ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

Dados dos conjuntos A y B, podemos emparejar los elementos de A con los del conjunto B. Si lo hacemos de modo que para todo elemento $a \in A$ le asociamos, a lo más, con un único elemento $b \in B$, escribimos $f(a) = b \in B$, decimos que esta "operación" es una **aplicación** de A en B.

Ejemplos. 1.

- *Sea A el conjunto de alumnos de una clase.*

  $$A = \{Juan,\ Elisa,\ Alba,\ Jesús \ldots\}$$

  y B el conjunto de notas posibles de 0 *a* 10, *normalmente un entero con un decimal. Después del primer examen parcial, cada alumno que se haya presentado al examen tendrá su correspondiente nota: $N(Juan) = 3,2$; $N(Alba) = 6,7$; $N(Jesús) = 1,3$; ....etc. Elisa no se ha presentado y por tanto no tienen nota. Lo anterior es un ejemplo de aplicación.*
- *Se considera la sucesión $(e^n)_{n=1}^{\infty}$, que como sabemos es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$*

  $$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} & \\ & & n & \to & f(n) & = & e^n. \end{array}$$
- *Consideramos la siguiente asignación*

  $$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & f(x) & = & e^x - 1. \end{array}$$

  *Esto es lo que llamariamos una **función real de variable real**, el objeto principal de nuestro estudio.*

En el apéndice sobre Teoría de Conjuntos se vio algunos preliminares sobre el concepto de aplicación. De forma formal tenemos.

Definición. 1. *Una **Aplicación** f entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano de A por B, $f \subset A \times B$, de modo que si $a \in A$ y $(a, b_1), (a, b_2) \in f$, entonces $b_1 = b_2$.*

a: *Se llama **Dominio** de una aplicación f al siguiente subconjunto de elementos de A,*

$$Domf = \{a \in A \ : \ \exists b \in B \ \ con \ \ (a,b) \in f\,\}.$$

b: *Se llama **Imagen** o **Rango** de f al siguiente subconjunto del conjunto B,*

$$Imf = \{b \in B \ : \ \exists a \in A \ \ con \ \ f(a) = b\,\}.$$

Observación. 1. *Dada una aplicación escribimos $f(a) = b$, en lugar de $(a,b) \in f$.*

A nosotros nos va a interesar el estudio de aplicaciones entre números reales. Las aplicaciones usualmente las llamaremos **funciones**.

Definición. 2.

- *Una aplicación de la recta real en si misma,*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & f(x) & = & y, \end{array}$$

  la llamaremos función real de variable real. LLamaramos a "x" la variable y su valor asociado "y" la imagen de "x".
- *Llamamos **Dominio** de la función f al siguiente subconjunto de elementos de $\mathbb{R}$,*

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ con \ \ f(x) = y\,\}.$$

- *Llamamos **Imagen** o **Rango** de f al siguiente subconjunto del conjunto $\mathbb{R}$,*

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R} \ \ con \ \ f(x) = y\,\}.$$

Las funciones más interesantes de la Matemática Aplicada no son las funciones de una única variable, sino las de varias variables.

Definición. 3.

- *Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en la recta real,*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1,...,x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = & y, \end{array}$$

  la llamaremos función real de varias variables reales, $x_1,...,x_n$. También se le llama Campo Escalar y algunas veces potencial.
- *Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1,...,x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = & \overrightarrow{y} = (y_1,....,y_m), \end{array}$$

  la llamaremos función vectorial de varias variables reales, $x_1,...,x_n$. También se le llama Campo Vectorial.

En Física los campos vienen dados por potenciales. Y las fuerzas que en ellos aparecen se representan por campos vectoriales. Nosotros vamos a centrarnos en estudiar funciones de una sola veriable real. En los apéndices podremos ver información adicional sobre funciones de varias variables.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que un problema con una función de n-variables, cálculo de derivadas o integrales...etc, se suele reducir a resolver n problemas de una única variable. Por ello antes de estudiar funciones con más variables es conveniente saber bastante sobre funciones de una variable.

Ejemplos. Las funciones en matemáticas vienen dadas usualmente por fórmulas. Por ejemplo.

Ejemplos. 2.

- ***Función constante.*** *Fijemos $a \in \mathbb{R}$, se define la función constantemente igual al valor a por*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & a. \end{array}$$

- ***Función identidad.*** *La función*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & x, \end{array}$$

que a cada x le hace corresponder a él mismo, se le llama función identidad.

Estos ejemplos son muy sencillos, aún así muchas otras funciones se construyen a partir de ellos.

Operaciones con funciones. Dado que los valores que toman las funciones son números reales, las funciones se pueden operar como los números.

Definición. 4. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y un número real $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:*

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
Producto por un escalar: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
División: *Si* $g(x) \neq 0$, *entonces* $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Cuando una función es **inyectiva** cabe definir su **función inversa.** Decimos que una función es inyectiva (ver apéndice de Teoría de Conjuntos) si siempre que $f(x) = f(y)$, necesariamente ocurre que $x = y$. Luego cada imagen tiene un único origen en $\mathrm{Dom} f$.

Definición. 5. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inyectiva, se define su función inversa f^{-1} por*

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1} & : & Imf & \to & \mathbb{R} & & \\ & & y & \to & f^{-1}(y) & = & x, \end{array}$$

donde $x \in Domf$ es el único elemento del domino de f para el cuál $f(x) = y$.

Definición. 6. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que $Imf \subset Domg$, se define la* ***composición*** *de f con g como la función $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Con estas operaciones es fácil definir nuevas funciones a través de fórmulas.

Ejemplos. 3.

- *La funciones $f(x) = ax$, $g(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$ se construyen multiplicando una constante por la identidad y multiplicando la identidad consigo misma n-veces respectivamente.*
- ***Funciones polinómicas:***

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

- ***Funciones racionales:***

$$h(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

  división de dos polinomios; que tiene sentido siempre que el denominador sea no nulo, $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$.
- ***Funciones dadas por una serie de potencias:***

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{(x-2)^n}{n!}.$$

Ejercicio. 1. *Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, vamos a calcular su dominio y su imagen; veremos si es inyectiva y por tanto si se puede definir su función inversa.*

Demostración: Para todo $x \in \mathbb{R}$ están definidas las funciones polinómicas $x^2 + 1$ y $x + 1$. Su cociente estará definido si $x + 1 \neq 0$, es decir si $x \neq -1$, como $(-1)^2 + 1 \neq 0$, se tiene que

$$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \backslash \{-1.\}$$

Para calcular la imagen de esta función tomemos $y \in \mathbb{R}$. Tenemos que encontrar x de modo que $f(x) = y$, es decir resolver la ecuación

$$y = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - yx + (1-y) = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuya solución será

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4y-4}}{2}.$$

Esta solución esta definida siempre que

$$y^2+4y-4 = y^2+4y+4-8 = (y+2)^2-(\sqrt{8})^2 = (y+2+\sqrt{8})(y+2-\sqrt{8}) \geq 0.$$

Luego si $y \in \mathbb{R}\backslash(-2-\sqrt{8}, \sqrt{8}-2)$ es el dominio de la función. Por otro lado, cuando y está en la imagen de f podemos encontrar dos valores de x que alcanzan el valor de y, salvo si $y = -2-\sqrt{8}$ o $y = \sqrt{8}-2$. Luego la función no es inyectiva y por tanto no podemos definir su inversa f^{-1} al menos en todo la Imf. $\square$

Ejemplos. 4.
- *Si $x \geq 0$, es claro que la función inversa de $f(x) = x^2$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.*
- *Si n es par y $x \geq 0$, es claro que la función inversa de $f(x) = x^n$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.*
- *Si n es impar, es claro que la función inversa de $f(x) = x^n$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.*

Ejercicio. 2. *Calculemos la función inversa de $f(x) = \frac{2}{4x-5}$*

Demostración: Como antes, si resolvemos la ecuación $y = \frac{2}{4x-5}$ es decir

$$4yx - 5y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5y+2}{4y}$$

encontraremos la imagen de f. La cuál es Im$f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Por otro lado, para cada y de la imagen le corresponde una única x, así la función es inyectiva y existe la inversa que es precisamente $f^{-1}(y) = \dfrac{5y+2}{4y}$ (cuyo dominio es, claro, la imagen de f). $\square$

Ahora nos fijamos en la composición de funciones.

Ejemplos. 5. *Estudiaremos los siguientes ejemplos.*
- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
- $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}}$
- $h(x) = \tan(\frac{\pi}{2}e^{-x})$.

Demostración:

- Si $p(x) = x^2+1 \geq 0$, y $q(x) = \sqrt{x}$, como Im$p \subset$ Dom$q$, es claro que $f = q \circ p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- En el caso $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}}$, necesitamos que $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$. Luego el dominio de la función es

$$\mathrm{Dom} g = \{x \ : \ x > 1\}.$$

Si pretendemos calcular la imagen, es decir si despejamos la x de la ecuación

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^3 - x^2}},$$

lo que es equivalente a calcular g^{-1}, la cosa parece difícil. De hecho, necesitamos conocer más sobre sobre teoría de funciones para afrontar funciones más complejas.

- A lo largo de los temas veremos que son las funciones

$$\ln x, \ e^x, \ \operatorname{sen} x, \ \cos x, \ \tan x, ...etc.$$

También que $\ln x$ es la inversa de e^x; o que la función tangente, $\tan x$, tiene por inversa la función arcotangente, $\arctan x$.

Ahora, $h(x) = \tan(\frac{\pi}{2}e^{-x})$, como el dominio de la función tangente es $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, necesariamente

$$\frac{\pi}{2}e^{-x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}e^{-x} < \frac{\pi}{2}$$

(como la exponencial es siempre una función positiva)

$$\Leftrightarrow \quad 0 < e^{-x} < 1 \quad \text{y así} \quad x \in (0, \infty) = \mathrm{Dom} h.$$

Para calcular h^{-1}, tenemos que resolver la ecuación

$$y = \tan(\frac{\pi}{2}e^{-x}) \quad \Leftrightarrow \quad \arctan y = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln(\frac{2}{\pi}\arctan y),$$

como la función logaritmo solo está definida para valores positivos, necesariamente $y > 0$. Así

$$h^{-1}(y) = -\ln(\frac{2}{\pi}\arctan y) \quad \text{para todo} \quad y > 0.$$

$\square$

Gráfica de una función. Las funciones tienen una dimensión geometríca que es lo que llamamos sus gráficas. Estas son curvas en el plano, pero a la vez un dibujo donde quedan recogidas las propiedades de las funciones: crecimiento, puntos máximos y mínimos...etc De forma formal, llamamos plano real al conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definición. 7. *Dada una función real de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamamos* ***gráfica*** *de la función al conjunto del plano $\mathbb{R}^2$:*

$$Graff = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in Dom f\}.$$

La forma de representar el plano es con dos rectas reales que se cortan perpendicularmente, el eje de **abcisas** o de las **x** y el eje de **ordenadas** o de las **y**. Los puntos del plano (x, y) se representan como se aprecia en la siguiente figura. La gráfica de una función es el dibujo resultante de pintar sobre el plano todos los puntos de los que se compone (ver la figura).

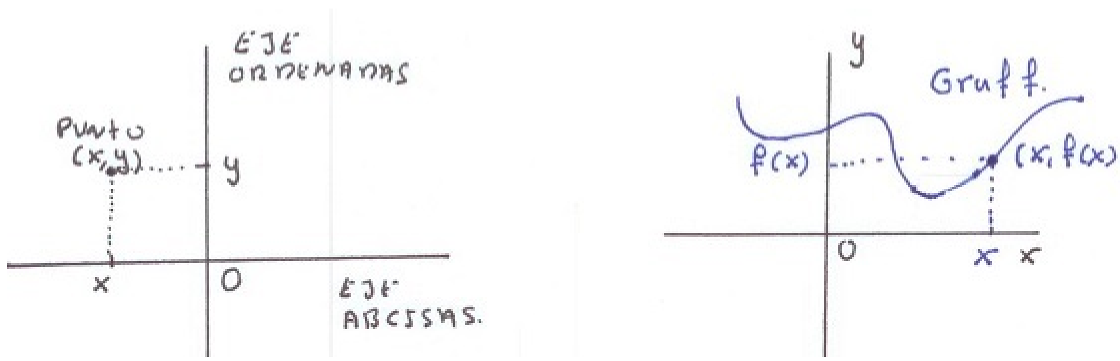


Figura 1. El plano real.

Ejemplos sencillos de gráficas nos los proporcionan la función constante y la función identidad. Incluso el valor absoluto de un número real.

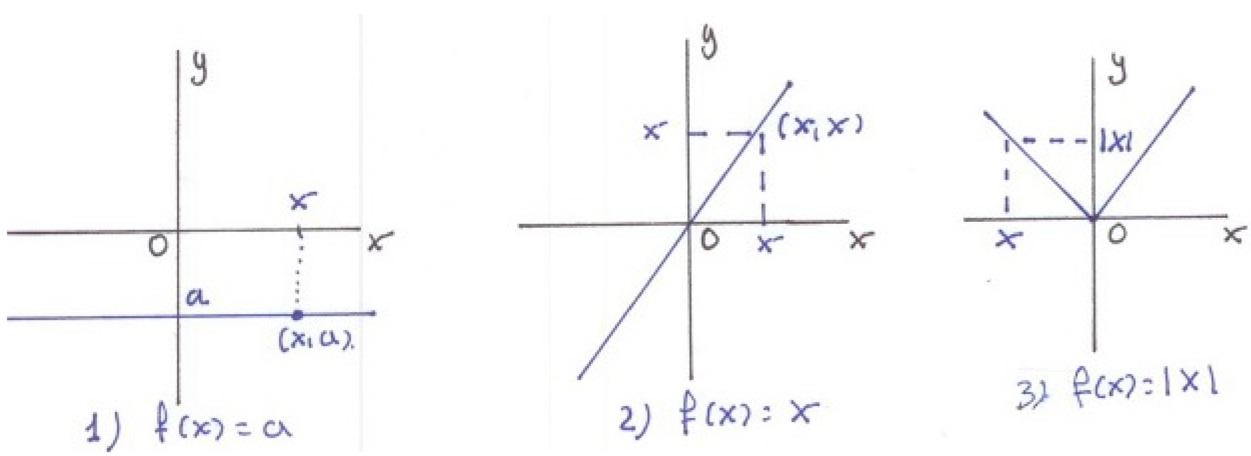


Figura 2. 1) $f(x) = a$. 2) $f(x) = x$. 3) $f(x) = |x|$.

La representación de gráficas de funciones con fórmulas más complicadas es un problema más difícil, que iremos viendo poco a poco. El problema de dada una curva en el plano asociarle una fórmula es un problema aún más difícil (pero bastante útil en diseño asistido por ordenador, por ejemplo).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES CONTINUAS.

Fijémosnos en los dos gráficos siguientes.

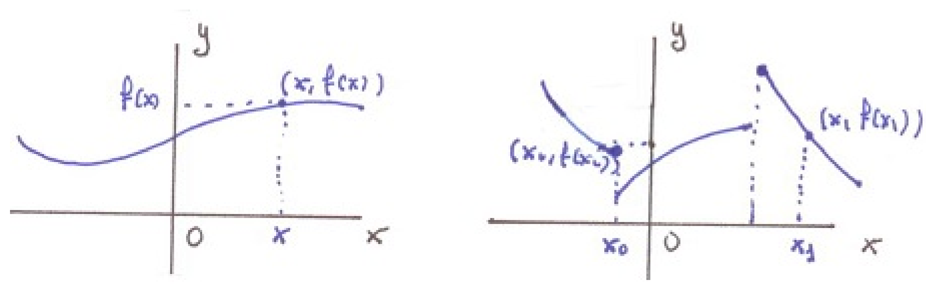


FIGURA 1. Gráfica continua. Gráfica a Trozos.

El primero viene dado por un trazo continuo. El segundo por varios trazos separados. Es algo similar a lo que nos pasaba con los números. Los números naturales se presentan en "saltos". Los núneros reales "fluyen" de forma continua. La idea de **función continua** trata de atrapar matemáticamente al trazo continuo.

Observación. 1.

- *La continuidad de funciones es un trasmisión, una deformación, de la continuidad de* $\mathbb{R}$ *a trazos curvos.*
- *Los gráficos del dibujo anterior se pueden ver como gráficas de funciones. En el primer caso de una función que llamaremos continua; en el segundo caso de otra que no lo será.*
- *La continuidad es una propiedad que permite trabajar bien con las funciones y decir cosas importantes sobre ellas (lo vamos a ver). Aunque así, no debemos olvidar a las funciones no continuas. Pensemos en una función definida sobre* $\mathbb{R}$ *y que solo toma los valores* 0 *y* 1 *(**señal digital**). No es continua, pero nuestro mundo está lleno de ellas.*

La noción de **continuidad**, intuitiva, va unida a la de **límite**, matemática.

Definición. 1. *Sea una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y consideremos* $a \in \mathbb{R}$, *de modo que existe* $r > 0$ *con*

$$(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Dom f.$$

a: *Se dice que* $b \in \mathbb{R}$ *es el límite de la función* f *en el punto* a, *escribimos* $\lim_{x \to a} f(x) = b$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *podemos encontrar un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

b: *Se dice que una función es* ***continua en el punto*** *a si existe el límite de la función en el punto y es igual al valor de la función en el punto:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

c: *Se dice que la función* f *es* ***continua*** *si lo es en cada punto de su dominio (es decir para todo* $a \in Dom f$ *existe* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ *).*

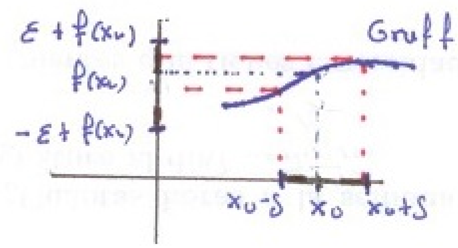


FIGURA 2. Función continua en x_0.

La continuidad es un propiedad **local** de las funciones. Es decir se verifica punto a punto. Una función puede ser continua en un punto y no serlo en otro. Para manejar la continuidad tenemos que dominar el cálculo de límites, algo que vamos a ver. Un poco más adelante nos convenceremos de que esta propiedad de continuidad, con definición parecida a la de límite de una sucesión, nos permite asegurar que la gráfica de la función viene dado por un trazo continuo.

Si nos fijamos en la definición de límite, o de función continua, lo que queremos decir con el "ϵ" y el "δ" es que si los valores de x están cerca de a, entonces los valores de $f(x)$ están cerca del límite, de $f(a)$ en el caso de que f sea continua en a.

Proposición. 1. *Si existe* $\lim_{x \to a} f(x) = b$, *este límite es único.*

Demostración: La prueba es igual que la que vimos para el resultado análogo para límites de sucesiónes. Si $b_1 < b_2$ son dos límites distintos, entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que

$$b_1 < b_1 + \epsilon < b_2 - \epsilon < b_2$$

y así no es posible que para todos los valores de x próximos a a sus imagenes $f(x)$ estén a la vez próximos a b_1 y b_2 $\square$

Veamos ahora la relación entre límite de funciones y de sucesiones. Lo cuál nos permitirá recordar la definición de límite de una sucesión.

Proposición. 2. ***(Caracterización de la continuidad por sucesiones)****. Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos $a \in \mathbb{R}$, de modo que existe $r > 0$ con*

$$(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Domf.$$

a: *Existe* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \neq a$ para todo n, convergente al punto a se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

b: *f es continua en a si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente al punto a se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Demostración: Es suficiente con probar **a** (en el caso **b** se sustituye b por $f(a)$).

- Supongamos que existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y que tenemos una sucesión convergente $x_n \to_{n\to\infty} a$. Entonces **dado** $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si

  $$0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

  Para este $\delta > 0$, de la definición de límite de una sucesión, **existe** n_0 **de modo que para todo** $n > n_0$ se tiene que

  $$0 < |a - x_n| < \delta$$

  y **por tanto** $|f(x_n) - b| < \epsilon$. Si nos fijamos en el texto marcado en negrita, descubrimos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
- Si suponemos ahora que $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$, entonces existirá un $\epsilon > 0$ de modo que para todo $\frac{1}{n}$ podemos encontrar $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ y tal

que $|f(x_n) - b| > \epsilon$. Luego la sucesión así construida converge a a, claro

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0.$$

Pero sus imagenes no convergen a b ya que están lejos de él,

$$|f(x_n) - b| > \epsilon \quad \text{para todo} \quad n$$

$\square$

Continuemos con ejemplos de funciones continuas.

Ejemplos. 1.

- *La función constante $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es continua en todo punto. Claro, para todo a y x*

$$|f(x) - f(a)| = |b - b| = 0.$$

- *La función identidad $f(x) = x$, es continua en todo $a \in \mathbb{R}$. Claro, dado $\epsilon > 0$ si tomamos $\delta = \epsilon$, entonces para todo $|x - a| < \delta = \epsilon$ se tiene que $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon$.*
- *Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Tomemos $a = 2$ y $\epsilon = \frac{1}{2}$. Vamos a encontrar δ de modo que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| < \epsilon = \frac{1}{2}$.*

Demostración:

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| = \frac{|2-x|}{2|x|} \leq |x - 2| \quad \text{siempre que} \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Luego si $\delta = \epsilon = \frac{1}{2}$, entonces $|x - 2| < \delta = \frac{1}{2}$ implica que $x \geq 2 - \frac{1}{2} > 1$ y por tanto

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| \leq |x - 2| < \frac{1}{2}$$

$\square$

En el último ejemplo no hemos llegado a ver que $f(x) = \frac{1}{x}$ sea continua en $a = 2$. Solo hemos "probado" con un $\epsilon = \frac{1}{2}$, no con todos. Aunque esto no es necesario. El cálculo de límites nos va a permitir decidir, en muchos casos, si una función es continua rápidamente. Es lo que veremos a continuación.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OPERACIONES CON LÍMITES.

De forma análoga a lo que ocurre con los límites de las sucesiones tenemos lo siguiente.

Teorema. 1. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen sus respectivos límites en un punto a, es decir $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b_1$ y $\exists \lim_{x\to a} g(x) = b_2$, entonces*

- *existe* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b_1 + b_2$;
- *existe* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = b_1 b_2$, *en particular para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe* $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b_1$;
- *si* $\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \neq 0$, $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{b_2}{b_1}$.
- *Si f y g son continuas en a, entonces las funciones $f+g$, fg, y λf son continuas en a. Si además $f(a) \neq 0$, también $\dfrac{g}{f}$ es continua en a.*

Demostración: Vamos a probar que existe

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = b_1 b_2,$$

el resto de casos se deja como ejercicio. Usaremos la caracterización de límites por sucesiones.

Sea una sucesión convergente a a, $x_n \to_{n\to\infty} a$, entonces tenemos que $\exists \lim_{x\to a} f(x_n) = b_1$ y $\exists \lim_{x\to a} g(x_n) = b_2$. Por tanto la teoría de límites de sucesiones nos dice que

$$\exists \lim_{x\to a} f(x_n) g(x_n) = \lim_{x\to a} fg(x_n) = b_1 b_2,$$

lo que prueba que existe $\lim_{x\to a}(fg)(x) = b_1 b_2$ $\square$

Ejemplos. 1. **Funciones polinómicas:** *La función*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es continua en todos los puntos. Claro, es suma y productos de funciones constantes y la identidad que sabemos que son continuas.

Funciones racionales: *La función*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

es continua en todo los puntos en los cuáles no se anula el denominador.

Así la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$, usando el Teorema anterior, es continua en todo $x \neq 0$ Así de simple. Sin tener que recurrir a ϵ y δ. La definición de límite y continuidad la usaremos cuando no podamos usar los Teoremas de esta sección.

Teorema. 2. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que $Imf \subset Domg$. Si f es continua en a, e.d. existe $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, y g es continua en $f(a)$, e.d. existe $\lim_{x\to f(a)} g(x) = g(f(a))$, entonces $g \circ f$ es continua en a y por tanto existe $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(f(a))$.*

Demostración: Por ser g continua en $f(a)$, **dado** $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta_1 > 0$ de modo que si

$$|y - f(a)| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g(f(a))| < \epsilon.$$

Para este δ_1, por ser f continua en a, **podemos encontrar un** $\delta_2 > 0$ de modo que si

$$|x - a| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

Luego si

$$|x-a| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-f(a)| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(f(x))-g(f(a))| < \epsilon.$$

Lo que prueba, siguiendo las letras en negrita, que $g \circ f$ es continua en a $\square$

Teorema. 3. ***(de la función Inversa)**. Sea una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida sobre todo un intervalo, inyectica y continua en (a, b). Su función inversa f^{-1} es continua en todo su dominio.*

Demostración: En Cálculo, los Teoremas denominados de la Función Inversa no son fáciles de probar. La prueba de este formalmente la veremos como una aplicación del Teorema de Bolzano un poco más adelante.

El siguiente dibujo es una justificación razonable de lo que dice el Teorema. Observemos que si miramos desde a hacia la gráfica (sentido de la flecha azul) tenemos la gráfica de f. Si lo hacemos desde $f(a)$ hacia la gráfica (sentido de la flecha roja) tenemos la gráfica de f^{-1}. Luego si una es continua la otra también.

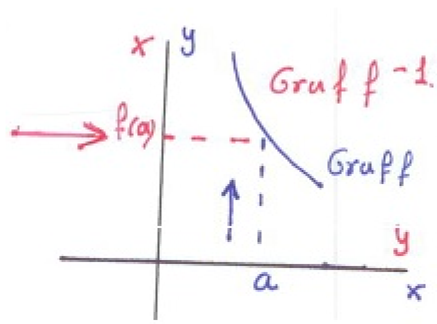


FIGURA 1. Coincidencia de la gráfica de f y f^{-1}.

$\square$

Ejemplos. 2.
- *Como las funciones x^n son continuas en $[0, \infty)$, también lo son sus correspondientes inversas $\sqrt[n]{x}$ en el mismo dominio $[0, \infty)$.*
- *La función $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x^2-1}}$, es la composición de la función racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ con la raíz $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Así siempre que $x \neq 1$ o -1, para que f sea continua, y $f(x) \geq 0$, para que este definida la composición, se tendrá que la función compuesta es continua.*

Otras funciones continuas. Las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x, \cos x$ y $\tan x$ son continuas, así como sus correspondientes inversas en los dominios que les corrsponden. También las funciones exponencial e^x y logaritmo $\ln x$ son continuas. Cuando veamos las definiciones formales de estas funciones justificaremos lo que acabamos de decir.

Ejemplos. 3.
- *La función $\tan(\frac{\pi}{2}e^{-x})$, vimos que tenía por dominio la semirecta $(0, \infty)$. Si $x > 0$, la función $\frac{\pi}{2}e^{-x} \in (0, \frac{\pi}{2}) \subset Dom \tan$ es continua y la composición con la tangente también lo es.*
- *La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es el cociente de dos funciones continuas, luego la función lo es salvo quizas para $x = 0$.*

En este último ejemplo, no sabemos si el límite en $x = 0$ existe, y por tanto no podemos decir si la función es continua en cero o no. Tenemos que estudiar más sobre límites para abordar casos como este y otros parecidos.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OTROS LÍMITES.

Dada una función f, ésta puede no tener límites en determinados puntos. O no ser finitos. Incluso podemos buscar límites donde la función no está definida, siempre que lo esté "cerca" de donde consideramos el límite.

Ejemplo. 1. *Consideremos la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si \quad x > 0; \\ \frac{x}{x^2+1}, & si \quad x \leq 0. \end{cases}$ *El comportamiento de esta función cerca de cero, o cuando se hace muy grande la x o muy pequeña puede ser "medido", aunque no sirve la definición de límite que conocemos hasta ahora.*

Demostración:

- Si $x > 0$ se acerca a cero, el cociente se hace muy grande. Si $x < 0$, la función tiene a anularse. La función no es continua en $x = 0$.
- Si $x > 0$ y se hace muy grande, el cociente se hace muy pequeño.
- Si $x < 0$ y se hace muy pequeña, grande en valor absoluto, el cociente se hace muy pequeño en valor absoluto.

$\square$

Vamos a dar otras definiciones de límites que tratán de atrapar situaciones como las anteriores.

Límites Infinitos.

Definición. 1. ***(Límites infinitos.)*** *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos $a \in \mathbb{R}$, de modo que existe $r > 0$ con*

$$(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Dom f.$$

a: *Se dice que el límite de la función f en el punto a es infinito, escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, si para todo $M > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si*

$$0 < |x - a| < \delta \quad entonces \quad f(x) > M.$$

b: *Se dice que el límite de la función f en el punto a es menos infinito, escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si para todo $N < 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si*

$$0 < |x-a| < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < N.$$

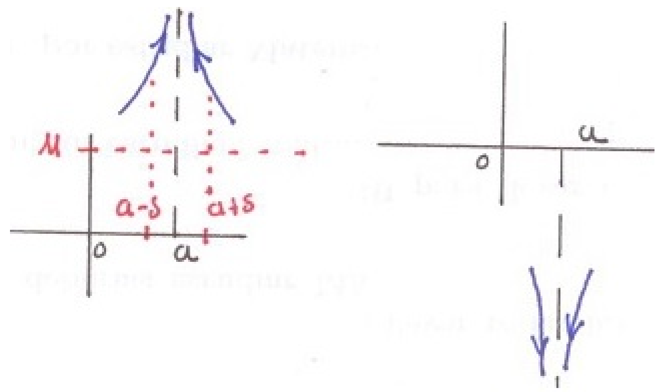


FIGURA 1. Límite infinito en a; y límite menos infinito.

Ejemplo. 2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

Demostración: Sea $M > 0$, si tomamos $\delta = \frac{1}{M} > 0$, si

$$0 < |x-0| = |x| < \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|} > M$$

□

Con una prueba análoga a la vista en este ejemplo se prueba que

Proposición. 1. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\exists \lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces*

a: *si $l > 0$ se sigue que* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{|g(x)|} = \infty$.

b: *si $l < 0$ se sigue que* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{|g(x)|} = -\infty$.

Observación. 1. **a:** *Los signos de las funciones f y g son los que determinan el signo del límite.*

b: *Si $l = 0$ estamos ante una* ***indeterminación.***

Ejemplos. 1.

- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x+3 = 6.$
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{(x^2-9)^3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x^2-9)^2} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{(x-3)^3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-4}{(x-3)^2} = -\infty.$

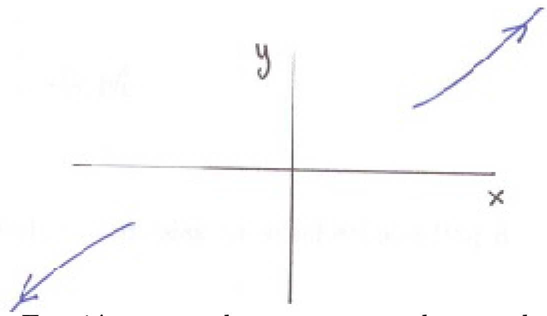


FIGURA 2. Función que se hace muy grande en valor absoluto cuando $|x|$ se hace grande.

Límites en el Infinito. Los siguientes límites indican la tendencia de una función cuando la x se hace muy grande.

Definición. 2. *(**Límites en Infinito**.) Sea una función $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, decimos que **el límite de la función en infinito**, escribimos $\lim_{x\to\infty} f(x)$, es*

a: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ de modo que si*

$$x > M, \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon;$$

b: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *si y solo si para todo $N > 0$, existe $M > 0$ de modo que si*

$$x > M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) > N;$$

c: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si y solo si para todo $N < 0$, existe $M > 0$ de modo que si*

$$x > M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) < N.$$

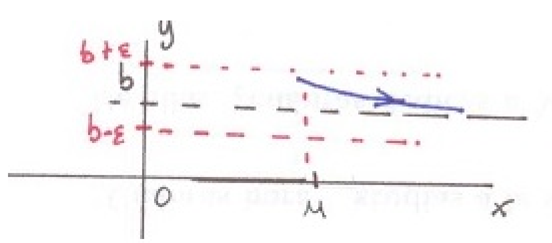


FIGURA 3. Límite en el infinito igual a b

Definición. 3. *(* ***Límites en menos Infinito****.) Sea una función* $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$*, decimos que* ***el límite de la función en menos infinito****, escribimos* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$*, es*

a: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *si y solo si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $M < 0$ *de modo que si*

$$x < M, \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon;$$

b: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *si y solo si para todo* $N > 0$*, existe* $M < 0$ *de modo que si*

$$x < M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) > N;$$

c: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si y solo si para todo* $N < 0$*, existe* $M < 0$ *de modo que si*

$$x < M, \quad \textit{entonces} \quad f(x) < N.$$

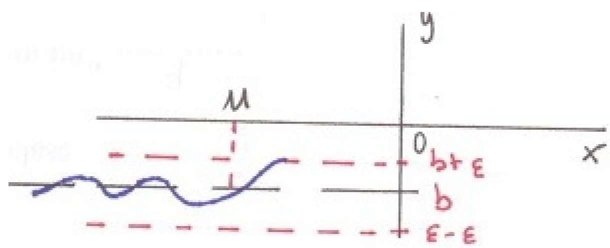


FIGURA 4. Límite en menos infinito igual a b

Ejemplo. 3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, y consideremos $M = \frac{1}{\epsilon}$. Ahora si

$$x > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{entonces} \quad x < \epsilon$$

□

Con una prueba similar se obtiene el siguiente resultado.

