1. Determinar razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i. Si una matriz simétrica real tiene traza nula entonces no es congruente a la matriz identidad.

ii. Si $f : X \to X$ es una aplicación afín, entonces f transforma rectas en rectas si, y solamente si, f es biyectiva.

i) Verdadera simétrica $\Rightarrow$ es autoadjunta $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Al aplicar el Teorema Espectral obtenemos una base ortogonal para la que la matriz es Diagonal, por tanto, conserva la traza y el determinante $\Rightarrow$ si llamamos a la matriz A, tenemos que $|A| = 0$
$\Rightarrow$ por el criterio de Sylvester tenemos que no podrá ser congruente a la identidad

ii) Las proyecciones en $\mathbb{R}^3$ sobre un plano, transforman rectas en rectas, pero no es biyectiva pues la matriz tiene determinante nulo y por tanto no es inyectiva

2. En $\mathbb{R}^m$ consideramos una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Definimos $Q' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por $Q'(u) = Q(T(u))$.

a) Demostrar que Q' es una forma cuadrática y calcular su forma polar, F', en términos de la forma polar, F, de Q y T.

b) Dada una base B de $\mathbb{R}^m$, calcular la matriz $M(Q')_B$, a partir de las matrices $M(Q)_B$ y $M(T)_{BB}$.

a) Al tratarse de una forma cuadrática no tiene por qué ser necesariamente simétrica por lo que al multiplicar $M(T)$ $M(Q) \cdot M(T)$ obtenemos la matriz de Q'.

Por la definición de formas polares tenemos que:

$$\varphi'_p(xy) = \frac{1}{2}\left(Q'(x+y) - Q'(x) - Q'(y) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_p(xy) = \frac{1}{2}\left((Q \circ T)(x+y) - (Q \circ T)(x) - (Q \circ T)(y) \right.$$

si F' es la forma polar de Q' $\Rightarrow$
$F'(x,y) = F(T(x), T(y)) \Rightarrow F'(\cdot\,\cdot) = F(T(\cdot), T(\cdot))$
$\Rightarrow$ es la forma bilineal asociada a Q $\Rightarrow$

b) $M(Q') = M(T) \cdot M(Q) \cdot M(T)$

3. Dados espacios vectoriales $V, V' \neq 0$, una aplicación lineal $T : V \to V'$ y un subespacio vectorial $0 \neq H \subset KerT$, demostrar que T induce una aplicación lineal natural $T_H : V/H \to V'$. Dar un ejemplo en el que T_H sea suprayectiva pero no inyectiva. Demostrar que T_H es inyectiva si y solo si $H = KerT$.

$T : V \to V'$ $\qquad H \subset \ker(T)$

$T_H : V/_H \to V'$

T_H es inyectiva $\Leftrightarrow$ $H = \ker(T)$

pues se establece una relación de equivalencia en la aplicación gracias a la cual todos los vectores que tengan como imagen el 0 se ven agrupados en una misma clase y por tanto sólo clasifica un vector (clase) que tiene como imagen el vector nulo.

1. Demostrar que la función $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ es una forma cuadrática y dar una base que la diagonalice.

$Q(100) = -1$

$Q(010) = 0$

$Q(001) = 0$

$$M(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ es una matriz cuadrada $\Rightarrow$ es una forma cuadrática

Tomaremos $u_1 = e_1$

$\{u_1\}^c = \{-x+2y+z=0 = L\{(101)(11-1)\}$

Tomaremos como $u_2 = (101)$

$$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} = L\{(1\ 1\ -1)\}$$

$\Rightarrow$ Tomando la base $B = \{(100)(101)(1\ 1\ -1)\}$

Tenemos que $M(Q) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

2. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que

$$M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de α y β, la forma canónica de Jordan, J y bases B tales que $M(T)_{B,B} = J$.

ii) Determinar el polinomio mínimo de T y los valores de α y β para los que el polinomio $q(x) = (x-1)^2(x-3)x$ anula a T.

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & \beta-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1-\lambda \end{vmatrix} = (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & -1 \\ 1 & \alpha-1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta-\lambda)\big((1+\alpha-\lambda)(\alpha-1-\lambda)+1\big) =$$

$$= (\beta-\lambda)(\alpha-\lambda)^2$$

si $\beta = \alpha \Rightarrow (\beta-\lambda)^3$ $\quad M(T) = \begin{pmatrix} 1+\beta & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \beta-1 \end{pmatrix}$

$\ker(T-\beta Id) = \{ x_1 = x_3 = L\{(101)(010)\}$

$\ker(T-\beta Id)^2 = \mathbb{R}^2$

Tomando la base $B = \{(T-\beta)(e_1)\ e_1, e_2\}$

$$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

2. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que

$$M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de α y β, la forma canónica de Jordan, J y bases B tales que $M(T)_{B,B} = J$.

ii) Determinar el polinomio mínimo de T y los valores de α y β para los que el polinomio $q(x) = (x-1)^2(x-3)x$ anula a T.

si $\beta \neq \alpha \Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$

$\ker(T-\beta Id) = \begin{cases} x_1 = 0 \quad (\text{si } \alpha \neq 0) \\ x_3 = 0 \end{cases} = L\{(0,1,0)\}$

$\ker(T-\alpha Id) = \begin{cases} \beta x_2 = 0 \to (\text{si } \beta \neq 0) \\ x_1 = x_3 \end{cases} = L\{(1,0,1)\}$

$\ker(T-\alpha Id)^2 = x_2 = 0 = L\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Tomando la base $B = \{(0,1,0), (T-\alpha)(e_1), e_1\}$

$M(T) = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ T es diagonalizable $\iff \alpha, \beta \neq 0$

ii) $q(x) = (x-1)^2(x-3)(x)$

$\mu_T(x) = (x-\beta)^2$

$\mu_T(x) = (x-\beta)(x-\alpha)^2$

$$\frac{q(x)}{P_M} = \frac{(x-1)^2(x-3)x}{(x-\beta)(x-\alpha)^2}$$

si $\beta = \alpha$: $\beta = \alpha = 1$

si $\beta \neq \alpha$: $\beta = 3$ ó $\beta = 0$; $\alpha = 1$

iii) Determinar los valores de α y β para los que la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right),$$

es una transvección.

Como hemos visto antes $M(\vec{f})$ es una matriz de Jordan, por tanto ya cumple una de las características.

Veamos el conjunto de puntos fijos

$$\alpha x_1 = x_1 + \alpha x_3 - x_3$$
$$\alpha x_1 - x_1 = \alpha x_3 - x_3 \,;$$
$$x_1(\alpha - 1) = x_3(\alpha - 1) \,;$$
$$\boxed{x_1 = x_3}$$
$$\boxed{x_2 = 0}$$

$\Rightarrow$ Tenemos que $\dim(Fix(f)) = 2$ (condición necesaria para que f sea una transvección) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ si $\alpha = 1 \Rightarrow \beta \neq 1$ y

si $\beta = 1 \Rightarrow \alpha \neq 1$

si se dan simultáneamente que $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ no hay un plano de puntos fijos y por tanto no puede ser una transvección

iii) Determinar los valores de α y β para los que la aplicación afín $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix},$$

es una transvección.

iv) Determinar los valores de α y β para los que existe una homotecia h tal que $h \circ f$ es una dilatación.

$\Rightarrow \exists\, B : \{\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3\}$ para la que

$$m(\overrightarrow{h \circ f}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = m(\vec{h}) \circ m(\vec{f}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/\lambda & & \\ & 1/\lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ para la base } B$$

$\Rightarrow d(Fix(\vec{f})) = 1$ para ello: $(x_1 = x_3 = 0)$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \beta-1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha x_1 - x_3 = 0 \\ (\beta-1)x_2 = 0 \\ x_1 + (\alpha-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(Fix(\vec{f})) = 1 \iff \beta = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1/\lambda}$$

$$\Rightarrow m(f) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_T(\lambda) = (\lambda-1)(\alpha-\lambda)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} = L\{(1\,0\,1)\}$$

$\Rightarrow$ no diagonalizable $\Rightarrow \nexists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $f \circ h$ sea una dilatación.

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín cuya matriz respecto de la referencia canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que f es una isometría y clasificarla, dando un sistema de referencia cartesiano euclídeo respecto del que se obtenga su matriz reducida.

f es isometría $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es afín} ✓ \\ \vec{f} \text{ es ortogonal} \end{cases}$

$\vec{f}$ es ortogonal $\Leftrightarrow M(\vec{f})^t \cdot M(\langle\rangle) \cdot M(\vec{f}) = M(\langle\rangle)$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓ \Rightarrow$$ ortogonal y por tanto isometría

$$\begin{vmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{vmatrix} = 9/25 + 16/25 = 25/25 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{rotación ó} \\ \text{rotación con traslación} \end{cases}$ $0 = 1 \Rightarrow$ sistema incompatible $\Rightarrow$ no hay puntos fijos

Rotación con traslación

$\ker(T - Id) = \langle\{(0\ 1\ 0)\}\rangle$

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín cuya matriz respecto de la referencia canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que f es una isometría y clasificarla, dando un sistema de referencia cartesiano euclídeo respecto del que se obtenga su matriz reducida.

Intercambiando

$R = \{(000); (010)(100)(001)\}$ $\quad C_{B_3 B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\overrightarrow{0\,1\,1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1\,0\,1)$$

$$M(\vec{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$(\vec{v})_B = (1\,0\,1)$

$\vec{r} = L\{(100)\}_{B}$

se trata de una rotación compuesta con una traslación con eje de giro la recta $\vec{r} = L\{(010)\}$ y ángulo $\alpha = \arccos(3/5)$

vector de desplazamiento $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

y $\vec{v} = (011)$

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín cuya matriz respecto de la referencia canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que f es una isometría y clasificarla, dando un sistema de referencia cartesiano euclídeo respecto del que se obtenga su matriz reducida.

$\vec{v} = (011)$ $\qquad \vec{\sigma} = L\{(010)\}$ - eje de giro

$\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^{\perp} \qquad \vec{w} \qquad \vec{w}^{\perp}$

$\vec{v} = (011) = (010) + (001) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}}_{g}$$

$$f = t_{\vec{v}} \circ g = t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{w}^{\perp}} \circ g = t_{\vec{w}} \circ g'$$

$$m(g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$m(t_{\vec{w}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Tomando el sistema de referencia $R = \{(1\,0\,1/2); (010)(100)(001)\}$

$$m(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Examen 2º parcial 2023

1. Sean $F, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos isomorfismos.
Decidir razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a. Si T y F son diagonalizables, $F \circ T$ es diagonalizable.

b. Si T y $F \circ T$ son diagonalizables, F es diagonalizable.

a) Falso: Contraejemplo

Sean $f, g \in End(\mathbb{R}^3)$: $A = M(f)$, $B = M(g)$ $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2(1-\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1) \text{ ¡!¡}$$ No tiene raíces reales
no es diagonalizable

b) Verdadero

$F \circ T \Rightarrow$ diagonalizable

$T \Rightarrow$ diagonalizable

$M(F \circ T) = D$ para una base diagonalizable

$M(F \circ T) = C$ para una base particular,

tal que $C = M(F) \circ M(T) = A \circ B \Rightarrow$

$\Rightarrow D = I^{-1} \circ C \circ I = A \cdot B$

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión m. Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal no inyectiva. Dados $j, k, r > 0$, supongamos que $\dim KerT^j = k$ y $\dim KerT^{j+1} = k + r$. Se pide:

i) Si un subespacio $H \subset KerT^{j+1}$ es tal que $KerT^{j+1} = H \oplus KerT^j$, demostrar que T transforma una base B_H de H en r vectores linealmente independientes de $KerT^j$.

ii) Demostrar que $L(T(B_H)) \cap KerT^{j-1} = \{\bar{0}\}$.

iii) Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión 5 y $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $dimKerT = 3$ y $T^2 = 0$. Usando los apartados anteriores calcular justificadamente la forma canónica de T.

