

$$\begin{cases} 2a + c = 3, \\ 2a^2 + c^2 = 3, \end{cases}$$

y al sustituir el valor $c = 3 - 2a$ en la segunda ecuación, tenemos

$$3 = 2a^2 + (3 - 2a)^2 = 6a^2 - 12a + 9,$$

o lo que es lo mismo, $(a - 1)^2 = 0$. Luego $a = 1$, de donde $b = c = 1$.

En conclusión, los únicos números que satisfacen las igualdades del enunciado son $a = b = c = 1$. \square

Número 12. Comprobar que, para cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Deducir que si A es invertible, entonces $\text{Adj}(A) = \text{tr}(A)I_2 - A$, y obtener la fórmula de cálculo de A^{-1} del ejemplo I.5.4(2), p. 65. ¿Cuándo es A su propia inversa?

Solución. Sin más que operar resulta

$$\begin{aligned} (a + d)A - (ad - bc)I_2 &= \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = A^2. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$, de donde resulta

$$(\text{tr}(A)I_2 - A)A = \det(A)I_2 = \text{Adj}(A)A,$$

y si A es invertible, multiplicando por la derecha por A^{-1} obtenemos

$$\text{tr}(A)I_2 - A = \text{Adj}(A).$$

A partir de esta fórmula nos queda:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}((a + d)I_2 - A) \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} (a + d) - a & -b \\ -c & (a + d) - d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A la vista de la igualdad $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$, ya probada, una matriz A coincide con su inversa (es decir, $A^2 = I_2$) si y sólo si

$$I_2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Por tanto, se trata de encontrar aquellas matrices A que cumplen la siguiente igualdad

$$(*) \quad (a + d)A = (1 + ad - bc)I_2.$$

Esto nos lleva a distinguir dos casos:

Caso 1. Si $a + d = 0$ entonces también $1 + ad - bc = 0$, o sea, $1 = a^2 + bc$. Si $b = 0$ ha de ser $a = \pm 1$, mientras que si $b \neq 0$, despejamos $c = \frac{1-a^2}{b}$.

Caso 2. Si $a + d \neq 0$ han de ser nulos los coeficientes de A que no están en la diagonal principal (pues es lo que le ocurre a I_2 , que aparece en el miembro de la derecha de la igualdad (*)), esto es, $b = c = 0$, y además

$$\begin{aligned} a(a + d) &= 1 + ad - bc = 1 + ad \rightsquigarrow a^2 = 1, \\ d(a + d) &= 1 + ad - bc = 1 + ad \rightsquigarrow d^2 = 1, \end{aligned}$$

y en particular $a = \pm d$. Como $a + d \neq 0$ entonces $a - d = 0$ y los únicos nuevos casos que obtenemos son

$$b = c = 0, \quad a = d = \pm 1, \quad \text{o sea, } A = \pm I_2.$$

En resumen, todas las soluciones son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c \in \mathbb{K}$ y además $b \neq 0$. □

Número 13. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$.

(1) Encontrar una condición necesaria y suficiente, que involucre sólo a la matriz A , para que P sea la única solución de la ecuación $AX = AP$, donde la incógnita es $X \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$.

(2) Obtener una matriz $X \neq P$ que cumpla $AX = AP$ en el caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Hallar todas las matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ que satisfagan, simultáneamente, las ecuaciones $AX = AP$ y $BX = BP$, donde P y A son las del apartado anterior y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. (1) Si $\det(A) \neq 0$ la matriz A es invertible, luego al multiplicar por la inversa A^{-1} de A , por la izquierda, la igualdad $AX = AP$, resulta $A^{-1}AX = A^{-1}AP$, luego $X = P$ es la única solución de la ecuación $AX = AP$.

Recíprocamente, supongamos que $\det(A) = 0$. Entonces, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $Ax^t = 0$, en las incógnitas $x = (x_1, \dots, x_n)$, tiene alguna solución no trivial $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$. Por tanto, la matriz de 1 fila y n columnas $c = (c_1 \ \dots \ c_n)$ cumple $Ac^t = 0$. Entonces, la matriz $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ cuyas m columnas son iguales a la columna c^t anterior, cumple $AC = 0$. Por eso la matriz $X = P + C \neq P$, ya que C no es nula, y cumple

$$AX = A(P + C) = AP + AC = AP.$$

Así pues, $X = P$ es la única solución de la ecuación $AX = AP$ si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

(2) El problema tiene solución, ya que $\det(A) = 0$. Para obtener una matriz $X \neq P$ tal que $AX = AP$, procedemos como en el apartado anterior. Buscamos por tanto una solución no trivial $c = (c_1, c_2, c_3)$ del sistema de ecuaciones lineales $Ac^t = 0$, esto es,

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0, \\ 4c_1 + 5c_2 + 6c_3 = 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

La segunda de estas ecuaciones es superflua, pues es la suma de la primera y el triple de la tercera. Además, al restar la tercera a la primera se tiene que $c_2 = -2c_3$, y por eso $c_1 = -c_2 - c_3 = c_3$. Por tanto,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $AC = 0$, y por ello la matriz

$$X = P + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es distinta de P y cumple $AX = AP$.

(3) Una matriz $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ satisface las condiciones $AX = AP$ y $BX = BP$ si y sólo si $Y = X - P$ cumple $AY = BY = 0$. Denotando $Y = (y_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$,

las condiciones anteriores se escriben como tres sistemas idénticos, de tres ecuaciones lineales cada uno:

$$(a) \begin{cases} y_{11} + 2y_{21} + 3y_{31} = 0, \\ 4y_{11} + 5y_{21} + 6y_{31} = 0, \\ y_{11} + y_{21} + y_{31} = 0, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y_{12} + 2y_{22} + 3y_{32} = 0, \\ 4y_{12} + 5y_{22} + 6y_{32} = 0, \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} = 0, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y_{13} + 2y_{23} + 3y_{33} = 0, \\ 4y_{13} + 5y_{23} + 6y_{33} = 0, \\ y_{13} + y_{23} + y_{33} = 0. \end{cases}$$

Se trata, por tanto, de resolver el primero de ellos. Ya hemos visto en el apartado anterior que todas sus soluciones son de la forma $y_{11} = a, y_{21} = -2a, y_{31} = a$, con $a \in \mathbb{K}$. Análogamente, existen $b, c \in \mathbb{K}$ tales que

$$y_{12} = b, \quad y_{22} = -2b, \quad y_{32} = b, \quad \text{e} \quad y_{13} = c, \quad y_{23} = -2c, \quad y_{33} = c.$$

Por tanto, obtenemos las matrices

$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = Y + P = \begin{pmatrix} a+2 & b+1 & c+1 \\ -2a & -2b+1 & -(2c+1) \\ a-1 & b & c+1 \end{pmatrix},$$

que es la solución general del sistema $AX = AP, BX = BP$. \square

Número 14. Sean k un entero positivo y para cada par de enteros no negativos $j > i$ denotamos $c_{ij} = \binom{j}{i}$. Definimos el polinomio

$$f(T) = \det \begin{pmatrix} c_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & T \\ c_{02} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 & T^2 \\ c_{03} & c_{13} & c_{23} & \cdots & 0 & T^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{0k} & c_{1k} & c_{2k} & \cdots & c_{k-1,k} & T^k \\ c_{0,k+1} & c_{1,k+1} & c_{2,k+1} & \cdots & c_{k-1,k+1} & T^{k+1} \end{pmatrix}.$$

(1) Demostrar que $f(T+1) - f(T)$ es un monomio de grado k .

(2) Demostrar la igualdad $(k+1)! \sum_{\ell=1}^n \ell^k = f(n+1)$.

Solución. (1) Al restar, por las propiedades de los determinantes,

$$f(T+1) - f(T) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & T+1-T \\ c_{02} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 & (T+1)^2 - T^2 \\ c_{03} & c_{13} & c_{23} & \cdots & 0 & (T+1)^3 - T^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{0k} & c_{1k} & c_{2k} & \cdots & c_{k-1,k} & (T+1)^k - T^k \\ c_{0,k+1} & c_{1,k+1} & c_{2,k+1} & \cdots & c_{k-1,k+1} & (T+1)^{k+1} - T^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Las restas que aparecen en la última columna valen, por la fórmula de Newton,

$$(T+1)^j - T^j = c_{0j} + c_{1j}T + c_{2j}T^2 + \cdots + c_{j-1,j}T^{j-1}.$$

Por eso, si denotamos por C_0, C_1, \dots, C_k las columnas de esta matriz y sustituimos la última por

$$C_k - (C_0 + TC_1 + T^2C_2 + \cdots + T^{k-1}C_{k-1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k \ k+1}T^k \end{pmatrix},$$

resulta que la resta $f(T+1) - f(T)$ es el determinante de una matriz triangular:

$$\begin{aligned} f(T+1) - f(T) &= \\ &= \det \begin{pmatrix} c_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{02} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{03} & c_{13} & c_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{0k} & c_{1k} & c_{2k} & \cdots & c_{k-1 \ k} & 0 \\ c_{0 \ k+1} & c_{1 \ k+1} & c_{2 \ k+1} & \cdots & c_{k-1 \ k+1} & c_{k \ k+1}T^k \end{pmatrix} \\ &= c_{01}c_{12} \cdots c_{k \ k+1}T^k = (k+1)!T^k. \end{aligned}$$

(2) Evaluando esta igualdad en $T = 1, 2, \dots, n$ obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(2) - f(1) & = & (k+1)!1^k, \\ f(3) - f(2) & = & (k+1)!2^k, \\ f(4) - f(3) & = & (k+1)!3^k, \\ \vdots & & \vdots \\ f(n+1) - f(n) & = & (k+1)!n^k. \end{array} \right.$$

Al sumar, y tras simplificar, se tiene

$$f(n+1) - f(1) = (k+1)! \sum_{\ell=1}^n \ell^k.$$

Ahora bien, $f(1) = 0$, al ser el determinante de una matriz cuya primera y última columna coinciden, y por tanto $f(n+1) = (k+1)! \sum_{\ell=1}^n \ell^k$, como queríamos probar. \square

Número 15. (1) Demostrar que si dos polinomios

$$\begin{aligned} f(T) &= a_0 T^m + a_1 T^{m-1} + \cdots + a_{m-1} T + a_m, \\ g(T) &= b_0 T^n + b_1 T^{n-1} + \cdots + b_{n-1} T + b_n, \end{aligned}$$

tienen alguna raíz común, entonces el determinante

$$R(f, g) = \det \left(\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ filas} \\ \\ \\ \\ m \text{ filas} \end{array}$$

es nulo. Se dice que $R(f, g)$, que es el determinante de una matriz de orden $m+n$, es la *resultante* de f y g .

(2) ¿Tiene alguna raíz múltiple (es decir, común con su derivada) el polinomio $f(T) = T^3 + T + 1$?

Solución. (1) Sea u una raíz común de f y g . Entonces

$$\begin{cases} f(u) = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \cdots + a_{m-1} u + a_m = 0, \\ g(u) = b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \cdots + b_{n-1} u + b_n = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la primera igualdad por las sucesivas potencias $u^{n-1}, u^{n-2}, \dots, 1$ de u y la segunda por $u^{m-1}, u^{m-2}, \dots, 1$ se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 u^{m+n-1} + a_1 u^{m+n-2} + \cdots + a_m u^{n-1} = 0 \\ \quad a_0 u^{m+n-2} + \cdots + a_{m-1} u^{n-1} + a_m u^{n-2} = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad a_0 u^m + \cdots + a_m \cdot 1 = 0 \end{array} \right\} n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 u^{m+n-1} + b_1 u^{m+n-2} + \cdots + b_n u^{m-1} = 0 \\ \quad b_0 u^{m+n-2} + \cdots + b_{n-1} u^{m-1} + b_n u^{m-2} = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad b_0 u^n + \cdots + b_n \cdot 1 = 0 \end{array} \right\} m$$

Esto significa que la $(m+n)$ -upla $(u^{m+n-1}, u^{m+n-2}, \dots, u, 1)$ es una solución no trivial del sistema homogéneo de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes tiene a $R(f, g)$ por determinante. En consecuencia $R(f, g) = 0$.

(2) Si f tuviese alguna raíz múltiple, digamos u , el polinomio $f(T)$ se escribiría en la forma $f(T) = (T - u)^2 h(T)$ para algún polinomio h , y al derivar,

$$g(T) = f'(T) = 2(T - u)h(T) + (T - u)^2 h'(T),$$

luego $g(u) = 0$. Por tanto u sería raíz común de f y g . Como $g(T) = 3T^2 + 1$, del apartado anterior deducimos que

$$0 = R(f, g) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 31,$$

que es imposible. Por tanto, f carece de raíces múltiples. □

Soluciones de las cuestiones

Clave: V = verdadero, F = falso

1V, 2F, 3F, 4V, 5F, 6V, 7F, 8F, 9F, 10V,
 11V, 12V, 13V, 14F, 15F, 16F, 17F, 18F, 19V, 20V,
 21F, 22F, 23F, 24V, 25V, 26F, 27V, 28V, 29V, 30V,
 31V, 32F, 33V, 34F, 35V, 36V, 37V, 38V, 39F, 40F,
 41V, 42V, 43V, 44V, 45F, 46F, 47V, 48V, 49F, 50V.

Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

Resumen. Este segundo capítulo cubre una materia básica: la definición y propiedades de los *espacios vectoriales* y de las *aplicaciones lineales*. El punto de apoyo para presentar estas nociones y demostrar los resultados principales es la teoría de sistemas de ecuaciones lineales desarrollada previamente, en especial las ideas básicas de combinación e independencia de ecuaciones. Además, así se da contenido geométrico a la teoría de matrices que ya conocemos. En la lección sexta se definen *espacios* y *subespacios vectoriales*, y la noción de *independencia lineal*. En la séptima se tratan los espacios de *tipo finito*, y se define la *dimensión*; esto incluye la introducción de *coordenadas* y de ecuaciones lineales. A partir de este momento cada noción y construcción nueva tendrá su tratamiento mediante ecuaciones. La octava lección se dedica a las operaciones con subespacios: *intersección*, *sumas* y *sumas directas*, y *cocientes*. Asimismo se demuestran las *fórmulas de Grassmann*. En la novena lección se definen las *aplicaciones lineales* y los conceptos asociados: *núcleo*, *imagen* y *factorización*. La décima y última lección del capítulo trata del *espacio dual*: el concepto y algunos de sus usos. Puede parecer algo más dificultosa que el resto, particularmente la *dualidad canónica*, pero como se advirtió en el prefacio, es siempre posible aligerarla limitándose a la *dualidad entre rectas e hiperplanos*.

6. Espacios vectoriales

Aquí definimos *espacio vectorial*. No hacemos casi nada más que eso, y revisar todos los ejemplos que de hecho hemos manejado en el capítulo anterior. Consideramos el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Aunque todo lo que digamos sea válido para otros cuerpos, como por ejemplo para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, relegaremos esta posible generalidad a algún ejercicio significativo.

Definiciones 6.1 Un *espacio vectorial sobre \mathbb{K}* , es un conjunto E (no vacío),

cuyos elementos denominamos *vectores*, dotado de dos operaciones, una denominada *suma* $+: E \times E \rightarrow E$, y otra denominada *producto por escalares* $\cdot: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$, que cumplen:

(i) La suma de vectores, las propiedades:

- *Conmutativa*: $u + v = v + u$, para cualesquiera $u, v \in E$.
- *Asociativa*: $u + (v + w) = (u + v) + w$, para cualesquiera $u, v, w \in E$.
- Existencia de *elemento neutro*: existe un elemento $0 \in E$ tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in E$.
- Existencia de *elemento opuesto*: para cada $u \in E$ existe $-u \in E$ tal que $u + (-u) = 0$.

(ii) El producto por escalares, las propiedades:

- *Distributiva* respecto de la suma de escalares: $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $u \in E$.
- *Asociativa* respecto del producto por escalares: $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $u \in E$.
- Existencia del *elemento unidad* $1 \in \mathbb{K}$: $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$.

(iii) La propiedad *distributiva* del producto por escalares respecto de la suma de vectores: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u, v \in E$.

En el caso en el que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, diremos que E es un *espacio vectorial real*, mientras que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diremos que E es un *espacio vectorial complejo*.

Una suma y un producto por escalares son las operaciones mínimas necesarias para tener una noción de combinación, como la que hemos utilizado repetidamente para ecuaciones lineales y para filas (o columnas) de matrices. En un espacio vectorial E se llama *combinación lineal* cualquier expresión de la forma

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r, \quad \text{con } u_i \in E, \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Hay muchas propiedades fáciles y que desde luego no nos sorprenden, pero que deben demostrarse rigurosamente en este contexto abstracto. Enumeramos las básicas a continuación.

Proposición 6.2 Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Se cumple:

- (1) El elemento neutro 0 es único.
- (2) $\lambda u = 0$ si y sólo si $\lambda = 0$ o $u = 0$.
- (3) $-u = (-1) \cdot u$ (esto muestra la unicidad del opuesto).
- (4) Si $\lambda u = \mu u$ y $u \neq 0$, entonces $\lambda = \mu$.
- (5) Si $\lambda u = \lambda v$ y $\lambda \neq 0$, entonces $u = v$.

Demostración. Para probar (1), supongamos que $0'$ es otro neutro. Entonces $0 + 0' = 0'$ por ser 0 neutro, y $0 + 0' = 0$ por ser $0'$ neutro, luego $0 = 0'$.

Veamos (2). Si $\lambda = 0$ tenemos

$$v = 0 \cdot u = (0 + 0)u = 0 \cdot u + 0 \cdot u = v + v,$$

y sumando $-v$ en cada miembro:

$$0 = (-v) + v = (-v) + (v + v) = ((-v) + v) + v = 0 + v = v.$$

De manera similar, si $u = 0$, entonces

$$v = \lambda \cdot 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = v + v,$$

y $v = 0$ como antes. Recíprocamente, si $\lambda u = 0$ y $\lambda \neq 0$, dividiendo por λ tenemos

$$u = 1 \cdot u = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0.$$

Para la igualdad (3) operamos así:

$$0 = (1 + (-1))u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = u + (-1) \cdot u,$$

y sumamos $-u$ en ambos miembros, con lo que $-u = (-1) \cdot u$.

Para probar (4), hacemos:

$$0 = \mu u + (-\mu u) = \lambda u + (-\mu u) = (\lambda - \mu)u,$$

y como $u \neq 0$ sabemos por (2) que esto implica $\lambda - \mu = 0$, o sea $\lambda = \mu$.

De manera análoga se deduce (5). Calculamos

$$0 = \lambda u + (-\lambda u) = \lambda v + (-\lambda u) = \lambda(v + (-u)),$$

y como $\lambda \neq 0$ resulta que $v + (-u) = 0$, luego $v = u$. \square

El modelo estándar de espacio vectorial ya lo conocemos en realidad:

(6.3) El espacio vectorial \mathbb{K}^n . Dado $n \geq 1$, consideramos el producto cartesiano

$$\mathbb{K}^n = \{u = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \text{ para } 1 \leq i \leq n\}.$$

En \mathbb{K}^n se definen *componente a componente* la suma y el producto por escalares, y se obtiene un espacio vectorial. Esto no es otra cosa que lo que hemos hecho con filas en el capítulo anterior: si $u = (x_1, \dots, x_n)$ y $v = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\begin{cases} u + v = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda u = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{cases}$$

\square

Observación 6.4 Lo anterior se puede formular en general del modo siguiente. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{K} . En el producto cartesiano $G = E \times F$ se define una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{K} haciendo las operaciones componente a componente: dados $w_1 = (u_1, v_1), w_2 = (u_2, v_2) \in G$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad \lambda(u_1, v_1) = (\lambda u_1, \lambda v_1).$$

Es completamente rutinario comprobar que, efectivamente, G es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Señalemos tan sólo que el vector nulo de G es $0 = (0, 0)$, esto es, el par formado por los vectores nulos de E y F . \square

Ejemplos 6.5 (1) Un caso particular de II.6.3, p. 144 es el “espacio físico” \mathbb{R}^3 , también llamado *espacio de los vectores libres* formado por las ternas de números reales

$$\mathbb{R}^3 = \{u = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Este es el espacio vectorial en el que “viven” las magnitudes vectoriales de la física clásica; por ejemplo, las fuerzas.

(2) Las matrices de tamaño fijado $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ constituyen un espacio vectorial con la suma de matrices y el producto de matrices por escalares definidos en la lección 3. En realidad, de las explicaciones dadas entonces, se deduce rápidamente que este espacio vectorial es “el mismo” que $\mathbb{K}^{m \times n}$.

(3) El conjunto $\mathbb{K}[T]$ de los polinomios en la variable T con coeficientes en \mathbb{K} , es un espacio vectorial con las operaciones conocidas de suma de polinomios y producto de polinomios por escalares.

(4) Sean I un conjunto no vacío y \mathbb{K}^I el conjunto formado por todas las aplicaciones $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Este conjunto es un espacio vectorial definiendo sus operaciones como sigue: (i) La suma de dos aplicaciones f, g es la aplicación $f + g : I \rightarrow \mathbb{K} : x \rightarrow f(x) + g(x)$, y (ii) el producto del escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ por la aplicación f es la aplicación $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{K} : x \rightarrow \lambda f(x)$.

(5) El cuerpo \mathbb{C} de los números complejos tiene estructura de espacio vectorial complejo y de espacio vectorial real. La suma es la misma en ambos casos, pero el producto por escalares no: en el primer caso multiplicamos por cualquier número complejo, mientras que en el segundo sólo por números reales. Son pues dos estructuras distintas. \square

Una forma frecuente de construir espacios vectoriales es hacerlo dentro de uno dado:

(6.6) Subespacios vectoriales. Sean E un espacio vectorial y $V \subset E$ un subconjunto con $0 \in V$. Las operaciones de E restringidas a V definen un nuevo espacio vectorial con tal que estén *bien* definidas en V . Esto significa simplemente que

$$\begin{cases} u + v \in V & \text{para cualesquiera } u, v \in V, \text{ y} \\ \lambda u \in V & \text{para cualesquiera } u \in V, \lambda \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Estas dos condiciones se pueden resumir en una sola:

$$\lambda u + \mu v \in V \quad \text{para cualesquiera } u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

En caso de cumplirse esto, decimos que V es un *subespacio vectorial* de E . Se debe destacar que dado $u \in V$, también $-u = (-1)u \in V$.

Señalemos aquí que $\{0\}$ es trivialmente un subespacio de E , que por eso mismo se denomina *trivial*.

Veamos a continuación cómo obtener subespacios del espacio \mathbb{K}^n .

(6.7) Sistemas lineales homogéneos. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y denotemos

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : Ax^t = 0\}$$

el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $Ax^t = 0$. Resulta que V es un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n , pues si $x, y \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, se cumple que $A(\lambda x + \mu y)^t = \lambda Ax^t + \mu Ay^t = 0$.

Por ejemplo, los vectores del tipo $(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$ constituyen un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n : son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $\{x_{d+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$.

Obsérvese que dos sistemas son equivalentes si y sólo si definen el mismo subespacio vectorial. \square

Hay que decir enseguida que esto no se puede hacer con ecuaciones no lineales. Por ejemplo, la circunferencia de \mathbb{K}^2

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

no es un subespacio vectorial. Para verlo, observamos que $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) \in \mathbb{S}^1$, y sin embargo $e_1 + e_2 \notin \mathbb{S}^1$; también se puede argumentar que $0 = (0, 0) \notin \mathbb{S}^1$. Este ejemplo puede no sorprender, pues es claramente una figura *no lineal*. Pero tampoco un par de rectas es subespacio: el subconjunto

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : xy = 0\}$$

contiene e_1 y e_2 , pero no su suma.

Ejemplos 6.8 (1) El plano

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$$

es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 . Podemos comprobar esto directamente, pues si $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ son vectores de V y λ, μ son números reales, el vector

$$(z_1, z_2, z_3) = z = \lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

también pertenece a V , ya que

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 + 2z_3 &= (\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2) + 2(\lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3) + \mu(y_1 - y_2 + 2y_3) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Pero podíamos haber evitado los cálculos anteriores observando que V es el conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, que en este caso consta de una única ecuación, y aplicar II.6.7, p. 145.

(2) Consideramos en el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de matrices cuadradas de orden n con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} , el subconjunto formado por las matrices *simétricas*, es decir, aquéllas que coinciden con su traspuesta, y el formado por las matrices *antisimétricas*, es decir, aquéllas que coinciden con la opuesta de su traspuesta. Denotamos

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = A^t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = -A^t\}.$$

Vamos a comprobar que son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ambos contienen a la matriz nula. Además, en el primer caso, dadas $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, también $\lambda A + \mu B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, ya que

$$(\lambda A + \mu B)^t = (\lambda A)^t + (\mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda A + \mu B,$$

y así, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Y en el segundo caso, si $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$:

$$(\lambda A + \mu B)^t = (\lambda A)^t + (\mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda(-A) + \mu(-B) = -(\lambda A + \mu B),$$

luego $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(3) El conjunto $\mathbb{K}_n[T]$ de los polinomios de grado $\leq n$ (incluido el polinomio nulo) constituye un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{K}[T]$ de los polinomios. Si $p \leq q$, entonces $\mathbb{K}_p[T]$ es subespacio de $\mathbb{K}_q[T]$.

Pero conviene señalar que el subconjunto $G_d[T] \subset \mathbb{K}[T]$ formado por los polinomios de grado fijado $d > 0$ no es subespacio vectorial: la suma de los polinomios T^d y $1 - T^d$ tiene grado $0 < d$.

(4) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Entonces, las funciones continuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ forman un subespacio $\mathcal{C}(I)$ del espacio \mathbb{R}^I (II.6.5(3), p. 145), ya que la suma de funciones continuas es continua, y el producto de una función continua por un escalar es también una función continua. Asimismo podemos considerar las funciones f derivables hasta el orden $k \geq 1$ (es decir, que existen y son continuas todas las derivadas sucesivas $f', f'', \dots, f^{(k)}$), y el subespacio que forman se denota $\mathcal{C}^k(I)$. También tenemos las funciones infinitamente derivables, es decir, con derivadas de todos los órdenes, que forman otro subespacio $\mathcal{C}^\infty(I)$. Se tiene:

$$\mathbb{R}^I \supset \mathcal{C}(I) \supset \dots \supset \mathcal{C}^k(I) \supset \mathcal{C}^{k+1}(I) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(I). \quad \square$$

En espacios vectoriales se formaliza inmediatamente la noción básica de dependencia:

Definición 6.9 Un vector u de un espacio vectorial E depende (linealmente) de otros dados $u_1, \dots, u_r \in E$ si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r.$$

Por ejemplo, el vector $u = (5, 2, 1) = 3(1, 0, -1) + 2(1, 1, 2)$ depende linealmente de los vectores $u_1 = (1, 0, -1)$ y $u_2 = (1, 1, 2)$.

Como ilustración, obsérvese que podemos redefinir los subespacios vectoriales de E como los subconjuntos que contienen las combinaciones lineales de sus elementos. Usaremos constantemente el hecho de que si un vector depende de otros y éstos de otros terceros, entonces el primero depende de los últimos:

$$\begin{cases} u = \sum_i \lambda_i v_i, \\ v_i = \sum_j \mu_{ij} w_j, \end{cases} \rightsquigarrow u = \sum_i \lambda_i \left(\sum_j \mu_{ij} w_j \right) = \sum_j \left(\sum_i \lambda_i \mu_{ij} \right) w_j.$$

(6.10) Sistemas lineales no homogéneos revisitados. Consideremos un sistema lineal no homogéneo de n ecuaciones con q incógnitas λ_i , digamos $B\lambda^t = x^t$. La compatibilidad del sistema se interpreta inmediatamente en términos de dependencia lineal. Para ello, consideremos las columnas de B como vectores de \mathbb{K}^n :

$$u = (x_1, \dots, x_n), \quad u_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj}), \quad j = 1, \dots, q.$$

Que el sistema tenga solución significa que existen escalares λ_i tales que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_q u_q,$$

es decir, u depende de u_1, \dots, u_q .

De esta manera si un subespacio $V \subset \mathbb{K}^n$ está descrito por un sistema homogéneo $Ax^t = 0$ (II.6.7, p. 145), al resolver el sistema y obtener las correspondientes ecuaciones paramétricas $x^t = B\lambda^t$, encontramos que V consiste exactamente en los vectores u que dependen de u_1, \dots, u_q (definidos como antes).

Por ejemplo, sea V el subespacio descrito por $x_{d+1} = \dots = x_n = 0$. Resolviendo obtenemos $x_1 = \lambda_1, \dots, x_d = \lambda_d, x_{d+1} = \dots = x_n = 0$, y en este caso

$$u_j = (0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, d.$$

Por tanto, los vectores de V son las combinaciones lineales de esos d vectores. \square

Definición 6.11 Se dice que los vectores $u_1, \dots, u_r \in E$ son *linealmente independientes* si ninguno de ellos depende linealmente de los demás. Para el caso de un sólo vector, convenimos en que *linealmente independiente* es sinónimo de no nulo.

Hay una forma alternativa muy útil de decir lo mismo:

Proposición 6.12 Los vectores $u_1, \dots, u_r \in E$ son *linealmente independientes* si y sólo si los únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ que cumplen la igualdad

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = 0,$$

son $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Se dice entonces que la combinación es trivial.

Demostración. Para un sólo vector no hace falta decir nada. Supongamos que $r > 1$ y que tenemos una combinación nula

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = 0.$$

Si no es trivial, hay algún coeficiente $\lambda_i \neq 0$, y podemos escribir

$$u_i = \sum_{j \neq i} \mu_j u_j, \quad \mu_j = -\lambda_j / \lambda_i,$$

de manera que u_i depende de los demás vectores. Recíprocamente, si el vector $u_i = \sum_{j \neq i} \mu_j u_j$ es combinación de los demás, la combinación $u_i - \sum_{j \neq i} \mu_j u_j = 0$ es nula pero no trivial. \square

Ejemplos 6.13 (1) Los vectores $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, -2, 0)$ y $u_3 = (0, 1, 1)$ son linealmente independientes, pues si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ cumplen que

$$(0, 0, 0) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_3),$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0, \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 & = 0. \end{cases}$$

Al sustituir en la segunda ecuación los valores $\lambda_2 = -\lambda_1$ y $\lambda_3 = -3\lambda_1$ que nos proporcionan las ecuaciones primera y tercera se obtiene

$$0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_1 = \lambda_1.$$

linealmente
dependiente
↗
A es laci
∃ a ∈ A /
a ∈ L(A) {a}

Se linealmente
independiente

Esto implica que también $\lambda_2 = -\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = -3\lambda_1 = 0$, lo que demuestra, por II.6.12, p. 149, que u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes.

(2) Un ejemplo mucho más relevante es el siguiente: en \mathbb{K}^n los vectores

$$e_i = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0), \quad (i = 1, \dots, n)$$

son independientes: si $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, resulta que todos los coeficientes λ_i son nulos.

(3) Una manera rápida de obtener vectores independientes es añadir a varios dados u_1, \dots, u_r que ya lo son otro u que no dependa de ellos. Esto ya lo hemos dicho para filas (I.2.11, p. 25), pero lo comprobamos de nuevo: si existiese una combinación nula no trivial

$$\lambda u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = 0,$$

necesariamente $\lambda \neq 0$, pues los u_i son independientes. Pero entonces u depende de u_1, \dots, u_r :

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda} u_r,$$

lo que contradice la hipótesis.

(6.14) Dependencia e independencia en \mathbb{K}^n . En el espacio \mathbb{K}^n ya conocemos muy bien estas nociones. En realidad, las combinaciones lineales (y la dependencia e independencia) de vectores en \mathbb{K}^n son exactamente las combinaciones (y la dependencia e independencia) de filas o de columnas que hemos analizado exhaustivamente en el capítulo anterior. Veamos cómo aplicar lo que sabemos de manera eficaz.

En primer lugar, dados varios vectores

$$u_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n \quad (j = 1, \dots, p)$$

consideramos la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, y obsérvese que elegimos representar los vectores mediante las columnas de A . Hacemos esto a la vista de las consideraciones de II.6.7, p. 145 y II.6.10, p. 148, y también para distinguir los vectores de las ecuaciones, que normalmente representamos como filas. Dicho esto, denotamos $r = \text{rg}(A)$.

(1) Entre los u_j hay $r \leq n$ vectores independientes, y no más.

Esto es evidente, ya que el rango r de A es el máximo número de columnas independientes de A , luego $r \leq n$.

(2) Si $r < n$, se puede encontrar un vector u que no depende de los u_j .

En efecto, se trata de añadir a A una columna b tal que $\text{rg}(A|b) = r + 1$. Para esto, elegimos un menor de orden $r < n$ no nulo de A . Reordenando las filas y columnas de A podemos suponer que dicho menor es el determinante de la submatriz de A que consiste en elegir sus primeras r filas y columnas.

Entonces, si añadimos a A la columna $b = (0, \dots, \overset{r+1}{1}, \dots, 0)^t$ obtenemos una matriz $(A|b)$ de rango $r + 1$.

(3) En particular n es el número máximo de vectores independientes del espacio vectorial \mathbb{K}^n . En efecto, ya sabíamos que los n vectores e_1, \dots, e_n son independientes, y (1) dice que en \mathbb{K}^n no hay más de n vectores independientes. \square

Ejemplos 6.15 (1) En el espacio vectorial \mathbb{K}^4 los vectores

$$u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1, 0), u_3 = (1, -1, -3, 3), u_4 = (-1, -6, -6, 1),$$

son linealmente dependientes, ya que en este caso

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 < 4.$$

De hecho, tenemos: $2u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0$, es decir, la ecuación

$$(*) \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$$

tiene la solución no trivial

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 1.$$

¿Cómo se obtiene esta relación entre los vectores dados? Cuando el número de vectores no es muy grande, como en este ejemplo, se puede ver tanteando, pero esto no es factible en situaciones que involucran más vectores. En tales casos se procede planteando la ecuación (*) de manera explícita:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto se expresa en forma de sistema de ecuaciones lineales como

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 6\lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 6\lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 - 5\lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Restando la tercera ecuación a la segunda se obtiene la cuarta, luego un sistema equivalente es

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_4, \\ \lambda_2 = \lambda_4, \\ \lambda_3 = -\lambda_4. \end{cases}$$

En particular, eligiendo el valor $\lambda_4 = 1$ obtenemos la relación buscada.

Destaquemos que procediendo de esta manera, la matriz del sistema homogéneo que habrá que resolver es precisamente la matriz A , y nos encontramos de nuevo con el Teorema de Rouché-Frobenius.

Nótese que cualquiera de los cuatro vectores dados es combinación lineal de los otros tres. Por ejemplo,

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4 \quad \text{y} \quad u_3 = 2u_1 + u_2 + u_4.$$

Esto es debido a que en la combinación lineal nula no trivial (*) de nuestros vectores, ningún coeficiente es nulo.

(2) Los vectores $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, -1, 3) \in \mathbb{K}^3$ son linealmente independientes. En efecto

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0,$$

luego $\text{rg}(A) = 3$.

(3) Cualesquiera polinomios no nulos todos de grados distintos son linealmente independientes en $\mathbb{K}[T]$.

En efecto, sean $f_j \in \mathbb{K}[T]$ polinomios de grados $d_j \geq 0$ todos distintos. Si tenemos una combinación lineal $\sum_j \lambda_j f_j$, podemos prescindir de los sumandos nulos, y elegir el grado mayor entre los polinomios que quedan, digamos que es d_{j_0} . Entonces todos los sumandos no nulos $\lambda_j f_j$ con $j \neq j_0$ tienen grado menor

que d_{j_0} , que es el grado del sumando $\lambda_{j_0} f_{j_0}$. En consecuencia el monomio de grado d_{j_0} de la suma $\sum_j \lambda_j f_j$ es el de f_{j_0} multiplicado por λ_{j_0} , luego es no nulo, con lo que la suma es no nula también.

(4) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, y sea $V = \mathcal{C}^\infty(I)$ como en II.6.8(3), p. 147. Se llama *wronskiano* de $f_1, \dots, f_n \in V$ a la función

$$W(f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Si f_1, \dots, f_n son linealmente dependientes entonces $W(f_1, \dots, f_n)$ es la función nula. En efecto, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales que para cada $t \in I$,

$$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) = 0.$$

Derivando sucesivamente esta identidad tenemos, para cada $t \in I$,

$$\lambda_1 f_1^{(j)}(t) + \dots + \lambda_n f_n^{(j)}(t) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Esto es lo mismo que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_1'(t) \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_n(t) \\ f_n'(t) \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto, para cada $t \in I$,

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = 0.$$

(5) Como caso particular del anterior vamos a demostrar que las tres funciones e^t , $\sin t$ y $\cos t$ son linealmente independientes. Para ello calculamos su

wronskiano:

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} e^t & \operatorname{sen} t & \cos t \\ e^t & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ e^t & -\operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix} = e^t \det \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} t & \cos t \\ 1 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 1 & -\operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix} \\ &= 2e^t \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 1 & -\operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix} = -2e^t, \end{aligned}$$

que de hecho no se anula en ningún $t \in \mathbb{R}$. □

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Consideremos el conjunto \mathbb{R}^2 con la operación interna:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

y una de las siguientes operaciones externas:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, 0), \quad (\lambda x, \lambda y), \quad (\lambda + \lambda x - 1, \lambda + \lambda y - 1), \quad \text{o} \quad (\lambda y, \lambda x).$$

Decidir en cada caso si las operaciones definen una estructura de espacio vectorial en \mathbb{R}^2 .

Número 2. En \mathbb{K}^3 definimos las operaciones *suma* \boxplus y *producto por escalares* $*$ como sigue:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \boxplus (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 + 3), \\ \lambda * (x_1, x_2, x_3) &= (\lambda x_1 + \lambda - 1, \lambda x_2 - \lambda + 1, \lambda x_3 + 3\lambda - 3). \end{aligned}$$

Demostrar que las operaciones \boxplus y $*$ confieren a \mathbb{K}^3 estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} .

Número 3. Escribir la matriz E como combinación lineal de las matrices A , B y C , siendo

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Número 4. Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E , ambos distintos de E . Demostrar que $V_1 \cup V_2 \neq E$.

Número 5. Estudiar la dependencia lineal de los vectores:

- (1) $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 3, 4, 1)$, $u_3 = (3, 1, 0, 4)$, $u_4 = (5, 1, 2, 1)$ en \mathbb{K}^4 ,
- (2) $f_1 = T^3$, $f_2 = T^2 + T^3$, $f_3 = 2 + T + T^3$, $f_4 = 6 + 3T + T^2 + 6T^3$ en $\mathbb{K}[T]$.

Número 6. (1) Determinar los valores de los números reales a y b para que el vector $u = (1, 4, a, b)$ sea combinación lineal de los vectores $v = (1, 2, -1, 2)$ y $w = (0, 1, 2, 1)$.

(2) Demostrar que para cualesquiera números reales a, b y c , los vectores $u = (1, a, b)$, $v = (0, 1, c)$ y $w = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

(3) ¿Para qué valores de los números reales a, b , son linealmente independientes los vectores $u = (1, 1, 0, a)$, $v = (3, -1, b, -1)$ y $c = (-3, 5, a, -4)$?

Número 7. Sean $\{u_1, \dots, u_n\}$ vectores linealmente independientes en un espacio vectorial E . Se definen nuevos vectores

$$v_1 = u_1, v_j = u_1 - \sum_{i=2}^j u_i, \quad \text{para } 2 \leq j \leq n.$$

Estudiar si los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ son también linealmente independientes.

Número 8. Sean u_1, u_2, u_3 y u_4 vectores de \mathbb{K}^n tales que las ternas de vectores


$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}, \quad \{u_2, u_3, u_4\},$$

son linealmente independientes. ¿Se puede asegurar que también son linealmente independientes los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$?

Número 9. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ y considérense los tres vectores

$$u_1 = (a, a^2, a^3), \quad u_2 = (b, b^2, b^3), \quad u_3 = (c, c^2, c^3).$$

¿Qué debe cumplirse para que sean linealmente independientes?

 **Número 10.** En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formado por todas las funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se consideran las siguientes

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1, & \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin x, & \quad f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \cos x, \\ f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin^2 x, & \quad f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin(x+2), & \quad f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \cos^2 x. \end{aligned}$$

¿Cuál es el máximo número de ellas linealmente independientes?

Número 11. Consideremos el espacio vectorial real $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de II.6.8(3), p. 147, y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el subconjunto

$$V_\lambda = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = \lambda\}.$$

¿Para qué valores de λ es V_λ un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

Número 12. Determinar en cada uno de los casos siguientes si el subconjunto V del espacio vectorial E es un subespacio vectorial.

- (1) $E = \mathbb{K}^5$ y $V = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{K}^5 : x_1 + 2x_3 - x_4 = x_2 + 3x_3 - 4x_5 = 0\}$.
- (2) $E = \mathbb{K}^n$ y $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 + \dots + x_n = 3\}$.
- (3) $E = \mathbb{K}^3$ y $V = \{(1+a+b, 1-a, 1-b) \in \mathbb{K}^3 : a, b \in \mathbb{K}\}$.
- (4) $E = \mathbb{K}^n$ y $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_i \leq 0, 1 \leq i \leq n\}$.
- (5) $E = \mathbb{K}^3$ y $V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{K}^3 : t \in \mathbb{K}\}$.

Número 13. ¿Es el conjunto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : 3x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ un subespacio vectorial de \mathbb{K}^3 ? ¿Qué subespacios de \mathbb{K}^3 contienen a T ?

🚧 **Número 14.** Calcular todas las n -uplas de números complejos x_1, \dots, x_n tales que

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n, \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n, \\ \vdots \\ x_1^n + \dots + x_n^n = n. \end{cases}$$

🚧 **Número 15.** Una matriz cuadrada de orden ≥ 3 se dice *mágica* si, todas sus filas suman lo mismo, y lo mismo que las columnas, y lo mismo que las dos diagonales mayores. Encontrar todas las matrices mágicas de orden 3 cuyos coeficientes sean los números naturales comprendidos entre 1 y 9.

7. Espacios vectoriales de tipo finito

Sea E un espacio vectorial. Para definir la noción de finitud que es relevante en nuestro contexto utilizamos combinaciones lineales:

Definición 7.1 Un espacio vectorial E se denomina *de tipo finito* si existe una colección finita de vectores $u_1, \dots, u_q \in E$ de manera que todo vector $u \in E$ es combinación lineal de ellos; denotaremos $E = L[u_1, \dots, u_q]$. Una tal colección se llama *sistema de generadores* de E (y se dice que los u_j *generan* el espacio vectorial E).

Como era de esperar, nuestro modelo estándar \mathbb{K}^n es un espacio de tipo finito, pues cada vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se puede escribir como

$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad e_i = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0),$$

esto es: $\mathbb{K}^n = L[e_1, \dots, e_n]$.

Observación 7.2 De nuevo, podemos extender lo anterior al producto de espacios vectoriales $G = E \times F$ (II.6.4, p. 144): *si E y F son de tipo finito, lo es G .*

En efecto, todo vector $w = (u, v) \in G$ se escribe $w = (u, 0) + (0, v)$, luego si ciertos vectores u_1, \dots, u_m generan E y v_1, \dots, v_n generan F existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m \quad \text{y} \quad v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n,$$

de donde deducimos que

$$w = (u, 0) + (0, v) = \lambda_1(u_1, 0) + \cdots + \lambda_m(u_m, 0) + \mu_1(0, v_1) + \cdots + \mu_n(0, v_n),$$

por lo que los pares $(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), (0, v_n)$ constituyen un sistema generador finito de G . \square

Revisemos los otros ejemplos que hemos visto hasta ahora:

Ejemplos 7.3 (1) Como caso particular de lo visto anteriormente, el espacio ordinario \mathbb{R}^3 es un \mathbb{R} -espacio vectorial de tipo finito, pues un sistema de generadores es el formado por los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1).$$

(2) El espacio de matrices $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es de tipo finito. Ya hemos señalado antes que, en realidad, éste es el modelo estándar $\mathbb{K}^{m \times n}$, pero podemos escribir explícitamente un sistema de generadores:

$$\{\Delta_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

donde Δ_{ij} es la matriz cuyos coeficientes son nulos, excepto el de lugar (i, j) , que es 1, ya que cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ se escribe

$$A = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

(3) El espacio de polinomios $\mathbb{K}[T]$ no es de tipo finito, pues dados polinomios f_1, \dots, f_r , ninguna combinación lineal suya tiene grado mayor que el máximo grado de los f_i . En cambio el espacio $\mathbb{K}_n[T]$ de los polinomios de grado $\leq n$ sí es de tipo finito: los monomios $1, T, \dots, T^n$ lo generan.