Proposición. 2. *Sean dos funciones* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *para las que existen los límites* $\lim_{x\to s} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to s} g(x) = \pm\infty$*, entonces*

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

donde s *puede ser un número real o más o memos infinito.*

Es decir, si el denominador de un cociente se hace muy grande en valor absoluto y el numerador permanece acotado, entonces el cociente tiende a cero. Además como en el caso de límites en puntos finitos se tiene de forma análoga que:

Proposición. 3. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, *entonces*

- $\lim_{x\to\pm\infty} f + g(x) = b_1 + b_2$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} fg(x) = b_1 b_2$;
- *Si además $b_2 \neq 0$ se tiene que*
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Es claro también que en los casos en que b_1 sea más o menos infitito y b_2 acotado, entonces $b_1 + b_2 = b_1$. Si además $b_2 \neq 0$ se tiene que $b_1 b_2 = \text{sign}(b_1)\text{sign}(b_2)|b_1|$.

Ejemplos. 2.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, *claro* $x^2 + 1 \to_{x\to\infty} \infty$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-x)}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} - 1 = -1$.

Indeterminaciones: Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las que existen los límites $\lim_{x\to s} f(x) = b_1$ y $\lim_{x\to s} g(x) = b_2$, donde s es un número real o $\pm\infty$. En los siguientes casos no podemos determinar como va a ser el límite que se propone. En estos casos hablaremos de **Indeterminación.**

- $\lim\limits_{x\to s} \dfrac{f}{g}(x)$ si $b_1 = b_2 = 0$ o bien $b_1, b_2 = \pm\infty$.
- $\lim_{x\to s}(f + g)(x)$ si $b_1 = \infty$ y $b_2 = -\infty$ o viceversa.
- $\lim_{x\to s} fg(x)$ si $b_1 = \pm\infty$ y $b_2 = 0$ o viceversa.

Observación. 2. *En los casos de indeterminación podemos hacer dos cosas. Manipular convenientemente el límite para resolverlo, lo cuál requiere ingenio. O esperar a ver la* ***Regla de L'Hôpital*** *un poco más adelante cuando estudiemos las derivadas de una función.*

Límites Laterales.

En las definiciones anteriores, no necesitamos que las función esté definida en el punto donde se toma el límite. Solo que lo esté todo lo cerca posible.

Ahora según la topología de la recta podemos acercarnos a un punto en dos direcciones.

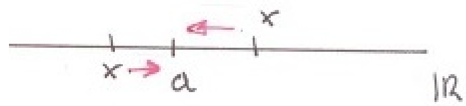


Figura 5. Aproximación por al derecha y por la izquierda a un punto a.

Lo anterior nos da pie a dar la definición de **límites laterales**. Son muchas, pero en esencia son las mismas que ya conocemos.

Definición. 4. *Sea una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A: *Sea un punto* $a \in \mathbb{R}$ *de modo que existe* $r > 0$ *con* $(a, a+r) \subset Domf$.

a_1**:** *Decimos que* b *es el* ***límite por la derecha*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < x - a < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

a_2**:** *Decimos que* ∞ *es el* ***límite por la derecha*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, *si para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < x - a < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) > M.$$

a_3**:** *Decimos que* $-\infty$ *es el* ***límite por la derecha*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, *si para todo* $M < 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < x - a < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < M.$$

B: *Sea un punto* $a \in \mathbb{R}$ *de modo que existe* $r > 0$ *con* $(a-r, a) \subset Domf$.

a_1**:** *Decimos que* b *es el* ***límite por la izquierda*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < a - x < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

a_2**:** *Decimos que* ∞ *es el* ***límite por la izquierda*** *de* f *en* a, *escribimos* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$, *si para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < a - x < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) > M.$$

a_3**:** *Decimos que* $-\infty$ *es el* ***límite por la izquierda*** *de* f *en* a*, escribimos* $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$*, si para todo* $M < 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de modo que si*

$$0 < a - x < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < M.$$

Ejemplos. 3.

- *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ 2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *Entonces* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2$*. Por otro lado* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$*. En este caso es claro que* ***no*** *existe el límite de la función en el punto* $x = 1$ *y por tanto la función* ***no*** *es continua en* $x = 1$*.*
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

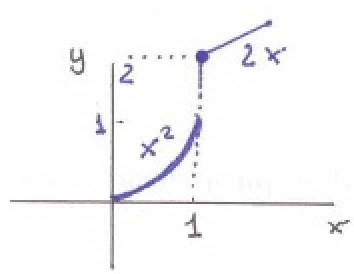


FIGURA 6. Discontinuidad de salto en $x = 1$.

La relación entre límite y límites laterales la da el siguiente Teorema.

Teorema. 1. *Sea una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, y sea un punto* $a \in \mathbb{R}$ *de modo que existe* $r > 0$ *con* $(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Domf$*. Son equivalentes:*

- *existe* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*, donde* $b \in \mathbb{R}$ *o* $b = \pm\infty$*;*
- *existen los límites laterales* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a^-} f(x)$*, y ambos son iguales a* b*.*

Demostración: Ejercicio $\square$

Observación. 3. *La relación de los límites laterales con respecto a las operaciones: suma, producto..etc y respecto de las indeterminaciones es la misma que la de los límites.*

Ejercicio. 1. *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & si \quad x > 0, \end{cases}$ *tenemos que calcular los límites laterales y determinar donde es continua la función.*

Demostración: Si $a < 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{a}}}{1+e^{\frac{1}{a}}} = f(a)$ ya que la función es un cociente de composiciones de funciones continuas. Observamos que $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ es continua si $x \neq 0$. Lo mismo ocurre si $a > 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+a^2}}{a^2} = f(a)$. Veamos que ocurre en $a = 0$.

Por un lado $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, y así

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Por el otro lado

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-(1+x^2))}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Existen los límites laterales, pero son distintos. Por tanto no existe el límite de la función en $x = 0$. La función no es continua en 0. $\square$

Los límites laterales nos permiten dar un clasificación de los puntos donde una función no es continua.

Definición. 5. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea un punto $a \in \mathbb{R}$ de modo que existe $r > 0$ con $(a-r, a+r)\backslash\{a\} \subset Domf$.*

- *Se dice que a es un* ***discontinuidad evitable*** *de f, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$.*
- *Se dice que a es un* ***discontinuidad de salto*** *de f, si existen sus límites laterales en a pero son distintos.*
- *Se dice que a es un* ***discontinuidad esencial*** *de f, si no existe alguno de los límites laterales.*

El Ejemplo 3 nos da una función con una discontinuidad de salto en el punto $x = 1$. La función $\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$.

Ejercicio. 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función prueba que*

A): *son equivalentes*

1): *existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$;*

2): *existe $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = l$;*

B): *son equivalentes*

1): *existe $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$;*

2): *existe $\lim_{x\to\infty} f(a+\frac{1}{x}) = l$.*

Demostración: Veamos una parte. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un $M > 0$ de mod que si $x > M$, entonces

$$|f(x) - l| < \epsilon.$$

Si $0 < y < 1/M$, entonces $1/y > M$ y

$$|f(\frac{1}{y}) - l| < \epsilon,$$

lo que prueba que $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = l$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN.

Dada una función f, los límites (también laterales) infinitos o en el infinito de la función nos dan una idea de como se comporta ésta; su gráfica sobre todo.

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea un punto $a \in \mathbb{R}$ de modo que existe $r > 0$ con $(a - r, a + r) \setminus \{a\} \subset Domf$. Decimos que f tiene una* ***asíntota vertical*** *en la recta $x = a$, si el $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o bien si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.*

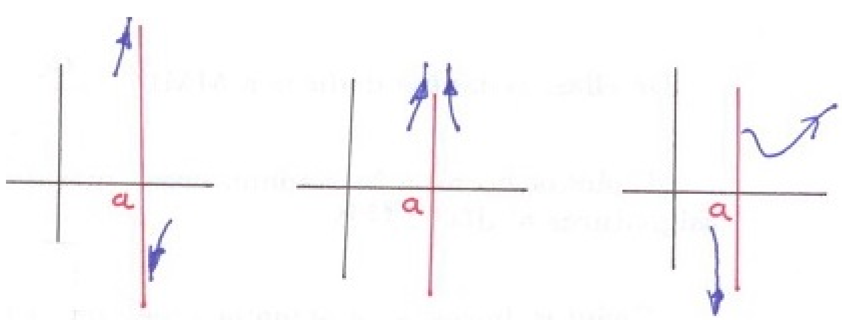


Figura 1. Ejemplos de asíntotas verticales.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el punto $x = 1$. Si calculamos allí los límites laterales*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{x}{x-1} = \infty \quad y \quad \lim_{x \to a^-} \frac{x}{x-1} = -\infty,$$

vemos que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical por partida doble.

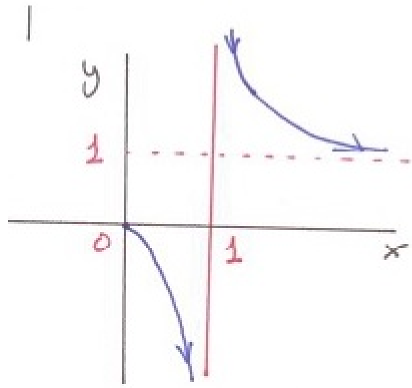


FIGURA 2. Ejemplo asíntota vertical en $x = 1$.

Definición. 2. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene una **asíntota horizontal** en la recta $y = b$, si el $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ o bien si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.*

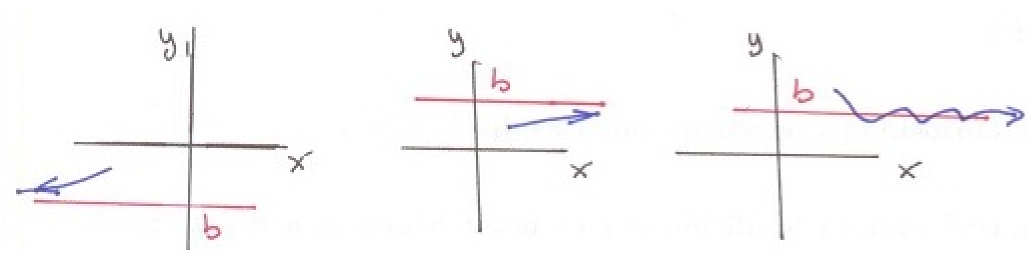


FIGURA 3. Ejemplos de asíntotas horizontales.

Ejemplo. 2. *Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Ésta es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Si calculamos los límites en el infinito*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

vemos que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función.

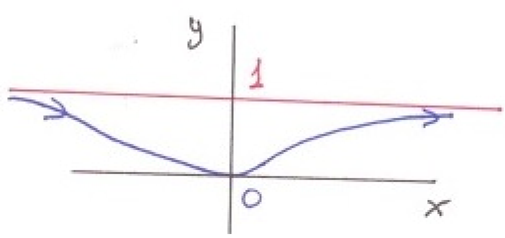


FIGURA 4. Ejemplo de asíntota horizontal en $y = 1$.

Definición. 3. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene una* ***asíntota oblicua*** *en la recta $y = ax + b$, si el $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$; o bien si el $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b$.*

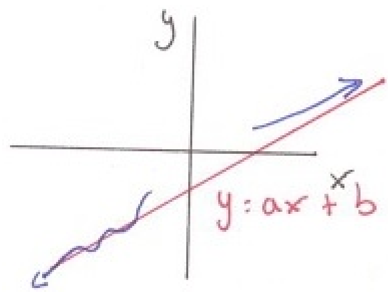


Figura 5. Ejemplo de asíntota oblicua.

Ejemplo. 3. *Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4x - 5}$. Como es una función racional donde el grado del numerador es una unidad mayor que él del denominador es posible que tenga una asíntota oblicua. Hagamos el cálculo.*

Demostración: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Por otro lado

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2 + 3}{x^2 + 4x - 5} = -3.$$

Luego la recta $y = x - 3$ es una asíntota oblicua tanto en infinito como en menos infinito. $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN FUNCIONES CONTINUAS.

Las funciones continuas definidas sobre intervalos cerrados de la recta real alcanza siempre un máximo y un mínimo. Las definiciones precisas son las siguientes.

Definición. 1. *Sea una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre un trozo de la recta real.*

A: *Decimos que f está **acotada** si existe $M > 0$ de modo que*

$$|f(x)| < M \quad \textit{para todo} \quad x \in A.$$

B: *Decimos que f tiene un **máximo** en el punto $x = x_0 \in A$ si*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{para todo} \quad x \in A.$$

C: *Decimos que f tiene un **mínimo** en el punto $x = x_1 \in A$ si*

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in A.$$

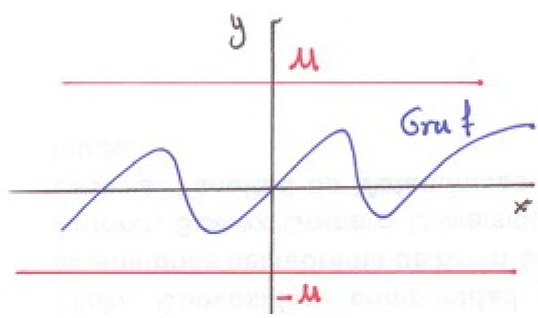


Figura 1. Función acotada.

En el caso de que f sea continua y esté definida sobre un intervalo cerrado, esta función alcanza un máximo y un mínimo.

Teorema. 1. *Sea una función continua $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real. Entonces*

A: *f está* ***acotada****.*

B: *f alcanza al menos un punto de* ***máximo*** *en $[a,b]$.*

C: *f alcanza al menos un punto de* ***mínimo*** *en $[a,b]$.*

Demostración:

A: Supongamos que f no está acotada. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ debe de existir un $x_n \in [a,b]$ de modo que $|f(x_n)| > n$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver apuntes sobre Subsucesiones) tiene que existir una subsucesión $(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} x$ con $x \in [a,b]$. Como f es continua y por la caracterización de la continuidad por sucesiones se tiene que

$$f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} f(x),$$

pero por la definición de la sucesión $f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} \infty$. Llegamos a contradicción por suponer que f no está acotada. Por tanto lo está.

B: Ejercicio, se hace de forma análoga a como procedemos a continuación.

C: f es una función acotada. Si consideramos el conjunto de $\mathbb{R}$

$$A = \{f(x) \in \mathbb{R} \ : \ x \in [a,b]\},$$

este es un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Entonces existe $\beta = \text{ínf}\, A$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\text{existe} \quad x_n \in [a,b] \quad \text{de modo que} \quad \beta \leq f(x_n) < \beta + \frac{1}{n},$$

donde solo hemos usados las propiedades de los ínfimos.

De nuevo por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver apuntes sobre Subsucesiones) tiene que existir una subsucesión $(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} x$ con $x \in [a,b]$. Como f es continua y por la caracterización de la continuidad por sucesiones se tiene que

$$f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} f(x)$$

Por otro lado $f(x_{n_j}) \to_{j\to\infty} \beta$, por la definición de la sucesión. Ahora por la unicidad del límite se sigue que

$$f(x) = \beta,$$

así x es el mínimo que buscabamos.

□

Ejemplo. 1. *Sea la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Es una función continua en todo su dominio y además*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad y \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Esta función no esta acotada, no alcanza un máximo ni tampoco un mínimo (fijemosnos que $1 \notin (0,1)$).

Observemos que esta misma función $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo $[2,3]$ alcanza su máximo en $x = 2$ y su mínimo en $x = 3$.

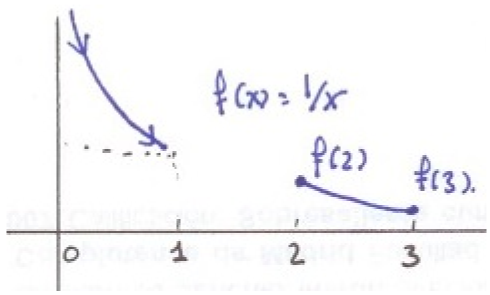


FIGURA 2. Máximos y mínimos.

Observación. 1. *Un Teorema como el anterior se puede dar sustituyendo el intervalo cerrado $[a,b]$ por un conjunto K compacto (ver apéndice sobre la Topología de la Recta).*

Muchos problemas de Matemática Aplicada tienen que ver con optimizar funciones, es decir encontrar máximos o mínimos de tales funciones. La continuidad junto con la compacidad son dos herramientas poderosas en los problemas de optimización.

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA DE BOLZANO.

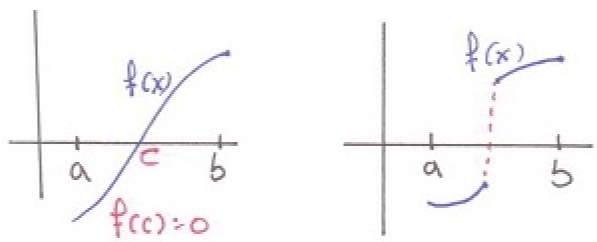


Figura 1. Gráfica continua. Gráfica rota.

El **Teorema de Bolzano** es el resultado que nos permite pintar las gráficas de las funciones continuas como curvas de trazo continuo. Esto permite reconocer gráficas, como la que aperece rota en la figura de arriba, como funciones **no** continuas. También es el resultado que nos permite decir si ciertas ecuaciones $f(x) = 0$, donde $y = f(x)$ es una función continua, tiene raíces (ver el primer dibujo de arriba).

Teorema. 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua de modo que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto intermedio $c \in (a, b)$ para el cuál $f(c) = 0$.*

Vamos a dar dos demostraciones de este resultado. La primera teórica, que nos va a permitir repasar conocimientos. La segunda es un **algoritmo** que nos permite resolver ecuaciones.

Demostración: (**primera**). Supondremos que $f(a) < 0 < f(b)$, en otro caso se procede de forma análoga (ejercicio).

Como $f(a) < 0$, de la continuidad de f en a ($\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$) existe un $\delta > 0$ de modo que si $x \in [a, a + \delta]$ se tiene que $f(x) < 0$. Por eso si definimos el conjunto

$$A = \{s \in [a, b] \ : \ f(x) < 0 \text{ para todo } x \in [a, s]\,\}$$

este conjunto es no vacío. Y como está acotado superiormente existe

$$\sup A = c.$$

Ahora

- $c < b$. Ya que si suponemos que $c = b$, como $\lim_{x\to b^-} f(x) > 0$, c no puede ser el supremo de A. Claro, ya que existe un $\delta_1 > 0$ de modo que para todo $x \in [b-\delta, b]$ se tiene que $f(x) > 0$, (no existe $s \in A$ de modo que $s \in [b-\delta, b]$).
- Por otro lado si $f(c) > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in [c-\delta, c+\delta]$ se tiene que $f(x) > 0$. Como antes, no existe $s \in A$ de modo que $s \in [c-\delta, c+\delta]$. Luego c no puede ser el supremo de A.
- Por un argumento similar, si $f(c) < 0$ nos lleva a que $c < \sup A$. Contradicción.

Luego solo queda la posibilidad de que $f(c) = 0$. $\square$

Demostración: **(segunda)**. De nuevo supondremos que $f(a) < 0 < f(b)$. Tomaremos

$$a_0 = a \qquad \text{y} \qquad b_0 = b.$$

Ahora consideramos el punto medio $r = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

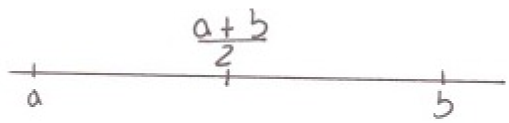


Figura 2. Punto medio.

Estamos ante dos posibilidades,

- si $f(r) \geq 0$, tomamos

$$a_1 = a_0 \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

O bien,

- si $f(r) < 0$, tomamos

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad \text{y} \qquad b_1 = b_0.$$

Así obtenemos en cualquier caso que

$$a_1 < b_1, \quad f(a_1) < 0 \leq f(b_1) \quad \text{ y que } \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Si repetimos el argumento (o **algoritmo**), tomamos el punto medio $r = \dfrac{a_1 + b_2}{2}$. Estamos ante dos posibilidades

- si $f(r) \geq 0$, tomamos

$$a_2 = a_1 \qquad \text{y} \qquad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

O bien,

- si $f(r) < 0$, tomamos
$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad \text{y} \qquad b_2 = b_1.$$

Así obtenemos en cualquier caso que
$$a_2 < b_2, \quad f(a_2) < 0 \leq f(b_2) \quad \text{ y que } \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

Si seguimos repitiendo este proceso obtendremos dos sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$a_n < b_n, \quad f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad \text{ y que } \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Además

- por construcción $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es creciente y por tanto existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$;
- por construcción $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y por tanto existe $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$.

Ahora como $a_n < b_n$ para todo n se tiene que $\alpha \leq \beta$ y además
$$\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to_{n\to\infty} 0.$$

Luego $\alpha = \beta = c \in (a, b)$. Además, de la caracterización de la continuidad por susesiones (f es continua en c), se sigue que como

- $$a_n \to_{n\to\infty} c \quad \Rightarrow \quad 0 > f(a_n) \to_{n\to\infty} f(c) \leq 0;$$
- $$b_n \to_{n\to\infty} c \quad \Rightarrow \quad 0 < f(b_n) \to_{n\to\infty} f(c) \geq 0.$$

Por tanto $f(c) = 0$, que es lo que queremos demostrar

$\square$

Observación. 1. *Supongamos que tenemos la ecuación* $f(x) = 0$, *donde* f *es una función continua en un intervalo* $[a, b]$ *de modo que* $f(a)f(b) < 0$. *El Teorema anterior nos dice que existe un punto* $c \in (a, b)$ *que es solución de la ecuación. ¿Como encontramos* c*?*

Demostración: Si f es una función que tiene inversa, entonces $c = f^{-1}(0)$. Esto es lo que se llama **despejar** la x de la ecuación. Aunque como sabemos esto no es siempre posible (ver ejemplo siguiente).

Si fijamos un error $\epsilon > 0$ podemos encontrar un c' de modo que $|c - c'| < \epsilon$, es decir una **aproximación** de la solución. Claro, como $\dfrac{b-a}{2^n} \to_{n\to\infty} 0$, sea

n_0 de modo que $\dfrac{b-a}{2^{n_0}} < \epsilon$. Si tomamos c y $c' = a_{n_0}$ como en la prueba del Teorema anterior, entonces

$$|c - c'| = c - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \leq \frac{b-a}{2^{n_0}} < \epsilon$$

$\square$

Ejemplo. 1. *Vamos a resolver la ecuación*

$$\frac{x^{15} + 7x^2 - 12}{\ln x} - x^2 = 0.$$

Demostración: Despejar la x no parece que sea posible. Así que consideramos la función

$$f(x) = \frac{x^{15} + 7x^2 - 12}{\ln x} - x^2.$$

Vamos a estudiar esta función.

Como la función logaritmo está definida en $(0, \infty)$, donde es continua, y se anula en $x = 1$, tenemos que

$$\mathrm{Dom} f = (0, \infty) \backslash \{1\}.$$

En este dominio la función es continua pués es suma, producto y división de funciones continuas. Calculemos ahora los límites de la función en los extremos de su dominio.

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = 0^+$; donde 0^+ indica cero por la derecha, por al parte positiva cercana a cero,
- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = \infty$.
- $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = -\infty$.
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{15}+7x^2-12}{\ln x} - x^2 = \infty$.

Dada que la función es continua, f tendrá una gráfica del tipo

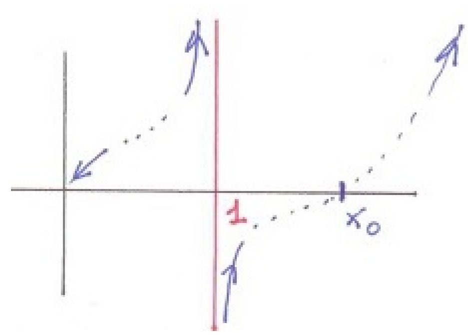


FIGURA 3. Gráfica aproximada de f .

Ahora tanteando vemos que para $x = 2$,

$$f(2) = \frac{2^{15} + 7 \times 2^2 - 12}{\ln 2} - 2^2 \geq \frac{2^{15}}{3} > 0.$$

Como la función cerca de 1^+ es negativa, el Teotema de Bozano nos dice que nuestra ecuación tiene al menos una solución x_0 entre 1 y 2. Además, de la prueba del teorema, sabemos que $|x_0 - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ $\square$

Un resultado más general que el Teorema de Bolzano es el siguiente.

Corolario. 1. ***(Conservación de la conexión.)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si λ es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(c) = \lambda$.*

Demostración: Supongamos que $f(a) < \lambda < f(b)$, (el caso $f(a) > \lambda > f(b)$, se resuelve poniendo h=-f y entonces $h(a) < -\lambda < h(b)$). Gráficamente parece claro,

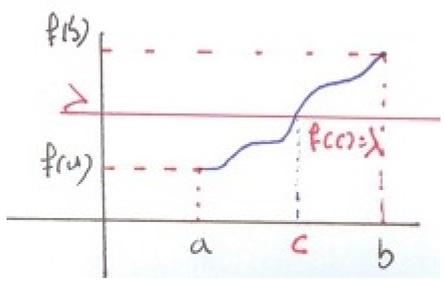


FIGURA 4. Gráfica aproximada de f .

si tenemos que ir del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ del plano con un trazo continuo éste tendrá que cortar a la recta $y = \lambda$. Formalmente, consideramos la función

$$\begin{array}{cccccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & g(x) & = & f(x) - \lambda. \end{array}$$

g es una función continua por ser diferencia de funciones continuas. Además, $g(a)g(b) < 0$, así por el Teorema de Bolzano existe un $c \in (a,b)$ con

$$0 = g(c) = f(c) - \lambda \quad \Rightarrow \quad f(c) = \lambda$$

$\square$

Observación. 2. *Después de estos dos resultados queda claro que las gráficas de las funciones continuas tienen que ser trazos continuos.*

Una aplicación que dejamos pendiente de este resultado es el Teorema de la Función Inversa. Antes un Lema.

Lema. 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in (a,b)$. Si $f(c) < f(a), f(b)$ o bien $f(a), f(b) < f(c)$, entonces f no es inyectiva.*

Demostración: Teniendo en cuenta el Corolario de la conservación de la conexión, los siguientes dibujos nos convencerán de que lo que se afirma es cierto.

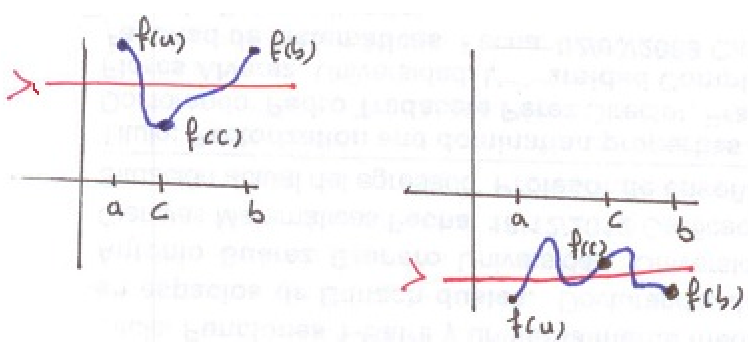


FIGURA 5. Demostración sin palabras.

□

Teorema. 2. *(de la Función Inversa). Sea una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida sobre todo un intervalo, inyectica y continua en (a,b). Su función inversa f^{-1} es continua en todo su dominio.*

Demostración: Sea $c \in (a,b)$ y consideremos $f(c) \in \mathrm{Dom} f^{-1}$. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $r > 0$ de modo que

$$c - \epsilon < c - r < c < c + r < c + \epsilon \quad \text{y con} \quad (c - r, c + r) \subset (a,b).$$

Entonces, de la continuidad de f y por ser inyectiva (ver Lema), o bien $f(c-r) < f(c) < f(c+r)$ o bien $f(c-r) > f(c) > f(c+r)$. Consideraremos el primer caso, en el otro se procede de manera análoga.

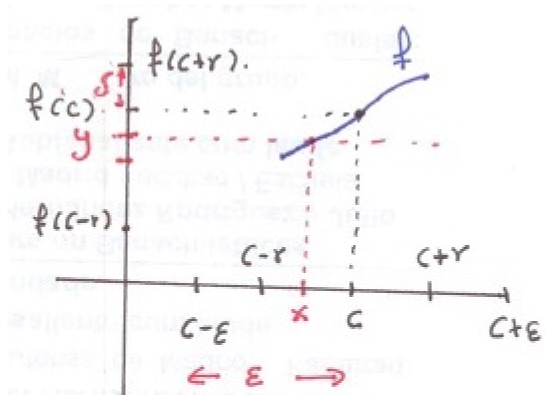


Figura 6. Función inversa.

Sea $\delta = \text{mín}\{\, f(c) - f(c-r), f(c+r) - f(c)\,\} > 0$. Entonces para todo $|y - f(c)| < \delta$, existe (por el corolario anterior) $x \in (c - r, c + r)$ de modo que $f(x) = y$, luego por ser f^{-1} inyectiva, para todo $|y - f(c)| < \delta$, se tiene que

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))| = |x - c| < r < \epsilon,$$

lo que prueba la continuidad de f^{-1} en $f(c)$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONTINUIDAD UNIFORME.

El concepto de **continuidad uniforme** es una condición más fuerte que la continuidad. Aunque teórico, es muy útil en resultados sobre integrabilidad. Es una característica de las funciones que queda escondida en las demostraciones de los teoremas, pero sin ella algunos resultados importantes no podrían ser demostrados. Como por ejemplo que una función continua definida en un intervalo cerrado es integrable.

Vamos a ver la definición y alguna caracterización por si fuera necesaria en el futuro.

Definición. 1. *Sea una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** en el conjunto A si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in A$ y*

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Observación. 1.

- *La continuidad uniforme se define sobre todo un conjunto, no punto a punto como en el caso de la continuidad. Así que aunque formalmente se parecen mucho las dos definiciones, ésta de la continuidad uniforme se establece sobre todos los elemento de un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$.*
- *Es un sencillo ejercicio probar que si A es un intervalo abierto de la recta, entonces la continuidad uniforme sobre A implica la continuidad sobre cada elemento del conjunto A.*

Al contrario.

Teorema. 1. *Sea una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua sobre todos los elementos del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$.*

Demostración: En este resultado se puede reemplazar el intervalo $[a, b]$ por un conjunto compacto K de la recta; lo que vamos a usar en la prueba es la cracterización de compactos por sucesiones (mira el Apéndice correspondiente).

Supongamos que f **no** es uniformemente continua. Entonces podemos encontrar un $\epsilon > 0$ de modo que para todo $\frac{1}{n}$ existen $x_n, y_n \in [a, b]$ verificando

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon.$$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar dos subsucesiones (primero una y de ésta sacamos la segunda) de modo que

$$x_{n_k} \quad \to_{k\to\infty} \quad x$$

$$y_{n_{k_j}} \quad \to_{j\to\infty} \quad y.$$

Es claro que $x_{n_{k_j}} \to_{j\to\infty} x$ y que $x, y \in [a, b]$ (ya que el intervalo es cerrado). También $x = y$.

$$0 \leq |x - y| \leq |x - x_{n_{k_j}}| + |x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| + |y_{n_{k_j}} - y| \leq$$

$$|x - x_{n_{k_j}}| + \frac{1}{n_{k_j}} + |y_{n_{k_j}} - y| \to_{j\infty} 0.$$

Ahora de la continuidad de f se tiene que

$$f(x_{n_{k_j}}) \quad \to_{j\to\infty} \quad f(x)x$$

$$f(y_{n_{k_j}}) \quad \to_{j\to\infty} \quad f(y) = f(x),$$

lo cuál es incompatible con que

$$|f(x_{n_{k_j}}) - f(y_{n_{k_j}})| > \epsilon \qquad \text{para toda} \qquad j = 1, 2, ... \qquad \square$$

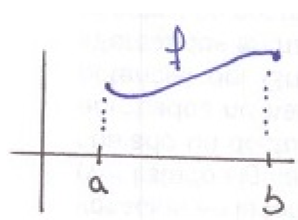


FIGURA 1. Función uniformemente continua.