$T : V \to V$ no inyectiva $\quad d(\ker T^j) = k$

$d(\ker T^{j+1}) = k + r$

i) Sea $M \subset \ker(T^{j+1})$: $\ker(T^{j+1}) = M \oplus \ker(T^j)$

Tenemos que $\ker T \subset \ldots \subset \ker T^j \subset \ker T^{j+1}$

$\Rightarrow$ al ser $M \subset \ker T^{j+1} \Rightarrow T(M) \neq 0$ ya que

$\ker T^j \subsetneq \ker T^{j+1} \Rightarrow$

Al ser M un subespacio vectorial y T una aplicación lineal, se debe cumplir que

$\forall\, u, w \in B_H \quad T(u+w) = T(u) + T(w)$

$\Rightarrow$ al ser los vectores de B_H linealmente independientes, sus imágenes también lo serán

$\ker(T)^j \; d = k \Rightarrow \ker(T)^j : B = \{u_1 \ldots u_k\}$

$\ker(T)^{j+1} \Rightarrow \exists\, u_1 - u_r \in \ker(T)^{j+1} \quad d = k + r$

$\notin \ker(T)^j$

$M \subset \ker(T)^{j+1}$: $M \oplus \ker(T)^j = \ker(T)^{j+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow M \cap \ker(T)^j = \{\bar{0}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = L\{h_1 - h_r\} \Rightarrow T(M) = L\{T(h_1) \ldots T(h_r)\}$ es l.i.

ya que sino $\exists\, i : T(h_i) = 0$ para algún i

pero eso no puede ser porque sino

$h_i \in \ker(T)^{j-1}$ contradiciendo la hipótesis

iii) $L\{T(B_H)\} \cap \ker T^{j-1} = \{0\}$

Reducción al absurdo, supongamos lo contrario

$L\{T(B_H)\} \cap \ker(T)^{j-1} \neq \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ w_1 - w_m \in L\{T(B_H)\} \cap \ker(T)^{j-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ estos vectores al intersecar pertenecerían a $\ker(T)^{j-1} \Rightarrow$ junto a otra familia m

$m + \{w_1 - w_m\}$ formarían base de M, pero

$\Rightarrow T^{j-1}(w_1 - w_m) = 0$ contradiciendo lo anterior, ya demostrado, pues los vectores no pertenecerían a $\ker T^{j+1}$ y no serían l.i.

iii) $d(V)=5$ $T: V \to V$ con $d(\ker(T)) = 3$

y $T^2 = 0 \Rightarrow d(\ker(T)^2) = 5$

$$\underset{3}{\ker(T)} \subset \underset{5}{\ker(T)^2}$$

Para cierta base $\mathcal{B}$, $M(T) = A$

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & & & & \\ \hline & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

1. i) Para cada $\beta \in \mathbb{R}$, se considera la aplicación lineal $T_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T_\beta)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 1+\beta & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & 1-\beta & 0 & 0 \\ 3-2\beta & 3-2\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}. \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Calcular, dependiendo de los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T_β y bases B_β tales que $M(T_\beta)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\beta & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\beta-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-2\beta & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta-\lambda)(1-\lambda)^3$$

si $\beta = 1 \Rightarrow (1-\lambda)^4$

$$\ker(T - Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \{x_2 = -x_1\} = L\{(1\ -1\ 0\ 0)\ (0\ 0\ 1\ 0)\ (0\ 0\ 0\ 1)$$

$\Rightarrow \ker(T - Id)^2 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \ker(T-Id)^2 = L\{(1000)(0100)(0010)(0001)\}$

$$\{0\} \subset \underset{\substack{\| \\ (1\,-1\,0\,0) \\ (0\,0\,1\,0) \\ (0\,0\,0\,1)}}{\ker T - Id} \subset \underset{\substack{\| \\ (1000)\,(0100) \\ (0010)\,(0001)}}{\ker (T-Id)^2}$$

$\ker(T - Id) \oplus L\{(1100)\} = \ker(T-Id)^2 = \mathbb{R}^4$

$(T - Id)(1000) = (1\ -1\ 1\ 0)$

$\Rightarrow$ Tomando la base $B = \{(T-Id)(e_1)\ e_1\ \ e_2\ e_3\}$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si $\beta \neq 1 \Rightarrow (1-\lambda)^3(\beta-\lambda)$

$\lambda = 1$

$$\ker(T-Id) = \begin{pmatrix} \beta & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & -\beta & 0 & 0 \\ 3-2\beta & 3-2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

$= L\{(1\,-1\,0\,0)\ (0\,0\,1\,0)\}$

$\ker(T-Id)^2 = L\{(1\,0\,0\,0)(0\,1\,0\,0)(0\,0\,1\,0)\}$

$L\{(1\,-1\,0\,0)\boxed{(1\,1\,0\,0)}(0\,0\,1\,0)\}$

$$\{\bar{0}\} \subset \underset{2}{\ker(T-Id)} \subset \underset{3}{\ker(T-Id)^2}$$

$(T-\lambda Id)(e_1) \leftarrow (1\,0\,0\,0)$

$\Rightarrow$ si tomamos los vectores $\{(T-Id(e_1))\, e_1\ \cancel{e_2}\ e_3\}$

A pesar de que con β ya es diagonalizable, hace falta averiguar su base

$$\ker(T-\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & 1-2\beta & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -\beta x_2 \\ x_1 = 2\beta x_3 \end{cases}$$

$= L\{(0\,0\,0\,1)\}$ ✓

$\Rightarrow$ si $\beta \neq 1$, β puede tomar cualquier valor

Tomando la base $B = \{(T-Id)(e_1)\ (e_1)(e_2)(e_4)\}$

$$\Rightarrow m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

b)

i) si $\beta \neq 1 \Rightarrow P_T(\lambda) = (\lambda-1)^4$

ii) si $\beta \neq 1$ y $B = 0 \Rightarrow P_T(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-B)$

i) Los posibles polinomios mínimos son $(\lambda-1)^4$, $(\lambda-1)^3$, $(\lambda-1)^2$ y $\cancel{(\lambda-1)}$

El polinomio mínimo es $(\lambda-1)^2$ ✓

ii) los posibles polinomios mínimos son:

$(\lambda-1)(\lambda-B)$ $\boxed{(\lambda-1)^2(\lambda-B)}$ $(\lambda-1)^3(\lambda-B)$ ✓

$\Rightarrow$ Al polinomio $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ y este polinomio anula a T $\cancel{\Leftrightarrow \beta = 0}$

$\Leftrightarrow B = 1$

2. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, se considera la forma cuadrática

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ definida por } Q(x_1, x_2, x_3) = 3/2x_1^2 - x_1x_3 + 3x_2^2 + 3/2x_3^2.$$

a) Diagonalizar su forma polar $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de dos maneras distintas -una de ellas por aplicación del Teorema Espectral-.

b) Deducir que F es un producto escalar y, usando a), encontrar una base que sea simultáneamente ortogonal para el producto escalar usual y para F.

c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación afín cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{2} + \cancel{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}$

d) Demostrar que f es una isometría con cualquiera de los dos productos escalares. Calcular en ambos casos el módulo de desplazamiento.

e) Definir un isomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que sea un movimiento helicoidal para ambos productos escalares.

a)

Diagonalización por el Teorema espectral

$Q(x_1 x_2 x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_3 + 3x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2$

$M(Q) = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$; $P_T(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$

$\ker(T - 3Id) = L\{(0\,1\,0)\} \Rightarrow L\{(0\ 1/\sqrt{3}\ 0)\}$

$\ker(T - \frac{4}{2}Id) = L\{(1\,0\,-1)\} \Rightarrow L\{(1/2\ \ 0\ -1/2)\}$

$\ker(T - \frac{2}{2}Id) = L\{(1\,0\,1)\} \Rightarrow L\{(1/\sqrt{2}\ \ 0\ \ 1/\sqrt{2})\}$

Diagonalización por congruencia:

Tomamos como $u_1 = (0 1 0) \Rightarrow Q(u_1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{u_1\}^c = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3 : (xyz)^t M(Q)(u_1) = 0\} =$

$= \left\{ \overrightarrow{(xyz)} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0} \right\} = \{y = 0\} = L\{(100)(001)\}$

Tomaremos el vector $u_2 = (100)$

$u_3 \in \{u_2\}^c \cap \{u_1\}^c$

$\{u_2\}^c = \left\{ \overrightarrow{(xyz)} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \bar{0} \right\} = \{3x = z\} = L\{(103)\}$

$\{u_1\}^c = L\{(100)(001)\}$

Tomamos $u_3 = (103)$

$\Rightarrow$ Tomamos la base autoconjugada y la normalizamos

$u_1 = (0 \ \ 1/\sqrt{3} \ \ 0) \quad u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \ 0 \ 0\right) \quad u_3 = (1/\sqrt{12} \ \ 0 \ \ 3/\sqrt{12})$

b) Como para la base B_1 tenemos que la matriz de la aplicación es la identidad, estamos ante un producto escalar, asimismo, dicha base es ortonormal tanto para el producto escalar usual como tomando F como producto escalar

c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación afín cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{1}{2} + \cancel{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Demostrar que f es una isometría con cualquiera de los dos productos escalares. Calcular en ambos casos el módulo de desplazamiento.

e) Definir un isomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que sea un movimiento helicoidal para ambos productos escalares.

c) Es una aplicación lineal, y además conserva la norma $\Rightarrow$ es ortogonal $\Rightarrow$ es isometría

☆ Para probar que es una isometría hay que comprobar que:
$A^t \cdot A = Id \Rightarrow$ para el producto escalar usual
$A^t \cdot G \cdot A = G \Rightarrow$ para el otro producto escalar

el módulo de desplazamiento es $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ ✗ 1

f es una simetría con traslación $\Rightarrow$

$\Rightarrow f \circ f = (T_{\vec{w}} \circ S)(T_{\vec{w}} \circ S) = T_{2\vec{w}} \circ S \circ S = T_{2\vec{w}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2\vec{w} = (2\,0\,0)$
$\Rightarrow \vec{w} = (1\,0\,0)$

Para el segundo producto escalar es ortogonal $\Leftrightarrow$ conserva el producto escalar

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{f}\left(1/\sqrt{3}\, \vec{e}_1,\ 1/2\,(e_1 - e_3),\ 1/\sqrt{2}\,(e_1 + e_3)\right) =$

$= \left(1/\sqrt{3}\, \vec{e}_1,\ 1/2\,(e_1 - e_3),\ 1/\sqrt{2}\,(e_1 + e_3)\right)$

$\Rightarrow$ es ortogonal $\Rightarrow$ es isometría ☆

Para este producto escalar, el vector de desplazamiento $\|\vec{v}\| = \sqrt{9/2}$ ✗ $\sqrt{3/2}$

e) definir un endomorfismo que sea un movimiento helicoidal para ambos producto escalares

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Movimiento helicoidal es traslación + rotación

Tomamos la base $B = \{ (0 \; 1/\sqrt{3} \; 0) (1/2 \; 0 \; -1/2) (1/\sqrt{2} \; 0 \; 1/\sqrt{2}) \}$

$\Rightarrow$ Definimos g como aquella aplicación afín que tiene por matriz, la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con ángulo $\alpha = \pi/2$ y módulo 1

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_1,B_1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Calcular, dependiendo de los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T y bases B_β tales que $M(T)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$. Determinar en cada caso el polinomio mínimo de T.

$$\begin{vmatrix} 3/2-\lambda & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\beta-\lambda)^2 \circ \left((3/2-\lambda)(1/2-\lambda) + 1/4 \right)$$

$$= (\beta-\lambda)^2 \circ (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\beta-\lambda)^2(\lambda-1)^2$$

si $\beta = 1$

$\ker(T-Id) = \{x_1 = -x_3\} = L\{(1\,0\,-1\,0)\,(0\,1\,0\,0)\,(0\,0\,0\,1)\}$

$\ker(T-Id)^2 = \mathbb{R}^4$

$\{\bar{0}\} \subseteq \ker(T-Id) \subset \ker(T-Id)^2$

Tomemos $B = \{(T-Id)(e_1)\ e_1\ e_2\ e_4\}$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{\beta} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\beta} \end{pmatrix}.$$

Calcular, dependiendo de los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T y bases B_β tales que $M(T)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$. Determinar en cada caso el polinomio mínimo de T.

$\beta \neq 1$

$$\ker(T-Id) = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} = L\{(1\ 0\ {-1}\ 0)\}$$

$$\ker(T-Id)^2 = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} = L\{(1000)\ (0010)\}$$

$$\ker(T-\beta Id) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} = L\{(0100)(0001)\}$$

$\Rightarrow$ Tomamos la base $B = \{(T-Id)(e_1), e_1, e_2, e_4)$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

b) si $\beta = 1 \Rightarrow P_m(\lambda) = (\lambda - 1)^2$

si $\beta \neq 1 \Rightarrow P_m(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda - \beta)$

2. a) En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 6/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 9/5 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una base ortonormal de autovectores de T.

b) Se considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $M(F)_{B_3} = M(T)_{B_3,B_3}$. **Usar a)** para deducir que F es un producto escalar y para calcular una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$.

a)

$$M(T) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-2)$$

$$\ker(T - 1Id) = \{x_1 + 2x_3 = 0 = L\{(-2\,0\,1)(0\,1\,0)\}$$

$$\ker(T - 2Id) = \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 = x_3 \end{cases} = L\{(1\,0\,2)\}$$

Sea la base $B = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\,0\,1)(0\,1\,0)\frac{1}{\sqrt{5}}(1\,0\,2)\}$

b) $\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Es definida positiva y simétrica

$\Rightarrow$ es un producto escalar, para obtener una base ortonormal basta hacer la que ya tenemos -ortogonal en ortonormal $B = \{\frac{(-2\,0\,1)}{\sqrt{5}}(0\,1\,0)\ \frac{1}{\sqrt{10}}(1\,0\,2)\}$

Por Silvester los determinantes son positivos por lo que es definida positiva y simétrica $\Rightarrow$ es un producto escalar y la base ortonormal sería, ya que al cambiar a ser una forma cuadrática, por tanto haría falta cambiarlos

$$R = \{p; \beta\}$$

$$\left(\frac{-c_i}{\alpha - 1}\right) \Rightarrow \text{para } \theta(p)$$

c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación afín cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 6/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2/5 & 0 & 9/5 \end{array}\right).$$

Demostrar que f es una dilatación y calcular su base, dirección y razón.

Dilatación: $h(x) = p(x) + \lambda \overrightarrow{p(x)x} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ tomando la base $B = \{(-2\,0\,1)(0\,1\,0)(1\,0\,2)\}$

obtenemos $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

su base $\vec{M} = (-3\,0\,-1) + L\{(-2\,0\,1)(0\,1\,0)\}$ con

dirección $\vec{D} = L\{(1\,0\,2)\}$

$Fix(f) = \{x_1 + 2x_3 = -5 \Rightarrow p = (-3\,0\,-1)$

con la proyección asociada:

$$M(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M(f) = M(p) + 2(I - M(p)) \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Otra (mejor) forma de demostrar que f es una dilatación es ver que $\ker(\vec{f} - Id) = Fix(\vec{f})$ es un hiperplano y a partir de ahí, ver que $\overrightarrow{pf(p)} \notin Fix(\vec{f})$, pues si lo hace es una dilatación, si no, es una transvección:

Tenemos que $\ker(\vec{f} - Id) = L\{(-2\,0\,1)\,(0\,1\,0)\}$

$\Rightarrow f(000) = (102) \Rightarrow \overrightarrow{pf(p)} = (1\,0\,2) \notin \ker(\vec{f} - Id) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se trata de una dilatación

d) Dar la matriz respecto de la base canónica de la simetría ortogonal, S, respecto del plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ en el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$.

$$\pi = z = 0 = (1\,1\,0) + L\{\underbrace{(1\,0\,0)}_{v_1}\underbrace{(0\,1\,0)}_{v_2}\}$$

$$\{v_1\}^c \cap \{v_2\}^c = \left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. = L\{(1\,0\,-3)\}$$

$\Rightarrow$ Tomando la base $B = \{(1\,0\,0)(0\,1\,0)(1\,0\,-3)\}$

$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad C_{B_3B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$M(S)_{B_3B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e) En el espacio afín euclídeo correspondiente, es decir con el producto escalar F, definir una isometría con puntos fijos $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{g} = S$ y determinar todos los vectores $\vec{u} \in \vec{\mathbb{R}}^3$ tales que $\tau_{\vec{u}} \circ g$ sea una simetría con deslizamiento.