(4) Sea \mathbb{K}^I el espacio de todas las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Este espacio no es de tipo finito cuando I es infinito. La razón es esencialmente la misma de (3), pero la formalización requiere más atención. El argumento que sigue se aplica también a los espacios $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{C}^k(I)$ y $\mathcal{C}^\infty(I)$ cuando I es un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Se trata de comprobar que para cualesquiera funciones $f_1, \dots, f_q : I \rightarrow \mathbb{K}$ que elijamos, podemos encontrar otra $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ que no depende de ellas.

Por hipótesis sobre I , existen $n = q + 1$ elementos distintos $t_1, \dots, t_n \in I$, y consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} f_1(t_1) & \dots & f_1(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_q(t_1) & \dots & f_q(t_n) \end{pmatrix}.$$

Su rango es $\leq q < n$, luego podemos añadirle una fila independiente, digamos (a_1, \dots, a_n) (véase lo que se hizo con columnas en II.6.14(3), p. 151). Finalmente, consideramos cualquier función $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$f(t_1) = a_1, \dots, f(t_n) = a_n,$$

y afirmamos que no depende de las f_i . En efecto, supongamos que se puede escribir $f = \sum_i \lambda_i f_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, es decir, $f(t) = \sum_i \lambda_i f_i(t)$ para cada $t \in I$. Se deduce:

$$(a_1, \dots, a_n) = (f(t_1), \dots, f(t_n)) = \sum_i \lambda_i (f_i(t_1), \dots, f_i(t_n)),$$

contra la independencia de la fila elegida.

(5) El cuerpo $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ de los números complejos es de tipo finito como espacio vectorial real: cada número complejo $z = x + y\sqrt{-1}$ es combinación lineal con coeficientes números reales de la unidad real 1 y la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. Escribimos $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. \square

Los espacios de tipo finito son el objeto principal de nuestro estudio. Veremos que en realidad se comportan como el modelo estándar \mathbb{K}^n . Para llegar a esta conclusión, debemos estudiar con atención el comportamiento de los sistemas de generadores.

(7.4) Sistemas de generadores en \mathbb{K}^n . Ya sabemos que \mathbb{K}^n es de tipo finito, pero queremos además reconocer cuándo una colección de vectores u_1, \dots, u_q genera el espacio, es decir, cuándo $\mathbb{K}^n = L[u_1, \dots, u_q]$. Aquí nos encontramos con los sistemas lineales no homogéneos. Supongamos dados

$$u_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n \quad (j = 1, \dots, q),$$

y estudiemos cuándo un vector $u = (b_1, \dots, b_n)$ es combinación lineal de los vectores u_j :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_q u_q.$$

Igualando las componentes de ambos miembros, obtenemos el siguiente sistema lineal no homogéneo:

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1q}\lambda_q, \\ \vdots \\ b_n = a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nq}\lambda_q, \end{cases}$$

cuya matriz $n \times q$ es $A = (a_{ij})$. Por tanto, u es combinación de u_1, \dots, u_q si y sólo si el sistema tiene solución. En consecuencia, $\mathbb{K}^n = L[u_1, \dots, u_q]$ si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$ para cualquier columna que añadamos a la matriz A . Como A tiene n filas, esto desde luego se cumple si $\text{rg}(A) = n$. Pero si $\text{rg}(A) < n$, siempre existe una columna b de modo que $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A) + 1$ (II.6.14(3), p. 151), luego concluimos:

- (1) Los vectores u_1, \dots, u_q generan \mathbb{K}^n si y sólo si $\text{rg}(A) = n$.

Puesto que $\text{rg}(A) \leq q$ deducimos de lo anterior:

- (2) El número mínimo de generadores de \mathbb{K}^n es n .

Ya sabíamos que \mathbb{K}^n está generado con n vectores (e_1, \dots, e_n) , pero ahora añadimos que no puede generarse con menos.

- (3) Por último, n generadores de \mathbb{K}^n son siempre independientes, y n vectores independientes necesariamente generan \mathbb{K}^n .

En efecto, por II.6.14(1), p. 150, n vectores son independientes si y sólo si el rango de la matriz cuyas columnas son dichos vectores es n , si y sólo si esos vectores generan \mathbb{K}^n . \square

Ejemplo 7.5 Consideremos en \mathbb{K}^3 los vectores

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 1), \quad u_4 = (4, 3, 5), \quad u_5 = (5, 4, 3).$$

Se trata de un sistema de generadores de \mathbb{K}^3 ya que la matriz que forman

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3. Ahora bien, sabemos que esto significa que se pueden elegir tres columnas independientes en A , de las que dependen las otras dos. Por ejemplo las tres primeras forman un menor de orden 3 no nulo, luego podemos elegir

u_1, u_2, u_3 . Tampoco es difícil comprobar que cada vector $u = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ se escribe como combinación lineal

$$u = (y - z)u_1 + (y - x)u_2 + (x - y + z)u_3,$$

lo que muestra que también u_1, u_2, u_3 generan \mathbb{K}^3 . Así pues, vemos que un mismo espacio puede tener varios sistemas de generadores, y con diferente número de vectores. Sin embargo reconocemos la diferencia: en este caso los vectores de partida no son independientes. \square

El ejemplo anterior ilustra la noción esencial de toda la discusión que va a seguir:

Definición 7.6 Se llama *base* de un espacio vectorial un sistema *ordenado* de generadores formado por vectores independientes.

Todo espacio no trivial de tipo finito E tiene una base: si $E = L[u_1, \dots, u_q]$, se prescinde sucesivamente de los u_j que dependan de los otros, hasta obtener una colección de vectores independientes. Recuerdese que, como señalamos en II.6.9, p. 148, si un vector depende de otros y éstos de otros terceros, entonces el primero depende de los últimos.

Ejemplos 7.7 (1) Los vectores e_1, \dots, e_n son una base de \mathbb{K}^n , llamada base *estándar*, que denotaremos \mathcal{E}_n , o simplemente \mathcal{E} . En particular la base estándar de \mathbb{R}^3 está formada por los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.

(2) Las matrices $\Delta_{ij} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ de II.7.3, p. 157, forman una base, denominada *estándar*, del espacio de matrices $m \times n$.

(3) Los polinomios $1, T, \dots, T^n$ son una base, como otras anteriores también denominada *estándar*, del espacio vectorial $\mathbb{K}_n[T]$ de los polinomios de grado $\leq n$.

(4) Una base de \mathbb{C} como espacio vectorial complejo es $\{1\}$, y $\{1, \sqrt{-1}\}$ es una base de \mathbb{C} como espacio vectorial real. \square

La importancia de las bases es que permiten tratar los espacios de tipo finito como modelos estándar \mathbb{K}^n . Para ello se empieza con la siguiente construcción.

requisitos:
• ser un sistema de generadores
• estar formado por vectores independientes

(7.8) Coordenadas. Supongamos que $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de E . Entonces:

(1) Cada vector $u \in E$ se escribe

$$u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K},$$

y esta expresión es única. Los coeficientes (x_1, \dots, x_n) se llaman *coordenadas* de u respecto de \mathcal{B} .

En efecto, la existencia de los coeficientes x_i se debe a que $E = L[u_1, \dots, u_n]$, y en cuanto a la unicidad, si

$$x_1u_1 + \dots + x_nu_n = x'_1u_1 + \dots + x'_nu_n,$$

entonces

$$(x_1 - x'_1)u_1 + \dots + (x_n - x'_n)u_n = 0,$$

y por la independencia de los u_i , $x_i = x'_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

(2) Sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, son las coordenadas de u y v , entonces las coordenadas de $\lambda u + \mu v$ son

$$(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y,$$

ya que al ser $u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ y $v = y_1u_1 + \dots + y_nu_n$ se tiene

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu y_1)u_1 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n)u_n. \quad \square$$

Ejemplo 7.9 En un espacio vectorial hay por supuesto muchas bases diferentes, y las coordenadas respecto de unas y otras son asimismo diferentes. Por ejemplo, las coordenadas del vector $(5, 4, 3) \in \mathbb{K}^3$ respecto de la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$ son precisamente $(5, 4, 3)$, pero respecto de la base que forman los vectores

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 1, 0)$$

son otras. En efecto, se tiene

$$(5, 4, 3) = 5(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1) - 4(0, 1, 0) = 5u_1 + 3u_2 - 4u_3,$$

luego las nuevas coordenadas son $(5, 3, -4)$. Ya estudiaremos luego qué relación hay entre las coordenadas de un mismo vector respecto de bases diferentes. \square

Nos damos ahora cuenta de por qué una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ remite el estudio de un espacio de tipo finito E al del modelo estándar \mathbb{K}^n : cada vector $u \in E$ se puede identificar con sus coordenadas x respecto de \mathcal{B} , y se opera con ellas como elementos de \mathbb{K}^n para todo lo que se refiera a combinaciones lineales, es decir, para todo lo que se refiera a la estructura de espacio vectorial. Esto, por supuesto, incluye la dependencia y la independencia lineales. De hecho, de II.6.14(1), p. 150 y II.7.4(1), p. 159 se deduce lo siguiente:

Sean v_1, \dots, v_r vectores de un espacio vectorial de tipo finito E de modo que las coordenadas de cada v_j respecto de cierta base \mathcal{B} de E son (a_{1j}, \dots, a_{nj}) . Entonces

- (1) v_1, \dots, v_r son independientes si y sólo si $\text{rg}(a_{ij}) = r$.
- (2) v_1, \dots, v_r generan E si y sólo si $\text{rg}(a_{ij}) = n$.

Como la matriz $A = (a_{ij})$ tiene n filas, su rango no puede exceder n , luego el número de vectores independientes es $\leq n$, y el de generadores es $\geq n$. Así, cualquier base de E tiene exactamente n vectores. Hemos obtenido la noción fundamental:

Proposición y Definición 7.10 *Todas las bases de un espacio vectorial E de tipo finito tienen el mismo número de vectores.*

Ese número se llama dimensión de E , y se denota $\dim(E)$. Si $\dim(E) = 1$ decimos que E es una recta, y si $\dim(E) = 2$ que es un plano. Convenimos en que la dimensión del espacio vectorial trivial $\{0\}$ es cero.

Ejemplos 7.11 (1) Por II.7.7, p. 160, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$. En particular la dimensión de \mathbb{R}^3 como \mathbb{R} -espacio vectorial es 3. Además, $\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = mn$.

(2) Si E y F son espacios vectoriales de tipo finito, entonces

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

En efecto, en II.7.2, p. 156, vimos que si los vectores u_1, \dots, u_n generan E , y v_1, \dots, v_m generan F , entonces los $n+m$ vectores $(u_i, 0), (0, v_j)$ generan $E \times F$. Falta ver pues que si los u_i son una base de E y los v_j una de F , entonces los $(u_i, 0), (0, v_j)$ son independientes. Pero si tenemos una combinación lineal nula de esos vectores y operamos con ella resulta:

$$(0, 0) = \sum_i \lambda_i (u_i, 0) + \sum_j \mu_j (0, v_j) = \left(\sum_i \lambda_i u_i, 0 \right) + \left(0, \sum_j \mu_j v_j \right),$$

luego $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ y $\sum_j \mu_j v_j = 0$. Como los u_i y los v_j son independientes, concluimos que todos los coeficientes λ_i y μ_j son nulos.

(3) Para polinomios, $\dim(\mathbb{K}_n[T]) = n + 1$, pues vimos en II.7.7, p. 160 que una de sus bases es $\{1, T, \dots, T^n\}$.

(4) Los números complejos \mathbb{C} tienen, por supuesto, dimensión 1 como espacio vectorial complejo, pero dimensión 2 como espacio vectorial real (ya hemos dicho que $\{1, \sqrt{-1}\}$ es una base de \mathbb{C} sobre \mathbb{R}).

Completamos esta discusión comparando coordenadas respecto de bases distintas.

(7.12) Matriz de cambio de base. Sea E un espacio vectorial de tipo finito y sean $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ dos bases de E . Como \mathcal{B}' es base de E cada vector u_j se escribe, de modo único, como combinación lineal de los vectores de la base \mathcal{B}' :

$$u_j = c_{1j}v_1 + \dots + c_{nj}v_n.$$

(1) Se llama *matriz de cambio de base*, y se denota $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = (c_{ij})$, a la matriz cuya columna j -ésima está formada por las coordenadas respecto de la base \mathcal{B}' del vector u_j . Nótese que, en la definición anterior, el orden en que se escriben las bases, esto es, primero \mathcal{B} y luego \mathcal{B}' , es muy relevante. Esta matriz $C = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ cumple la siguiente propiedad.

(2) Para cada vector $u \in E$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} y \mathcal{B}' denotamos (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) respectivamente, se tiene $y^t = Cx^t$.

En efecto, sin más que sustituir se tiene

$$u = \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i v_i, \\ \sum_{j=1}^n x_j u_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right) v_i. \end{cases}$$

Por tanto, por la unicidad de las coordenadas,

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \quad \text{para todo } i,$$

que es la igualdad matricial $y^t = Cx^t$ buscada.

Además, la matriz de cambio de base es la única que satisface la propiedad anterior. Con toda precisión, se cumple:

(3) Sea $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz tal que para cada vector $u \in E$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} y \mathcal{B}' denotamos (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) respectivamente, cumple $y^t = Mx^t$. Entonces, $M = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

En efecto, observamos que las coordenadas respecto de la base \mathcal{B} del vector u_j son $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con el 1 en el lugar j -ésimo. Por tanto sus coordenadas respecto de la base \mathcal{B}' se obtienen calculando el producto Me_j^t , y ese producto es la columna j -ésima de M . Pero ya sabemos que las coordenadas de u_j respecto de \mathcal{B}' constituyen la j -ésima columna de $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, lo que prueba la igualdad $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = M$.

(4) Obsérvese que si $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, entonces $C = I_n$. Además, si \mathcal{B}'' es otra base, y $C' = C(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$, entonces $C'C = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$.

En efecto, denotando x , y y z , respectivamente, las coordenadas de un vector cualquiera $u \in E$ respecto de las bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' y \mathcal{B}'' , tenemos

$$z^t = C'y^t = C'(Cx^t) = (C'C)x^t,$$

y por la unicidad vista en (3), $C'C = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$.

(5) Aplicando lo anterior a $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$, obtenemos $C'C = I_n$, es decir, la matriz de cambio de base es invertible, y su inversa es la matriz del cambio de base en orden contrario. \square

Ya se ha dicho cómo de cualquier sistema de generadores se puede obtener una base. A modo de recíproco, muy importante, tenemos lo siguiente:

Proposición 7.13 (Teorema de prolongación) Sea $E = L[u_1, \dots, u_q]$ un espacio vectorial de tipo finito, con $\dim(E) = n$. Si los vectores v_1, \dots, v_r son independientes, entonces existen $u_{i_1}, \dots, u_{i_{n-r}}$ de modo que

$$v_1, \dots, v_r, u_{i_1}, \dots, u_{i_{n-r}}$$

son una base.

Demostración. Si los v_j generan E , hemos terminado. En otro caso, hay algún u_i que no depende de los v_j , digamos que u_{i_1} . Pero entonces v_1, \dots, v_r, u_{i_1} son

independientes. Repitiendo este argumento añadiremos vectores u_i hasta obtener la base buscada. En efecto, en cada paso obtenemos vectores independientes, luego no generarán E hasta ser el número justo, es decir, $n = r + (n - r)$. \square

Ejemplo 7.14 Los vectores $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1) \in \mathbb{K}^3$ son independientes, luego se les puede añadir uno e_i de la base estándar \mathcal{E} para obtener una base. De hecho, añadir un vector $v_3 \in \mathbb{K}^3$ al azar es con toda probabilidad una elección adecuada para obtener una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Veamos por qué. Se trata de que $v_3 = (a, b, c)$ no sea combinación lineal de v_1 y v_2 . Las combinaciones lineales de estos dos vectores son de la forma $\lambda v_1 + \mu v_2 = (\lambda, \lambda + \mu, \mu)$, cuya segunda coordenada es suma de la primera y la tercera. Por tanto, eligiendo a, b y c de modo que $a + c \neq b$, el conjunto v_1, v_2, v_3 es base de \mathbb{K}^3 . En particular cualquiera de los tres vectores $e_i \in \mathcal{E}$ es una elección acertada.

Por otra parte, también es base de \mathbb{K}^3

$$\mathcal{B}' = \{w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 0)\},$$

y vamos a obtener ahora la matriz de cambio de base $C = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Se tiene:

$v_1 = w_2$, por lo que las coordenadas de v_1 respecto de \mathcal{B}' son $(0, 1, 0)$.

$v_2 = w_1 - w_3$, luego las coordenadas de v_2 respecto de \mathcal{B}' son $(1, 0, -1)$.

$v_3 = cw_1 + (b - c)w_2 + (a - b)w_3$, y las coordenadas de v_3 respecto de \mathcal{B}' son $(c, b - c, a - b)$.

En consecuencia:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & b - c \\ 0 & -1 & a - b \end{pmatrix}.$$

Como hemos dicho, esta matriz tiene que ser invertible, es decir, tener determinante no nulo, pero:

$$\det(C) = -a + b - c \neq 0,$$

que es la condición para elegir el tercer vector independiente v_3 . \square

Proposición y Definición 7.15 *Todo subespacio V de un espacio de tipo finito E es de tipo finito. Además*

$$\dim(V) \leq \dim(E),$$

y la igualdad sólo se da si $V = E$. De hecho, cualquier base de V se puede extender a una base de E .

La diferencia de dimensiones $\dim(E) - \dim(V)$ se llama *codimensión* de V y se denota $\text{codim}(V)$. Un subespacio de codimensión 1 se llama *hiperplano*.

Demostración. Podemos suponer que $V \neq \{0\}$, y denotamos $n = \dim(E)$. Sea $u_1, \dots, u_r \in V$ una colección de vectores independientes (en el peor de los casos siempre podemos empezar con un vector no nulo u_1). Si esos u_j generan V , este espacio es de tipo finito. En otro caso, existirá $u_{r+1} \in V$ que no depende de ellos, luego $u_1, \dots, u_r, u_{r+1} \in V$ son independientes. Y volvemos a empezar: si esos $r+1$ vectores generan V , ya está, si no, tomamos un vector que no dependa de ellos. Este proceso no puede proseguir indefinidamente, pues no podremos nunca producir más de n vectores independientes (pues no los hay en E). Así, cuando el proceso acaba obtenemos una base de V con $d = \dim(V) \leq n$ vectores. Pero si $d = n$, entonces se trata del número máximo de vectores independientes de E , luego son una base de E , y concluimos $V = E$.

La última afirmación del enunciado es consecuencia inmediata del teorema de prolongación II.7.13, p. 164. \square

El resultado anterior permite expresar todos los subespacios de un espacio de tipo finito mediante ecuaciones lineales. Veremos que existen dos tipos de ecuaciones, unas llamadas *paramétricas* y otras denominadas *implícitas*, cuyo significado explicamos a continuación.

(7.16) Ecuaciones paramétricas e implícitas. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y fijemos una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ en E y un subespacio vectorial V de E . Para evitar situaciones triviales supondremos que $V \neq E$ y $V \neq \{0\}$. Por II.7.15, p. 165, V es también de tipo finito, luego existe un sistema de generadores $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V . Para lo que sigue no es necesario que constituyan una base de V . Ahora, un vector v de E pertenece a V si y sólo si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s. \quad (*)$$

Si $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ y cada $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$, la igualdad $(*)$ se escribe

$$\sum_{i=1}^n x_i u_i = v = \sum_{j=1}^s \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^s \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^s \lambda_j a_{ij} \right) u_i.$$

De la unicidad de las coordenadas se deducen las igualdades $x_i = \sum_{j=1}^s \lambda_j a_{ij}$ para cada $i = 1, \dots, n$. En forma matricial esto se suele abreviar escribiendo

$$V : \begin{cases} x_1 &= a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1s}\lambda_s, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_n &= a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{ns}\lambda_s, \end{cases}$$

y se dice que las anteriores son unas *ecuaciones paramétricas de V respecto de la base \mathcal{B}* . Los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ se denominan *parámetros*, y es conveniente recordar que las columnas de estas ecuaciones son las coordenadas respecto de \mathcal{B} de los vectores v_1, \dots, v_s , que constituyen un sistema generador de V .

A partir de unas ecuaciones paramétricas de V podemos calcular su dimensión, que es el número de vectores independientes entre v_1, \dots, v_s , es decir,

$$\dim(V) = \text{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

En particular, si $\{v_1, \dots, v_s\}$ es una base de V , entonces el número s de parámetros es la dimensión de V .

Las ecuaciones paramétricas de V permiten encontrar otras, que denominamos implícitas. Observamos que el vector $u \in E$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} son (x_1, \dots, x_n) pertenece a V si y sólo si el sistema anterior en las incógnitas $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ es compatible. Esto equivale, por el Teorema de Rouché-Frobenius, I.2.16, p. 28, y denotando $A = (a_{ij})$ y $\text{rg}(A) = \rho$, a que

$$V = \{u \in V : \text{rg}(A|x^t) = \rho\}.$$

La igualdad $\text{rg}(A|x^t) = \rho$ son en realidad “muchas igualdades”: las que resultan de igualar a 0 todos los menores de orden $\rho + 1$ de la matriz $(A|x^t)$; se denominan *unas ecuaciones implícitas de V* , y adoptan la forma

$$V : \begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Denotamos $C = (c_{ij})$ y $r = \text{rg}(C)$, y vamos a demostrar que $\dim(V) = n - r$. Según vimos en I.1.11, p. 11, este sistema de ecuaciones es equivalente a otro escalonado reducido:

$$V : \begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{2n}x_n, \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n. \end{cases}$$

Estas ecuaciones proporcionan unas ecuaciones paramétricas de V , sin más que escribir:

$$V : \begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n, \\ x_2 = \alpha_{2,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n, \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{r,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}\lambda_n, \\ x_{r+1} = \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n \end{cases}$$

y por lo demostrado anteriormente,

$$\dim(V) = \text{rg} \begin{pmatrix} \alpha_{1,r+1} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r,r+1} & \cdots & \cdots & \alpha_{rn} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = n - r = n - \text{rg}(C).$$

Obsérvese que, como $\text{rg}(C) = n - \dim(V) = \text{codim}(V)$, el subespacio V no puede describirse con menos de $\text{codim}(V)$ ecuaciones implícitas.

Ejemplo 7.17 (1) Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ una base del espacio vectorial E y V el subespacio generado por los vectores

$$v_1 = u_1 + u_3 + u_4, \quad v_2 = u_2 + u_5, \quad v_3 = 2u_2 - u_3 + u_4, \quad v_4 = u_1 + 3u_2 + 2u_4 + u_5.$$

Queremos obtener una base de V y ecuaciones paramétricas e implícitas suyas respecto de la base \mathcal{B} .

El subespacio V está generado por los tres primeros vectores, pues $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$, que además son linealmente independientes, y por tanto forman una base de V , ya que el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyas columnas son las coordenadas de los vectores v_1, v_2 y v_3 respecto de \mathcal{B} es 3 (el menor formado por las tres primeras filas es no nulo). Por tanto $\dim(V) = 3$ y unas ecuaciones paramétricas suyas respecto de la base \mathcal{B} son

$$(*) \begin{cases} x_1 = \lambda_1, \\ x_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \\ x_3 = \lambda_1 - \lambda_3, \\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_3, \\ x_5 = \lambda_2. \end{cases}$$

Para obtener unas ecuaciones implícitas basta observar que un vector $v \in V$ si y sólo si v es combinación lineal de v_1, v_2, v_3 , o lo que es lo mismo,

$$3 = \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 0 & -1 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ o sea, } 0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 0 & -1 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 0 & -1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al desarrollar estos determinantes resultan las ecuaciones

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = 0, \end{cases}$$

que constituyen un sistema de ecuaciones implícitas de V .

(2) Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ una base del espacio vectorial E y V el subespacio con las siguientes ecuaciones implícitas respecto de \mathcal{B} :

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Vamos a calcular una base de V y unas ecuaciones paramétricas. Se aprecia a simple vista que la suma de las ecuaciones primera y cuarta coincide con la suma de la segunda y la tercera, luego una de las cuatro es superflua, por ejemplo la última. Tras eliminar esta ecuación, la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 3 por ser no nulo el determinante de la submatriz formada por sus 3 primeras columnas. De aquí deducimos que $\dim(V) = 5 - \text{rg}(A) = 2$.

Además, denotando $x_4 = \lambda$ y $x_5 = \mu$ resulta

$$\begin{cases} x_2 & & & & & = & \lambda & + & \mu, \\ x_1 & & - & x_3 & & = & & & \mu, \\ x_1 & & & & & = & \lambda & - & \mu, \\ & & & x_4 & & = & \lambda, \\ & & & & x_5 & = & & & \mu, \end{cases}$$

y despejando x_3 obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas de V

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda & - & \mu, \\ x_2 & = & \lambda & + & \mu, \\ x_3 & = & \lambda & - & 2\mu, \\ x_4 & = & \lambda, \\ x_5 & = & & & \mu. \end{cases}$$

Haciendo primero $\lambda = 1$ y $\mu = 0$, y luego $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ obtenemos

$$\mathcal{B}_V = \{w_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, w_2 = -u_1 + u_2 - 2u_3 + u_5\},$$

que es una base de V . □

Ejemplo 7.18 Vamos a calcular la dimensión de los subespacios $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ y $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formados, respectivamente, por las matrices simétricas y las matrices antisimétricas. Recordemos la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de II.7.3(1), p. 157, formada por las matrices Δ_{ij} cuyo único coeficiente no nulo ocupa el lugar (i, j) y vale 1. Respecto de esta base, las coordenadas x_{ij} de una matriz son sus coeficientes. Vamos a calcular ecuaciones paramétricas de ambos subespacios respecto de la base anterior, para deducir de ellas sus dimensiones.

(1) Una matriz (x_{ij}) es simétrica si y sólo si $x_{ij} = x_{ji}$ para $1 \leq i < j \leq n$. Resolviendo estas ecuaciones implícitas obtenemos

$$\begin{cases} x_{ii} = \lambda_{ii}, & 1 \leq i \leq n, \\ x_{ij} = \lambda_{ij} & 1 \leq i < j \leq n, \\ x_{ji} = \lambda_{ij} & 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Tenemos pues tantos parámetros como pares (i, j) con $1 \leq i \leq j \leq n$, esto es $n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Por otra parte, hay una ecuación $x_{ij} = \lambda_{ij}$ para cada uno de esos parámetros, y esas ecuaciones tienen por matriz la identidad, con lo que el rango es igual al número de parámetros. En consecuencia:

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Podemos entender este número como sigue. En una matriz simétrica, cada coeficiente por debajo de la diagonal principal es igual a uno por encima, luego para determinar una matriz simétrica sólo necesitamos los n coeficientes de su diagonal y los $\frac{n(n-1)}{2}$ que hay por encima.

(2) Una matriz (x_{ij}) es antisimétrica si y sólo si $x_{ij} = -x_{ji}$ para $1 \leq i \leq j \leq n$, o sea:

$$\begin{cases} x_{ii} = 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ x_{ij} = \lambda_{ij} & \text{si } 1 \leq i < j \leq n, \\ x_{ji} = -\lambda_{ij} & \text{si } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Aquí no están los n parámetros λ_{ii} , luego hay $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Y, como antes, las ecuaciones paramétricas tienen rango igual al número de parámetros, con lo que

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

También en este caso se explica por qué sale esta dimensión: para una matriz antisimétrica no necesitamos los parámetros de la diagonal, pues todos ellos deben ser nulos. \square

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. En el conjunto \mathbb{R} de los números reales se considera la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales, en la que la suma de elementos de \mathbb{R}

es la habitual, y el producto del escalar $\lambda \in \mathbb{Q}$ por el vector $u \in \mathbb{R}$ es el producto usual λu de λ y u como números reales. Comprobar que esto define efectivamente en \mathbb{R} una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{Q} y decidir si se trata o no de un espacio vectorial de tipo finito.

Número 2. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E . Estudiar si los vectores $v_1 = u_1 - u_3 + 2u_4$, $v_2 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4$ y $v_4 = u_1 + u_2 + u_4$ son linealmente independientes. Extraer de ellos el mayor número posible que lo sean, y construir una base de E que contenga a esos elegidos.

Número 3. Estudiar si los conjuntos siguientes son base del espacio vectorial dado:

$$(1) \mathcal{B}_1 = \{1, T + 2, (T + 2)^2, (T + 2)^3\} \text{ de } \mathbb{K}_3[T], \text{ y}$$

$$(2) \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

Número 4. Sean \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos con su estructura estándar de espacio vectorial real. Demostrar que

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, i), u_3 = (i, 1), u_4 = (i, -i)\}$$

es una base del espacio vectorial real $E = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$, y calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B} del vector $w = (3 + 2i, 5 + 4i)$.

Número 5. En $E = \mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $V = L[v_1, v_2]$ y $W = L[w_1, w_2]$, donde $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 3, 2)$, $w_1 = (1, 1, 0)$ y $w_2 = (3, 8, 5)$. Demostrar que $V = W$.

Número 6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),$$

probar que el conjunto $V = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : AX = XA\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Calcular su dimensión y encontrar una de sus bases.

Número 7. Dado el subespacio vectorial de \mathbb{K}^4 definido por

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\},$$

hallar una base de V . Comprobar que el vector $(1, -2, 0, 1)$ está en V , y hallar sus coordenadas respecto de la base de V encontrada.

Número 8. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E , y consideremos los vectores $v_1 = u_1 + u_3 + 2u_4$, $v_2 = 2u_1 + u_2 + 3u_3 + 4u_4$, y $v_3 = u_1 - u_2 + 2u_4$. Obtener unas ecuaciones implícitas respecto de \mathcal{B} del subespacio $V \subset E$ generado por v_1, v_2 y v_3 .

Número 9. Hallar la dimensión y una base del subespacio V de \mathbb{K}^5 cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar son:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Número 10. Hallar una base, su dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio V de \mathbb{K}^4 descrito respecto de la base estándar por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \\ x_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4, \\ x_4 = -\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4. \end{cases}$$

Número 11. Hallar una base, su dimensión y unas ecuaciones paramétricas del subespacio V de \mathbb{K}^5 descrito respecto de la base estándar mediante las siguientes ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Número 12. Se consideran los conjuntos de vectores

$$\mathcal{B} = \{(3, 2, 5), (2, 1, 3), (1, 0, 2)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(-2, 1, 3), (-2, 1, 2), (1, -1, 3)\}.$$

(1) Demostrar que ambos son bases de \mathbb{K}^3 y hallar las matrices del cambio de base en ambos sentidos.

(2) Hallar las coordenadas respecto de \mathcal{B}' del vector $u \in \mathbb{K}^3$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} son $(2, -1, -4)$.

Número 13. Sea $\mathbb{K}_3[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Probar que $\{(1+T)^3, T(1+T)^2, T^2(1+T), T^3\}$ es una base de $\mathbb{K}_3[T]$ y hallar respecto de esta base las coordenadas de los polinomios $1, T, T^2, T^3$. Hallar las matrices de cambio de base correspondientes.

🔪 **Número 14.** Revisar el análisis de la matriz de cambio de base sin suponer que ambas bases tengan el mismo número de elementos, y concluir que si \mathcal{B} y \mathcal{B}' son dos bases con n y m vectores respectivamente, las matrices de cambio C y C' de una a otra y de otra a una cumplen

$$CC' = I_m \quad \text{y} \quad C'C = I_n.$$

Deducir por las propiedades del rango del producto que $n = m$.

🔪 **Número 15.** Sean ξ y ζ dos números complejos distintos y no nulos, raíces del polinomio de grado dos $T^2 - aT + b$. Denotamos por E al conjunto de todas las sucesiones $u = (u_n)$ determinadas por sus dos primeros términos u_1 y u_2 , junto con la condición

$$u_n = au_{n-1} - bu_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3.$$

Operando con las sucesiones término a término, E se dota de estructura de espacio vectorial complejo.

(1) Demostrar que E es de tipo finito y que las sucesiones de E : $\alpha = (1, 0, \dots)$ que empieza $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$, y $\beta = (0, 1, \dots)$ que empieza $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$, forman una base de E .

(2) Comprobar que las sucesiones $x = (\xi^n)$ e $y = (\zeta^n)$ constituyen otra base de E , y calcular las matrices de cambio de base correspondientes.

(3) Se llama *sucesión de Fibonacci* φ la definida por

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 2, \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}.$$

Aplicar los apartados anteriores para calcular el término general φ_n .

8. Operaciones con subespacios

En esta lección se presentan las operaciones con subespacios de un espacio vectorial dado E , que fijamos en todo lo que sigue.

(8.1) Intersecciones de subespacios. Sea $\{V_i\}$ una colección arbitraria de subespacios de E . Entonces su intersección $V = \bigcap_i V_i$ es un subespacio vectorial de E .

En efecto, sean $v, w \in \bigcap_i V_i$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Para cada i tenemos $v, w \in V_i$, y como V_i es un subespacio, $\lambda v + \mu w \in V_i$. Esto cierto para cada i , por lo que concluimos que $\lambda v + \mu w \in \bigcap_i V_i$. \square

Ejemplo 8.2 Calculemos la intersección de los subespacios V y W estudiados en los ejemplos II.7.17(2), p. 168, y II.7.17(3), p. 169. Lo más fácil es reunir todas las ecuaciones implícitas de ambos espacios en un sólo sistema que define $V \cap W$:

$$V \cap W : \begin{cases} V : \begin{cases} 2x_1 & & - & x_3 & - & x_4 & & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & + & x_5 & = & 0, \end{cases} \\ W : \begin{cases} & & x_2 & & & - & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ x_1 & & & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 0, \\ x_1 & & & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0. \end{cases} \end{cases}$$

Se ve (calculando menores, por ejemplo) que la matriz de este sistema tiene rango $r = 4$, luego $V \cap W$ tiene dimensión $n - r = 5 - 4 = 1$. Así, cualquier vector no nulo suyo constituye una base. Por supuesto, basta resolver el sistema para encontrar uno. Sin embargo, vamos a utilizar otro método, aprovechando que tenemos la siguiente base de W :

$$\mathcal{B}_W = \{w_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, w_2 = -u_1 + u_2 - 2u_3 + u_5\}.$$

Así, un vector $u \in V$ pertenece a W si es combinación de w_1 y w_2 , lo que da

$$u = \lambda w_1 + \mu w_2 = (\lambda - \mu)u_1 + (\lambda + \mu)u_2 + (\lambda - 2\mu)u_3 + \lambda u_4 + \mu u_5,$$

para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. El vector u está además en V si sus coordenadas respecto de \mathcal{B} satisfacen las ecuaciones implícitas de V respecto de \mathcal{B} :

$$\begin{cases} 2(\lambda - \mu) - (\lambda - 2\mu) - \lambda = 0, \\ 2(\lambda - \mu) - (\lambda + \mu) - 2(\lambda - 2\mu) + \mu = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \lambda = 2\mu.$$

Por tanto los vectores de $V \cap W$ son de la forma

$$u = \mu u_1 + 3\mu u_2 + 2\mu u_4 + \mu u_5 = \mu(u_1 + 3u_2 + 2u_4 + u_5).$$

Por tanto, una base de $V \cap W$ está formada por el único vector $u = u_1 + 3u_2 + 2u_4 + u_5$. El lector comprobará que $(1, 3, 0, 2, 1)$ es una solución del sistema que define $V \cap W$. \square

Aunque interesan principalmente las intersecciones finitas $V = V_1 \cap \cdots \cap V_r$, las arbitrarias son convenientes para describir los subespacios generados por conjuntos cualesquiera:

(8.3) Generación de subespacios. Sea $X \subset E$ un conjunto arbitrario. Consideramos la colección $\{V_i\}$ de todos los subespacios de E que contienen a X , y tenemos el subespacio intersección

$$V = \bigcap_i V_i.$$

Por construcción, V es el menor subespacio de E que contiene a X , y afirmamos que coincide con el conjunto, que denotamos $L[X]$, de todas las combinaciones lineales $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ de vectores $v_1, \dots, v_k \in X$.

En efecto, si un subespacio vectorial contiene a X , debe contener todas las combinaciones lineales de elementos de X , es decir, debe contener a $L[X]$. Pero este conjunto $L[X]$ es de hecho un subespacio vectorial, pues dados $v = \sum_k \lambda_k v_k$, $w = \sum_\ell \mu_\ell w_\ell$, con $v_k, w_\ell \in X$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tenemos

$$\alpha v + \beta w = \alpha \left(\sum_k \lambda_k v_k \right) + \beta \left(\sum_\ell \mu_\ell w_\ell \right) = \sum_k \alpha \lambda_k v_k + \sum_\ell \beta \mu_\ell w_\ell,$$

que es una combinación lineal de vectores de X , luego está en $L[X]$.

Por tanto, $L[X]$ es, efectivamente, el menor subespacio vectorial que contiene a X , y decimos que está *generado por* X . \square

Obsérvese que esta notación $L[X]$ concuerda con la utilizada al definir espacios de tipo finito. En algunos casos particulares utilizamos notaciones específicas:

(8.4) Sumas de subespacios. (1) Sean V_1, \dots, V_p subespacios vectoriales de E . Entonces el subespacio generado por su unión $X = V_1 \cup \dots \cup V_p$ se denota

$$L[X] = V_1 + \dots + V_p = \sum_i V_i,$$

y se llama *suma*. Esta denominación se justifica inmediatamente, pues tal como está definido $L[X]$, el subespacio $\sum_i V_i$ es la colección de todas las sumas $v_1 + \dots + v_p$ de vectores $v_i \in V_i$. En efecto cada una de estas sumas es una combinación de vectores de X , luego pertenece a $L[X]$. Recíprocamente si un vector v pertenece a $L[X]$ es combinación de vectores de X ; digamos

$$v = \lambda_{11}v_{11} + \dots + \lambda_{1r_1}v_{1r_1} + \dots + \lambda_{p1}v_{p1} + \dots + \lambda_{pr_p}v_{pr_p},$$

donde cada $v_{ij} \in V_i$. Puesto que cada V_i es subespacio vectorial, la suma $v_i = \lambda_{i1}v_{i1} + \dots + \lambda_{ir_i}v_{ir_i} \in V_i$, y $v = v_1 + \dots + v_p$.

Es inmediato que si $X \subset Y$ entonces $L[X] \subset L[Y]$, pues $L[Y]$ es un subespacio vectorial que contiene a Y , luego también a X , por lo que contiene al menor subespacio $L[X]$ que contiene a X .

También es útil la igualdad $L[Y_1 \cup Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$, que se comprueba con facilidad. En efecto, como cada $Y_i \subset Y_1 \cup Y_2$ se deduce de lo que acabamos de probar que $L[Y_1 \cup Y_2]$ es un subespacio que contiene a cada $L[Y_i]$, luego también contiene a $L[Y_1] + L[Y_2]$, pues éste es el menor subespacio que contiene a $L[Y_1]$ y $L[Y_2]$. Recíprocamente, si $v \in L[Y_1 \cup Y_2]$ existen vectores $u_1, \dots, u_r \in Y_1$ y $w_1, \dots, w_s \in Y_2$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ tales que

$$v = (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) + (\mu_1 w_1 + \dots + \mu_s w_s) = v_1 + v_2 \in L[Y_1] + L[Y_2].$$

Por otra parte, recuérdese el ejemplo de dos rectas $V \cup W : xy = 0$ en \mathbb{K}^2 dado en II.6.7, p. 145, que muestra cómo la unión de subespacios no es en general un subespacio vectorial. En este caso

$$\{(0, 1), (1, 0)\} \subset V \cup W \subset V + W,$$

luego la suma $V + W$ contiene una base de \mathbb{R}^2 , con lo que $V + W = \mathbb{R}^2$ es el menor subespacio vectorial que contiene ambas rectas.

(2) Un caso especial de suma, de importancia en muchas situaciones, es la denominada *suma directa*, que es una suma $V_1 + \dots + V_p$ que cumple lo siguiente:

$$V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\} \quad \text{para cada } i = 1, \dots, p.$$

Si ese es el caso, denotaremos la suma como sigue:

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_p = \bigoplus_i V_i.$$

Veamos que V es suma directa de V_1, \dots, V_p si y sólo si cada vector $v \in V$ se escribe de modo único como $v = v_1 + \cdots + v_p$ con $v_i \in V_i$.

Hay que probar que la condición adicional de las sumas directas equivale a que cualquier expresión $v_1 + \cdots + v_p$ con $v_i \in V_i$ sea única. Pero si la suma es directa y $\sum_i v_i = \sum_i v'_i$ donde cada $v_i, v'_i \in V_i$, operando tenemos:

$$v_i - v'_i = \sum_{j \neq i} (v'_j - v_j) \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\},$$

luego $v_i = v'_i$. Recíprocamente, si dichas expresiones son únicas, y un vector v pertenece a la intersección $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$, existen vectores $v_j \in V_j$, para todo $j \neq i$, tales que $\sum_{j \neq i} v_j = v \in V_i$. Entonces poniendo $v_i = -v$ resulta $v_1 + \cdots + v_p = 0 + \cdots + 0$, y por la unicidad, $v = v_i = 0$.

(3) Un caso aún más especial es una suma directa del tipo $E = V \oplus W$. Entonces se dice que W es un *suplementario* de V . Luego veremos que siempre existe un suplementario, pero no es único. \square

Ejemplo 8.5 De nuevo analizamos los subespacios V, W de II.8.2, p. 174. Ahora calcularemos su suma. Para ello lo mejor es buscar generadores de ambos subespacios y reunirlos. Por una parte, sabemos (II.7.17(2), p. 168, y II.7.17(3), p. 169) que los vectores

$$v_1 = u_1 + u_3 + u_4, \quad v_2 = u_2 + u_5, \quad v_3 = 2u_2 - u_3 + u_4$$

generan V , y los vectores

$$w_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad w_2 = -u_1 + u_2 - 2u_3 + u_5$$

generan W , luego $V + W = L[v_1, v_2, v_3, w_1, w_2]$. Para mejorar la presentación, podemos extraer una base de esta colección de 5 vectores. Para ello formamos la matriz de sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 4 y sus cuatro primeras columnas son independientes. Por tanto, $\{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ son una base de $V + W$. Por otra parte, ya sabemos que la suma no es directa, pues $V \cap W \neq \{0\}$ (vimos en II.8.2, p. 174, que tiene dimensión 1). \square

Nos queda por introducir una última operación, que es de naturaleza algo más abstracta:

(8.6) Cocientes módulo subespacios. Sea L un subespacio vectorial de E . Definimos en E la siguiente relación de equivalencia: dos vectores $v, w \in E$ están relacionados si $v - w = u \in L$. La clase de equivalencia de un vector $v \in E$ es

$$[v] = v + L = \{v + u : u \in L\} \quad (\text{y en particular } [0] = L),$$

pues $w \in [v]$ significa que $w - v = u \in L$, esto es, $w = v + u \in v + L$. El conjunto cociente correspondiente se denota E/L , y para definir en él una estructura de espacio vectorial basta operar las clases de equivalencia utilizando sus representantes:

$$[v] + [w] = [v + w], \quad \lambda[v] = [\lambda v].$$

Ahora bien, para que esto sea correcto, debe comprobarse que estas operaciones son consistentes, es decir, *el resultado no depende de los elementos de cada clase elegidos*.

Veámoslo para la suma. Si $[v'] = [v]$ y $[w'] = [w]$, entonces $v' - v$ y $w' - w$ están en L , luego también está en L su suma $(v' - v) + (w' - w) = (v' + w') - (v + w)$, de modo que concluimos $[v' + w'] = [v + w]$. Para el producto por escalares se razona igual.