Ejemplos. 1. *Las siguiente funciones no son uniformemente continuas en los dominios que se indican. Observemos que dichos dominios no son intervalos cerrados.*

- $f(x) = \frac{1}{x}$, *para* $x \in (0, 1]$.
- $f(x) = x^2$ *para* $x > 1$.

Demostración: En ambos casos las funciones son continuas en sus respectivos dominios. Sin embargo

- Dado $0 < \epsilon < 1$, para cualquier $\delta > 0$, como $\frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$, podemos encontrar un $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} < \delta$ con $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{m})| = |n - m| \geq 1$.

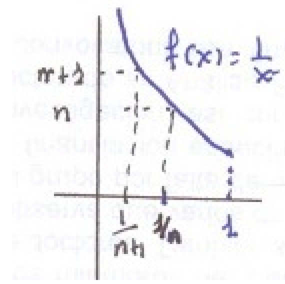


Figura 2. Función **no** uniformemente continua.

- Sea $x > 1$ y cualquier $\delta > 0$, entonces

  $$|f(x) - f(x+\delta)| = |x^2 - (x^2 + 2\delta x + \delta^2)| \geq 2x\delta \to_{x\to\infty} \infty.$$

  Luego x^2 no puede ser uniformemente continua en $(1, \infty)$

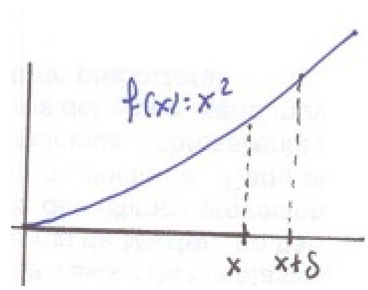


Figura 3. Función **no** uniformemente continua.

$\square$

Un ejemplo importante de funciones uniformemente continuas lo forman las llamadas **funciones Lipschitzianas**.

Definición. 2. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **Lipschitz** (o que cumple la condición de Lipschitz) si existe $K > 0$ de modo que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \textit{para todo} \qquad x, y \in A.$$

Proposición. 1. *Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, entonces es uniformemente continua en A*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, se toma $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Así para todo $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$ se sigue que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = \epsilon$$

□

Observación. 2.

- *Más adelante veremos que las funciones con derivada continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ son Lipschitz.*
- *Las aplicaciones Lipschitz con constante $K < 1$ son importantes en los* ***Teoremas de Punto Fijo*** *(tanto de Banach como de Picard).*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES MONÓTONAS.

Las **funciones monótonas** tiene buenas propiedades. Son inyectivas y "casi" continuas. Después veremos el recíproco. Una función inyectiva y continua es estrictamente monótona.

Recordemos las siguientes definiciones:

Definición. 1. *Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama:*

monótona creciente: *si para $x, y \in A$ con $x \leq y$ se tiene que*

$$f(x) \leq f(x);$$

estrictamente monótona creciente: *si para $x, y \in A$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(x) < f(x);$$

monótona decreciente: *si para $x, y \in A$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(x) \geq f(x);$$

estrictamente monótona creciente: *si para $x, y \in A$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(x) > f(x).$$

Se dice de una función que es **estrictamente monótona** si lo es de forma creciente o decreciente. Se dice que es **monótona** si lo es de forma creciente o decreciente.

Ejercicio. 1. *Prueba que una función estrictamente monótona es inyectiva.*

Además se tiene lo siguiente.

Teorema. 1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre I intervalo o semirecta. Si f es una función monótona y acotada entonces para todo $x_0 \in I$ existen los límite laterales en x_0, es decir existen*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad y \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Demostración: Vemos la prueba para el caso de que la función f sea creciente. El caso f decreciente queda como ejercicio.

Sea x_0 un punto interior del intervalo I. En el caso de uno de sus extremos solo podemos aspirar a encontrar un solo límite lateral, queda también como ejercicio. Como x_0 es interior podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I.$$

Definimos

$$\alpha = \sup\{\, f(x) \ : \ x \in (x_0 - \delta, x_0)\,\}$$

y

$$\beta = \inf\{\, f(x) \ : \ x \in (x_0, x_0 + \delta)\,\}.$$

Ambos números existen dado que f está acotada. Además, por ser creciente, $\beta \leq \alpha$. Solo queda ver que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$$

y que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha.$$

Vamos con el primer límite. Dado $\epsilon > 0$, se tiene que $\beta + \epsilon$ no es un ínfimo, por tanto existe un $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$ de modo que

$$\beta \leq f(x_1) \leq \beta + \epsilon.$$

Por ser f creciente, para todo $x_0 < x \leq x_1$ (o equivalentemente para todo $0 < x - x_0 \leq |x_0 - x_1| = r$) se tiene que

$$\beta \leq f(x) \leq f(x_1) \leq \beta + \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |\beta - f(x)| \leq \epsilon.$$

Para ver que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$ se procede de forma análoga $\square$

En las hipótesis del Teorema anterior se pide que f sea acotada para evitar los casos como él de la figura siguiente. En ella solo podemos aspirar a encontrar límites laterales infinitos.

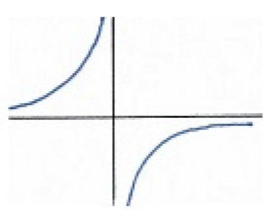


Figura 1

Proposición. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona acotada sobre un intervalo o semirecta I. Sean $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, entonces*

si f es creciente: $\lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_2^-} f(x)$;
si f es decreciente: $\lim_{x \to x_1^+} f(x) \geq \lim_{x \to x_2^-} f(x)$.

Demostración: Veamos el caso de f creciente. El otro es análogo.

Del Teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \inf\{\, f(x) \ : \ x \in (x_1, x_1 + \delta)\,\} = \beta$$

y que

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \sup\{\, f(x) \ : \ x \in (x_2 - \delta, x_2)\,\} = \alpha.$$

Es claro que podemos tomar el mismo $\delta > 0$ en ambos casos de modo que

$$(x_1, x_1 + \delta) \cap (x_2 - \delta, x_2) = \emptyset.$$

FIGURA 2

Puesto que la función f es creciente, si $y_1 \in (x_1, x_1 + \delta)$ y $y_2 \in (x_2 - \delta, x_2)$, por tanto $y_1 < y_2$, se sigue que

$$f(y_1) \leq f(y_2).$$

Ya es claro que

$$\beta \leq \alpha \qquad \square$$

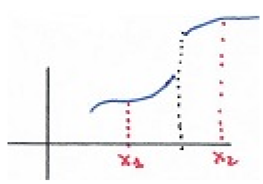


FIGURA 3

Ambos resultados prueban que las **discontinuidades** de las funciones monótonas acotadas son desigualdades de salto.

De lo anterior se deduce que una función monótona no puede terner "muchas" discontinuidades.

Teorema. 2. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona acotada sobre un intervalo o semirecta I. El conjunto de las discontinuidades de f en I es a lo más numerable.*

Demostración: Consideramos el conjunto de discontinuidades de f

$$E = \{\, x \in I \ : \ f \text{ discontinua en } \ x \,\}.$$

Veamos que E tiene cardinal a lo más él de $\mathbb{N}$ (ver Apéndice de Cardinalidad).

Supondremos que f es creciente (se procede de forma análoga en el caso de que f sea decreciente).

Sea $x_0 \in E$. Como f es discontinua en x_0 podemos encontrar un $r_{x_0} \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < r_{x_0} < \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Definimos la aplicación

$$\begin{array}{cccccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{Q} & \\ & & x & \to & \varphi(x) & = & r_x \end{array}$$

Esta aplicación es **inyectiva** ya que si $x_1, x_2 \in E$, distintos con $x_1 < x_2$, por la Proposición anterior tenemos que

$$r_{x_1} < \lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_2^-} f(x) < r_{x_2},$$

luego $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ son distintos.

Por ser φ inyectiva se sigue que

$$Card E \leq Card \mathbb{Q} \leq Card \mathbb{N} \qquad \square$$

Para terminar veamos que las funciones inyectivas y continuas tienen que ser necesariamente monótonas.

Teorema. 3. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua sobre un intervalo o semirecta I. f es estrictamente monótona en I.*

Demostración: Dado que f es inyectiva, si suponemos que no es estritamente monónota tendríamos que existirían $x_1, x_2, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$, de modo que o bien

$$f(x_2) < f(x_1) \qquad \text{y} \qquad f(x_2) < f(x_3)$$

o bien

$$f(x_2) > f(x_1) \qquad \text{y} \qquad f(x_2) > f(x_3).$$

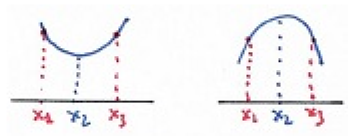


FIGURA 4

En cualquiera de las dos situaciones anteriores, como f es continua, el Teorema de Bolzano nos asegura que f no sería inyectiva lo que es una contradicción $\square$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Al enfrentarnos con el problema de representar la gráfica de una función, la determinación del dominio de la misma y la parte del mismo donde es continua, así como el cálculo de los límites en los extremos del dominio (de aquí saldrán las asíntotas) nos dan una idea bastante cercana a lo que será la gráfica definitiva. En muchos casos, con estos datos tendremos suficiente información sobre la función con la que nos toque tratar.

Veamos algunos ejemplos para aclarar lo enunciado arriba.

Ejemplo. 1. *Nos dan la función* $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ *para* $x \in [-3, 2]$. *Nos piden determinar si esta acotada, si tiene máximo y mínimo. Y hacer un boceto de su gráfica.*

Demostración: Claramente $\mathrm{Dom} f = [-3, 2] \setminus \{-2\}$ y aquí la función es continua (f es división de funciones continuas y el denominador se anula para $x = -2$). Calculemos los límites de la función en los extremos de su dominio.

- Como f es continua en -3 y 2 tenemos que $f(-3) = 0$ y $f(2) = \frac{5}{4}$.
- $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$.
- $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+3}{x+2} = \infty$.

Para determinar los límites anteriores, dado que el denominador tiende a cero y el númerador no se anula, es determinante examinar el **signo** de la función. Así

- Si $x \in [-3, -2)$ se tiene que $f(x) = \frac{x+3}{x+2} \leq 0$.
- Si $x \in [-2, 2]$ se tiene que $f(x) = \frac{x+3}{x+2} > 0$.

Luego la gráfica de la función será del tipo

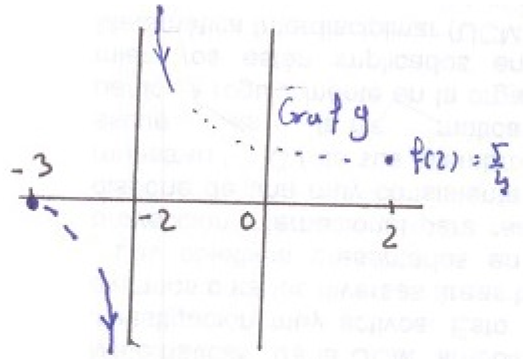


FIGURA 1. Gráfica de la función.

Con los datos disponibles podemos decir que la función no está acotada. Por tanto no tiene máximo o mínimo. Sin embargo si tiene dos **mínimos relativos** en $x = -3$ y en $x = 2$ (son mínimos en un entorno de cada uno de ellos; para la definición precisa ver el próximo Tema).

□

Ejemplo. 2. *Nos dan la función* $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. *Nos piden determinar si está acotada, si tiene máximo y mínimo. Y hacer un boceto de su gráfica.*

Demostración: Claramente Dom$f = \mathbb{R}$ y aquí la función es continua (f es división de funciones continuas y el denominador no se anula). Calculemos los límites de la función en los extremos de su dominio.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1.$

Así en $y = -1$ tenemos una asíntota horizontal. Como $|1-t^2| \leq 1+t^2$, para todo t, la gráfica de la función queda por encima de la asíntota. Por otro lado, el **signo** de la función es,

- si $t \in [-1,1]$, $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \geq 0$.
- Si $t \notin [-1,1]$ se tiene que $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} < 0$.
- $f(0) = 1 \geq \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Luego la gráfica de la función será del tipo

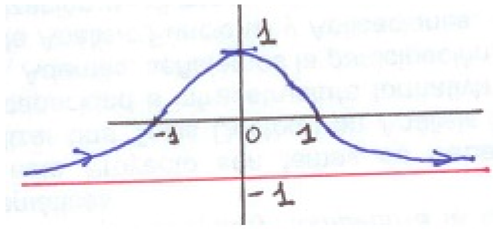


FIGURA 2. Gráfica de la función.

Por tanto la función está acotada, no tiene mínimo, pero si un máximo en $x = 0$. Además la función es **par,** es decir $f(-x) = f(x)$ o lo que es lo mismo su gráfica es simétrica respecto del eje de las y's. $\square$

Ejemplo. 3. *Nos dan la función* $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$. *Nos piden determinar si está acotada, si tiene máximo y mínimo. Y hacer un boceto de su gráfica.*

Demostración:

Claramente Dom$f = \mathbb{R}$ y aquí la función es continua (f es división de funciones continuas y el denominador no se anula). Calculemos los límites de la función en los extremos de su dominio.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 0.$

Así en $y = 0$ tenemos una asíntota horizontal. Por otro lado, el **signo** de la función es,

- si $t < 0$, $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} < 0.$
- Si $t > 0$ se tiene que $f(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} > 0.$
- $f(0) = 0.$

Luego la gráfica de la función será del tipo

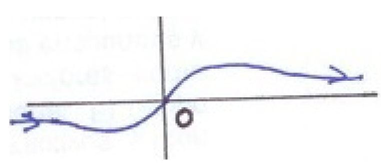


FIGURA 3. Gráfica de la función.

Por tanto la función está acotada. Queda por debajo de la asíntota cuando $t \to -\infty$ y por encima cuando $t \to \infty$. De la foma de la gráfica se deduce que al menos tiene que tener un mínimo, para un t negativo. Y como la función es **impar,** es decir $f(-x) = -f(x)$ o lo que es lo mismo su gráfica es simétrica respecto del punto $(0, 0)$, deberá tener un máximo para algún t positivo. $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

GRÁFICAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Se pueden representar ”gráficas” de funciones con más variables, si estas no son muchas claro. Para ello veremos que es necesario conocer lo que hemos visto sobre gráficas de funciones de una variable. Antes de empezar con problemas más complejos repasemos algo sobre curvas planas.

La gráfica de una función real de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la pintamos en el plano

$$\mathbb{R}^2 = \{\, (x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

En Geometría Elemental hemos aprendido a representar algunas curvas planas. La más fácil es la **recta**:

$$ax + by = d, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $b \neq 0$, podemos despejar y escribir

$$y = -\frac{x}{b} + \frac{d}{b},$$

lo cuál es una gráfica que es fácil de representar.

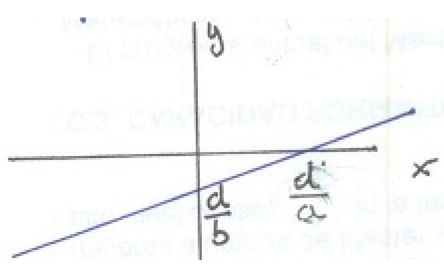


Figura 1. Recta en el plano.

Las cónicas. Las curvas planas que vienen dadas por polinomios de segundo grado en dos variables son las **cónicas.** En su forma reducida o canónica son

- **La Elipse**: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Despejando,
$$y=\pm\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})b^2}\quad \text{para}\quad x\in[-a,a].$$
Más adelante representaremos estas dos gráficas y nos saldrá la elipse

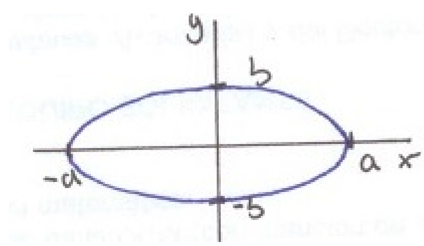


FIGURA 2. Elipse.

- **La Hipérbola**: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Despejando,
$$y=\pm\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}\quad \text{para}\quad |x|\geq a.$$
Más adelante podremos representar estas dos gráficas y nos saldrá la hipérbola. Observemos que si podemos calcular ya sus asíntotas:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x^2}}=\frac{a}{b}.$$
y
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}-\frac{a}{b}x=\lim_{x\to\infty}\frac{b^2}{\sqrt{(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2}+\frac{a}{b}x}=0.$$

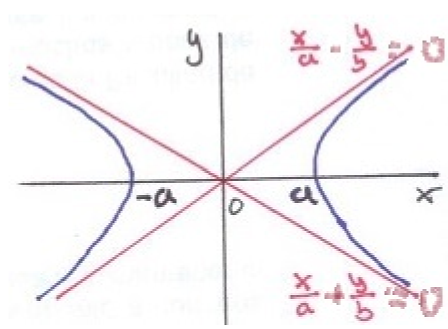


FIGURA 3. Hipérbola.

- **La Parábola**: $ay+bx^2=1$. Despejando, si $a\neq 0$
$$y=\frac{-b}{a}x^2+\frac{1}{a}\quad \text{para}\quad |x|\in\mathbb{R}.$$

Más adelante representaremos esta gráfica y nos saldrá la parábola:

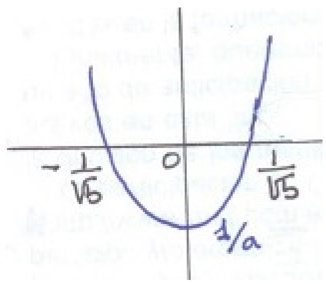


FIGURA 4. Parábola.

Curvas Paramétricas.

Vamos a considerar funciones de una variable pero que toman valores en $\mathbb{R}^n$.

Definición. 1. *Una **curva paramétrica** en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, es toda función*

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \to & \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ...\gamma_n(t)). \end{array}$$

donde $\gamma_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas de una variable para todo $k = 1, 2, .., n$.

Definición. 2. *Llamamos, formalmente, **curva** en $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ de modo que es la imagen de una curva paramétrica γ. A la función γ se le llama **parametrización** de la curva.*

Si nos límitamos a pensar en el plano o el espacio, una curva no es más que un camino o trayectoria. En estas bajas dimensiones podemos esperar pintar las trayectorias. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. 1. *Consideramos la curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & [0,2\pi] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \to & \gamma(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t) \end{array} \quad \textit{con} \quad a, b > 0.$$

Esta función γ está definida por dos funciones reales de una variable real $\gamma_1(t) = a\cos t$ y $\gamma_2(t) = b \operatorname{sen} t$. ¿Cómo pintamos la curva o trayectoria que representa γ?

Demostración: Tenemos que representar el conjunto

$$C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t) \quad \text{para todo} \quad t \in [0, 2\pi] \,\}.$$

Parece claro que primero debemos saber como se comportan las funciones coordenadas γ_1 y γ_2 antes de pasar a representar C. Así γ_1 es

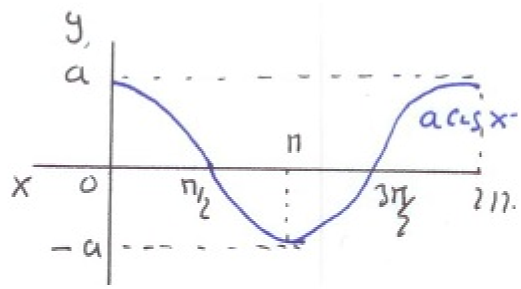


FIGURA 5. Gráfica de γ_1.

□

Y γ_2 es

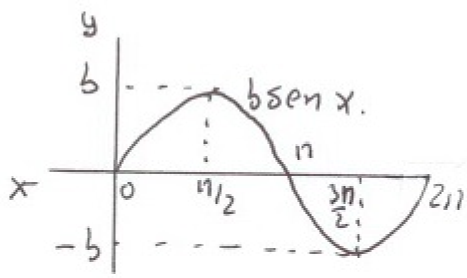


FIGURA 6. Gráfica de γ_2.

Viendo el comportamiento de estas dos gráficas podemos razonablemente ver que C es

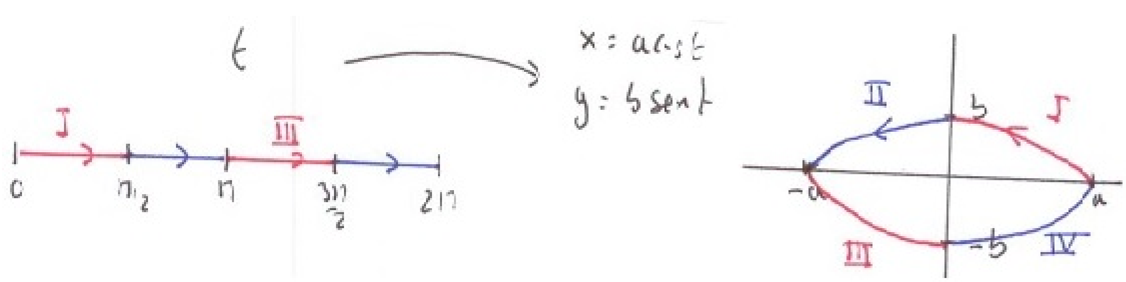


FIGURA 7. Paramétrización de la Elipse.

□

Observemos que para para resolver este problema en dos variables necesitamos resolver las gráficas de dos funciones de una variable.

Gráfica de un Potencial.

Consideraremos ahora funciones respecto de n variables y cuya imagen está en $\mathbb{R}$, funciones

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2, .., x_n) & \to & f(x_1, x_2, .., x_n). \end{array}$$

A veces estas funciones se les llama potenciales. Podemos definir lo que entendemos por la gráfica de estos potenciales.

Definición. 3. *Dado una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama gráfica de la función al conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$Graff = \{\, (x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; (x_1, x_2, ..., x_n) \in Domf \,\}.$$

Si pensamos en funciones de dos variables

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \\ & & (x, y) & \to & f(x, y) & = & z \end{array}$$

las gráfica de estas funciones, $z = f(x, y)$, parece posible que las podamos pintar en $\mathbb{R}^3$.

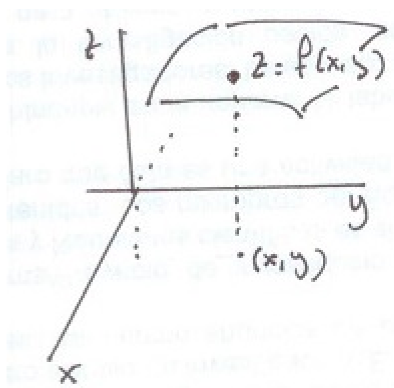


FIGURA 8. Gráfica de una función.

Lo que obtenemos son **superficies** en $\mathbb{R}^3$. Para pintar estas superficies veamos que necesitamos representar varias gráficas de funciones de una variable. Un ejemplo nos aclarará lo que decimos.

Ejemplo. 2. *Queremos representar en $\mathbb{R}^3$ la superficie que viene dada por la función en dos variables $z = ax^2 + by^2$ con $a, b > 0$.*

Demostración: Esta función $f(x, y) = ax^2 + by^2$ está definida en todo el plano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, como $f(x, y) \geq 0$, z solo puede ser positiva. Si tomamos $z = k$ constante, entonces tenemos que $k = ax^2 + by^2$ y esto lo podemos reconocer, es un elipse en el plano $z = k$

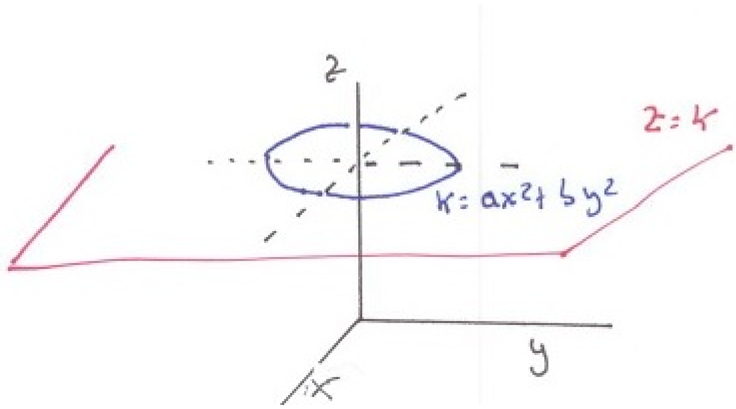


FIGURA 9. Curva de nivel para $z = k$.

Si cortamos nuestra superficie, sea la que sea, con el plano $x = 0$, entonces $z = by^2$; así encontramos una parábola en el plano $x = 0$,

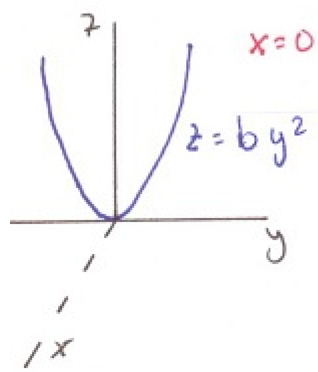


FIGURA 10. Curva de nivel para $x = 0$.

Si hacemos algo análogo cortando con el plano $y = 0$, tenemos que $z = ax^2$

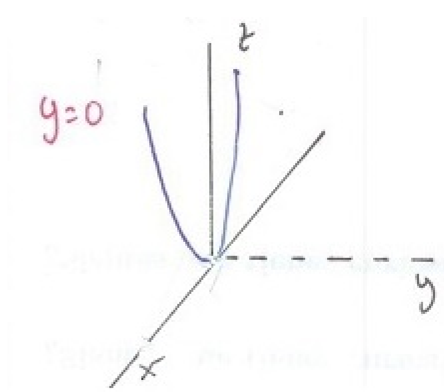


FIGURA 11. Curva de nivel para $y = 0$.

Con toda esta información, incluso con más si hacemos más cortes (**curvas de nivel**) a nuestra superficie con planos del tipo $x = k$, $y = k$ y $z = k$, nos convenceremos que nuestra superficie es algo como

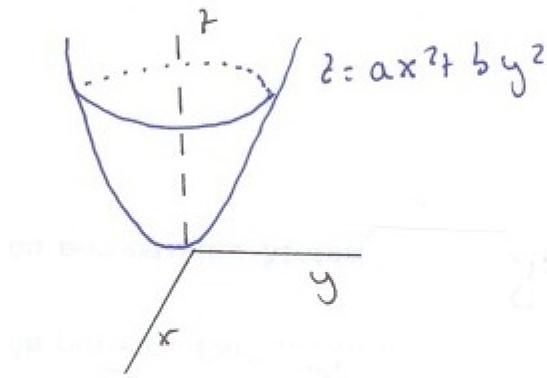


FIGURA 12. Paraboloide.

□

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA.

Dada una ecuación de la forma $ax + by = d$, sabemos que sus soluciones son todos los puntos de una recta, la cuál es la gráfica de la función

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{b} \quad \text{siempre que} \quad b \neq 0,$$

(en el caso de esta ecuación lineal, se puede despejar fácilmente una variable respecto de la otra).

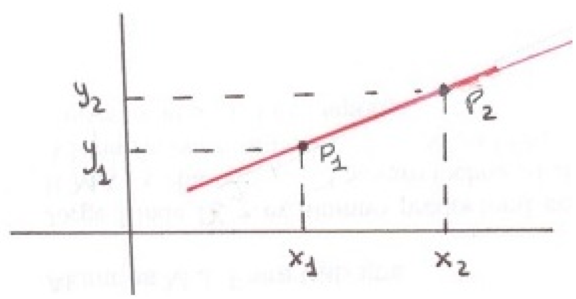


Figura 1. Recta que pasa por dos puntos.

La línea recta es fácil de tratar, es lo que queremos decir. Pero no siempre las cosas son rectas. Pensemos en una circunferencia.

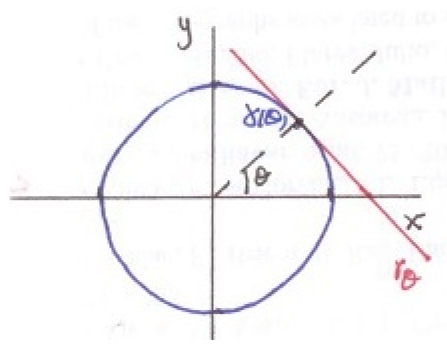


Figura 2. Parametrización de la circunferencia respecto del ángulo.

En un espejo curvo.

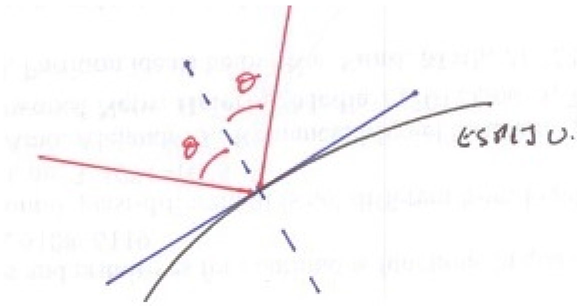


Figura 3. Espejo Curva.

En la trayectoria de un móvil. Puede ser plana o a través del espacio.

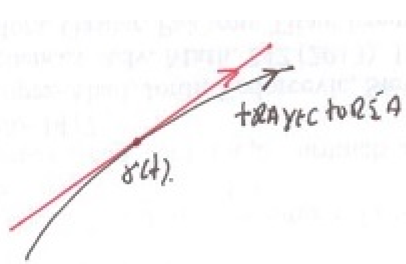


Figura 4. Trayectoria de un móvil.

O de una vela empujada por el viento.

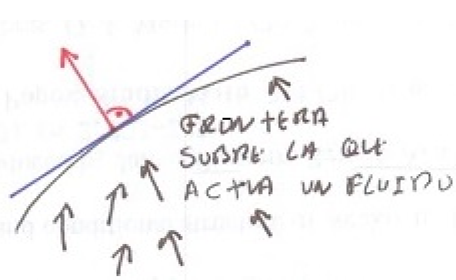


Figura 5. Vela empujada por el viento.

En todos estos casos necesitamos de funciones, cuyas gráficas son líneas curvas, para representar matemáticamente la situación. En el caso de rectas sabemos como se comportan estos sistemas "físicos". Como se comporta un rayo de luz que incide en un espejo. Como el viento empuja a una vela rígida "recta". ¿Qué ocurre en el caso curvo? Supongmos que sobre cada punto de nuestras curvas podemos apoyar rectas, ver los dibujos, de modo que cada una de estas rectas esté muy próxima a su correspondiente curva en el punto fijado (después explicaremos que queremos decir con ”muy próxima”). La Física nos dirá que localmente (puntualmente) la curva se comporta como la recta. Así un móvil en un punto de sus trayectoria lleva la dirección de la recta próxima por dicho punto. El espejo curvo refleja la luz que le incide en un punto como lo haría uno recto igual a su recta próxima por el punto.

Esta recta ”próxima” a una curva por un punto es lo que llamaremos recta **tangente.** Su cálculo matemático se hace a través del concepto de **derivada,** que vamos a desarrollar a continuación. El concepto de **derivada** es uno de los más potentes de todas las matemáticas. Junto con la **integral** su compañera inseparable (por el **Teorema Fundamental del Cálculo**) forman el núcleo de lo que llamamos Análisis Matemático (Cálculo).

La derivada además de permitir calcular rectas tangentes, con todas sus aplicaciones físicas, resulta que es una herramienta que permite conocer propiedades de las funciones: descubrir máximos y mínimos; propiedades de crecimiento, cálculo de límites (**Regla de L'Hôpital**)..etc

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DEFINICIÓN DE DERIVADA.