Sea $R = \{(0\,0\,0); (1\,0\,0)(0\,1\,0)(1\,0\,-3)\}$

$$\Rightarrow M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Fix(g) = \{x_3 = 0\}$$

$\vec{m} = x_3 = 0$ $\quad m$ $\quad x_3 = 5$, $x_2 = 4$ $\quad f(0\,0\,0)s$

(1 0 -3)

De las posibles posiciones relativos de $\vec{u}$ respecto π, es necesario que sea paralelo, pues si fuera perpendicular, en lugar de ser una simetría con desplazamiento, sería una mera simetría con π desplazado. Por tanto $\vec{u} \in \vec{\pi} \Leftrightarrow \vec{u} \in L\{(1\,0\,0)(0\,1\,0)\}$

$\hookrightarrow$ mejor dicho $\vec{u} \notin L\{(1\,0\,-3)\}$

1. Determinar razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i. Si una matriz simétrica real tiene traza nula entonces no es congruente a la matriz identidad.

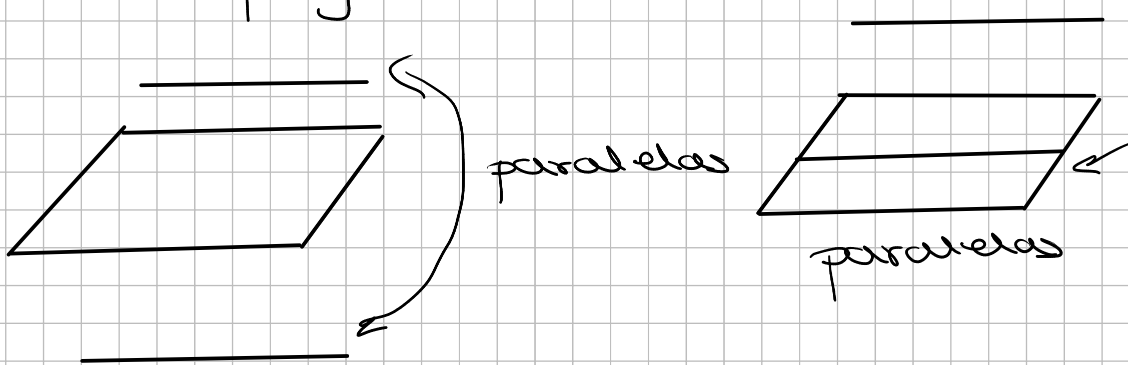
ii. Si el polinomio característico de una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tiene m raíces -contadas con su multiplicidad-, entonces existe un producto escalar en $\mathbb{R}^m$ que hace que T sea autoadjunta.

iii. Si f es una aplicación afín, entonces f transforma cada recta r en una recta paralela a r si y solamente si f es una homotecia o una traslación.

i) Verdadero, por el Teorema espectral existirá una base ortonormal de vectores, dando lugar a la matriz identidad, no obstante por la ley de inercia, ambas han de tener la misma signatura, lo que no ocurre.

ii) Falso, sólo si es simétrica

iii) Falso, las simetrías como contraejemplo, o las proyecciones



2. En $\mathbb{R}^m$ consideramos un producto escalar $<,>$ y una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Definimos $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por $F(u,v) =< T(u), v >$.

a) Demostrar que F es una forma bilineal simétrica si y solamente si T es autoadjunta.

b) Dada una base B de $\mathbb{R}^m$, calcular la matriz $M(F)_B$ a partir de las matrices $M(<,>)_B$ y $M(T)_{BB}$.

a) $\Rightarrow$) F - forma bilineal simétrica $\Rightarrow$
$F(u,v) = F(v,u) \Rightarrow$
$\Rightarrow <T(u), v> = <T(v), u>$ y esto ocurre sólo si T es autoadjunta

$\Leftarrow$) si T es autoadjunta $\Rightarrow$
$\forall\, v, w \in V \quad <T(v), w> = <T(w), v> \Rightarrow$
$\Rightarrow$ por definición de F esto es igual a $F(v,w) = F(w,v)$ y esta igualdad sólo se cumple si F es una forma bilineal simétrica

Para ser riguroso, faltaría demostrar que es bilineal como tal

b) $F(u,v) = u \cdot m(T) \cdot m(<>) \cdot v \Rightarrow$
$\Rightarrow M(F) = m(T) \cdot m(<>)$ ✓

2.- **1.** En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f((0,0,0)) = (0,1,0)$, $f((1,0,0)) = (0,0,1)$, $f((0,1,0)) = (0,0,0)$ y $f((0,0,1)) = (1,0,0)$.

a) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular $Fix(f)$. Estudiar si $\vec{f}$ es diagonalizable.

b) Definir un producto escalar F en $\vec{\mathbb{R}^3}$, dando su matriz respecto de la base canónica, para que f sea una isometría en el espacio afín euclídeo correspondiente.

d) Dar un sistema de referencia euclídeo respecto del cual la matriz de f sea la matriz reducida. Determinar qué movimiento es f con esta estructura afín euclídea. Dar un vector $\vec{u}$ tal que $\tau_{\vec{u}} \circ f$ sea un movimiento helicoidal.

a)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Fix(f) = L\{(1 -1 1)\} + (0 \ 1/2 \ 0)$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-1-\lambda) - (-1-\lambda) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$\ker(f - Id) = L\{(1 -1 1)\}$$

$$\ker(f + Id) = L\{(1 \ 0 -1)(0 1 0)\}$$

b) f es una isometría $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es afín} \\ \vec{f} \text{ es ortogonal} \end{cases}$

Para la base $B = (1 -1 1)(1 0 -1)(0 1 0)$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \pi$$

~~$\Rightarrow$ f es una rotación o simetría axial $\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow$ es una isometría para el producto escalar usual.~~ ↳ ¿Esto es verdad?

2.- **1.** En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f((0,0,0)) = (0,1,0)$, $f((1,0,0)) = (0,0,1)$, $f((0,1,0)) = (0,0,0)$ y $f((0,0,1)) = (1,0,0)$.

a) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular $Fix(f)$. Estudiar si $\vec{f}$ es diagonalizable.

b) Definir un producto escalar F en $\vec{\mathbb{R}^3}$, dando su matriz respecto de la base canónica, para que f sea una isometría en el espacio afín euclídeo correspondiente.

d) Dar un sistema de referencia euclídeo respecto del cual la matriz de f sea la matriz reducida. Determinar qué movimiento es f con esta estructura afín euclídea. Dar un vector $\vec{u}$ tal que $\tau_{\vec{u}} \circ f$ sea un movimiento helicoidal.

b) $B = (1\,{-1}\,1)(1\,0\,{-1})(0\,1\,0) \Rightarrow M\langle\,\rangle_B = Id \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) f es un giro respecto a la recta
$r = (0\,\tfrac{1}{2}\,0) + L\{(1\,{-1}\,1)\}$

Sea $R = \{(0\,\tfrac{1}{2}\,0), (1\,{-1}\,1)(1\,0\,{-1})(0\,1\,0)\}$

para que sea un movimiento helicoidal tomaremos un vector perpendicular a la recta, por ejemplo $\vec{v} = (1\,{-1}\,1) \Rightarrow$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 1/2 & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

2p. **2.** Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\beta \in \mathbb{R}$, tales queta

$$M(T_\beta)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

i) Determinar, según los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T_β y bases B_β tales que $M(T_\beta)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$.

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_β y los valores de β para los que el polinomio $q(x) = (x-1)^2(x-3)x$ anula a T_β.

i) $$\begin{vmatrix} \beta-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\beta-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta-\lambda)^2 \cdot \left((\lambda^2-6\lambda+8) - (-1) \right) =$$

$$= (\beta-\lambda)^2 (\lambda-3)^2$$

si $\beta = 3$ $\quad (\lambda-3)^4$

$\ker(T-3Id) = \{ x_2 = x_3 \} = L\{(1000)(0110)(0001)\}$

$\ker(T-3Id)^2 = L\{(1000)(0100)(0010)(0001)\}$

$\{\bar{0}\} \subseteq \ker(T-3Id) \subseteq \ker(T-3Id)^2$

$B = \{ e_1, (T-3Id)(e_2), e_2, e_4 \} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(J) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2p. **2.** Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\beta \in \mathbb{R}$, tales queta

$$M(T_\beta)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T_β y bases B_β tales que $M(T_\beta)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$.

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_β y los valores de β para los que el polinomio $q(x) = (x-1)^2(x-3)x$ anula a T_β.

$\beta \neq 3$ $\quad P_T(\lambda) = (\lambda-\beta)^2(\lambda-3)^2$

$$\ker(T-3Id) = L\{(0\,1\,1\,0)\}$$
$$\ker(T-3Id)^2 = L\{(0\,1\,0\,0)\,(0\,0\,1\,0)\}$$
$$\ker(T-\beta Id) = L\{(1\,0\,0\,0)\,(0\,0\,0\,1)\}$$

Tomemos la base

$$B = \{(T-3Id)(e_2),\ e_2,\ e_1,\ e_4\}$$

$$\Rightarrow M(J) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

ii) Los posibles P_M son $\begin{cases} P_M^1(x) = (x-3)^2 \\ P_M^2(x) = \cancel{(x-\beta)}(x-3)^2 \end{cases}$

$$q(T) = 0 \iff q(x) \mid P_M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2(x-3)(x)}{(x-\beta)(x-3)^2} \Rightarrow \text{para ningún valor de } \beta,\ q(x) \text{ anula a } T$$

2.5 **3.** **a)** Diagonalizar la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(F)_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deducir que es un producto escalar y dar una base ortonormal.

b) Consideremos el plano $\pi = L(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$. Calcular la matriz, en la base canónica, de la simetría respecto de π, asociada a la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus L(\{(0,0,1)\})$ y demostrar, **de dos maneras diferentes**, que es una aplicación ortogonal y autoadjunta en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ Tomemos $u_1 = \{e_1\}$

$\{e_1^c\} = \{x_1 = 0\} = L\{(010)(001)\}$

Tomemos $u_2 = \{e_3\}$

$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(011)\}$

Tomemos $u_3 = (013) \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \{(100)\ (\underset{\sqrt{3}}{010})\ (\underset{\sqrt{2}}{011})\} \Rightarrow m(g) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

es definida positiva y es una forma bilineal simétrica $\Rightarrow$ ~~es~~ un producto escalar

2.5 **3. a)** Diagonalizar la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(F)_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deducir que es un producto escalar y dar una base ortonormal.

b) Consideremos el plano $\pi = L(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$. Calcular la matriz, en la base canónica, de la simetría respecto de π, asociada a la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus L(\{(0,0,1)\})$ y demostrar, **de dos maneras diferentes**, que es una aplicación ortogonal y autoadjunta en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$.

$\pi = L\{(100)(011)\}$ $\vec{D} = (001)$

$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ para la base B

$B = \{(100)(010)(011)\} =$

$B = \{(100)(011)(001)\} \Rightarrow$ es una base ortogonal para F, si tomamos $B = \{(100)\ 1/\sqrt{2}(011)\ 1/\sqrt{3}(010)\}$ es además, ortonormal

S es ortogonal $\Leftrightarrow M(S)^t \cdot M_{\langle\rangle} \cdot M(S) = M_{\langle\rangle}$

$\Rightarrow M(S)^t = M(S)$ ya que es simétrica y al ser simétrica $M(S) \cdot M(S) = Id$ al igual que el producto escalar

Además, como $M(S) \cdot M(S) = Id \Rightarrow$ es ortogonal ya que si $A^t = A^{-1} \Leftrightarrow T$ es ortogonal

$\Rightarrow S$ es autoadjunta ya que es una matriz simétrica con una base ortogonal, en concreto ortonormal

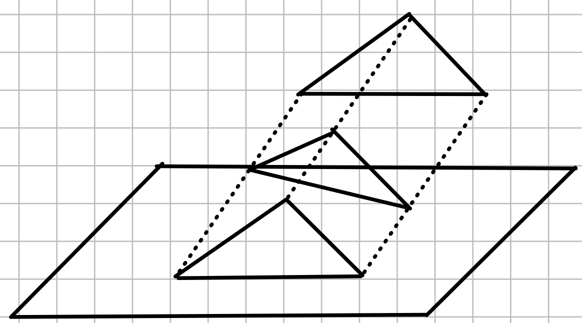
1. Definir rigurosamente transvecciones y dilataciones en el espacio afín $\mathbf{R}^3$.

Dilatación: Sea $p: X^- \to X^-$ proyección sobre un plano, se define las dilataciones como $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x \to h(x) = p(x) + \lambda \overrightarrow{p(x)x}$$

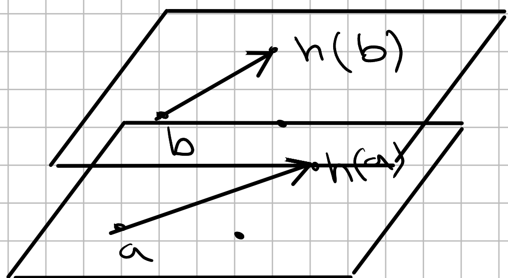
para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \neq 0$ ya que sino, sería la propia proyección.