De esta manera E/L es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , que denominamos *cociente módulo L* . \square

Ejemplo 8.7 En el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^2$ se considera el subespacio vectorial

$$L = \{(x, y) \in E : x = 2y\},$$

que es la recta que pasa por el origen y cuya pendiente vale $\frac{1}{2}$.

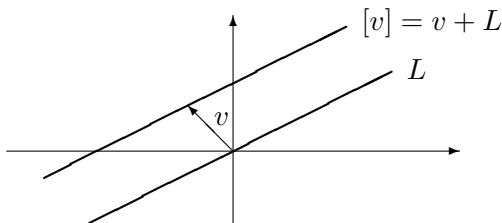
Para cada vector $v = (a, b) \in E$, la clase de equivalencia $[v] \in E/L$ es el conjunto

$$[v] = v + L = \{v + u : u \in L\}.$$

Los vectores de L son los de la forma $u = t(2, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$, así que

$$[v] = \{(a, b) + t(2, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(a + 2t, b + t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, como muestra la figura, $[v]$ es la recta paralela a L que pasa por v . Al ser paralelas, dos clases distintas no se cortan, como siempre sucede con las clases de equivalencia de cualquier cociente.



Además, cada vector $v \in E$ pertenece a una única clase de equivalencia, que es la recta paralela a L que pasa por v .

Por último, observemos que dos vectores $v, w \in E$ están relacionados mediante la relación de equivalencia inducida por L si y sólo si la recta r que los une es paralela a L . En efecto, $v - w \in L$ si y sólo si el vector director $v - w$ de la recta r pertenece a L , o sea, r y L son rectas paralelas. \square

Una vez definidas las operaciones anteriores, consideraremos el caso en que el espacio E es de tipo finito. Hay dos cosas que mirar: las dimensiones y las ecuaciones de los espacios involucrados. Una primera observación sencilla pero importante es la siguiente:

Proposición 8.8 *Cualquier subespacio de E es intersección de hiperplanos. El número mínimo necesario es la codimensión del subespacio.*

Demostración. Sabemos que todo subespacio vectorial tiene ecuaciones implícitas, y que el número mínimo posible de ecuaciones es precisamente la codimensión. Pero cada una de esas ecuaciones por sí misma define un hiperplano, y todas juntas definen la intersección de esos hiperplanos. Resulta pues el enunciado. \square

Establecemos ahora la fórmula básica para el cálculo de dimensiones:

Proposición 8.9 (Fórmula de Grassmann) *Sean V, W dos subespacios de un espacio de tipo finito E . Entonces*

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Demostración. Si alguno de los subespacios vectoriales V o W es $\{0\}$, la fórmula anterior se cumple trivialmente. Por tanto supondremos que ambos son no triviales, y de momento que $V \cap W \neq \{0\}$.

Elegimos una base $\{u_1, \dots, u_d\}$ de $V \cap W$, y le añadimos, por una parte, vectores $v_1, \dots, v_p \in V$ hasta obtener una base de V , y por otra vectores $w_1, \dots, w_q \in W$ hasta obtener una base de W . Con estas notaciones

$$\dim(V \cap W) = d, \quad \dim(V) = d + p, \quad \text{y} \quad \dim(W) = d + q,$$

de modo que debemos probar que $\dim(V + W) = d + p + q$. Para ello veremos que

$$\{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$$

es una base de $V + W$. En efecto, estos vectores generan $V + W$, ya que, por II.8.4, p. 176,

$$\begin{aligned} V + W &= L[u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_p] + L[u_1, \dots, u_d, w_1, \dots, w_q] \\ &= L[u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q]. \end{aligned}$$

Ahora hay que ver que son vectores independientes. Sea

$$\sum_j \alpha_j u_j + \sum_k \lambda_k v_k + \sum_\ell \mu_\ell w_\ell = 0.$$

Reescribiendo esta igualdad queda

$$\sum_j \alpha_j u_j + \sum_k \lambda_k v_k = -\sum_\ell \mu_\ell w_\ell \in V \cap W,$$

luego el primer miembro es una combinación lineal de los u_j únicamente, digamos

$$\sum_j \alpha_j u_j + \sum_k \lambda_k v_k = \sum_j \beta_j u_j, \quad \text{es decir} \quad \sum_j (\alpha_j - \beta_j) u_j + \sum_k \lambda_k v_k = 0.$$

Pero los u_j, v_k son independientes, con lo que todos los λ_k son nulos, y la combinación inicial queda

$$\sum_j \alpha_j u_j + \sum_\ell \mu_\ell w_\ell = 0.$$

Ahora, como también los u_k, w_ℓ son independientes, deducimos que todos los α_j, μ_ℓ son nulos. Hemos terminado.

El lector comprobará que si $V \cap W = \{0\}$ el mismo argumento vale, con la simplificación de que los u_j desaparecen de la discusión. \square

(8.10) Casos particulares. (1) Sean H un hiperplano de E y $V \subset E$ un subespacio vectorial que no está contenido en H . Entonces $H + V = E$, y $\dim(H \cap V) = \dim(V) - 1$.

En efecto, $H + V$ contiene estrictamente a H , que es un hiperplano de E , luego $\dim(E) - 1 < \dim(H + V) \leq \dim(E)$. Por tanto $\dim(H + V) = \dim(E)$, y se deduce de II.7.15, p. 165 que $H + V = E$. Además, tenemos:

$$\begin{aligned}\dim(H \cap V) &= \dim(H) + \dim(V) - \dim(H + V) \\ &= \dim(E) - 1 + \dim(V) - \dim(E) = \dim(V) - 1.\end{aligned}$$

(2) Como ya se ha visto de hecho en la prueba de II.8.9, p. 179, si se tiene una suma directa, la fórmula de Grassmann se reduce a

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W).$$

(3) Si E y F son dos espacios vectoriales de tipo finito, en su producto $E \times F$ podemos considerar los subespacios $E' = E \times \{0\}$ y $F' = \{0\} \times F$, y es evidente que $E \times F = E' \oplus F'$. Por tanto.

$$\dim(E \times F) = \dim(E') + \dim(F').$$

Es natural por otra parte identificar E con E' y F con F' , así que obtenemos otra vez la fórmula de II.7.11, p. 162.

(4) Si W es un suplementario de V , entonces

$$\dim(W) = \dim(V \oplus W) - \dim(V) = \dim(E) - \dim(V).$$

Sobre la existencia de tal suplementario W , basta repetir parte del argumento de la prueba anterior: si una base de V se prolonga a una de E , los vectores añadidos generan un suplementario W de V . Ya se ve que el suplementario de un subespacio V de E no es único salvo si $V = \{0\}$ o $V = E$.

(5) Sea $u \in E$ un vector no nulo. Entonces $L[u]$ es una recta vectorial, y cualquier suplementario suyo es un hiperplano que no contiene a u . Más generalmente, sea V un subespacio vectorial que no contiene al vector u . Entonces la suma directa $V \oplus L[u]$ tiene un suplementario W , y $H = V \oplus W$ es un hiperplano de E que contiene a V y no a u .

(6) Veamos cómo decidir cuándo dos subespacios V y W del espacio vectorial de tipo finito E , son suplementarios. Como hemos visto en (2) es imprescindible que se cumpla la igualdad $\dim(V) + \dim(W) = \dim(E)$. Una vez

comprobado esto, las siguientes condiciones son equivalentes:

$$(i) \quad E = V \oplus W; \quad (ii) \quad V \cap W = \{0\}; \quad (iii) \quad V + W = E.$$

En efecto, que (i) implica (ii) se cumple siempre, y para demostrar que (ii) implica (iii) y que (iii) implica (i) observamos antes que por la hipótesis acerca de las dimensiones la fórmula de Grassmann II.8.9, p. 179 se lee en este caso

$$\dim(E) = \dim(V \cap W) + \dim(V + W).$$

Por ello, si $V \cap W = \{0\}$, entonces $\dim(V + W) = \dim(E)$ lo que implica, por II.7.15, p. 165, que $E = V + W$. Por último, si se cumple esta igualdad, para demostrar (i) sólo hace falta comprobar que $V \cap W = \{0\}$, o lo que es igual, $\dim(V \cap W) = 0$, lo que se sigue de la fórmula de dimensiones anterior. \square

Ejemplo 8.11 Consideremos los subespacios $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ y $W = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, formados por las matrices simétricas y las antisimétricas, respectivamente. Según II.7.18, p. 170, tenemos

$$\dim(V) + \dim(W) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(E).$$

Además, la intersección $V \cap W$ es nula, pues si una matriz A es, a la vez, simétrica y antisimétrica, entonces $A = -A^t = -A$, luego $A = 0$. Por el apartado anterior, deducimos que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Esto significa que cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es suma, de una única manera, de una matriz simétrica $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ y una antisimétrica $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Para calcularlas transponemos los dos miembros de la igualdad $A = S + T$ y resulta $A^t = S^t + T^t = S - T$, luego al sumar y restar resulta que

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{2}(A - A^t),$$

son las matrices buscadas. \square

Para el cociente se tiene:

Proposición 8.12 Sean E un espacio de tipo finito y L un subespacio de E . Entonces E/L es de tipo finito, y se cumple

$$\dim(E/L) = \dim(E) - \dim(L) = \text{codim}(L).$$

Demostración. Podemos suponer que $L \neq \{0\}$, pues en caso contrario nada hay que probar. Elegimos una base $\{u_1, \dots, u_d\}$ de L . Estos vectores de E son independientes, y por el Teorema de prolongación II.7.13, p. 164 existen vectores v_1, \dots, v_p tales que $\{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_p\}$ es una base de E . En particular $\dim(E) = d + p$, y hay que ver que $p = \dim(E/L)$. Esto es así porque las clases de equivalencia $[v_1], \dots, [v_p] \in E/L$ son una base del cociente. En efecto, dado $[v] \in E/L$, tendremos

$$v = \sum_k \alpha_k u_k + \sum_j \beta_j v_j,$$

luego

$$[v] = \sum_k \alpha_k [u_k] + \sum_j \beta_j [v_j] = \sum_j \beta_j [v_j],$$

pues $[u_k] = [0]$ ya que $u_k \in L$. Esto muestra que las clases de equivalencia $[v_1], \dots, [v_p]$ generan el cociente E/L y queda ver que son independientes. Pero si

$$\sum_j \beta_j [v_j] = [0],$$

resulta

$$\left[\sum_j \beta_j v_j \right] = [0],$$

es decir $\sum_j \beta_j v_j \in L$. Como los u_k son una base de L , tendremos $\sum_j \beta_j v_j = \sum_k \lambda_k u_k$, para ciertos λ_k , luego

$$\sum_k \lambda_k u_k - \sum_j \beta_j v_j = 0.$$

Pero los u_k, v_j son independientes, pues constituyen una base de E , luego todos los coeficientes en la última combinación deben ser nulos, y en particular lo son los β_j . Hemos terminado. \square

En la demostración anterior, los vectores v_1, \dots, v_p generan un suplementario de L , luego se puede pensar en el cociente V/L como en un modelo abstracto de los suplementarios de L .

Ejemplo 8.13 Sea L el subespacio vectorial de $E = \mathbb{K}^4$ cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar son

$$L : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

(1) Busquemos una base del espacio cociente E/L .

Siguiendo la demostración última, empezamos obteniendo una base de L . Las ecuaciones anteriores tienen rango 2, así que $\dim(L) = 4 - \text{rg} = 4 - 2 = 2$. Resolviendo el sistema queda

$$L : \begin{cases} x_1 - x_2 = -2x_3 - x_4, \\ 2x_1 + x_2 = -x_3 + x_4, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Si hacemos primero $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$ y luego $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ obtenemos la siguiente base del subespacio L :

$$\mathcal{B}_L = \{u_1 = -e_1 + e_2 + e_3, u_2 = e_2 + e_4\}.$$

El siguiente paso consiste en añadir dos vectores $v_1, v_2 \in E$ para formar una base \mathcal{B} de E . Esto se puede hacer de una infinidad de modos. Elegimos, por ejemplo, $v_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \notin L$ y $v_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 \notin L$. Como

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -6 \neq 0,$$

tenemos efectivamente una base de E . Por tanto, una base de E/L es

$$\mathcal{B}_{E/L} = \{\xi_1 = [v_1], \xi_2 = [v_2]\}.$$

(2) Calculemos las coordenadas respecto de $\{\xi_1, \xi_2\}$ de $\xi = [v]$, donde $v = 3e_1 - e_2 + e_3 - e_4$. Como $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ es una base de E , tendremos

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + z_1 v_1 + z_2 v_2,$$

y en consecuencia

$$\xi = [y_1 u_1 + y_2 u_2 + z_1 v_1 + z_2 v_2] = [y_1 u_1 + y_2 u_2] + [z_1 v_1 + z_2 v_2] = [z_1 v_1 + z_2 v_2],$$

ya que $y_1 u_1 + y_2 u_2 \in L$. Se sigue que

$$\xi = z_1 [v_1] + z_2 [v_2] = z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2,$$

y (z_1, z_2) son las coordenadas buscadas. Ahora bien, observamos que

$$\begin{aligned} 3e_1 - e_2 + e_3 - e_4 = v &= y_1 u_1 + y_2 u_2 + z_1 v_1 + z_2 v_2 = y_1(-e_1 + e_2 + e_3) \\ &+ y_2(e_2 + e_4) + z_1(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ &+ z_2(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4) = (-y_1 + z_1 + z_2)e_1 \\ &+ (y_1 + y_2 + z_1 + z_2)e_2 + (y_1 + z_1 + 3z_2)e_3 + (y_2 + z_1 + 4z_2)e_4, \end{aligned}$$

y por tanto, (y_1, y_2, z_1, z_2) es la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -y_1 + z_1 + z_2 = 3 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = -1 \\ y_1 + z_1 + 3z_2 = 1 \\ y_2 + z_1 + 4z_2 = -1 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene $y_1 = 4/3$, $y_2 = -7/3$, $z_1 = 8/3$ y $z_2 = -1/3$, luego las coordenadas de ξ respecto de la base $\{\xi_1, \xi_2\}$ de L son $z_1 = 8/3$ y $z_2 = -1/3$.

Veamos otro método de calcular estas coordenadas empleando las ecuaciones implícitas de L . Como

$$[v] = \xi = z_1\xi_1 + z_2\xi_2 = z_1[v_1] + z_2[v_2] = [z_1v_1 + z_2v_2],$$

debe ser $v - z_1v_1 - z_2v_2 \in L$. Pero

$$\begin{aligned} v - z_1v_1 - z_2v_2 &= (3 - z_1 - z_2)e_1 - (1 + z_1 + 2z_2)e_2 \\ &\quad + (1 - z_1 - 3z_2)e_3 - (1 + z_1 + 4z_2)e_4, \end{aligned}$$

y este vector está en L cuando se cumple

$$\begin{cases} 3 - z_1 - z_2 = -(1 - z_1 - 3z_2), \\ -(1 + z_1 + 2z_2) = (1 - z_1 - 3z_2) - (1 + z_1 + 4z_2), \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} z_1 + 2z_2 = 2, \\ z_1 + 5z_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo $z_1 = \frac{8}{3}$, $z_2 = -\frac{1}{3}$. □

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Dados tres vectores linealmente independientes u_1, u_2, u_3 , en un espacio vectorial E , se consideran los subespacios $V = L[u_1 + u_2, u_2 + u_3]$ y $W = L[u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3]$. ¿Cuál es la dimensión de $V \cap W$?

Número 2. Para cada número real a se considera el subespacio vectorial H_a de \mathbb{K}^3 de ecuación $ax - y + z = 0$. Sea $u = (1, 1, 1)$. ¿Para qué valores de a se cumple la igualdad $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$?

Número 3. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E y sean: (i) V el subespacio de E de ecuaciones $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$ respecto de \mathcal{B} , y (ii) W el subespacio de E generado por los vectores $w_1 = u_1 + u_2$, $w_2 = u_1 + u_3$ y $w_3 = u_1 + u_4$. Calcular las dimensiones de V , W , $V \cap W$ y $V + W$.

Número 4. Sean a y b números reales y consideremos los subespacios de \mathbb{R}^4 dados por las ecuaciones siguientes (respecto de la base estándar de \mathbb{R}^4):

$$V : \begin{cases} x_1 - bx_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0, \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Calcular las dimensiones de V y W . ¿Existen valores de a y b para los que $V = W$?

Número 5. En un espacio vectorial E se consideran tres subespacios vectoriales V_1, V_2, V_3 , y las igualdades siguientes:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3, \quad V_1 + V_2 \cap V_3 = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3),$$

Estudiar si son ciertas y, si no, modificarlas para que lo sean.

Número 6. Sea V un subespacio vectorial propio de un espacio vectorial E de tipo finito. ¿Cuál es el subespacio vectorial de E generado por el complementario $E \setminus V$?

Número 7. Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E de tipo finito, ambos distintos de E . Supongamos que $\dim(V_1) = \dim(V_2)$. Probar que tienen un suplementario común: existe un subespacio $W \subset E$ tal que $V_1 \oplus W = E = V_2 \oplus W$.

✚ **Número 8.** Sean n un entero positivo, $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} .

(1) Dado un polinomio $f \in E$ no constante, demostrar que

$$V_f = \{P \in E : P \text{ es múltiplo de } f\}$$

es un subespacio vectorial de E . Hallar una base de V_f y otra de un suplementario suyo.

(2) Dados dos subespacios V_f y V_g del tipo anterior, describir su intersección.

(3) Sean $n = 2$, $f = -T + T^2$ y $g = 6 - 5T + T^2$. Calcular $V_f + V_g$.

Número 9. Calcular el rango de la matriz adjunta de una matriz cuadrada.

Número 10. Se consideran las matrices $\begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu \\ \mu & \lambda - \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(1) Mostrar que todas esas matrices constituyen un subespacio vectorial V del espacio $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Hallar una base suya y su dimensión.

(2) Demostrar que si $M \in V$, entonces $M^n \in V$ para cada $n \geq 0$.

(3) Encontrar un suplementario vectorial W de V en E que también tenga la propiedad (2), y otro W' que no la tenga.

✚ **Número 11.** Sea $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$.

(1) Mostrar que para cualesquiera $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos, el conjunto $V_a \subset E$ formado por los polinomios que se anulan en todos los a_i es un subespacio vectorial de E . ¿De qué dimensión?

(2) Sean $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ y $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{K}$ dos colecciones de escalares en ambos casos distintos dos a dos. Estudiar cuándo $V_a + V_b = E$. Interpretar el resultado obtenido.

Número 12. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E , sea L el subespacio vectorial del que unas ecuaciones implícitas respecto de \mathcal{B} son

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

y sea $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$. Obtener una base del espacio vectorial cociente E/L y calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase $[v]$.

Número 13. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E , $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$ y $L = L[v_1, v_2]$.

(1) Encontrar en $E \setminus L$ dos vectores independientes cuyas clases sean (resp. no sean) independientes en el cociente E/L .

(2) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/L no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

Número 14. Demostrar que

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ b & a+2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, y encontrar una base del cociente $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})/L$.

Número 15. Sean $n > 2$ un número entero, $\mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n , y el conjunto $L = \{f \in \mathbb{K}_n[T] : f(0) = f(1) = 0\}$. Demostrar que L es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}_n[T]$ y obtener una base del espacio cociente $\mathbb{K}_n[T]/L$. Calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase

$$[1 + T + T^2 + \cdots + T^n] = (1 + T + T^2 + \cdots + T^n) + L.$$

9. Aplicaciones lineales

Como es natural, las aplicaciones adecuadas entre espacios vectoriales son aquéllas que preservan las combinaciones lineales:

Definición 9.1 Sean E, F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo \mathbb{K} . Una aplicación $f : E \rightarrow F$ se llama *lineal* cuando *conserva las combinaciones lineales*:

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_r f(v_r) \quad \lambda_j \in \mathbb{K}, v_j \in E.$$

Por supuesto, esto equivale a que se cumpla:

$$\begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v) & \text{para cualesquiera } u, v \in E, \text{ y} \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) & \text{para cualesquiera } u \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \end{cases}$$

o, resumido en una condición, a que:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \quad \text{para cualesquiera } u, v \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

En efecto, en tal caso, argumentando por inducción se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) &= f((\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{r-1} v_{r-1}) + \lambda_r v_r) \\ &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{r-1} v_{r-1}) + f(\lambda_r v_r) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_{r-1} f(v_{r-1}) + \lambda_r f(v_r). \end{aligned}$$

Dos propiedades básicas que cumplen las aplicaciones lineales son las siguientes.

Proposición 9.2 *Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Se cumple que:*

- (1) $f(0) = 0$.
- (2) $f(-u) = -f(u)$ para todo $u \in E$.

Demostración. Para (1), denotemos $0_{\mathbb{K}}$ y 0 el escalar nulo y el vector nulo, respectivamente. Entonces, por II.6.2, p. 143 (2), se tiene

$$f(0) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot 0) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(0) = 0.$$

Además, por II.6.2, p. 143 (3), $f(-u) = f((-1)u) = (-1)f(u) = -f(u)$. □

Ejemplos 9.3 (1) Si V es un subespacio vectorial de E , la aplicación *inclusión* $j : V \hookrightarrow E, v \mapsto v$ es lineal. Si $V = E$, tenemos la *aplicación identidad* $\text{Id}_E : E \rightarrow E$.

(2) Sea L un subespacio vectorial de E , y E/L el correspondiente espacio cociente. La *proyección* $\pi = \pi_L : E \rightarrow E/L, v \mapsto [v]$ es una aplicación lineal.

(3) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar. La aplicación $h : E \rightarrow E, u \mapsto \lambda u$ es lineal, y se denomina *homotecia (vectorial) de razón λ* .

(4) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, la aplicación $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto y$ definida por $y^t = Ax^t$ es una aplicación lineal.

(5) La transposición ${}^t : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}), A \mapsto A^t$ es una aplicación lineal.

(6) Ahora entendemos que la propiedad (2) de la definición de determinante dice que el determinante es *multilineal*, es decir, lineal separadamente en cada fila. Más formalmente, dada una matriz A cuadrada de orden n , y fijado un índice i , denotamos $A(x)$ la matriz obtenida reemplazando su fila i -ésima por $x = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces la aplicación

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \det(A(x))$$

es lineal, por I.4.3, p. 46 (2). Por supuesto lo mismo vale para columnas.

(7) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, la aplicación:

$$\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K}), B \mapsto AB$$

es lineal. Y análogamente multiplicando por el otro lado por matrices de tamaño adecuado.

(8) La traza $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto \text{tr}(A)$ es una aplicación lineal.

(9) Sea $f \in \mathbb{K}[T]$ un polinomio de grado d . La aplicación $\mathbb{K}_n[T] \rightarrow \mathbb{K}_{n+d}[T]$ definida por $P \mapsto f \cdot P$ es lineal. De manera similar se pueden usar productos para definir aplicaciones lineales en \mathbb{R}^I , $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{C}^k(I)$ y $\mathcal{C}^\infty(I)$.

(10) La aplicación derivada $\mathbb{K}_n[T] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[T], P \mapsto P'$ es lineal. También se puede definir una aplicación lineal análoga $\mathcal{C}^k(I) \rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(I)$. \square

(9.4) Espacios de aplicaciones lineales. El conjunto de todas las aplicaciones lineales de un espacio vectorial E en otro F se denota $\mathcal{L}(E, F)$. Es muy fácil comprobar que es un espacio vectorial a su vez, con la suma y el producto por escalares definidos del modo inevitable:

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \quad (\lambda f)(u) = \lambda(f(u)).$$

Por ejemplo, la homotecia de razón λ se puede escribir como λId_E . \square

Observación y Ejemplo 9.5 Las aplicaciones lineales son poco flexibles, es decir, a partir de su valor en ciertos vectores, podemos predecir su valor en todos. Por ejemplo, si $f : E \rightarrow F$ es lineal y conocemos los valores de f en dos vectores v, w que generan E , (y por tanto la dimensión de E es menor o igual que 2), entonces conocemos $f(u)$ para cualquier $u \in E$. Simplemente escribimos $u = \lambda v + \mu w$, y $f(u)$ vale necesariamente lo siguiente:

$$f(u) = f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w).$$

Este argumento muestra que si $E = L[X]$, para cierto subconjunto $X \subset E$, y conocemos la restricción $f|_X$ de la aplicación f a X , entonces conocemos completamente f .

Por ejemplo, supongamos que una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ cumple

$$f(2, 1, 1) = (3, 0, 1), \quad f(1, 0, -1) = (1, 1, -1), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 2, 0).$$

Como los tres vectores $(2, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(0, 0, 1)$ generan todo el espacio, cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ es combinación lineal suya:

$$(x, y, z) = \alpha(2, 1, 1) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 0, 1),$$

lo que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas α, β, γ con los términos independientes x, y, z . Resolviéndolo obtenemos:

$$\alpha = y, \quad \beta = x - 2y, \quad \gamma = x - 3y + z.$$

Concluimos entonces:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \alpha f(2, 1, 1) + \beta f(1, 0, -1) + \gamma f(0, 0, 1) \\ &= y(3, 0, 1) + (x - 2y)(1, 1, -1) + (x - 3y + z)(-1, 2, 0) \\ &= (4y - z, 3x - 8y + 2z, -x + 3y). \end{aligned}$$

□

Veamos que las aplicaciones lineales respetan los subespacios vectoriales:

Proposición 9.6 Sean $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal y $V \subset E$, $W \subset F$ subespacios vectoriales. Entonces:

(1) La imagen

$$f(V) = \{f(v) \in F : v \in V\}$$

es un subespacio vectorial de F .

(2) La imagen inversa

$$f^{-1}(W) = \{u \in E : f(u) \in W\}$$

es un subespacio vectorial de E .

(3) Dados vectores $u_1, \dots, u_q \in E$ se cumple la igualdad

$$f(L[u_1, \dots, u_q]) = L[f(u_1), \dots, f(u_q)].$$

Demostración. (1) En primer lugar, $0 = f(0) \in f(V)$. Sean ahora $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Como V es un subespacio vectorial de E , entonces $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V$ y por tanto

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = f(v) \in f(V).$$

De este modo, $f(V)$ es un subespacio vectorial de F .

(2) Veamos que para cualesquiera $v_1, v_2 \in f^{-1}(W)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ se tiene $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in f^{-1}(W)$:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \in W,$$

pues $f(v_1)$ y $f(v_2)$ pertenecen al subespacio W . Además $0 \in f^{-1}(W)$, pues $f(0) = 0 \in W$.

(3) Denotemos $V = L[u_1, \dots, u_q]$. El subespacio $f(V)$ contiene a cada $f(u_i)$, por lo que contiene al menor subespacio $L[f(u_1), \dots, f(u_q)]$ que contiene a los vectores $f(u_1), \dots, f(u_q)$. Esto prueba un contenido y, para el otro, observamos que para cada $w \in f(V)$ existe $v \in V$ tal que $w = f(v)$. Este vector v se escribe como combinación lineal $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_q u_q$ para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}$, luego

$$w = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_q u_q) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_q f(u_q) \in L[f(u_1), \dots, f(u_q)].$$

□

Ejemplo 9.7 El cálculo de imágenes e imágenes inversas de una aplicación lineal requiere algún cuidado, como muestra el siguiente ejemplo. Tomemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$, $x \mapsto y$ definida por $y^t = Ax^t$.

(1) Consideramos los vectores $w_1 = (1, 0, 1)$ y $w_2 = (0, 1, 1)$ de \mathbb{K}^3 , y el subespacio que generan $W = L[w_1, w_2]$. Entonces, $x \in f^{-1}(W)$ si y sólo si $y = f(x) \in W$. Como $y^t = Ax^t$, tenemos

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ y_2 &= -x_2 + x_3 - 2x_4, \\ y_3 &= x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4, \end{cases}$$

de modo que $y \in W = L[w_1, w_2]$ si y sólo si

$$2 = \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & 1 & 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 & 0 & 1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que equivale a que el determinante de esa matriz es nulo. Como ese determinante es $-x_2 + x_3 - 2x_4$, obtenemos la siguiente ecuación implícita:

$$f^{-1}(W) : x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.$$

(2) Calculemos ahora $f(f^{-1}(W))$. Mediante la ecuación anterior se ve que $f^{-1}(W) \subset \mathbb{K}^4$ está generado por $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 2, 1)$. Por II.9.6, p. 190 (3), las imágenes de estos tres vectores generan $f(f^{-1}(W))$. Esas tres imágenes se calculan usando la matriz A :

$$f(v_1) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$f(v_3) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Vemos que las tres imágenes son múltiplos de la primera, que es w_1 , luego la imagen buscada es $f(f^{-1}(W)) = L[w_1]$. En particular, el contenido $f(f^{-1}(W)) \subset W$ es estricto en este ejemplo: $w_2 \in W \setminus f(f^{-1}(W))$. \square

(9.8) Imagen y núcleo. De todas las imágenes y preimágenes de una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$, hay dos especialmente importantes, su *imagen*:

$$\text{im}(f) = \{f(u) \in F : u \in E\} = f(E),$$

y su *núcleo*:

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0\} = f^{-1}(0).$$

Nótese que el núcleo de f es el mayor subespacio vectorial V de E en el que f es idénticamente nula. \square

Estos subespacios aparecerán repetidamente a partir de ahora. De momento, los calculamos en algunos de los ejemplos de II.9.3, p. 188:

Ejemplos 9.9 (1) Una inclusión $j : V \hookrightarrow E$ tiene imagen V y núcleo $\{0\}$. Una proyección $\pi : E \rightarrow E/L$ tiene imagen E/L y núcleo L . Una homotecia (de razón $\neq 0$) $h : E \rightarrow E$ es biyectiva, su imagen es E y su núcleo $\{0\}$.

(2) Una aplicación lineal $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ es o bien nula o bien suprayectiva. En efecto, si existe $u \in E$ con $f(u) = \alpha \neq 0$, cada $\lambda \in \mathbb{K}$ está en la imagen de f :

$$\lambda = f\left(\frac{\lambda}{\alpha}u\right).$$

(3) Sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $x \mapsto y$ la aplicación lineal definida por $y^t = Ax^t$ mediante una matriz A . Entonces, el vector $y \in \mathbb{K}^m$ pertenece a la imagen de f si existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que $y = f(\lambda)$, esto es, $y^t = A\lambda^t$, por lo que éstas son unas ecuaciones paramétricas de $\text{im}(f)$. Por otro lado, un vector $x \in \mathbb{K}^n$ está en el núcleo de f si $Ax^t = 0$, luego éstas son unas ecuaciones implícitas de $\ker(f)$.

(4) Sea A una matriz cuadrada de orden n , y $A(x)$ la matriz obtenida reemplazando la fila i -ésima de A por $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ya sabemos que la aplicación

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \det(A(x))$$

es lineal. Si las $n-1$ filas de A que permanecen en $A(x)$ son dependientes, $\det(A(x)) = 0$ para cada $x \in \mathbb{K}^n$, así que supondremos que son independientes, y denotaremos V el subespacio de \mathbb{K}^n que generan. Entonces, $\det(A(x)) = 0$ si y sólo si x depende de esas $n-1$ filas, es decir, el núcleo es V . En particular, esta aplicación no es idénticamente nula, de modo que por el ejemplo (2) anterior, es suprayectiva.

(5) La aplicación derivada $\mathbb{K}_n[T] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[T]$, $P \mapsto P'$ es suprayectiva, ya que todo polinomio de grado $\leq n-1$ tiene una primitiva, que es un polinomio de grado $\leq n$, luego su imagen es $\mathbb{K}_{n-1}[T]$. Por otra parte, el núcleo consiste en los polinomios constantes, es decir, su núcleo es \mathbb{K} . \square

Hemos señalado en II.9.6, p. 190 (3) que toda aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ cumple

$$f(L[u_1, \dots, u_q]) = L[f(u_1), \dots, f(u_q)],$$

luego en particular *conserva la dependencia lineal*: si un vector u de E depende de otros $u_1, \dots, u_q \in E$, entonces la imagen de aquél depende de las imágenes de éstos. Podemos reformular esto diciendo que *si las imágenes de unos vectores dados son independientes en F , entonces los vectores dados lo son en E* . La cuestión es cuándo se cumple el recíproco, y resulta lo siguiente:

Proposición 9.10 Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) f conserva la independencia lineal: si u_1, \dots, u_p son vectores independientes en E , sus imágenes $f(u_1), \dots, f(u_p)$ lo son en F .
- (ii) El núcleo de f es trivial: $\ker(f) = \{0\}$.
- (iii) f es inyectiva.

Demostración. Que (ii) se deduce de (i) resulta de que para un sólo vector, ser independiente es ser no nulo. Veamos ahora que (ii) implica (iii). Si $u \neq v$ son vectores distintos de E entonces $u - v \neq 0$, luego $u - v \notin \ker(f)$, es decir $f(u) - f(v) = f(u - v) \neq 0$, así que $f(u) \neq f(v)$. Por tanto, f es inyectiva.

Queda probar que (i) se cumple si f es inyectiva. Sean $u_1, \dots, u_p \in E$ vectores independientes, y consideremos una combinación lineal nula de sus imágenes:

$$\lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_p f(u_p) = 0.$$

Por la linealidad de f , y puesto que $f(0) = 0$,

$$f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_p f(u_p) = 0 = f(0),$$

y como f es inyectiva, se deduce que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$. Pero los u_j son independientes, luego todos los λ_j son nulos. Esto prueba que las imágenes son independientes, como se quería. \square

Proposición y Definición 9.11 Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Si f es biyectiva, entonces su inversa f^{-1} es también lineal.

En ese caso se dice que f es un *isomorfismo (lineal)*, y que E y F son *isomorfos*.

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in F$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Como f es biyectiva, existen $u_1, u_2 \in E$ tales que $f(u_1) = v_1$ y $f(u_2) = v_2$. Se cumple que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= f^{-1}(\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 f^{-1}(v_1) + \lambda_2 f^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Por tanto, f^{-1} es lineal. \square

Cuando dos espacios vectoriales son isomorfos, sus propiedades como tales son las mismas: cualquier cosa que digamos sobre uno se traslada al otro utilizando un isomorfismo entre ambos. En realidad, ya hemos usado esto de manera muy provechosa. En efecto, si \mathcal{B} es una base de un espacio de tipo finito E , y denotamos $x = (x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas respecto de \mathcal{B} de un vector $u \in E$, la aplicación $\theta_{\mathcal{B}} : E \rightarrow \mathbb{K}^n : u \mapsto x$ es un isomorfismo. El lector reconocerá este isomorfismo detrás de muchos argumentos utilizados en la lección 7.

Comprobemos ahora que la composición $h = g \circ f$ de dos aplicaciones lineales $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ es lineal. En efecto, dados vectores $u, v \in E$ y escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned} h(\lambda u + \mu v) &= g(f(\lambda u + \mu v)) = g(\lambda f(u) + \mu f(v)) \\ &= \lambda g(f(u)) + \mu g(f(v)) = \lambda h(u) + \mu h(v). \end{aligned}$$

En lo que concierne a la composición de aplicaciones lineales, una construcción básica es la siguiente:

Proposición 9.12 *Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal, y consideremos la proyección $\pi : E \rightarrow E/\ker(f)$ y la inclusión $j : \operatorname{im}(f) \hookrightarrow F$. Entonces $\bar{f} : E/\ker(f) \rightarrow \operatorname{im}(f)$, $[v] \mapsto f(v)$ es la única aplicación lineal tal que*

$$f = j \circ \bar{f} \circ \pi.$$

Es decir, f admite la factorización canónica descrita por el siguiente diagrama conmutativo de aplicaciones lineales:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow \pi & & \uparrow j \\ E/\ker(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \operatorname{im}(f) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} v & \longrightarrow & f(v) \\ \downarrow & & \uparrow \\ [v] & \longrightarrow & \bar{f}([v]) = f(v) \end{array}$$

Además, π es suprayectiva, \bar{f} es biyectiva y j es inyectiva.

En particular $E/\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$ son isomorfos, hecho que se conoce como primer teorema de isomorfía.

Demostración. Lo esencial es que la aplicación \bar{f} está bien definida. Supongamos que $[w] = [v]$, y comprobemos que $\bar{f}(w) = \bar{f}(v)$. Como w y v son

equivalentes módulo $\ker(f)$ su resta $w - v = u \in \ker(f)$, de donde deducimos que $0 = f(u) = f(w - v) = f(w) - f(v)$, luego $f(w) = f(v)$ como se quería. La linealidad de \bar{f} se comprueba inmediatamente:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\lambda[v] + \mu[w]) &= \bar{f}([\lambda v + \mu w]) = f(\lambda v + \mu w) \\ &= \lambda f(v) + \mu f(w) = \lambda \bar{f}([v]) + \mu \bar{f}([w]).\end{aligned}$$

La sobreyectividad de π y la inyectividad de j se vieron en II.9.9, p. 193, y sólo falta ver que \bar{f} es biyectiva y es la única aplicación lineal que cumple la igualdad $f = j \circ \bar{f} \circ \pi$. En primer lugar comprobamos que para cada vector $u \in E$ se tiene

$$(j \circ \bar{f} \circ \pi)(u) = (j \circ \bar{f})([u]) = j(\bar{f}([u])) = j(f(u)) = f(u),$$

lo que demuestra que $f = j \circ \bar{f} \circ \pi$. Sea $g : E/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$ otra aplicación lineal que cumple la igualdad $f = j \circ g \circ \pi$. Hemos de probar que $g = \bar{f}$. Ahora bien, para cada $[u] = \pi(u) \in E/\ker(f)$ se tiene

$$\begin{aligned}g([u]) &= j(g([u])) = j(g(\pi(u))) = (j \circ g \circ \pi)(u) = f(u) \\ &= j((\bar{f} \circ \pi)(u)) = (\bar{f} \circ \pi)(u) = \bar{f}([u]).\end{aligned}$$

La sobreyectividad de \bar{f} se comprueba así:

$$\text{im}(\bar{f}) = \bar{f}(E/\ker(f)) = \bar{f}(\pi(E)) = f(E) = \text{im}(f).$$

Por último probamos que \bar{f} es inyectiva, para lo que es suficiente demostrar, en virtud de II.9.10, p. 194, que el único elemento del núcleo de \bar{f} es el vector nulo $0 + \ker(f)$ del cociente $E/\ker(f)$. Ahora bien, si $[u] \in \ker(\bar{f})$, entonces $f(u) = \bar{f}([u]) = 0$, es decir, $u \in \ker(f)$, esto es, $[u] = 0 + \ker(f)$. \square

Ejemplo 9.13 La demostración anterior nos enseña cuándo una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ *factoriza* a través de una proyección $\pi_L : E \rightarrow E/L$, esto es, cuándo existe otra $\bar{f} : E/L \rightarrow F$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi_L$. Esto es así exactamente cuando $L \subset \ker(f)$, es decir, cuando $f|_L \equiv 0$. Y en ese caso podemos definir $\bar{f} : E/L \rightarrow F : [v] \mapsto f(v)$, de manera que $f = \bar{f} \circ \pi_L$. En efecto, si existe una aplicación lineal $\bar{f} : E/L \rightarrow F$ que cumple $f = \bar{f} \circ \pi_L$, entonces $L = \ker(\pi_L) \subset \ker(\bar{f} \circ \pi_L) = \ker(f)$.

Recíprocamente, si $f|_L \equiv 0$ la aplicación $\bar{f} : E/L \rightarrow F, [u] \mapsto f(u)$ está bien definida, es lineal y $f = \bar{f} \circ \pi_L$. La comprobación es la misma que en II.9.13, p. 196. Ilustremos esto con un ejemplo.

Sea $L \subset \mathbb{K}^4$ el subespacio descrito por:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Se quiere definir una aplicación lineal

$$\varphi : \mathbb{K}^4/L \rightarrow \mathbb{K}, v + L \mapsto x_1 + ax_2 + 2x_3 + bx_4, \quad v = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

eligiendo adecuadamente los escalares a y b . Podemos traducir esto como una factorización, considerando la aplicación lineal

$$f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}, v \mapsto x_1 + ax_2 + 2x_3 + bx_4,$$

de modo que φ no es más que $\bar{f} : \mathbb{K}^4/L \rightarrow \mathbb{K}$. Así pues, hay que elegir a y b para que f se anule idénticamente en L , es decir, $L \subset \ker(f)$.

Empezamos buscando una base de L . Al sumar sus ecuaciones se tiene $x_1 = -4x_3$, y sustituyendo este valor en la primera, resulta $x_2 = x_3 - 2x_4$. Por tanto, una base de L es la formada por los vectores u_1, u_2 con coordenadas $(-4, 1, 1, 0)$ y $(0, -2, 0, 1)$. Por tanto, la condición $L \subset \ker(f)$ equivale a

$$\begin{cases} f(u_1) = -4 + a + 2 = 0, \text{ o sea, } a = 2, \text{ y} \\ f(u_2) = -2a + b = 0, \text{ o sea, } b = 4. \end{cases} \quad \square$$

(9.14) Proyecciones y simetrías. (1) Sean E un espacio vectorial y V, W dos subespacios suplementarios: $E = V \oplus W$. Cada vector $u \in E$ se escribe de una única manera como suma $u = v + w$ con $v \in V, w \in W$. Esto permite definir las dos aplicaciones siguientes:

(i) La *proyección* $p : E \rightarrow E, u \mapsto v$, denominada *de base V y dirección W*. También se dice que p es la proyección *sobre V* de dirección W .

(ii) La *simetría* $s : E \rightarrow E, u \mapsto v - w$, denominada *de base V y dirección W*. También se dice que s es la simetría *respecto de V* de dirección W .

Comprobemos que ambas son aplicaciones lineales y que:

$$p \circ p = p, \quad s \circ s = \text{Id}_E, \quad s = 2p - \text{Id}_E.$$

Veamos que p es lineal. Sean $u_1 = v_1 + w_1$ y $u_2 = v_2 + w_2$, donde cada $v_i \in V$ y $w_i \in W$, y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces $\lambda v_1 + \mu v_2 \in V$ y $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$, y así

$$p(\lambda u_1 + \mu u_2) = p((\lambda v_1 + \mu v_2) + (\lambda w_1 + \mu w_2)) = \lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda p(u_1) + \mu p(u_2).$$

La comprobación de la igualdad $p \circ p$ es también inmediata, pues cada vector $v \in V$ se escribe como $v = v + 0$, donde $0 \in W$, por lo que

$$(p \circ p)(u) = p(p(u)) = p(v) = p(v + 0) = v = p(u).$$

Para demostrar que s es lineal es suficiente probar que $s = 2p - \text{Id}_E$, pues tanto p como Id_E son lineales. Ahora bien, para cada vector $u = v + w$, donde $v \in V$ y $w \in W$ se tiene

$$(s + \text{Id}_E)(u) = s(u) + u = (v - w) + (v + w) = 2v = 2p(u).$$

Por último, $s \circ s = \text{Id}_E$, ya que

$$(s \circ s)(u) = s(s(u)) = s(v - w) = s(v + (-w)) = v - (-w) = v + w = u.$$

(2) Recíprocamente, supongamos que $p : E \rightarrow E$ es una aplicación lineal tal que $p \circ p = p$. Entonces $V = \text{im}(p)$ y $W = \ker(p)$ son subespacios suplementarios de E , y p es la proyección de base V y dirección W .

En efecto, observamos en primer lugar que si $u \in V \cap W$, existe $v \in E$ tal que $u = p(v)$, y por tanto $u = p(v) = p(p(v)) = p(u) = 0$. Así $V \cap W = \{0\}$, es decir, la suma $V + W$ es ciertamente directa. Ahora consideramos la siguiente igualdad trivial para un vector arbitrario $u \in E$:

$$u = v + w, \quad \text{con } v = p(u) \text{ y } w = u - p(u).$$

Como $p(w) = p(u) - p(p(u)) = 0$, deducimos que $v \in V$ y $w \in W$, por lo que $V + W = E$. En fin, la misma igualdad muestra que p es la proyección $u \mapsto v$ predicha.

(3) Como otro recíproco, supongamos ahora dada una aplicación lineal $s : E \rightarrow E$ tal que $s \circ s = \text{Id}_E$. Entonces $V = \ker(\text{Id}_E - s)$ y $W = \ker(\text{Id}_E + s)$ son suplementarios y s es la simetría de base V y dirección W .