Pensemos geométricamente. En primer lugar repasemos la fórmula de la recta que pasa por dos puntos. Si una recta pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$,

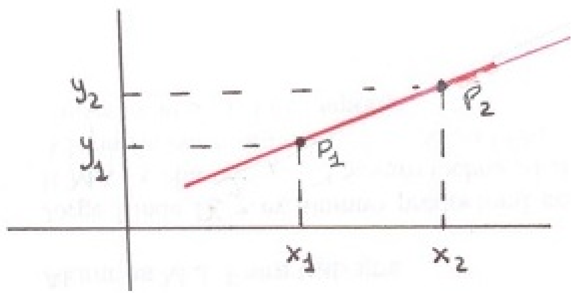


FIGURA 1. Recta que pasa por dos puntos.

su **pendiente** m es independiente de los dos puntos tomados:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

(esto se debe a la proporcionalidad que hay entre triángulos semejantes, Teorema de Tales). Así la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

En segundo lugar, pensemos en la gráfica de una función f, un punto sobre su gráfica P y distintas rectas que pasan por P y se apoyan en otro de la gráfica. Ver el dibujo siguiente.

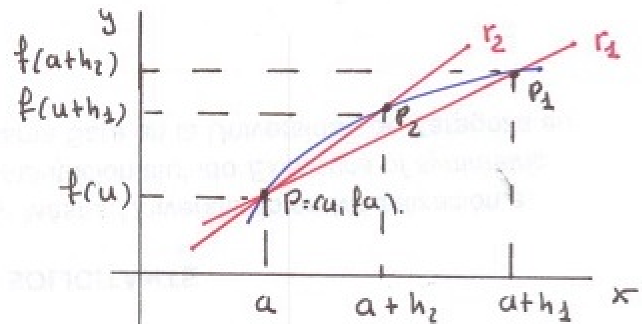


FIGURA 2. Cuerdas a un gráfica por un punto P.

Las rectas r_1 y r_2 tienen pendientes $\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}$ y $\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$ respectivamente. Si a las rectas anteriores las empujamos el punto P_h hacia P (en el caso de que la gráfica sea continua eso se consigue haciendo h muy pequeño), ¿llegaremos a una posición límite de la recta de modo que sea la recta próxima de la que hablabamos en la introducción? La respuesta la dan las dos Definiciones siguientes y el Teorema de después.

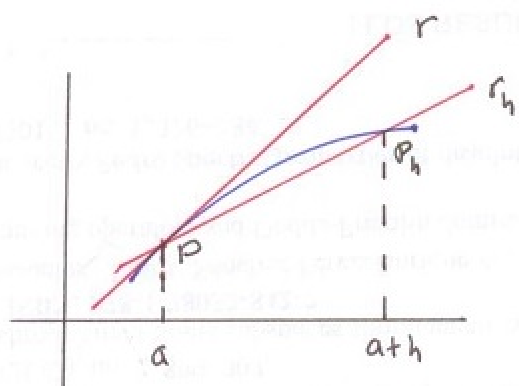


FIGURA 3. Recta tangente por el punto P.

Definición. 1. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y un punto $a \in Domf$ tal que existe $r > 0$ con $(a-r, a+r) \subset Domf$, se dice que f es **derivable** en el punto $x = a$ si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

A dicho límite $f'(a)$, si existe, le llamamos derivada de la función en el punto a. Se dice que la función f es derivable en $A \subset Domf$ si es derivable en cada punto de A. LLamamos función derivada de f a la función f' cuyos valores son las derivadas de f allí donde sea derivable.

Observación. 1. *Si x está cerca de a, entonces $x-a=h$ está cerca de cero y diceversa. Luego*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Ejemplos. 1.
- *Sea la función constante $f(x)=k$. Entonces $f'(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*
- *Sea la función identidad $f(x)=x$. Entonces $f'(x)=1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Demostración:

- Si $f(x)=k$, entonces para $x=a$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0.$$
- Si $f(x)=x$, entonces para $x=a$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

□

No todas las funciones son derivables, veamos un ejemplo.

Ejemplo. 1. *La función valor absoluto no es derivable en $x=0$.*

Demostración: Como la función $f(x)=|x|$ viene dada por dos fórmulas, según x sea positivo o no, tomando límites laterales

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1,$$

y

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1.$$

Los límites laterales son distintos, luego el límite no esiste □

Volviendo a nuestra imagen **geométrica**, podemos definir:

Definición. 2. *Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y un punto $a\in Domf$ donde f es derivable, llamamos recta* ***tangente*** *a la gráfica de f por el punto $(a,f(a))$ a la recta*

$$r(x)=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Observación. 2. *La recta* ***tangente*** *a la gráfica de una función por un punto es la recta que pasa por ese punto y cuya* ***pendiente*** *la da la* ***derivada*** *de la función en el punto.*

Teorema. 1. *Sean una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y un punto $a \in Domf$ donde f es derivable. Sea la recta tangente por dicho punto $r(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$, entonces:*

a: *la recta r pasa por el punto $(a, f(a))$;*
b: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - r(x)}{x - a} = 0$;
c: *si $s(x) = b(x-a)+f(a)$ es otra recta que pasa por $(a, f(a))$ y verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - s(x)}{x - a} = 0$, entonces necesariamente $s = r$.*

Demostración: Claramente $r(a) = f'(a)(a - a) + f(a) = f(a)$. Por otro lado

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)}{x - a}$$

usando la definición de derivada

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Por otro lado si $s(x) = b(x - a) + f(a)$, una recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-s(x)}{x-a} = 0$, entonces

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - s(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(x) + r(x) - s(x)}{x - a}$$

sustituyendo r y s por sus respectivas fórmulas

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) + (f'(a) - b) = f'(a) - b.$$

Por tanto $0 = f'(a) - b$ y se tiene que $b = f'(a)$ $\square$

Observación. 3. *La diferencia $x - a$ tiende a cero cuando x se acerca al valor a. El límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-r(x)}{x-a} = 0$ dice que los valores de la recta r se acercan a $f(x)$ más rapidamente que lo hace x al valor a.*

El Teorema anterior dice que de las rectas que pasan por $(a, f(a))$, la recta tangente es la que más se aproxima a los valores de la función cuando x está cerca del valor a. Es lo que llamabamos la recta próxima en la introducción.

En ciertas situaciones, en ciertos cálculos, dada una función $y = f(x)$ se puede sutituir los valores de y por

$$y \simeq f'(a)(x - a) + f(a) \qquad \text{si} \qquad x \simeq a.$$

Ejemplo. 2. *Vamos a calcular la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ por el punto (1,1).*

Demostración:

El punto $(1,1)$ pertenece claramente a la gráfica de la función. Tenemos que calcular $f'(1)$. Como $f'(x) = 3x^2$ (ver la sección siguiente sobre Cálculo de Derivadas), tenemos que $f'(1) = 3$ y así la recta tangente es

$$r(x) = 3(x-1) + 1$$

□

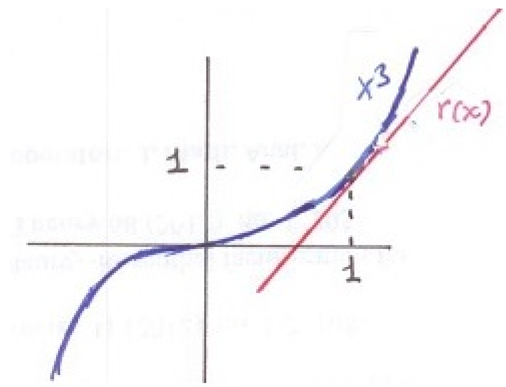


FIGURA 4. Recta tangente a la gráfica de $y = x^3$.

Ejercicio. 1. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función para la cuál existe una constante $M > 5$ de modo que*

$$\frac{1}{M} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M \qquad \textit{para todo} \qquad x, y \in (a,b).$$

Si $c \in (a,b)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c, f(c))$ ***no*** *puede ser:*

a) $y = x + f(c) - c$ *b)* $y = \frac{M^2+1}{2M}(x-c) + f(c)$

c) $y = -\frac{M}{3}(c-x) + f(c)$ *d)* $y = -\frac{M}{4}x + f(c) + \frac{Mc}{4}$.

Demostración: Como $M > 5$ se sigue que $\frac{1}{5} > \frac{1}{M}$. Así por la propiedades de los límites $\frac{1}{M} \leq f'(c) \leq M$. Por otra lado la recta tangente en $(c, f(c))$ es de la forma $r(x) = f'(c) = f'(c)(x-c) + f(c)$.

- **a:** En este caso $f'(c) = 1$, lo cuál es compatible con nuestras hipótesis.
- **b:** En este caso $f(c) = \frac{M^2+1}{2M} \geq \frac{M^2}{2M} = \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$. Además $M > \frac{M^2+1}{2M}$, lo cuál es compatible con nuestras hipótesis.
- **c:** En este caso $f'(c) = \frac{M}{3}$, lo cuál es compatible con nuestras hipótesis.
- **d:** En este caso $f'(c) = -\frac{M}{4} < 0$, lo cuál **no** es compatible con nuestras hipótesis

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE DERIVADAS.

La Función Derivada.

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Se llama función* ***derivada*** *a la función*

$$\begin{array}{cccc} f' & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f'(x). \end{array}$$

Observación. 1.
- *$Domf' = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ f$ es derivable en $x \}$.*
- *La función derivada es un nuevo objeto matemático, una función, con importantes propiedades y aplicaciones (además del cálculo de rectas tangentes de la que surge).*
- *Se puede conocer muchas propiedades de f a través de su derivada f' como veremos. El cálculo* ***integral*** *está íntimamente ligado al cálculo de derivadas (Teorema Fundamental del Cálculo).*

Una primera cuestión que hay que tener en cuenta es la siguiente.

Teorema. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cuál es derivable en un punto $x = a$ de su dominio, es decir existe $f'(a)$, entonces necesariamente f es continua en el punto a.*

Demostración: Como existe

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y como la función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$ se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = |f'(a)|.$$

- Si $f'(a) = 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que lo podemos tomar menor que 1, de modo que si

  $$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(a)| < |x - a|\epsilon < \epsilon,$$

  luego acabamos de ver que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Si $f'(a) \neq 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que lo podemos tomar menor que $\frac{\epsilon}{|f'(a)|+\epsilon} < 1$, de modo que si
$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(a)| < (|f'(a)| + \epsilon)|x-a| < \epsilon,$$
luego acabamos de ver que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

□

La condición del Teorema no es en cambio suficiente. Ya hemos visto que la función $f(x) = |x|$ es continua en toda la recta, pero **no** es derivable en $x = 0$.

Cálculo de Derivadas.

Como vimos en el caso de límites, las derivadas se comportan bien respecto de las operaciones algebraicas habituales. Lo que nos permite conocer y calcular derivadas de muchas funciones conociendo las de unas pocas y usando las reglas siguientes.

Teorema. 2. *Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un punto $x = a$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

a: *existe $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
b: *existe $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$, y así existe $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;*
c: *existe $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
d: *si $g(a) \neq 0$ existe $(\frac{1}{g})'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$, y por tanto*
$$\textit{existe} \quad (\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Lo que acabamos de escribir son nuestras primeras **reglas de derivación. Demostración: a), b)** y **c)** quedan como ejercicios. Como se verá a continuación es un sencillo juego de límites.

d) Tenemos que calcular el siguiente límite, por definición de derivada,
$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a) - g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}$$
$$= \lim_{x\to a} -\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \frac{1}{g(x)g(a)}$$
como g es derivable en a, y por tanto continua en a y $g(a) \neq 0$, se sigue
$$= \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

Ahora para calcular $(\frac{f}{g})'(a)$, solo es necesario aplicar la regla **c)** y lo que acabamos de ver. Así

$$(\frac{f}{g})'(a) = (f\frac{1}{g})'(a) = f'(a)\frac{1}{g}(a) + f'(a)(\frac{1}{g})'(a) =$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

□

La siguiente **regla de derivación** es también muy útil.

Corolario. 1. *Si $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Demostración: Esta prueba se hace por inducción. El caso $n = 0$ y $n = 1$ ya los conocemos, los pusimos como ejemplos de cálculo de derivadas después de dar la definición.

- Si $n = 0$, entonces $f(x) = x^0 = 1$ y sabemos que $f'(x) = 0$.
- Si $n = 1$, entonces $f(x) = x^1 = x$ y sabemos que $f'(x) = 1 = 1x^{1-1}$. Luego se cumple la fórmula.
- Si suponemos que para $f(x) = x^n$ se verifica que $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces

  $$(x^{n+1})' = (xx^n)' = 1(x^n) + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$$

  donde hemos usado **c)** del Teorema anterior

□

Corolario. 2. *Si $f(x) = x^{-n}$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = -nx^{-n-1}$ para $x \neq 0$.*

Demostración: $f(x) = \frac{1}{x^n}$, luego usando **d)** del Teorema anterior

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

□

Ejemplos. 1. *Las reglas anteriores nos permiten hacer los siguientes cálculos.*

- *Si $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, entonces*

  $$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2x + a_1;$$

- *en concreto si $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 9x^2 - 2x$;*

- *si* $g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$, *entonces si* $x \neq -1$

$$g'(x) = \frac{2x(x^3+1) - (x^2-1)3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4+3x^2+2x}{(x^3+1)^2}.$$

Regla de la Cadena.

La Regla de la Cadena es dentro de las Reglas de Derivación la más difícil de dominar, pero que juega un papel muy importante dentro del Cálculo. Hace referencia al modo en que se deriva la composición de dos funciones.

Teorema. 3. ***(Regla de la Cadena).*** *Sean* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones de modo que* f *es derivable en* a *y* g *es derivable en* $f(a)$, *entonces existe*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demostración: Tenemos que calcular el límite

$$(*) \qquad \lim_{x\to a} \frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Ahora por un lado, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x\to a} f'(a)$, por otro lado $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(a)+h) - g(f(a))}{h} = g'(f(a))$. Si llamamos $h' = f(x) - f(a)$, como f es continua en a, entonces si $x \to a$ se sigue que $h' = f(x) - f(a) \to 0$ y así

$$g'(f(a)) = \lim_{h'\to 0} \frac{g(f(a)+h') - g(f(a))}{h'} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}.$$

Por lo tanto el límite $(*)$ que queremos calcular toma el valor $g'(f(a))f'(a)$
□

Ejemplo. 1. *Queremos derivar la función* $f(x) = (x^2-3)^2$.

Demostración: La función f es la composición de la función $h(x) = x^2 - 3$ con la función $g(x) = x^2$, así $f(x) = g \circ h(x)$ y por tanto usando la Regla de la Cadena

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 2(x^2-3)2x.$$

□

Teorema. 4. ***(de la Función Inversa.)*** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *una función para la cuál que existe* $r > 0$ *de modo que* $(a-r, a+r) \subset Domf$, *existe* f' *y es continua en el intervalo* $(a-r, a+r)$ *y además* $f'(a) \neq 0$, *entonces existe* f^{-1} *cerca del punto* $f(a)$ *y además* f^{-1} *es derivable en el punto* $f(a)$ *de modo que*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostración: Como todos los Teoremas de la Función Inversa la prueba no es fácil ni corta. Además vamos a necesitar un resultado que veremos un poco más adelante.

En primer lugar nos interesa la regla de derivación. Supongamos que f es derivable en a y que f^{-1} lo es en $f(a)$. Como $x = f^{-1}(f(x))$, derivando en los dos lados de la igualdad y usando la regla de cadena en el lado derecho, tenemos que

$$1 = (f^{-1})'(f(a))f'(a) \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)},$$

ya que $f'(a) \neq 0$.

Hagamos ahora la prueba completa. Como $f'(a) \neq 0$, pongamos $f'(a) > 0$ (el caso $f(a) < 0$ se trata de forma análoga), entonces por ser f' continua se sigue que $f' > 0$ en todo un intervalo centrado en a. Lo que dice que f es inyectiva (ver un poco más adelante la relación del signo de la derivada con el crecimiento de la función). Por tanto, usando el Toerema de la Función Inversa para funciones continuas, existe f^{-1} y es continua en un intervalo centrado en $f(a)$. Para ver si es derivable en $f(a)$, escribimos $f(a) = b$ y calculamos el límite

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$$

por se f^{-1} inyectiva existe un único $x = f^{-1}(y)$ y por serf^{-1} continua $x \to_{y\to b} a$

$$= \lim_{y\to b} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Observación. 2. *La fórmula de derivación anterior puede escribirse como*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Ejemplos. 2.

- *Sea* $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, *para un* n *natural positivo. Como estamos ante la función inversa de* $g(x) = x^n$ *su derivada viene dada por la fórmula de derivación:*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(x^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

  (La misma fórmula que para las potencias enteras).
- *Sea* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, *así* $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Otras reglas de derivación.

Tenemos que tener en cuentas otras reglas de derivación de funciones muy comunes. Algunas las podremos justificar ahora, otras más adelante.

$$\begin{array}{llll}
\text{Si} & f(x) = \operatorname{sen} x, & \text{entonces} & f'(x) = \cos x. \\
\text{Si} & f(x) = \cos x, & \text{entonces} & f'(x) = -\operatorname{sen} x. \\
\text{Si} & f(x) = \tan x, & \text{entonces} & f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \\
\text{Si} & f(x) = e^x, & \text{entonces} & f'(x) = e^x. \\
\text{Si} & f(x) = \ln x, & \text{entonces} & f'(x) = \frac{1}{x}.
\end{array}$$

Observemos que si conocemos la derivada de la función **seno,** entonces podemos deducir la del **coseno** y la de la **tangente**:

- Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ (ver apéndice de Trigonometría), derivando en ambos lados de la igualdad tenemos
$$2\cos x(\cos x)' + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\cos x)' + \operatorname{sen} x = 0,$$
y despejando $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
- Por definición $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, como es un cociente de funciones su derivada será
$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Si damos por válida la fórmula de la derivada de la función **exponencial** $(e^x)' = e^x$, entonces como el **logaritmo** es su función inversa tenemos que:
$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Ejercicio. 1. *Vamos a calcular las derivadas de las funciones:* $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$ *y* $g(x) = \arctan(\cos x + \operatorname{sen} x)$.

Demostración: Para ello utilizaremos las distintas reglas de derivación que ya conocemos. De la función **arcotangente** no conocemos una regla explícita de derivación, pero al ser una función inversa podemos deducirla fácilmente.

- $$\begin{aligned}(\frac{x\ln x}{x-1})' &= \frac{(x\ln x)'(x-1) - (x\ln x)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$
- $$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan)'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

- $$\begin{aligned}(\arctan(\cos x+\operatorname{sen} x))' &= \arctan'(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x+\operatorname{sen} x)' \\ = \frac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+(\cos x+\operatorname{sen} x)^2} &= \frac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\cos^2 x+2\cos x\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{2+sen2x}\end{aligned}$$

□

De lo anterior, podemos añadir a nuestra lista de fórmulas de derivación las de las siguientes funciones inversas.

$$\begin{array}{llll}\text{Si} & f(x)=\arctan x, & \text{entonces} & f'(x)=\frac{1}{1+x^2}. \\ \text{Si} & f(x)=\arccos x, & \text{entonces} & f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \\ \text{Si} & f(x)=\operatorname{arc\,sen} x, & \text{entonces} & f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}$$

Observación. 3. *Tener en mente las **fórmulas de derivación**, incluida la **Regla de la Cadena**, nos será muy útil cuando resolvamos integrales en el Tema siguiente.*

Además de derivar funciones concretas, también podemos derivar funciones que vienen dadas por otra que sepamos que son derivables.

Ejercicio. 2. *Tenemos que calcular f' sabiendo que existe g' en los casos siguiente:*
a) $f(x)=g(x+g(a))$ *b)* $f(x)=g(xg(x))$ *c)* $f(x+3)=g(x^2)$.

Demostración: En todos los casos deberemos usar la Regla de la Cadena y el hecho de que existe g'.

- **a:** $f'(x)=g'(x+g(a))(x+g(a))'=g'(x+g(a))$ (ya que $g(a)$ es una constante).
- **b:** $f'(x)=g'(xg(x))(xg(x))'=g'(xg(x))(g(x)+xg'(x))$.
- **c:** Si $y=x+3$, entonces $f(y)=g((y-3)^2)$ y ahora derivando

$$f'(y)=g'((y-3)^2)((y-3)^2))'=g'((y-3)^2)2(y-3)$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

APLICACIONES DE LA DERIVADA. BUSQUEDA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La derivada permite descubrir propiedades de la función de la cuál se deriva, por ejemplo la localización de máximos y mínimos. Fijémonos en la siguiente figura.

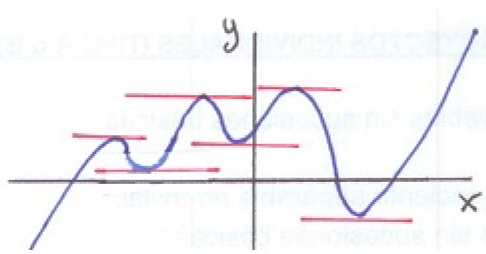


FIGURA 1. Máximos y mínimos locales.

En los puntos de esta gráfica donde la función alcanza una cuspide o un valle, parece que las rectas tangentes en dichos puntos son paralelas al eje de las "x", o lo que es lo mismo que las pendientes de esas rectas son nulas. Si la función es derivable, eso quiere decir que la derivada en tales puntos es cero. Vamos a formalizar lo anterior. Lo primero definir lo que entendemos por "cuspide" y "valle"

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $x = a$ de su dominio.*

- **a:** *Se dice que a es un* ***máximo relativo*** *o* ***local*** *de f si existe $r > 0$, con $(a-r, a+r) \subset Domf$, de modo que para todo $x \in (a-r, a+r)$ se verifica que*
$$f(x) \leq f(a).$$
- **b:** *Se dice que a es un* ***mínimo relativo*** *o* ***local*** *de f si existe $r > 0$, con $(a-r, a+r) \subset Domf$, de modo que para todo $x \in (a-r, a+r)$ se verifica que*
$$f(x) \geq f(a).$$

Observación. 1. *Los máximos o mínimos de una función definida en todo intervalo abierto o semirecta abierta son claramente máximos o mínimos locales respectivamente. El recíproco no tienen por que ser cierto como se ve claramente en la figura anterior.*

Si una función es derivable, es fácil descubrir donde están sus **extremos relativos** (otra forma de referirnos a los máximos y mínimos locales). Según la figura de arriba estarán entre los puntos donde la derivada se anula. Veámoslo.

Proposición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x = a$ un máximo o mínimo local de la función. Si existe $f'(a)$, entonces necesariamente $f'(a) = 0$.*

Demostración: Supongamos que $x = a$ es un máximo relativo y que $(a - r, a + r) \subset \mathrm{Dom} f$. (El caso $x = a$ un mínimo relativo se deja como ejercicio). Entonces si

- $x > a$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0;$$

- $x < a$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Como existe, por hipótesis, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, no queda otra opción que $f'(a) = 0$. $\square$

El resultado anterior no es más que una condición necesaria que deben verificar los extremos relativos. Los siguientes ejemplos nos muestran que el trabajo de encontrar máximos y mínimos de una función es algo más complicado que calcular los ceros de una derivada.

Ejemplos. 1.

- *En el siguiente ejemplo vemos que $x = 0$ es un mínimo de la función $y = |x|$. Este punto* ***no*** *puede ser hallado por la derivada ya que esta función no es derivable en $x = 0$.*

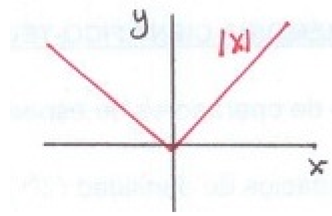


FIGURA 2. Mínimo de una función en un punto sin derivada..

- *La función $y = x^3$ tiene por derivada $y = 3x^2$ que se anula para $x = 0$. Sin embargo en tal punto la función no tiene ni un máximo ni un mínimo local.*

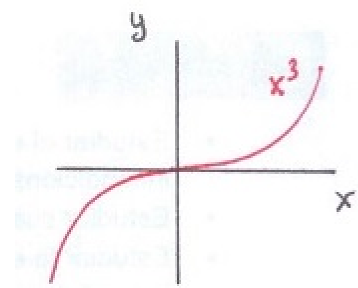


FIGURA 3. La función $y = x^3$ siempre crece.

- *En la figura siguiente se ve una gráfica con dos punto de mínimo local, $x = a$ y $x = c$, pero solo $x = c$ es un mínimo de la función. En $x = b$ tenemos un máximo local, pero que no es máximo.*

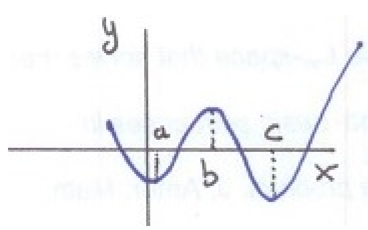


FIGURA 4. Máximos y mínimos locales.

Sabemos que toda función continua sobre un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo.

Observación. 2. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $Dom f \subset \mathbb{R}$, los puntos del dominio en los que nos tenemos que fijar para encontrar su máximo y su mínimo (si los tiene) son:*

- *los puntos extremos del dominio (en la frontera del dominio $\partial Dom f$);*
- *los puntos donde f no es continua ni derivable;*
- *los puntos de derivada nula.*

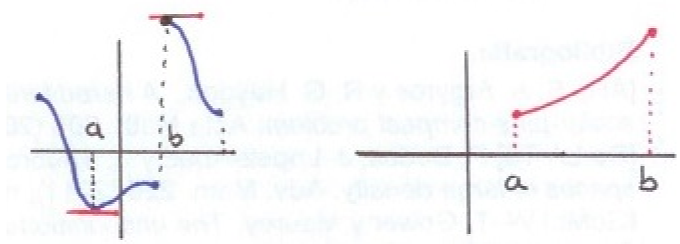


Figura 5. Máximos y mínimos.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO.

Los Teoremas del Valor medio son unos resultados que nos hablan de la geometría de las gráficas de las funciones derivables, pero que tienen unas aplicaciones sorprendentes como vamos a ver. El primero de ellos es el Teorema de Rolle y geométricamente lo tenemos dado en la siguiente figura. Existe una recta tangente paralela a la recta que une los dos extremos de la gráfica.

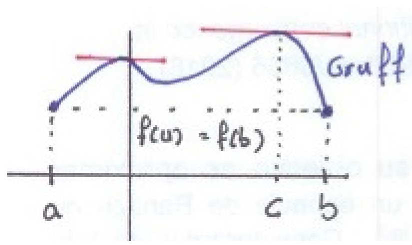


FIGURA 1. Teorema de Rolle.

De forma analítica.

Teorema. 1. ***(de Rolle).*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = 0$.*

Demostración: Si f es una función constante, entonces $f' \equiv 0$ y no hay nada que probar. Si no es constante, por ser continua en $[a, b]$ tendrá un punto $c \in (a, b)$ donde f alcanza un máximo o un mínimo, distinto de $x = a$ o $x = b$. Entonces, además, c es un extremo local y como la función es derivable en (a, b) se tiene que $f'(c) = 0$ $\square$

El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio. Geométricamente lo tenemos dado en la siguiente figura. Existe una recta tangente paralela a la recta que une los dos extremos de la gráfica.

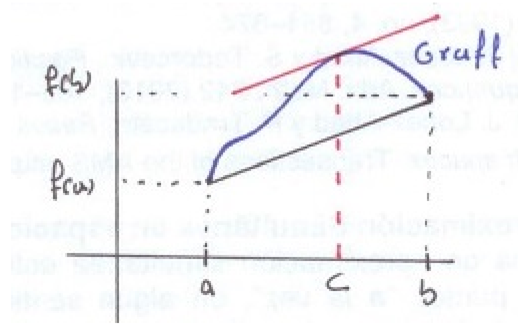


FIGURA 2. Teorema del Valor Medio.

De forma analítica.

Teorema. 2. ***(del Valor Medio).*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ de modo que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O equivalentemente, existe $c \in (a,b)$ de modo que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demostración: Observemos que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que une los extremos de la gráfica, el punto $(a, f(a))$ con el punto $(b, f(b))$.

Para ver la prueba, consideremos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por serlo las funciones f y $y = x - a$. Además $g(a) = g(b) = f(a)$. Luego por el Teorema de Rolle existe $c \in (a,b)$ de modo que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ahora despejando se tiene lo que buscabamos $\square$

El Teorema del Valor Medio tiene muchas aplicaciones en Análisis Matemático. Por ejemplo.

Corolario. 1. **a:** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$, entonces la función f es constante.*

b: *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y tal que $f'(x) = g'(x)$, entonces la función $f(x) = g(x) + K$ para cierta constante K y para todo $x \in [a,b]$.*

c: *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f'(x)\neq 0$, para todo $x\in(a,b)$, entonces la función f es inyectiva.*

Demostración:

a: Sea $x\in(a,b]$. Así f verifica las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a,x]$ y por tanto existe $c\in(a,x)$ de modo que

$$f(x)-f(a)=f'(c)(a-x)=0 \quad \text{y por tanto} \quad f(x)=f(a).$$

b: Se considera $h(x)=f(x)-g(x)$. Como $h'=f'-g'=0$, estamos en las hipótesis de **a)** y por tanto h es una función constante. Despejando llegamos al resultado buscado.

c: Sean $x,y\in[a,b]$ con $x\neq y$, entonces por el Teorema del Valor Medio

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$$

para cierto valor $c\in(a,b)$. Como por hipótesis $f'(c)\neq 0$, se tiene que $f(x)\neq f(y)$

$\square$

Ejercicio. 1. *Un vehículo entró en un tunel a las 13h25' y sale a las 13h28', lo cuál queda registrado por las cámaras instaladas en ambas bocas del túnel de 4.100m. de longitud. El dueño del vehículo recibió un multa por importe de 600 euros por rebasar la velocidad permitida de 70Km/h dentro del túnel. ¿Recurrió el dueño la multa?*

Demostración: Consideramos $s(t)$ la posición del vehículo en el momento t. Podemos suponer que el coche no hace paradas y que los cambio de marchas se hacen con suavidad, es decir podemos suponer que la función s es derivable. Sabemos que en el minuto 25 entró en el tunel y tres minutos después $s(28)=s(25)+4,1$. De forma gráfica.

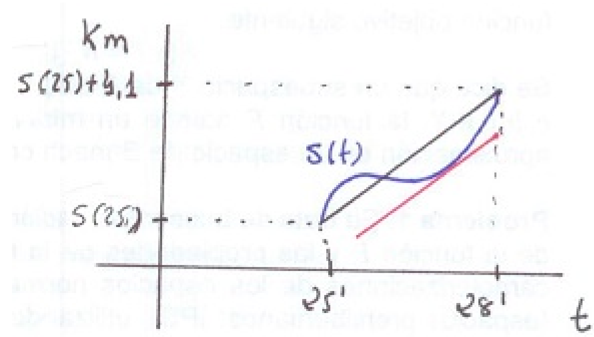


FIGURA 3. Función posición.

La velocidad media del vehículo fué de

$$v_m = \frac{4,1Km}{3'} = \frac{82Km}{60'} = 82Km/h > 70Km/h.$$

Luego la velocidad media fué mayor que la permitida. Lo que nos dice el Teorema del Valor Medio es que en algún momento $c \in (25, 28)$ se alcanzó efectivamente la velocidad media

$$v(c) = s'(c) = 82Km/h,$$

(v es la velocidad del vehículo en cada instante que viene dada por s') $\square$

El Teorema del Valor de Medio de Cauchy es análogo a los anteriores para curvas paramétricas (ver el Apéndice del Tema de Continuidad y el Apéndice de este Tema para la noción de curva paramétrica y recta tangente a tales curvas) . Geométricamente lo tenemos dado en la siguiente figura. Existe una recta tangente paralela a la recta que une los dos extremos de la curva.

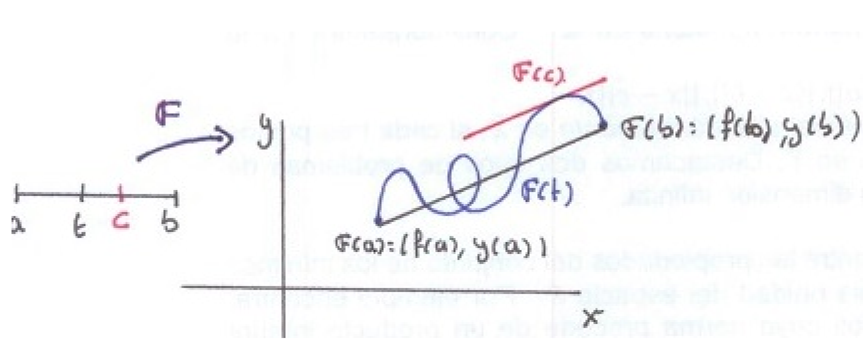


FIGURA 4. Teorema del Valor Medio de Cauchy.