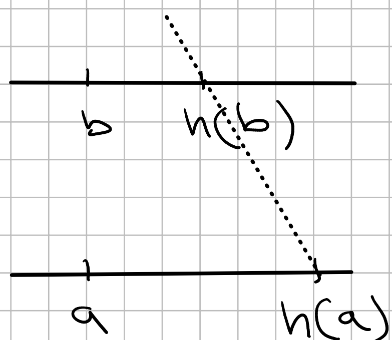
La proyección se realiza sobre el plano m con dirección $\vec{D}$ tales que $\vec{m} \oplus \vec{D} = \vec{\mathbb{R}}^3$



Transvección: Sea $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ - aplicación afín no constante, y $\vec{v} \in \vec{X} \setminus \{\vec{0}\}$ y tal que $g(\vec{v}) = \vec{0}$ se definen las transvecciones como

$$h: X^- \to X^-$$
$$x \to h(x) = x + g(x)\vec{v}$$





$\Rightarrow$ según los valores de $g(x) = \lambda$ se definen las transvecciones como traslaciones de $\lambda\vec{v}$-vector en cada m_λ

Discutir razonadamente si son ciertas o no la siguientes afirmaciones:

2. Consideremos una aplicación afín $f : X \to X$.

i) Si $Fix(f) \neq \emptyset$ entonces $1 \in \sigma(\vec{f})$.

ii) Si $1 \in \sigma(\vec{f})$ entonces $Fix(f) \neq \emptyset$.

Falso

i) Tómese de contraejemplo una rotación en $\mathbb{R}^2$ de ángulo de $\pi/4$ radianes

$$M(\vartheta) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \lambda & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\left(\sqrt{2}/2 - \lambda\right)^2 + 1/2 = 1/2 + \lambda^2 - \lambda\sqrt{2} + 1/2 =$$

$$= \overset{a}{\lambda^2} - \overset{b}{\lambda\sqrt{2}} + \overset{c}{1} \Rightarrow \text{No tiene autovalores,}$$

por lo que $1 \notin \sigma(\vec{\vartheta})$

ii) Falso, tómese de contraejemplo una transvección

3 Sea $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

a) Si $A^2 = 0$ pero $A \neq 0$, entonces no existe $M \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con $M^2 = A$.
b) Si $A^2 \neq 0$ pero $A^3 = 0$, entonces no existe $M \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con $M^2 = A$.

a) $A^2 = 0$ pero $A \neq 0 \Rightarrow \nexists\, M : M^2 = A$

Supongamos que sí, que $\exists\, M : M^2 = A \Rightarrow$

$\Rightarrow M^4 = A^2 = 0 \Leftrightarrow M^2 \cdot M^2 = A \cdot A = 0$

$M^2 \cdot M^2 \cdot A^{-1} = A \cdot \cancel{(A \cdot A^{-1})}$;

$M^2 \cdot M^2 \cdot A^{-1} = A \neq 0$

$\hookrightarrow$ pero esto no puede darse por hipótesis

si $A^2 = 0 \Rightarrow P_m(\lambda) = \lambda^2$,

$M^2 = A \Rightarrow M^4 = A^2 = 0 \Rightarrow P_m(\lambda) = \lambda^4$ ¿?¿?

b) $A^2 \neq 0$ $A^3 = 0 \Rightarrow \nexists\, M : M^2 = A$

$A^3 = 0 \Rightarrow P_m(\lambda) = \lambda^3$

$M^2 = A \Rightarrow M^6 = A^3 = 0 \Rightarrow P_m(\lambda) = \lambda^6$

$M^2 \cdot M^2 \neq 0$ pero $gr(P_m(\lambda)) = 6 \geq 4$ ¡¡¡

$\Rightarrow$ Esta afirmación es falsa

4. Las dimensiones del núcleo de una aplicación lineal $T : V \to V'$ y del de su aplicación lineal dual $T^* : V'^* \to V^*$ siempre coinciden.

$\ker(T^*) = \omega(\mathrm{Im}(T))$

$\subseteq$) Sea $h \in \ker(T^*) \Rightarrow T^*(h)(v) = (h \circ T)(v) = 0$

$\supseteq$) Sea $g \in \omega(\mathrm{Im}(T)) \Rightarrow g(T(v)) = 0 \ \forall\, v \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow (g \circ T)(v) = T^*(g)(v) = 0 \ \forall\, v \in V$

1. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular, T^t, la aplicación adjunta de T. Demostrar que $F = T^t \circ T$ es un isomorfismo autoadjunto y demostrar, sin calcularlos, que todos sus autovalores son positivos.

b) Sea $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal tal que $M(G)_{B_3} = A^tA$. Deducir usando **a)** que G es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y calcular una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$.

c) Consideremos el isomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$, definido por $\phi(u) = G(u, \cdot)$ para cada $u \in \mathbb{R}^3$. Dadas la base $B = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,-,1,-1)\}$ y su base dual B^*, encontrar una base B_0 tal que $\phi(B_0) = B^*$.

a) Una aplicación adjunta es aquella que

$\langle T(u), w \rangle = \langle J(w), u \rangle \Rightarrow$ al estar la matriz respecto a una base ortonormal, se tiene que $M(T^t) = M(T)^t$

$$M(T^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(F)$ es simétrica $\Rightarrow$ es autoadjunta

$|M(F)| = 3 - (1+1) = 1 \geq 0 \Rightarrow$

por el criterio de Silvester la matriz tiene signatura positiva.

1. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular, T^t, la aplicación adjunta de T. Demostrar que $F = T^t \circ T$ es un isomorfismo autoadjunto y demostrar, sin calcularlos, que todos sus autovalores son positivos.

b) Sea $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal tal que $M(G)_{B_3} = A^t A$. Deducir usando **a)** que G es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y calcular una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$.

c) Consideremos el isomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$, definido por $\phi(u) = G(u,\cdot)$ para cada $u \in \mathbb{R}^3$. Dadas la base $B = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,-1,-1)\}$ y su base dual B^*, encontrar una base B_0 tal que $\phi(B_0) = B^*$.

b)

$$M(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser definida positiva y simétrica se trata de un producto escalar

$3x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$

$3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1$

$u_1 = (010)$ y

$\{u_1\}^c = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \{x + y = 0 = L\{(001), (1-10)\}$

Tomamos $u_2 = (001)$

$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} x+y=0;\ x=-y \\ x+z=0;\ x=-z \end{cases} = L\{(1-1-1)$

$B = \{u_1\ u_2\ u_3\} \Rightarrow M(G) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

c) $B_0 = \{e_1\ e_2\ e_3\}$, la propia base B^1

$\phi(e_1) = G(e_1,\cdot) \Rightarrow G(e_1, u_1) = 1 \Leftrightarrow e_1 = u_1$

Idem para e_2

2. i) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$ del Problema 1, determinar -dando su matriz respecto de la base canónica- la simetría ortogonal, σ, respecto del plano $\vec{\pi} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.

ii) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ determinar la simetría afín $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Fix(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$ y $\vec{S} = \sigma$. Dar su matriz respecto de la referencia canónica.

iii) Si $\vec{u} = (1, 0, 1)$, calcular la matriz de $f = \tau_{\vec{u}} \circ S$ respecto de algún sistema de referencia y clasificar f. (Obsérvese que tanto f como S son isometrías del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ correspondiente).

i)

$$\vec{\pi} = \{x_1 + x_2 = 0\} = L\{(1\,-1\,0)(0\,0\,1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\pi}^{\perp} = L\{(0\,1\,0)\}$$

$\Rightarrow$ Tomando la base $B = \{(1\,-1\,0)(0\,0\,1)\,(0\,1\,0)\}$

$$m(s) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser una base ortogonales respecto G, se tiene que

$$C_{B_3B}{}^t = C_{BB_3}$$

$$\Rightarrow m(S)_{B_3B_3} = C_{BB_3} \cdot m(s)_{BB} \circ C_{B_3B} =$$

$$= \cancel{C_{BB_3} \cdot m(s)_{BB} \cdot C_{BB_3}{}^t}$$

??? esto ocurre?? porque en G ambas son ortogonales pero no en $\langle\,\rangle$

$$C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_3B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. i) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$ del Problema 1, determinar -dando su matriz respecto de la base canónica- la simetría ortogonal, σ, respecto del plano $\vec{\pi} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.

ii) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ determinar la simetría afín $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Fix(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$ y $\vec{S} = \sigma$. Dar su matriz respecto de la referencia canónica.

iii) Si $\vec{u} = (1, 0, 1)$, calcular la matriz de $f = \tau_{\vec{u}} \circ S$ respecto de algún sistema de referencia y clasificar f. (Obsérvese que tanto f como S son isometrías del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ correspondiente).

ii) $B = \{\underbrace{(1\,-1\,0)\,(0\,0\,1)}_{\vec{\pi}}\,\underbrace{(0\,1\,0)}_{\vec{\pi}^\perp}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Fix(S) = x_1 + x_2 = 1$

$\overrightarrow{Fix(S)} = x_1 + x_2 = 0 = L\{(1\,-1\,0)\,(0\,0\,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = \underbrace{(1\,-1\,1)}_{\omega} + \underbrace{(0\,1\,0)}_{\vec{\omega}^\perp}$

$S(000) = S\left((100) + (\overrightarrow{-1\,1\,1}) - (\overrightarrow{001}) - (\overrightarrow{010})\right) = (020)$ ¿¿??

↳ porqué y en qué se basa

Tomamos $R = \{(100);\ \underbrace{(1\,-1\,1)}_{\|\vec{v}\|}\,(001)\,(010)\}$

iii)

$$m(T_{\vec{\omega}^\perp}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad m(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$m(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix}}$$

3. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\beta \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\beta)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

$-3x_2 + 1x_3 = 0$

$-3x_2 + x_4 = 0$

$L\{(1000)\}$

i) Determinar, según los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T_β y bases B_β tales que $M(T_\beta)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$.

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_β y los valores de β para los que el polinomio $q(X) = (X-1)^3(X-3)X$ anula a T_β.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\beta-\lambda)^2$$

si $\beta = 1 \Rightarrow (1-\lambda)^4 \Rightarrow P_m(\lambda) = (1-\lambda)^3$

$\ker(T-Id) = L\{(1000)(0133)\}$

$\ker(T-Id)^2 = L\{(1000)\boxed{(0010)}(0103)\}$

$\ker(T-Id)^3 = \mathbb{R}^4 = L\{(1000)(0100)(0010)\boxed{(0001)}\}$

$$\{\bar{0}\} \subseteq \overset{2}{\ker(T-Id)} \subseteq \overset{3}{\ker(T-Id)^2} \subseteq \overset{4}{\ker(T-Id)^3}$$

$(T-Id)^2(e_4) \leftarrow (T-Id)(e_4) \leftarrow e_4$

$(T-Id)(e_3) \leftarrow e_3$

Sea la base $B = \{e_1, (T-Id)^2(e_4), (T-Id)(e_4), e_4\}$

$$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

~~3~~. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\beta \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\beta)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

$-3x_2 + 1x_3 = 0$

$-3x_2 + x_4 = 0$

$L\{(1000)\}$

~~i~~) Determinar, según los valores de β, la forma canónica de Jordan, J_β, de T_β y bases B_β tales que $M(T_\beta)_{B_\beta,B_\beta} = J_\beta$.

~~ii~~) Determinar el polinomio mínimo de T_β y los valores de β para los que el polinomio $q(X) = (X-1)^3(X-3)\underline{X}$ anula a T_β.

si $\beta \neq 1 \Rightarrow$

$\ker(T - Id) = L\{(1000)\}$ $\qquad P_m(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-\beta)$

$\ker(T - Id)^2 = L\{(1000)(0010)\}$

$\ker(T - \beta Id) = L\{\overset{v_1}{(1, 0, \beta-1, (\beta-1)^2)}$

$\overset{v_2}{(0, 1, 3, 3\beta)}\}$

Tomemos la base : $B = \{(T-Id)(e_3), e_3, v_1, v_2\}$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & \beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$? diagonaliza $\forall \beta \in \mathbb{R}$

ii) $(x-1)^3(x-3)$ $\qquad P_m^1(\lambda) = (1-\lambda)^3$

$P_m^2(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-\beta)$

$q(x)$ anula a $T \iff P_m(\lambda) \mid q(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^{\cancel{3}}(x-3)(x)}{\cancel{(1-x)}^2(x-\beta)} = \frac{(x-1)(x-3)(x)}{(x-\beta)} \Rightarrow \beta \in \{1, 3, 0\}$$

1. Dos endomorfismos con los mismos autovalores, el mismo núcleo y la misma imagen, tienen matrices semejantes.

~~**2.** Existen endomorfismos ortogonales con polinomio mínimo $(1-x)$~~^{2}.

3. Existe un endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^3$ que tiene a $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$ como autovectores.