En efecto, si $u \in V \cap W$ resulta que $u = s(u)$ y $u + s(u) = 0$, luego $2u = 0$, por lo que $u = 0$. Esto prueba que $V \cap W = \{0\}$. Para demostrar la igualdad $E = V + W$ es suficiente comprobar que para cada $u \in E$ se cumple que $v = u + s(u) \in V$ y $w = u - s(u) \in W$. Hecho esto, $2u = v + w \in V + W$.

La comprobación es un cálculo directo:

$$\begin{aligned} (\text{Id}_E - s)(v) &= v - s(v) = u + s(u) - s(u + s(u)) = u - (s \circ s)(u) = 0, \quad \text{e} \\ (\text{Id}_E + s)(w) &= w + s(w) = u - s(u) + s(u - s(u)) = u - (s \circ s)(u) = 0. \end{aligned}$$

Para terminar sólo queda probar que si $u = v + w$ donde $v \in V$ y $w \in W$, entonces $s(u) = v - w$. En efecto, $s(v) = v$ y $s(w) = -w$, por lo que $s(u) = s(v) + s(w) = v - w$.

(4) Toda simetría es un isomorfismo del espacio vectorial E en sí mismo, con inverso ella misma. Pero hay otros muchos isomorfismos, por ejemplo las homotecias (de razón $\neq 0$). La colección de todos ellos se denota $\text{GL}(E)$, y es un grupo para la composición de aplicaciones, denominado *grupo lineal de E* . Su estudio es uno de los asuntos importantes de la geometría. \square

En el caso de una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ entre espacios vectoriales de tipo finito, se pueden comparar dimensiones. En efecto, si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de E , tenemos, por II.9.6, p. 190 (3),

$$\text{im}(f) = f(E) = f(L[u_1, \dots, u_n]) = L[f(u_1), \dots, f(u_n)],$$

con lo que $\dim(E) = n \geq \dim(\text{im}(f))$. Si además f es inyectiva, conserva la independencia lineal, luego $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es una base de la imagen, y $\dim(E) = \dim(\text{im}(f))$; y si f es un isomorfismo, $\dim(E) = \dim(F)$. Esto son casos particulares (importantes) del siguiente resultado:

Proposición 9.15 *Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal, E y F de tipo finito. Entonces:*

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)).$$

Demostración. Por el primer teorema de isomorfía, tenemos $\dim(\text{im}(f)) = \dim(E/\ker(f))$, y como esta última dimensión es igual a $\dim(E) - \dim(\ker(f))$ (II.8.12, p. 182), se sigue la igualdad del enunciado. \square

Observaciones 9.16 Las siguientes consecuencias son muy útiles.

(1) Si f es inyectiva, entonces $\dim(E) \leq \dim(F)$.

En efecto, si $\ker(f) = \{0\}$, entonces $\dim(E) = \dim(\text{im}(f)) \leq \dim(F)$, pues $\text{im}(f) \subset F$.

(2) Si f es suprayectiva, entonces $\dim(E) \geq \dim(F)$, pues siempre se cumple que $\dim(E) \geq \dim(\text{im}(f))$.

(3) Si $\dim(E) = \dim(F)$, entonces f es inyectiva si y sólo si es suprayectiva, si y sólo si es biyectiva.

En efecto, si E y F tienen igual dimensión, resulta

$$\dim(F) = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)),$$

luego $\dim(\ker(f)) = 0$ si y sólo si $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(F)$, y resulta la afirmación. \square

Lo que nos queda ahora es describir las aplicaciones lineales entre espacios de tipo finito mediante ecuaciones y matrices, y comprender mejor la naturaleza de aquéllas y de éstas. Empezamos con el siguiente refinamiento de la observación II.9.5, p. 189:

Proposición 9.17 *Sea E un espacio vectorial de tipo finito y consideremos una base suya $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Sea F un segundo espacio vectorial (no necesariamente de tipo finito), y $v_1, \dots, v_n \in F$. Entonces, existe una única aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ tal que $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.*

Demostración. Que si f existe es única se sigue de II.9.5, p. 189, puesto que $E = L[u_1, \dots, u_n]$. Veamos cómo construir f . Cualquier vector $u \in E$ se escribe

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

de manera única, donde x_1, \dots, x_n son sus coordenadas respecto de \mathcal{B} . Entonces definimos f del único modo posible:

$$f(u) = x_1 f(u_1) + \dots + x_n f(u_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Esto define bien una aplicación $f : E \rightarrow F$, pues los x_j están unívocamente determinados por u , y afirmamos que es una aplicación lineal. En efecto, sean $u, w \in E$ con coordenadas (x_1, \dots, x_n) y (z_1, \dots, z_n) respecto de \mathcal{B} y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Las coordenadas del vector $\lambda u + \mu w$ son $(\lambda x_1 + \mu z_1, \dots, \lambda x_n + \mu z_n)$, luego:

$$f(\lambda u + \mu w) = \sum_j (\lambda x_j + \mu z_j) v_j = \sum_j \lambda x_j v_j + \sum_j \mu z_j v_j = \lambda f(u) + \mu f(w).$$

Hemos terminado. \square

(9.18) Ecuaciones y matriz de una aplicación lineal. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Sean $\mathcal{B}_E = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_F = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de E y F respectivamente.

Dado un vector $u \in E$ denotamos por (x_1, \dots, x_n) sus coordenadas respecto de \mathcal{B}_E y por (y_1, \dots, y_m) las coordenadas de $f(u)$ respecto de \mathcal{B}_F .

(1) Existe una única matriz M tal que para cada $u \in E$ se tiene:

$$y^t = Mx^t.$$

Veamos primero que M es única. Para ello, observamos que las coordenadas respecto de la base \mathcal{B}_E del vector u_j son $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con el 1 en el lugar j -ésimo. Por tanto las coordenadas (a_{1j}, \dots, a_{mj}) de $f(u_j)$ respecto de la base \mathcal{B}_F se obtienen calculando el producto Me_j^t , y este producto es la columna j -ésima de M . En consecuencia, M está completamente determinada por la condición deseada. Probada así la unicidad, sea M la matriz (a_{ij}) , una vez más conforme a nuestra manera de representar vectores por columnas, y comprobemos que se cumple lo que se quiere. Tenemos $f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$ para cada j , luego

$$\begin{aligned} f(u) &= \begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i v_i, \\ f(\sum_{j=1}^n x_j u_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(u_j) \\ = \sum_{j=1}^n x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i) = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) v_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, por la unicidad de las coordenadas,

$$(*) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{para todo } i,$$

que es la igualdad matricial $y^t = Mx^t$ buscada. \square

La matriz M recibe el nombre de *matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$* , y se denota $M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. Las igualdades $(*)$ se llaman *ecuaciones de f respecto de las bases dadas*.

Por ejemplo, si elegimos dos bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' en E , entonces $M_{\text{Id}_E}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ es la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Si las dos bases son iguales, $M_{\text{Id}_E}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ es la matriz identidad.

(2) Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ dos aplicaciones lineales, y $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ bases de los tres espacios involucrados. Entonces:

$$(**) \quad M_{g \circ f}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = M_g(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

En efecto, sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas de un vector $u \in E$ respecto de la base \mathcal{B}_E . Entonces las coordenadas $y = (y_1, \dots, y_m)$ de $f(u)$ respecto

de \mathcal{B}_F cumplen $y^t = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)x^t$, y las coordenadas $z = (z_1, \dots, z_p)$ de $g(f(u))$ respecto de \mathcal{B}_G son $z^t = M_g(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)y^t$. Por tanto,

$$z^t = M_g(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)y^t = M_g(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)x^t.$$

De la definición de matriz de una aplicación lineal respecto de bases dadas se desprende que $z^t = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)x^t$, y de la unicidad deducimos la igualdad buscada (**).

En particular si $f : E \rightarrow F$ es isomorfismo, $g = f^{-1}$ y $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_G$, obtenemos

$$M_{\text{Id}_E}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Como la primera matriz es la identidad, resulta que $M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ es invertible, y su inversa es $M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)$.

(3) Veamos cómo varía la matriz de la aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ cuando varían las bases empleadas para su cálculo. Sean \mathcal{B}'_E y \mathcal{B}'_F otras dos bases de E y F respectivamente. Aplicando lo probado en el apartado anterior a la igualdad $f = f \circ \text{Id}_E$, tomando en E las bases \mathcal{B}_E y \mathcal{B}'_E y en F la base \mathcal{B}_F resulta

$$M_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F) = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)M_{\text{Id}_E}(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E) = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)C(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E).$$

Además, $f = \text{Id}_F \circ f$, y empleando de nuevo (2), eligiendo en E la base \mathcal{B}'_E y en F las bases \mathcal{B}_F y \mathcal{B}'_F se tiene

$$M_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = M_{\text{Id}_F}(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)M_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F) = C(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)M_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F).$$

Sustituyendo se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} M_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) &= C(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)M_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F) \\ &= C(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)C(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E). \end{aligned}$$

(4) Si $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$ y fijamos sendas bases $\mathcal{B}_E = \{u_1, \dots, u_n\}$ en E y $\mathcal{B}_F = \{v_1, \dots, v_m\}$ en F , la aplicación

$$\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), f \mapsto M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

es una biyección. En efecto, para cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ existe una única aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ cuya matriz respecto de las bases \mathcal{B}_E y \mathcal{B}_F es A . Esta aplicación viene definida por

$$f\left(\sum_{j=1}^n x_j u_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i,$$

que cumple $M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = A$. Esta biyección es de hecho un isomorfismo. En efecto, se trata de comprobar que

$$M_{\lambda f + \mu g}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mu M_g(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Ahora bien, si $M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (a_{ij})$ y $M_g(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (b_{ij})$ resulta que

$$(\lambda f + \mu g)(u_j) = \lambda f(u_j) + \mu g(u_j) = \lambda \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i + \mu \sum_{i=1}^m b_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) v_i,$$

lo que demuestra la igualdad buscada. En consecuencia:

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \cdot \dim(F).$$

(5) Cuando $E = F$ podemos tomar $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, y la anterior biyección induce otra $\text{GL}(E) \rightarrow \text{GL}(n) : f \mapsto M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ entre el grupo de los isomorfismos de E y el grupo de las matrices invertibles de orden $n = \dim(E)$.

En efecto, téngase en cuenta que cualesquiera $f, g : E \rightarrow E$ se pueden componer $g \circ f : E \rightarrow E$, y según hemos comprobado en el apartado (2),

$$M_{g \circ f}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = M_g(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E).$$

Esto significa que la biyección es un isomorfismo de grupos, que depende de la base utilizada. \square

Ejemplo 9.19 Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ del ejemplo de II.9.5, p. 189:

$$f(2, 1, 1) = (3, 0, 1), \quad f(1, 0, -1) = (1, 1, -1), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 2, 0).$$

Para determinar f podemos razonar ahora como sigue. Los tres vectores $(2, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(0, 0, 1)$ forman una base \mathcal{B} , y podemos escribir inmediatamente la matriz de f si elegimos las bases adecuadas:

$$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, $M_f(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{E}) C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$, y observamos que la matriz de cambio es

$$C(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} M_f(\mathcal{E}, \mathcal{E}) &= M_f(\mathcal{B}, \mathcal{E})C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -8 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y las ecuaciones de f respecto de las bases estándar son

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -8 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = 4y - z, \\ y' = 3x - 8y + 2z, \\ z' = -x + 3y. \end{cases}$$

También podemos obtener la matriz respecto de las bases estándar calculando directamente las imágenes de sus vectores:

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = f((1, 0, -1) + (0, 0, 1)) \\ \quad = f(1, 0, -1) + f(0, 0, 1) = (1, 1, -1) + (-1, 2, 0) = (0, 3, -1), \\ f(0, 1, 0) = f((2, 1, 1) - 2(1, 0, -1) - 3(0, 0, 1)) \\ \quad = f(2, 1, 1) - 2f(1, 0, -1) - 3f(0, 0, 1) \\ \quad = (3, 0, 1) - 2(1, 1, -1) - 3(-1, 2, 0) = (4, -8, 3), \\ f(0, 0, 1) = (-1, 2, 0). \end{cases}$$

Como se ve resultan las *columnas* de la matriz calculada anteriormente. \square

(9.20) Rango de una aplicación lineal. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios de tipo finito. Elegimos dos bases \mathcal{B}_E y \mathcal{B}_F de E y F , respecto de las cuales las coordenadas se denotarán x e y respectivamente. Consideramos la matriz $M = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. A partir de las ecuaciones de f se obtienen ecuaciones de su imagen y de su núcleo.

(1) En cuanto a la imagen, sabemos que está generada por las imágenes de los vectores de \mathcal{B}_E . Como las columnas de M son las coordenadas de esas imágenes respecto de \mathcal{B}_F , resulta que $y^t = M\lambda^t$ son unas ecuaciones paramétricas de la imagen y $\text{rg}(M) = \dim(\text{im}(f))$. Este rango es pues el mismo para todas las matrices de f , o en otras palabras, es independiente de las bases elegidas: se denomina *rango de f* y se denota $\text{rg}(f)$.

(2) Para el núcleo, obsérvese que $f(u) = 0$ si y sólo si $Mx^t = 0$, luego éstas son unas ecuaciones implícitas del núcleo. Además:

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{codim}(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)).$$

Esto muestra de nuevo que $\operatorname{rg}(f)$ está bien definido, y de paso redemuestra la igualdad de II.9.15, p. 199.

(3) El rango nos dice inmediatamente qué tipo de aplicación lineal es f :

(i) f es inyectiva si y sólo si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$, por (2).

(ii) f es suprayectiva si y sólo si $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$, por (1).

(iii) f es biyectiva si y sólo si $\dim(E) = \dim(F) = \operatorname{rg}(f)$. □

Observaciones 9.21 Sean E un espacio vectorial de tipo finito y \mathcal{B} una base de E . Denotaremos x las coordenadas respecto de \mathcal{B} . Sea $V \subset E$ un subespacio. Vamos a revisar el significado de las ecuaciones de V respecto de \mathcal{B} .

(1) Sean $x^t = B\lambda^t$ unas ecuaciones paramétricas de V , y digamos que hay q parámetros. Sea $f : \mathbb{K}^q \rightarrow E$ la aplicación lineal con matriz $B = M_f(\mathcal{E}, \mathcal{B})$. Esto significa que la j -ésima columna de B son las coordenadas de $u_j = f(e_j)$ respecto de \mathcal{B} . Pero entonces

$$V = L[u_1, \dots, u_q] = L[f(e_1), \dots, f(e_q)] = \operatorname{im}(f).$$

En otras palabras, unas ecuaciones paramétricas describen V como una imagen. Además, $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(B) = \dim(V) \leq q$. En particular, el número q de parámetros es mínimo, esto es $\dim(\mathbb{K}^q) = \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{im}(f))$, si y sólo si f es inyectiva.

(2) Sean ahora $Ax^t = 0$ unas ecuaciones implícitas de V , digamos m ecuaciones. Consideramos la aplicación lineal $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$ con matriz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{E})$. Así, que $Ax^t = 0$ sean ecuaciones de V significa que $V = \ker(f)$. Por tanto, unas ecuaciones implícitas describen V como un núcleo. Ahora tenemos $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = \dim(E) - \dim(V) \leq m$, y el número m de ecuaciones es mínimo si y sólo si f es suprayectiva.

(3) Dadas unas ecuaciones implícitas Mx^t de V , podemos utilizarlas para obtener coordenadas en V , simplemente prescindiendo de ciertas x_{j_1}, \dots, x_{j_r} entre las coordenadas x_j en E . Supongamos ahora que $f : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal cuyas ecuaciones respecto de una base \mathcal{B} de E y una base \mathcal{B}'

de F son

$$y_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Entonces las ecuaciones de la restricción $f|_V : V \rightarrow F$ se obtienen simplemente sustituyendo las coordenadas x_{j_1}, \dots, x_{j_r} por sus expresiones en función de las otras x_j (expresiones que se obtienen resolviendo el sistema $Mx^t = 0$). \square

Ejemplo 9.22 Consideremos la aplicación lineal

$$f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2, (x, y, z) \mapsto (s, t) = (3x - y + z, 4x + y - z).$$

(1) La matriz de f respecto de las bases estándar es

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

pues

$$f(1, 0, 0) = (3, 4), \quad f(0, 1, 0) = (-1, 1), \quad f(0, 0, 1) = (1, -1).$$

Es fácil recordar que los coeficientes de cada fila de esa matriz son los de las fórmulas que definen f :

$$\begin{cases} s = 3x - y + z, \\ t = 4x + y - z. \end{cases}$$

La aplicación f es suprayectiva, pues el rango de la matriz es 2 y su núcleo está formado por los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tales que

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0, \\ 4x + y - z = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = z, \end{cases}$$

luego $\ker(f) = L[(0, 1, 1)]$. Por supuesto, $\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\operatorname{im}(f)) = 1$.

(2) Ahora sea $H \subset \mathbb{K}^3$ el plano de ecuación $ax + y - bz = 0$ (con $a, b \in \mathbb{K}$), y consideremos la restricción $f|_H : H \rightarrow \mathbb{K}^2$. Como en H es $y = -ax + bz$, podemos tomar (x, z) como coordenadas en H . Respecto de esas coordenadas las ecuaciones de $f|_H$ son

$$\begin{cases} s = 3x - y + z = 3x - (-ax + bz) + z = (3 + a)x + (1 - b)z, \\ t = 4x + y - z = 4x + (-ax + bz) - z = (4 - a)x + (-1 + b)z, \end{cases}$$

y su matriz:

$$M_{f|_H} = \begin{pmatrix} 3 + a & 1 - b \\ 4 - a & -1 + b \end{pmatrix}.$$

Como $\det(M_{f|_H}) = 7(b-1)$, resulta que el rango es 2, y la restricción isomorfismo, si y sólo si $b \neq 1$. Para $b = 1$ el rango es siempre 1, luego tanto la imagen como el núcleo son rectas vectoriales (de \mathbb{K}^2 y $H \subset \mathbb{K}^3$ respectivamente). Para calcularlas basta encontrar un vector no nulo en cada una:

(i) Se comprueba inmediatamente que $(x, z) = (0, 1) \in \ker(f|_H)$, y como en H es $y = -ax + z$, ese núcleo está generado por el vector $(0, 1, 1)$.

(ii) Puesto que la primera columna de la matriz de $f|_H$ no es nula, el vector $(3+a, 4-a)$ genera la imagen de $f|_H$. \square

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Encontrar las ecuaciones de la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ que cumple:

$$f(1, 0, 1) = (1, 0, -1), \quad f(2, 1, 0) = (0, 3, 1), \quad f(-1, 0, -2) = (0, 1, 1).$$

Calcular la imagen y la imagen inversa del subespacio $V \subset \mathbb{K}^3$ generado por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

Número 2. De una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ se sabe que:

- (i) la recta generada por $(1, 0, 0)$ tiene por imagen la recta $x = z = y$,
- (ii) la imagen del vector $(0, 1, 0)$ es el vector $(-2, 1, 1)$,
- (iii) el núcleo de f está generado por el vector $(1, 1, 1)$, y
- (iv) la imagen inversa del plano $y + z = 0$ contiene al vector $(0, 0, 1)$.

¿De qué aplicación lineal se trata?

Número 3. Sean $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal y a un escalar que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 2, 2)$, $f(0, 1, 0, 0) = (a, 3, -1, 1)$,
- (ii) el núcleo de f contiene al subespacio $x = y = z$, y
- (iii) existe un vector no nulo de \mathbb{K}^4 que se transforma mediante f en su triple.

Se pide:

- (1) Calcular la dimensión del núcleo de f y una base suya.
- (2) Probar que $f(0, 0, 1, 0) = (-1-a, -3, -1, -3)$.
- (3) Calcular la matriz M de f respecto de la base estándar.

Número 4. (1) ¿Existe alguna aplicación lineal $\mathbb{K}^{1957} \rightarrow \mathbb{K}^{1957}$ cuya imagen coincida con su núcleo?

(2) ¿Existen una aplicación lineal inyectiva $f : E \rightarrow F$ y otra suprayectiva $g : F \rightarrow E$ tales que: $\text{im}(f) = \ker(g)$, con $\dim(F) = 357$?

Número 5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

y consideremos el vector $u = (1 - b, b, 1 + b)$.

(1) Determinar a y b para que $u \in \text{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. Obtener una base y unas ecuaciones implícitas y paramétricas de $\text{im}(f)$ y $\ker(f)$.

(2) Encontrar un subespacio $L \subset \mathbb{R}^3$ de dimensión mínima entre los que cumplen $f(L) = \text{im}(f)$.

Número 6. (1) Sean $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales y V un subespacio vectorial de E . Probar que $f^{-1}(f(V)) = V$ si y sólo si V contiene al núcleo de f .

(2) Sean $f : E \rightarrow E$ una aplicación lineal, y $u \in E$ un vector que no está en su núcleo. Se consideran las siguientes igualdades:

$$\text{im}(f) = L[f(u)] \quad \text{y} \quad E = L[u] \oplus \ker(f).$$

¿Es cierto que la primera implica la segunda? ¿Y el recíproco?

Número 7. Sea $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$, $x \mapsto y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar un subespacio vectorial V de \mathbb{K}^4 cuya dimensión sea mayor que la de $f(V)$ y menor que la de $f^{-1}(f(V))$.

✚ **Número 8.** Para cada matriz $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ consideramos la aplicación lineal

$$f_M : \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K}), X \mapsto MX.$$

(1) Describir la imagen y el núcleo de f_M y calcular sus dimensiones.

(2) Demostrar que el conjunto \mathcal{N} de las matrices $N \in \mathcal{M}_{q \times m}(\mathbb{K})$ tales que $\text{im}(f_M) \subset \ker(f_N)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{q \times m}(\mathbb{K})$ y calcular su dimensión. ¿Para qué matrices N se cumple $\text{im}(f_M) = \ker(f_N)$?

✚ **Número 9.** Sean E un espacio vectorial de tipo finito, y $f : E \rightarrow E$ una aplicación lineal. Demostrar que $\dim(\text{im}(f) \cap \ker(f)) = \dim(\text{im}(f)) - \dim(\text{im}(f^2))$, y deducir que $E = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$ si y sólo si $\text{im}(f) = \text{im}(f^2)$.

Número 10. Sean $E = \mathbb{C}_3[T]$ (polinomios de grado ≤ 3), y $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Se consideran las bases $\mathcal{E} = \{1, T, T^2, T^3\}$ de E y

$$\mathcal{E}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de F . Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, consideramos la aplicación lineal $\varphi : E \rightarrow F$ dada por

$$\varphi(a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + a_3A^3, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

y denotamos M la matriz de φ respecto de las bases \mathcal{E} y \mathcal{E}' . Se pide:

- (1) Calcular, en función de λ , las dimensiones del núcleo y de la imagen de φ .
- (2) Comprobar que $W = \{D \in \text{im}(\varphi) : \text{tr}(D) = 0\}$ es un subespacio vectorial de F , y calcular su dimensión.
- (3) Sea $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4 : x \mapsto y$ la aplicación lineal definida por $y^t = Mx^t$. ¿Para qué valores de λ es $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \{0\}$?

Número 11. Consideramos dos escalares $a, b \in \mathbb{K}$, la aplicación lineal

$$f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto ax_1 - x_2 + bx_3,$$

y el subespacio vectorial $H = \{x \in \mathbb{K}^3 : x_1 = x_2\}$. Determinar a y b sabiendo que la aplicación $g : \mathbb{K}^3/H \rightarrow \mathbb{K}$, $[x] \mapsto f(x)$ está bien definida.


Número 12. Sean $E = \mathbb{K}_3[T]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que 3 cuyos coeficientes pertenecen al cuerpo \mathbb{K} y L el subespacio generado por los polinomios

$$P_1(T) = 3 + 2T + T^2, \quad P_2(T) = -2 - 3T + T^3, \quad P_3(T) = 1 - T + T^2 + T^3.$$


Consideramos el espacio cociente $F = E/L$ y la proyección canónica $\pi : E \rightarrow F$, y sean $f, g : E \rightarrow \mathbb{K}$ las aplicaciones lineales definidas, respectivamente, por:

$$f : P(T) \mapsto 2P(0) - P(1), \quad g : P(T) \mapsto P'(-2).$$

¿Existen aplicaciones lineales $\varphi, \psi : F \rightarrow \mathbb{K}$ tales que $f = \varphi \circ \pi$ y $g = \psi \circ \pi$?

 **Número 13.** Sean E, F, G espacios vectoriales de tipo finito.

- (1) Dadas dos aplicaciones lineales $f : E \rightarrow F$ y $g : E \rightarrow G$, demostrar que existe una tercera $h : F \rightarrow G$ tal que $h \circ f = g$ si y sólo si $\ker(f) \subset \ker(g)$. ¿Cuándo podemos además elegir h inyectiva?
- (2) Dadas dos aplicaciones lineales $f : F \rightarrow E$ y $g : G \rightarrow E$, demostrar que existe una tercera $h : G \rightarrow F$ tal que $f \circ h = g$ si y sólo si $\text{im}(f) \supset \text{im}(g)$. ¿Cuándo podemos además elegir h suprayectiva?

 **Número 14.** Sea M una matriz $m \times n$ de rango r , que es producto de otras dos: $M = AB$. Demostrar utilizando aplicaciones lineales las siguientes propiedades del rango de matrices:

- (1) En general se cumple $\text{rg}(A), \text{rg}(B) \geq r$, pero se puede elegir A con r columnas, todas independientes, y B con r filas, todas independientes.
- (2) En general, $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) - p \leq \text{rg}(M)$, donde p es el número de columnas de A (o de filas de B). ¿Cuándo se tiene la igualdad?
- (3) Sea N una matriz $n \times n$ idempotente (esto es, $N^2 = N$ es la matriz identidad). Calcular $\text{rg}(N - I) + \text{rg}(N + I)$.

✚ **Número 15.** Sean $f, g : E \rightarrow E$ dos endomorfismos tales que $f \circ g = 0$. Demostrar que si $f^k + g^k$ es un isomorfismo para algún $k \geq 1$, entonces lo es para todo $k \geq 1$.

10. El espacio dual

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Se llama *espacio dual de E* al espacio $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. El espacio dual se denota habitualmente por E^* , y sus elementos se llaman *formas* lineales. Este espacio es fundamental para la comprensión de la estructura vectorial de E , especialmente de sus subespacios. Esta breve lección es una introducción básica al tema, y supondremos siempre que E es de tipo finito. Entonces, por II.9.18, p. 200, sabemos que

$$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \cdot \dim(\mathbb{K}) = \dim(E).$$

Ponemos $\dim(E) = \dim(E^*) = n$.

(10.1) Formas e hiperplanos. Las formas lineales deben entenderse como ecuaciones, y en realidad, ya conocemos cómo se comportan. Expliquemos esto.

(1) Fijamos una base \mathcal{B} de E y la base $\{1\}$ en \mathbb{K} . Entonces una forma lineal $h \in E^*$ tiene una matriz $M_h = M_h(\mathcal{B}, \{1\})$ de tamaño $1 \times n$, luego simplemente $M_h = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$, y para cada vector $u \in E$ de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de \mathcal{B} , tenemos

$$h(u) = M_h x^t = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

Por tanto el núcleo $H = \ker(h)$ tiene la ecuación implícita $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$, que abreviaremos $h = 0$. Deducimos inmediatamente de esto que si $h \neq 0$, su núcleo H es un hiperplano de E . Pero más aún, como la aplicación

$$E^* \rightarrow \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K}), h \mapsto M_h$$

es un isomorfismo entre formas lineales y matrices, todo lo que digamos de formas lineales es equivalente a lo que digamos de sus matrices, o de sus ecuaciones, y por tanto tendrá un significado preciso para los hiperplanos, que son sus núcleos.

(2) Consideremos ahora esa correspondencia: $h \mapsto H = \ker(h)$, que asocia hiperplanos a formas no nulas. Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula: basta elegir una ecuación implícita suya. Pero esta forma no es única. Que los núcleos de dos formas h y ℓ coincidan significa que las

ecuaciones $h = 0$ y $\ell = 0$ tienen las mismas soluciones y esto equivale a que dichas ecuaciones son proporcionales, es decir, a que exista $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\ell = \lambda h$. Esto significa que el conjunto de formas de E^* cuyo núcleo es H es el resultado de quitarle a la recta $L[h]$ la forma nula. De esta manera los hiperplanos de E se corresponden biyectivamente con las rectas de E^* . Este es el primer paso de lo que se denomina *dualidad canónica*.

(3) Utilizando la correspondencia $h \mapsto H = \ker(h)$ podemos entender las operaciones geométricas con hiperplanos mediante el espacio dual E^* . Por ejemplo, podemos hablar de la independencia de hiperplanos. Con precisión:

- (i) $h \in L[h_1, \dots, h_p]$ si y sólo si $H \supset H_1 \cap \dots \cap H_p$, con $H_i = \ker(h_i)$.
- (ii) $\dim(L[h_1, \dots, h_p]) = \text{codim}(H_1 \cap \dots \cap H_p)$.

Comprobemos (i). La condición $h \in L[h_1, \dots, h_p]$ equivale a que la ecuación $h = 0$ es combinación de las ecuaciones $h_1 = 0, \dots, h_p = 0$, y esto es lo mismo que decir que los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0, \\ \vdots \\ h_p = 0 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0, \\ \vdots \\ h_p = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones. Pero el conjunto de soluciones del primer sistema es $H_1 \cap \dots \cap H_p$, y el conjunto de soluciones del segundo es $H \cap H_1 \cap \dots \cap H_p$. Decir que ambas intersecciones coinciden equivale a que $H_1 \cap \dots \cap H_p \subset H$.

Para (ii), vimos en II.7.16, p. 166 que la codimensión de

$$H_1 \cap \dots \cap H_p = \{h_1 = 0, \dots, h_p = 0\}$$

es el rango de sus ecuaciones implícitas, es decir, el máximo número de ellas independientes, o lo que es igual, el máximo número de formas independientes entre $\{h_1, \dots, h_p\}$, esto es, la dimensión de $L[h_1, \dots, h_p]$. \square

Ejemplo 10.2 Podemos ahora mirar con otros ojos el ejemplo II.9.13, p. 196. Recordemos que se tenía el subespacio $L \subset \mathbb{K}^4$ de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 : x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ h_2 : x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{array} \right.$$

y se buscan $a, b \in \mathbb{K}$ para que la aplicación

$$f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}, v \mapsto x_1 + ax_2 + 2x_3 + bx_4, \quad v = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

factorice a través de $\pi_L : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4/L$. Es decir, hay que elegir a y b para que f se anule idénticamente en L , o lo que es igual, $L = \ker(h_1) \cap \ker(h_2) \subset \ker(f)$. Esto equivale a que $f \in L[h_1, h_2]$, o sea:

$$2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & a & 2 & b \end{pmatrix},$$

y por menores esto se escribe:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

Obtenemos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 4 - 2a = 0, & \text{o sea, } a = 2, \text{ y} \\ -8 + 2b = 0, & \text{o sea, } b = 4. \end{cases}$$

□

(10.3) Dualidad canónica. Utilizando lo anterior, podemos extender la relación entre hiperplanos de E y rectas de E^* a subespacios arbitrarios. Procederemos a partir del hecho de que todo subespacio $V \subset E$ es intersección de hiperplanos, II.8.8, p. 179. Esto significa que

$$V = \bigcap_{H \supset V} H,$$

y definimos

$$V^\vee = \{h \in E^* : H = \ker(h) \supset V\}.$$

Hay que ver que V^\vee es ciertamente un subespacio de E^* . Sean $h_1, h_2 \in V^\vee$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Entonces $V \subset \ker(h_1)$ y $V \subset \ker(h_2)$, luego para cada vector $v \in V$ se tiene

$$(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)(v) = \lambda_1 h_1(v) + \lambda_2 h_2(v) = 0,$$

luego $V \subset \ker(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)$, esto es, $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \in V^\vee$.

□

Ahora podemos describir la biyección $V \leftrightarrow V^\vee$ entre los subespacios de E y los subespacios de E^* con las fórmulas:

$$\begin{cases} V^\vee = \{h \in E^* : h(v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}, \\ V = \{v \in E : h(v) = 0 \text{ para todo } h \in V^\vee\}. \end{cases}$$

Comprobemos que efectivamente es una biyección. Dados subespacios V y W de E tales que $V \neq W$ podemos suponer, intercambiando los papeles de V y W si es preciso, que existe un vector $w \in W \setminus V$. En virtud de II.8.8, p. 179, el subespacio V es intersección de hiperplanos, es decir, existen formas lineales $h_1, \dots, h_p \in E^*$ tales que $V = \{u \in E : h_1(u) = 0, \dots, h_p(u) = 0\}$. Como $w \in E \setminus V$ existe un índice i tal que $h_i(w) \neq 0$, por lo que $h_i \in V^\vee \setminus W^\vee$, luego $V^\vee \neq W^\vee$. Eso prueba que la aplicación $V \rightarrow V^\vee$ es inyectiva.

En cuanto a la sobreyectividad, dado un subespacio L de E^* elegimos una base suya $\{h_1, \dots, h_p\}$ y se deduce de II.10.1(3)(i), p. 210 que el subespacio $V = \{u \in E : h_1(u) = 0, \dots, h_p(u) = 0\}$ cumple que $V^\vee = L$.

Escrito de otro modo, se tiene la siguiente igualdad fundamental:

$$(H_1 \cap \dots \cap H_q)^\vee = L[h_1, \dots, h_q], \quad \text{donde } H_i = \ker(h_i).$$

Esto significa que h_1, \dots, h_q generan V^\vee si y sólo si $h_1 = 0, \dots, h_q = 0$ son unas ecuaciones de V . Con esto y II.10.1(3)(ii), p. 210, deducimos que

$$\dim(V^\vee) = \dim(E) - \dim(V) = \text{codim}(V).$$

Dados subespacios V y W de E comprobemos las siguientes afirmaciones:

$$(i) \quad V \supset W \text{ si y sólo si } V^\vee \subset W^\vee.$$

$$(ii) \quad (V + W)^\vee = V^\vee \cap W^\vee.$$

$$(iii) \quad (V \cap W)^\vee = V^\vee + W^\vee.$$

(i) Si $W \subset V$ entonces cada $h \in V^\vee$ se anula en V , luego en W , esto es, $h \in W^\vee$. Recíprocamente, sean $h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_q \in E^*$ tales que

$$V = \{h_1 = 0, \dots, h_p = 0\} \quad \text{y} \quad W = \{g_1 = 0, \dots, g_q = 0\}.$$

Cada $h_i \in V^\vee \subset W^\vee$, luego $W \subset \ker(h_1) \cap \dots \cap \ker(h_p) = V$.

(ii) Para cada $h \in E^*$ la condición $h \in V^\vee \cap W^\vee$ equivale a que $V \subset \ker(h)$ y $W \subset \ker(h)$, o lo que es igual $V + W \subset \ker(h)$, es decir, $h \in (V + W)^\vee$.

(iii) Con las notaciones del apartado (i) se tiene

$$V \cap W = \{h_1 = 0, \dots, h_p = 0, g_1 = 0, \dots, g_q = 0\},$$

y en consecuencia, en virtud de II.8.4, p. 176,

$$(V \cap W)^\vee = L[h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_q] = L[h_1, \dots, h_p] + L[g_1, \dots, g_q] = V^\vee + W^\vee.$$

□

Ejemplo 10.4 Consideramos en $E = \mathbb{K}^4$ el subespacio V generado por los vectores $u = (1, 1, -1, 1)$ y $v = (2, 1, -3, 1)$. Como $V = L[u, v] = L[u] + L[v]$ deducimos

$$V^\vee = L[u]^\vee \cap L[v]^\vee,$$

y por tanto $V^\vee = \{h \in E^* : h(u) = h(v) = 0\}$. Por otra parte si

$$h : E \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4,$$

las condiciones $h(u) = h(v) = 0$ equivalen a

$$\begin{cases} a + b - c + d = 0, \\ 2a + b - 3c + d = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 2c, \\ b = -c - d. \end{cases}$$

Por tanto, V^\vee consiste en todas las formas del tipo

$$h : E \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 2cx_1 - (c + d)x_2 + cx_3 + dx_4,$$

con $c, d \in \mathbb{K}$.

A continuación relacionamos de una manera especial las bases de E^* con las bases de E .

(10.5) Bases duales. La elección de bases \mathcal{B} y \mathcal{B}^* en E y E^* se debe hacer de manera que vectores e hiperplanos se representen coordinadamente.

(1) Fijemos una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de E y la base $\{1\}$ en \mathbb{K} , y hagamos explícito el isomorfismo $\varphi : E^* \rightarrow \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^n$, $h \mapsto M_h = M_h(\mathcal{B}, \{1\})$ entre formas y matrices, o lo que es lo mismo, entre formas y vectores de \mathbb{K}^n , utilizado en II.10.1, p. 210.

Consideremos en \mathbb{K}^n los vectores e_1, \dots, e_n de la base estándar. Existen por tanto formas $h_1, \dots, h_n \in E^*$ tales que $M_{h_i} = e_i$. Además, como φ es isomorfismo y $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{K}^n , el conjunto $\mathcal{B}^* = \{h_1, \dots, h_n\}$

es una base de E^* llamada *base dual* de \mathcal{B} . En consecuencia, para cada índice $1 \leq i \leq n$ se tiene

$$(h_i(u_1), \dots, h_i(u_n)) = M_{h_i} = e_i = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n,$$

o lo que es lo mismo,

$$(*) \quad h_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Como todo isomorfismo, φ respeta coordenadas, es decir, las coordenadas (c_1, \dots, c_n) respecto de \mathcal{B}^* de una forma $h \in E^*$ son las coordenadas de $\varphi(h) = M_h$ respecto de la base estándar de \mathbb{K}^n . Por tanto, $M_h = (c_1, \dots, c_n)$, esto es, $h(u_j) = c_j$ para cada $1 \leq j \leq n$. Así, si $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, entonces

$$h(u) = h(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n,$$

mientras que $h = c_1 h_1 + \dots + c_n h_n$. Por tanto, $h = h(u_1)h_1 + \dots + h(u_n)h_n$. Nótese, además, que para $j = 1, \dots, n$,

$$h_j(u) = h_j(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 h_j(u_1) + \dots + x_n h_j(u_n) = x_j,$$

por lo que $u = h_1(u)u_1 + \dots + h_n(u)u_n$ para cada vector $u \in E$.

Además, $H_i = \ker(h_i) = L[u_k : k \neq i]$, y para cualquier otra forma no nula g_i que se anule en todos los vectores u_k con $k \neq i$, será $g_i(u_i) \neq 0$, y por tanto:

$$h_i = \alpha_i g_i, \quad \alpha_i = \frac{1}{g_i(u_i)},$$

para que $h_i(u_i) = 1$.

Diremos que las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}^* son *duales*, y de cada una que es dual de la otra.

(2) Las condiciones (*) son en realidad la definición misma de bases duales. Supongamos dados vectores $u_1, \dots, u_n \in E$ y formas $h_1, \dots, h_n \in E^*$ que las cumplen. Entonces los vectores forman una base \mathcal{B} de E y las formas una \mathcal{B}^* de E^* , que son bases duales.

En efecto, basta demostrar que los vectores u_j son independientes, pues entonces son el número justo para ser una base \mathcal{B} , y por el apartado anterior las formas h_i son las de la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} . Pero si $\sum_j \lambda_j u_j = 0$, resulta:

$$0 = h_i(\sum_j \lambda_j u_j) = \sum_j \lambda_j h_i(u_j) = \sum_j \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i.$$

(3) Veamos para cerrar el círculo, que toda base $\{h_1, \dots, h_n\}$ de E^* es la base dual \mathcal{B}^* de una base \mathcal{B} de E . Por II.10.1(3)(ii), p. 211, para cada j la codimensión de $\bigcap_{i \neq j} \ker(h_i)$ es $n - 1$, luego podemos elegir un vector $v_j \neq 0$ en esa intersección. Afirmamos que $h_j(v_j) \neq 0$. En efecto, en otro caso:

$$v_j \in \ker(h_j) \cap \bigcap_{i \neq j} \ker(h_i) = \{0\},$$

de nuevo por II.10.1(3)(ii). Sea $u_j = \frac{1}{h_j(v_j)} v_j$. Por construcción, $h_i(u_j) = \delta_{ij}$, lo que termina la discusión, según acabamos de ver en el apartado anterior.

(4) Sean $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal, \mathcal{B}_E y \mathcal{B}_F bases de E y F respectivamente, y \mathcal{B}_E^* y \mathcal{B}_F^* las correspondientes bases duales. Entonces la aplicación $f^* : F^* \rightarrow E^* : h \mapsto h \circ f$ es lineal y su matriz respecto de las bases \mathcal{B}_F^* y \mathcal{B}_E^* es:

$$M_{f^*}(\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*) = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)^t.$$

En efecto, para comprobar la linealidad hemos de probar que si $h_1, h_2 \in F^*$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ entonces $(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) \circ f = \lambda_1 (h_1 \circ f) + \lambda_2 (h_2 \circ f)$. Ahora bien, para cada vector $u \in E$ se tiene

$$\begin{aligned} ((\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) \circ f)(u) &= (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)(f(u)) \\ &= \lambda_1 h_1(f(u)) + \lambda_2 h_2(f(u)) = \lambda_1 (h_1 \circ f)(u) + \lambda_2 (h_2 \circ f)(u). \end{aligned}$$

En cuanto a la igualdad matricial, sean $\mathcal{B}_E = \{u_j\}$ y $\mathcal{B}_F = \{v_\ell\}$, y $\mathcal{B}_E^* = \{h_i\}$ y $\mathcal{B}_F^* = \{g_k\}$ sus respectivas bases duales. Por una parte, el coeficiente m_{jk}^* de la posición (j, k) de la matriz $M_{f^*} = M_{f^*}(\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*)$ es la coordenada j -ésima de $f^*(g_k)$ respecto de \mathcal{B}_E^* , que es

$$m_{jk}^* = f^*(g_k)(u_j) = g_k(f(u_j)).$$

Por otra parte, el coeficiente m_{kj} de $M_f = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ es la coordenada k -ésima de $f(u_j)$ respecto de \mathcal{B}_F , que es $m_{kj} = g_k(f(u_j))$. Concluimos que $m_{jk}^* = m_{kj}$, luego efectivamente $M_{f^*} = M_f^t$. \square

(5) Consideremos ahora dos bases $\mathcal{B} = \{u_j\}$ y $\mathcal{B}' = \{u'_\ell\}$ de E y sus respectivas bases duales $\mathcal{B}^* = \{h_i\}$ y $\mathcal{B}'^* = \{h'_k\}$. Se trata de comparar las matrices de cambio de base en los dos espacios. Aplicamos (4) a la aplicación identidad $\text{Id}_E : E \rightarrow E$, que induce la identidad $\text{Id}_{E^*} = \text{Id}_E^* : E^* \rightarrow E^*$. Por tanto,

$$C(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*) = M_{\text{Id}_{E^*}}(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*) = M_{\text{Id}_E^*}(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*) = M_{\text{Id}_E}(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t = C(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t.$$

Obsérvese que la relación es sencilla: *las matrices son una transpuesta de otra*, pero destacamos que los cambios se hacen *en orden contrario*.