De forma analítica.

Teorema. 3. ***(del Valor Medio de Cauchy)****. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

O equivalentemente, si $f(a) \neq f(b)$

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Demostración: Observemos que si $f(a) \neq f(b)$ entonces $\dfrac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$ es la pendiente de la recta que une los extremos de la curva, el punto $(f(a), g(a))$ con el punto $(f(b), g(b))$.

Para ver la prueba, consideremos la función

$$h(x) = f(x)(\, g(b) - g(a)\,) - g(x)(\, f(b) - f(a)\,).$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por serlo las funciones f y g. Además $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Luego por el Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a))$$

$\square$

El Teorema del Valor Medio de Cauchy en si no nos va interesar mucho, pero si una consecuencia de él muy importante en cálculo: la **Regla de L'Hôpital** que permite calcular límites en el caso de indeterminación; algo que nos quedo pendiente cuando estudiabamos límites de funciones. Además, este Teorema de valor Medio está presente en la prueba del Teorema de Taylor que veremos al estudiar el Tema de Aproximaciones Polinómicas.

Teorema. 4. ***(Regla de L'Hôpital)****. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b] \backslash \{s\}$ y derivables en $(a, b) \backslash \{s\}$. Si*

$$\lim_{x \to s^*} f(x) = \lim_{x \to s^*} g(x) = 0,$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b] \backslash \{s\}$ y existe

$$\lim_{x \to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

entonces existe

$$\lim_{x \to s^*} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

(aquí s^* significa s o s^+ o s^-).

Demostración: Si suponemos que existen $f'(s) \neq 0$ y $g'(s)$, entonces la prueba es muy sencilla ya que por un lado la funciones f y g son continuas en s y por tanto

$$\lim_{x\to s} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s} \frac{g(x)-g(s)}{f(x)-f(s)} = \lim_{x\to s} \frac{\frac{g(x)-g(s)}{x-x}}{\frac{f(x)-f(s)}{x-s}} = \frac{g'(s)}{f'(s)}.$$

Lo que nos permite el Teorema del Valor Medio de Cauchy es prescindir de la suposiciones anteriores. Podemos hacer la prueba sin que existan las derivadas de f y g en el punto s.

La prueba la vamos a hacer para límites por la derecha (de forma análoga se hace para límites por la izquierda). Con ambos límites laterales se hace la prueba para el límite.

Como existen

$$\lim_{x\to s^+} f(x) = \lim_{x\to s^+} g(x) = 0,$$

podemos suponer que $f(s) = g(s) = 0$ (sin más que redefiniendo f y g para $x = s$). Si tomamos $x > s$, entonces f y g definidas sobre $[s, x]$ están en las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Cauchy. Observemos que, como $f(s) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, por el Teorema de Rolle $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq s$. Por tanto existe $c_x \in [s, x]$ de modo que

$$(f(x) - f(s))g'(c_x) = (g(x) - g(s))f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x).$$

Como $f(x) \neq 0$, tampoco se puede anular $f'(c_x)$ y así llegamos a que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)}.$$

Tomando límites cuando $x \to s^+$, (por tanto $c_x \to s^+$) y como existe $\lim_{x\to s^+} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ se tiene que

$$\lim_{x\to s^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^+} \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} = \lim_{y\to s^+} \frac{g'(y)}{f'(y)}$$

□

Ejemplo. 1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. *Estamos ante una indeterminación del tipo cero divide a cero. Por suerte estamos en las hipótesis para poder aplicar la Regla de L'Hôpital y así*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

La Regla de L'Hôpital puede ser adaptada a casi cualquier otro caso de indeterminación, con lo cuál se convierte en una herramienta poderosa para calcular límites (¡es la herramienta!).

Corolario. 2. *(**Regla de L'Hôpital General**) Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en (a, b) salvo quizas en un punto s, donde (a, b) es un intervalo abierto y $s \in (a, b)$; o bien $(a, b) = (-\infty, b)$ y $s = -\infty$; o bien $(a, b) = (a, \infty)$ y $s = \infty$. Se sabe que $f'(x) \neq 0$ si $x \neq s$. Si existen*

$$\lim_{x\to s^*} f(x) = \lim_{x\to s^*} g(x) = 0,$$

o bien

$$\lim_{x\to s^*} f(x) = \pm\infty \quad y \quad \lim_{x\to s^*} g(x) = \pm\infty,$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)\backslash\{s\}$ y existe

$$\lim_{x\to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

entonces existe

$$\lim_{x\to s^*} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^*} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

(aquí s^* significa s o s^+ o s^-, siendo s un número real, o bien s es $\pm\infty$).

Demostración: Dejamos la prueba de casi todos los casos como ejercicio. Solo apuntamos algunas ideas.

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, se consideran $f(1/x)$ y $g(1/x)$. Observemos que en este caso
$$\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to 0^+} g(1/x) = 0.$$
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = l$ entonces para calcular $\lim_{x\to x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$, tomando $x_0 < x_1 < x_2$ se escribe
$$\frac{g(x_1)}{f(x_1)} = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} \frac{g(x_1)}{g(x_1) - g(x_2)} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1)} =$$
aplicando el Teorema del Valor Medio de Cauchy
$$\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} \frac{g(x_1)}{g(x_1) - g(x_2)} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1)}.$$
Observemos que para x_2 fijo, al tender $x_1 \to x_0^+$, el primer factor tiende a l y los otros dos a 1 $\square$

Observemos que la hípotesis $f'(x) \neq 0$ no es necesaria. Si existe el límite de $\frac{g'(x)}{f'(x)}$, la derivada de f no puede anularse.

Ejemplos. 1. *Comprueba con el siguiente ejemplo que las hipótesis de la Regla de L'Hôpital no son necesarias. En concreto prueba que existe*

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

, pero sin embargo no existe
$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

Ejemplo. 2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$.

Demostración: Por un lado $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$ y por otro $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\arctan x-\frac{\pi}{2}=0$. Estamos ante una indeterminación. Como las funciones de este cociente son derivables, usaremos la Regla de L'Hôpital y así
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\arctan x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{1+x^2}}$$
reordenando
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+x^2)}{e^x}$$
volvemos a tener una indeterninación del tipo $-\infty$ dividido por ∞. Insistimos aplicando L'Hôpital dos veces más
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{e^x}=0.$$
□

Ejemplo. 3. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

Demostración: El límite por la derecha tiene todo el sentido ya que el logaritmo no está definido para valores negativos. Por otro lado estamos ante una indeterminación del tipo cero por menos infinito. En principio no está en la forma en la que se aplica la Regla de L'Hôpital, pero eso se arregla con una sencilla transformación.
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
ahora ya podemos aplicar L'Hôpital
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$
□

Cuando una función viene dada por varias fórmulas, como en el ejercicio siguiente, es conveniente tener en cuenta los conceptos y el Corolario que escribimos a continuación.

- Llamamos **derivada por la derecha** de una función f en el punto $x=a$, y escribimos $f'(a^+)$, al límite si existe
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a^+)$$

- Llamamos **derivada por la izquierda** de una función f en el punto $x = a$, y escribimos $f'(a^-)$, al límite si existe
$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

Es claro que si una función es derivable en un punto $x = a$, entonces existen las derivadas por la derecha y por la izquierda en el punto $x = a$ y
$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-).$$
El recíproco también es cierto.

Corolario. 3. *Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]\backslash\{s\}$ y derivable en $(a, b)\backslash\{s\}$. Si existe*
$$\lim_{x\to s^*} h(x) = r$$
y existe
$$\lim_{x\to s^*} h'(x),$$
entonces existe
$$h'(s^*) = \lim_{x\to s^*} h'(x),$$
(aquí s^* significa s o s^+ o s^-).

Demostración: Sean f y g las funciónes definidas por $g(x) = h(x) - r$ y $f(x) = x - s$. Estas funciones están en las hipótesis de la Regla de L'Hôpital y por tanto
$$\lim_{x\to s^*} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^*} \frac{h(x) - r}{x - s} (= h'(s^*))$$
aplicando L'Hôpital
$$= \lim_{x\to s^*} h'(x).$$
Puesto que este límite existe por hipótesis, se tiene que coincide con $h'(s^*)$
□

Apliquemos lo anterior en el siguiente ejercicio.

Ejercicio. 2. *Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función:*
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ x \ln x & si \quad x \in [0, 1] \\ x - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$
Dibuja la gráfica aproximada de la función y estudia sus máximos y sus mínimos.

Demostración: La función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Calculemos los límites en los extremos de su dominio.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$.
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Usamos el cálculo hecho en un Ejemplo anterior.
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\ln x = 0$.
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x-1 = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x-1 = \infty$.

Luego vemos que la función es continua en todo $\mathbb{R}$ (en 0 y 1 existen los límites laterales y son iguales).

Como existe f' para todo $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, podemos aplicar el Corolario anterior para saber si la función f es derivable en 0 o 1.

- $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x + 1 = -\infty$.
- $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln x + 1 = 1$.
- $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$.

Luego vemos que la función f es derivable en $x=1$, pero no lo es en $x=0$.

Observemos que $f(x)\geq 0$ si $x\notin(0,1)$ y negativa si $x\in(0,1)$.

La derivada de la función x^2 solo se anula para $x=0$. La función $x\ln x$ tiene por derivada $\ln x+1$ y ésta se anula solo en $x=e^{-1}$. La derivada de la función $x-1$ no se anula nunca. Luego candidatos a máximos y mínimos son el punto $x=0$ (aquí la función no es derivable) y el punto $x=e^{-1}$ (aquí la derivada se anula). Dando valores y viendo el signo de la función es fácil convencerse de que f tiene un mínimo en $x=e^{-1}$ y que no tiene máximo, ni siquiera un máximo local.

□

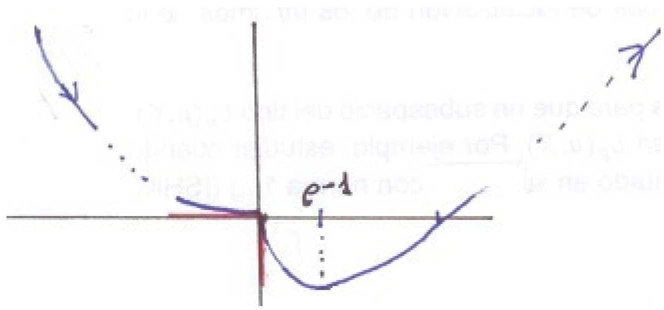


Figura 5. Gráfica aproximada de f.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LA FUNCIÓN f VISTA A TRAVÉS DE f' Y f''.

Dada una **función** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, podemos considerar su función **derivada** $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta función a su vez puede ser derivable, y tendremos su derivada $(f')' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que escribimos por f'' y llamamos **derivada segunda** de la función f.

El estudio de f' y f'' nos da información sobre f, como vamos a ver.

Ejemplo. 1. *Si* $f(x) = x^3 + x + 1$, *entonces* $f'(x) = 3x^2 + 1$ *y* $f''(x) = 6x$.

Observación. 1. *Si un fenómeno físico viene dado por una función* $f(t)$, *donde* t *representa el tiempo, entonces* f' *es la velocidad del proceso y* f'' *es la aceleración del mismo.*

Estudio del crecimiento de una función.

Una característica importante de las funciones es su **crecimiento**. En concreto:

Definición. 1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función.*

a: *Se dice que* f *es* ***monótona creciente*** *si para todo* $x, y \in Domf$ *de modo que* $x < y$, *se tiene que*

$$f(x) \leq f(y).$$

b: *Se dice que* f *es* ***monótona decreciente*** *si para todo* $x, y \in Domf$ *de modo que* $x < y$, *se tiene que*

$$f(x) \geq f(y).$$

$\square$

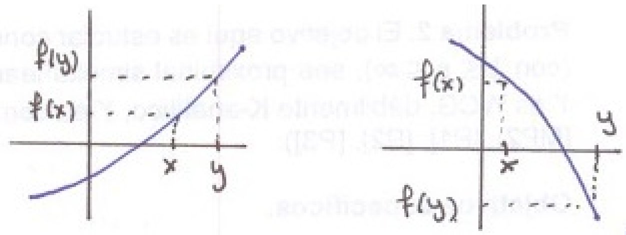


Figura 1. Funciones monótonas.

Una función no tiene por que tener un crecimiento único. Es decir, en parte de su dominio puede crecer y en parte decrecer. Esto se puede descubrir mirando el signo de su derivada si es una función derivable.

Teorema. 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).*

a:
- *Si $f'(c) > 0$, para todo $c \in (a, b)$, entonces f es* ***creciente*** *en $[a, b]$.*
- *Si f es creciente en $[a, b]$, entonces $f'(c) \geq 0$ para todo $c \in (a, b)$.*

b:
- *Si $f'(c) < 0$, para todo $c \in (a, b)$, entonces f es* ***decreciente*** *en $[a, b]$.*
- *Si f es decreciente en $[a, b]$, entonces $f'(c) \leq 0$ para todo $c \in (a, b)$.*

Demostración: Dejamos **b)** como ejercicio, se hace de la misma manera que la parte **a).**

Sean $x < y$ elementos de $[a, b]$. Por el Teorema de Valor Medio existe $c \in (x, y)$ de modo que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0.$$

La desigualdad se tiene ya que por hipótesis $f'(c) > 0$. Luego, despejando, $f(y) \geq f(x)$.

Por otro lado sea $c \in (a, b)$. Si f es creciente, entonces mirando signos

$$\text{para} \quad x > c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\text{para} \quad x < c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Por tanto

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

□

Ejemplo. 2. *Consideramos la función* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Derivando* $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Luego, aplicando el Teorema anterior, la función es decreciente en la semirecta* $(-\infty, 0)$ *y en la semirecta* $(0, \infty)$. *Observemos que la discontinuidad en el punto* $x = 0$ *nos impide afirmar lo mismo en todo el dominio de la función* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

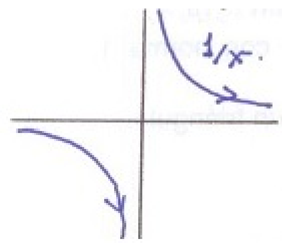


FIGURA 2. Función monótona decreciente.

Teorema. 2. *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Si para* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *existe* λ *con*

$$f'(x_1) < \lambda < f'(x_2),$$

entonces existe $x_0 \in (a,b)$ *de modo que* $f'(x_0) = \lambda$.

Demostración: Sea $\begin{array}{ccccccc} g & : & [x_1, x_2] & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & g(x) & = & f(x) - \lambda x. \end{array}$ Así $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Si suponemos $f'(x) \neq \lambda$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Por un corolario del Teorema del Valor Medio, g tiene que ser inyectiva. Por ser g inyectiva y continua, necesariamente g tiene que ser monótona. Ahora

- si es estrictamente creciente, se tiene que $g'(x) > 0$, pero $g'(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$;
- si es estrictamente decreciente, se tiene que $g'(x) < 0$, pero $g'(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$.

En cualquier caso llegamos a contradición. Luego se tiene el resultado □

El resultado anterior nos dice que una derivada no puede tener discontinuidades de salto.

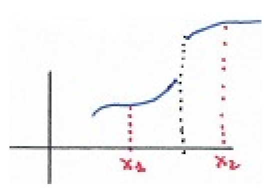


FIGURA 3. **No** es la gráfica de una derivada

Claro que puede haber derivadas que no sean continuas.

Ejemplo. 3. *Se considera la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable. Pero su derivada no es continua.

Demostración: Por un lado $|x^2 \operatorname{sen} 1/x| \leq |x|$. Lo que prueba que f es continua en cero.

Por otro lado, por definición de derivada,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{x} = 0.$$

Ahora f' no es continua en cero ya que no existe el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD.

Antes de comenzar veamos otra forma de escribir los números de un intervalo cerrado.

Lema. 1.

$$[a,b]=\{c\in\mathbb{R}\ :\ c=\alpha a+(1-\alpha)b,\quad \textit{para algún}\quad \alpha\in[0,1]\,\}$$

Si $c=\alpha a+(1-\alpha)b$, para $\alpha\in[0,1]$, decimos que c es una **combinación convexa** de a y b.

Demostración: Si $c=\alpha a+(1-\alpha)b$, entonces $c=b-\alpha(b-a)\leq b$. Por otro lado $c=a+(1-\alpha)(b-a)\geq a$, luego $c\in[a,b]$.

Por otro lado si $c\in[a,b]$

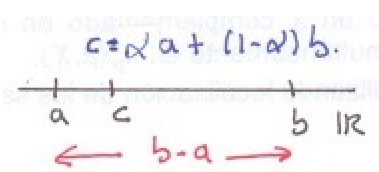


Figura 1. c entre a y b.

entonces

$$c=\frac{b-c}{b-a}a+\frac{c-a}{b-a}b.$$

Es claro que $0\leq\dfrac{b-c}{b-a}\leq 1$ y además

$$1-\frac{b-c}{b-a}=\frac{c-a}{b-a}$$

□

Con la noción de combinación convexa es más fácil entender los conceptos de **convexidad** y **concavidad** de una función.

Definición. 1. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Se dice que la función es* ***convexa*** *en $[a,b]$ si para todo $x,y\in[a,b]$ con $x<y$ se tiene que*

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

para todo $\alpha\in[0,1]$.

Observemos que

$$\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)=\alpha(f(x)-f(y))+f(y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}(\alpha(x-y))+f(y)$$

$$=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}([\alpha x+(1-\alpha)y]-y)+f(y)=r(\alpha x+(1-\alpha)y),$$

donde r es la recta que une los puntos $(x,f(x))$ y $(y,f(y))$.

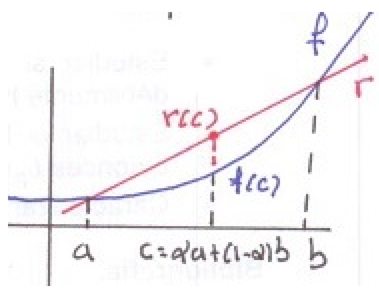


Figura 2. Función convexa.

Observación. 1. *Un función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es convexa si y solo si su gráfica en el intervalo $[x,y]$ queda por debajo de la recta que une los puntos $(x,f(x))$ y $(y,f(y))$, para todo $x,y\in[a,b]$ con $x<y$.*

Definición. 2. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Se dice que la función es* ***concava*** *en $[a,b]$ si para todo $x,y\in[a,b]$ con $x<y$ se tiene que*

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

para todo $\alpha\in[0,1]$.

Obsevemos que

$$\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)=\alpha(f(x)-f(y))+f(y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}(\alpha(x-y))+f(y)$$

$$=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}([\alpha x+(1-\alpha)y]-y)+f(y)=r(\alpha x+(1-\alpha)y),$$

donde r es la recta que une los puntos $(x,f(x))$ y $(y,f(y))$.

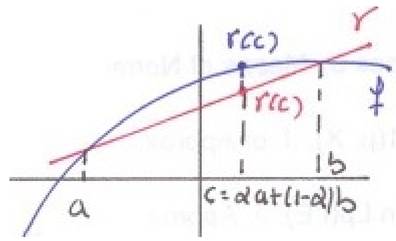


Figura 3. Función concava.

Observación. 2. *Un función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es concava si y solo si su gráfica en el intervalo $[x, y]$ queda por encima de la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, para todo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$.*

Otra forma de caracterizar la convexidad y concavidad es a través de los crecimientos de las pendientes de la cuerdas que unen puntos de la gráfica de la función. En concreto.

Proposición. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I.*

A): *Son equivalentes:*
- *f es **convexa** en I;*
- *Para todo $a, x, b \in I$ con $a < x < b$ se tiene que*
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
o equivalentemente
$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \ge \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

B): *Son equivalentes:*
- *f es **cóncava** en I;*
- *Para todo $a, x, b \in I$ con $a < x < b$ se tiene que*
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
o equivalentemente
$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: Veamos **A)** el resto queda como ejercicio. Para $a < x < b$, por ser f convexa el valor $f(x)$ queda por debajo del valor correspondiente de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así
$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Reordenando esta desigualdad, dado que $x - a > 0$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El recíproco es evidente.

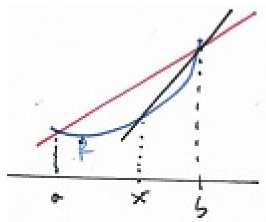


Figura 4. Función convexa.

Obervemos que la recta r que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se puede escribir de dos modos

$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b),$$

de aquí si f es convexa

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Reordenando esta desigualdad, dado que $x - b < 0$

$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El recíproco es evidente. $\square$

Como en el caso del crecimiento, una función puede ser concava en parte de su dominio y convexa en la otra parte. Según vamos aver, la forma de descubrir la convexidad de la función es mirar el signo de su derivada segunda, siempre que ésta exista.

Proposición. 2. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I.*

- **A):** *Si f es **convexa** y derivable en I, entonces f' es una función creciente en I.*
- **B):** *Si f es **cóncava** y derivable en I, entonces f' es una función decreciente en I.*

Demostración: Veamos A). Sea $a \in I$ y consideramos $a < a + h_1 < a + h_2$. Usando la Proposición anterior para f convexa y $a = a$, $x = a + h_1$ y $b = a + h_2$, tenemos que

$$\frac{f(a + h_1) - f(a)}{h_1} \leq \frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2}.$$

Es decir, las pendientes $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ decrecen cuando $h > 0$ decrece a cero. Así como f es derivable en a y por definición de derivada, tenemos

$$f'(a) = f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

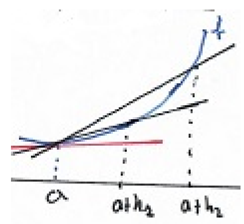


Figura 5. Función convexa.

Por otro lado, para $b+h_2 < b+h_1 < b$, la Proposición anterior nos dice que

$$\frac{f(b)-f(b+h_2)}{-h_2} \leq \frac{f(b)-f(b+h_1)}{-h_1}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{f(b+h_2)-f(b)}{h_2} \leq \frac{f(b+h_1)-f(b)}{h_1}.$$

Es decir, las pendientes $\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ crecen cuando $h < 0$ crece a cero. Así como f es derivable en b y por definición de derivada, tenemos

$$f'(b) = f'(b^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \geq \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Ahora dados $a, b \in I$, con $a < b$, se tiene que

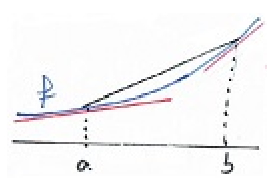


Figura 6. Función convexa.

$$f'(a) \leq \frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a} = \frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b} \leq f'(b).$$

Lo que prueba que f' es creciente $\square$

Corolario. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I de modo que existe f''.*

a): *Si f es convexa, entonces $f'' \geq 0$.*

b: *Si f es concava, entonces $f'' \leq 0$.*

Demostración: **a)** Claro, si f es convexa y derivable, la Proposición anterior nos dice que f' es creciente, por tanto su derivada f'' es positiva $\square$

Para ver el recíproco de la última Proposición necesitamos el siguiente Lema, el cuál obviamente tiene una versión análoga para funciones con f' decreciente.

Lema. 2. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I, derivable y con f' creciente. Entonces si $a, b \in I$ con $f(a) = f(b)$ se tiene que*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a, b].$$

Demostración:

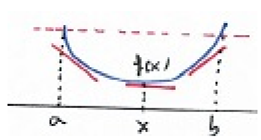


Figura 7. Función con f' creciente.

Supongamos que existe un $x \in (a, b)$ con $f(x) > f(a)$. Por el Teorema de Rolle existe $x_0 \in (a, b)$ máximo de f y por tanto con $f'(x_0) = 0$. Ahora por el Teoream del Valor Medio, existe $x_1 \in (a, x_0)$ de modo que

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_1 - a} > 0;$$

lo que contradice que f' sea creciente $\square$

Proposición. 3. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I con f derivable.*

A): *Si f' es creciente, entonces f es convexa.*

B): *Si f' es decreciente, entonces f es cóncava.*

Demostración: Veamos **A)**. Fijamos $a, b \in I$, con $a < b$. Para $x \in (a, b)$ consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Se tiene que $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por tanto g' es creciente. Además

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Así por el Lema anterior $g(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, es decir

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a);$$

la función queda por debajo de la cuerda que une $(a, f(a))$ y (b,f(b)). Luego f es convexa $\square$

Todo lo anterior se resume en el siguiente Teorema.

Teorema. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I con f derivable.*

A):
- *f es convexa en I si y solo si f' es creciente.*
- *Si existe f'' y $f'' \geq 0$ en I, entonces f es **convexa** en I.*

b:
- *f es cóncava en I si y solo si f' es decreciente.*
- *Si existe f'' y $f'' \leq 0$ en I, entonces f es **cóncava** en I.*

Demostración: A) El siguiente dibujo nos debe convencer de que la convexidad es equivalente al crecimiento de la derivada.

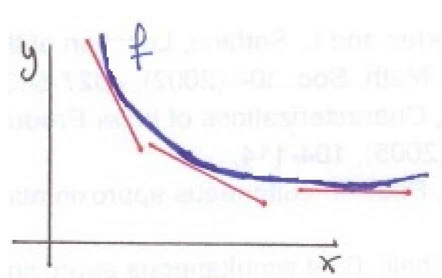


FIGURA 8. Demostración sin palabras.

La prueba formal es un poco más engorrosa como acabamos de ver.

Ahora si existe la derivada segunda f'' y es positiva, entonces la función derivada f' es creciente y por lo anterior la función es convexa.

El apartado **B)** es análogo al anterior $\square$

Ejemplo. 1. *Sea $f(x) = x^2$. Así $f'(x) = 2x$. Luego la función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Además $f''(x) = 2 > 0$, luego la función es convexa en toda la recta.*

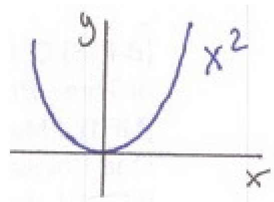


Figura 9. Función convexa.

Ejemplo. 2. *Sea* $f(x) = \sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$, *donde* $x \in [0,a]$. *Esta función es decreciente y cóncava.*

Demostración: Derivando

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}}\frac{2xb^2}{a^2}.$$

Esta derivada es negativa si $x \in (0,a)$ y por tanto la función decrece. Obsevemos que $f'(0) = 0$ y que $\lim_{x\to a^-} f'(x) = -\infty$.

Volviendo a derivar

$$f''(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} - x(\frac{-1}{2\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}}\frac{2xb^2}{a^2})}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} + \frac{b^2x^2}{a^2(b^2(1-\frac{x^2}{a^2}))^{\frac{3}{2}}}\right]$$

que es negativo si $x \in (0,a)$. Por tanto la función es cóncava $\square$

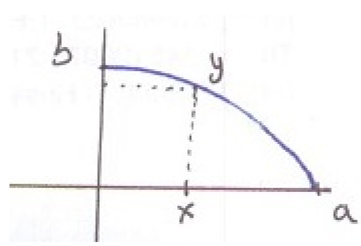


Figura 10. Función cóncava.

Ejercicio. 1. *Sea* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *para* $x \in [0,\pi]$. *Se toman* $x_0, a, b \in [0,\pi]$, *con* $x_0 \le a < b$. *Prueba que* $f'(x_0) \ge \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración: La función $f(x) = \operatorname{sen} x > 0$ para $x \in [0,\pi]$. Además es una función cóncava ya que $f'(x) = \cos x$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x < 0$.

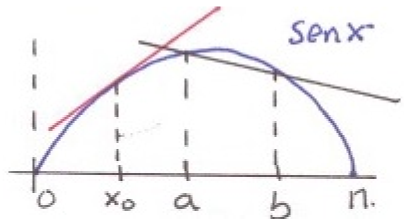


FIGURA 11. Función seno.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. por el Teorema del Valor Medio existe un $c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

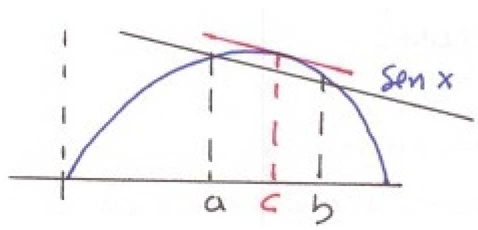


FIGURA 12. Teorema del Valor Medio.

Como la función es cóncava su derivada es una función decreciente y por tanto como $x_0 \le a < c < b$ se tiene que

$$f'(x_0) \ge f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

PUNTOS CRÍTICOS.

El signo de la derivada y de la derivada segunda de una función nos da información de la misma. También lo hacen los puntos donde estas derivadas se anulan.

Definición. 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable.*

a: *Se dice que un punto $x_0 \in Domf$ es un* ***punto crítico*** *de f si $f'(x_0) = 0$.*

b: *Dado un punto $x_0 \in Domf$ se dice que es un* ***punto de inflexión*** *de f si existe $\delta > 0$ de modo que*

$$f \quad \text{es convexa en} \quad (x_0 - \delta, x_0)$$

y

$$f \quad \text{es cóncava en} \quad (x_0, x_0 + \delta)$$

o diceversa.

Observación. 1.

- *Los puntos críticos de una función son candidatos a máximos o mínimos relativos de la función, y por tanto puntos donde puede cambiar el crecimiento de la función.*
- *Los candidatos a puntos de inflexión son los puntos críticos de la función derivada (es decir, si existe f'', los puntos x_0 para los cuáles $f''(x_0) = 0$).*

Teorema. 1. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y supongamos que existe f'' en (a,b).*

a:
- *Sea $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.*
- *Sea $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.*

b: *Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$.*

Demostración: **a**) El signo de la derivada segunda hace referencia a la forma de la gráfica y de ella podemos deducir si el punto crítico x_0 es un máximo o un mínimo.

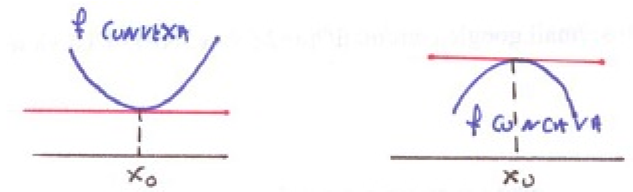


FIGURA 1. Demostración sin palabras.

La demostración rigurosa la veremos en el Tema de Aproximación Polinómica.

Ahora si pedimos un poco más, que exista f'' y que sea continua, entonces en el caso de que $f''(x_0) > 0$, se sigue que $f'' > 0$ en un entorno de x_0, pongamos $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Allí f' es creciente y por tanto para $x_1 \in (x_0-\delta, x_0)$ y $x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$ se tiene que

$$f'(x_1) \leq f'(x_0) = 0 \leq f'(x_2).$$

Luego f es decreciente en $(x_0-\delta, x_0)$ y creciente en $(x_0, x_0+\delta)$. Así x_0 es un mínimo local.

b) f' es continua ya que existe f''.

Si f es convexa en $(x_0-\delta, x_0)$, entonces f' es creciente y como es continua $\sup\{f'(x) \ : \ x \in (x_0-\delta, x_0)\} = f'(x_0)$.

Si f es cóncava en $(x_0, x_0+\delta)$, entonces f' es decreciente y como es continua $\sup\{f'(x) \ : \ x \in (x_0, x_0+\delta)\} = f'(x_0)$

Así f' tiene un máximo local en x_0; como existe $f''(x_0)$ necesariamente $f''(x_0) = 0$.

El argumento es el mismo si f es cóncava en $(x_0-\delta, x_0)$ y convexa en $(x_0, x_0+\delta)$

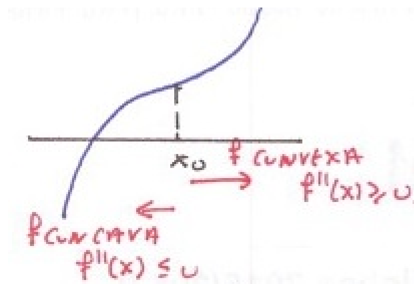


FIGURA 2. Punto de inflexión.

□

El Teorema anterior es útil para localizar puntos de inflexión. La derivada segunda no es muy determinante sin embargo para determinar en la práctica los extremos locales. Es más rápido y fácil determinar el signo de f'.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función $f(x) = x^3$. ¿Qué ocurre en $x = 0$?*

Demostración: $f'(x) = 3x^2$. Luego en $x = 0$ tenemos un punto crítico. Como $f' > 0$, la función siempre crece, luego $x = 0$ no es ni un máximo ni un mínimo. Además $f''(x) = 6x$. Asi $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y por tanto f es cóncava en $(-\infty, 0)$. Como $f''(x) > 0$ si $x > 0$, por tanto f es convexa en $(0, \infty)$.