4. Si dos matrices simétricas reales son semejantes, entonces son congruentes.

5. Si dos matrices simétricas reales son congruentes, entonces son semejantes.

1) Falso, tómese de contraejemplo la identidad y una simetría, la simetría al ser ortogonal es un isomorfismo, por tanto tienen el mismo núcleo e imagen pero no existen matrices semejantes

2) F es ortogonal $\Leftrightarrow$ conserva el producto escalar $\Leftrightarrow A^t \cdot G \cdot A = G \Rightarrow T^t = T^{-1} \Rightarrow$ todas las aplicaciones ortogonales tienen como autovalores el $\pm 1 \Rightarrow \|T(v_i)\| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ no es posible

3) Autoadjunto $\Rightarrow \langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A^t = A$ (i.e. es simétrica)
Verdadero, podemos tomar una simetría de ejemplo, respecto al plano formado por esos 2 vectores y dirección, el ortogonal: $(-1\ 0\ 1)$

4) $C^{-1} \cdot A \cdot C = B \Rightarrow \exists D : D^t \cdot A \cdot D = B$
Falso, tómese de ejemplo los cambios ??? de base usuales, sólo cuando es de una base ortogonal a otra se cumple, si no, no

5) Falso, tómese de contraejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\gamma)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}. = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

i) Determinar, según los valores de γ, la forma canónica de Jordan, J_γ, de T_γ y bases B_γ tales que $M(T_\gamma)_{B_\gamma,B_\gamma} = J_\gamma$. (1.5)

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_γ y los valores de γ para los que el polinomio $q(x) = (x-1)^2(x+3)(x-2)^2$ anula a T_γ. (0.5)

$P_T(\lambda) = (2-\lambda)^2(\gamma-\lambda)^2 =$

si $\gamma = 2$,

$\ker(T - 2Id) = \left\{ \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix} \right. = L\{(0100)(0001)\}$

$\ker(T-2Id)^2 = \{ x_1 = 0 \} = L\{(0100)(0010)(0001)\}$

$\ker(T-2Id)^3 = \mathbb{R}^4 = L\{(1000)(0100)(0010)(0001)\}$

$\{\bar{0}\} \subseteq \ker(T-2Id) \subset \ker(T-2Id)^2 \subset \ker(T-2Id)^3$

$(T-2Id)^2(e_1) \leftarrow (T-2Id)(e_1) \leftarrow e_1$

e_2

Tomemos la base $B = \{ e_2, (T-2Id)^2(e_1), (T-2Id)(e_1), e_1 \}$

$$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\gamma)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de γ, la forma canónica de Jordan, J_γ, de T_γ y bases B_γ tales que $M(T_\gamma)_{B_\gamma,B_\gamma} = J_\gamma$. (1.5)

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_γ y los valores de γ para los que el polinomio $q(x) = (x-1)^2(x+3)(x-2)^2$ anula a T_γ. (0.5)

i) si $\gamma \neq 2$

$$\ker(T-2) = \begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = (2-\gamma)x_4 \end{cases} = L\{(0\ 1\ (2-\gamma)\ 1)\}$$

$$\ker(T-2)^2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - (\gamma-2)x_4 = 0 \\ x_1 = -(\gamma-2)^2 x_4 \end{cases} ;$$

$$= L\{(-(\gamma-2)^2, 0, (\gamma-2)(\gamma-1), 1)\overset{v_1}{(0\ 1\ -1\ 0)}\}$$

$$\ker(T-\gamma) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} = L\{(0100)(0001)\}$$

Tomamos la base

$$B = \{(T-2)(v_1), v_1, e_2, e_4\} \quad M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

ii) $P_m^2(x) = (x-2)^2(x-\gamma)$

$P_m^1(x) = (x-2)^3$

$q(T) = 0 \Leftrightarrow \gamma \in \{1, -3\}$

$$\frac{(x-1)^2(x+3)\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}(x-\gamma)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-\gamma)}$$

2. Se considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$$

$$= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_1 + 3x_2^2 - x_2x_3 - x_3$$

~~a)~~ Diagonalizar F y encontrar una base B_0 tal que $M(F)_{B_0}$ sea diagonal. Deducir que F es un producto escalar y dar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$. (0.75)

~~b)~~ En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ calcular el ortogonal del plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$ y la distancia del vector $(0, 1, 1)$ a π. (0.75)

a) $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 2yz$

$$M(F) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{es simétrica} \Rightarrow$$

$F_2 = -F_2$

$C_2 = -C_2$

$F_2 = F_1 + F_2$

$C_2 = C_1 + C_2$

$F_1 = F_1 + F_3$

$C_1 = C_1 + C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \underset{C_{BB_3}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad B = \{(1 0 1)\ \underbrace{(1 -1 0)\ (0 0 1)}\}$$

b) $\pi = \{x_1 + x_2 = 0\} = L\{(1 -1 0)(0 0 1)\}$

$\pi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : F(x, y) = 0\ \forall\ y \in \pi\} = L\{(1 0 1)\}$

Distancia de vector $(0 1 1) \Rightarrow (1 \underbrace{-1 0}_{})_B$

$(0 -1 0)_B \in \pi$

$d(\pi, (0 1 1)) = \sqrt{F((0 -1 0), (1 -1 0))}$

Distancia

$$(\overrightarrow{0 -1 0}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 -1 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{1}$$

c) Demostrar que los autovalores de $M(F)_{B_3}$ son positivos y que existe un plano cuyas rectas ortogonales, respecto de F y respecto del producto escalar usual, coincidan. (1)

d) Demostrar que la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

es una aplicación ortogonal y autoadjunta en el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ y no con el producto escalar usual. Clasificarla obteniendo una base ortonormal respecto de la cual la matriz de T sea su matriz reducida. (1)

c) Es simétrica $\Rightarrow$ es autoadjunta y por el teorema espectral existe una base ortonormal tal que la hace diagonal $\Rightarrow$ Además como se trata de un producto escalar, es definida positiva $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ los autovalores han de serlo

$$M(F) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \{ \underset{\pi^\perp}{(1\,0\,1)}\ \underbrace{(1\,{-1}\,0)\ (0\,0\,1)}_{\pi} \}$$

$u_1\ u_2\}$ $\to$ ortogonales para <> y para F del Espectral pues son autovectores $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ son ortogonales para F

$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \langle u_3 \rangle$ $\to$ ortogonal para F

c) Demostrar que los autovalores de $M(F)_{B_3}$ son positivos y que existe un plano cuyas rectas ortogonales, respecto de F y respecto del producto escalar usual, coincidan. (1)

d) Demostrar que la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

es una aplicación ortogonal y autoadjunta en el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ y no con el producto escalar usual. Clasificarla obteniendo una base ortonormal respecto de la cual la matriz de T sea su matriz reducida. (1)

porqué aquí no funciona? ¿¿

d) F es ortogonal $\iff M(F)^t \circ G \cdot M(F) = G \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \underset{C_{BB_3}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{C_{BB_3}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad C_{B_3B} =$$

$$M(T)_{BB} = C_{B_3B} \cdot \cancel{M(T)}_{B_3B_3} \cdot \cancel{C}_{BB_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar F del ejercicio anterior, clasificar -dando un sistema de referencia cartesiano euclídeo y su matriz reducida- la isometría f cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

que?? ¿D?

0. Discutir razonadamente si son ciertas o no la siguientes afirmaciones:

i) Si una matriz $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ es tal que $A \neq 0$ y $A^2 = 0$ entonces no existe $M \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ con $M^2 = A$.

ii) Si una matriz $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ es tal que $A^2 \neq 0$ y $A^3 = 0$ entonces no existe $M \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ con $M^2 = A$.

iii) Una matriz $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ es semejante a una matriz simétrica si y solamente si su polinomimo característico tiene m raíces contadas con su multiplicidad.

i) $A \neq 0 \quad A^2 = 0 \Rightarrow \nexists\, M \in M_{4\times4}(\mathbb{R}) : A = M^2$

Demostración: Supongamos que es falso y tomemos de ejemplo los núcleos en la diagonalización con $M = (T - \lambda Id)$

si $M^4 = 0 \Rightarrow \partial(\ker(M^4)) = 1$, $\dim(M)$ será como mínimo $1 \Rightarrow$ obligatoriamente se tiene que cumplir que $\partial(\ker(M^2)) \in (1,4)$ por hipótesis eso obliga a $\partial(\ker(M^3))$ ser 3

$$\{\bar{0}\} \subset \underset{1}{\ker(M)} \subset \underset{1}{\ker(M^2)} \subset \underset{3}{\ker(M^3)} \subset \underset{4}{\ker(M^4)}$$

y por tanto si es posible, así que es falso

ii) $A^2 \neq 0$ con $A^3 = 0 \Rightarrow \nexists\, M : A = M^2$

Tomemos el ejemplo anterior

$$\{0\} \subset \ker(M) \subset \ker(A) \subset \ker(M^3) \subset \overset{4}{\ker(M^4)} \subset \ker(M^5)$$

En este caso $A^2 \neq 0 \sim M^4 \neq 0$ lo cual quiere decir que $\dim(\ker(M^4)) < 4$ pero esto no puede ocurrir pues contradice la hipótesis de la diagonalización por tanto, es verdadera.

iii) Al tener m raíces es diagonal y por tanto simétrica

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\alpha)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

i) Determinar, según los valores de α, la forma canónica de Jordan, J_α, de T_α. Calcular el polinomio mínimo de T_α, m_{T_α}, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y encontrar bases B_α tales que $M(T_\alpha)_{B_\alpha,B_\alpha} = J_\alpha$ **sólo** para los valores α para los que $m_{T_\alpha}(x) = (x-1)^3(x+1)$.

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^3(1+\lambda)$$

$$\ker(T+Id) = \begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ 2x_2 + (\alpha-1)x_3 = 0 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$$= L\{(\alpha(\alpha-1),\ 2(1-\alpha),\ 4,\ -4)\}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = -1 \Rightarrow \dim(\ker(T-Id)) = 2 \\ \alpha \neq 0 \text{ y } \alpha \neq -1 \Rightarrow \dim(\ker(T-Id)) = 1 \end{cases}$$

1) si $\alpha = 0$

$$\ker(T-Id) = \begin{cases} x_3 = x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} = L\{(1000)(0100)\}$$

$$\ker(T-Id)^2 = \{ x_3 = x_4 = L\{(1000)(0100)(0011)\}$$

$$\ker(T+Id) = \begin{cases} x_3 = -x_4 \\ -2x_2 = +x_4 \\ x_1 = 0 \end{cases} = L\{(0\ 1\ 2\ -2)\}$$

$$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) si $\alpha = -1 \Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\ker(T - Id) = \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_4 \end{cases} = L\{(1000)\,(0211)\}$

$\ker(T - Id)^2 = \{ x_3 = x_4 = L\{(1000)\,(0100)\,(0011)\}$

$\ker(T + Id) = \begin{cases} x_3 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ 2x_1 = x_2 \end{cases} = L\{(122{-2})\}$

$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ $M(T) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\ker(T - Id) = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} = L\{(1000)\}$

$\ker(T - Id)^2 = \{ x_3 = x_4 = 0 = L\{(1000)\,(0100)\}$

$\ker(T - Id)^3 = \{ x_3 = x_4 = L\{(1000)\,(0100)\,(0011)\}$

$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\alpha)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de α, la forma canónica de Jordan, J_α, de T_α. Calcular el polinomio mínimo de T_α, m_{T_α}, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y encontrar bases B_α tales que $M(T_\alpha)_{B_\alpha,B_\alpha} = J_\alpha$ **sólo** para los valores α para los que $m_{T_\alpha}(x) = (x-1)^3(x+1)$.

$$\begin{cases} \alpha = 0 & (x+1)(x-1)^2 \\ \alpha = -1 & (x+1)(x-1)^2 \\ \alpha \neq 0 \;\; \alpha \neq -1 & (x-1)^3(x+1) \end{cases}$$

2. a) Diagonalizar la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(F)_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deducir que es un producto escalar y dar una base ortonormal.

Tomemos $u_1 = (100)$ $\quad Q(u_1) = 1$

$\{u_1\}^c = \{x_1 + x_2 = 0 = L\{(1-10)(001)\}$

$u_2 = (001)$ $\quad Q(u_2) = 2$

$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right. = L\{(1-10)\}$

$\Rightarrow$ Tomando la base $B = \{(100)(001)(1-10)\}$

$\Rightarrow M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ es simétrica y por el criterio de sylvester al ver que todos los autovalores son positivos, así como los determinantes de órdenes menores podemos deducir que es congruente a la identidad y por tanto un producto escalar

b) Dado el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Estudiar si T es autoadjunta u ortogonal, en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$. En caso de ser ortogonal, clasificarla.

$B = \{(1\,0\,0)(0\,0\,1)(1\,-1\,0)\}$

Tenemos que una aplicación es ortogonal $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} T \text{ es lineal} \\ \text{Transforma bases ortonormales en ortonormales} \end{cases} \sim$

$\sim \|T(v_i)\| = 1 \ \forall v_i \in B$

$T(v_1) = (0 \ 0 \ 1/\sqrt{2}) \Rightarrow 1 \quad \|T(v_1)\| = 1$ ✓

$\frac{1}{\sqrt{2}} T(v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2} \ 0 \ 0) \Rightarrow 1/2 \ \|T(v_2)\| = 2 \Rightarrow 1$ ✓

$\frac{1}{\sqrt{4}} T(v_3) = \frac{1}{\sqrt{4}}(1 \ -1 \ 0) \Rightarrow 1/4 \cdot \|T(v_3)\| = 4 \Rightarrow 1$ ✓

$\Rightarrow$ es ortogonal $\quad |M(f)| = 1 \Rightarrow$ es giro

$$M(T)_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ no es simétrica por lo que no es autoadjunta

$\Rightarrow$ no es simétrica por lo que no es adjunta

respecto la recta $r = L\{(1\,-1\,0)\}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle (1\,0\,0)(0\,0\,1/\sqrt{2}) \rangle}{\|1\,0\,0\| \ \|0\,0\,1/\sqrt{2}\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \pi/2 \text{ ó} \\ 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{\langle (0\,1\,0)(-\sqrt{2}\,0\,0) \rangle}{\| \ \| \ \| \ \|} = 0$$

3. Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(0,0,0) = (0,2,2)$, $f(1,0,0) = (3,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,9,6)$ y $f(0,0,1) = (0,4,7)$,

i) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica. Comprobar que $\vec{f}$ es diagonalizable.

ii) Calcular $Fix(f)$. Dado $p \in Fix(f)$, sea h la homotecia de centro p y razón $1/3$. Determinar qué aplicación afín es $g = h \circ f$.

iii) Estudiar qué tipo de aplicación afín es $\tau_{\vec{u}} \circ g$, siendo $\vec{u} = (0,1,1)$.