Ejemplo 10.6 En $E = \mathbb{K}^3$, la base estándar $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ tiene por dual la base $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ formada por las *proyecciones sobre los ejes coordenados*:

$$\pi_i : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_i,$$

pues $\pi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Calculemos ahora la base dual $\mathcal{B}^* = \{h_1, h_2, h_3\}$ de la base \mathcal{B} de \mathbb{K}^3 formada por los vectores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0)$. Para cada $1 \leq i \leq 3$ existen escalares a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} tales que

$$h_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3.$$

(1) Empezando directamente con las condiciones $h_i(u_j) = \delta_{ij}$ tenemos:

$$\begin{cases} 1 = h_1(1, 1, 1) = a_{11} + a_{12} + a_{13}, \\ 0 = h_1(1, 1, 0) = a_{11} + a_{12}, \\ 0 = h_1(1, 0, 0) = a_{11}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = h_2(1, 1, 1) = a_{21} + a_{22} + a_{23}, \\ 1 = h_2(1, 1, 0) = a_{21} + a_{22}, \\ 0 = h_2(1, 0, 0) = a_{21}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = h_3(1, 1, 1) = a_{31} + a_{32} + a_{33}, \\ 0 = h_3(1, 1, 0) = a_{31} + a_{32}, \\ 1 = h_3(1, 0, 0) = a_{31}, \end{cases}$$

y resolviendo estos sistemas:

$$h_1(x) = x_3, \quad h_2(x) = x_2 - x_3, \quad h_3(x) = x_1 - x_2.$$

(2) También podemos obtener los h_i recordando que para cada índice $i = 1, 2, 3$ se tiene $H_i = \ker(h_i) = L[u_k : k \neq i]$. En nuestro caso:

$$\begin{cases} H_1 = L[(1, 1, 0), (1, 0, 0)] : x_3 = 0, \\ H_2 = L[(1, 1, 1), (1, 0, 0)] : x_2 - x_3 = 0, \\ H_3 = L[(1, 1, 1), (1, 1, 0)] : x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Aquí las ecuaciones podrían haber resultado sólo proporcionales a las buscadas, y se hubiera detectado la constante de proporcionalidad con las condiciones $h_1(1, 1, 1) = h_2(1, 1, 0) = h_3(1, 0, 0) = 1$. En realidad esto equivale a resolver los sistemas anteriores empezando por las ecuaciones homogéneas.

(3) Para terminar con este ejemplo, utilicemos matrices de cambio de base. La matriz que podemos escribir inmediatamente es

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego por II.10.5(5), p. 216,

$$C(\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*) = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero queremos las coordenadas de las formas h_i respecto de la base dual de la estándar, y éstas son las columnas de la matriz $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*)$, inversa de la anterior:

$$C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = C(\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto obtenemos una vez más:

$$h_1(x) = x_3, \quad h_2(x) = x_2 - x_3, \quad h_3(x) = x_1 - x_2. \quad \square$$

Concluimos esta lección con la presentación de un concepto profundo que se encuentra en todas las matemáticas, y que en el contexto vectorial está a nuestro alcance.

(10.7) Principio de dualidad. Ya hemos dicho que el espacio E y su dual E^* son isomorfos, por tener la misma dimensión. Por tanto cualquier propiedad que sea cierta en uno lo es en otro. Sin embargo, la dualidad canónica dice otra cosa, pues relaciona los subespacios de E y E^* de una manera muy diferente de la que proporciona cualquier isomorfismo entre esos dos espacios. Las propiedades detalladas en II.10.3, p. 212, son en realidad un diccionario para traducir todo enunciado vectorial sobre subespacios de E en un enunciado *dual*: se cambia intersectar por generar, generar por intersectar, estar contenido por contener, y dimensiones por codimensiones. Este diccionario funciona de manera sencilla para obtener nuevos enunciados a partir de otros. Lo importante es que se cumple el *principio de dualidad*, según el cual *un enunciado es cierto si y sólo si lo es su enunciado dual*.

La razón es simplemente la siguiente. Si un enunciado sobre espacios vectoriales es verdadero, se cumple en E^* . Entonces aplicando la dualidad canónica $V \mapsto V^\vee$ se obtiene un enunciado verdadero en E , y ese enunciado es precisamente el dual.

Tal vez un ejemplo ilustre mejor este principio fundamental. Dualicemos el enunciado siguiente sobre espacios vectoriales de dimensión 3: *dos rectas distintas generan un plano*. Obtenemos: *dos planos distintos se intersectan en una recta*.

Podemos demostrar el primer enunciado mediante la fórmula de Grassmann: si L_1, L_2 son dos rectas distintas de un espacio E de dimensión 3 tenemos

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) = 1 + 1 - 0 = 2,$$

(pues si las rectas son distintas, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$). De manera análoga obtenemos el resultado dual: si H_1, H_2 son dos planos distintos de E , entonces

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 2 + 2 - 3 = 1,$$

pues como los planos son distintos se sigue de II.8.10, p. 181 que $H_1 + H_2 = E$.

Esto no hace ninguna referencia al principio de dualidad: son dos demostraciones de dos propiedades verdaderas (aunque debe llamar nuestra atención la similitud de los razonamientos). Pues bien, lo que el principio de dualidad explica es que basta demostrar una sola de las dos propiedades, que la otra se cumplirá por ese principio formal superior. En otras palabras, tenemos dos resultados por el precio de uno.

Ejercicios y problemas propuestos

Número 1. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ la base de \mathbb{K}^4 formada por los vectores

$$u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 0, 0, -2), u_3 = (0, 0, -1, 1), u_4 = (0, 2, 0, 1).$$

(1) Calcular la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*)$ entre la base dual de \mathcal{B} y la de la base estándar \mathcal{E} .

(2) Calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B}^* de la forma lineal f definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4.$$

(3) Calcular las coordenadas respecto de \mathcal{E}^* de la forma lineal $g \in (\mathbb{K}^4)^*$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B}^* son $(4, 2, 1, 1)$.

Número 2. En $E = \mathbb{R}^3$ se considera la base \mathcal{B} consistente en los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -2)$ y $(-1, -1, 0)$.

(1) Calcular la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} .

(2) Calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B}^* de las siguientes formas lineales:

$$h_1(x, y, z) = x + 2y + z, \quad h_2(x, y, z) = 7x + 14z, \quad h_3(x, y, z) = 3x + y + z.$$

Deducir que h_1, h_2, h_3 forman una base del espacio dual E^* .

(3) Calcular la base de E de la que $\{h_1, h_2, h_3\}$ es dual.

Número 3. Sea E un espacio vectorial (no necesariamente de tipo finito) y $f \in E^*$ no nula. Probar que existe un vector $u \in E$ tal que $E = \ker(f) \oplus L[u]$.

Número 4. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial real E , y sean $h_1, h_2, h_3 \in E^*$ las formas lineales determinadas por las condiciones:

$$\begin{aligned} h_1(u_1) &= 1, & h_1(u_2) &= 0, & h_1(u_3) &= 1, & h_1(u_4) &= 2, \\ h_2(u_1) &= 2, & h_2(u_2) &= 1, & h_2(u_3) &= 5, & h_2(u_4) &= 7, \\ h_3(u_1) &= 0, & h_3(u_2) &= 1, & h_3(u_3) &= 3, & h_3(u_4) &= 3. \end{aligned}$$

(1) Hallar la dimensión y unas ecuaciones implícitas en coordenadas respecto de la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} del subespacio vectorial $W \subset E^*$ generado por h_1, h_2 y h_3 .

(2) Hallar la dimensión y unas ecuaciones implícitas en coordenadas respecto de \mathcal{B} del subespacio vectorial V de E tal que $W = V^\vee$. Encontrar una base de V .

Número 5. Se consideran en $E = \mathbb{R}^4$ los vectores $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 3, 1, 0)$ y $u_3 = (1, 0, 1, 2)$. Se pide:

(1) Probar que u_1, u_2, u_3 son independientes y encontrar una base \mathcal{B} de E que los contenga. Determinar la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} .

(2) Determinar el subconjunto X de E^* consistente en las formas que se anulan en u_1 y en u_2 , pero no en u_3 . ¿Es X un subespacio vectorial de E^* ? ¿Qué subespacio de E^* genera X ?

Número 6. Sean a, b y c tres números reales y consideramos el subespacio vectorial L de \mathbb{R}^3 cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar son $x - z = y - az = 0$. Sean f y g las formas lineales sobre \mathbb{R}^3 definidas por

$$f(x, y, z) = bx + y + cz \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = (1 + c)x - bz,$$

y sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/L$ la proyección canónica. Obtener los valores de a, b y c sabiendo que tanto f como g factorizan a través de formas lineales $\mathbb{R}^3/L \rightarrow \mathbb{R}$ y que dichas formas no constituyen una base del espacio dual de \mathbb{R}^3/L .

Número 7. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial real E y para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación lineal $f : E \rightarrow E$ cuya matriz es

$$M(a) = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sea L el subespacio de E generado por el vector $u = u_1 + u_2 + u_3$.

- (1) ¿Cuál es la dimensión de $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$?
- (2) Hallar una base del subespacio $f^{-1}(L)$ y calcular su dimensión.
- (3) Sea $\mathcal{B}^* = \{h_1, h_2, h_3\}$ la base dual de \mathcal{B} . Se consideran las formas lineales

$$k = h_1 + h_2 - ah_3 \quad \text{y} \quad \ell = ah_1 + h_2 - 3h_3,$$

y la proyección canónica $\pi : E \rightarrow F = E/f^{-1}(L)$. Determinar para qué valores de a existen elementos φ y ψ en el espacio dual de F tales que $k = \varphi \circ \pi$ y $\ell = \psi \circ \pi$. ¿Es en tal caso $\{\varphi, \psi\}$ una base del dual de F ?

Número 8. Sea $E = \mathbb{R}_2[T]$ (polinomios de grado ≤ 2) y consideremos las formas lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$, definidas por

$$\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{R}, P(T) \mapsto \int_0^1 t^{i-1} P(t) dt.$$

Demostrar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de E^* , y determinar de qué base de E es dual.

Número 9. Sea W el subespacio de \mathbb{K}^4 generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 0, -1, 1)$, y consideremos otro subespacio V suplementario de W ; denotamos $p : \mathbb{K}^4 \rightarrow V \subset \mathbb{K}^4$ la proyección lineal de base V y dirección W . Calcular la imagen de la aplicación lineal

$$p^* : (\mathbb{K}^4)^* \rightarrow (\mathbb{K}^4)^*, \alpha \mapsto \alpha \circ p,$$

y decidir si la forma lineal siguiente pertenece o no a ella:

$$\beta : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Número 10. Sean E un espacio vectorial y F un espacio vectorial de tipo finito, en el que elegimos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$. Sean f_1, \dots, f_m formas lineales de E^* . Demostrar que la aplicación

$$\sum f_i \cdot v_i : E \rightarrow F, u \mapsto \sum_{i=1}^m f_i(u) v_i$$


es lineal. ¿Es cierto que para cada aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ existen formas lineales f_1, \dots, f_m tales que $f = \sum f_i \cdot v_i$?

✎ **Número 11.** Recordemos que una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$ se dice *mágica* si todas sus filas suman lo mismo, y lo mismo que las columnas, y lo mismo que las dos diagonales mayores. Dada esta definición, consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Sigma & \text{ de las matrices mágicas,} \\ \Sigma_s & \text{ de las matrices mágicas simétricas, y} \\ \Sigma_a & \text{ de las matrices mágicas antisimétricas.} \end{aligned}$$

Demostrar que Σ, Σ_s y Σ_a son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y que $\Sigma = \Sigma_s \oplus \Sigma_a$, y calcular las dimensiones de los tres.

Número 12. Sea f una forma lineal del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demostrar que existe una única matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ para cada matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.


 **Número 13.** Sea $E = \mathbb{K}_n[T]$ (polinomios de grado $\leq n$), y fijemos escalares a_0, \dots, a_n , distintos dos a dos.

(1) Demostrar que las aplicaciones

$$\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{K}, P(T) \mapsto P(a_i)$$

constituyen una base de E^* , y encontrar su base dual.

(2) Dados escalares b_0, \dots, b_n , encontrar un polinomio $P \in E$ tal que $P(a_i) = b_i$ para cada $i = 0, \dots, n$ (*interpolación polinomial*).

 **Número 14.** Sean E un espacio vectorial de tipo finito y E^* su dual. Dado un subespacio vectorial L de E , encontrar un isomorfismo canónico entre E/L y el dual de L^\vee .

Número 15. (1) Utilizar el principio de dualidad en la resolución del ejercicio 5 de la lección II.8, p. 186.

(2) Encontrar un enunciado vectorial que coincida con su enunciado dual.

Cuestiones sobre espacios vectoriales y aplicaciones lineales

Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Número 1. Toda aplicación lineal no nula $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

Número 2. Si dos hiperplanos H_1 y H_2 de \mathbb{R}^n son distintos, la dimensión de la intersección $H_1 \cap H_2$ es $n - 2$.

Número 3. Dos planos de \mathbb{R}^4 que generan \mathbb{R}^4 tienen siempre intersección nula.

Número 4. Ninguna de las siguientes aplicaciones $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto f(x, y)$ es lineal:

$$f(x, y) = (x, x^2), \quad (0, 1), \quad (\sin x, 0), \quad (|x|, y), \quad (x + 1, y).$$

Número 5. Si tres formas lineales de un espacio vectorial E de dimensión 3 son independientes en el dual E^* , la intersección de los tres planos de E que definen es nula.

Número 6. Las matrices 3×3 de rango 3 forman un subespacio vectorial del de todas las matrices 3×3 .

Número 7. El espacio vectorial de las matrices simétricas 3×3 es isomorfo al de los polinomios de grado ≤ 5 .

Número 8. Las dimensiones de la imagen de una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ y de la imagen de la aplicación lineal asociada $f^* : F^* \rightarrow E^*$ coinciden.

Número 9. Si la composición de dos aplicaciones lineales es un isomorfismo, al menos una de ellas lo es.

Número 10. El conjunto de las matrices cuadradas diagonales de orden n forman un espacio vectorial de tipo finito de dimensión n^2 .

Número 11. En \mathbb{K}^4 , dos es el máximo número de hiperplanos independientes que contienen un plano dado.

Número 12. Toda aplicación lineal inyectiva transforma vectores independientes en vectores independientes.

Número 13. Los polinomios con coeficientes complejos de grado ≤ 1976 que se anulan en $T = \sqrt{-1}$ constituyen un espacio vectorial de dimensión 1975.

Número 14. Un hiperplano de un espacio vectorial complejo tiene infinitos suplementarios vectoriales.

Número 15. Todo espacio vectorial de tipo finito es isomorfo a su dual.

Número 16. Toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es suprayectiva.

Número 17. Dos planos del espacio vectorial \mathbb{R}^4 tienen siempre intersección no trivial.

Número 18. Dos planos de un espacio vectorial de dimensión cinco nunca son suplementarios.

Número 19. Hay infinitas aplicaciones lineales no nulas $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que no son suprayectivas.

Número 20. Si dos espacios vectoriales de tipo finito son isomorfos, también lo son sus duales.

Número 21. Si $f, g \in E^*$ son formas lineales linealmente independientes y H es un hiperplano de E , las restricciones $f|_H, g|_H \in H^*$ son siempre linealmente independientes.

Número 22. La intersección de dos subespacios vectoriales de \mathbb{K}^{10} de dimensiones 8 y 9 respectivamente, tiene como mínimo dimensión 8.

Número 23. El espacio vectorial de las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^9$ es isomorfo al de las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Número 24. Un hiperplano de un espacio vectorial de tipo finito puede describirse mediante una ecuación lineal homogénea.

Número 25. Si 7 vectores de \mathbb{C}^9 son independientes, cada cuatro de ellos generan un subespacio vectorial de codimensión 4 de \mathbb{C}^9 .

Número 26. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal cuyo núcleo tiene dimensión

50. Sea M la matriz de f respecto de sendas bases de E y F , que resulta tener 250 columnas. Entonces M tiene como poco 200 filas.

Número 27. Si una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ tiene la propiedad de que su núcleo y su imagen tienen intersección nula, entonces sus imágenes sucesivas son todas iguales.

Número 28. La dimensión del núcleo de una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^{12} \rightarrow \mathbb{K}^6$ es necesariamente 6.

Número 29. Si una aplicación lineal $f : E \rightarrow E$ tiene rango 1, entonces su imagen es un suplementario de su núcleo.

Número 30. Las dimensiones del núcleo de una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ y del de la aplicación lineal asociada $f^* : F^* \rightarrow E^*$ coinciden siempre.

Número 31. Sea E el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales. Entonces la aplicación $E \rightarrow E : P(T) \mapsto TP(T)$ es lineal e inyectiva, pero no un isomorfismo.

Número 32. El enunciado “*dos rectas distintas de un espacio vectorial de dimensión 2 se cortan sólo en el origen*” es dual de sí mismo.

Número 33. En un espacio vectorial, una recta y un hiperplano que no la contenga son siempre suplementarios.

Número 34. La mínima dimensión ambiente en la que dos subespacios de dimensión 6 se cortan en uno de dimensión 2 es 9.

Número 35. Las matrices $n \times n$ de traza cero y las matrices simétricas $n \times n$ generan dos subespacios vectoriales E y F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que son isomorfos si y sólo si $n \geq 2$.

Número 36. Las matrices cuadradas de orden 7 simétricas con traza nula forman un espacio vectorial de dimensión 20.

Número 37. La composición de dos simetrías respecto de hiperplanos diferentes, pero ambas en la misma dirección, es a su vez una simetría respecto de un hiperplano.

Número 38. Si una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ factoriza a través de un cociente E/L , entonces el núcleo de f está contenido en L .

Número 39. Sea $\pi : E \rightarrow E/L$ una proyección canónica en un espacio cociente. La aplicación lineal asociada $\pi^* : (E/L)^* \rightarrow E^*$ es suprayectiva.

Número 40. Si dos subespacios vectoriales V, W de un espacio vectorial E de tipo finito son isomorfos, entonces también son isomorfos los duales de los cocientes E/V y E/W .

Número 41. Existe una única aplicación lineal inyectiva $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^5$ cuya imagen es el hiperplano $\sum_i x_i = 0$, y cuyo núcleo contiene al vector $(1, 1, 1, 1)$.

Número 42. Sean L_1, L_2 y L_3 tres rectas que generan un espacio vectorial E de dimensión 3, y $f, g : E \rightarrow \mathbb{K}$ dos aplicaciones lineales tales que para cada recta L_i las restricciones $f|_{L_i}, g|_{L_i}$ son linealmente dependientes en L_i^* . Entonces f y g son linealmente independientes en E^* .

Número 43. Si un isomorfismo lineal $f : E \rightarrow E$ es la identidad en un hiperplano de E , entonces f es una simetría respecto de ese hiperplano.

Número 44. Si dos espacios vectoriales E y E' son isomorfos, y F es un tercer espacio vectorial, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ y $\mathcal{L}(E', F)$ son espacios vectoriales isomorfos.

Número 45. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal de rango 1. Entonces las formas lineales $h : E \rightarrow \mathbb{K}$ que se anulan en el núcleo de f constituyen un hiperplano de E^* .

Número 46. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal cuyo núcleo tiene dimensión 1. Entonces las formas lineales $h : F \rightarrow \mathbb{K}$ que se anulan en la imagen de f constituyen un hiperplano de F^* .

Número 47. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal tal que las formas lineales $h : E \rightarrow \mathbb{K}$ que se anulan en el núcleo de f son una recta de E^* . Entonces f tiene rango 1.

Número 48. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal tal que las formas lineales $h : F \rightarrow \mathbb{K}$ que se anulan en la imagen de f son una recta de F^* . Entonces f tiene rango 1.

Número 49. Sea E el espacio vectorial de las matrices 33×33 de traza nula, y sea A una matriz 3×33 no nula arbitraria. Entonces $h : E \rightarrow \mathbb{K} : X \mapsto \text{tr}(AX)$ tiene por núcleo un hiperplano.

Número 50. Sean H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 hiperplanos de \mathbb{C}^5 tales que $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5 = \{0\}$. Entonces las intersecciones $H_1 \cap H_2$, $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ y $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$, tienen dimensiones 3, 2 y 1 respectivamente.

Apéndice: Solucionario del capítulo II

Soluciones §6

Número 1. Consideremos el conjunto \mathbb{R}^2 con la operación interna:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

y una de las siguientes operaciones externas:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, 0), \quad (\lambda x, \lambda y), \quad (\lambda + \lambda x - 1, \lambda + \lambda y - 1), \quad \text{o} \quad (\lambda y, \lambda x).$$

Determinar en cada caso si las operaciones definen una estructura de espacio vectorial en \mathbb{R}^2 .

Solución. La segunda de estas multiplicaciones confiere a \mathbb{R}^2 su estructura vectorial usual. Comprobaremos a continuación que las demás no cumplen alguna de las propiedades del producto de escalares por vectores. Elegimos $u = (1, 2)$, $v = (1, 0)$ y $w = (2, 1)$.

Para la primera operación externa se tiene $1u = v \neq u$ y para la cuarta $1u = w \neq u$. Por su parte la tercera de las multiplicaciones propuestas cumple $2(0, 0) = (1, 1) \neq (0, 0)$, luego tampoco define en \mathbb{R}^2 una estructura de espacio vectorial. \square

Número 2. En \mathbb{K}^3 definimos las operaciones *suma* \boxplus y *producto por escalares* $*$ como sigue:

$$(x_1, x_2, x_3) \boxplus (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 + 3),$$

$$\lambda * (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1 + \lambda - 1, \lambda x_2 - \lambda + 1, \lambda x_3 + 3\lambda - 3).$$

Demostrar que las operaciones \boxplus y $*$ confieren a \mathbb{K}^3 estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} .

Solución. Se trata de comprobar que estas operaciones satisfacen las ocho propiedades que axiomatizan la noción de espacio vectorial. Esto, que se puede hacer *a las bravas*, resulta más sencillo si relacionamos adecuadamente las operaciones que acabamos de introducir con la suma y producto por escalares clásico. Para ello basta darse cuenta de que si denotamos $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\theta = (1, -1, 3)$, podemos escribir

$$u \boxplus v = u + v + \theta; \quad \lambda * u = \lambda u + (\lambda - 1)\theta.$$

Ahora comprobamos que se satisfacen las propiedades que axiomatizan la noción de espacio vectorial.

(1) *Propiedad conmutativa* : $u \boxplus v = u + v + \theta = v + u + \theta = v \boxplus u$.

(2) *Propiedad asociativa* :

$$(u \boxplus v) \boxplus w = (u + v + \theta) + w + \theta = u + (v + w + \theta) + \theta = u \boxplus (v \boxplus w).$$

(3) *Existencia de elemento neutro*. Buscamos un vector, que denotaremos $\tilde{0}$, que cumpla la igualdad $u \boxplus \tilde{0} = u$ para cada $u \in \mathbb{K}^3$. Esto equivale a $u + \tilde{0} + \theta = u$, o sea, $\tilde{0} + \theta = 0$, es decir, $\tilde{0} = -\theta$.

(4) *Existencia de vector opuesto*. Para cada $u \in \mathbb{K}^3$ buscamos otro vector $v \in \mathbb{K}^3$ tal que $u \boxplus v = \tilde{0}$. Esta condición equivale a $u + v + \theta = -\theta$, luego despejando, el opuesto de u es $v = -u - 2\theta$.

(5) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.* Sean $u, v \in \mathbb{K}^3$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lambda * (u \boxplus v) &= \lambda * (u + v + \theta) = \lambda(u + v + \theta) + (\lambda - 1)\theta = \lambda u + \lambda v + \lambda\theta + (\lambda - 1)\theta \\ &= (\lambda u + (\lambda - 1)\theta) + (\lambda v + (\lambda - 1)\theta) + \theta = \lambda * u + \lambda * v + \theta = (\lambda * u) \boxplus (\lambda * v).\end{aligned}$$

(6) *Propiedad distributiva de la suma respecto del producto.* Sean $u \in \mathbb{K}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) * u &= (\lambda + \mu)u + (\lambda + \mu - 1)\omega = \lambda u + (\lambda - 1)\omega + \mu u + (\mu - 1)\omega + \omega \\ &= (\lambda * u) + (\mu * u) + \omega = (\lambda * u) \boxplus (\mu * u).\end{aligned}$$

(7) *Propiedad asociativa del producto.* Sean $u \in \mathbb{K}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lambda * (\mu * u) &= \lambda * (\mu u + (\mu - 1)\omega) = \lambda(\mu u + (\mu - 1)\omega) + (\lambda - 1)\omega \\ &= \lambda\mu u + \lambda(\mu - 1)\omega + (\lambda - 1)\omega = \lambda\mu u + (\lambda\mu - 1)\omega = (\lambda\mu) * u.\end{aligned}$$

(8) Para cada $u \in \mathbb{K}^3$, se tiene $1 * u = 1u + (1 - 1)\omega = u$. \square

Número 3. Escribir la matriz E como combinación lineal de las matrices A , B y C , siendo

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Buscamos escalares $a, b, c \in \mathbb{K}$ tales que $aA + bB + cC = E$, o lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} a & & & & = & 3, \\ a & + & & & 2c & = & 1, \\ a & + & b & & & = & 1, \\ & & b & + & c & = & -3, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a & = & 3, \\ b & = & -2, \\ c & = & -1, \end{cases}$$

y por tanto $E = 3A - 2B - C$. \square

Número 4. Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E , ambos distintos de E . Demostrar que $V_1 \cup V_2 \neq E$.

Solución. Si uno de los dos subespacios contiene al otro su unión es el mayor, que no coincide con E . Podemos por tanto suponer que $V_1 \not\subset V_2$ y $V_2 \not\subset V_1$, luego existen vectores $u_1 \in V_1 \setminus V_2$ y $u_2 \in V_2 \setminus V_1$, por lo que $u = u_1 + u_2 \notin V_1 \cup V_2$. Por ejemplo, si $u \in V_1$, entonces $u_2 = u - u_1 \in V_1$, contradicción. \square

Número 5. Estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$$(1) \quad u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (-1, 3, 4, 1), u_3 = (3, 1, 0, 4), u_4 = (5, 1, 2, 1) \text{ en } \mathbb{K}^4,$$

(2) $f_1 = T^3$, $f_2 = T^2 + T^3$, $f_3 = 2 + T + T^3$, $f_4 = 6 + 3T + T^2 + 6T^3$ en $\mathbb{K}[T]$.

Solución. (1) Los cuatro vectores son las columnas de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante $-122 \neq 0$. Por tanto, los cuatro vectores son independientes.

(2) Busquemos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$, o sea,

$$\lambda_1 T^3 + \lambda_2 (T^2 + T^3) + \lambda_3 (2 + T + T^3) + \lambda_4 (6 + 3T + T^2 + 6T^3) = 0.$$

Esto se puede reescribir

$$(2\lambda_3 + 6\lambda_4) + (\lambda_3 + 3\lambda_4)T + (\lambda_2 + \lambda_4)T^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6\lambda_4)T^3 = 0,$$

así que lo que buscamos son soluciones no triviales del sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 6\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son equivalentes, luego en realidad este sistema homogéneo tiene tres ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que tiene alguna solución no trivial. Concluimos que los cuatro polinomios son linealmente dependientes. \square

Número 6. (1) Determinar los valores de los números reales a y b para que el vector $u = (1, 4, a, b)$ sea combinación lineal de los vectores $v = (1, 2, -1, 2)$ y $w = (0, 1, 2, 1)$.

(2) Demostrar que para cualesquiera números reales a, b y c , los vectores $u = (1, a, b)$, $v = (0, 1, c)$ y $w = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

(3) ¿Para qué valores de los números reales a, b , son linealmente independientes los vectores $u = (1, 1, 0, a)$, $v = (3, -1, b, -1)$ y $c = (-3, 5, a, -4)$?

Solución. (1) Se trata de encontrar aquellos valores de a y b para los que

$$2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & a & b \end{pmatrix}.$$

Como el menor $M = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ es no nulo, esta condición equivale a que sean nulos los menores que resultan de orlar M , es decir,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & b \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, $a = 3$ y $b = 4$.

(2) Se trata de probar que el rango de la matriz que tiene a u, v y w por filas tiene rango 3. Pero esto es inmediato, ya que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

(3) En realidad se nos está pidiendo que encontremos aquellos valores de a y b tales que

$$3 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 3 & -1 & b & -1 \\ -3 & 5 & a & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -4 & b & -1 - 3a \\ 0 & 8 & a & -4 + 3a \end{pmatrix},$$

o lo que es lo mismo,

$$2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -4 & b & -1 - 3a \\ 8 & a & -4 + 3a \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -4 & b & -1 - 3a \\ 0 & a + 2b & -6 - 3a \end{pmatrix}.$$

Esta condición equivale a

$$1 = \operatorname{rg}(a + 2b, -6 - 3a),$$

esto es, bien $a \neq -2b$, bien $a \neq -2$. En conclusión, si $b \neq 1$ los vectores u, v y w son independientes, sea cual sea el valor de a , mientras que si $b = 1$ son independientes salvo si $a = -2$. \square

Número 7. Sean $\{u_1, \dots, u_n\}$ vectores linealmente independientes en un espacio vectorial E . Se definen nuevos vectores

$$v_1 = u_1, v_j = u_1 - \sum_{i=2}^j u_i, \quad \text{para } 2 \leq j \leq n.$$

Estudiar si los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ son también linealmente independientes.

Solución. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares tales que $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$. Sustituyendo cada vector v_j por su valor, se tiene

$$0 = \lambda_1 u_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j \left(u_1 - \sum_{i=2}^j u_i \right) = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) u_1 - \sum_{i=2}^n \left(\sum_{k=i}^n \lambda_k \right) u_i,$$

y por ser linealmente independientes los vectores $\{u_1, \dots, u_n\}$ se cumple

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0, \\ \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0, \\ \vdots \\ \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Si para resolver este sistema empezamos por la última ecuación, se ve que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, luego los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes. \square

Número 8. Sean u_1, u_2, u_3 y u_4 vectores de \mathbb{K}^n tales que las ternas de vectores

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}, \quad \{u_2, u_3, u_4\},$$

son linealmente independientes. ¿Se puede asegurar que también son linealmente independientes los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$?

Solución. La respuesta es negativa. Basta elegir tres vectores linealmente independientes u_1, u_2, u_3 y tomar $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$. Esta elección asegura que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente, y que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ no lo es.

Comprobaremos a continuación que el conjunto $\{u_1, u_2, u_4\}$ es linealmente independiente. Intercambiando los papeles de u_2 y u_3 y de u_1 y u_3 respectivamente deducimos también que $\{u_1, u_3, u_4\}$ y $\{u_2, u_3, u_4\}$ son conjuntos linealmente independientes. Sean pues λ_1, λ_2 y λ_4 escalares tales que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_4 u_4 = 0$. Entonces, reemplazando u_4 por su valor se tiene

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_4 (u_1 + u_2 + u_3) = 0, \quad \text{o sea} \quad (\lambda_1 + \lambda_4) u_1 + (\lambda_2 + \lambda_4) u_2 + \lambda_4 u_3 = 0.$$

Por ser $\{u_1, u_2, u_3\}$ linealmente independientes se deduce que $\lambda_1 + \lambda_4 = \lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_4 = 0$, luego $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$, por lo que $\{u_1, u_2, u_4\}$ son linealmente independientes. \square

Número 9. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ y considérense los tres vectores

$$u_1 = (a, a^2, a^3), \quad u_2 = (b, b^2, b^3), \quad u_3 = (c, c^2, c^3).$$

¿Qué debe cumplirse para que sean linealmente independientes?

Solución. Los tres vectores son las columnas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es casi un determinante de Vandermonde, y lo es exactamente después de factorizar a en la primera columna, b en la segunda y c en la tercera, lo que da $\det(A) = abc(c-a)(b-a)(c-b)$. Por tanto $\det(A) \neq 0$ si y sólo si los tres números a, b, c son distintos, y ninguno nulo. Por tanto, ésta es la condición para que los tres vectores sean independientes. \square

Número 10. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formado por todas las funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se consideran las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1, & \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin x, & \quad f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \cos x, \\ f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin^2 x, & \quad f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin(x+2), & \quad f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \cos^2 x. \end{aligned}$$

¿Cuál es el máximo número de ellas linealmente independientes?

Solución. Las fórmulas de la trigonometría elemental nos proporcionan

$$f_5(x) = (\cos 2) \operatorname{sen}(x) + (\operatorname{sen} 2) \cos(x) = (\cos 2)f_2(x) + (\operatorname{sen} 2)f_3(x),$$

luego f_5 es combinación lineal de f_2 y f_3 . Además,

$$f_6(x) = \cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x) = f_1(x) - f_4(x),$$

por lo que f_6 es combinación lineal de f_1 y f_4 . Así, a lo sumo, cuatro de entre estas funciones son linealmente independientes. Vamos a probar que, de hecho, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ lo son.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, y λ_4 números reales tales que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i = 0$. Al evaluar esta igualdad en $x = 0$ y en $x = \pi$, se tiene

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

luego $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Por tanto, $\lambda_2 f_2 + \lambda_4 f_4 = 0$, y al evaluar esta igualdad en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$ resulta

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0, \end{cases}$$

por lo que también $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. En consecuencia, las funciones $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ son linealmente independientes. \square

Número 11. Consideremos el espacio vectorial real $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el subconjunto

$$V_\lambda = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = \lambda\}.$$

¿Para qué valores de λ es V_λ un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

Solución. El vector nulo del espacio $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es la función de valor constante cero, que pertenece a V_0 pero no a V_λ para $\lambda \neq 0$. Por eso, estos últimos no son subespacios vectoriales de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Sin embargo, V_0 sí lo es, ya que dados escalares a y b y funciones $f, g \in V_0$, la función $h = af + bg \in V_0$, ya que $h(0) = af(0) + bg(0) = 0$. \square

Número 12. Determinar en cada uno de los casos siguientes si el subconjunto V del espacio vectorial E es un subespacio vectorial.

- (1) $E = \mathbb{K}^5$ y $V = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{K}^5 : x_1 + 2x_3 - x_4 = x_2 + 3x_3 - 4x_5 = 0\}$.
- (2) $E = \mathbb{K}^n$ y $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 + \dots + x_n = 3\}$.
- (3) $E = \mathbb{K}^3$ y $V = \{(1 + a + b, 1 - a, 1 - b) \in \mathbb{K}^3 : a, b \in \mathbb{K}\}$.

$$(4) \ E = \mathbb{K}^n \text{ y } V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_i \leq 0, 1 \leq i \leq n\}.$$

$$(5) \ E = \mathbb{K}^3 \text{ y } V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{K}^3 : t \in \mathbb{K}\}.$$

Solución. (1) Demostraremos por dos procedimientos que V es subespacio vectorial de E . Un primer método consiste en observar que dados escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, y vectores

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \ y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in V,$$

entonces el vector $z = \lambda x + \mu y = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, donde $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$, también pertenece a V , ya que sus componentes satisfacen las dos igualdades que definen V , esto es,

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_3 - z_4 &= \lambda(x_1 + 2x_3 - x_4) + \mu(y_1 + 2y_3 - y_4) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0, \\ z_2 + 3z_3 - 4z_5 &= \lambda(x_2 + 3x_3 - 4x_5) + \mu(y_2 + 3y_3 - 4y_5) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Otro procedimiento consiste en percartarse de que V es el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

(2) Como V no contiene al vector nulo, no es subespacio de \mathbb{K}^n .

(3) Tampoco en este caso V contiene al vector nulo, y no es, por tanto, subespacio de \mathbb{K}^3 , ya que no existen $a, b \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0, \\ 1 - a = 0, \\ 1 - b = 0. \end{cases}$$

(4) Este V contiene al vector nulo, y es muy fácil probar que la suma de vectores de V proporciona otro vector en V . Sin embargo, V no es subespacio de \mathbb{K}^n ya que presenta un mal comportamiento respecto del producto por escalares. Por ejemplo, la n -upla $u = (-1, \dots, -1) \in V$, pero su opuesta $-u = (1, \dots, 1) \notin V$.

(5) Tampoco en este caso es V subespacio de \mathbb{K}^3 . Basta observar que $u = (1, 1, 1) \in V$, pero $2u = (2, 2, 2) \notin V$, pues en caso contrario existiría $t \in \mathbb{K}$ tal que $(2, 2, 2) = (t, t^2, t^3)$, y en particular, $t = 2 = t^2$, que es falso. \square

Número 13. ¿Es el conjunto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : 3x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ un subespacio vectorial de \mathbb{K}^3 ? ¿Qué subespacios de \mathbb{K}^3 contienen a T ?

Solución. Las ternas $u_1 = (0, 1, 1)$ y $u_2 = (0, 1, -1)$ pertenecen a T , que no contiene a su suma $u_1 + u_2 = (0, 2, 0)$, por lo que T no es subespacio vectorial de \mathbb{K}^3 .

Sea V un subespacio de \mathbb{K}^3 que contiene a T . El vector $u_3 = (1, 1, 2) \in T \subset V$, y vamos a comprobar que todo vector de \mathbb{K}^3 es combinación lineal de los vectores $\{u_1, u_2, u_3\} \subset V$. Se trata de escribir cada vector $u = (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ en la forma

$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ para ciertos números reales λ_i . Esto equivale a que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda_3 = a, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = c, \end{cases}$$

tenga solución. Al resolverlo obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(b + c - 3a), \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + b - c), \lambda_3 = a.$$

Hecho esto, $V = \mathbb{K}^3$ es el único subespacio vectorial de \mathbb{K}^3 que contiene a T . \square

Número 14. Calcular todas las n -uplas de números complejos x_1, \dots, x_n tales que

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n, \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n, \\ \vdots \\ x_1^n + \dots + x_n^n = n. \end{cases}$$

Solución. La primera ecuación se reescribe $(x_1 - 1) + \dots + (x_n - 1) = 0$, y a cada una de las demás se le resta la anterior. Queda entonces

$$\begin{cases} (x_1 - 1) + \dots + (x_n - 1) = 0, \\ (x_1 - 1)x_1 + \dots + (x_n - 1)x_n = 0, \\ \vdots \\ (x_1 - 1)x_1^{n-1} + \dots + (x_n - 1)x_n^{n-1} = 0, \end{cases}$$

o lo que es igual,

$$(x_1 - 1)w_1 + \dots + (x_n - 1)w_n = 0,$$

donde $w_k = (1, x_k, \dots, x_k^{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Agrupando los x_i coincidentes, podemos entonces suponer que

$$x_1 = \dots = x_{r_1}, x_{r_1+1} = \dots = x_{r_2}, \dots, x_{r_{k-1}+1} = \dots = x_{r_k} = x_n,$$

y resulta que

$$r_1(x_{r_1} - 1)w_{r_1} + \dots + r_k(x_{r_k} - 1)w_{r_k} = 0,$$

y los vectores $\{w_{r_j} : 1 \leq j \leq k\}$ son linealmente independientes, ya que el determinante de sus k primeras coordenadas es uno de Vandermonde. Por tanto $x_{r_1} = \dots = x_{r_k} = 1$, o lo que es lo mismo, la única solución del sistema de ecuaciones del enunciado es $x_1 = \dots = x_n = 1$. \square

Número 15. Una matriz cuadrada de orden ≥ 3 se dice *mágica* si, todas sus filas suman lo mismo, y lo mismo que las columnas, y lo mismo que las dos diagonales mayores. Encontrar todas las matrices mágicas de orden 3 cuyos coeficientes sean los números naturales comprendidos entre 1 y 9.

Solución. Imponiendo que una matriz $M = (x_{ij})$ cuadrada de orden 3 sea mágica, obtenemos un sistema lineal homogéneo, que escribimos a continuación junto con su solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22} - x_{23} = 0, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{31} - x_{32} - x_{33} = 0, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{11} - x_{21} - x_{31} = 0, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{12} - x_{22} - x_{32} = 0, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{13} - x_{23} - x_{33} = 0, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{11} - x_{22} - x_{33} = 0, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{13} - x_{22} - x_{31} = 0, \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 2\alpha + 2\beta - \gamma, \\ x_{12} = 2\alpha - \beta + 2\gamma, \\ x_{13} = -\alpha + 2\beta + 2\gamma, \\ x_{21} = -2\alpha + \beta + 4\gamma, \\ x_{22} = \alpha + \beta + \gamma, \\ x_{23} = 4\alpha + \beta - 2\gamma, \\ x_{31} = 3\alpha, \\ x_{32} = 3\beta, \\ x_{33} = 3\gamma. \end{array} \right.$$

Por tanto, las matrices mágicas de orden 3 constituyen un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, y una matriz mágica arbitraria tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta - \gamma & 2\alpha - \beta + 2\gamma & -\alpha + 2\beta + 2\gamma \\ -2\alpha + \beta + 4\gamma & \alpha + \beta + \gamma & 4\alpha + \beta - 2\gamma \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{pmatrix}.$$

Suponemos ahora que los coeficientes de la matriz M anterior son los enteros entre 1 y 9. Como la suma $\sum_{i=1}^9 i = 45$, ésta es la suma de los coeficientes de las tres filas de M . Pero todas las filas suman lo mismo, así que los coeficientes de la tercera fila suman 15:

$$15 = 3\alpha + 3\beta + 3\gamma,$$

de modo que $\alpha + \beta + \gamma = 5$ y $\gamma = 5 - \alpha - \beta$. Sustituyendo esto en la matriz M queda:

$$M = \begin{pmatrix} 3\alpha + 3\beta - 5 & -3\beta + 10 & -3\alpha + 10 \\ -6\alpha - 3\beta + 20 & 5 & 6\alpha + 3\beta - 10 \\ 3\alpha & 3\beta & -3\alpha - 3\beta + 15 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que 9 no puede ocupar ninguna esquina. En efecto, en caso contrario podemos suponer $9 = x_{31}$, pues *por simetrías respecto de los ejes no se pierde la magia*. Por tanto, $9 = 3\alpha$, y

$$\begin{cases} 9 > x_{23} = 6\alpha + 3\beta - 10 = 3\beta + 8, \\ 1 < x_{32} = 3\beta, \end{cases}$$

lo que es imposible. Así pues, $9 = x_{12}, x_{21}, x_{23}$ o x_{32} , y, por simetrías respecto de las diagonales, podemos suponer $9 = x_{32} = 3\beta$, esto es

$$M = \begin{pmatrix} 3\alpha + 4 & 1 & -3\alpha + 10 \\ -6\alpha + 11 & 5 & 6\alpha - 1 \\ 3\alpha & 9 & -3\alpha + 6 \end{pmatrix}.$$

Ahora tenemos las condiciones

$$9 > x_{11} = 3\alpha + 4, \quad 1 < x_{31} = 3\alpha, \quad 5 \neq x_{21} = -6\alpha + 11,$$

de modo que $3\alpha = 2$ o 4 . Para estos valores obtenemos las matrices

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estas dos matrices son las únicas posibles si $9 = x_{32}$. Si colocamos 9 en cada uno de los otros tres posibles lugares, obtendremos otras seis matrices mágicas más, y en total hay pues 8 matrices mágicas como las buscadas. En fin, observamos que las dos que hemos obtenido se deducen una de la otra por una simetría respecto del eje vertical, luego concluimos que estas ocho matrices mágicas se obtienen todas a partir de una cualquiera por simetrías respecto de los ejes y las diagonales. Esto no es una sorpresa: el amante de los grupos sabe que esas simetrías generan uno de ocho elementos (el diedral). \square

Soluciones §7

Número 1. En el conjunto \mathbb{R} de los números reales se considera la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales, en la que la suma de elementos de \mathbb{R} es la habitual, y el producto del escalar $\lambda \in \mathbb{Q}$ por el vector $u \in \mathbb{R}$ es el producto usual λu de λ y u como números reales. Comprobar que esto define efectivamente en \mathbb{R} una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{Q} y decidir si se trata o no de un espacio vectorial de tipo finito.

Solución. Omitimos la comprobación de que \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . Supongamos que es finitamente generado. En tal caso admite una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, para cierto número natural n . Que \mathcal{B} sea linealmente independiente significa que la aplicación

$$\varphi : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{R} : (q_1, \dots, q_n) \mapsto q_1 u_1 + \dots + q_n u_n$$

es inyectiva, y que sea sistema generador equivale a que φ sea sobreyectiva. Por tanto φ es biyectiva, y esto es imposible, ya que \mathbb{Q}^n es numerable y \mathbb{R} no lo es. En conclusión, \mathbb{R} no es finitamente generado como espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . \square

Número 2. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E . Estudiar si los vectores $v_1 = u_1 - u_3 + 2u_4$, $v_2 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4$ y $v_4 = u_1 + u_2 + u_4$ son linealmente independientes. Extraer de ellos el mayor número posible que lo sean, y construir una base de E que contenga a esos elegidos.