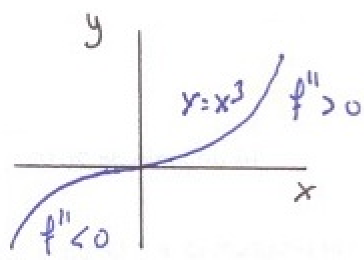


FIGURA 3. $x = 0$ punto de inflexión.

□

Ejemplo. 2. *Consideramos la función $f(x) = x^4$. ¿Qué ocurre en $x = 0$?*

Demostración: $f'(x) = 4x^3$, así $f' < 0$ si $x < 0$ y $f' > 0$ si $x > 0$. Luego f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Luego en el punto crítico $x = 0$ solo puede haber un mínimo.

Por otro lado $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, luego la función es convexa en toda la recta. En el punto $x = 0$, aunque $f''(0) = 0$ **no** tenemos un punto de inflexión.

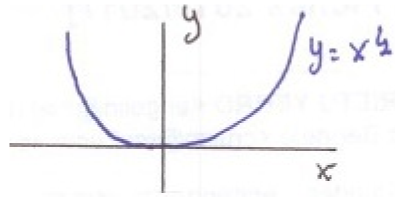


FIGURA 4. $f''(0) = 0$, pero **no** es un punto de inflexión.

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

REPRESENTACIÓN DE GRÁFICAS.

Al estudiar la continuidad de funciones, vimos que con la información que nos aportan los límites uno puede dar una idea aproximada de la gráfica de una función. Ahora al disponer de la derivada estamos en condiciones de precisar mucho más. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. 1. *Vamos a representar la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - x}$.

Demostración: Observemos que

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}.$$

Luego, como existe el límite cuando $x \to 0$, podemos decir que

$$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \backslash \{1\},$$

y en este dominio f es continua.

Límites. Los límites en los extremos del dominio son:

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \infty$

Luego la gráfica de la función tiene un aspecto como:

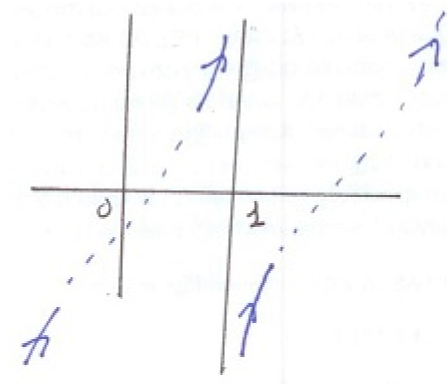


Figura 1. Primer apunte de la gráfica.

Cálculo de la derivada. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1+2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0.$$

Como la derivada es positiva, la función es siempre creciente.

Además

$$f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < 1 \\ < 0, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Así, f es convexa si $x < 1$ y concava en otro caso.

Asíntotas Oblicuas. En este caso como existen

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -1$$

se sigue que la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua de la función.

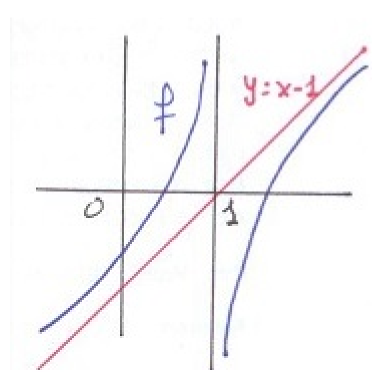


Figura 2. Gráfica de la función.

Observemos que la forma de la gráfica, su concavidad y convexidad, nos obliga a como colocar la gráfica con respecto a la asíntota $\square$

Ejemplo. 2. *Vamos a representar la gráfica de la función* $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x$.

Demostración:

Dominio y Límites. El logaritmo fuerza a que

$$\mathrm{Dom} f = (0, \infty).$$

f es continua en su Dominio y los límites en los extremos del Dominio son (usando la Regla de L'Hôpital cuando sea necesario):

- $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\ln x}{\frac{4}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x}}{\frac{-8}{x^3}} = 0$. Como existe este límite, $0 \in \mathrm{Dom} f$ y allí f también es continua.
- $\lim\limits_{x \to \infty} -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x = -\infty$.

Además es fácil ver que $f(x) > 0$ si $x \in (0, 1)$ y $f(x) < 0$ si $x > 1$. Luego

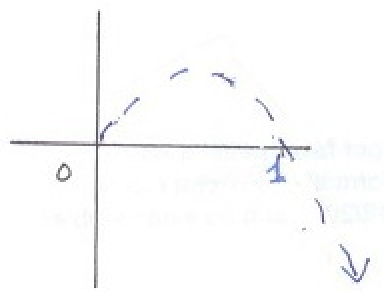


FIGURA 3. Boceto de la gráfica.

Estudio de la derivada. Derivando

$$f'(x) = -\frac{1}{4}2x \ln x - \frac{1}{4}x^2\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x[\ln x + \frac{1}{2}] \begin{cases} > 0, & \text{si } \ x < e^{-\frac{1}{2}} \\ 0, & \text{si } \ x = e^{-\frac{1}{2}} \\ < 0, & \text{si } \ x > e^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Así es claro que la función crece en el intervalo $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ y después decrece. Por tanto $x = e^{-\frac{1}{2}}$ es un máximo relativo, pero también absoluto de la función.

Derivando otra vez

$$f''(x) = -\frac{1}{2}[\ln x + \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}x\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}[\ln x + \frac{3}{2}] \begin{cases} > 0, & \text{si } \ x < e^{-\frac{3}{2}} \\ 0, & \text{si } \ x = e^{-\frac{3}{2}} \\ < 0, & \text{si } \ x > e^{-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Así es claro que la función es convexa en el intervalo $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ y después concava. Por tanto $x = e^{-\frac{3}{2}}$ es un punto de inflexión de la función.

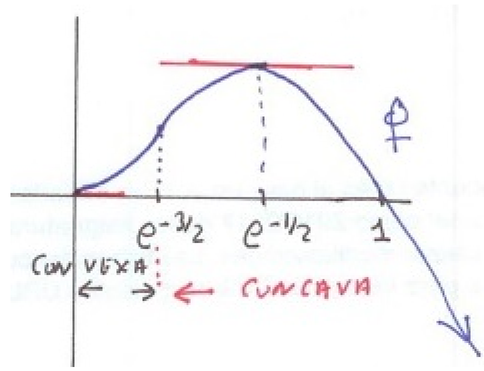


FIGURA 4. Gráfica de la función.

Observemos que la forma de la función, ser convexa cerca de cero, fuerza a que la derivada en cero sea nula. O de forma formal, por la Regla de L'Hôpital $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x[\ln x + \frac{1}{2}] = 0$.
$\square$

Ejemplo. 3. *Vamos a dibujar la **elipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Demostración: La elipse ya la hemos tratado antes (ver apéndice Gráficas de Funciones de varias Variables). Despejando en la fómula

$$y = \pm\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}, \quad \text{para} \quad x \in [-a, a].$$

La función $f(x) = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ para $x \in [0, a]$ ya la hemos dibujado en el artículo anterior. Nos salía una gráfica decreciente y concava. Como f es una funición **par** (es decir $f(x) = f(-x)$), la gráfica de $f(x) = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ para $x \in [-a, 0]$ es simétrica respecto del eje $x = 0$ de la gráfica anterior. Por otro lado la gráfica de $f(x) = -\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$ para $x \in [-a, a]$ es simétrica a la que tenemos respecto del eje $y = 0$.

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

tenemos que $f(a) = f(-a) = 0$

$f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow x \in [-a, a] = \mathrm{Dom} f$

$f'(x) = \frac{b}{2} \cdot \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2} \cdot \left(1-\frac{2x}{a^2}\right) = \begin{cases} <0 \text{ si } x>0 \text{ decrece} \\ >0 \text{ si } x<0 \text{ crece} \end{cases}$

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ cóncava

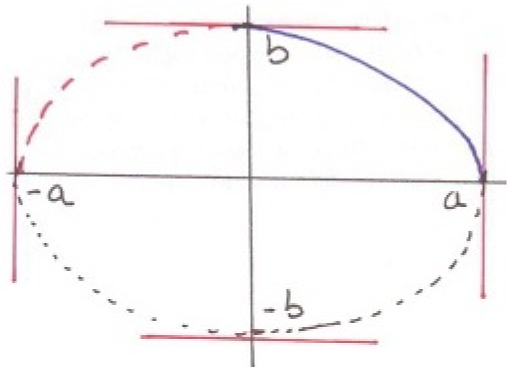


FIGURA 5. Elipse.

Como ejercicio se deja comprobar que los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ tienen tangentes horizontales y en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ las tangentes son verticales (ver apéndice siguiente sobre el concepto de tangente vertical). □

Ejercicio. 1. *Representar las gráficas de las funciones* $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *y de* $g(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Demostración: En el Tema de Continuidad, en el artículo sobre Gráficas, dibujamos esta gráfica

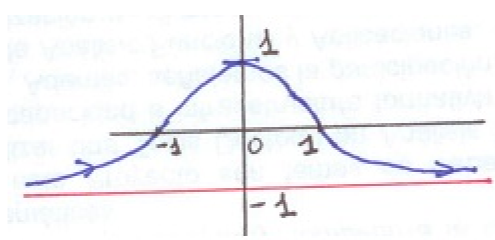


FIGURA 6. Gráfica de la función f.

Observemos que entonces no disponiamos de la derivada

$$f'(t) = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \\ < 0, & \text{si} \quad 0. \end{cases}$$

Así, la función crece en $(0, \infty)$ y decrece en el resto del dominio; por tanto $t = 0$ es un máximo. Además esta función es **par** por definición, por eso nos sale simétrica recpecto al eje de las "y" $(x = 0)$.

Por otro lado, la función g la pintabamos como

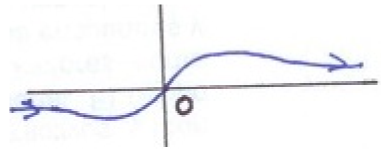


FIGURA 7. Gráfica de la función g.

Ésta es una función **impar** (es decir $g(x) = -g(-x)$), así podemos dibujar su gráfica simétrica respecto del origen $(0,0)$. Solo nos falta derivar y así

$$g'(t) = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x \in (-1,1) \\ 0, & \text{si} \quad x = -1 \text{ o } 1 \\ < 0, & \text{si} \quad x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Luego como preveíamos, tenemos un mínimo en $t = -1$ y un máximo en $t = 1$

□

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

TANGENTES A CURVAS PARAMÉTRICAS.

La forma más general de representar un curva en el plano no es a través de una gráfica sino de una curva paramétrica (ver Apéndice al tema de Continuidad). Sea una curva paramétrica plana

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & & t & \to & f(t) & = & (f_1(t), f_2(t)) \end{array}$$

donde las funciones $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones reales de una variable real **derivables**. Si procedemos geométricamente, como hicimos a la hora de justificar la derivada de una función, tomando $f(t_0)$ y $f(t)$ dos puntos sobre la curva paramétrica y trazando la recta que los une, tendremos la recta

$$r(x) = \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{f_1(t) - f_1(t_0)}(x - f_1(t_0)) + f_2(t_0).$$

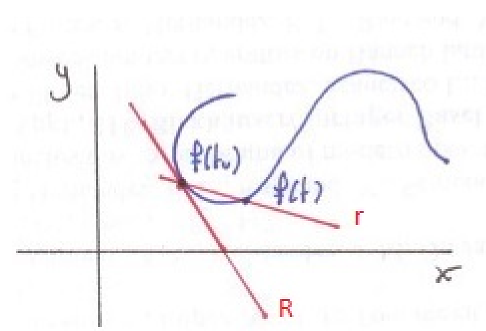


Figura 1. Cuerda entre dos puntos de una curva paramétrica plana.

Si cálculamos el límite de estas pendiente cuando t tiende a t_0

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{f_1(t) - f_1(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}\frac{t - t_0}{f_1(t) - f_1(t_0)}$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t-t_0}}{\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t-t_0}}$$

como f_1 y f_2 son derivables y si además $f_1'(t_0) \neq 0$, entonces

$$= \frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0).}$$

Alcanzado este límite, podemos definir la recta tangente como

$$R(x) = \frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0)}(x - f_1(t_0)) + f_2(t_0).$$

Observación. 1.

- *Hemos obtenido la recta tangente R, de forma análoga a como lo hicinos para gráficas.*
- *La recta R no viene dada por unas ecuaciones paramétricas, pero observemos que el vector*

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0))$$

es un vector director de la recta tangente. Y así la recta R admite una parametrización

$$\begin{array}{rcl} x & = & (t - t_0)f_1'(t_0) + f_1(t_0) \\ y & = & (t - t_0)f_2'(t_0) + f_2(t_0) \end{array}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Como en el caso de gráficas, podemos probar (ver el siguiente Teorema) que la recta tangente es la recta que mejor aproxima a la curva en el punto correspondiente. Esta propiedad es la que nos permite dar una definición general de recta tangente para una curva paramétrica.

Definición. 1. *Sea una curva paramétrica*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \to & f(t) \quad = \quad (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas para todo $k = 1, 2, .., n$. Una recta $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se llama recta tangente a la curva f por el punto $f(t_0)$ si

- *$f(t_0) = r(t_0)$ (pasa por el punto $f(t_0)$ para el mismo valor del parámetro) y*
- $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - r(t)}{t - t_0} = \overrightarrow{0}.$

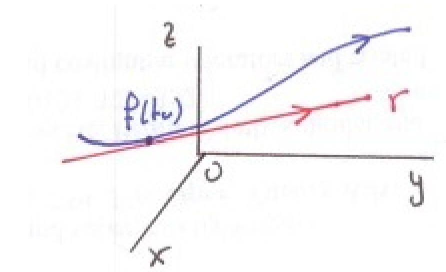


FIGURA 2. Trayectoria en $\mathbb{R}^3$ y su recta tangente por el punto $f(t_0)$.

Teorema. 1. *Sea una curva paramétrica*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & t & \to & f(t) & = & (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ *son continuas y derivables en* $t_0 \in [a,b]$ *para* $k = 1, 2, .., n$. *Entonces la recta paramétrica*

$$R(t) = f(t_0) + (t - t_0)(f_1'(t_0), f_2'(t_0), ..., f_n'(t_0)) \quad para \quad t \in \mathbb{R}$$

es tangente a la curva por el punto $f(t_0)$.

Demostración: Claramente $R(t_0) = f(t_0)$. Por otro lado

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - R(t)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} - f_1'(t_0), ..., \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} - f_n'(t_0) \right)$$

y como las funciones f_k son derivables en t_0

$$= (0, 0, ..., 0)$$

□

Ejemplo. 1. *Sea la parametrización sobre el plano*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & : & [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & & \theta & \to & \gamma(\theta) & = & (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta). \end{array}$$

Demostración: γ es la parametrización de la circunferencia unidad y el vector director de la recta tangenta es $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

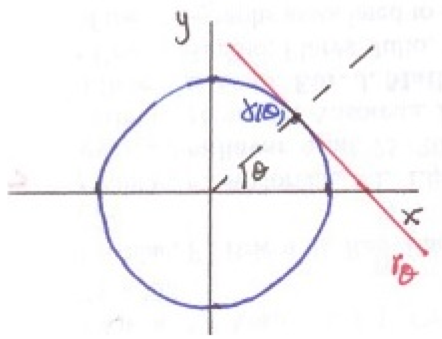


Figura 3. Parametrización de la circunferencia unidad.

Obsevemos que

- $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, lo que prueba que los puntos $\gamma(\theta)$ están sobre la circunferencia unidad (ver Apéndice sobre Trigonometría).
- Por otro lado, el productos escalar
$$\gamma(\theta)\gamma'(\theta) = \cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0,$$
esto último prueba que el radio de la circunferencia por un punto es ortogonal a la tangente por el mismo punto.

□

Tangentes horizontales y verticales en curvas planas. Al representar curvas paramétricas planas (en $\mathbb{R}^2$), son intereseantes encontar las tangentes horizontales y verticales de la curva, si existen.

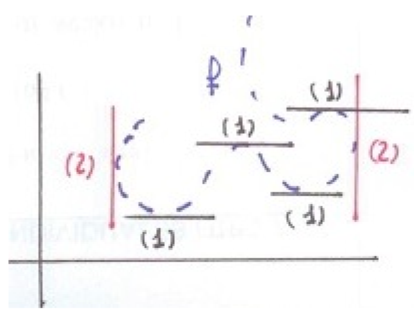


Figura 4. Tangentes horizontales y verticales.

Definición. 2. *Sea una curva paramétrica plana*
$$\begin{array}{cccccc} f & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & \\ & & t & \to & f(t) & = & (f_1(t), f_2(t)) \end{array}$$
donde las funciones $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones reales de una variable real ***derivables****. Se dice que:*

- *una tangente a la curva por el punto $f(t_0)$ es **horizontal**, si es paralela al eje de las "x", es decir paralela a la recta $y = 0$, lo que es lo mismo que decir que $f'(t_0) = (f_1'(t_0), 0)$ con $f_1'(t_0) \neq 0$ ((1) en la figura anterior);*
- *una tangente a la curva por el punto $f(t_0)$ es **vertical**, si es paralela al eje de las "y", es decir paralela a la recta $x = 0$, lo que es lo mismo que decir que $f'(t_0) = (0, f_2'(t_0))$ con $f_2'(t_0) \neq 0$ ((2) en la figura anterior).*

En nuestro ejemplo anterior de la parametrización de la circunferencia,

- $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, 0)$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, en estos puntos encontramos tangentes horizontales.
- $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0, \cos\theta)$ si $\theta = 0$ o π, en estos puntos encontramos tangentes verticales.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

REPRESENTACIÓN DE CURVAS PARAMÉTRICAS.

En el Apéndice al Tema de Continuidad hemos definidos las curvas paramétricas y hemos visto como dibujarlas. Para ello hay que representar primeros una serie de funciones de una variable. Ahora que disponemos de la derivada y hemos visto en el artículo anterior lo que son las tangentes a una curva paramétrica, en particular las tangentes horizontales y verticales, estamos en mejores condiciones para hacer tales dibujos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. 1. *Vamos a representar la curva paramétrica dada por la función* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}).$$

Demostración: Las funciones f y g, como funciones de una variable, ya las hemos representados (ver artículo Representación de Gráficas en este mismo Tema). Con esta información tenemos que representar $\gamma = (f, g)$ en el plano.
Dominio y límites. Como Dom$f$ = Dom$g$ = $\mathbb{R}$, el parámetro t de la función γ se mueve en todo $\mathbb{R}$. Si nos fijamos en el comportamiento del crecimiento de la funciones f y g el dominio de γ queda dividio de la siguiente manera:

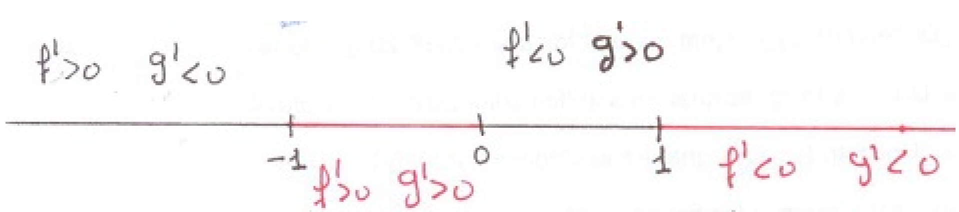


FIGURA 1. Dominio de γ.

Tomando límites en los extremos del dominio (usamos que $\lim \gamma = (\lim f, \lim g)$),

- $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = (\lim_{t\to\infty} f(t), \lim_{t\to\infty} g(t)) = (-1, 0).$

- $\lim_{t\to-\infty}\gamma(t) = (\lim_{t\to\infty} f(t), \lim_{t\to\infty} g(t)) = (-1,0)$.

Luego el comportamiento de la curva es

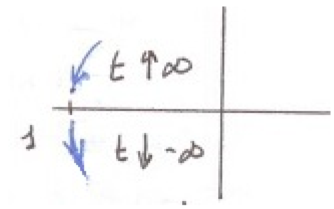


FIGURA 2. $(-1,0)$ punto límite.

El dibujo queda de esa manera ya que $-1 < f(t) \leq 1$ y $-1 \leq g(t) \leq 1$, para todo t.

Por otro lado, los valores $\gamma(-1) = (0,-1), \gamma(0) = (1,0)$ y $\gamma(1) = (0,1)$ son significativos de la curva ya que en ellos varía el comportamiento de crecimiento de las coordenadas f y g. Por otro lado, f y g son continuas, por tanto la curva γ también, y así la curva debe unir estos puntos significativos de forma continua.

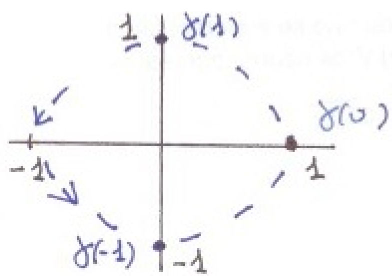


FIGURA 3. Boceto de la curva.

Derivadas. Ponemos $\gamma'(t) = (f'(t), g'(t))$ (vector director de la recta tangente, ver apéndice anterior), así

$$\gamma'(t) = (\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}.)$$

Tangentes horizontales. Si $f'(t) \neq 0$ y $g'(t) = 0$, necesariamente $t = \pm 1$. Tenemos dos tangentes horizontales.

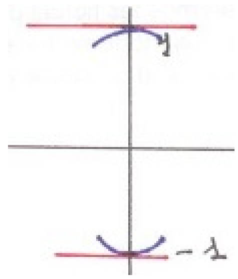


FIGURA 4. Tangentes horizontales en los puntos $\gamma(-1)$ y $\gamma(1)$.

Tangentes verticales. Si $f'(t) = 0$ y $g'(t) \neq 0$, necesariamente $t = 0$. Además observemos que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{g'(t)}{f'(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2-2t^2}{-4t} = \pm\infty.$$

Así tenemos dos tangentes verticales.

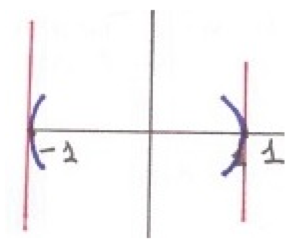


FIGURA 5. Tangentes verticales en los puntos $\gamma(0)$ y en el punto límite $(-1, 0)$.

En cada $\gamma(t)$, la pendiente de la recta tangente en tal punto viene dada por $\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{2-2t^2}{-4t}$, estudiando el crecimiento de esta función descubrimos donde la curva γ es concava o convexa (no lo hacemos).

Con toda esta información es fácil convencerse de que estamos antes la circunferencia de centro cero y radio 1.

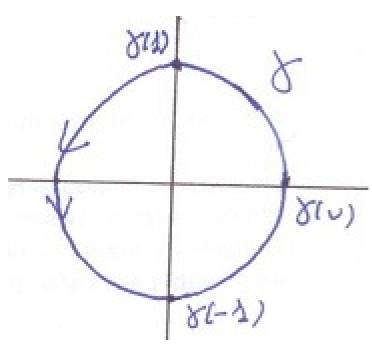


FIGURA 6. Curva paramétrica γ, la circunferencia unidad.

□

Observación. 1. $f^2(t) + g^2(f) = (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 + (\frac{2t}{1+t^2})^2 = 1.$

Hemos visto un ejemplo muy básico (una parametrización particular de la circunferencia, hay algunas más). Para representar otras curvas paramétricas las herramientas de las que disponemos son en esencia las que hemos visto. Aunque es posible que la complejidad de otros ejemplos hace que tengamos que emplearlas con más finura.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Curvas Paramétricas. Dada una curva paramétrica

$$\begin{array}{rclcl}\gamma & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & t & \rightarrow & \gamma(t) \quad = \quad (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)),\end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas y derivables en $t \in [a,b]$ para $k = 1, 2, .., n$. Llamamos **derivada** de γ a la función paramétrica

$$\gamma'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)) \quad \text{para} \quad t \in [a,b].$$

Ya hemos visto que el vector $\gamma'(t_0)$ es el **vector director** de la recta tangente a la curva paramétrica por el punto $\gamma(t_0)$. Así la recta tangente se escribe como

$$R(t) = \gamma'(t_0)(t - t_0) + \gamma(t_0).$$

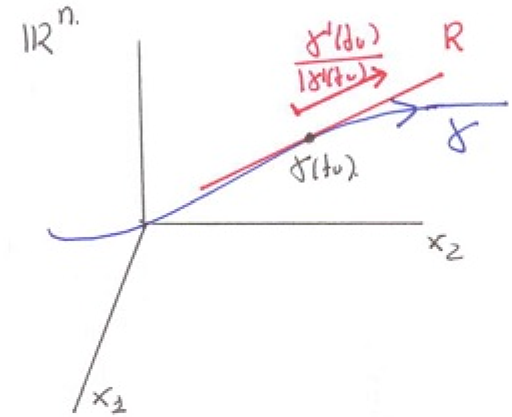


Figura 1. Recta tangente a la curva γ.

Además comprobamos que la recta tangente por un punto $\gamma(t_0)$ es la recta que mejor aproxima a la curva en el punto, es decir

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - R(t)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} - f_1'(t_0), ..., \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} - f_n'(t_0)\right) = \overrightarrow{0}$$

Observación. 1. *En Física, una curva paramétrica γ se ve como la trayectoria de un móvil. Así se considera que el móvil sobre el punto $\gamma(t)$ de la curva lleva un dirección de movimiento igual a $\gamma'(t)$.*

La derivada de una curva tiene otras aplicaciones. Por ejemplo, cuando veamos integración veremos la relación entra la **longitud de una curva** y su derivada.

Potenciales. Derivadas Parciales.

Vamos a considerar una función real de varias variables reales,

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

Ejemplo. 1.

- $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i$ *(función de n variables)*
- $f(x, y) = xy\cos(x + 2y)$ *(función de dos variables).*
- $f(x, y, z) = xz - yx + zy$ *(función de tres variables).*

Un ejemplo importante y que nos va a servir para ciertas notaciones es el **Producto Escalar.**

Ejemplo. 2. *Sea $\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define el **producto escalar** de $\overrightarrow{a}$ por $\overrightarrow{x}$ como*

$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} >= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Así fijado $\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} >$ es una aplicación de n variables.

Ejemplos concretos son

- $f(x, y) = 2x - 3y =< (2, -3), (x, y) >$.
- $f(x, y, z) = 2x - y + z =< (2, -1, 1), (x, y, z) >$.

Observación. 2. *En $\mathbb{R}^n$*

a: $\sqrt{< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *es la **distancia** que separa el punto $\overrightarrow{x}$ de $\overrightarrow{0}$.*

b: $\sqrt{< \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ *es la **distancia** que separa el punto $\overrightarrow{x}$ del punto $\overrightarrow{y}$.*

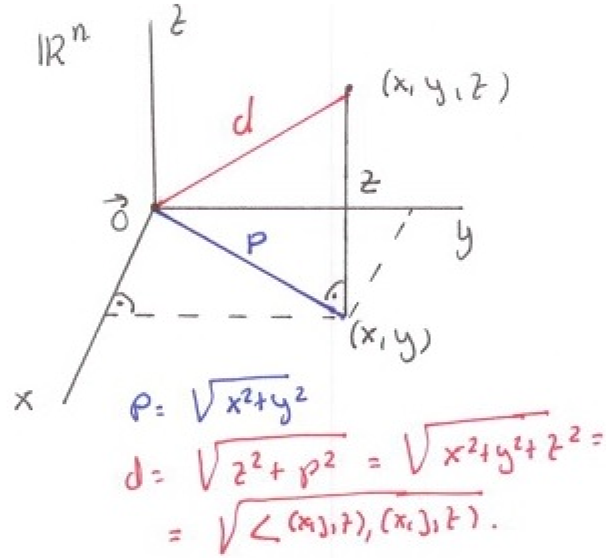


FIGURA 2. Distancia en $\mathbb{R}^n$.

Si en una función f de n variables nos fijamos en una x_{i_0} y consideramos las demás (x_i, con $i \neq i_0$) como constantes, podemos hacer la derivación formal respecto de la variable que hemos elegido. Esto es lo que llamamos una **derivada parcial,** y lo escribimos como $\frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}$.

Ejemplo. 3.
- *Sea* $f(x, y) = xy\cos(x + 2y)$, *entonces*
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(x + 2y) - xy\,\mathrm{sen}(x + 2y)$.
  - $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x + 2y) - 2xy\,\mathrm{sen}(x + 2y)$.
- *Sea* $f(x, y, z) = 2x - y + z$, *entonces*
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$.
  - $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$.
  - $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

Formalmente

Definición. 1. *Sea una función de n variables*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

y sea $\overrightarrow{a} \in Domf$.

a: *Se llama* ***derivada parcial*** *de f con respecto a la variable x_i en el punto $\overrightarrow{a}$, al siguiente límite, siempre que exista,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, .., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, .., a_n) - f(\overrightarrow{a})}{h}.$$

b: *El vector de derivadas parciales*

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = (\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a}), .., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a})\,)$$

se le llama ***gradiente*** *de la función f en el punto $\overrightarrow{a}$.*

Ejemplo. 4.

- *Sea $f(x,y) = xy\cos(x+2y)$, entonces*

$$\nabla f(x,y) = (y\cos(x+2y) - xy\,\mathrm{sen}(x+2y), x\cos(x+2y) - 2xy\,\mathrm{sen}(x+2y)).$$

- *Sea $f(x,y,z) = 2x - y + z$, entonces*

$$\nabla f(x,y,z) = (2,-1,1),$$

El gradiente de una función tiene interesantes propiedades. Viene a ser como la derivada de una función en una variable. Se puede probar que:

- $$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - (<\nabla f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}> + f(\overrightarrow{a}))}{\sqrt{<\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}>}} = 0.$$

  Es decir la función **lineal** $r(\overrightarrow{x}) = <\nabla f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}> + f(\overrightarrow{a})$ aproxima a la función f cerca del punto $\overrightarrow{a}$ (para que lo anterior sea cierto hay que pedir no solo que las derivadas parciales existan sino que además sean continuas).
- Los puntos donde el gradiente se anula, $\nabla f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, son candidatos a máximos y mínimos locales de la función f.
- El gradiente es un vector de $\mathbb{R}^n$. Se puede probar que la dirección que indica el vector gradiente en un punto es la dirección de máxima variación de la función en el punto.

Ejemplo. 5. *Supongamos que la función $f(x,y,z)$ indica la temperatura del punto del espacio (x,y,z). Entonces $\nabla f(x,y,z)$ indica la dirección en la que fluye el calor en el punto (x,y,z), dado que indica la dirección en que las temperaturas varian más rapidamente.*

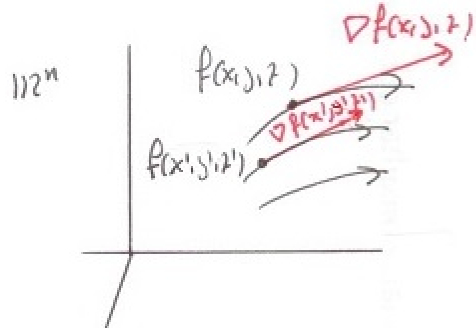


Figura 3. Flujo.

Funciones Vectoriales.

Consideremos funciones de varias variables que toman valores vectoriales, es decir funciones

$$\begin{array}{cccccc} F & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = \overrightarrow{y} = (y_1, ..., y_m). \end{array}$$

Si llamos $f_j(\overrightarrow{x}) = y_j$ (función real de n variables) para $j = 1, 2, .., m$, entonces podemos escribir

$$F(\overrightarrow{x}) = (\, f_1(\overrightarrow{x}), f_2(\overrightarrow{x}), ..., f_m(\overrightarrow{x})\,).$$

Ejemplo. 6.
- *$F(x, y) = (xy, \cos x, \operatorname{sen} y)$ es una función definida en $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}^3$.*
- *Si $f(x, y, z) = xyz$, entonces $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ es una función de $\mathbb{R}^3$ en si mismo. Si f es una función real de n varaibles entonces el gradiente de la función ∇f es una función vectorial de $\mathbb{R}^n$ en si mismo.*
- *$F(x, y, z) = (7-x, \ln y, x+y+z)$. En este caso $F = (f_1, f_2, f_3))$ donde $f_1(x, y, z) = 7 - x$, $f_2(x, y, z) = \ln y$, y $f_3(x, y, z) = x + y + z$.*

Definición. 2. *Dada una función vectorial de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $F = (f_1, ..., f_m)$ se llama **matriz diferencial** de F a la matriz de derivadas parciales $DF \in M_{m\times n}$, si existen,*

$$DF = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\begin{array}{l} j = 1,2,...,m \\ i = 1,2,...,n \end{array}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. 7. *Sea* $F(x,y,z) = (7-x, \ln y, x+y+z)$*. La diferencial de* F *es*

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como en el caso de las funciones escalares, la **diferencial** permite encontrar una función lineal que aproxima la función de forma local. De forma precisa, se puede probar que:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{F(\vec{x}) - (\, DF(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + F(\vec{a}))}{\sqrt{< \vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a} >}} = 0.$$

Es decir la función **lineal** $r(\vec{x}) = DF(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + F(\vec{a})$ aproxima a la función F cerca del punto $\vec{a}$ (para que lo anterior sea cierto hay que pedir no solo que las derivadas parciales existan sino que además sean continuas).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTRODUCCIÓN A LA INTEGRAL.