$$\vec{f}(e_1) = \overrightarrow{f(000)f(100)} = (300)-(022) = (3\,-2\,-2)$$
$$\vec{f}(e_2) = \overrightarrow{f(000)f(010)} = (096)-(022) = (074)$$
$$\vec{f}(e_3) = \overrightarrow{f(000)f(001)} = (047)-(022) = (025)$$

i)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_f(\lambda) = (3-\lambda)^2(9-\lambda)$$

$$\ker(\vec{f} - 3Id) = \{-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 = L\{(101)(210)\}$$

$$\ker(\vec{f} - 9Id) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(011)\}$$

$\Rightarrow$ es diagonalizable con la base

$$B = \{(101)(210)(011)\} \Rightarrow M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

3. Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(0,0,0) = (0,2,2)$, $f(1,0,0) = (3,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,9,6)$ y $f(0,0,1) = (0,4,7)$,

i) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica. Comprobar que $\vec{f}$ es diagonalizable.

ii) Calcular $Fix(f)$. Dado $p \in Fix(f)$, sea h la homotecia de centro p y razón $1/3$. Determinar qué aplicación afín es $g = h \circ f$.

iii) Estudiar qué tipo de aplicación afín es $\tau_{\vec{u}} \circ g$, siendo $\vec{u} = (0,1,1)$.

$$B = \{(1\,0\,1)(2\,1\,0)(0\,1\,1)\} \Rightarrow M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(h \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

iii) $\vec{v} = (0\,1\,1) \Rightarrow M(\tau_{\vec{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(g \circ \tau_{\vec{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se trata de una dilatación aún mayor pues $\vec{v} \in \vec{D}$ de la dilatación original

3. Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(0,0,0) = (0,2,2)$, $f(1,0,0) = (3,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,9,6)$ y $f(0,0,1) = (0,4,7)$,

i) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica. Comprobar que $\vec{f}$ es diagonalizable.

ii) Calcular $Fix(f)$. Dado $p \in Fix(f)$, sea h la homotecia de centro p y razón $1/3$. Determinar qué aplicación afín es $g = h \circ f$.

iii) Estudiar qué tipo de aplicación afín es $\tau_{\vec{u}} \circ g$, siendo $\vec{u} = (0,1,1)$.

ii)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Fix(f) = \{(0, -1/4, -1/4)\}$$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11/12 & -2/3 & 7/3 & 2/3 \\ 11/12 & -2/3 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 7/3 & 2/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \frac{1}{9} =$$

$$= 35 - (8) = \frac{27}{9} = 3$$

$\Rightarrow$ es giro o giro con traslación según los puntos fijos: tiene un plano de puntos fijos, por lo que es un ~~giro~~ $\Rightarrow$

$\cancel{11/12 \quad -2/3 \quad 4/3 \quad 2/3}$

$11/12 \quad -2/3 \quad 4/3 \quad 2/3$

$\Rightarrow$ g es una dilatación pues tiene un hiperplano de puntos fijos

1. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular, T^t, la aplicación adjunta de T. Demostrar que $F = T^t \circ T$ es un isomorfismo autoadjunto y que todos sus autovalores son positivos.

b) Sea $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal tal que $M(G)_{B_3} = A^t A$. Deducir usando **a)** que G es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y calcular una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$.

a) $M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M(T^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M(T) \circ M(T^t) = M(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ es simétrica

$\Rightarrow$ es autoadjunta $\qquad |M(F)| \neq 0$ y $rg(M(F)) = 3$

$\Rightarrow$ isomorfismo

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - ((1-\lambda)+(1-\lambda))$$

$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda) - 2\big) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = (1-\lambda)(2+\sqrt{3}-\lambda)(2-\sqrt{3}-\lambda)$$

$\Rightarrow$ todos sus autovalores son positivos

b) $A^t A = M(F^t) \circ M(F) \Rightarrow$ hemos demostrado antes que es simétrica y que sus autovalores son positivos $\Rightarrow$ por el criterio de sylvester es congruente a la identidad y por tanto es un producto escalar.

$$m(F) = \cancel{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Tomemos $u_1 = e_2$

$Q(u_1) = 1$

$$\{u_1\}^c = \{x_1 + x_2 = 0 = L\{(1\,-1\,0)(0\,0\,1)\}$$

Tomemos $u_2 = e_3$ $\qquad Q(u_2) = 1$

$$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} = L\{(1\,-1\,-1)\}$$

Tomemos $u_3 = (1\,-1\,-1)$ $\qquad Q(u_3) = 1$

Tomando la base $B = \{(0\,1\,0)\,(0\,0\,1)\,(1\,-1\,-1)\}$

Tenemos que $m(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

es simétrica y con signatura positiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ es producto escalar

$$\{u_1\}^c = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0 = L\{(\underbrace{-1\,1\,0}_{=\,u_2})(1\,0\,-1)\}$$

$$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} = L\{(\underbrace{1\,0\,-1}_{=\,u_3})\}$$

Para la base $B = \{(1\,0\,0)\,(-1\,1\,0)\,(1\,0\,-1)\}$

son todos ortonormales

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, con el producto escalar usual, se considera un isomorfismo $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Sea $A = M(T)_{B_m,B_m}$.

Demostrar que $F = T^t \circ T$ es un isomorfismo autoadjunto y que todos sus autovalores son positivos. Deducir que si $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la forma bilineal tal que $M(G)_{B_m} = A^t A$, entonces G es un producto escalar en $\mathbb{R}^m$. ¿Qué se puede decir si T no es un isomorfismo?

a) T isomorfismo $\Rightarrow \begin{cases} |M(T)| \neq 0 \text{ y} \\ |M(T)| \text{ es de rango máximo} \end{cases}$

$\Rightarrow M(F) = M(T^t) \cdot M(T) = M(T)^t \cdot M(T) \Rightarrow$
$\Rightarrow |M(F)| = |M(T)|^2 \neq 0 \Rightarrow$ isomorfismo

Además, como toda matriz por su traspuesta es simétrica se trata de un isomorfismo adjunto. Además si tuviere elementos negativos se anularían, tal como pasa en las simétricas al ser simétrica $\Rightarrow$ es autoadjunta $\Rightarrow$
$\rightarrow$ según el criterio de Sylvester sería congruente a la identidad y por tanto, además un producto escalar

b) si T no es isomorfismo $\Rightarrow |M(T)| = 0$ pero aún así el determinante de $|M(F)|$ seguiría siendo el mismo, así como la propiedad de que $A^t \circ A$ es simétrica por tanto autoadjunta se mantienen.
No obstante, no se podría afirmar que se trata de un producto escalar pues no es un isomorfismo

3. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la forma canónica de Jordan, J, de T y una base B tal que $M(T)_{B,B} = J$.

$$P_T(\lambda) = (2-\lambda)(2+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(2+\lambda)(\lambda^2-4) = (2-\lambda)^2(2+\lambda)^2$$

$$\ker(T-2Id) = \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases} = L\{(1000)\}$$

$$\ker(T-2Id)^2 = \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} = L\{(1000)(01-10)\}$$

$$\ker(T+2Id) = \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(0110)\}$$

$$\ker(T+2Id)^2 = \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases} = L\{(0110)(0001)\}$$

$$B = \{(T-2Id)(01-10)\ (01-10)\ (T+2Id)(e_4),\ e_4\}$$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Calcular todas las matrices de Jordan de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^5$ cuyo polinomio mínimo coincida con el polinomio característico de T.

$$m_T(x) = (x-2)^2(x+2)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

4. i) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$ del Problema 1, determinar la simetría ortogonal, σ, respecto del plano $\vec{\pi} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$.

ii) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ determinar la simetría afín $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Fix(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 1\}$ y $\vec{S} = \sigma$. Dar su matriz respecto de la referencia canónica.

iii) Si $\vec{u} = (1, 0, 1)$, calcular la matriz de $f = \tau_{\vec{u}} \circ S$ respecto de algún sistema de referencia y clasificar f. (Obsérvese que tanto f como S son isometrías del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ correspondiente).

i)

$$\pi = L\{\underbrace{(1\,1\,0)}_{u_1}\underbrace{(0\,0\,1)}_{u_2}\}$$

$$M(\varphi) = \xcancel{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ 2x_1 = -2x_2 \end{cases} = L\{(2\ 3\ -2)\}$$

$\Rightarrow$ Sea la base $B = \{(1\,1\,0)(0\,0\,1)(2\,3\,-2)\}$

$$\Rightarrow M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) $Fix(S) = (1\,0\,0) + L\{(1\,1\,0)(0\,0\,1)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tomando $R = \{(1\,0\,0); B\}$

$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_{B_3B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(\vec{S})_{B_3B_3} = C_{BB_3} \cdot M(S) \cdot C_{B_3B}$$

$$M(\vec{S})_{B_3B_3} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -4 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **i)** En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$ del Problema 1, determinar la simetría ortogonal, σ, respecto del plano $\vec{\pi} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$.

ii) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ determinar la simetría afín $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Fix(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 1\}$ y $\vec{S} = \sigma$. Dar su matriz respecto de la referencia canónica.

iii) Si $\vec{u} = (1, 0, 1)$, calcular la matriz de $f = \tau_{\vec{u}} \circ S$ respecto de algún sistema de referencia y clasificar f. (Obsérvese que tanto f como S son isometrías del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ correspondiente).

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\pi} = L\{(1 1 0)(0 0 1)\}$

$\vec{\pi}^{\perp} = L\{(-4 2 1)\}$

$\{(1 1 0)^{\perp}\} \cap \{(0 0 1)^{\perp}\} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 \\ 2x_3 = x_2 \end{array} \right. = L\{(-4 2 1)\}$

$M(\vec{S}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ para $B = \{(1 1 0)(0 0 1)(-4 2 1)\}$

ii) $Fix(S) = (1 0 0) + L\{(1 1 0)(0 0 1)\}$

$C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_{B_3B} = \begin{pmatrix} -2/6 & 8/6 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 1 \\ -1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$

4. i) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, G)$ del Problema 1, determinar la simetría ortogonal, σ, respecto del plano $\vec{\pi} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$.

ii) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ determinar la simetría afín $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Fix(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 1\}$ y $\vec{S} = \sigma$. Dar su matriz respecto de la referencia canónica.

iii) Si $\vec{u} = (1, 0, 1)$, calcular la matriz de $f = \tau_{\vec{u}} \circ S$ respecto de algún sistema de referencia y clasificar f. (Obsérvese que tanto f como S son isometrías del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ correspondiente).

$\vec{v} = (101)$ $\quad \pi = L\{(110)(001)\} \quad \vec{\pi}^\perp = L\{(-421)\}$

$\vec{v} = (\alpha + 2\lambda, \alpha + 3\lambda, \beta - 2\lambda) = (101)$ $\quad \begin{cases} \boxed{\lambda = -1} \\ \boxed{\alpha = 3} \\ \boxed{\beta = -1} \end{cases}$

$\vec{v} = \underbrace{(3\,3\,-1)}_{\vec{w} \in \vec{\pi}} + \underbrace{(-2\,-3\,2)}_{\vec{w}^\perp \in \vec{\pi}^\perp}$ $\quad \begin{aligned} \alpha + 2\lambda &= 1 \\ -\alpha - 3\lambda &= 0 \\ \beta - 2\lambda &= 1 \end{aligned}$

$R = \{(100); (110)(001)(23-2)\}$

$$M(S') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

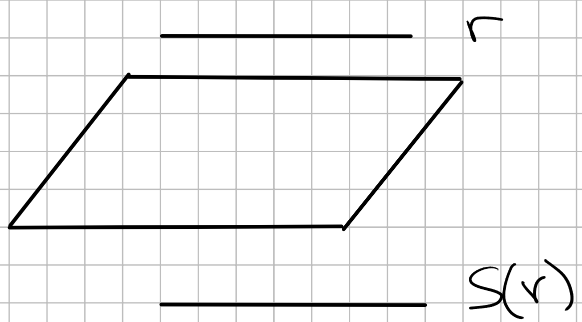
$$M(\tau_{\vec{w}^\perp} \circ S') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de una simetría con deslizamiento

0. **Decidir si la siguiente afirmación es cierta o no.**

Si f es una aplicación afín, entonces f transforma cada recta r en una recta paralela a r si y solamente si f es una homotecia o una traslación.