Solución. La matriz de coordenadas de los v_i es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 2 (compruébese), por lo que el máximo número de vectores linealmente independientes de entre los dados es 2. Por ejemplo, podemos tomar v_1 y v_2 porque las dos primeras columnas de la matriz son independientes. Si les añadimos los vectores u_1 y u_2 , el conjunto $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ es base de E ya que el determinante de la matriz de coordenadas de estos cuatro vectores es no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -3. \quad \square$$

Número 3. Estudiar si los conjuntos siguientes son base del espacio vectorial dado:

(1) $\mathcal{B}_1 = \{1, T + 2, (T + 2)^2, (T + 2)^3\}$ de $\mathbb{K}_3[T]$, y

(2) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Solución. (1) Como \mathcal{B}_1 consta de tantos elementos como $\dim(\mathbb{K}_3[T])$, es una base si y sólo si estos vectores son independientes. Esto se decide calculando el determinante de la matriz C_1 cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B}_1 respecto de la base estándar de $\mathbb{K}_3[T]$, y mirando si es nulo o no. Ahora bien,

$$(T + 2)^2 = T^2 + 4T + 4 \quad \text{y} \quad (T + 2)^3 = T^3 + 6T^2 + 12T + 8,$$

y por tanto

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante vale 1. En conclusión, \mathcal{B}_1 es base de $\mathbb{K}_3[T]$.

(2) Mediante el método anterior se comprueba que las matrices de \mathcal{B}_2 son dependientes, luego \mathcal{B}_2 no es una base. Más conceptualmente, el siguiente argumento

asegura la dependencia de las 4 matrices: todas son simétricas, luego están en el subespacio $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ que tiene dimensión $3 < 4$. \square

Número 4. Sean \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos con su estructura estándar de espacio vectorial real. Demostrar que

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, i), u_3 = (i, 1), u_4 = (i, -i)\}$$

es una base del espacio vectorial real $E = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$, y calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B} del vector $w = (3 + 2i, 5 + 4i)$.

Solución. Como una base del espacio vectorial real \mathbb{C} es $\{1, i\}$, se deduce de II.7.11, p. 162, que $\dim(\mathbb{C}^2) = 4$, y una de sus bases es

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (i, 0), v_3 = (0, 1), v_4 = (0, i)\}.$$

Para comprobar que \mathcal{B} es base es suficiente probar que sus vectores son linealmente independientes, y esto se deduce de que el determinante de la matriz C cuyas columnas son las coordenadas respecto de \mathcal{B}_1 de los vectores de \mathcal{B} es no nulo. Comprobémoslo. Observamos que

$$u_1 = v_1 + v_3, \quad u_2 = v_1 + v_4, \quad u_3 = v_2 + v_3, \quad u_4 = v_2 - v_4,$$

o lo que es igual,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $\det(C) = -2 \neq 0$. Esto demuestra que \mathcal{B} es base de \mathbb{C}^2 y además $C = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$.

Para la segunda parte, las coordenadas de w respecto de \mathcal{B}_1 son $x = (3, 2, 5, 4)$, luego si denotamos y las coordenadas de w respecto de \mathcal{B} , tenemos, por II.7.12, p. 163,

$$y^t = C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B})x^t = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)^{-1}x^t = C^{-1}x^t.$$

Un cálculo sencillo nos proporciona

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad y^t = C^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, las coordenadas de w respecto de la base \mathcal{B}_1 son $(1, 2, 4, -2)$. \square

Número 5. En $E = \mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $V = L[v_1, v_2]$ y $W = L[w_1, w_2]$, donde $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 3, 2)$, $w_1 = (1, 1, 0)$ y $w_2 = (3, 8, 5)$. Demostrar que $V = W$.

Solución. Los vectores v_1 y v_2 no son proporcionales, y lo mismo ocurre con w_1 y w_2 , por lo que $\dim(V) = 2 = \dim(W)$. En consecuencia es suficiente comprobar el contenido $V \subset W$. Para ello, y puesto que V es el menor subespacio que contiene a v_1 y v_2 , basta probar que $v_1, v_2 \in W$. Al intentar escribir v_1 como combinación de w_1 y w_2 resulta:

$$v_1 = xw_1 + yw_2 \rightsquigarrow \begin{cases} x + 3y = 1, \\ x + 8y = 2, \\ 5y = 1, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x + 3y = 1, \\ 5y = 1, \end{cases}$$

y este sistema tiene la solución $x = 2/5, y = 1/5$. Así $v_1 \in W$. Para v_2 se tiene

$$v_2 = sw_1 + tw_2 \rightsquigarrow \begin{cases} s + 3t = 1, \\ s + 8t = 3, \\ 5t = 2, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} s + 3t = 1, \\ 5t = 2, \end{cases}$$

cuya solución es $s = -1/5, t = 2/5$. Hemos probado que $v_2 \in W$. En suma, $V = W$. \square

Número 6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),$$

probar que el conjunto $V = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : AX = XA\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Calcular su dimensión y encontrar una de sus bases.

Solución. Utilizaremos en $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la base estándar, respecto de la cual una matriz $X = (x_{ij})$ tiene por coordenadas sus coeficientes. Ahora bien,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

pertenece a V cuando $AX = XA$, esto es, si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{21} & 2x_{12} + x_{22} \\ -2x_{11} & -2x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} - 2x_{12} & x_{11} \\ 2x_{21} - 2x_{22} & x_{21} \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad equivale a

$$\begin{cases} 2x_{12} + x_{21} & = 0, \\ x_{11} - 2x_{12} & - x_{22} = 0, \\ 2x_{11} & + 2x_{21} - 2x_{22} = 0. \end{cases}$$

Esto ya prueba que V es un espacio vectorial, pues es un subconjunto descrito por ecuaciones lineales homogéneas en coordenadas respecto de una base (en este caso la estándar). El sistema encontrado equivale a:

$$\begin{cases} 2x_{12} + x_{21} & = 0, \\ x_{11} + x_{21} - x_{22} & = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_{21} & = -2x_{12}, \\ x_{22} & = x_{11} - 2x_{12}. \end{cases}$$

En consecuencia, hay dos variables secundarias, luego la dimensión de V es 2. Una base se obtiene dando valores a esas variables secundarias: $(x_{11}, x_{12}) = (1, 0)$, $(x_{11}, x_{12}) = (0, 1)$, lo que proporciona dos matrices M_1, M_2 que forman una base de V .

Lo anterior se puede hacer directamente. Del último sistema encontrado deducimos que

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -2x_{12} & x_{11} - 2x_{12} \end{pmatrix} = x_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right\},$$

es decir, las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

generan V . Además son independientes, porque la matriz que tiene por columnas las coordenadas de M_1 y M_2 respecto de la base estándar tiene rango 2:

$$\text{rg}(C) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

En conclusión, $\mathcal{B} = \{M_1, M_2\}$ es una base de V y $\dim(V) = 2$. □

Número 7. Dado el subespacio vectorial V de \mathbb{K}^4 definido por

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\},$$

hallar una base de V . Comprobar que el vector $(1, -2, 0, 1)$ está en V , y hallar sus coordenadas respecto de la base de V encontrada.

Solución. Resolviendo la ecuación implícita $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 &= -\alpha + \beta - \gamma, \\ x_2 &= \alpha, \\ x_3 &= \beta, \\ x_4 &= \gamma, \end{cases}$$

por lo que los vectores

$$u_1 = (-1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1, 0), \quad u_3 = (-1, 0, 0, 1),$$

constituyen una base de V . Por otra parte, el vector $u = (1, -2, 0, 1)$ está en V , pues satisface la ecuación implícita dada, y sus coordenadas (α, β, γ) respecto de la base anterior son $(x_2, x_3, x_4) = (-2, 0, 1)$. □

Número 8. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E , y consideremos los vectores $v_1 = u_1 + u_3 + 2u_4$, $v_2 = 2u_1 + u_2 + 3u_3 + 4u_4$, y $v_3 = u_1 - u_2 + 2u_4$. Obtener unas ecuaciones implícitas del subespacio $V \subset E$ generado por v_1, v_2 y v_3 .

Solución. Nos piden describir $V = L[v_1, v_2, v_3]$ por medio de ecuaciones implícitas en coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ respecto de \mathcal{B} . Como el vector v pertenece a V si y sólo si sus coordenadas x dependen de las de los v_j , tenemos la condición

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 3 & 0 & x_3 \\ 2 & 4 & 2 & x_4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como la segunda matriz tiene rango 2 y sus columnas primera y segunda son independientes, lo anterior equivale a que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \\ 2 & 4 & x_4 \end{pmatrix} = 2.$$

Calculando el rango por menores, a partir del menor no nulo formado por la caja 2×2 superior izquierda, obtenemos las siguientes ecuaciones lineales:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 4 & x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

La regla de Laplace por la última columna nos da

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_4 = 0, \end{cases}$$

y estas son unas ecuaciones implícitas de V respecto de \mathcal{B} . □

Número 9. Hallar la dimensión y una base del subespacio V de \mathbb{K}^5 cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar son:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Solución. Se aprecia inmediatamente que la tercera ecuación es el resultado de sumar a la primera el doble de la segunda, por lo que es superflua, y restando la primera de la segunda se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema (Gauss-Jordan) obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = -2\alpha + 5\beta - 7\gamma, \\ x_2 = \alpha, \\ x_3 = -2\beta + 2\gamma, \\ x_4 = \beta, \\ x_5 = \gamma. \end{cases}$$

Por tanto una base está formada por los vectores

$$(-2, 1, 0, 0, 0), (5, 0, -2, 1, 0), (-7, 0, 2, 0, 1),$$

y la dimensión del subespacio es 3. \square

Número 10. Hallar una base, su dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio V de \mathbb{K}^4 descrito respecto de la base estándar por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \\ x_3 = 3\lambda_1 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4, \\ x_4 = -\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4. \end{cases}$$

Solución. Consideramos las λ_j como incógnitas y las x_i como términos independientes, y aplicamos el método de Gauss-Jordan para resolver este sistema. Primero eliminamos λ_1 en las ecuaciones primera, tercera y cuarta:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4, \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \\ -3x_2 + x_3 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4, \\ x_2 + x_4 = 6\lambda_2 + 6\lambda_3 + 2\lambda_4. \end{cases}$$

Después eliminamos las demás λ_j en la tercera y la cuarta ecuación y queda:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4, \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \end{cases}$$

y las dos últimas ecuaciones son unas ecuaciones implícitas de V . Sabemos que por construcción son independientes, luego la codimensión de V es 2, y su dimensión $4 - 2 = 2$. Para encontrar una base podríamos resolver ese sistema de dos ecuaciones implícitas y obtener unas paramétricas que tendrían dos parámetros y proporcionarían una base. Sugerimos al lector que haga esto, y lo coteje con el método alternativo siguiente. A la vista de las ecuaciones paramétricas del enunciado, los vectores

$$(2, 1, 3, -1), (-1, 1, 0, 5), (1, 2, 3, 4), (1, 1, 2, 1),$$

están en V (de hecho generan V , pero ni siquiera esto hace falta), luego dos cualesquiera independientes formarán una base: por ejemplo, los dos primeros. \square

Número 11. Hallar una base, su dimensión y unas ecuaciones paramétricas del subespacio V de \mathbb{K}^5 descrito respecto de la base estándar mediante las siguientes ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos el sistema por el método de Gauss-Jordan. Como la segunda ecuación es la suma de la primera y la tercera, y la quinta es la suma de las tres anteriores, nos quedamos con

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Ahora restamos a la primera el triple de la segunda y la nueva ecuación multiplicada por 5 se suma a la tercera, y reordenando obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 8x_4 + x_5 = 0, \\ -x_3 + 2x_4 = 0, \\ 24x_3 - 44x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

En fin, las paramétricas son:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{3}\mu, \\ x_2 = -\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu, \\ x_3 = \frac{11}{6}\lambda - \frac{1}{3}\mu, \\ x_4 = \lambda, \\ x_5 = \mu, \end{cases}$$

la dimensión es 2, y los vectores $(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, 1, 0)$ y $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$ forman una base de V . \square

Número 12. Se consideran los conjuntos de vectores

$$\mathcal{B} = \{(3, 2, 5), (2, 1, 3), (1, 0, 2)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(-2, 1, 3), (-2, 1, 2), (1, -1, 3)\}.$$

(1) Demostrar que ambos son bases de \mathbb{K}^3 y hallar las matrices del cambio de base en ambos sentidos.

(2) Hallar las coordenadas respecto de \mathcal{B}' del vector $u \in \mathbb{K}^3$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} son $(2, -1, -4)$.

Solución. (1) Denotemos \mathcal{E} la base estándar de \mathbb{K}^3 . Las matrices cuyas columnas son las coordenadas respecto de \mathcal{E} de los vectores de \mathcal{B} y los de \mathcal{B}' son, respectivamente.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se calcula inmediatamente que $\det(C) = -1 \neq 0$ y $\det(C') = 1 \neq 0$, lo que muestra que tanto los vectores de \mathcal{B} como los de \mathcal{B}' son independientes, y en consecuencia ambos conjuntos son bases de \mathbb{K}^3 .

Además, por definición, $C = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ y $C' = C(\mathcal{B}', \mathcal{E})$ son las matrices de cambio de base de \mathcal{B} a \mathcal{E} y de \mathcal{B}' a \mathcal{E} , respectivamente. Empleando II.7.12, p. 163,

$$C(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = C(\mathcal{E}, \mathcal{B})C(\mathcal{B}', \mathcal{E}) = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^{-1}C(\mathcal{B}', \mathcal{E}) = C^{-1}C'.$$

Un cálculo rutinario proporciona C^{-1} y $C(\mathcal{B}', \mathcal{B})$:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = C^{-1}C' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ -15 & -13 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

En fin, otro cálculo de matriz inversa da:

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = C(\mathcal{B}', \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 36 & 21 & 7 \\ -41 & -24 & -8 \\ -7 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

El lector puede comprobar que $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')C(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = I_3$.

(2) En virtud de II.7.12, p. 163, las coordenadas x e y de u respecto de las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' satisfacen la igualdad

$$y^t = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')x^t = \begin{pmatrix} 36 & 21 & 7 \\ -41 & -24 & -8 \\ -7 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -26 \\ -6 \end{pmatrix},$$

así que $y = (23, -26, -6)$. □

Número 13. Sea $\mathbb{K}_3[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Probar que $\{(1+T)^3, T(1+T)^2, T^2(1+T), T^3\}$ es una base de $\mathbb{K}_3[T]$ y

hallar respecto de esta base las coordenadas de los polinomios $1, T, T^2, T^3$. Hallar las matrices de cambio de base correspondientes.

Solución. Consideramos la base estándar

$$\mathcal{E} = \{u_1 = 1, u_2 = T, u_3 = T^2, u_4 = T^3\}$$

y denotamos a la familia que hemos de ver que es base mediante

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1 + T)^3, v_2 = T(1 + T)^2, v_3 = T^2(1 + T), v_4 = T^3\}$$

Desarrollando las potencias resulta

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + 3u_2 + 3u_3 + u_4, \\ v_2 = u_2 + 2u_3 + u_4, \\ v_3 = u_3 + u_4, \\ v_4 = u_4. \end{cases}$$

Así, la matriz de las coordenadas de los v_i respecto de la base estándar es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz tiene determinante 1, es invertible, y \mathcal{B} es ciertamente una base. Además, $C = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ es la matriz de cambio de una base a otra, y $C^{-1} = C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$. Pero más sencillo que calcular esta inversa es resolver el sistema anterior. Procediendo de abajo arriba, obtenemos

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - 3v_2 + 3v_3 - v_4, \\ u_2 = v_2 - 2v_3 + v_4, \\ u_3 = v_3 - v_4, \\ u_4 = v_4, \end{cases}$$

o lo que es igual,

$$C^{-1} = C(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Número 14. Revisar el análisis de la matriz de cambio de base sin suponer que ambas bases tengan el mismo número de elementos, y concluir que si \mathcal{B} y \mathcal{B}' son dos bases con n y m vectores respectivamente, las matrices de cambio C y C' de una a otra y de otra a una cumplen

$$CC' = I_m \quad \text{y} \quad C'C = I_n.$$

Deducir por las propiedades del rango del producto que $n = m$.

Solución. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_m\}$ dos bases del espacio E . Se podrá escribir entonces

$$u_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} v_i \quad y \quad v_\ell = \sum_{k=1}^n c'_{k\ell} u_k.$$

Al sustituir una expresión en otra obtenemos

$$u_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} \left(\sum_{k=1}^n c'_{ki} u_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m c'_{ki} c_{ij} \right) u_k,$$

luego, puesto que \mathcal{B} es un conjunto de vectores independientes,

$$\sum_{i=1}^m c'_{ki} c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j, \end{cases}$$

lo que muestra que $C'C = I_n$. Sustituyendo al revés resulta

$$v_\ell = \sum_{k=1}^n c'_{k\ell} \left(\sum_{i=1}^m c_{ik} v_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} c'_{k\ell} \right) v_i,$$

luego $CC' = I_m$. Para terminar, sea $p = \min\{m, n\}$. Entonces,

$$n = \text{rg}(I_n) = \text{rg}(C'C) \leq \text{rg}(C) \leq p \quad y \quad m = \text{rg}(I_m) = \text{rg}(CC') \leq \text{rg}(C) \leq p,$$

de donde $n = m$. □

Número 15. Sean ξ y ζ dos números complejos distintos y no nulos, raíces del polinomio de grado dos $T^2 - aT + b$. Denotamos por E al conjunto de todas las sucesiones $u = (u_n)$ determinadas por sus dos primeros términos u_1 y u_2 , junto con la condición

$$u_n = au_{n-1} - bu_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3.$$

Operando con las sucesiones término a término, E se dota de estructura de espacio vectorial complejo.

(1) Demostrar que E es de tipo finito y que las sucesiones de E : $\alpha = (1, 0, \dots)$ que empieza $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$, y $\beta = (0, 1, \dots)$ que empieza $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$, forman una base de E .

(2) Comprobar que las sucesiones $x = (\xi^n)$ e $y = (\zeta^n)$ constituyen otra base de E , y calcular las matrices de cambio de base correspondientes.

(3) Se llama *sucesión de Fibonacci* φ la definida por

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 2, \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}.$$

Aplicar los apartados previos para calcular el término general φ_n .

Solución. Antes de nada, usaremos libremente la observación evidente de que una sucesión $u \in E$ está completamente determinada por sus dos primeros términos, y recíprocamente, dados dos tales primeros términos, siempre podemos encontrar una sucesión en E que empieza con ellos dos. En realidad esto es decir que E se identifica con \mathbb{C}^2 , lo que justifica una parte de los razonamientos que siguen.

Dados $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)_n &= \lambda u_n + \mu v_n \\ &= \lambda(au_{n-1} - bu_{n-2}) + \mu(av_{n-1} - bv_{n-2}) \\ &= a(\lambda u_{n-1} + \mu v_{n-1}) - b(\lambda u_{n-2} + \mu v_{n-2}) \\ &= a(\lambda u + \mu v)_{n-1} - b(\lambda u + \mu v)_{n-2}. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\lambda u + \mu v \in E$, es decir que E es efectivamente un espacio vectorial (nótese que la sucesión nula está en E).

(1) Las sucesiones α, β generan E porque

$$u_1\alpha + u_2\beta = u, \quad \text{para cada } u \in E.$$

En efecto, las dos sucesiones a cada lado de la igualdad están determinadas por sus dos primeros términos, y éstos son iguales:

$$(u_1\alpha + u_2\beta)_i = u_1\alpha_i + u_2\beta_i = \begin{cases} u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 0 = u_1 & \text{para } i = 1, \\ u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 1 = u_2 & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

Que α, β son independientes es consecuencia inmediata de que lo sean los pares $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ y $(\beta_1, \beta_2) = (0, 1)$.

(2) En primer lugar, x e y están en E . Por ejemplo, para x :

$$ax_{n-1} - bx_{n-2} = a\xi^{n-1} - b\xi^{n-2} = \xi^{n-2}(a\xi - b) = \xi^{n-2}\xi^2 = \xi^n = x_n$$

(nótese el uso que se hace de que $\xi^2 - a\xi + b = 0$). Dicho esto, escribimos la matriz de sus coordenadas respecto de la base $\{\alpha, \beta\}$:

$$C = \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ \xi^2 & \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es $\xi\zeta(\zeta - \xi) \neq 0$, luego x e y ciertamente constituyen una base de E . La matriz C es una de las matrices de cambio, y la otra es

$$C^{-1} = \frac{1}{\xi\zeta(\zeta - \xi)} \begin{pmatrix} \zeta^2 & -\zeta \\ -\xi^2 & \xi \end{pmatrix}.$$

(3) Para aplicar lo anterior, debemos determinar ξ y ζ . Pero la definición de φ nos dice que $a = 1$ y $b = -1$, de modo que los números complejos que buscamos son las raíces del polinomio $T^2 - T - 1$:

$$\xi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \zeta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Las coordenadas de φ respecto de $\{\alpha, \beta\}$ son $(1, 2)$, luego las coordenadas (λ, μ) respecto de $\{x, y\}$ son:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\xi\zeta(\zeta-\xi)} \begin{pmatrix} \zeta^2 - 2\zeta \\ -\xi^2 + 2\xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, tenemos $\varphi = \lambda x + \mu y$, o sea:

$$\varphi_n = \lambda \xi^n + \mu \zeta^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}. \quad \square$$

Soluciones §8

Número 1. Dados tres vectores linealmente independientes u_1, u_2, u_3 , en un espacio vectorial E , se consideran los subespacios $V = L[u_1 + u_2, u_2 + u_3]$ y $W = L[u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3]$. ¿Cuál es la dimensión de $V \cap W$?

Solución. Por ser los vectores independientes, son una base del subespacio de E que generan, y para resolver el problema podemos suponer que ese subespacio es todo E . Entonces expresando los vectores que generan V y W en coordenadas respecto de esa base, tenemos:

$$\dim(V) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \dim(W) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

La fórmula de Grassmann se lee en este caso

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) = 4 - \dim(V + W),$$

lo que reduce el problema a calcular la dimensión de $V + W$, lo que es más sencillo. En efecto,

$$V + W = L[u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3]$$

y en consecuencia,

$$\dim(V + W) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

ya que el menor formado por las tres últimas columnas es no nulo. En consecuencia, $\dim(V \cap W) = 1$. \square

Número 2. Para cada número real a se considera el subespacio vectorial H_a de \mathbb{K}^3 de ecuación $ax - y + z = 0$. Sea $u = (1, 1, 1)$. ¿Para qué valores de a se cumple la igualdad $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$?

Solución. Si $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$ la intersección $H_a \cap L[u]$ es nula, por lo que $u \notin H_a$. Recíprocamente, supongamos que $u \notin H_a$. Como H_a está definido por una ecuación no nula, es un hiperplano, y $H_a \subsetneq H_a + L[u]$, de modo que $H_a + L[u] = \mathbb{K}^3$. Pero además, $L[u]$ es una recta, y $H_a \cap L[u] \subsetneq L[u]$, con lo que $H_a \cap L[u] = \{0\}$. Así, $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$.

Por tanto, $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$ si y sólo si $u \notin H_a$, esto es, $a \neq 0$. \square

Número 3. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E y sean: (i) V el subespacio de E de ecuaciones $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$ respecto de \mathcal{B} , y (ii) W el subespacio de E generado por los vectores $w_1 = u_1 + u_2$, $w_2 = u_1 + u_3$ y $w_3 = u_1 + u_4$. Calcular las dimensiones de V , W , $V \cap W$ y $V + W$.

Solución. El rango del sistema de ecuaciones de V es 2, luego la dimensión de V es $4 - 2 = 2$. Por otra parte, los tres generadores de W son independientes (su matriz de coordenadas tiene rango 3, compruébese), luego la dimensión de W es 3. Utilizando esos mismos generadores encontramos una ecuación de W :

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix},$$

que es, $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Reuniendo las ecuaciones de V y W tenemos unas de la intersección $V \cap W$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $x = \rho(0, 0, 1, -1)$, luego define una recta. Por tanto, $\dim(V \cap W) = 1$. Por último,

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4,$$

de modo que $V + W = E$. \square

Número 4. Sean a y b números reales y consideremos los subespacios de \mathbb{R}^4 dados

por las ecuaciones siguientes (respecto de la base estándar de \mathbb{R}^4):

$$V : \begin{cases} x_1 - bx_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0, \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Calcular las dimensiones de V y W . ¿Existen valores de a y b para los que $V = W$?

Solución. Las dimensiones de V y W se calculan como sigue:

$$\dim(V) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} b & -b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\dim(W) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2(a-1) & -(a-1) & -2 & 0 \\ 2b & -(a+b) & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Como V y W tienen la misma dimensión, la condición $V = W$ equivale a $V \subset W$. Por otro lado, una base de V es la formada por los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, b)$, luego la condición $V \subset W$ equivale a que esos dos vectores estén en W . Sustituyendo sus coordenadas en las ecuaciones de W se concluye que eso ocurre si y sólo si

$$\begin{cases} a-1 = 0, \\ 2b - (a+b) = 0, \\ -(a-1) = 0, \\ -(a+b) + 2b = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

En consecuencia, $V = W$ si y sólo si $a = b = 1$. □

Número 5. En un espacio vectorial E se consideran tres subespacios vectoriales V_1, V_2, V_3 , y las igualdades siguientes:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3, \quad V_1 + V_2 \cap V_3 = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3),$$

Estudiar si son ciertas y, si no, modificarlas para que lo sean.

Solución. Analicemos la primera igualdad. Tenemos $V_1 \supset V_1 \cap V_2$ y $V_1 \supset V_1 \cap V_3$, luego, $V_1 \supset V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3$. Además,

$$V_2 + V_3 \supset V_2 \supset V_1 \cap V_2 \quad \text{y} \quad V_2 + V_3 \supset V_3 \supset V_1 \cap V_3,$$

con lo que $V_2 + V_3 \supset V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3$. En consecuencia,

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) \supset V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3.$$

Sin embargo, el contenido contrario no siempre se cumple. Por ejemplo, en $E = \mathbb{K}^2$ con $V_1 = L[(1, 1)]$, $V_2 = L[(1, 0)]$, $V_3 = L[(0, 1)]$, resulta $V_2 + V_3 = \mathbb{K}^2$, $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = \{0\}$ y

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1, \quad V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3 = \{0\}.$$

Para obtener una igualdad verdadera, podemos reemplazar el subespacio mayor por otro menor. Por ejemplo, veamos que:

$$V_1 \cap (V_2 + V_1 \cap V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3.$$

Por la modificación realizada, el contenido que se cumplía sigue siendo válido, y hemos ganado el contrario. En efecto, si $w \in V_1 \cap (V_2 + V_1 \cap V_3)$, existen vectores $w_2 \in V_2, u \in V_1 \cap V_3$ tales que $w = w_2 + u$. Entonces, tanto w como u pertenecen a V_1 , luego también su resta $w_2 = w - u \in V_1$. En consecuencia, $w_2 \in V_1 \cap V_2$ y $u \in V_1 \cap V_3$, luego

$$w = w_2 + u \in V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3.$$

La segunda igualdad del enunciado es también falsa, pues sólo se cumple que

$$V_1 + V_2 \cap V_3 \subset (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3).$$

Un contraejemplo para el otro contenido es $V_1 = L[(1, 1)], V_2 = L[(1, 0)], V_3 = L[(0, 1)]$. Para conseguir una igualdad se puede modificar la fórmula así:

$$V_1 + (V_2 \cap (V_1 + V_3)) = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3).$$

Dejamos al lector la comprobación de esta última igualdad. \square

Número 6. Sea V un subespacio vectorial propio de un espacio vectorial E de tipo finito. ¿Cuál es el subespacio vectorial de E generado por el complementario $E \setminus V$?

Solución. Sea $\{u_1, \dots, u_d\}$ una base de V . Por el teorema de prolongación de la base, existen vectores $u_{d+1}, \dots, u_n \in E$ tales que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de E . Entonces $u_1 + u_n, \dots, u_d + u_n \notin V$ y

$$\begin{aligned} L[E \setminus V] &\supset L[u_1 + u_n, \dots, u_d + u_n, u_{d+1}, \dots, u_n] \\ &= L[u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_n] = E. \end{aligned}$$

Por tanto, el complementario $E \setminus V$ genera todo el espacio E . \square

Número 7. Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E de tipo finito, ambos distintos de E . Supongamos que $\dim(V_1) = \dim(V_2)$. Probar que tienen un suplementario común: existe un subespacio $W \subset E$ tal que $V_1 \oplus W = E = V_2 \oplus W$.

Solución. Podemos elegir un vector $u \notin V_1 \cup V_2$. En efecto, por las hipótesis, ninguno de los subespacios contiene al otro, luego existen $u_1 \in V_1 \setminus V_2, u_2 \in V_2 \setminus V_1$, y $u = u_1 + u_2 \notin V_1 \cup V_2$. De este modo, la dimensión de $V'_i = V_i \oplus L[u]$ es una unidad mayor que la de V_i . Si $V'_i = E$, el suplementario buscado es $W = L[u]$; si no, elegimos otro vector $v \notin V'_1 \cup V'_2$, y consideramos $V''_i = V'_i \oplus L[v] = V_i \oplus L[u, v]$. Si $V''_i = E$, el suplementario es $W = L[u, v]$; si no, repetimos el argumento. Como E es de tipo

finito, el proceso termina con un suplementario común W . \square

Número 8. Sean n un entero positivo, $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} .

(1) Dado un polinomio $f \in E$ no constante, demostrar que

$$V_f = \{P \in E : P \text{ es múltiplo de } f\}$$

es un subespacio vectorial de E . Hallar una base de V_f y otra de un suplementario suyo.

(2) Dados dos subespacios V_f y V_g del tipo anterior, describir su intersección.

(3) Sean $n = 2$, $f = -T + T^2$ y $g = 6 - 5T + T^2$. Calcular $V_f + V_g$.

Solución. (1) Que V_f es subespacio es inmediato. Para saber si un polinomio $P \in E$ pertenece a V_f basta dividir $P = Qf + R$, y el resto R es nulo si y sólo si $P \in V_f$. En general, denotando por d el grado de f , el grado del cociente Q es $\leq n - d$ y el del resto $< d$, luego tenemos

$$Q(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_{n-d}T^{n-d}, \quad R(T) = b_0 + b_1T + \cdots + b_{d-1}T^{d-1}.$$

Nos fijamos pues en los polinomios

$$f, Tf, \dots, T^{n-d}f, 1, T, \dots, T^{d-1},$$

que por la igualdad $P = Qf + R$, generan E . Pero además tienen grados distintos, luego son linealmente independientes, y por tanto constituyen una base de E . Como V_f está descrito por la condición $R = 0$, se deduce que los $n - d + 1$ primeros de los polinomios anteriores generan V_f , y concluimos que

$$\begin{cases} f, Tf, \dots, T^{n-d}f & \text{son una base de } V_f, \text{ y} \\ 1, T, \dots, T^{d-1} & \text{son una base de un suplementario } W_f \text{ de } V_f. \end{cases}$$

(2) Sea h el mínimo común múltiplo de dos polinomios f, g de grados $d, e < n$. Como un polinomio es múltiplo de f y de g si y sólo si lo es de h , estamos tentados de escribir $V_f \cap V_g = V_h$. Pero la afirmación anterior no tiene en cuenta los grados, y aunque f y g tengan grados $\leq n$, h puede tenerlo $> n$. Por tanto, hay que distinguir dos casos:

$$\begin{cases} \text{grado}(h) \leq n : & V_f \cap V_g = V_h, \\ \text{grado}(h) > n : & V_f \cap V_g = \{0\}. \end{cases}$$

(3) Por analogía con (2), diríamos que $V_f + V_g = V_h$ donde ahora h es el máximo común divisor de f y g . En el caso pedido, $h = 1$, y $V_h = E$. Veamos si es cierto que

$V_f + V_g = E$. Por (1), el subespacio V_f está generado por f , y el subespacio V_g por g . En coordenadas (a_0, a_1, a_2) respecto de la base estándar $\{1, T, T^2\}$ tenemos

$$V_f = L[(0, -1, 1)], \quad V_g = L[(6, 5, -1)],$$

y por tanto

$$V_f + V_g : 0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 6 & a_0 \\ -1 & 5 & a_1 \\ 1 & -1 & a_2 \end{pmatrix} = -4a_0 + 6a_1 + 6a_2.$$

En conclusión, la suma $V_f + V_g$ es un hiperplano de $E = V_h$, y no es cierto que $V_f + V_g = V_h$. \square

Número 9. Calcular el rango de la matriz adjunta de una matriz cuadrada.

Solución. Sean A una matriz cuadrada de orden n , y B su matriz adjunta. Si A tiene rango n , entonces su determinante α es no nulo, y $B = \alpha A^{-1}$ tiene rango n . Si A tiene rango $< n - 1$, entonces todos sus menores de orden $n - 1$ son nulos, y B es la matriz nula. Por tanto, el caso interesante es $\text{rg}(A) = n - 1$, lo que suponemos en lo que sigue. Entonces alguno de los menores de orden $n - 1$ de A no es nulo, la matriz adjunta B no es nula, y $\text{rg}(B) \geq 1$. Vamos a ver que de hecho B tiene rango 1.

Para ello recordamos que $AB = \det(A)I_n = 0$, en este caso. Si $A = (a_{ij})$, esto significa que cada columna de B es una solución del sistema $Ax^t = 0$, luego las columnas de B están contenidas en un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n de dimensión $n - \text{rg}(A) = n - (n - 1) = 1$. Por tanto, no hay entre ellas dos independientes, y concluimos que $\text{rg}(B) \leq 1$. Hemos terminado. \square

Número 10. Se consideran las matrices $\begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu \\ \mu & \lambda - \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(1) Mostrar que todas esas matrices constituyen un subespacio vectorial V del espacio $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Hallar una base suya y su dimensión.

(2) Demostrar que si $M \in V$, entonces $M^n \in V$ para cada $n \geq 0$.

(3) Encontrar un suplementario vectorial W de V en E que también tenga la propiedad (2), y otro W' que no la tenga.

Solución. (1) Tenemos

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu \\ \mu & \lambda - \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

luego V es el subespacio generado por las dos matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que A no es múltiplo de I , las dos matrices son independientes, y forman una base de V , que tiene pues dimensión 2.

(2) Una matriz $M \in V$ se escribe como suma $M = \lambda I + \mu A$ para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Como λI conmuta con μA , podemos emplear la fórmula de Newton para calcular M^n :

$$M^n = (\lambda I + \mu A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda I)^{n-k} (\mu A)^k.$$

Ahora bien, $A^2 = 0$, luego $A^k = 0$ para $k \geq 2$, por lo que la suma anterior se reduce a los dos primeros términos $k = 0, 1$:

$$M^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}\mu A \in V.$$

(3) Consideréense las matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta que $\{I, A, J, B\}$ e $\{I, A, J', B\}$ son dos bases de E , pues las matrices de coordenadas respecto de la base estándar son en cada caso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y ambas tienen determinante no nulo. Por ello, J, B generan un suplementario vectorial W de V , y J', B generan otro W' .

El subespacio W tiene la propiedad requerida respecto de las potencias. En efecto, W es simplemente el subespacio de las matrices con primera fila nula, y se comprueba inmediatamente que el producto de dos tales matrices es de nuevo de ese tipo. En cuanto a W' , afirmamos que $J'^2 \notin W'$. En efecto, en otro caso existirían $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ con $J'^2 = \lambda J' + \mu B$, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + \mu \end{pmatrix},$$

lo que es imposible. □

Número 11. Sea $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$.

(1) Mostrar que para cualesquiera $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos, el conjunto $V_a \subset E$ formado por los polinomios que se anulan en todos los a_i es un subespacio vectorial de E . ¿De qué dimensión?

(2) Sean $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ y $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{K}$ dos colecciones de escalares en ambos casos distintos dos a dos. Estudiar cuándo $V_a + V_b = E$ e interpretar el resultado obtenido.

Solución. (1) La condición de que un polinomio $P(T) = c_0 + \dots + c_n T^n$ se anule en los a_i , se escribe

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_1^n = 0, \\ c_0 + c_1 a_2 + \dots + c_n a_2^n = 0, \\ \vdots \\ c_0 + c_1 a_r + \dots + c_n a_r^n = 0. \end{cases}$$

Este sistema define un subespacio vectorial de E , cuya codimensión es el rango de la matriz del sistema. Vemos que esa matriz contiene menores que son determinantes de Vandermonde, no nulos por ser los a_i distintos. Por tanto, el rango es r si $r \leq n+1$, y $n+1$ si $r \geq n+1$. En consecuencia la dimensión del subespacio V_a es $n-r+1$ en el primer caso, y nula en el segundo.

(2) La condición $V_a + V_b = E$ se cumple si y sólo si $\dim(V_a + V_b) = n+1$, y por la fórmula de Grassmann y lo visto en (1) esto equivale a que

$$\begin{aligned} \dim(V_a \cap V_b) &= \dim(V_a) + \dim(V_b) - \dim(V_a + V_b) \\ &= (n-r+1) + (n-s+1) - (n+1) = n - (r+s) + 1. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $V_a \cap V_b = V_c$, donde c representa la colección de escalares c_1, \dots, c_e , distintos entre los a_i, b_j , resulta $\dim(V_a \cap V_b) = n-e+1$. Así pues, la condición es que $r+s = e \leq n+1$, esto es, que todos los escalares a_i y b_j sean distintos, y *no haya demasiados*.

En fin, que $V_a + V_b = E$ dice que todo polinomio de grado $\leq n$ es suma de uno que se anula en los a_i y otro en los b_j , ambos de grado $\leq n$. Por tanto, esto se cumple si y sólo si no se repiten puntos en las dos colecciones a y b , y no hay más de $n+1$. \square

Número 12. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E , sea L el subespacio vectorial del que unas ecuaciones implícitas respecto de \mathcal{B} son

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

y sea $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$. Obtener una base del espacio vectorial cociente E/L y calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase $[v]$.

Solución. Resolviendo las ecuaciones implícitas de L , obtenemos las paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = 3\lambda + 2\mu, \\ x_2 = \lambda, \\ x_3 = \mu, \\ x_4 = -\lambda - \mu, \end{cases}$$

de modo que los vectores cuyas coordenadas son $(3, 1, 0, -1)$, $(2, 0, 1, -1)$ forman una base de L . Añadiendo los vectores u_1 y u_2 obtenemos una base de E , luego u_1, u_2 generan un suplementario de L , y sus clases $[u_1], [u_2]$ son una base del cociente E/L .

Para la segunda parte, las coordenadas buscadas (a, b) cumplen $[v] = a[u_1] + b[u_2] = [au_1 + bu_2]$, esto es, $u = v - au_1 - bu_2 \in L$. Las coordenadas de u respecto de \mathcal{B} son

$$(1, 1, 1, 1) - a(1, 0, 0, 0) - b(0, 1, 0, 0) = (1 - a, 1 - b, 1, 1),$$

luego u está en el subespacio L si y sólo si esas coordenadas cumplen las ecuaciones implícitas de L :

$$\begin{cases} (1 - a) - 3(1 - b) - 2 = 0, \\ (1 - b) + 1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $(a, b) = (5, 3)$. □

Número 13. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E , $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$ y $L = L[v_1, v_2]$.

(1) Encontrar dos vectores independientes de $E \setminus L$, cuyas clases no sean (resp. sean) independientes en el cociente E/L .

(2) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/L no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

Solución. Antes de todo, escribimos las ecuaciones paramétricas de L que los generadores proporcionan inmediatamente, y eliminamos los parámetros para obtener unas implícitas:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu, \\ x_2 = \mu, \\ x_3 = \lambda - \mu, \\ x_4 = -\mu, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(1) A la vista de las ecuaciones anteriores, $u_1, u_3 \notin L$. Por supuesto, $\{u_1, u_3\}$ es un conjunto linealmente independiente, pues los vectores u_1, u_3 forman parte de la base \mathcal{B} . Sin embargo, $u_1 + u_3 \in L$, luego $[0] = [u_1 + u_3] = [u_1] + [u_3]$, y las clases de equivalencia no son independientes.

Por otro lado, como E/L tiene dimensión 2 (= rango de las ecuaciones implícitas de L), cualquier base $\{[w_1], [w_2]\}$ del cociente está formada por dos clases independientes, y los vectores w_1, w_2 deben ser independientes también. Por ejemplo, añadimos a v_1, v_2 los dos vectores u_1, u_2 para obtener una base de E , y tomamos $w_1 = u_1, w_2 = u_2$.

(2) Los cuatro vectores de la base \mathcal{B} son linealmente independientes y la suma de sus clases respecto de L no es la clase nula, o lo que es igual, $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \notin L$, ya que las coordenadas $(1, 1, 1, 1)$ de u no cumplen la segunda de las ecuaciones

implícitas de L . Sin embargo, los vectores $\{u_1, u_2, -u_3, -u_4\}$ son proporcionales a los anteriores y su suma $u' = u_1 + u_2 - u_3 - u_4 \in L$: las coordenadas de u' son $(1, 1, -1, -1)$, que cumplen las ecuaciones implícitas. Por tanto,

$$[u_1] + [u_2] + [-u_3] + [-u_4] = [u'] = [0]$$

es la clase nula. □

Número 14. Demostrar que

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ b & a+2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, y encontrar una base del cociente $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})/L$.

Solución. Cada matriz X de L se escribe

$$X = \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ b & a+2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

luego $L = L[M, N]$ es el subespacio vectorial generado por las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como M y N no son proporcionales, constituyen una base de L , y para encontrar una base del cociente habrá que prolongarla a una de todo $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Para ello usamos coordenadas respecto de la base estándar $\{\Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyas dos primeras columnas son las coordenadas de M y N y las dos últimas las de Δ_{11} y Δ_{12} . Hemos elegido éstas últimas porque con ellas el determinante es no nulo, luego las matrices $M, N, \Delta_{11}, \Delta_{12}$, son independientes y por ello base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. En conclusión, $\{[\Delta_{11}], [\Delta_{12}]\}$ es una base del cociente $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})/L$. □

Número 15. Sean $n > 2$ un número entero, $\mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n , y el conjunto $L = \{f \in \mathbb{K}_n[T] : f(0) = f(1) = 0\}$. Demostrar que L es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}_n[T]$ y obtener una base del espacio cociente $\mathbb{K}_n[T]/L$. Calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase

$$[1 + T + T^2 + \cdots + T^n] = (1 + T + T^2 + \cdots + T^n) + L.$$

Solución. Para la primera parte basta observar que L es no vacío, pues contiene al polinomio nulo, y que dados escalares a, b , y polinomios $f, g \in L$, se cumple, para $x = 0, 1$, que $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x) = 0$, lo que significa que $af + bg \in L$.

Para la segunda parte comenzamos buscando una base de L . Nótese que cada polinomio $f \in L$ se anula en 0 luego, por la regla de Ruffini, existe $g \in \mathbb{K}_n[T]$ tal que $f(T) = Tg(T)$. Además, $0 = f(1) = g(1)$ y, de nuevo por la regla de Ruffini, existe $h \in \mathbb{K}_n[T]$ tal que $g(T) = (T - 1)h(T)$. Por tanto, $f(T) = T(T - 1)h(T)$ y el grado de h es dos unidades menor que el de f , esto es, menor o igual que $n - 2$. Por tanto existen $a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{K}$ tales que

$$h(T) = a_0 + a_1T + \dots + a_{n-2}T^{n-2},$$

y esto implica que

$$f(T) = T(T - 1)(a_0 + a_1T + \dots + a_{n-2}T^{n-2}).$$

Por tanto, los $n - 1$ polinomios

$$T(T - 1), \dots, T^{n-1}(T - 1),$$

generan L . Como además sus grados son distintos dos a dos, son linealmente independientes, luego constituyen una base de L . Por tanto $\dim(L) = n - 1$, y en consecuencia,

$$\dim(\mathbb{K}_n[T]/L) = \dim(\mathbb{K}_n[T]) - \dim(L) = (n + 1) - (n - 1) = 2.$$

Para encontrar una base del cociente observamos primero que los polinomios

$$1, T, T(T - 1), \dots, T^{n-1}(T - 1),$$

son independientes, por tener grados distintos, y por ser el número adecuado $(n + 1)$ forman una base de $\mathbb{K}_n[T]$. En consecuencia, $\{[1], [T]\}$ es base del cociente $\mathbb{K}_n[T]/L$.