En $\mathbb{R}$:

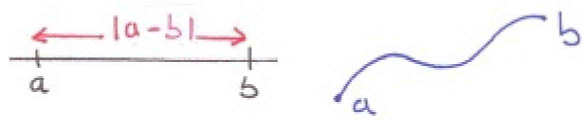


Figura 1. ¿Comó medimos una línea curva?

sabemos calcular la distancia entre dos números y por tanto la **longitud** de un intervalo o segmento $[a, b]$, ésta es

$$|a - b|.$$

En $\mathbb{R}^2$:

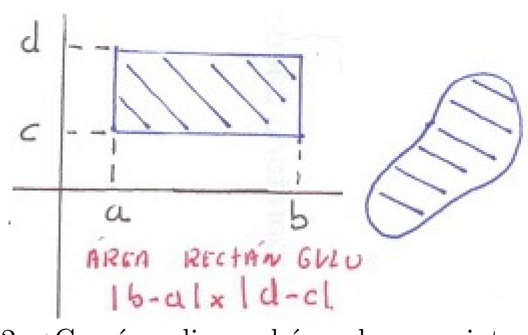


Figura 2. ¿Comó medimos el área de un recinto cualquiera en el plano?

sabemos calcular el **área** de un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, ésta es

$$|a - b| \times |c - d|.$$

En $\mathbb{R}^3$:

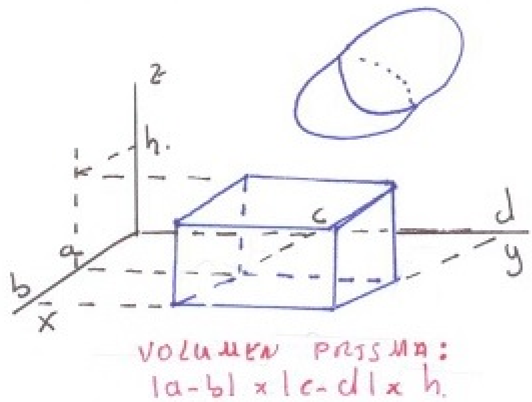


FIGURA 3. ¿Comó medimos el volumen de un sólido cualquiera en el espacio?

sabemos calcular el **volumen** de un prisma $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, éste es

$$|a - b| \times |c - d| \times |e - f|.$$

Sabemos medir objetos "rectos", pero ¿sabríamos hacerlo si curvamos estos objetos? La respuesta matemática a esta pregunta en la **Integral.** La integral es una herramienta matemática que nace para calcular áreas de un tipo determinado de recintos del plano. Después, como ocurre con otras herramientas matemáticas, descubrimos nuevos significados y aplicaciones de la misma (pensemos en la derivada desde su nacimiento geométrico hasta sus muchas aplicaciones vistas en el Tema anterior).

Empezaremos viendo que es la integral, vamos a definirla en su forma más sencilla (la idea es calcular un área). Después trataremos el problema de calcularla de un modo efectivo. Más adelante veremos que con esta herramienta se pueden calcular longitudes y volúmenes. Y no solo eso, si no que permite definir y estudiar otros problemas sorprendentes: definir probabilidades, estudiar frecuencia de señales, comprimir información, escribir las leyes del electromagnetismo ...etc

Áreas. Nosotros sabemos medir áreas de recintos elementales, como los que se muestran en la figura.

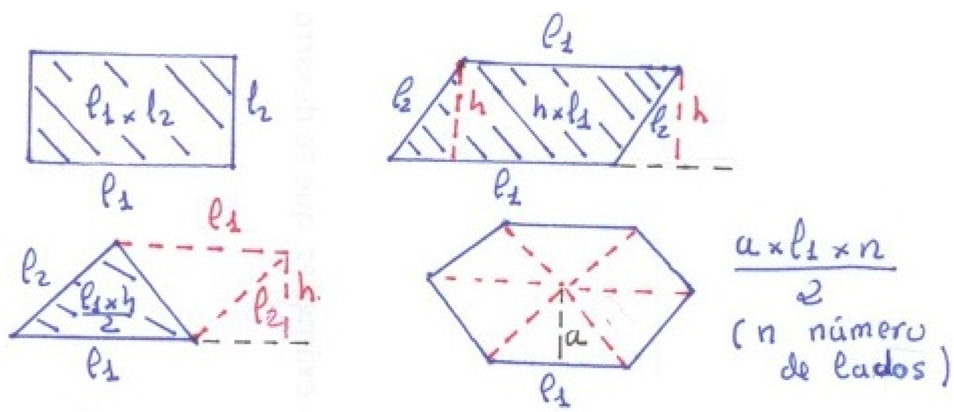


Figura 4. Áreas elementales

Observemos que el **áera de un rectángulo** viene dada por una convención o definición: "lado por lado". A partir de esta definición el área de un paralelogramo, de un triángulo o de un polígono regular se pueden deducir fácilmente.

El caso del círculo es más misterioso. El área del círculo "copia" la fórmula de la de los polígonos regulares: "longitud del perímetro por apotema (radio) dividido por dos".

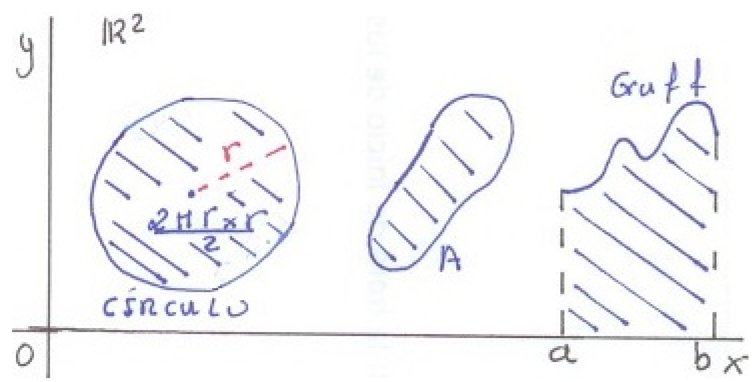


Figura 5. Recintos planos. Área del círculo.

En este Tema daremos una demostración rigurosa de que efectivamente ésta es el área del circulo. Pero antes de ello, nuestro objetivo es más modesto. No pretendemos medir cualquier recinto plano sino solo aquel que deja una función por debajo de su gráfica:

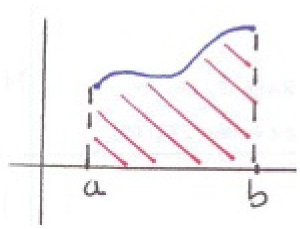


Figura 6. Recinto a medir.

Este recinto consta de tres lados rectos y uno curvo. ¿Como abordar el problema de calcular su área? Un proceder habitual es que si sabemos hacer algo (medir rectángulos en este caso) pués lo usamos hasta donde podamos. Aproximando por ejemplo. En la siguiente figura vemos como nuestro recinto puede ser aproximado por la suma de las áreas de tres rectángulos.

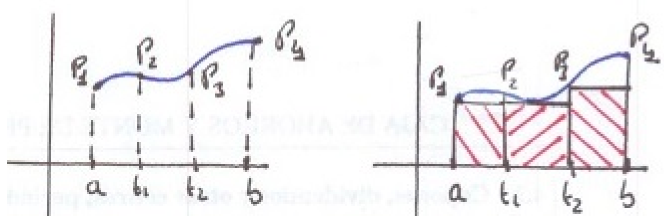


Figura 7. Aproximación por rectángulos.

Este es un método usual en las ciencias aplicadas. Nosotros queremos ir un poco más lejos. No nos conformamos con una aproximación sino que queremos encontrar, **definir**, de forma precisa el **área** de este recinto. Para ello necesitamos la noción abstracta de continuidad de la recta, de límite, que hemos estudiado previamente.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, positiva ($f \geq 0$) y cuya gráfica presenta una situación del tipo:

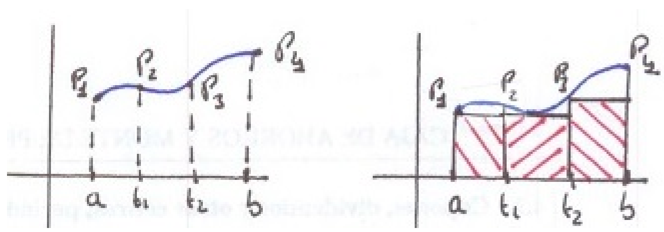


FIGURA 1. Aproximación por rectángulos.

Antes de aproximar por rentángulos tenemos que dividir el intervalo donde está definida la función.

Definición. 1. *Dado un intervalo cerrado de la recta* $[a,b]$ *llamamos* ***partición*** *del intervalo a todo conjunto finito del mismo*

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n \in [a,b]\}$$

de modo que

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < .... < t_n = b.$$

Llamamos $P([a,b]) = \{P \; : \; P \text{ partición de } [a,b]\}$, *es decir al conjunto de todas las particiones del intervalo* $[a,b]$.

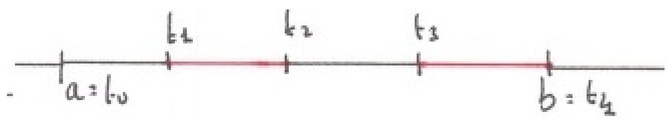


FIGURA 2. Partición de un intervalo.

Ejemplo. 1. *Dado el intervalo* $[1,3]$, *dos ejmplos de particiones de este intervalo son*

*
- $P = \{1, \frac{3}{2}, e, 3\}$. *Esta partición tiene* 4 *elementos y divide el intervalo en tres partes.*
- $P' = \{1, \frac{3}{2}, 2, e, 3\}$. *Esta partición tiene* 5 *elementos y divide el intervalo en cuatro partes.*

$P \subset P'$

Una partición sobre un intervalo descompone este en intervalos más pequeños cuya unión es el total.

Observemos que en el ejemplo anterior $P \subset P'$. La partición P' contiene todos lo elementos de la partición P y alguno más.

Definición. 2. *Dada dos particiones $P, P' \in P([a,b])$ de un intervalo $[a,b]$, se dice que la partición P' es más **fina** que la partición P si $P \subset P'$.* Ejemplo: *

Una partición más fina que otra divide el intervalo en más subintervalos que la que es menos fina.

Lema. 1. *Dada dos particiones $P, P' \in P([a,b])$ de un intervalo $[a,b]$, existe otra partición P'' que es más fina que las otras dos.*

Demostración: Para ello solo hay que considerar $P'' = P \bigcup P'$ $\square$

Las particiones de un intervalo nos dan las "bases" de los rectángulo con los que queremos aproximar nuestras "áreas". Vamos a hora con las alturas.

Definición. 3. *Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **acotada** y sea $P \in P([a,b])$ una partición del intevalo $[a,b]$*

$$P = \{a = t_0 < t_1 < .... < t_n = b\}.$$

Se definen

$$M_i = M_{[t_i, t_{i+1}]} = \sup\{f(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \quad para \quad i = 0, 1, 2, .., n-1;$$

y

$$m_i = m_{[t_i, t_{i+1}]} = \text{ínf}\{f(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \quad para \quad i = 0, 1, 2, .., n-1.$$

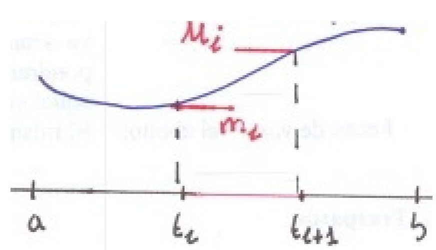


Figura 3. Supremo e ínfimo en un subintervalo.

Observemos que los supremos e ínfimos de la definición existen por que la función f la tomamos acotada (además de la Propiedad del Extremo Superior de $\mathbb{R}$ que vimos en el primer Tema).

El siguiente paso es definir la suma de las áreas de la rectángulos que van a aproximar nuestra figura.

Definición. 4. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada** y sea $P \in P([a, b])$ una partición del intevalo $[a, b]$.*

a: *Se define la **suma superior** de la función f con respecto a la partición P por*

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i).$$

b: *Se define la **suma inferior** de la función f con respecto a la partición P por*

$$I(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i).$$

Aquí M_i y m_i son los supremos e ínfimos definidos arriba.

Observemos que $M_i(t_{i+1} - t_i)$ es el área del rectángulo de base el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y altura M_i.

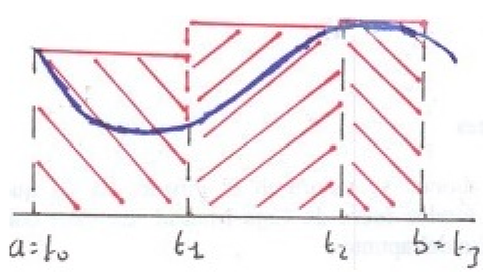


FIGURA 4. Aproximación superior.

De la misma forma $m_i(t_{i+1} - t_i)$ es el área del rectángulo de base el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y altura m_i.

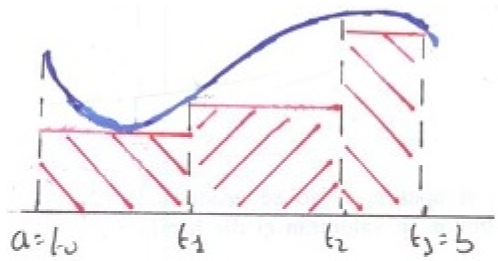


FIGURA 5. Aproximación inferior.

Lema. 2. *Sea una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$* ***acotada*** *y sea $P\in P([a,b])$ una partición del intevalo $[a,b]$. Entonces*

$$I(f,P)\leq S(f,P).$$

Demostración: La prueba es muy sencilla ya que $m_i\leq M_i$ y $t_{i+1}-t_i\geq 0$ para todo $i=0,1,2,...,n-1$. $\square$

Lema. 3. *Sea una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$* ***acotada*** *y sean $P,P'\in P([a,b])$ dos particiones del intevalo $[a,b]$. Si P' es más fina que P (es decir P' tiene todos los punto de P y alguno más), entonces*

$$(*)\qquad I(f,P)\leq I(f,P')\leq S(f,P')\leq S(f,P).$$

Demostración: En primer lugar supondremos que $P=\{t_0<t_1<....<t_n\}$ tiene solo un punto menos que P', así

$$P'=P\bigcup\{c\}$$

y

$$P'=\{t_0<t_1,...,t_j<c<t_{j+1},...,t_n\}\quad\text{para algún}\quad j.$$

Entonces como

$$m_i\leq \min\{m_{[t_j,c]},m_{[c,t_{j+1}]}\}\quad\text{y}\quad M_j\geq\max\{M_{[t_j,c]},M_{[c,t_{j+1}]}\},$$

por tanto

$$I(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i(t_{i+1}-t_i)$$

$$\leq\sum_{i=0,i\neq j}^{n-1}m_i(t_{i+1}-t_i)+m_{[t_j,c]}(c-t_j)+m_{[c,t_{j+1}]}(t_{j+1}-c)=I(f,P')$$

y

$$\leq S(f,P')=\sum_{i=0,i\neq j}^{n-1}M_i(t_{i+1}-t_i)+M_{[t_j,c]}(c-t_j)+M_{[c,t_{j+1}]}(t_{j+1}-c)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) = S(f, P).$$

Lo que prueba $(*)$ en este caso.

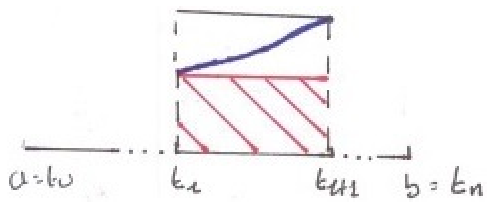


FIGURA 6. Demostración sin palabras.

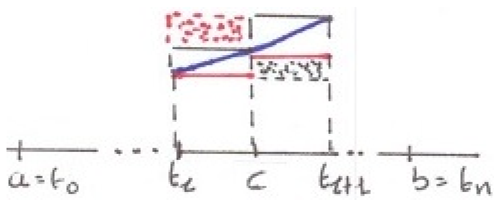


FIGURA 7. Demostración sin palabras.

Para terminar si $P' = P \bigcup \{c_1, ..., c_k\}$, probamos $(*)$ para P y $P \bigcup \{c_1\}$, después para $P \bigcup \{c_1\}$, y $P \bigcup \{c_1, c_2\}$,....etc $\square$

Proposición. 1. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada** y sean $P, P' \in P([a, b])$ dos particiones del intevalo $[a, b]$ cualesquiera. Entonces*

$$I(f, P) \leq S(f, P').$$

Demostración: Sea $P'' = P \bigcup P'$ una partición más fina que P y que P', entonces por el lema anterior

$$I(f, P) \leq I(f, P'') \leq S(f, P'') \leq S(f, P')$$

$\square$

Acabamos de probar que cualquier suma inferior esta acotada por cualquier suma superior y diceversa. Esto nos premite dar la siguiente definición.

Definición. 5. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada**.*

a: *Se define la integral superior de f en el intervalo $[a, b]$ por el número real*

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{S(f, P) \ : \ P \in P([a, b])\}.$$

b: *Se define la integral inferior de f en el intervalo $[a,b]$ por el número real*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{I(f,P) \ : \ P \in P([a,b])\}.$$

Para una función f acotada, estas integrales superiores e inferiores siempre

Observación: existen y además, de la definición de tales números, se sigue que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Lo que hemos hecho es aproximar un "área" por rectángulos inscritos dentro del área, de modo que al hacer más pequeñas las bases conseguiamos una mejor aproximación. Pasando al límite, tomando el supremo, hemos llegado a la integral inferior.

De forma análoga, hemos aproximado un "área" por rectángulos que continenen al área, de modo que al hacer más pequeñas las bases conseguiamos una mejor aproximación. Pasando al límite, tomando el ínfimo, hemos llegado a la integral superior.

Ya estamos en condiciones de dar de dar la definición de **integral.**

Definición. 6. *Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,* ***acotada****. Decimos que la función es* ***integrable*** *en el intervalo $[a,b]$ si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Llamamos ***integral*** *f en el intervalo $[a,b]$ al número real*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Una definición larga y enrevesada. ¿Tiene esto que ver con un área?

Ejemplo. 2. *(**Función de Dirichlet**). Sea considera la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & si \quad x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Claramente esta función está acotada ($0 \leq f(x) \leq 1$) y como todo intervalo contiene tanto un número racional como irracional se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = 0 < 1 = \overline{\int_a^b} f.$$

Luego ***no*** *es una función integrable.*

Si intentamos pintar la gráfica de esta función veremos que no nos queda un recinto donde buscar un área. Lo que vamos a decir ahora es que área e integral son la misma cosa.

Definición. 7. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **acotada**, **positiva** (es decir $0 \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$) e **integrable**.*

a: *Se define el recinto que queda por debajo de la gráfica de f al conjunto del plano*

$$A_f = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in [a, b] \quad y \quad 0 \leq y \leq f(x) \,\}.$$

b: *Llamamos área de A_f al número $\int_a^b f$.*

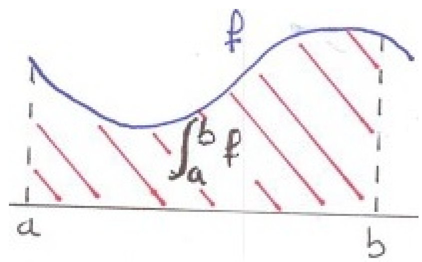


Figura 8. Área por debajo de una gráfica.

Ante tanto despliegue de teoría nos surgen dudas como: ¿cuando una función es integrable? ¿ Está definición de área es la misma que conocemos? ¿Como se hace un cálculo efectivo de integrales? A estas cuestiones vamos a dar respuesta poco a poco. Si es importante recordar para algunas aplicaciones de la integral (en Física por ejemplo) que la integral no es más que un límite de sumas de productos:

$$\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i).$$

Además la estimación anterior es una forma aproximada de calcular integrales, no la más eficiente, pero si la más sencilla.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES INTEGRABLES.

Ya disponemos de una definición de integral. La cuál no parece muy operativa tanto para decir si una función es integrable como para para hacer el cálculo efectivo. Con un poco más de trabajo solucionaremos estos problemas.

Observación. 1. *Una primera observación es que nuestra definición de integral está dada para funciones acotadas, pero no necesariamente positivas. Una función como la de la figura siguiente*

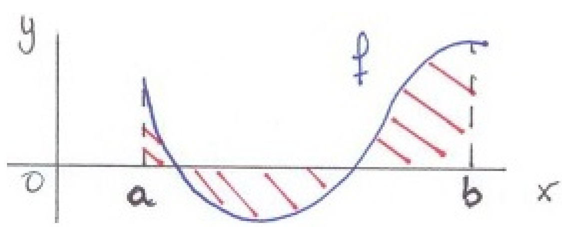


FIGURA 1. Integral de una función no positiva.

parece integrable, aunque la parte que queda por debajo del eje de las x's resta (por definición de sumas superiores) luego el resultado final no será un área.

Tenemos un criterio que nos dice si una función es integrable a no. Teórico si, pero muy útil dentro del desarrollo teórico de las propiedades de la integral, como vamos a ir viendo.

Teorema. 1. ***(Criterio de Riemann de integrabilidad)****. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

- **a:** *f es integrable en el intervalo $[a, b]$.*
- **b:** *Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in P([a, b])$ de modo que*

$$S(f, P) - I(f, P) < \epsilon.$$

Demostración: Vamos a utilizar las definiciones de integral, integral inferior y superior (la última vez que las vamos a tener que usar).

b$\Rightarrow$ **a**. Para cualquier partición P siempre se tiene que

$$I(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f \leq S(f,P).$$

Luego dado $\epsilon > 0$ y la partición P que nos da la afirmación **b**, tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - I(f,P) < \epsilon.$$

Como lo anterior es cierto para todo $\epsilon > 0$, concluimos que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

y por tanto f es integrable (por definición de función integrable).

a$\Rightarrow$ **b**. Si f es integrable tenemos que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

como $\overline{\int_a^b}$ es ínfimo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists P' \in \mathcal{P}(a,b)$: $S(f,P') < \underbrace{\overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}}_{\text{esto ya no es cota inferior}}$

Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar particiones P_1 y P_2 y por tanto una más fina $P = \cancel{P_1 \cup P_2}$ de modo que

$P' \cup P''$

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} \leq I(f,P_1) \leq I(f,P)$$

y

$$S(f,P) \leq S(f,P_2) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}.$$

y esto es análogo con P''

Por tanto

$$S(f,P) - I(f,P) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2} - (\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

□

Este criterio nos permite encontrar otras formas más sencillas de comprobar la integrabilidad.

Proposición. 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la partición*

$$P_n = \{\, a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, ..., a + \frac{k(b-a)}{n}, ..., a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b \,\}$$

(es decir la partición que divide en n partes iguales el intervalo $[a,b]$). Si existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$$

y son iguales, entonce f es integrable y además

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Demostración: Sea $\alpha = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$, entonces dado $\epsilon > 0$ (y por definición de límite de una sucesión) existe un n_0 suficientemente grande de modo que

$$S(f,P_{n_0}), I(f,P_{n_0}) \in (\alpha - \frac{\epsilon}{2}, \alpha + \frac{\epsilon}{2}).$$

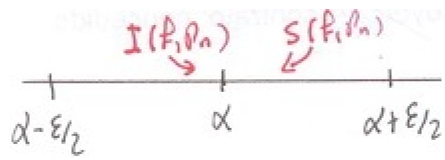


Figura 2. Límite.

Por tanto

$$S(f,P_{n_0}) - I(f,P_{n_0}) < \alpha + \frac{\epsilon}{2} - (\alpha - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$

Así por el Criterio de Integrabilidad f es integrable. Además $\int_a^b f = \alpha$, pués no hay otra posibilidad.

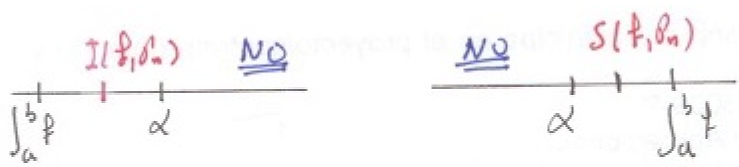


Figura 3. Demostración sin palabras.

$\square$

Ejemplo. 1. *Consideramos $f(x) = rx$, para $r > 0$ y $x \in [0,a]$. Queremos calcular $\int_0^a rxdx$. (El término "dx", que aparece aquí por primera vez, solo indica que la variable de nuestra función es la "x").*

Demostración: Si representamos nuestra función, la cuál es positiva y creciente,

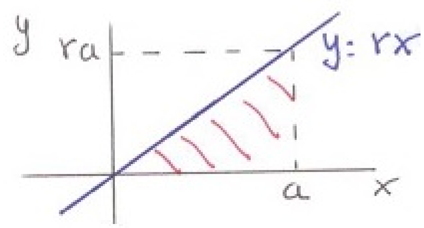


FIGURA 4. Área por debajo de la gráfica f.

la integral debe salir $\frac{a^2r}{2}$, que es el área del triangulo que hemos dibujado. Veámoslo.

Tomamos la partición que divide en n partes iguales el intervalo $[0, a]$.

$$P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, ..., \frac{ia}{n}, ..., \frac{(n-1)a}{n}, a\}.$$

Ahora calculamos, teniendo en cuenta que la función es creciente,

$$I(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{ia}{n} r \frac{a}{n} = \frac{a^2r}{n^2} \sum_{I=0}^{n-1} i = \frac{a^2r}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2r(n-1)}{2n}.$$

($\sum_{I=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$, ver problemas sobre inducción). Y

$$S(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)a}{n} r \frac{a}{n} = \frac{a^2r}{n^2} \sum_{I=0}^{n-1} i + 1 = \frac{a^2r}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2r(n+1)}{2n}.$$

Luego como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^2r(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2r(n-1)}{2n} = \frac{a^2r}{2},$$

la Proposición anterior nos dice que la integral existe y que

$$\int_0^a rxdx = \frac{a^2r}{2}$$

□

Tenemos pués un método para calcular integrales, sin usar supremos e ínfimos sobre un colección de particiones ciertamente muy grande. Además el ejemplo anterior nos confirma que nuestra definición de integral es coherente con el concepto de área que tenemos para figuras elementales.

El siguiente resultado nos dice que una gran cantidad de funciones, de las que usamos usualmente, son integrables.

Teorema. 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en todo el intervalo $[a, b]$. Entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración: Sabemos que una función continua sobre un intervalo cerrado es acotada. También sabemos que es **uniformemente continua** (ver artículo correspondiente en el Tema de Continuidad). Por tanto, dado que la sucesión $(\frac{b-a}{n})_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in [a, b]$ y $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$; tomando n de modo que $\frac{b-a}{n} < \delta$, tenemos que

$$S(f, P_n) - I(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\epsilon}{b-a}\frac{b-a}{n} = \epsilon\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n} = \epsilon.$$

El Criterio de Integrabilidad nos dice que f es integrable. Esta prueba nos dice además que

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0.$$

Así

$$0 < S(f, P_n) - \int_a^b f \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \to_{n\to\infty} 0,$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_a^b f$. De forma similar se ve que $\lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \int_a^b f$ $\square$

En el caso de las funciones continuas la prueba anterior nos da un método de cálculo de integrales de funciones continuas que ni siquiera requiere el uso de sumas superiores e inferiores. Veámoslo.

Corolario. 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en todo el intervalo $[a, b]$. Sea P_n la partición que divide en n partes iguales el intervalo $[a, b]$,*

$$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, ..., a + \frac{i(b-a)}{n}, ..., \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\}.$$

- **a:** *Para cada $x_{n,i} \in [a + \frac{i(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}]$, con $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{n,i})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f.$$

- **b:** *En particular* $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i(b-a)}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f.$
- **c:** *En particular* $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f.$
- **d:** *En particular, si $[a, b] = [0, 1]$ tenemos que* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f.$

Demostración: Vamos a probar solo el caso particular **d**) por simplicidad de notación. El resto de casos se hace de forma análoga.

Sabemos que la función es **uniformemente continua**. Por tanto, dado que la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in [0,1]$ y $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$; tomando n de modo que $\frac{1}{n} < \delta$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} - I(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(f(\frac{i}{n}) - m_i)\frac{1}{n} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon \frac{1}{n} = \epsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \epsilon.$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} - I(f, P_n) = 0.$$

Por ser continua la función sabemos que $\lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \int_0^1 f$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f$$

□

Ejercicio. 1. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n))$.

Demostración: Usamos la regla de suma por diferencia, operamos y cambiamos el contador para obtener

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k^2-n^2))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{n^2} - 1)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k^2}{n^2} - 1) + 1 + (1-1))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} - 1) = \int_0^1 x^2 - 1 dx$$

Cuando sepamos calcular integrales, por medio de primitivas, veremos que la integral anterior es muy fácil de calcular

□

Observación. 2. *No solo las funciones continuas son integrables. En el siguiente artículo vamos a integrar la función*

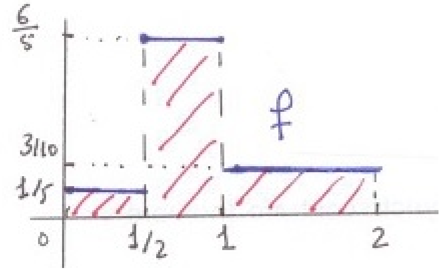


FIGURA 5. Función no continua integrable.

En general se puede decir que una función continua en un intervalo cerrado, salvo quizas en una cantidad finita de puntos, es integrable (ver hoja de ejercicios).

Ejercicio. 2. ***(Numérico)****. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo $[a, b]$ de modo que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. ¿Cuántas veces hay que* ***muestrear*** *f para calcular la integral de f con un error menor que ϵ?*

Demostración: El valor de la integral lo podemos aproximar por una suma de la forma

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i(b-a)}{n})$$

como nos indica el Corolario de arriba. Esta suma solo depende de las **muestras** $(\, f(a + \frac{i(b-a)}{n})\,)_{i=0}^{n-1}$ que tomamos de la función en los puntos $a + \frac{i(b-a)}{n}$, con $i = 0, 1, 2, ...n-1$ (resultado de dividir el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales: P_n).

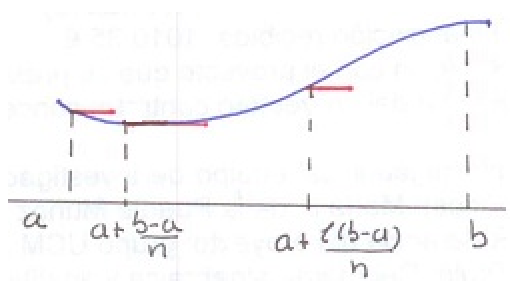


FIGURA 6. Muestreo de una función.

Observemos además que M_i el máximo que alcanza la función en el intervalo $[a + \frac{i(b-a)}{n}, (a + \frac{[i+1](b-a)}{n}]$ (el máximo se alcanza ya que la función es continua) verifica $M_i \geq f(a + \frac{i(b-a)}{n})$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
&|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{i(b-a)}{n}|\\
&\leq S(f,P_n) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{i(b-a)}{n})\\
&= \frac{b-a}{n}(\sum_{i=0}^{n-1} M_i - f(a+\frac{i(b-a)}{n}))
\end{aligned}
$$

usando el Teorema del Valor Medio y la acotación de la derivada de la función

$$
\leq \frac{b-a}{n}(\sum_{i=0}^{n-1} M\frac{b-a}{n}) = \frac{M(b-a)}{n}.
$$

Ahora si forzamos a que

$$
\frac{M(b-a)}{n} \leq \epsilon,
$$

entonces el número de muestras n tendrá que ser

$$
\frac{M(b-a)}{\epsilon} \leq n
$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

Algunas propiedades de la integral, que son importantes para operar con ella, son las siguientes.