Falso, tómese de contraejemplo una simetría y una recta paralela a la base



pero no es ni una homotecia ni una traslación pues tiene un plano de puntos fijos

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\cancel{-1 \quad -1}$

$1 \quad 1$

Calcular la forma canónica de Jordan, J, de T y una base B tal que $M(T)_{B,B} = J$. Determinar el polinomio mínimo de T.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_T(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)^2$$

$$\ker(T - \mathrm{Id}) = \{ x_2 = x_3 = 0 = L\{(1000)(0001)\}$$

$$\ker(T - 3\mathrm{Id}) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = -x_2 \end{cases} = L\{(01{-1}0)\}$$

$$\ker(T - 3\mathrm{Id})^2 = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} = L\{(0100)(0010)\}$$

$$B = \{ e_1, e_4, (T - 3\mathrm{Id})(e_2)\, e_2 \}$$

$$m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mu_m(T) = (x-1)\cdot(x-3)^2$$

2. Se considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$$

$$= 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

a) Diagonalizar F y encontrar una base B_0 tal que $M(F)_{B_0}$ sea diagonal. Deducir que F es un producto escalar y dar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$.

b) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ calcular la distancia del vector $(-1, -1, -1)$ al plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

a) $M(F) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad 4 + 16 + \cancel{16} =$ $-\cancel{4} \cancel{-4} \cancel{-8}$

Tomemos $u_1 = e_1$

$\{u_1\}^c = \{ 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 = L\{(0\,1\,{-1})(1\,2\,2)\}$

Tomemos $u_2 = (0\,1\,{-1})$

$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(1\,2\,2)\}$

Tomemos la base $B = \{(1\,0\,0)(0\,1\,{-1})(1\,2\,2)\}$

$M(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow$ es definida positiva y simétrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ se trata de un producto escalar

2. Se considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$$

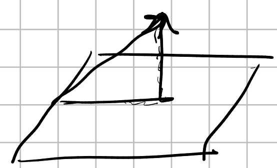
$$= 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

a) Diagonalizar F y encontrar una base B_0 tal que $M(F)_{B_0}$ sea diagonal. Deducir que F es un producto escalar y dar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$.

b) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ calcular la distancia del vector $(-1, -1, -1)$ al plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

b) $\pi = \{x_3 = 0\} = L\{(1\,0\,0)\,(0\,1\,0)\}$ $\qquad \vec{\pi}^{\perp} = L\{(1\,1\,3)\}$

$$\{e_1\}^c \cap \{e_2\}^c = \begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases} = L\{(1\,1\,3)\}$$



$$(-1\,-1\,-1) = (\alpha + \lambda, \beta + \lambda, 3\lambda)$$

$$\boxed{\lambda = -1/3} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \beta = -2/3 \\ \alpha = -2/3 \end{array}}$$

$$(-1\,-1\,-1) = \underset{\in \vec{\pi}}{(-2/3\,\,-2/3\,\,0)} + \underset{\in \vec{\pi}^{\perp}}{(-1/3\,\,-1/3\,\,-1)}$$

$$d\big((-1,-1,-1), (-2/3\,\,-2/3\,\,0)\big) =$$

$$\left(1/3\,\,\vec{1/3}\,\,1\right)\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = (0\,\,0\,\,10/3)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{10/3}$$

$$\Rightarrow d\big((-1\,-1\,-1)(-2/3\,\,-2/3\,\,0)\big) = \sqrt{10/3}$$

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la isometría cuya matriz respecto de la referencia canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar qué aplicación ortogonal es $\vec{f}$ y calcular $Fix(f)$. Clasificar la isometría f.

b) Clasificar la isometría $h = \tau_{\vec{u}} \circ f$ si $\vec{u} = (1,1,1)$. Dar un sistema de referencia cartesiano euclídeo R tal que $M(f)_{R,R}$ sea la matriz reducida.

$m(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{rotación ó} \\ \text{rotación con traslación} \end{cases}$

$Fix(f) = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases} = (1\,0\,0) + L\{(1\,0\,1)\}$

$Fix(f) \neq \emptyset \Rightarrow$ es una rotación con eje de giro la recta $r = (1\,0\,0) + L\{(1\,0\,1)\}$

f es una isometría $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es afín} \\ f \text{ es ortogonal} \end{cases}$

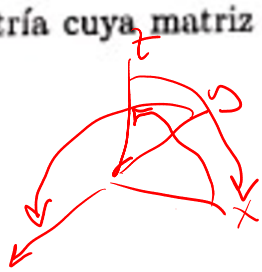
$\vec{f}$ es ortogonal $\Leftrightarrow A^t \cdot A = Id \rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ es ortogonal $\Rightarrow$ es isometría

3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la isometría cuya matriz respecto de la referencia canónica es

$$M(f)_{R_3,R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



a) Determinar qué aplicación ortogonal es $\vec{f}$ y calcular $Fix(f)$. Clasificar la isometría f.

b) Clasificar la isometría $h = \tau_{\vec{u}} \circ f$ si $\vec{u} = (1,1,1)$. Dar un sistema de referencia cartesiano euclídeo R tal que $M(f)_{R,R}$ sea la matriz reducida.

$$r = (1\,0\,0) + L\{(-1\,0\,1)\}$$

Una rotación compuesta con una rotación da lugar a un movimiento helicoidal si tomamos los vectores adecuados:

Al no ser perpendicular puede ser un movimiento helicoidal

$$\boxed{\alpha = \pi/2}$$

$$\vec{v} = (1\,1\,1) = \underset{\in \vec{r}}{\vec{w}} + \underset{\in \vec{r}^{\perp}}{\vec{w}^{\perp}} = \underset{\in \vec{r}}{(1\,0\,1)} + \underset{\in \vec{r}^{\perp}}{(0\,1\,0)}$$

$$\Rightarrow g = \tau_{\vec{v}} \circ g = \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{w}^{\perp}} \circ g = \tau_{\vec{w}} \circ g'$$

$$M(g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando $R = \left\{ (1\,0\,0);\ \left(\frac{1\,0\,1}{\sqrt{2}}\right)(1\,0\,-1)(0\,1\,0) \right\}$

$$M(\tau_{\vec{w}} \circ g) = \underset{M(\tau_{\vec{w}})}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{M(g)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cancel{0} \end{pmatrix}}$$

$g \cdot T = T^t \cdot g$

0. Discutir si son ciertas o no la siguientes afirmaciones:

i) Si una matriz simétrica real tiene traza nula entonces no es congruente a la matriz identidad.

ii) Si el polinomio característico de $T : \mathbb{R}^{3 \to n} \to \mathbb{R}^{3 \to n}$ tiene m raíces -contadas con su multiplicidad-, entonces existe un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que hace que T sea autoadjunta.

iii) Si dos matrices simétricas reales son semejantes como matrices complejas, entonces son congruentes como matrices reales.

i) Matriz simétrica $\Rightarrow$ autoadjunta $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ por el Teorema espectral $\exists B$- base de autovectores ortonormal y por tanto se obtiene una matriz diagonal que por propiedades de las matrices conserva la traza. Pero el criterio de Sylvester afirma que si $\forall\ |\Delta_k| > 0 \Leftrightarrow$ es definida positiva al tratarse D-diagonal y traza nula el determinante es nulo y por tanto no puede ser congruente a la identidad. Verdadero.

ii) Falso, si existiese un producto escalar que hiciera que fuera autoadjunta habría muchas matrices que serían diagonalizables sin serlo.

iii) $D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow \exists B : D = B^t \cdot A \cdot B$

??

1. En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f((0,0,0)) = (1,0,0)$, $f((1,0,0)) = (0,1,0)$, $f((0,1,0)) = (0,0,1)$ y $f((0,0,1)) = (0,0,0)$.

a) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular $Fix(f)$. Estudiar si $\vec{f}$ y $\vec{f}^2$ son diagonalizables.

b) Calcular $Fix(f^2)$. Demostrar que f^2 es una simetría.

$$\vec{f}(e_1) = \overrightarrow{f(0)f(e_1)} = (010) - (100) = (-110)$$

$$\vec{f}(e_2) = \overrightarrow{f(0)f(e_2)} = (001) - (100) = (-101)$$

$$\vec{f}(e_3) = \overrightarrow{f(0)f(e_3)} = (000) - (100) = (-100)$$

$$\Rightarrow M(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} ; \quad x_1 = 1/4 = x_2 = x_3$$

$$Fix(f) = (1/4 \;\; 1/4 \;\; 1/4)$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-1-\lambda) - 1 - \lambda =$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \text{ No diagonalizable}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-1-\lambda) - ((-1-\lambda)) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

1. En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f((0,0,0)) = (1,0,0)$, $f((1,0,0)) = (0,1,0)$, $f((0,1,0)) = (0,0,1)$ y $f((0,0,1)) = (0,0,0)$.

a) Calcular la matriz de f respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular $Fix(f)$. Estudiar si $\vec{f}$ y $\vec{f}^2$ son diagonalizables.

b) Calcular $Fix(f^2)$. Demostrar que f^2 es una simetría.

$$\ker(f - Id) = \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} = L\{(1 -1\ 1)\}$$

$$\ker(f + Id) = \{ x_1 = -x_3 = L\{(1 0 -1)(0 1 0)\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f^2$ es diagonalizable

b)

$$M(f^2) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f \circ f)(000) = f(f(000)) = f(100) = (010)$$

$$Fix(f^2) = \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 + x_2 = 1/2 \end{cases} = (1/4\ 1/4\ 1/4) + L\{(1 -1\ 1)\}$$

En el apartado anterior hemos demostrado que $\vec{f}^2$ es semejante a una matriz cuyo determinante es -1 y como el conjunto de puntos fijos tiene dimensión 1 se trata de una simetría axial.

c) Definir un producto escalar F en $\vec{\mathbb{R}}^3$, dando su matriz respecto de la base canónica, para que f^2 sea una isometría en el espacio afín euclídeo correspondiente.

d) Dar un sistema de referencia euclídeo respecto del cual la matriz de f^2 sea la matriz reducida. Determinar qué movimiento es f con esta estructura afín euclídea.

$$F^t \cdot G \cdot F = G$$

$$M(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

f es isometría $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{es afín} \\ \text{es ortogonal} \end{cases} \Longrightarrow$

$$M(f^2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{array}\right)$$

para $R = \{(1/4\ 1/4\ 1/4);\ (1\,-1\,1)(1\,0\,-1)(0\,1\,0)\}$

$$M(G)_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{BB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{B_3B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M(G) \cdot C_{B_3B}^{\,t} \cdot M(G) \cdot C_{B_3B} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

c) Definir un producto escalar F en $\vec{\mathbb{R}}^3$, dando su matriz respecto de la base canónica, para que f^2 sea una isometría en el espacio afín euclídeo correspondiente.

d) Dar un sistema de referencia euclídeo respecto del cual la matriz de f^2 sea la matriz reducida. Determinar qué movimiento es f con esta estructura afín euclídea.

Tomando $R = \{(1/4\ 1/4\ 1/4); (1 -1\ 1)(1\ 0 -1)(0\ 1\ 0)\}$

$$M(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

se trata de una rotación con eje de giro

$r = (1/4\ 1/4\ 1/4) + L\{(1 -1\ 1)\}$

y ángulo $\alpha = \pi$ o como hemos visto antes, una simetría axial.

2. Se consideran $\mathbb{R}^3$ con su estructura euclídea usual y el endomorfismo autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T((1,0,0)) = (3,2,2)$, $T((0,1,0)) = (2,2,0)$ y tiene al vector $(2,-2,-1)$ por autovector. Se pide:

a) Determinar la matriz de T respecto de la base canónica.

b) Diagonalizar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $M(Q)_{B_3} = M(T)_{B_3,B_3}$.

$$M(T) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4-\alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

b)

$$M(Q) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad |M(Q)| = 24 - (8+16) = 0$$

Tomemos $u_1 = e_2 \quad Q(e_2) = 2$

$\{u_1\}^c = \{x_1 + x_2 = 0 = L\{(1 -1 0)(0 0 1)\}$

Tomemos $u_2 = e_3 \quad Q(e_3) = 4$

Y por el apartado anterior sabemos que es degenerada y que es vector es autovector, así que lo tomaremos como 3º vector

$$B = \{e_2\ e_3\ (2\ {-2}\ {-1})\} \Rightarrow M(Q) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = (\lambda-3)^2 (\lambda+1)^2$$

$$\ker(T + Id) = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} = L\{(1000)(0001)\}$$

$$\ker(T - 3Id) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} = L\{(0110)\}$$

$$\ker(T - 3Id)^2 = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} = L\{(0100)(0010)\}$$

Tomando la base $B = \{ e_1, e_4, (T - 3Id)(e_2)\ e_2 \}$

$$\Rightarrow \quad m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\alpha)_{B_4,B_4} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de α, la forma canónica de Jordan, J_α, de T_α y bases B_α tales que $M(T_\alpha)_{B_\alpha,B_\alpha} = J_\alpha$. (2)

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_α y los valores de α para los que el polinomio $q(X) = (X-1)(X-2)^2$ anula a T_α. (0.5)

i)

$$P_T(\lambda) = (2-\lambda)^3(1-\lambda)$$

$$\ker(T-2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$\text{si } \alpha = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. = L\{(1000),(0100)\}$$

$$\alpha \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. = L\{(1000)\}$$

$$\ker(T-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$\text{si } \alpha = 0 \left\{ x_4 = 0 \right. = L\{(1000)(0100)(0010)\}$$

$$\text{si } \alpha \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. = L\{(1000)(0100)\}$$

$$\alpha \neq 0 \quad \ker(T-2)^3 = \left\{ x_4 = 0 \right. = L\{(1000)(0100)(0010)\}$$

$$\ker(T-Id) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_1 = 0 \end{array} \right. = L\{(011-1)\}$$

$$\alpha \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -x_4 \\ x_1 = -\alpha x_2 \\ x_2 = (1-\alpha)x_3 \end{array} \right. = L\{(\alpha(\alpha-1)\ (1-\alpha)\ 1\ -1)\}$$

ii)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \quad m(x) = (x-1)(x-2)^2 \\ \alpha \neq 0 \quad m(x) = (x-1)(x-2)^3 \end{array} \right. \Rightarrow q(x) \mid m(x) \iff \alpha = 0$$

2. a) Diagonalizar la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(F)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. = (0\ 1\ -1)$$

$(0 1 0)$

Deducir que es un producto escalar y dar una base ortonormal. (1)

$u_1 = e_1 \quad Q(u_1) = 1$

$\{u_1\}^c = \{x_1 = 0 = L\{(010)(001)\} \quad u_2 = e_2 \quad Q(u_2) = 1$

$\{u_2\}^c = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(011)\} \quad u_3 = (011) \quad Q(u_3)$

Para la base $B = \{(100)(010)\ 1/\sqrt{2}(011)\}$

$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Dado que es simétrica y con autovalores positivos ($\sigma(F) = \{1\}$ y diagonal

$\Rightarrow$ se puede deducir, que es un producto escalar

Deducir que es un pr...

b) Demostrar que el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz respecto de la base canónica es

$$M(T)_{B_3,B_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

es una aplicación ortogonal en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ y clasificarla. (1.5)

$B = \{(100)\ (010)\ 1/\sqrt{2}(011)\}$ $\quad m(F) = Id_{\mathbb{R}^3}$

F-aplicación es ortogonal $\Leftrightarrow$ transforma bases ortonormales en ortonormales $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ es afín y} \\ \|T(u_i)\| = 1 \quad \forall u \in B \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|T(100)\| = \|0-10\| = |-1|\,\|010\| = 1$