Por último, para obtener las coordenadas respecto de esa base de $[h] = [1 + T + T^2 + \dots + T^n]$, escribimos

$$[h] = a[1] + b[T] = [a + bT],$$

es decir, $[h - a - bT] = [0]$. Esto significa que $h - a - bT \in L$, o lo que es igual, $h - a - bT$ se anula en 0 y 1. Por tanto,

$$\begin{cases} 0 = (h - a - bT)(0) = h(0) - a = 1 - a, \\ 0 = (h - a - bT)(1) = h(1) - a - b = n + 1 - a - b. \end{cases}$$

Concluimos que las coordenadas son $a = 1$ y $b = n$. □

Soluciones §9

Número 1. Encontrar las ecuaciones de la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ que cumple:

$$f(1, 0, 1) = (1, 0, -1), \quad f(2, 1, 0) = (0, 3, 1), \quad f(-1, 0, -2) = (0, 1, 1).$$

Calcular la imagen y la imagen inversa del subespacio $V \subset \mathbb{K}^3$ generado por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

Solución. Vamos a calcular en primer lugar $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ y $f(0, 0, 1)$. Al sumar las igualdades primera y tercera se obtiene

$$f(0, 0, -1) = f((1, 0, 1) + (-1, 0, -2)) = f(1, 0, 1) + f(-1, 0, -2) = (1, 1, 0),$$

y en consecuencia, $f(0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$ y

$$f(1, 0, 0) = f(1, 0, 1) + f(0, 0, -1) = (2, 1, -1).$$

Por último,

$$f(0, 1, 0) = f(2, 1, 0) - 2f(1, 0, 0) = (0, 3, 1) - (4, 2, -2) = (-4, 1, 3).$$

Ahora ya,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= (2x, x, -x) + (-4y, y, 3y) + (-z, -z, 0) \\ &= (2x - 4y - z, x + y - z, -x + 3y). \end{aligned}$$

La imagen de V es el subespacio generado por

$$f(1, 0, 0) = (2, 1, -1) \quad \text{y} \quad f(0, 1, 1) = (-5, 0, 3).$$

Como estos vectores son independientes, $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ pertenece a $f(V)$ si y sólo si

$$0 = \det \begin{pmatrix} x & 2 & -5 \\ y & 1 & 0 \\ z & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3x - y + 5z,$$

y ésta es una ecuación implícita de $f(V)$. Por otro lado, el vector $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ pertenece a $f^{-1}(V)$ si y sólo si $f(x, y, z)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$, o lo que es lo mismo, si y sólo si

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2x - 4y - z & 1 & 0 \\ x + y - z & 0 & 1 \\ -x + 3y & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2x + 2y + z.$$

□

Número 2. De una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ se sabe que:

- (i) la recta generada por $(1, 0, 0)$ tiene por imagen la recta $x = z = y$,
- (ii) la imagen del vector $(0, 1, 0)$ es el vector $(-2, 1, 1)$,
- (iii) el núcleo de f está generado por el vector $(1, 1, 1)$, y
- (iv) la imagen inversa del plano $y + z = 0$ contiene al vector $(0, 0, 1)$.

¿De qué aplicación lineal se trata?

Solución. Por la primera condición, $f(1, 0, 0) = a(1, 1, 1)$ para cierto $a \in \mathbb{K}$, y por la cuarta, existen $b, c \in \mathbb{K}$ tales que $f(0, 0, 1) = (b, c, -c)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= f(1, 1, 1) = f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) + f(0, 0, 1) \\ &= a(1, 1, 1) + (-2, 1, 1) + (b, c, -c) = (a + b - 2, a + c + 1, a - c + 1). \end{aligned}$$

Esto es un sistema de ecuaciones lineales con soluciones $a = -1, b = 3, c = 0$, luego

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= -x(1, 1, 1) + y(-2, 1, 1) + z(3, 0, 0) = (-x - 2y + 3z, -x + y, -x + y). \quad \square \end{aligned}$$

Número 3. Sean $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal y a un escalar que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 2, 2)$, $f(0, 1, 0, 0) = (a, 3, -1, 1)$,
- (ii) el núcleo de f contiene al subespacio $x = y = z$, y
- (iii) existe un vector no nulo de \mathbb{K}^4 que se transforma mediante f en su triple.

Se pide:

- (1) Calcular la dimensión del núcleo de f y una base suya.
- (2) Probar que $f(0, 0, 1, 0) = (-1 - a, -3, -1, -3)$.
- (3) Calcular la matriz M de f respecto de la base estándar.

Solución. (1) Con independencia del valor de a , los vectores $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 2, 2)$ y $f(0, 1, 0, 0) = (a, 3, -1, 1)$ son linealmente independientes, luego $\dim(\text{im}(f)) \geq 2$; además, $\dim(\ker(f)) \geq \dim(\{x = y = z\}) = 2$. Ahora bien, por la fórmula de la dimensión,

$$4 = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)),$$

por lo que $\dim(\text{im}(f)) = \dim(\ker(f)) = 2$.

Como $\{x = y = z\}$ y $\ker(f)$ tienen ambos dimensión 2, y el primero está contenido en el segundo, en realidad coinciden, y una base suya está formada por los vectores $(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$.

(2) Observamos que

$$\begin{aligned}(0, 0, 0, 0) &= f(1, 1, 1, 0) = f(1, 0, 0, 0) + f(0, 1, 0, 0) + f(0, 0, 1, 0) \\ &= (1, 0, 2, 2) + (a, 3, -1, 1) + f(0, 0, 1, 0) = (1 + a, 3, 1, 3) + f(0, 0, 1, 0),\end{aligned}$$

lo que demuestra que $f(0, 0, 1, 0) = (-1 - a, -3, -1, -3)$.

(3) Lo demostrado en los dos apartados anteriores nos dice que la matriz de f respecto de la base estándar \mathcal{E} es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -(1+a) & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

y se trata de calcular el valor de a . Como existe un vector no nulo $u \in \mathbb{K}^4$ tal que $f(u) = 3u$, la aplicación lineal $f - 3\text{Id}_{\mathbb{K}^4}$ no es inyectiva, y por tanto:

$$0 = \det(M - 3I_4) = \det \begin{pmatrix} -2 & a & -(1+a) & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = -9(2 - 2a).$$

Así, $a = 1$, luego

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Número 4. (1) ¿Existe alguna aplicación lineal $\mathbb{K}^{1957} \rightarrow \mathbb{K}^{1957}$ cuya imagen coincida con su núcleo?

(2) ¿Existen una aplicación lineal inyectiva $f : E \rightarrow F$ y otra suprayectiva $g : F \rightarrow E$ tales que: $\text{im}(f) = \ker(g)$, con $\dim(F) = 357$?

Solución. (1) Supongamos que existiera tal aplicación. En ese caso,

$$1957 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = 2 \dim(\text{im}(f)),$$

y esto es falso porque 1957 es impar.

(2) Supongamos que existan dichas aplicaciones. Entonces $\dim(E) = \dim(\text{im}(f))$ por ser f inyectiva, e $\text{im}(g) = E$ por ser g suprayectiva. En consecuencia

$$\dim(F) = \dim(\ker(g)) + \dim(\text{im}(g)) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(E) = 2 \dim(E),$$

y esto es falso porque $\dim(F) = 357$ es impar.

□

Número 5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

y consideremos el vector $u = (1 - b, b, 1 + b)$.

(1) Determinar a y b para que $u \in \text{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. Obtener una base y unas ecuaciones implícitas y paramétricas de $\text{im}(f)$ y $\ker(f)$.

(2) Encontrar un subespacio $L \subset \mathbb{R}^3$ de dimensión mínima entre los que cumplen $f(L) = \text{im}(f)$.

Solución. (1) Para que $\text{im}(f)$ no sea \mathbb{R}^3 es necesario y suficiente que

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{im}(f)) < 3, \text{ esto es, } \det(A) = 0, \text{ luego } a = 2.$$

En este caso la dimensión de $\text{im}(f)$ es 2, pues las dos primeras columnas de A son independientes. Esas columnas son pues una base de $\text{im}(f)$, y unas ecuaciones paramétricas de $\text{im}(f)$ son

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda + \mu, \\ x_2 &= 2\lambda, \\ x_3 &= 2\lambda + \mu. \end{cases}$$

También deducimos que $\text{im}(f)$ está definida por una única ecuación implícita:

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 2 & 0 \\ x_3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - 2x_3.$$

Así, para que el vector u pertenezca a $\text{im}(f)$ ha de satisfacer esta ecuación implícita, es decir,

$$2(1 - b) + b - 2(1 + b) = 0,$$

o sea, $b = 0$.

En cuanto al núcleo de f , unas ecuaciones implícitas son $Ax^t = 0$, esto es

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

De éstas deducimos las paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda, \\ x_2 &= \lambda, \\ x_3 &= -\lambda, \end{cases}$$

luego $\ker(f)$ tiene dimensión 1 y está generado por el vector $(1, 1, -1)$.

(2) Ya vimos en el apartado anterior que $\text{im}(f)$ está generada por las imágenes de $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, luego el subespacio $L = L[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ cumple $f(L) = \text{im}(f)$. Por supuesto L es de dimensión mínima, ya que cualquier subespacio V para el que $f(V) = \text{im}(f)$ ha de cumplir

$$2 = \dim(\text{im}(f)) = \dim(f(V)) \leq \dim(V). \quad \square$$

Número 6. (1) Sean $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales y V un subespacio vectorial de E . Probar que $f^{-1}(f(V)) = V$ si y sólo si V contiene al núcleo de f .

(2) Sean $f : E \rightarrow E$ una aplicación lineal, y $u \in E$ un vector que no está en su núcleo. Se consideran las siguientes igualdades:

$$\text{im}(f) = L[f(u)] \quad \text{y} \quad E = L[u] \oplus \ker(f).$$

¿Es cierto que la primera implica la segunda? ¿Y el recíproco?

Solución. (1) Suponemos primero que $f^{-1}(f(V)) = V$. Como el vector nulo $0 = f(0) \in f(V)$, entonces

$$\ker(f) = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(f(V)) = V.$$

Recíprocamente, suponemos ahora que V contiene al núcleo de f . Como el contenido $V \subset f^{-1}(f(V))$ se da en todo caso, sólo debemos probar que V contiene a $f^{-1}(f(V))$.

Sea pues $u \in f^{-1}(f(V))$. Esto significa que $f(u) \in f(V)$, luego existe un vector $v \in V$ tal que $f(u) = f(v)$. Por tanto, $f(u - v) = 0$, es decir, $u - v \in \ker(f) \subset V$. En consecuencia tanto v como $u - v$ pertenecen a V , luego también su suma $u = v + (u - v) \in V$.

(2) Vamos a demostrar que ambas afirmaciones son equivalentes. Suponemos la primera. Para cada vector $v \in E$ su imagen $f(v) \in \text{im}(f)$, por lo que existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = af(u)$, esto es, $v - au \in \ker(f)$. Así $v = au + (v - au)$ es suma de un vector en $L[u]$ y otro en $\ker(f)$, lo que demuestra la igualdad $E = L[u] + \ker(f)$. Además, que esta suma es directa es consecuencia inmediata de que $u \notin \ker(f)$.

Supongamos ahora que la segunda afirmación es cierta. Entonces

$$\text{im}(f) = f(E) = f(L[u] + \ker(f)) = f(L[u]) + f(\ker(f)) = L[f(u)]. \quad \square$$

Número 7. Sea $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4 : x \mapsto y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar un subespacio vectorial V de \mathbb{K}^4 cuya dimensión sea mayor que la de $f(V)$ y menor que la de $f^{-1}(f(V))$.

Solución. Existen muchos modos de elegir V . Nosotros presentamos uno de ellos. Queremos que la dimensión de $f(V)$ sea pequeña y para ello nada mejor que sea nula, o sea, $f(V) = \{0\}$, es decir, $V \subset \ker(f)$. Empezamos pues por buscar ese núcleo. Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

De estas ecuaciones implícitas del núcleo se deducen las paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu, \\ x_2 = \lambda, \\ x_3 = \lambda, \\ x_4 = \mu, \end{cases}$$

luego $\ker(f)$ tiene dimensión 2 y está generado por $(1, 1, 1, 0)$ y $(1, 0, 0, 1)$.

Calculado esto, si tomamos $V = L[(1, 1, 1, 0)]$, es, como decíamos, $f(V) = \{0\}$, y $f^{-1}(f(V)) = f^{-1}(0) = \ker(f)$. Por tanto:

$$\dim(f(V)) = 0, \quad \dim(V) = 1, \quad \dim(f^{-1}(f(V))) = 2. \quad \square$$

Número 8. Para cada matriz $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ consideramos la aplicación lineal

$$f_M : \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K}) : X \mapsto MX.$$

(1) Describir la imagen y el núcleo de f_M y calcular sus dimensiones.

(2) Demostrar que el conjunto \mathcal{N} de las matrices $N \in \mathcal{M}_{q \times m}(\mathbb{K})$ tales que $\text{im}(f_M) \subset \ker(f_N)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{q \times m}(\mathbb{K})$ y calcular su dimensión. ¿Para qué matrices N se cumple $\text{im}(f_M) = \ker(f_N)$?

Solución. (1) Para lo que sigue, escribimos las matrices por columnas. La matriz $Y = (y_1^t, \dots, y_p^t)$ está en la imagen de f_M si y sólo si existe una matriz $X = (x_1^t, \dots, x_p^t)$ de modo que $MX = Y$. Esto significa que para cada columna y_j^t de Y , el sistema $Mz^t = y_j^t$ tiene solución, es decir, por Rouché-Frobenius, $\text{rg}(M) = \text{rg}(M|y_j^t)$. Esto sugiere considerar el subespacio $V \subset \mathbb{K}^m$ generado por las columnas de M , cuya dimensión es $\text{rg}(M)$. Así, la condición anterior se escribe $y_j \in V$. Pero esto vale para todas las columnas de Y , luego concluimos que la aplicación lineal

$$V \times \overset{p}{\dots} \times V \rightarrow \text{im}(f_M) : y = (y_1, \dots, y_p) \mapsto Y = (y_j^t),$$

es suprayectiva. Como obviamente es inyectiva, es un isomorfismo, y tenemos:

$$\dim(\operatorname{im}(f_M)) = \dim(V) + \overset{p)}{\cdots} + \dim(V) = p \operatorname{rg}(M).$$

Para calcular la dimensión de $\ker(f_M)$ el razonamiento es similar. Una matriz $X = (x_j^t)$ pertenece a $\ker(f_M)$ si y sólo si $Mx_j^t = 0$ para cada j . Entonces consideramos el subespacio $W \subset \mathbb{K}^n$ de ecuaciones $Mz^t = 0$, que tiene dimensión $n - \operatorname{rg}(M)$, y la aplicación lineal

$$W \times \overset{p)}{\cdots} \times W \rightarrow \ker(f_M) : x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto X = (x_j^t).$$

Se ve que esta aplicación lineal es un isomorfismo, y por tanto

$$\dim(\ker(f_M)) = \dim(W) + \overset{p)}{\cdots} + \dim(W) = p(n - \operatorname{rg}(M)).$$

(2) La condición $\operatorname{im}(f_M) \subset \ker(f_N)$ equivale a que la composición $f_N \circ f_M$ sea nula. Ahora bien, para cada $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$,

$$(f_N \circ f_M)(X) = f_N(f_M(X)) = f_N(MX) = NMX = f_{NM}(X),$$

luego $f_N \circ f_M$ es nula si y sólo si $NM = 0$. En otras palabras, las filas de N son soluciones del sistema homogéneo $zM = 0$, lo que ya muestra que \mathcal{N} es un subespacio vectorial. Por otra parte el sistema homogéneo en cuestión define un subespacio $E \subset \mathbb{K}^m$ de dimensión $m - \operatorname{rg}(M)$, y de manera similar a como hemos calculado en (1), obtenemos

$$\dim(\mathcal{N}) = q \dim(E) = q(m - \operatorname{rg}(M)).$$

Para terminar, observamos que una matriz $N \in \mathcal{N}$ cumple $\operatorname{im}(f_M) \subset \ker(f_N)$, luego

$$p \operatorname{rg}(M) = \dim(\operatorname{im}(f_M)) \leq \dim(\ker(f_N)) = p(m - \operatorname{rg}(N)),$$

o sea $\operatorname{rg}(N) \leq m - \operatorname{rg}(M)$. Así, $\operatorname{im}(f_M) = \ker(f_N)$ si y sólo si la desigualdad es igualdad, es decir, N tiene rango máximo ($= m - \operatorname{rg}(M)$). \square

Número 9. Sean E un espacio vectorial de tipo finito, y $f : E \rightarrow E$ una aplicación lineal. Demostrar que $\dim(\operatorname{im}(f) \cap \ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f)) - \dim(\operatorname{im}(f^2))$, y deducir que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ si y sólo si $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$.

Solución. La imagen de la restricción $h = f|_{\operatorname{im}(f)}$ es $f(f(E)) = \operatorname{im}(f^2)$, mientras que su núcleo es $\ker(h) = \operatorname{im}(f) \cap \ker(f)$, luego aplicando la fórmula de la dimensión a la aplicación lineal

$$h = f|_{\operatorname{im}(f)} : \operatorname{im}(f) \rightarrow E$$

obtenemos la igualdad deseada:

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\ker(h)) + \dim(\operatorname{im}(h)) = \dim(\operatorname{im}(f) \cap \ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f^2)).$$

Pasamos ya a demostrar la equivalencia propuesta en el enunciado. Suponemos que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$. El contenido $\operatorname{im}(f^2) \subset \operatorname{im}(f)$ se cumple siempre, pues si $v \in \operatorname{im}(f^2)$, existe $u \in E$ tal que $v = f^2(u) = f(f(u)) \in \operatorname{im}(f)$. Para demostrar el otro contenido es suficiente probar que $\operatorname{im}(f)$ e $\operatorname{im}(f^2)$ tienen la misma dimensión. Pero por lo probado anteriormente,

$$\dim(\operatorname{im}(f)) - \dim(\operatorname{im}(f^2)) = \dim(\operatorname{im}(f) \cap \ker(f)) = 0.$$

Para demostrar el recíproco es suficiente comprobar que $E = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$. En tal caso,

$$\dim(\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)) = \dim(\operatorname{im}(f)) - \dim(\operatorname{im}(f^2)) = 0,$$

luego $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$, y así $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Sea entonces $u \in E$. Como $f(u) \in \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$, existe $v \in E$ tal que $f(u) = f^2(v)$, es decir,

$$f(u - f(v)) = f(u) - f^2(v) = 0, \text{ luego } w = u - f(v) \in \ker(f).$$

Así, $u = w + f(v)$ es suma de un vector $w \in \ker(f)$ y otro $f(v) \in \operatorname{im}(f)$. □

Número 10. Sean $E = \mathbb{C}_3[T]$ (polinomios de grado ≤ 3), y $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Se consideran las bases $\mathcal{E} = \{1, T, T^2, T^3\}$ de E y

$$\mathcal{E}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de F . Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, consideramos la aplicación lineal $\varphi : E \rightarrow F$ dada por

$$\varphi(a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + a_3A^3, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

y denotamos M la matriz de φ respecto de las bases \mathcal{E} y \mathcal{E}' . Se pide:

- (1) Calcular, en función de λ , las dimensiones del núcleo y de la imagen de φ .
- (2) Comprobar que $W = \{D \in \operatorname{im}(\varphi) : \operatorname{tr}(D) = 0\}$ es un subespacio vectorial de F , y calcular su dimensión.
- (3) Sea $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4 : x \mapsto y$ la aplicación lineal definida por $y^t = Mx^t$. ¿Para qué valores de λ es $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$?

Solución. (1) Tenemos

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \varphi(T^2) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \text{ y } \varphi(T^3) = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz de φ (respecto de las bases \mathcal{E} y \mathcal{E}') es

$$M = M_{\varphi}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 2. Así,

$$\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = \operatorname{rg}(M) = 2 \quad \text{y} \quad \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - \operatorname{rg}(M) = 2.$$

(2) La traza $\operatorname{tr} : F \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación lineal y $W = \ker(\operatorname{tr}) \cap \operatorname{im}(\varphi)$, luego W es un subespacio vectorial de F . Ahora bien, tr es suprayectiva, luego

$$\dim(\ker(\operatorname{tr})) = \dim(F) - \dim(\operatorname{im}(\operatorname{tr})) = \dim(F) - \dim(\mathbb{C}) = 4 - 1 = 3,$$

y por tanto $\ker(\operatorname{tr})$ es un hiperplano. Como además $I \in \operatorname{im}(\varphi) \setminus \ker(\operatorname{tr})$, se sigue que

$$\operatorname{im}(\varphi) + \ker(\operatorname{tr}) = F.$$

En fin, por la fórmula de Grassmann:

$$\dim(W) = \dim(\ker(\operatorname{tr})) + \dim(\operatorname{im}(\varphi)) - \dim(\ker(\operatorname{tr}) + \operatorname{im}(\varphi)) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

(3) Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f) : \begin{cases} x_1 & & - x_4 & = & 0, \\ & x_3 & & = & 0, \end{cases} \\ \ker(f) : \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 + \lambda^3 x_4 & = & 0, \\ x_2 + 2\lambda x_3 + 3\lambda^2 x_4 & = & 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En efecto, las primeras se deducen de que $\operatorname{im}(f)$ está generada por las dos primeras columnas de M , y las segundas corresponden a las dos primeras filas de M . Así, la intersección $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f)$ será nula si y sólo si el sistema que forman las cuatro ecuaciones sólo tiene solución trivial, esto es, determinante no nulo. Ese determinante se calcula, y resulta $2\lambda^3 - 1$. En conclusión, los valores buscados de λ son todos los que *no* cumplen la ecuación $2\lambda^3 - 1 = 0$, esto es, λ no es raíz cúbica de $\frac{1}{2}$:

$$\lambda \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\xi}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\xi^2}{\sqrt[3]{2}} \quad (\xi = e^{\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}}).$$

□

Número 11. Consideramos dos escalares $a, b \in \mathbb{K}$, la aplicación lineal

$$f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto ax_1 - x_2 + bx_3,$$

y el subespacio vectorial $H = \{x \in \mathbb{K}^3 : x_1 = x_2\}$. Determinar a y b sabiendo que la aplicación $g : \mathbb{K}^3/H \rightarrow \mathbb{K} : [x] \mapsto f(x)$ está bien definida.

Solución. Los vectores $u = (0, 0, 1)$ y $v = (1, 1, 0)$ pertenecen al subespacio H , luego $[u] = [v] = [0]$. Por tanto,

$$\begin{cases} b = f(u) = g([u]) = g([0]) = f(0) = 0, \\ a - 1 = f(v) = g([v]) = g([0]) = f(0) = 0, \end{cases} \rightsquigarrow a = 1, b = 0.$$

Comprobemos que, efectivamente, para estos valores de a y b , existe la función g del enunciado. Sean $x, y \in \mathbb{K}^3$ tales que $[x] = [y]$. Entonces $x - y \in H$, luego $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$. Por tanto, $f(x) = x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = f(y)$, y g está bien definida. \square

Número 12. Sean $E = \mathbb{K}_3[T]$ (polinomios de grado menor o igual que 3) y L el subespacio generado por los polinomios

$$P_1(T) = 3 + 2T + T^2, \quad P_2(T) = -2 - 3T + T^3, \quad P_3(T) = 1 - T + T^2 + T^3.$$

Consideramos el espacio cociente $F = E/L$ y la proyección canónica $\pi : E \rightarrow F$ y sean $f, g : E \rightarrow \mathbb{K}$ las aplicaciones lineales definidas, respectivamente, por:

$$f : P(T) \mapsto 2P(0) - P(1), \quad g : P(T) \mapsto P'(-2).$$

¿Existen aplicaciones lineales $\varphi, \psi : F \rightarrow \mathbb{K}$ tales que $f = \varphi \circ \pi$ y $g = \psi \circ \pi$?

Solución. La existencia de φ equivale a que $L \subset \ker(f)$, y como L está generado por P_1, P_2, P_3 , se trata de estudiar si $f(P_i) = 0$ para los tres i . Esto es una mera comprobación:

$$\begin{cases} f(P_1) = 2P_1(0) - P_1(1) = 6 - 6 = 0, \\ f(P_2) = 2P_2(0) - P_2(1) = -4 - (-4) = 0, \\ f(P_3) = 2P_3(0) - P_3(1) = 2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Así, existe φ . En cuanto a g , hay que ver si $g(P_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$, pero nada más empezar vemos que

$$g(P_1) = P_1'(-2) = 2 - 4 = -2 \neq 0,$$

luego ψ no puede existir. \square

Número 13. Sean E, F, G espacios vectoriales de tipo finito.

(1) Dadas dos aplicaciones lineales $f : E \rightarrow F$ y $g : E \rightarrow G$, demostrar que existe una tercera $h : F \rightarrow G$ tal que $h \circ f = g$ si y sólo si $\ker(f) \subset \ker(g)$. ¿Cuándo podemos además elegir h inyectiva?

(2) Dadas dos aplicaciones lineales $f : F \rightarrow E$ y $g : G \rightarrow E$, demostrar que existe una tercera $h : G \rightarrow F$ tal que $f \circ h = g$ si y sólo si $\text{im}(f) \supset \text{im}(g)$. ¿Cuándo podemos además elegir h suprayectiva?

Solución. (1) Si existe tal h y $f(u) = 0$, entonces $g(u) = h(f(u)) = h(0) = 0$, esto es, $\ker(f) \subset \ker(g)$. Recíprocamente, supongamos que $\ker(f) \subset \ker(g)$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo, que se deduce de los de factorización canónica de f y de g , teniendo presente que

$$g = \bar{g} \circ \pi' \circ \pi, \quad h' = \bar{g} \circ \pi' \circ \bar{f}^{-1},$$

$\dim(G) \geq \dim(F)$. Los detalles se dejan al lector. \square

Número 14. Sea M una matriz $m \times n$ de rango r , que es producto de otras dos: $M = AB$. Demostrar utilizando aplicaciones lineales las siguientes propiedades del rango de matrices:

(1) En general se cumple $\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B) \geq r$, pero se puede elegir A con r columnas, todas independientes, y B con r filas, todas independientes.

(2) En general, $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) - p \leq \operatorname{rg}(M)$, donde p es el número de columnas de A (o de filas de B). ¿Cuándo se tiene la igualdad?

(3) Sea N una matriz $n \times n$ idempotente (esto es, $N^2 = N$ es la matriz identidad). Calcular $\operatorname{rg}(N - I) + \operatorname{rg}(N + I)$.

Solución. Sean $h : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$ y $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ las aplicaciones lineales cuyas matrices, respecto de las bases estándar, son M , A y B ; de este modo $h = f \circ g$.

(1) Tenemos

$$\operatorname{im}(h) = f(g(\mathbb{K}^n)) \subset f(\mathbb{K}^p) = \operatorname{im}(f),$$

y por tanto, como la dimensión de una imagen es el rango,

$$\operatorname{rg}(AB) = \dim(\operatorname{im}(h)) \leq \dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rg}(A).$$

La otra desigualdad es

$$\operatorname{rg}(AB) = \dim(f(g(\mathbb{K}^n))) \leq \dim(g(\mathbb{K}^n)) = \dim(\operatorname{im}(g)) = \operatorname{rg}(B),$$

pues la dimensión de un subespacio es siempre mayor o igual que la su imagen por una aplicación lineal.

Por otra parte, como $r = \operatorname{rg}(M) = \dim(\operatorname{im}(h))$ existe un isomorfismo $\theta : \mathbb{K}^r \rightarrow \operatorname{im}(h)$, y denotando $j : \operatorname{im}(h) \subset \mathbb{K}^m$ la inclusión, tenemos $h = (j \circ \theta) \circ (\theta^{-1} \circ h)$. En consecuencia $M = A_r B_r$, donde A_r es la matriz de $j \circ \theta : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^m$ y B_r la de $\theta^{-1} \circ h : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r$. Esto resuelve el problema: A_r tiene r columnas, y rango r por ser $j \circ \theta$ inyectiva, y B_r tiene r filas, y rango r por ser $\theta^{-1} \circ h$ suprayectiva.

(2) Sean $V = \operatorname{im}(g)$ y $f|_V : V \rightarrow \mathbb{K}^m$ la restricción de f a V . Por un lado se tiene

$$\operatorname{im}(f|_V) = f(V) = f(g(\mathbb{K}^n)) = \operatorname{im}(f \circ g),$$

y por otro,

$$\ker(f|_V) = V \cap \ker(f) \subset \ker(f).$$

Aplicando ahora la fórmula de la dimensión,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg}(AB) = \dim(\operatorname{im}(f|_V)) = \dim V - \dim(\ker(f|_V)) \\ &= \dim(\operatorname{im}(g)) - \dim(\ker(f|_V)) = \operatorname{rg}(B) - \dim(\ker(f|_V)) \\ &\geq \operatorname{rg}(B) - \dim(\ker(f)) = \operatorname{rg}(B) - (p - \operatorname{rg}(A)), \end{aligned}$$

que es la desigualdad que queríamos probar.

Para que sea una igualdad debe suceder que $\dim(\ker(f|_V)) = \dim(\ker(f))$, o lo que es igual, $\ker(f) = \ker(f|_V) = V \cap \ker(f)$, esto es, $\ker(f) \subset \text{im}(g)$.

(3) Con las notaciones anteriores, sean $A = N - I, B = N + I$. Por el apartado anterior,

$$\text{rg}(N - I) + \text{rg}(N + I) \leq n + \text{rg}((N - I)(N + I)) = n + \text{rg}(N^2 - I) = n,$$

y la igualdad vale si $\ker(f) \subset \text{im}(g)$. Sea pues $x \in \ker(f)$, esto es $Ax^t = 0$, o, lo que es igual, $Nx^t = x^t$. Entonces

$$Bx^t = Nx^t + x^t = 2x^t,$$

es decir, $2x \in \text{im}(g)$ y por supuesto, también $x \in \text{im}(g)$. En conclusión, $\text{rg}(N - I) + \text{rg}(N + I) = n$. \square

Número 15. Sean $f, g : E \rightarrow E$ dos endomorfismos tales que $f \circ g = 0$. Demostrar que si $f^k + g^k$ es un isomorfismo para algún $k \geq 1$, entonces lo es para todo $k \geq 1$.

Solución. Si $f \circ g = 0$ y $f^k + g^k$ es isomorfismo, para cada $r \geq 1$ tenemos

$$\text{im}(f^r) = f^r(E) = f^r((f^k + g^k)(E)) = (f^{r+k} + f^r \circ g^k)(E) = f^{r+k}(E) = \text{im}(f^{r+k}).$$

Como $\text{im}(f^\ell) \supset \text{im}(f^{\ell+1})$, lo anterior significa $\text{im}(f^r) = \dots = \text{im}(f^{r+k})$, y puesto que esto vale para $r = 1, 2, \dots$, concluimos que

$$\text{im}(f) = \dots = \text{im}(f^\ell) \quad \text{para todo } \ell \geq 1.$$

Ahora bien, se cumple siempre que $\ker(f) \subset \ker(f^\ell)$, y calculando dimensiones

$$\dim(\ker(f^\ell)) = \dim(E) - \dim(\text{im}(f^\ell)) = \dim(E) - \dim(\text{im}(f)) = \dim(\ker(f)).$$

De aquí deducimos que

$$\ker(f) = \ker(f^\ell) \quad \text{para todo } \ell \geq 1.$$

Queremos ver que todas las aplicaciones $f^\ell + g^\ell$, $\ell \geq 1$, son isomorfismos, y basta ver que son inyectivas. Razonamos por inducción, empezando con $\ell = 1$. Si $(f + g)(u) = 0$ entonces $f(u) = -g(u)$ y como $f \circ g = 0$, $f^k(u) = -(f^{k-1} \circ g)(u) = 0$, así que $u \in \ker(f^k) = \ker(f)$. Entonces $g(u) = -f(u) = 0$, y esto implica que $g^k(u) = 0$, por lo que

$$(f^k + g^k)(u) = f^k(u) + g^k(u) = 0 + 0 = 0.$$

Como $f^k + g^k$ es isomorfismo se concluye que $u = 0$, luego $f + g$ es isomorfismo.

Supongamos ahora $\ell \geq 2$ y que $f^{\ell-1} + g^{\ell-1}$ es isomorfismo y veamos que lo es $f^\ell + g^\ell$. Por hipótesis, $h = (f + g) \circ (f^{\ell-1} + g^{\ell-1})$ es isomorfismo, y como $f \circ g = 0$ es

$$h = (f + g) \circ (f^{\ell-1} + g^{\ell-1}) = f^\ell + f \circ g^{\ell-1} + g \circ f^{\ell-1} + g^\ell = f^\ell + g^\ell + g \circ f^{\ell-1}.$$

Terminamos ya, probando que la aplicación $f^\ell + g^\ell$ es inyectiva. Si $(f^\ell + g^\ell)(u) = 0$, entonces

$$f^{\ell+1}(u) = (f \circ (f^\ell + g^\ell))(u) = f(0) = 0,$$

luego $u \in \ker(f^{\ell+1}) = \ker(f)$, y por tanto $f(u) = 0$. Deducimos

$$h(u) = (f^\ell + g^\ell)(u) + (g \circ f^{\ell-1})(u) = 0,$$

y por ser h inyectiva, concluimos $u = 0$. □

Soluciones §10

Número 1. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ la base de \mathbb{K}^4 formada por los vectores

$$u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 0, 0, -2), u_3 = (0, 0, -1, 1), u_4 = (0, 2, 0, 1).$$

(1) Calcular la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*)$ entre la base dual de \mathcal{B} y la de la base estándar \mathcal{E} .

(2) Calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B}^* de la forma lineal f definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4.$$

(3) Calcular las coordenadas respecto de \mathcal{E}^* de la forma lineal $g \in (\mathbb{K}^4)^*$ cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B}^* son $(4, 2, 1, 1)$.

Solución. (1) Vimos en II.10.5, p. 214, que $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = (C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^t)^{-1}$. Aquí:

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Las coordenadas de f respecto de \mathcal{B}^* son

$$(f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)) = (2, -4, -1, 0).$$

(3) Las coordenadas de g respecto de \mathcal{E}^* se obtienen multiplicando por la matriz de cambio de base las que tiene respecto de \mathcal{B}^* :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, las coordenadas de g respecto de \mathcal{E}^* son $(-6, 1, -2, -1)$. \square

Número 2. En $E = \mathbb{R}^3$ se considera la base \mathcal{B} consistente en los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -2)$ y $(-1, -1, 0)$.

(1) Calcular la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} .

(2) Calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B}^* de las siguientes formas lineales:

$$h_1(x, y, z) = x + 2y + z, \quad h_2(x, y, z) = 7x + 14z, \quad h_3(x, y, z) = 3x + y + z.$$

Deducir que h_1, h_2, h_3 forman una base del espacio dual E^* .

(3) Calcular la base de E de la que $\{h_1, h_2, h_3\}$ es dual.

Solución. (1) Denotemos $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, -2)$ y $u_3 = (-1, -1, 0)$ los vectores de la base \mathcal{B} y $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ la base dual de \mathcal{B} . Para cada i se tiene

$$\begin{cases} f_i(0, 0, 1) = f_i(-u_1 - u_2 - u_3) = -1, \\ f_i(1, 0, 0) = f_i(u_1) - f_i(0, 0, 1) = f_i(u_1) + 1, \\ f_i(0, 1, 0) = f_i(u_2) + 2f_i(0, 0, 1) = f_i(u_2) - 2, \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{cases} f_1(1, 0, 0) = 2, \\ f_1(0, 1, 0) = -2, \\ f_1(0, 0, 1) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(1, 0, 0) = 1, \\ f_2(0, 1, 0) = -1, \\ f_2(0, 0, 1) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} f_3(1, 0, 0) = 1, \\ f_3(0, 1, 0) = -2, \\ f_3(0, 0, 1) = -1, \end{cases}$$

y así las formas buscadas son

$$f_1(x, y, z) = 2x - 2y - z; \quad f_2(x, y, z) = x - y - z; \quad f_3(x, y, z) = x - 2y - z.$$

(2) Sin más que evaluar tenemos

$$\begin{cases} \text{Coordenadas de } h_1: & (h_1(u_1), h_1(u_2), h_1(u_3)) = (2, 0, -3), \\ \text{Coordenadas de } h_2: & (h_2(u_1), h_2(u_2), h_2(u_3)) = (21, -28, -7), \\ \text{Coordenadas de } h_3: & (h_3(u_1), h_3(u_2), h_3(u_3)) = (4, -1, -4), \end{cases}$$

y como esas filas son independientes (hágase el determinante), las formas h_i son una base de E^*

(3) Denotamos \mathcal{E} la base estándar de E , y $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de E que tiene por dual a $\mathcal{B}_1^* = \{h_1, h_2, h_3\}$. Sabemos que

$$C(\mathcal{B}_1, \mathcal{E}) = C(\mathcal{E}^*, \mathcal{B}_1^*)^t = (C(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{E}^*)^{-1})^t = (C(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{E}^*)^t)^{-1},$$

y las coordenadas respecto de \mathcal{E}^* las conocemos ya:

$$\begin{cases} \text{las de } h_1(x, y, z) = x + 2y + z & \text{son } (1, 2, 1), \\ \text{las de } h_2(x, y, z) = 7x + 14z & \text{son } (7, 0, 14), \\ \text{las de } h_3(x, y, z) = 3x + y + z & \text{son } (3, 1, 1). \end{cases}$$

Por tanto

$$C(\mathcal{B}_1, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 14 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{7 \cdot 9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{7 \cdot 9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{7 \cdot 9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

luego la base \mathcal{B}_1 está formada por los vectores que forman las columnas de la última matriz. \square

Número 3. Sea E un espacio vectorial (no necesariamente de tipo finito) y $f \in E^*$ no nula. Probar que existe un vector $u \in E$ tal que $E = \ker(f) \oplus L[u]$.

Solución. Como f no es nula existe $u \in E$ tal que $f(u) = a \neq 0$. Entonces $\ker(f) \cap L[u]$ es un subespacio propio de la recta vectorial $L[u]$, luego necesariamente nulo. Probemos ahora que $E = \ker(f) + L[u]$. Para cada $v \in E$ el vector $w = v - \frac{f(v)}{a}u$ pertenece al núcleo de f , ya que

$$f(w) = f\left(v - \frac{f(v)}{a}u\right) = f(v) - \frac{f(v)}{a}f(u) = 0.$$

En consecuencia,

$$v = w + \frac{f(v)}{a}u \in \ker(f) + L[u],$$

como queríamos probar. \square

Número 4. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial real E , y sean $h_1, h_2, h_3 \in E^*$ las formas lineales determinadas por las condiciones:

$$\begin{aligned} h_1(u_1) &= 1, & h_1(u_2) &= 0, & h_1(u_3) &= 1, & h_1(u_4) &= 2, \\ h_2(u_1) &= 2, & h_2(u_2) &= 1, & h_2(u_3) &= 5, & h_2(u_4) &= 7, \\ h_3(u_1) &= 0, & h_3(u_2) &= 1, & h_3(u_3) &= 3, & h_3(u_4) &= 3. \end{aligned}$$

(1) Hallar la dimensión y unas ecuaciones implícitas en coordenadas respecto de la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} del subespacio vectorial $W \subset E^*$ generado por h_1, h_2 y h_3 .

(2) Hallar la dimensión y unas ecuaciones implícitas en coordenadas respecto de \mathcal{B} del subespacio vectorial V de E tal que $W = V^\vee$. Encontrar una base de V .

Solución. (1) Las coordenadas respecto de \mathcal{B}^* de h_1, h_2 y h_3 son

$$(1, 0, 1, 2), \quad (2, 1, 5, 7), \quad (0, 1, 3, 3),$$

por lo que

$$\dim(W) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

En particular, $W = L[h_1, h_2]$. Además, si denotamos $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, la forma $h = \sum_i c_i f_i$ pertenece a $W = L[h_1, h_2]$ si y sólo si

$$2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

y esto equivale a que sean nulos los determinantes

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Por tanto, unas ecuaciones implícitas de W en coordenadas (c_1, c_2, c_3, c_4) respecto de \mathcal{B}^* son

$$W : \begin{cases} c_1 + 3c_2 - c_3 = 0, \\ 2c_1 + 3c_2 - c_4 = 0. \end{cases}$$

(2) Sabemos que si $W = V^\vee$ es $\dim(V) = \dim(E^*) - \dim(W) = 4 - 2 = 2$. Además, el vector $u = \sum_i x_i u_i$ pertenece a V si y sólo si $h_1(u) = h_2(u) = 0$, esto es,

$$\begin{cases} 0 = h_1(u) = x_1 h_1(u_1) + x_2 h_1(u_2) + x_3 h_1(u_3) + x_4 h_1(u_4) = x_1 + x_3 + 2x_4, \\ 0 = h_2(u) = x_1 h_2(u_1) + x_2 h_2(u_2) + x_3 h_2(u_3) + x_4 h_2(u_4) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

En consecuencia, unas ecuaciones implícitas de V en coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) respecto de la base \mathcal{B} son $x_1 + x_3 + 2x_4 = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0$.

Para encontrar una base de V resolvemos este sistema de ecuaciones. Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando, $x_2 = -3(x_3 + x_4)$, mientras que $x_1 = -(x_3 + 2x_4)$. Para los valores $x_3 = -1, x_4 = 0$ obtenemos el vector v_1 cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} son $(1, 3, -1, 0)$, y para $x_3 = 0, x_4 = -1$ resulta el vector v_2 cuyas coordenadas respecto de \mathcal{B} son $(2, 3, 0, -1)$. En definitiva, una base de V es

$$\mathcal{B}_V = \{v_1 = u_1 + 3u_2 - u_3, v_2 = 2u_1 + 3u_2 - u_4\}. \quad \square$$

Número 5. Se consideran en $E = \mathbb{R}^4$ los vectores $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 3, 1, 0)$ y $u_3 = (1, 0, 1, 2)$. Se pide:

(1) Probar que u_1, u_2, u_3 son independientes y encontrar una base \mathcal{B} de E que los contenga. Determinar la base dual \mathcal{B}^* de \mathcal{B} .

(2) Determinar el subconjunto X de E^* consistente en las formas que se anulan en u_1 y en u_2 , pero no en u_3 . ¿Es X un subespacio vectorial de E^* ? ¿Qué subespacio de E^* genera X ?

Solución. (1) Sea $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base estándar. Denotamos $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ y observamos que el determinante de la que será matriz de cambio,

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

es no nulo. Por ello $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es una base de E y en particular los vectores u_1, u_2 y u_3 son independientes. La inversa de $C(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ es

$$C(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora denotamos $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base dual de \mathcal{B} , y es $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = C(\mathcal{E}, \mathcal{B})^t$, de manera que las f_i son

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3, & f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{3}x_2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{1}{3}x_2 + x_3, & f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4. \end{cases}$$

(2) Una forma $g \in E^*$ se escribe $g(y) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$ en coordenadas respecto de los u_j . Por tanto,

$$\begin{cases} \text{se anula en } u_1 \text{ si y sólo si} & 0 = g(1, 0, 0, 0) = c_1, \\ \text{se anula en } u_2 \text{ si y sólo si} & 0 = g(0, 1, 0, 0) = c_2, \\ \text{se anula en } u_3 \text{ si y sólo si} & 0 = g(0, 0, 1, 0) = c_3. \end{cases}$$

Así, $H_1 : c_1 = 0$, $H_2 : c_2 = 0$, y $H_3 : c_3 = 0$ son tres hiperplanos independientes de E^* . Con estas notaciones,

$$X = H_1 \cap H_2 \setminus H_1 \cap H_2 \cap H_3,$$

esto es, X es el complementario en $V = H_1 \cap H_2$ del subespacio $W = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Pero H_3 no contiene al plano $H_1 \cap H_2$, pues su ecuación no es combinación lineal de las de éstos, así que $W \neq V$. Sabemos, por la solución del ejercicio número 6 de la lección II.8, p. 250, que en estas condiciones $X = V \setminus W$ no es subespacio, y de hecho genera todo V . \square

Número 6. Sean a, b y c tres números reales y consideramos el subespacio vectorial L de \mathbb{R}^3 cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar son $x - z = y - az = 0$. Sean f y g las formas lineales sobre \mathbb{R}^3 definidas por

$$f(x, y, z) = bx + y + cz \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = (1 + c)x - bz,$$

y sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/L$ la proyección canónica. Obtener los valores de a, b y c sabiendo que tanto f como g factorizan a través de formas lineales $\mathbb{R}^3/L \rightarrow \mathbb{R}$ y que dichas formas no constituyen una base del espacio dual de \mathbb{R}^3/L .

Solución. Las formas lineales f y g factorizan a través del cociente \mathbb{R}^3/L si y sólo si sus núcleos contienen al subespacio L . Ahora bien, la dimensión de L es

$$3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} = 1,$$

y como $u = (1, a, 1)$ satisface las ecuaciones de L , constituye una base suya. Por tanto, f y g factorizan a través del cociente si y sólo si sus núcleos contienen al vector u , o lo que es igual

$$(*) \quad \begin{cases} a + b + c = 0, \\ 1 - b + c = 0. \end{cases}$$

Sean $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3/L \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\varphi \circ \pi = f$ y $\psi \circ \pi = g$. Para expresar que no son base calcularemos sus coordenadas respecto de una base que conozcamos.

Es obvio que los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $u = (1, a, 1)$ constituyen una base de \mathbb{R}^3 , por lo que las clases módulo L de los vectores e_1 y e_2 forman una base, digamos $\mathcal{B} = \{[e_1], [e_2]\}$, del cociente, y consideramos su base dual. Las coordenadas de φ y ψ respecto de esta base dual son, respectivamente,

$$\begin{cases} (\varphi([e_1]), \varphi([e_2])) = (f(e_1), f(e_2)) = (b, 1), \\ (\psi([e_1]), \psi([e_2])) = (g(e_1), g(e_2)) = (1 + c, 0). \end{cases}$$

Si φ y ψ son dependientes el determinante de sus coordenadas debe ser nulo, o sea, $c = -1$. Sustituyendo en $(*)$ obtenemos $b = 0$ y $a = 1$. \square

Número 7. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial real E y para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación lineal $f : E \rightarrow E$ cuya matriz es

$$M(a) = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sea L el subespacio de E generado por el vector $u = u_1 + u_2 + u_3$.

- (1) ¿Cuál es la dimensión de $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$?
- (2) Hallar una base del subespacio $f^{-1}(L)$ y calcular su dimensión.
- (3) Sea $\mathcal{B}^* = \{h_1, h_2, h_3\}$ la base dual de \mathcal{B} . Se consideran las formas lineales

$$k = h_1 + h_2 - ah_3 \text{ y } \ell = ah_1 + h_2 - 3h_3,$$

y la proyección canónica $\pi : E \rightarrow F = E/f^{-1}(L)$. Determinar para qué valores de a existen elementos φ y ψ en el espacio dual F^* de F tales que $k = \varphi \circ \pi$ y $\ell = \psi \circ \pi$. ¿Es en tal caso $\{\varphi, \psi\}$ una base de F^* ?

Solución. (1) Comenzamos calculando

$$\det(M) = a(a^2 - 1) + 2(1 - a) = (a - 1)^2(a + 2).$$

Por tanto, si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, entonces $\dim(\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)) = 0$, pues $\ker(f) = 0$. Por otro lado, si $a = 1$ las tres columnas de M coinciden, luego $\operatorname{im}(f)$ está generada por el vector $u \notin \ker(f)$, pues $f(u) = 3u \neq 0$. Por tanto, $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ para $a = 1$.

Por último, si $a = -2$ la imagen de f está generada por los vectores

$$v_1 = -2u_1 + u_2 + u_3 \text{ y } v_2 = u_1 - 2u_2 + u_3,$$

luego un vector genérico en $\operatorname{im}(f)$ es

$$w = xv_1 + yv_2 = (y - 2x)u_1 + (x - 2y)u_2 + (x + y)u_3.$$

Este vector pertenece a $\ker(f)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - 2x \\ x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + 6x \\ 6y - 3x \\ -3y - 3x \end{pmatrix},$$

luego $y = 2x$ y $x = 2y$, esto es, $x = y = 0$, por lo que $w = 0$.

Por ello, en todos los casos, la dimensión de $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$ es 0.

- (2) El vector $v = xu_1 + yu_2 + zu_3 \in f^{-1}(L)$ si y sólo si

$$f(v) = (ax + y + z)u_1 + (x + ay + z)u_2 + (x + y + az)u_3$$

es proporcional a u , o lo que es igual,

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} ax + y + z & 1 \\ x + ay + z & 1 \\ x + y + az & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Esto equivale a que x, y, z sean solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + z = x + ay + z, \\ ax + y + z = x + y + az, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (a - 1)x + (1 - a)y = 0, \\ (a - 1)x + (1 - a)z = 0. \end{cases}$$

Para discutir este sistema distinguimos:

Caso $a = 1$. Cada terna x, y, z es solución del sistema anterior, luego $f^{-1}(L) = E$. En este caso $\dim(f^{-1}(L)) = 3$ y \mathcal{B} es una base suya.

Caso $a \neq 1$. Ahora podemos dividir las ecuaciones anteriores por $a - 1$, y queda $x = y = z$, luego $v \in L[u]$, esto es $f^{-1}(L) = L$. Por tanto $\dim(f^{-1}(L)) = 1$ y $\{u\}$ es base suya.

(3) La existencia de φ equivale a que el núcleo de π , que es $f^{-1}(L)$, esté contenido en el de k . Esto no se cumple para $a = 1$, pues en ese caso $f^{-1}(L) = E$, mientras que $\ker(k)$ tiene dimensión 2. Por tanto ha de ser $a \neq 1$, luego $L = f^{-1}(L) = L[u] \subset \ker(k)$, es decir, $k(u) = 0$. Pero

$$k(u) = (h_1 + h_2 - ah_3)(u_1 + u_2 + u_3) = 2 - a,$$

así que, necesariamente, $a = 2$. Para este valor se cumple también que

$$\ell(u) = (2h_1 + h_2 - 3h_3)(u_1 + u_2 + u_3) = 0,$$

luego para $a = 2$, y sólo para este valor, existen las formas lineales φ y ψ de modo que $k = \varphi \circ \pi$ y $\ell = \psi \circ \pi$. Además, siempre para $a = 2$,

$$\dim(F^*) = \dim(F) = \dim(E) - \dim(f^{-1}(L)) = 2,$$

por lo que $\{\varphi, \psi\}$ es una base de F^* si y sólo si las dos formas son linealmente independientes. Para comprobar esto, advertimos que $\{u_1, u_2, u\}$ es una base de E , y que u genera $f^{-1}(L)$, luego $\{[u_1], [u_2]\}$ es una base del cociente F . Podemos pues calcular las coordenadas de φ y ψ respecto de la base dual de $\{[u_1], [u_2]\}$, y obtenemos, respectivamente,

$$\begin{cases} \text{Coordenadas de } \varphi: & (\varphi([u_1]), \varphi([u_2])) = (k(u_1), k(u_2)) = (1, 1), \\ \text{Coordenadas de } \psi: & (\psi([u_1]), \psi([u_2])) = (\ell(u_1), \ell(u_2)) = (2, 1). \end{cases}$$

Con estas coordenadas, es claro que las formas son independientes. \square

Número 8. Sea $E = \mathbb{R}_2[T]$ (polinomios de grado ≤ 2) y consideremos las formas lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$, definidas por

$$\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{R} : P(T) \mapsto \int_0^1 t^{i-1} P(t) dt.$$

Demostrar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de E^* , y determinar de qué base de E es dual.

Solución. Sean $\mathcal{E} = \{u_1 = 1, u_2 = T, u_3 = T^2\}$ la base estándar de E y $\mathcal{E}^* = \{h_1, h_2, h_3\}$ su base dual. Para probar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es base de E^* calculamos la matriz de

coordenadas respecto de \mathcal{E}^* de los φ_i . Esa matriz es $C = (\varphi_i(u_j))$, con

$$\varphi_i(u_j) = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} dt = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+j-1}.$$

Más explícitamente,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

y el determinante de C es no nulo, de modo que los φ_i son en efecto una base.

Se trata ahora de encontrar una base $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ de E cuya dual sea $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Ahora bien,

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = C(\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*)^t = (C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*)^{-1})^t = (C^{-1})^t,$$

y calculando un poco obtenemos:

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que

$$\begin{cases} P_1(T) = 9 - 36T + 30T^2, \\ P_2(T) = -36 + 192T - 180T^2, \\ P_3(T) = 30 - 180T + 180T^2. \end{cases} \quad \text{y} \quad \square$$

Número 9. Sea W el subespacio de \mathbb{K}^4 generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 0, -1, 1)$, y consideremos otro subespacio V suplementario de W ; denotamos $p : \mathbb{K}^4 \rightarrow V \subset \mathbb{K}^4$ la proyección lineal de base V y dirección W . Calcular la imagen de la aplicación lineal

$$p^* : (\mathbb{K}^4)^* \rightarrow (\mathbb{K}^4)^*, \alpha \mapsto \alpha \circ p,$$

y decidir si la forma lineal siguiente pertenece o no a ella:

$$\beta : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Solución. Por hipótesis, existen $u_3, u_4 \in V$ que añadidos a $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ y $u_2 = (1, 0, -1, 1)$, forman una base \mathcal{B} de \mathbb{K}^4 . Entonces

$$M_p(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, una forma lineal β está en $\text{im}(p^*)$ si y sólo si existe otra α tal que $\beta = \alpha \circ p$. Utilizando las matrices de estas aplicaciones lineales respecto de \mathcal{B} , esa condición significa que existe una fila $M_\alpha = (\alpha_i)$ tal que la fila $M_\beta = (\beta_i)$ cumple

$$(\beta_1, \dots, \beta_4) = (\alpha_1, \dots, \alpha_4)M_p(\mathcal{B}) \rightsquigarrow \begin{cases} \beta_1 = \beta_2 = 0, \\ \beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4. \end{cases}$$

En otras palabras, $\beta \in \text{im}(p^*)$ si y sólo si

$$\begin{cases} \beta(u_1) = \beta_1 = 0, \\ \beta(u_2) = \beta_2 = 0, \end{cases}$$

esto es, si y sólo si β se anula idénticamente en W . Expresemos esto con ecuaciones respecto de la base estándar: si $\beta(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$, debe ser

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = c_1 - c_3 + c_4 = 0.$$

En cuanto a la forma β del enunciado, vemos que sus coeficientes c_i cumplen la primera de esas ecuaciones, pero no la segunda, así que $\beta \notin \text{im}(p^*)$. O geométricamente, el hiperplano $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ no contiene a W . \square

Número 10. Sean E un espacio vectorial y F un espacio vectorial de tipo finito, en el que elegimos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$. Sean f_1, \dots, f_m formas lineales de E^* . Demostrar que la aplicación

$$\sum f_i \cdot v_i : E \rightarrow F : u \mapsto \sum_{i=1}^m f_i(u)v_i$$

es lineal. ¿Es cierto que para cada aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ existen formas lineales f_1, \dots, f_m tales que $f = \sum f_i \cdot v_i$?

Solución. Como la suma de aplicaciones lineales es lineal, basta observar que cada sumando $u \mapsto f_i(u)v_i$ es lineal (por la linealidad de f_i). Sea ahora $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Si las f_i existen, están unívocamente determinadas:

$$f_i : u \mapsto \text{coordenada } i\text{-ésima de } f(u) \text{ respecto de } \mathcal{B},$$

de manera que como f es lineal, lo único que hay que ver es que

$$h_i : v \mapsto \text{coordenada } i\text{-ésima de } v \text{ respecto de } \mathcal{B}$$

es una forma lineal de F . Pero las h_i son simplemente las formas de la base dual \mathcal{B}^* , así que nada más hay que añadir. \square

Número 11. Recordemos que una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$ se dice *mágica* si todas sus filas suman lo mismo, y lo mismo que las columnas, y lo mismo que las dos diagonales mayores. Dada esta definición, consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned}\Sigma & \text{ de las matrices mágicas,} \\ \Sigma_s & \text{ de las matrices mágicas simétricas, y} \\ \Sigma_a & \text{ de las matrices mágicas antisimétricas.}\end{aligned}$$

Demostrar que Σ , Σ_s y Σ_a son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y que $\Sigma = \Sigma_s \oplus \Sigma_a$, y calcular las dimensiones de los tres.

Solución. Inmediatamente nos damos cuenta de que una suma de dos matrices mágicas lo es también, así como lo es el producto de un escalar por una matriz mágica, de modo que Σ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y lo mismo podemos decir de las mágicas simétricas y de las mágicas antisimétricas. Por otra parte sabemos que las matrices simétricas y antisimétricas descomponen el espacio de todas las matrices en suma directa como sigue:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t).$$

Ahora bien, si M es mágica, también lo es M^t , luego esta descomposición vale lo mismo para matrices mágicas, y concluimos que efectivamente $\Sigma = \Sigma_s \oplus \Sigma_a$. Vamos ahora a calcular las dimensiones de esos dos subespacios suplementarios.

(i) *Matrices mágicas antisimétricas.* Una matriz antisimétrica tiene nula la diagonal principal, luego si es mágica la suma común de filas, columnas y diagonales es 0. Por tanto, si conocemos los primeros $n - 1$ coeficientes de la fila i -ésima, el último será el opuesto de la suma h_i de esos conocidos. Esto sugiere definir la siguiente aplicación

$$\mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \Sigma_a : A \mapsto \begin{pmatrix} A & -h^t \\ h & 0 \end{pmatrix},$$

donde $h = (h_1, \dots, h_{n-1})$. Por la explicación previa, esta aplicación es lineal y biyectiva, luego un isomorfismo, y concluimos

$$\dim(\Sigma_a) = \dim(\mathcal{A}_{n-1}) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

(ii) *Matrices mágicas simétricas.* Como hemos visto, es más fácil tratar una matriz mágica si sabemos que la suma común de filas, columnas y diagonales es 0. Sin embargo, hay matrices mágicas simétricas con esa suma no nula, así que las que la tienen son un subconjunto Σ_s^0 . De hecho, este subconjunto es un hiperplano de Σ_s , pues

$$\Sigma_s^0 = \Sigma_s \cap \{a_{11} + \dots + a_{nn} = 0\},$$

y la forma lineal $\sum_i a_{ii}$ no es nula en Σ_s (considérese la matriz mágica cuyos coeficientes son todos 1). En consecuencia:

$$\dim(\Sigma_s) = \dim(\Sigma_s^0) + 1,$$

y sólo hay que calcular la dimensión de Σ_s^0 . Para ello definimos la aplicación lineal

$$\mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) : A \mapsto \bar{A} = \begin{pmatrix} A & -h^t \\ -h & \sum_i h_i \end{pmatrix}$$

(donde h es como antes). Esta aplicación es inyectiva, y su imagen Γ casi es mágica. Falta controlar la suma de las diagonales, para lo que hay que imponer las condiciones:

$$\begin{cases} \text{diagonal directa:} & f(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i = 0, \\ \text{diagonal transversa:} & g(\bar{A}) = \sum_{i=2}^{n-1} a_{i, n-i+1} - 2h_1 = 0. \end{cases}$$

En otras palabras

$$\Sigma_s^0 = \Gamma \cap \{f = g = 0\},$$

y como

$$\dim(\Gamma) = \dim(\mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{K})) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

esperamos que

$$\dim(\Sigma_s^0) = \dim(\Gamma) - 2 = \frac{1}{2}n(n-1) - 2.$$

Para que esto sea correcto, hace falta que las dos formas lineales $f|_{\Gamma}, g|_{\Gamma}$ sean independientes. Pero tenemos

$$f(\bar{A}) = 2, f(\bar{B}) = n(n-1); g(\bar{A}) = -2, g(\bar{B}) = -n.$$

donde A es la matriz cuyo único coeficiente no nulo es $a_{11} = 1$ y B la matriz cuyos coeficientes son todos 1 (ambas de orden $n-1$). Por tanto, si $\lambda f + \mu g = 0$, evaluando en \bar{A} y \bar{B} queda:

$$\begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 0, \\ n(n-1)\lambda - n\mu = 0, \end{cases}$$

lo que implica $\lambda = \mu = 0$ (recuérdese que $n \geq 3$). Por tanto las formas son efectivamente independientes y el cómputo anterior de dimensiones es correcto.

En fin, reuniendo (i) y (ii) obtenemos la dimensión del espacio de todas las matrices mágicas:

$$\begin{aligned} \dim(\Sigma) &= \dim(\Sigma_a) + \dim(\Sigma_s) = \dim(\Sigma_a) + \dim(\Sigma_s^0) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) - 2 + 1 = (n-1)^2 - 1 = n(n-2). \quad \square \end{aligned}$$

Número 12. Sea f una forma lineal del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demostrar que existe una única matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $f(X) = \text{tr}(AX)$ para cada matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solución. Denotamos $\text{tr}(A \cdot \star)$ la forma lineal $: X \mapsto \text{tr}(AX)$. Por la propiedades de la traza la aplicación

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* : A \mapsto \text{tr}(A \cdot \star),$$

está bien definida y es lineal. Y es inyectiva. En efecto, supongamos $\text{tr}(AX) = 0$ para toda matriz X . Entonces consideramos la matriz $X = \Delta_{ij}$ cuyos coeficientes son todos nulos salvo el (i, j) -ésimo, que vale 1. Un pequeño cálculo muestra que $0 = \text{tr}(AX) = a_{ji}$, y como esto vale para todo (i, j) se sigue $A = 0$. Visto que nuestra aplicación lineal es inyectiva, por estar definida entre espacios de tipo finito de la misma dimensión, debe ser biyectiva, que es lo que afirma el enunciado. \square

Número 13. Sea $E = \mathbb{K}_n[T]$ (polinomios de grado $\leq n$), y fijemos escalares a_0, \dots, a_n , distintos dos a dos.

(1) Demostrar que las aplicaciones

$$\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{K} : P(T) \mapsto P(a_i)$$

constituyen una base de E^* , y encontrar su base dual.

(2) Dados escalares b_0, \dots, b_n , encontrar un polinomio $P \in E$ tal que $P(a_i) = b_i$ para cada $i = 0, \dots, n$ (*interpolación polinomial*).

Solución. (1) Cada φ_i es una forma lineal, pues

$$\varphi_i(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a_i) = \lambda P(a_i) + \mu Q(a_i) = \lambda \varphi_i(P) + \mu \varphi_i(Q).$$

Para probar que los φ_i son una base consideramos la matriz de sus coordenadas respecto de la base estándar $\mathcal{E} = \{T^j : 0 \leq j \leq n\}$ de E . Los coeficientes de esa matriz son $\varphi_i(T^j) = a_i^j$, luego su determinante es de Vandermonde, y no nulo por ser los a_i distintos. En consecuencia, se trata efectivamente de una base \mathcal{B}^* , cuya dual denotamos naturalmente \mathcal{B} .

Ahora queremos determinar qué polinomios P_0, \dots, P_n constituyen \mathcal{B} . Esos P_j están caracterizados por las condiciones $\varphi_i(P_j) = 0$ si $i \neq j$, $\varphi_j(P_j) = 1$. Esto significa que $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$, $P_j(a_j) = 1$. Por la regla de Ruffini, se deduce que existen escalares ρ_j tales que

$$P_j(T) = \rho_j \prod_{i \neq j} (T - a_i).$$

Así, $1 = P_j(a_j) = \rho_j \prod_{i \neq j} (a_j - a_i)$, luego $\rho_j = \frac{1}{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)}$. En suma

$$P_j(T) = \prod_{i \neq j} \frac{T - a_i}{(a_j - a_i)}.$$

(2) Las coordenadas de un polinomio $P \in E$ respecto de la base \mathcal{B} son simplemente

$$(\varphi_0(P), \dots, \varphi_n(P)) = (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

Por tanto el polinomio que buscamos es el que tiene coordenadas (b_0, \dots, b_n) , esto es $P = \sum_{i=0}^n b_i P_i$. \square

Número 14. Sean E un espacio vectorial de tipo finito y E^* su dual. Dado un subespacio vectorial L de E , encontrar un isomorfismo canónico entre E/L y el dual de L^\vee .

Solución. Consideremos

$$\varphi : E/L \rightarrow (L^\vee)^* : \xi = [u] \mapsto \varphi_\xi, \quad \text{donde} \quad \varphi_\xi : L^\vee \rightarrow \mathbb{K} : h \mapsto h(u).$$

Hemos de comprobar en primer lugar que la definición de φ_ξ es consistente, es decir, no depende del representante u empleado en la definición. Ahora bien, si $[u] = [v]$ entonces $u - v \in L$, luego $h(u - v) = 0$ para cada $h \in L^\vee$, esto es, $h(u) = h(v)$.

Además φ_ξ es lineal, ya que

$$\varphi_\xi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(u) = \lambda f(u) + \mu g(u) = \lambda \varphi_\xi(f) + \mu \varphi_\xi(g).$$

Así, φ está bien definida. Además es lineal, pues dados $\xi = [u], \zeta = [v]$, tenemos,

$$\varphi_{\lambda\xi + \mu\zeta}(h) = h(\lambda u + \mu v) = \lambda h(u) + \mu h(v) = (\lambda \varphi_\xi + \mu \varphi_\zeta)(h)$$

luego $\varphi_{\lambda\xi + \mu\zeta} = \lambda \varphi_\xi + \mu \varphi_\zeta$.

Finalmente, para probar que φ es isomorfismo es suficiente ver que es inyectiva, ya que

$$\dim((L^\vee)^*) = \dim(L^\vee) = \dim(E) - \dim(L) = \dim(E/L).$$

En cuanto a la inyectividad, sea $\xi = [u] \neq 0$, esto es, $u \notin L$. Entonces existe un hiperplano $H \supset L$ que no contiene a u , luego cualquier ecuación h de ese hiperplano está en L^\vee , y $\varphi_\xi(h) = h(u) \neq 0$. Por tanto, $\varphi_\xi \neq 0$. \square

Número 15. (1) Utilizar el principio de dualidad en la resolución del ejercicio 5 de la lección II.8, p. 186.

(2) Encontrar un enunciado vectorial que coincida con su enunciado dual.

Solución. (1) Ese ejercicio trataba de las siguientes dos fórmulas

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3, \quad V_1 + V_2 \cap V_3 = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3).$$

Si aplicamos el diccionario de la dualidad a la primera, obtenemos la segunda, luego basta resolver el problema para una de las igualdades, y traducir la solución por dualidad para la segunda. El lector comprobará que esto es efectivamente lo que se obtuvo. Así pues, la dualidad reduce el trabajo a la mitad.

(2) Consideremos la siguiente afirmación: *En un espacio vectorial E de dimensión 4, dados una recta L y un hiperplano H que la contiene, siempre existe un plano V contenido en H y que contiene a L .*

En efecto, si $L = L[u]$, el teorema de prolongación de la base asegura que existe una base de H formada por tres vectores $\{u, v, w\}$. De este modo $V = L[u, v]$ contiene a L y está contenido en H .

Los duales de las rectas son los hiperplanos, y los duales de éstos son las rectas. Además, al ser 4 la dimensión de E los duales de los planos son los planos. Por eso el dual del enunciado propuesto es él mismo. \square

Soluciones de las cuestiones

Clave: V = verdadero, F = falso

1V, 2V, 3V, 4V, 5V, 6F, 7V, 8V, 9F, 10F,
11V, 12V, 13F, 14V, 15V, 16F, 17F, 18V, 19V, 20V,
21F, 22F, 23V, 24V, 25F, 26V, 27V, 28F, 29F, 30F,
31V, 32F, 33V, 34F, 35F, 36F, 37F, 38F, 39F, 40V,
41F, 42F, 43F, 44V, 45F, 46F, 47V, 48F, 49V, 50V.

Lecturas ulteriores

Componer una bibliografía de álgebra lineal sería una tarea interminable, así que no lo haremos. En lugar de ello, nos conformaremos con enumerar algunas referencias que o bien arrojan una luz diferente o bien añaden algo (o mucho) de significativo sobre los temas centrales de este texto. La elección de estas referencias sólo puede justificarse por el gusto personal de los autores, y seguro habrá otras referencias inexcusables, por cuya ausencia pedimos de antemano excusas.

1. Las matrices, desde que aparecen en la lección 2, no se ausentan ya más de la escena, y de hecho, el último problema de la última lección del segundo volumen de nuestro curso será un resultado importante sobre ellas. Naturalmente, hay infinidad de libros, textos y tratados de *teoría de matrices*, pero nosotros queremos sugerir al lector uno del siglo pasado y otro de éste:

F.R. Gantmacher: *Théorie des matrices* (I&II). Paris: Dunod 1966.

D. Serre: *Matrices: theory and applications*. New York: Springer 2002.

2. Aunque hoy la axiomática de los espacios vectoriales, es decir, de los conceptos abstractos básicos del álgebra lineal nos parecen muy naturales, la realidad es que son muy recientes, y su expresión final resultó elusiva durante bastante tiempo, y a matemáticos de importancia. Es muy interesante leer esta historia, lo que puede hacerse en los dos artículos siguientes:

J.-L. Dorier: A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica* **22** (1995) 227–261.

G.H. Moore: The axiomatization of linear algebra: 1875–1940. *Historia Mathematica* **22** (1995) 262–303.

3. En este texto nos hemos limitado a espacios vectoriales de tipo finito desde muy pronto. Sin embargo la teoría no depende de esa restricción, como se ve en numerosos libros. Aquí mencionamos estos dos:

S. Lang: *Álgebra lineal*. Buenos Aires: Addison-Wesley 1986.

W.H. Greub: *Linear Algebra*. Berlín: Springer 1967.

4. Al espacio dual hemos dedicado estrictamente hablando una sola lección, con un último párrafo sobre dualidad, y en la continuación de este curso la dualidad reaparecerá de manera crucial en el tratamiento de los subespacios invariantes, y habrá un poco de margen para invocarla a cuenta de la polaridad, pero ninguno a cuenta de la ortogonalidad. En realidad, hoy la dualidad está verdaderamente omnipresente en las matemáticas, algo significativo, siendo como es una noción de origen profundamente geométrico. Una buena referencia para descubrir esto es el segundo de los siguientes libros; el primero es recomendable como lectura formal:

G. Fischer: *Lineare Algebra*. Wiesbaden: Vieweg 2000.

J. Gray: *Worlds out of nothing*. Nueva York: Springer 2000.

5. También queremos citar dos libros de problemas y ejercicios:

F. Ayres: *Teoría y problemas de matrices*. México D.F.: McGraw-Hill 1985.

F. Broglia, E. Fortuna, D. Luminati: *Problemi risolti di algebra lineare*. Bolonia: Zanichelli-Decibel 1995.

6. Hay muchas otras lecturas recomendables, no relacionadas directamente con este texto. Nosotros consideramos muy especialmente adecuado señalar las siguientes obras singulares:

T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader: *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton: Princeton University Press 2008.

R. Loisel, J.-L. Tripp: *Magasin Général*, 1,2,3,4,... Barcelona: Norma 2006, 07, 08, 09,...

Símbolos

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$	1	$(AB)^t = B^tA^t$	35
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$	1	$\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$	36
$c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$	2	A, A^{-1}	37
$c \pm d = (c_1 \pm d_1, \dots, c_n \pm d_n)$	4	$GL(n, \mathbb{K}), GL(n)$	38
$f_k : a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k$	4	$(A I_n) \rightsquigarrow (I_n A^{-1})$	39
$\alpha_i f_i + \alpha_j f_j$	5	$A^k, A^p A^q = A^{p+q}$	40
$\sum \alpha_i f_i$	5	$(A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$	40
$f_k \rightsquigarrow \lambda f_k$	6	$\det_f(A) = \sum_j (-1)^{1+j} a_{1j} \det_f(A_{1j})$	45
$f_k \rightsquigarrow f_k + \mu f_\ell$	6	$\det_f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$	46
$f_k, f_\ell \rightsquigarrow f_\ell, f_k$	6	$\det(B) \stackrel{\mu}{\rightsquigarrow} \det(B')$	51
$\alpha C_7H_8 + \beta HNO_3 \longrightarrow \cdots$	16	$\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$	52
$zyzyz + xwyw = xwyzv$	16	$\det_c : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$	54
$A \cdot x^t = b^t$	17	$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$	57
$A = (a_{ij})$	18	$\det(A) = \sum_{j_k \neq j_\ell} (-1)^{\#(j)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$	60
$I_n = (\delta_{ij})$	18	$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$	63
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$	18	$\text{Adj}(A) = (\alpha_{ij})^t$	64
$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$	18	$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}$	64
$\sum \alpha_i a_i$	18	$y^t = \frac{\text{Adj}(B)g(\lambda)^t}{\det(B)}$	67
$\text{rg}_f(A)$	23	$R(f, g)$	70
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$	27	$u \in E, \lambda \in \mathbb{K}$	142
\tilde{A}	28	$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$	142
$A+B = (a_{ij} + b_{ij})$	33	$u = (x_1, \dots, x_n)$	144
$(A+B)^t = A^t + B^t$	33	$G = E \times F$	144
$\lambda A = (\lambda a_{ij})$	33	$\mathbb{K}[T]$	145
$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$	33	\mathbb{K}^I	145
$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$	33	$V \subset \mathbb{R}^n : Ax^t = 0$	145
$(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$	33	\mathbb{S}^1	146
$(\lambda A)^t = \lambda A^t$	33	$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$	147
$\text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$	34	$\mathbb{K}_n[T]$	147
$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$	34	$\mathcal{C}(I)$	147
$A(BC) = (AB)C$	35	$\mathcal{C}^k(I), \mathcal{C}^\infty(I)$	147
$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$	35	$V \subset \mathbb{R}^n : x^t = B\lambda^t$	148
$A(B+C) = AB + AC$	35		
$(A+B)C = AC + BC$	35		

$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$	149	$j : V \hookrightarrow E; v \mapsto v$	188
$W(f_1, \dots, f_n)$	153	$\text{Id}_E : E \rightarrow E$	188
$\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) = 0$	153	$\pi = \pi_L : E \rightarrow E/L : v \mapsto [v]$	188
$E = L[u_1, \dots, u_q]$	156	$u \mapsto \lambda u$	188
$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$	156	$y^t = Ax^t$	188
$\mathbb{K}^n = L[e_1, \dots, e_n]$	156	$x \mapsto \det(A(x))$	189
$A = \sum_{i,j} a_{ij} \Delta_{ij}$	157	$\mathcal{L}(E, F)$	189
$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \sqrt{-1} \mathbb{R}$	158	$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$	189
$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$	158	$(\lambda f)(u) = \lambda(f(u))$	189
$\mathcal{E}_n = \{e_j\}, \mathcal{E}$	160	λId_E	189
$\{\Delta_{ij}\}$	160	$f(V), f^{-1}(W)$	190
$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$	161	$f(f^{-1}(W)) \subset W$	192
$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$	161	$W \setminus f(f^{-1}(W))$	192
$\dim(E)$	162	$\text{im}(f) = f(E)$	192
$\dim(\{0\}) = 0$	162	$\ker(f) = f^{-1}(0)$	192
$\dim(\mathbb{K}^n) = n$	162	$\ker(f) = \{0\}$	194
$\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = mn$	162	$g \circ f$	195
$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$	162	$\bar{f} : E/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$	195
$\dim(\mathbb{K}_n[T]) = n + 1$	163	$\bar{f} = j \circ \bar{f} \circ \pi$	195
$C(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$	164	$\bar{f} : E/L \rightarrow F, L \subset \ker(f)$	196
$\text{codim}(V)$	166	$f _L \equiv 0$	196
$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$	171	$f = \bar{f} \circ \pi_L$	196
$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$	171	$p : E \rightarrow E, v+w \mapsto v$	197
$V = \bigcap_i V_i$	174	$s : E \rightarrow E : v+w \mapsto v-w$	197
$L[X]$	175	$p \circ p = p, s \circ s = \text{Id}_E$	197
$V_1 + \cdots + V_p = \sum_i V_i$	176	$s = 2p - \text{Id}_E$	197
$V_1 + V_2 = L[Y_1 \cup Y_2]$	176	$\text{GL}(E)$	199
$V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$	176	$y^t = Mx^t$	200
$V_1 \oplus \cdots \oplus V_p = \bigoplus_i V_i$	177	$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$	201
$E = V \oplus W$	177	$M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$	201
$[v] = v + L, [0] = L$	178	$M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)^{-1}$	202
E/L	178	$f \mapsto M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$	202
$[v] + [w] = [v + w], \lambda[v] = [\lambda v]$	178	$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$	203
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$	182	$GL(E) \rightarrow GL(n)$	203
$S = \frac{1}{2}(A + A^t), T = \frac{1}{2}(A - A^t)$	182	$M_{g \circ f} = M_g M_f$	203
$\dim(E/L) = \text{codim}(L)$	182	$\text{rg}(M) = \text{codim}(\ker(f))$	205
$f : E \rightarrow F$	187	$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$	210
$f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i)$	187	$\dim(E) = \dim(E^*)$	210
$f(u+v) = f(u) + f(v)$	187	$M_h = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$	210
$f(\lambda u) = \lambda f(u)$	187	$h(u) = M_h x^t = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$	210
$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$	188	$H = \ker(h)$	210
$f(0) = 0$	188	$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0, h = 0$	210
$f(-u) = -f(u)$	188	$h \mapsto M_h$	210

$V = \bigcap_{H \supset V} H$	212
$V^\vee = \{h \in E^* : H = \ker(h) \supset V\}$	212
$\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$	214
$h_i(u_j) = \delta_{ij}$	215
$f^* : F^* \rightarrow E^*$	216
$M_{f^*}(\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*) = M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)^t$	216
$C(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*) = C(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t$	216
$\Sigma, \Sigma_s, \Sigma_a$	221

Índice

- Adjunto (con signo) de un elemento de una matriz cuadrada, 63
- Aplicación identidad, 188
- Aplicación lineal, 187
- Aplicación lineal definida por una matriz, 188

- Base de un espacio vectorial de tipo finito, 160
- Base de una proyección, 197
- Base de una simetría, 197
- Base estándar de \mathbb{K}^n , 160
- Base estándar de un espacio de matrices, 160
- Base estándar de un espacio de polinomios, 160
- Bases duales, 214

- Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, 38
- Cálculo del rango por menores, 61
- Cambio de base, 163
- Cambio de bases duales, 216
- Cambios de base sucesivos, 164
- Caracterización de bases duales, 215
- Cociente de un espacio vectorial módulo un subespacio, 178
- Codimensión de un subespacio, 165
- Coeficiente de una ecuación lineal, 1
- Coeficiente de una matriz, 18
- Combinación lineal nula, 149
- Combinación lineal trivial, 149
- Combinación de ecuaciones lineales, 5

- Combinación de filas y columnas en un producto de matrices, 36
- Composición de aplicaciones lineales, 195
- Coordenadas de una forma respecto de una base dual, 215
- Coordenadas en un espacio vectorial de tipo finito, 161
- Cuerpo de escalares, 1

- Delta de Kronecker, 18
- Dependencia de ecuaciones lineales, 5
- Dependencia lineal de las filas de una matriz, 18
- Dependencia lineal de vectores, 148
- Dependencia lineal en el espacio vectorial estándar, 150
- Derivada, 189
- Determinación de aplicaciones lineales mediante bases, 200
- Determinante de un producto de matrices, 53
- Determinante de una matriz cuadrada, 46, 54
- Determinante de Vandermonde, 57
- Determinante por filas y determinante por columnas, 55
- Determinante y escalonamiento, 51
- Determinante y operaciones elementales, 50
- Dimensión de cocientes módulo subespacios, 182
- Dimensión de un espacio de polinomios, 163

- Dimensión de un espacio vectorial de tipo finito, 162
- Dimensión de un producto, 162
- Dimensión del espacio dual de uno de tipo finito, 210
- Dimensión del subespacio de las matrices antisimétricas, 171
- Dimensión del subespacio de las matrices simétricas, 171
- Dirección de una proyección, 197
- Dirección de una simetría, 197
- Discutir un sistema lineal, 3
- Dualidad canónica, 212
- Dualidad canónica entre formas e hiperplanos, 211
- Dualidad canónica y cocientes, 222
- Dualidad y aplicaciones lineales, 216

- Ecuación compatible, 2
- Ecuación incompatible, 2
- Ecuación lineal, 1
- Ecuación trivial, 2
- Ecuaciones de la restricción de una aplicación lineal a un subespacio, 206
- Ecuaciones de una aplicación lineal, 200
- Ecuaciones implícitas de una intersección de subespacios, 174
- Ecuaciones paramétricas e implícitas, 166
- Ecuaciones paramétricas, 11
- Equivalencia de matrices y de sistemas homogéneos, 22
- Equivalencia de sistemas escalonados reducidos, 12
- Escalonamiento de matrices, 20
- Espacio dual, 210
- Espacio vectorial, 141
- Espacio vectorial de tipo finito, 156
- Espacio vectorial estándar, 144
- Espacio vectorial producto, 144
- Espacios de aplicaciones lineales, 189

- Espacios suplementarios de matrices simétricas y de matrices antisimétricas, 182
- Espacios vectoriales de aplicaciones, 145

- Fórmula de Grassmann, 179
- Factorización canónica, 195
- Factorización de una aplicación lineal a través de una proyección sobre un cociente, 196
- Factorización por la derecha o por la izquierda de una aplicación lineal, 209
- Forma lineal, 210
- Formas lineales e hiperplanos vectoriales, 210
- Fórmula de la dimensión para una aplicación lineal, 199
- Fórmula de Newton para dos matrices que conmutan, 40

- Generación de subespacios, 175
- Generadores de un espacio vectorial de tipo finito, 162
- Grupo lineal de un espacio vectorial, 199
- Grupos lineales de matrices, 38

- Hiperplano vectorial, 166
- Homotecia (vectorial), 188

- Igualdad de rangos por filas y por columnas, 27
- Imagen de un subespacio por una aplicación lineal, 190
- Imagen de una aplicación lineal, 192
- Imagen inversa de un subespacio por una aplicación lineal, 190
- Incógnita de una ecuación lineal, 1
- Incógnitas principales, 8
- Incógnitas secundarias, 8
- Independencia de ecuaciones después de una operación elemental, 8
- Independencia de ecuaciones lineales, 5

- Independencia lineal de las filas de una matriz, 18
- Independencia lineal de vectores, 149
- Independencia lineal en el espacio vectorial estándar, 150
- Independencia lineal en un espacio vectorial de tipo finito, 162
- Interpolación polinomial, 222
- Intersecciones de hiperplanos, 179
- Intersecciones de subespacios, 174
- Inversa de un aplicación lineal biyectiva, 194
- Inversas por un lado de una matriz no necesariamente cuadrada, 43
- Inyectividad de un aplicación lineal, 194
- Isomorfismo entre el grupo lineal de un espacio vectorial y el grupo lineal de las matrices del orden correspondiente, 203
- Isomorfismo entre formas lineales y matrices, 210
- Isomorfismo lineal, 194
- Isomorfismos entre un espacio de aplicaciones lineales y uno de matrices, 202
- Los números complejos como espacio vectorial sobre los números reales, 145, 158
- Los números reales como espacio vectorial sobre los números racionales, 171
- Matrices equivalentes por filas, 19
- Matriz, 18
- Matriz adjunta de una matriz cuadrada, 64
- Matriz antisimétrica, 147
- Matriz de cambio de base, 163
- Matriz de la composición de dos aplicaciones lineales, 203
- Matriz de rango máximo, 23
- Matriz de una aplicación lineal, 200
- Matriz del isomorfismo inverso de uno dado, 202
- Matriz elemental, 42
- Matriz escalonada, 31
- Matriz escalonada reducida por filas, 20
- Matriz identidad, 18
- Matriz inversa y matriz adjunta, 64
- Matriz invertible, 37
- Matriz mágica, 60, 118, 156, 221
- Matriz por cajas, 33
- Matriz regular, 37
- Matriz simétrica, 147
- Matriz traspuesta, 26
- Matriz triangular, 37
- Matriz y matriz ampliada de un sistema lineal, 28
- Menores de una matriz, 61
- Método de escalonamiento de Gauss-Jordan, 9
- Multilinealidad del determinante, 189
- Inclusión, 188
- Núcleo de una aplicación lineal, 192
- Número de generadores de \mathbb{K}^n , 159
- Número de generadores independientes de \mathbb{K}^n , 159
- Número de vectores independientes en \mathbb{K}^n , 150
- Número de vectores independientes y número de generadores en un espacio vectorial de tipo finito, 162
- Operaciones con coordenadas, 161
- Operaciones elementales con ecuaciones lineales, 6
- Operaciones elementales por filas de una matriz, 18
- Parámetros, 8, 11
- Plano vectorial, 162
- Polinomios de grado $\leq n$, 147
- Polinomios en una variable, 145

- Potencias de una matriz cuadrada, 40
- Primer teorema de isomorfía, 195
- Primera incógnita de una ecuación, 2
- Principio de dualidad, 218
- Producto de espacios vectoriales de tipo finito, 156
- Producto de matrices, 34
- Producto de matrices y trasposición, 35
- Producto de una matriz por un escalar, 33
- Propiedades de la dualidad canónica, 213
- Propiedades de las operaciones lineales de matrices, 33
- Propiedades de una aplicación lineal, 188
- Propiedades del determinante, 50
- Propiedades del producto de matrices, 35
- Proyección sobre un espacio cociente, 188
- Proyección sobre un subespacio, 197
- Rango de la suma de matrices, 34
- Rango de un producto de matrices, 36
- Rango de una aplicación lineal, 204
- Rango de una matriz invertible, 38
- Rango e inyectividad, 205
- Rango por columnas de una matriz, 26
- Rango por filas de una matriz, 23
- Rango y biyectividad, 205
- Rango y suprayectividad, 205
- Recta vectorial, 162
- Regla de Cramer para resolver un sistema compatible arbitrario, 67
- Regla de Cramer para resolver un sistema compatible determinado, 65
- Regla de Laplace, 45
- Regla de Sarrus, 45
- Relación entre las soluciones de un sistema lineal y las del homogéneo asociado, 4
- Representación de sistemas lineales, 17
- Resolución de un sistema escalonado reducido, 11
- Resolver un sistema lineal, 3
- Resta de uplas de escalares, 4
- Resultante de dos polinomios, 70
- Simetría respecto de un subespacio, 197
- Sistema de generadores, 156
- Sistema lineal, 2
- Sistema lineal compatible determinado, 3
- Sistema lineal compatible indeterminado, 3
- Sistema lineal escalonado reducido, 8
- Sistema lineal homogéneo, 2
- Sistema lineal homogéneo asociado a uno arbitrario, 3
- Sistema lineal incompatible, 3
- Sistema lineal trivial, 3
- Sistemas de generadores en \mathbb{K}^n , 158
- Sistemas lineales equivalentes, 2
- Solución de un sistema lineal, 2
- Solución trivial de un sistema homogéneo, 3
- Subespacio vectorial de las soluciones de un sistema lineal homogéneo, 145
- Subespacio vectorial de un espacio vectorial, 145
- Subespacios de un espacio vectorial de tipo finito, 165
- Subespacios vectoriales de funciones continuas, 147
- Subespacios vectoriales de funciones derivables, 147
- Sucesión de Fibonacci, 174
- Suma de matrices, 33
- Suma de subespacios, 176
- Suma de uplas de escalares, 4
- Suma directa de subespacios, 176
- Suplementarios vectoriales, 177
- Teorema de la base, 162

-
- Teorema de prolongación de la base, 164
- Teorema de Rouché-Frobenius, 28
- Término independiente de una ecuación lineal, 1
- Tratamiento de los sistemas lineales por columnas, 26
- Traza, 57
- Triángulo de Tartaglia, 60
- Unicidad de matrices escalonadas reducidas, 22
- Variable de una ecuación lineal, 1
- Vectores de un espacio vectorial, 142
- Wronskiano, 153