$\|T(010)\| = \|-100\| = |-1|\,\|100\| = 1$

$\|T(1/\sqrt{2}(011))\| = \|1/\sqrt{2}\,T(011)\| = 1/\sqrt{2}\,\|T(011)\| =$

$= 1/\sqrt{2}\,\|T(010) + T(001)\| =$

$= 1/\sqrt{2}\,\|(-100) + (1-1-1)\| =$

$= 1/\sqrt{2}\,\|(0-1-1)\| = 1/\sqrt{2}\,|-1|\,\|011\| =$

$= 1/\sqrt{2}\,\|011\| = \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$

$\Rightarrow$ se trata de una aplicación ortogonal

$|M(T)| = 1 \Rightarrow$ se trata de un giro

$\ker(T - Id) = L\{(1\,-1\,0)\}$

$\ker(T + Id) = L\{(110)\ (10-1)\}$

3. Se considera la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica es

$$M(f)_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

i) Calcular $Fix(f)$ y determinar de qué tipo de aplicación afín se trata. (1.5)

ii) Estudiar qué tipo de aplicación afín es $\tau_{\vec{u}} \circ f$, siendo $\vec{u} = (0,1,1)$. (1)

a) $Fix(f) = x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow Fix(f) = (1\,0\,0) + L\{(1\,0\,1)(2\,1\,0)\}$

$\dim(Fix(f)) = 2$ $\quad |M(\vec{f})| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{vmatrix} = 3$

$\Rightarrow$ se trata de una dilatación o transvección

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$

Como hemos comprobado con los puntos fijos $d(\ker(T - 1I_d)) = 2$ por tanto es diagonalizable y se trata de una dilatación.

ii) $\ker(T - 3I_d) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} = L\{(0\,1\,1)\}$

Tomando la base $B = \{(0\,1\,1)(1\,0\,1)(2\,1\,0)\}$ y $R = \{(1\,0\,0);B\} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sigue tratándose de una dilatación pues tiene un plano de puntos fijos $\pi = (-1/2\,0\,0) + L\{(0\,1\,0)(0\,0\,1)\}$

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\alpha)_{B_c,B_c} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

i) Determinar, según los valores de α, la forma canónica de Jordan, J_α, de T_α y bases B_α tales que $M(T_\alpha)_{B_\alpha,B_\alpha} = J_\alpha$. (2)

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_α y los valores de α para los que el polinomio $q(X) = (X-2)(X-3)^2$ anula a T_α. (0.5)

$$(\lambda-3)(\lambda-\alpha)\begin{vmatrix} \lambda-\alpha & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-\alpha)^2$$

Si $\alpha = 3$

$$\ker(T-3Id) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} = L\{(0100)(0001)\}$$

$$\ker(T-3Id)^2 = \{x_1 = 0 \quad L\{(0100)(0010)(0001)\}$$

$$\ker(T-3Id)^3 = \mathbb{R}^4$$

Tomamos $B = \{(T-3Id)^2(e_1)\ (T-3Id)(e_1)\ e_1\ e_2\}$

$$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Se considera la familia de aplicaciones lineales $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$A = M(T_\alpha)_{B_c,B_c} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

i) Determinar, según los valores de α, la forma canónica de Jordan, J_α, de T_α y bases B_α tales que $M(T_\alpha)_{B_\alpha,B_\alpha} = J_\alpha$. (2)

ii) Determinar el polinomio mínimo de T_α y los valores de α para los que el polinomio $q(X) = (X-2)(X-3)^2$ anula a T_α. (0.5)

si $\alpha \neq 3 \Rightarrow$ $\qquad \gamma = (\alpha - 3)$

$$\ker(T-3Id) = \begin{cases} (\alpha-3)x_2 = x_3 \\ x_2 = -x_4 \\ x_1 = 0 \end{cases} = L\{(0\ 1\ \alpha-3\ -1)\}$$

$$\ker(T-3Id)^2 = \begin{cases} 1/\gamma\, x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + \gamma x_3 + \gamma^2 x_4 = 0 \end{cases} = L\{(0\ 1\ \gamma\ -1)\ (\gamma\ -1\ -1\ 0)\}$$

$$\ker(T-\alpha Id) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} L\{(0100)(0001)\}$$

$$\Rightarrow M(T) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $\quad q(x) = (x-2)(x-3)^2 \qquad \mu_1(x) = (x-3)^2(x-\alpha)$

$\qquad \mu_2(x) = (x-3)^3$

lo anula $\Leftrightarrow \alpha = 2$

2. Se considera la forma bilineal simétrica $F:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) =$$

$$= 2x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_2y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

5
28
-7
190

a) Diagonalizar F y encontrar una base B_0 tal que $M(F)_{B_0}$ sea diagonal. Deducir que F es un producto escalar y dar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$. (1.5)

b) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, F)$ calcular el ortogonal del plano $\pi = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ y la distancia del vector $((0,0,-2)$ a π. (1)

$$m(F) = (0\ 5\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = (0\ 20\ 20)\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 100+20 = 120$$

$u_2 = (0\,0\,1)$

$\{u_1\}^c = \{2x_1 = x_2 = L\{(1\,2\,0)(0\,0\,1)\}$

$\{u_1\}^c \cap \{u_2\}^c = \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ x_2 = 4x_3 \end{cases} = L\{(2\,4\,1)\}$

La base $B = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,0\,0)\ \frac{1}{2}(0\,0\,1)\ \frac{1}{\sqrt{20}}(2\,4\,1) \}$

$\Rightarrow M(F) = Id \Rightarrow$ al ser simétrica (diagonal) y tener autovalores positivos por el criterio de sylvester es congruente a la identidad y por tanto un producto escalar

b) $\pi = L\{(1\,0\,0)(0\,1\,0)\}$ $\quad \vec{v} = (0\,0\,-2)$

$\pi^\perp = \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 3x_1 = x_3 \end{cases} = L\{(1\,2\,3)\}$ $\quad \boxed{\alpha = 2/3}\ \boxed{\beta = 4/3}\ \boxed{\lambda = -2/3}$

$\Rightarrow \vec{w}^\perp = (-2/3\ -4/3\ -2) = \| \frac{1}{3}(-2\ -4\ -6) \| =$

$= \frac{1}{3}\|(2\,4\,6)\| = \frac{1}{3}\|(0\,5\,1)\| = \frac{1}{3}\sqrt{120}$

3. **i)** En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$, determinar dos aplicaciones afines $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dando sus matrices respecto de la referencia cartesiana canónica, tales que en el plano $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_3 = 3\}$ induzcan traslaciones, $f(0,1,0) = g(0,1,0) = (1,0,-2)$ y $Fix(f) \neq \emptyset$ y $Fix(g) = \emptyset$. (1.75)

ii) Estudiar si $\vec{f}$ es una aplicación ortogonal o autoadjunta si en $\vec{\mathbb{R}}^3$ se considera un producto escalar. (0.75)

i) $\pi = (1 0 1) + L\{(1 0 -2)(0 1 0)\}$

$\vec{\pi}^{\perp} = L\{(2 0 1)\}$

$f(010) = g(010) = (1 0 -2)$ $\qquad \vec{f} = \vec{g} = Id_{\vec{\mathbb{R}}^3}$

$Fix(f) \neq \emptyset \qquad Fix(g) = \emptyset$

$f(010) = \vec{f}(e_2) + f(0) = (010) + (x_1 x_2 x_3) = (1 0 -2)$

$\Rightarrow f(000) = (1 -1 -2)$

$R = \{(101); (1 0 -2)(010)(201)\}$

$$M(f)_{RR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_{RR_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f)_{R_3R_3} = C_{RR_3} \cdot M(f)_{RR} \cdot C_{R_3R} \qquad C_{R_3R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/5 & 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$M(g)_{R_3R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) No es autoadjunto pues para una base ortogonal no es simétrica y no es ortogonal pues no transforma bases ortonormales en ortonormales.

Examen 2023 - Ancochea Mayo

Ejercicio 1

$V = \mathbb{R}$ - espacio vectorial

$f : V \to V$

$P_T(\lambda) = (x-\lambda_1)^6 (x-\lambda_2)^6 (x-\lambda_3)^6 \qquad d(V) = 18$

λ_1:

$\dim(\ker(f-\lambda_1 Id)^3) = 3$

$\dim(\ker(f-\lambda_2 Id)^3) = 4$

$\dim(\ker(f-\lambda_3 Id)^3) = \underline{5}$

¿Posibles formas canónicas de Jordan?

$$\begin{array}{cccccccccccc} \{\bar{0}\} & \subseteq & E_{\lambda_1} & \subseteq & E_{\lambda_1}^2 & \subseteq & E_{\lambda_1}^3 & \subseteq & E_{\lambda_1}^4 & \subseteq & E_{\lambda_1}^5 \subseteq & E_{\lambda_1}^6 \\ & & d=1 & & d=2 & & d=3 & & d=4 & & d=5 & d=6 \end{array}$$

$$J_{A_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

λ_2:

$$\begin{array}{cccccc} \{\bar{0}\} \subseteq & E_{\lambda_2} & \subseteq & E_{\lambda_2}^2 & \subset & E_{\lambda_2}^3 \\ & d=1 & & d=2 & & d=4 \\ & d=2 & & d=3 & & d=4 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists\, v_1 \in E_{\lambda_2} \\ \exists\, v_2 \in E_{\lambda_2}^2 \\ \quad \notin E_{\lambda_2} \\ \exists\, v_3, v_4 \in E_{\lambda}^3 \\ \quad \notin E_{\lambda_2}^2 \end{array} \right.$$

¡¡!! No se puede

solución $\Downarrow$ real

$$\subseteq E_{\lambda_2}^4 \subseteq E_{\lambda_2}^5$$
$$d=5 \qquad d=6$$

Proposición: $v_i \in E_\lambda^i \Rightarrow v_{i-1} = (A-\lambda)(v_i) \in E_\lambda^{i-1}$

$$J_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & & & & \\ & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

λ_3 :

$$\{\bar{0}\} \subset E_{\lambda_3} \subset E^2_{\lambda_3} \subseteq E^3_{\lambda_3} \subset E^4_{\lambda_3}$$

$d = 5 \qquad d = 6$

$$\{\bar{0}\} \subset E_{\lambda_3} \subset E^2_{\lambda_3} \subseteq E^3_{\lambda_3} \subset E^4_{\lambda_3}$$

$d = 5 \qquad d = 6$

$$J_{\lambda_3} = \left(\begin{array}{cccc|cc} \lambda_3 & 1 & & & & \\ & \lambda_3 & 1 & & & \\ & & \lambda_3 & 1 & & \\ & & & \lambda_3 & & \\ \hline & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & \lambda_3 \end{array}\right)$$

Ejercicio 2

$B : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal simétrica

no degenerada $\Rightarrow$ rg máximo

indefinida (ni todo positivo ni negativo)

Probar que $\exists$ B-base de vectores

sea u_1 : $B(u, u_1) = 1$

$u_{p+1} \in \{x \in V : B(u_1, x) = 0\}$ $\quad B(u_{p+1}, u_{p+1}) = -1$

$w = u_1 + u_{p+1}$ $\quad B(w,w) = B(u_1 + u_{p+1}, u_1 + u_{p+1}) =$

$= \underset{1}{B(u_1, u_1)} + 2\underset{0}{B(u_1, u_{p+1})} + \underset{-1}{B(u_{p+1}, u_{p+1})} = 0$

$w' = u_1 - u_{p+1}$ $\qquad B(w', w') = 0$

$L\{(u_1)(u_{p+1})\} = L\{w_1, w'\} \Rightarrow \mathcal{B} = \{w_1\, u_2 \dots u_p\, w_1' \dots u_n\}$

Ejercicio 3

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Endomorfismo ortogonal

b) Descomposición en isometrías

$A = G_{B_cB_c}(\vartheta)$

a) f es ortogonal $\Leftrightarrow$ $\underbrace{A^t \cdot G \cdot A = G}_{T(v)\, M_{<>} T(w) = v\, M_{<>} w}$ $G = M_{B_c}($ $\rightarrow$ equivalente

b) $E_1 = \ker(A - I) = \ker \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \quad L\left\{\frac{(1\,1\,-2)}{\sqrt{6}}\right\}$$

$$E_{-1} = \ker + I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right. = L\left\{\frac{(1\,1\,1)}{\sqrt{3}}\, \frac{(1\,-1\,0)}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$=$

Ejercicio 4

A sub. afín $\quad V$ sub. lineal asociado

$T_{\vec{v}}$ = traslación de vector $\vec{v}$

h = homotecia de centro C y razón α

$T_{\vec{v}} \circ h \circ T_{-\vec{v}}$ es una homotecia ¿cuál es su centro?

$$m(T_{\vec{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & & & \\ \vdots & & & \\ v_n & & & \end{pmatrix}$$

$$m(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & \alpha\, Id & \\ b_n & & & \end{pmatrix}$$

$$m(T_{-\vec{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -v_1 & & & \\ \vdots & & & \\ -v_n & & & \end{pmatrix}$$

$$Fix(h) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & & & \\ & \alpha-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{pmatrix} ; \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b_1}{\alpha-1} = c_1 \Rightarrow b_1 = c_1(1-\alpha)$$

La multiplicación de las 3 matrices es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline v_1 - v_1 c_1(1-\alpha) & & & \\ \vdots & & \alpha\, Id & \\ v_n - v_n c_n(1-\alpha) & & & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ g es una homotecia porque $\vec{g} = \alpha\, Id$

y $Fix(g) = c'$ $\quad g(0 \cdots 0) = \big(v_1(1-c_1(1-\alpha)), \cdots\cdots, (v_n(1-c_n(1-\alpha))\big)$