Proposición. 1. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,* ***integrable****.*

- *Para todo $c \in [a, b]$ existen las integrales $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ verificándose que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad (*)$$

observación posterior a la demostración

- *Si convenimos que para $\int_x^y f = -\int_y^x f$, entonce la formula $(*)$ es cierta para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ siempre que las integrales que aparecen existan.*

Demostración:

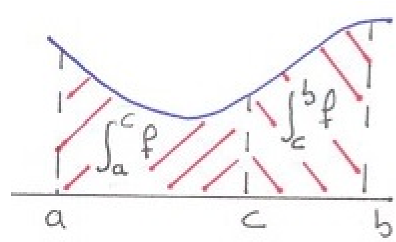


FIGURA 1. Demostración sin palabras.

por el criterio de Riemann

La demostración formal es más engorrosa que difícil. Sea $\epsilon > 0$ y sea P una partición para la cuál $c \in P$ y además

$$S(f, P) - I(f, P) < \epsilon$$

(esta partición existe por el Criterio de Integrabilidad de Riemann). Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = c < t_{k+1} < .. < t_n = b\}$. Así

$$S(f, P) - I(f, P) = \sum_{i=0}^{k-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k}^{n-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) < \epsilon,$$

como $\sum_{i=k}^{n-1}(M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) > 0$ se sigue que para la partición $P' = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = c\} \in P([a,c])$ se tiene que

$$S(f, P') - I(f, P') < \epsilon.$$

Lo que prueba, usando el Criterio de Integrabilidad de Riemann, que existe $\int_a^c f$. De forma similar se prueba que existe $\int_c^b f$.

Para ver la fórmula $(*)$ tomamos ϵ y las dos particiones $P' \in P([a,c])$ y $P'' \in P([c,b])$ de antes. Ahora

$$|\int_a^b f - (\int_a^c f + \int_c^b f)|$$

$$\leq \text{máx}\{S(f,P) - (I(f,P') + I(f,P'')), S(f,P') + S(f,P'') - I(f,P)\}$$

$$= S(f,P) - I(f,P) < \epsilon.$$

Como lo anterior es cierto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

□

Teorema. 1. *Sean f y g dos funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

a: *la función suma $f + g$ es integrable y*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g;$$

b: *la función λf es integrable y*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Demostración: La parte **a**) se prueba usando que

Por el C. de Riemann $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in P[a,b]$ tal que $S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_{fi} - m_{fi})(t_{i+1} - t_i) \leq \varepsilon/2$ y

- $M_{f+g,i} \leq M_{f,i} + M_{g,i}$ lo que permite poner que

$$S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P) \quad \text{para toda partición} \quad P \in P([a,b]);$$

y también que

- $m_{f+g,i} \geq m_{f,i} + m_{g,i}$ (ver ejercicios del Tema de Números) lo que permite poner que

y $\sum_{i=0}^{n-1}(M_{gi} - m_{gi})(t_{i+1} - t_i) \leq \varepsilon/2$

$$I(f+g,P) \geq I(f,P) + I(g,P) \quad \text{para toda partición} \quad P \in P([a,b]).$$

Luego

$$0 \leq S(f+g,P) - I(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P) - (I(f,P) + I(g,P)). \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

y por tanto por el criterio de Riemann $f+g$ es integrable

La parte **b**) se prueba usando que

* Observación: El conjunto $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continuas} \}$ si le añadimos el par $(+, \times)$ formado por la suma y multiplicación de funciones, es un espacio vectorial, y la función $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$
es una aplicación lineal $f \to \int_a^b f$

- $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ y $\inf \lambda A = \lambda \inf A$, si $\lambda \geq 0$ (ver ejercicios del Tema de Números) lo que permite poner que

$$S(\lambda f, P) = \lambda S(f, P) \quad \text{y} \quad I(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) \quad \forall P \in P([a, b]);$$

y también que

- $\sup \lambda A = \lambda \inf A$, y $\inf \lambda A = \lambda \sup A$, si $\lambda < 0$ (ver ejercicios del Tema de Números) lo que permite poner que

$$S(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) \quad \text{y} \quad I(\lambda f, P) = \lambda S(f, P) \quad \forall P \in P([a, b]).$$

□

*

Proposición. 2. *Sean f y g dos funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$.*

a: *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

b: *En particular, si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

c: *La función $|f|$ es integrable y además*

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración:

La parte **a**) se prueba usando que si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces para toda partición

$$m_{f,i} \leq m_{g,i} \quad \text{y} \quad M_{f,i} \leq M_{g,i}$$

$\to S(g,P) \geq S(f,P) \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf\{S(g,P) : P \in P[a,b]\} \geq$
$\geq \inf\{S(f,P) : P \in P[a,b]\}$

donde $m_{*,i}$ y $M_{*,i}$ son los correspondientes ínfimos y máximos dados por una partición.

La parte **b**) es un caso particular del primer caso tomando las funciones f ó g constantes. Es gráfico siguiente nos terminará de convencer.

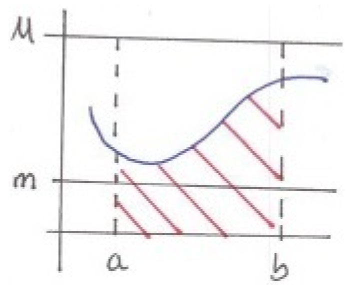


FIGURA 2. Demostración sin palabras.

Parte **c**), la siguiente figura nos ilustra.

observación:

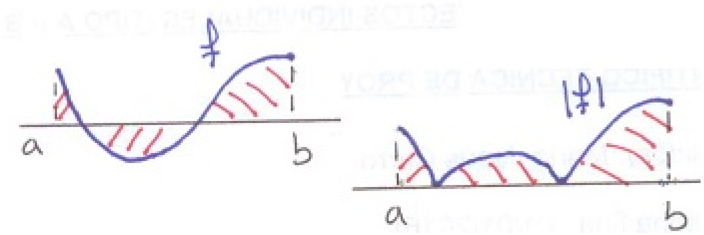


FIGURA 3. Integrales de f y $|f|$.

Si f es integrable al pasar al valor absoluto $|f|$ transformamos la gráfica de f pasando la parte por debajo del eje de las x's a la parte de arriba de forma simétrica. Luego si f es integrable, parece que $|f|$ también lo va a ser. La fórmula $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ se cumple ya que la parte de la gráfica que queda por debajo de eje resta mientras que en el caso de $|f|$ esa misma parte suma.

La prueba rigurosa, echa mano de particiones tomadas adecuadamente y es engorrosa. Para hacerla se definen

$$f^+ = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Ejercicio: comprobar que f^- también es integrable

y

$$f^- = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

observación:

Es fácil ver que $f = f^+ - f^-$ y que $|f| = f^+ + f^-$. Usando particiones y el Criterio de Riemann se prueba que f^+ y f^- son integrables.

Veamos en concreto que f^+ es integrable. ~~Dado~~ Sea $\epsilon > 0$, existe un partición $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ para la cuál

$$\epsilon \geq S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) =$$

$$\left[\sum_{i\in\{j\,:\,M_j>0\}} M_i(t_{i+1}-t_1) - \sum_{i\in\{j\,:\,m_j>0\}} m_i(t_{i+1}-t_1)\right] +$$

$$\left[\sum_{i\in\{j\,:\,M_j\leq 0\}} M_i(t_{i+1}-t_1) - \sum_{i\in\{j\,:\,m_j\leq 0\}} m_i(t_{i+1}-t_1)\right].$$

ya que cuando M_j sean negativos, las m podrán ser negativos o positivos

Ahora $\{j \,:\, M_j \leq 0\} \subseteq \{j \,:\, m_j \leq 0\}$ y siempre $M_i - m_i \geq 0$. Además

$$(M_j - m_j) \geq M_j \qquad \text{siempre que} \qquad M_j > 0 \text{ y } m_j \leq 0,$$

y $\{j \,:\, m_j \geq 0\} \subseteq \{j \,:\, M_j \geq 0\}$. Así

$$S(f^+, P) - I(f^+, P) =$$

$$\left[\sum_{i\in\{j\,:\,M_j>0\}} M_i(t_{i+1}-t_1) - \sum_{i\in\{j\,:\,m_j>0\}} m_i(t_{i+1}-t_1)\right] \leq \epsilon.$$

Lo que prueba que f^+ es integrable.

Como $|f|$ es suma de funciones integrables, entonces $|f|$ también lo es. Con esta terminología es claro que

$$|\int_a^b f| = |\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-| \leq |\int_a^b f^+| + |\int_a^b f^-| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f|$$

□

Ejercicio. 1. *Tenemos que ver que* $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx \leq \pi$.

Demostración: Representamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Primero $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y además $f''(x) = -\operatorname{sen} x \leq 0$ si $x \in [0, \pi]$, luego la gráfica es concava y podemos pintar

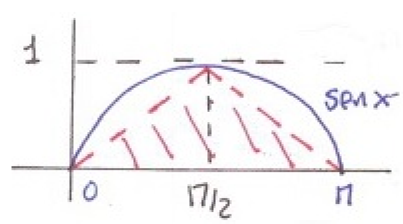


Figura 4. Función seno concava en $[0, \pi]$.

Luego con calcular las áreas del rectángulo que circunscribe a la gráfica y la del triángulo circunscrito, tenemos la desigualdasd pedida □

Ejercicio. 2. *Tenemos que ver si es cierta la desigualdad* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x dx$.

Demostración: Procedemos como en el ejemplo anterior. Representamos la función $\operatorname{sen} x$. Es fácil darse cuenta que la recta $y = x$ es la recta tangente a la gráfica del seno por el punto $(0, 0)$. Luego tenemos algo del tipo

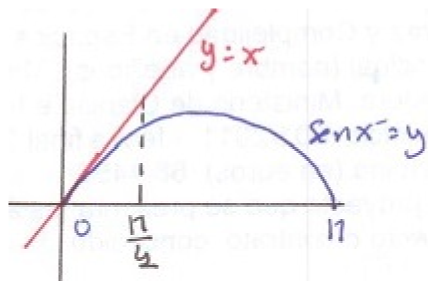


Figura 5. Posición relativa del seno y la recta $y = x$.

y no parece que pueda ser cierta la desigualdad. De forma rigurosa, consideramos la función

$$h(x) = x - \operatorname{sen} x.$$

Derivando

$$h'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luego la función h es creciente y como $h(0) = 0$, se tiene que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Por tanto

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} xdx.$$

Claramente la desigualdad que nos piden no es cierta $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

La **integral** alcanza todo su poder cuando se alía con la **derivada**. Esto ocurre en el **Teorema Fundamental del Cálculo**.

Funciones definidas a través de la integral. Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, sabemos que para todo $x \in [a,b]$ existe la integral $\displaystyle\int_a^x f$. Esto nos da pie para definir la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a,b].$$

(Observemos que hemos añadido una nueva notación "dt" para distingir la variable de la función f, en este caso t, de la variable x de la función F).

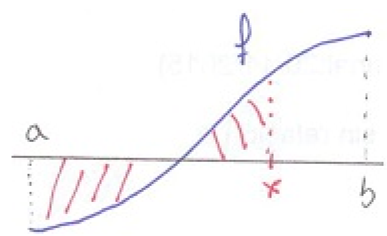


Figura 1. Definición de una función a través de la integral.

Observación. 1. *La función F verifica que $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f$.*

La integral tiene un poder regularización de las funciones. Así tenemos

Teorema. 1. *Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en el intervalo $[a,b]$*

Demostración: Sea $c \in [a,b]$. Por ser f integrable está acotada, así sea $M > 0$ una cota de la función (es decir $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$). Entonces

$$|F(c+h) - F(c)| = |\int_a^{c+h} f - \int_a^c f|$$

$$= |\int_a^c f + \int_c^{c+h} f - \int_a^c f| = |\int_c^{c+h} f| \leq |h|M \to_{h\to 0} 0.$$

Lo que prueba que $\lim_{h\to 0} F(c+h) = F(c)$, así F es continua en c $\square$

Ejemplo. 1. *Consideramos la función*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ \frac{6}{5}, & si \quad t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \\ \frac{3}{10}, & si \quad t \in (1, 2] \end{cases}$$

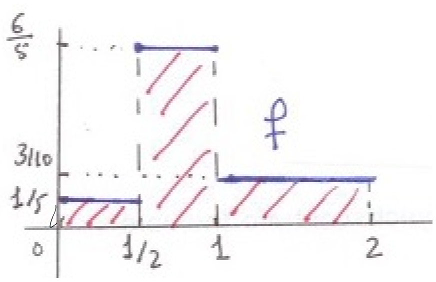


FIGURA 2. Función integrable no continua.

¿Cómo es la función F?

Demostración: Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}x,$$

donde la integral la hemos calculado hayando el área de un rectangulo. Si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}dt + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{6}{5}dt = \frac{6}{5}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{10},$$

donde la integral la hemos calculado hayando el área de dos rectángulos. Si $x \in (1, 2]$, se procede como antes y se llega a que

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{6}{5}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{10}, & \text{si} \quad t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{3}{10}(x - 1) + \frac{7}{10}, & \text{si} \quad t \in (1, 2] \end{cases}$$

Si representamos F tenemos una función continua.

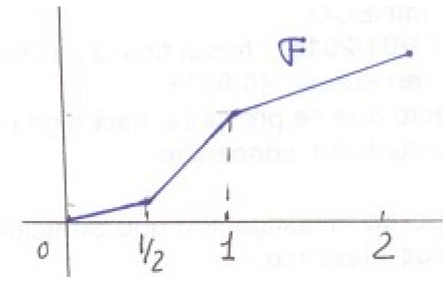


FIGURA 3. Gráfica de F.

$\square$

(**Teorema Fundamental del Cálculo**). Si a la función f le pedimos que sea continua, entonces resulta que la función F es derivable.

Teorema. 2. *(**Teorema Fundamental del Cálculo**). Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en todo $c \in [a,b]$ y además*

$$F'(c) = f(c).$$

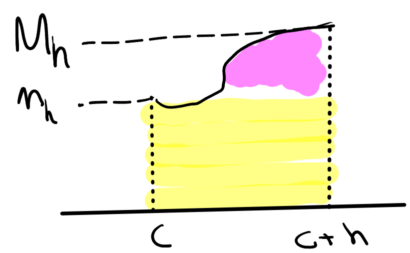
Demostración: Si $c = a$ o $c = b$ hay que calcular derivadas laterales (ejercicio).

Sea $c \in (a,b)$. Tenemos que ver, por definición de derivada, si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Ahora si $h > 0$, tenemos que

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)dt.$$



Sean

$$m_h = \inf\{f(t) \ : \ t \in [c, c+h]\},$$

y

$$M_h = \sup\{f(t) \ : \ t \in [c, c+h]\},$$

Así por las propiedades de la integral

$$hm_h \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq hM_h,$$

de lo que se sigue que

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

si $h \to 0$

$f(c)$ $f(c)$

Como f es continua en c, si $h \to 0$ entonces se tiene que $m_h \to f(c)$ y $M_h \to f(c)$. Por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Luego la derivada por la derecha de F en c es $F'(c^+) = f(c)$. De forma similar se ve que la derivada por la izquierda $F'(c^-) = f(c)$. Lo que prueba el resultado $\square$

Toda función g ≡ tiene una F tal que $F' = g$, sí, pues tomamos $F = \int_a^x g \Rightarrow F' = g$

Observación. 2. *Resulta que el Teorema Fundamental del Cálculo es una **Regla de Derivación**:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad f \quad continua \quad \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Pero no solo es una regla de derivación. Es mucho más. Por ejemplo un modo de calcular integrales (y por tanto áreas) como vemos a continuación. Pero es más, un modo de definir las funciones transcendente: $\ln x, e^x, \cos x$...etc como veremos en los Apéndices que siguen a este artículo. Y muchas más aplicaciones que tiene la integral, algunas de las cuáles iremos señalando en los artículos siguientes.

Corolario. 1. *(**Regla de Barrow**). Si f es una función continua sobre $[a, b]$ y existe una función g de modo que $g' = f$ en todo $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

Demostración: Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por el ~~Teorema~~ teorema fundamental del cálculo anterior $F' = f$. Luego F y g tienen la misma derivada, entonces existe una constante K de modo que

$$F(x) = g(x) + K$$

(lo cuál es una consecuencia del Teoream del Valor Medio que vimos en su momento). Como $F(a) = 0$, se sigue que $K = -g(a)$ y así

$$g(b) - g(a) = F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

$\square$

Lo que nos dice este Corolario es que si encontramos una función g cuya derivada sea f, entonces la integral de f se consigue evaluando g en dos puntos. Por tanto el problema de **calcular integrales** se **reduce** al problema de calcular **primitivas** (es decir encontrar funciones cuya derivada sea una función dada). El cálculo de primitivas será nuestro siguiente objetivo.

Ejemplo. 2. *Vamos a calcular* $\int_0^1 x^5 dx$.

Demostración: Se puede intentar calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{i}{n})^5$. Este es el camino que hasta ahora conocemos. Ahora bien, es fácil ver que $g(x) = \frac{x^6}{6}$ verifica que $g'(x) = x^5$ y por tanto la regla de Barrow nos dice que

$$\int_0^1 x^5 dx = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{1}{6}$$

□

Vemos que en cuanto podemos encontrar una primitiva de una función entonces es muy sencillo calcular su integral. Cuando aprendamos a calcular primitivas volveremos al cálculo de integrales.

Ejercicio. 1. *Consideramos la función* $F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt$. *Nos piden su derivada.*

Demostración: La función $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ tiene por dominio todo $\mathbb{R}$ y allí es continua. Luego es integrable en cualquier intervalo cerrado de la recta. Ahora, el dominio de F será $\{x > -1\}$, para que tenga sentido el logaritmo.

$$F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt = \int_{x^2}^{0} \sqrt{1+t^2}dt + \int_0^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt$$

$$= -\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt + \int_0^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt,$$

sin más que aplicar las reglas de la integral.

Ahora derivamos teniendo en cuenta: la regla de la suma, el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena.

$$F'(x) = \sqrt{1+(\ln(x+1))^2}\frac{1}{x+1} - 2x\sqrt{1+(x^2)^2}$$

□

Ejercicio. 2. *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas de modo que* $\int_a^b f = \int_a^b g$. *Hay que probar que existe* $c \in [a, b]$ *de modo que f(c)=g(c).*

Demostración: Esto recuerda a un Teorema de Valor Medio. Veamos que es así. Sean

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Estas funciones son continuas en $[a, b]$ y derivables en todo (a, b). Sea la función $F - G$ que es continua en $[a, b]$ y derivable en todo (a, b). Además

$F - G(a) = 0$ y también, por hipótesis, $F - G(b) = 0$. Así podemos aplicar el Teorema de Rolle y existe $c \in (a,b)$ de modo que

$$0 = (F - G)'(c) = f(c) - g(c),$$

usando la regla de derivación para F y G. Despejando se tiene lo que se pide

□

Debilitando un poco las hipótesis tenemos que:

se diferencia del de Barrow en la continuidad

Teorema. 3. *Si una función f es integrable en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Demostración: Sea $P = \{t_0 = a, t_1, ..., t_n = b\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Podemos aplicar a g el Teorema del Valor Medio y así para cada i existe

$$x_i \in (t_i, t_{i+1})$$

de modo que

$$g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(x_i)(t_{i+1} + t_i) = f(x_i)(t_{i+1} + t_i).$$

Si m_i y M_i son los ínfimos y supremos habituales, es evidente que

$$m_i(t_{i+1} - t_i) \leq f(x_i)(t_{i+1} + t_i) \leq M_i(t_{i+1} + t_i);$$

es decir

$$m_i(t_{i+1} - t_i) \leq g(t_{i+1}) - g(t_i) \leq M_i(t_{i+1} + t_i).$$

tenemos que: $\sum_{i=0}^{n-1} g(t_{i+1}) - g(t_i) =$

$= \cancel{g(t_1)} + \cancel{g(t_2)} - \cancel{g(t_1)} +$

$+ g(t_3) - \cancel{g(t_2)}$ y así sucesivamente

Así

$$I(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq S(f,P)$$

para toda partición P. Como f es integrable, se sigue que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LAS FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL.

A partir de la integral y el Teorema Fundamental del Cálculo podemos definir y demostrar las propiedades de las **funciones logaritmo y exponencial**.

Función Logaritmo.

Definición. 1. *Se define la función* ***logaritmo*** *(neperiano) por*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

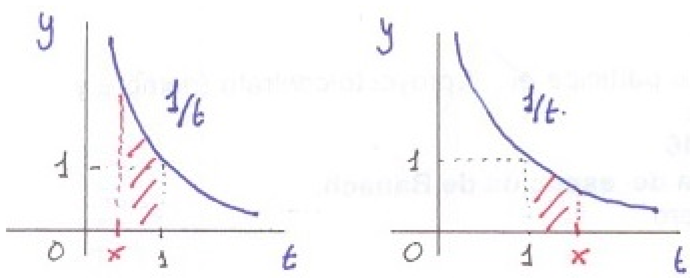


Figura 1. Definición gráfica del logaritmo.

Como la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es continua en $(0, \infty)$, la integral de esta función está definida en todo intervalo cerrado de su dominio.

Así:

- $\mathrm{Dom} \ln = (0, \infty)$.
- Si $\boxed{x \in (0,1) \text{ se tiene que } \ln x < 0 \text{ y}}$ es positivo si $x > 1$. Además $\ln 1 = 0$. $= \int_1^1 1/t \, \partial t = 0$
- $(\ln)'x = \frac{1}{x}$, por el Teorema Fundamental del Cálculo. La derivada es siempre positiva luego la función es creciente.
- $(\ln)''x = \frac{-1}{x^2}$. La derivada segunda es siempre negativa luego la función es concava.

- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

  Demostración: Como la función es creciente, si no está acotada el límite será infinito. Sea $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\ln N = \int_1^N \frac{1}{t}dt \geq \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i}(i-(i-1)) = \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i} \to_{N\to\infty} \infty,$$

  ya que la serie armónica diverge. Luego el logaritmo no está acotado superiormente. $\square$

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

  Demostración: Como la función es creciente, si no está acotada inferiormente, el límite será menos infinito. Sea $N \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{1}{N} \to_{N\to\infty} 0$ y

$$\ln\frac{1}{N} = \int_1^{\frac{1}{N}} dt = -\int_{\frac{1}{N}}^{1} \frac{1}{t}dt \leq -\sum_{i=1}^{N-1} i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) =$$

$$\cancel{\leq -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\frac{1}{i}}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)} = -\sum_{i=1}^{N-1} \cancel{i}\left(\frac{\cancel{i}+1-\cancel{i}}{i(i+1)}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N-1} i\frac{1}{i(i+1)} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(i+1)} \to_{N\to\infty} -\infty,$$

  $\hookrightarrow$ serie armónica

  ya que la serie armónica diverge. Luego el logaritmo no está acotado inferiormente. $\square$

Con todos estos datos ya podemos dibujar la gráfica del logaritmo.

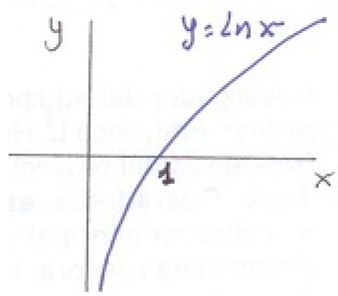


FIGURA 2. Gráfica de la función logaritmo.

La propiedad histórica del logaritmo es que es una función que convierte productos en sumas. Antiguamente esta propiedad era muy importante para calcular (productos y divisiones).

Proposición. 1. *Para todo* $x, y > 0$ *se tiene que* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. *En consecuencia*

- $\ln x^n = n \ln x$ *para todo* $x > 0$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$;
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$;
- $\ln(\frac{y}{x}) = \ln y - \ln x$.

siendo y una cte.

Demostración: Consideremos $y > 0$ fijo y la función $f(x) = \ln(xy)$. La función f es derivable y

$$f'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y = f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Como f y ln tienen la misma derivada, se tiene que existe K constante con

$$f(x) = \ln x + K \qquad \text{para todo} \qquad x > 0.$$

Ahora, para $x = 1$

$$f(1) = \ln y = \ln 1 + K,$$

así $K = \ln y$ y queda probada la igualdad.

- $\ln x^n = \ln(xxxx....x) = \ln x + \ln x + ... + \ln x = n \ln x$.
- $0 = \ln(\frac{x}{x}) = \ln x + \ln(\frac{1}{x})$, despejando se tiene que $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$.
- $\ln(\frac{y}{x}) = \ln(y\frac{1}{x}) = \ln y - \ln x$.

□

Función Exponencial. La función logaritmo tiene por derivada $\frac{1}{x} > 0$, por el Teoream de Valor Medio es una función inyectiva, es decir $\ln x = \ln y$ si y solo si $x = y$. Por lo tanto cabe definir su inversa.

Definición. 2. $exp(x) = (\ln)^{-1} x$.

Veamos propiedades de esta función, así definida.

- $\mathrm{Dom}\exp = \mathrm{Im}\ \ln = \mathbb{R}$. Además $\mathrm{Im}\exp = \mathrm{Dom}\, ln = (0, \infty)$. Así
$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty).$$
- Como la derivada del logaritmo no se anula, el Teorema de la Función Inversa nos dice que la exponencial es derivable y que
$$(\exp)'(x) = \frac{1}{(\ln)'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x.$$
Luego es una función que coincide con su derivada.
- La exponencial es creciente y convexa ya que $(\exp)' x = (\exp)'' x = \exp x > 0$.
- $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$ y $\lim_{x \to \infty} \exp x = \infty$ ya que $\ln x \to_{x \to 0^+} = -\infty$ y $\ln x \to_{x \to \infty} = \infty$.

$x\ln(x) - x$

Además $\exp(0) = 1$ ya que $\ln(1) = 0$

Ya estamos en condiciones de pintar la gráfica de la exponencial, realmente es la del logaritmo mirando desde el eje de ordenadas ($x = 0$).

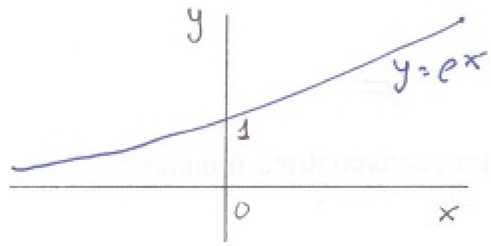


Figura 3. Grafica de la exponencial.

Proposición. 2. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $exp(x + y) = expx\, expy$*

Demostración: Sean $x' = \exp x$ y $y' = \exp y$, así $x = \ln x'$ y $y = \ln y'$. De lo que se deduce que

$$x + y = \ln x' + \ln y' = \ln x'y'.$$

Tomando exponenciales

$$\exp(x + y) = \exp(\ln x'y') = x'y' = \exp x \exp y$$

□

Definición. 3. *Llamamos e al número $e = exp\, 1$.*

Como para todo n natural, $\exp n = (\exp 1)^n = e^n$, escribimos

$$\exp x = e^x.$$

Veamos que este número e es el que ya conocemos por al Teoría de Sucesiones.

Teorema. 1. $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Demostración: Vimos que la sucesión $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n=1}^{\infty}$ era una sucesión creciente y acotada y por tanto tenía un límite que llamaremos l.

Consideramos la función

$$f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x}) \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Calculando límites, usando la Regla de L'Hôpital si es necesario,

$$\lim_{x\to\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Tomando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = 1.$$

Por otro lado, de la continuidad del logaritmo si $(1+\frac{1}{n})^n \to_{n\to\infty} l$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = \ln l = 1.$$

Por lo tanto $l = e$ $\square$

Propiedades de la exponencial

Proposición. 3. **a:** *Se f es una función de modo que $f'(x) = f(x)$, entonces existe k constante tal que*

$$f(x) = ke^x \qquad \textit{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b: *Fijado $n \in \mathbb{N}$, entonces* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$.

Demostración:

a: La exprexión $f = f'$ es un primer ejemplo de **ecuación defirencial**.

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$. Derivando

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Si g tiene derivada nula es por que es una constante $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} = k$. Despejando tenemos el resultado.

b: Aplicando n veces la Regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

$\square$

Funciones definidas a través de la exponencial.

Definición. 4. ***A)*** *Para $a > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ se define la exponencial de base a por*

$$a^x = e^{x \ln a}$$

B) *Para $a > 1$, $a \neq 1$ podemos definir la inversa de a^y, notamos*

$$\log_a x = (a^y)^{-1}.$$

De esta definición es fácil probar que:

- $(a^b)^c = a^{bc}$.

hacer las demostraciones

- $a^1 = a$.
- $a^{x+y} = a^x a^y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, ya que
$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = x.$$
- $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Definición. 5. *(**Funciones Hiperbólicas.**) Llamamos*

a: ***Seno hiperbólico*** *a la función* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b: ***Coseno hiperbólico*** *a la función* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c: ***Tangente hiperbólica*** *a la función* $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

De estas definiciones es fácil probar que:

- $\sinh' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \sinh x \quad$ y $\quad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Estas funciones son útiles para calcular primitivas de funciones del tipo $\sqrt{1+x^2}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

  Demostración: Como $\sinh' x = \cosh x > 0$, se sigue que el seno hiperbólico es inyectiva y por tanto tiene una inversa. Usando el Teorema de la Función Inversa y que $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$

$$(\sinh^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \int (1+x^2)^{-1/2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\cos(x) \cdot \cos(x)^{n-1}$$

$u = \cos^{n-1}(x)$ $du =$

$dv = \cos(x)$ $v = \operatorname{sen}(x)$

$$\cos^{n-1} \cdot \operatorname{sen}(x) - \int n-1 \cdot (\cos(x))^{n-2} \cdot (-\operatorname{sen}(x))$$

$$\int \cos(x)^{n-2} \cdot \operatorname{sen}(x)$$

$u = \cos(x)^{n-2}$ $du = (n-2)\left(\cos(x)\right)^{n-3} \cdot (-\operatorname{sen}(x))$

$$\cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int \cos(x)^{n-2} \cdot \operatorname{sen}(x) =$$

$$= \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int \frac{\cos(x)^n}{\cos(x)^2} \cdot \operatorname{sen}(x)$$

Teorema. 3. ***(Regla de la Cadena)****. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de modo que f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces existe*

$$g(f(a)) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

$$g(x) = x^{n-1} \Rightarrow g'(x) = (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow \operatorname{sen}(x)$$

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\cos(x) \cdot (\cos(x))^{n-1} \qquad 1 = \operatorname{sen}^2(x) + \cos(x)^2$$

$$u = \cos(x)^{n-1} \quad du = (n-1) \cdot (\cos(x))^{n-2} \cdot (-\operatorname{sen}(x))$$

$$dv = \cos(x) \quad v = \operatorname{sen}(x)$$

$$\cos(x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen}(x) + \int \operatorname{sen}(x) \cdot (n-1) \cdot \cos(x)^{n-2} \cdot (+\operatorname{sen}(x))$$

$$= \cos(x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x)^{n-2} =$$

$$= \cos(x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot \cos(x)^n$$

$$u\,dv \quad v\,du$$

$$u\,dv \qquad (x^2+1)^{-n} \qquad \frac{-x^2}{(x^2+1)^n}$$

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \quad du = -n\,(x^2+1)^{-n-1} \cdot 2x$$

$$dv = -x^2 \qquad v = -\frac{x^3}{3}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} =$$

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$$

$u = \cos^{n-1}(x) \qquad du = (n-1)\left(\cos(x)^{n-2}\right) \cdot (-\operatorname{sen}(x))$

$dv = \cos(x) \qquad v = \operatorname{sen}(x)$

$$\cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \int (n-1)(\cos(x))^{n-2} (+\operatorname{sen}(x))$$

$$\cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int \cos(x)^{n-2} \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int \cos(x)^{n-2} (1 - \cos^2(x)) =$$

$$\int \cos(x)^{n-2} - \int \cos^n(x)$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE LEBESGUE.

El Critero de Integrabilidad de Riemann nos caracteriza las funciones acotadas integrables. De allí vemos que las funciones continuas son integrables. Pero no solo. En los ejemplos hemos visto funciones con una cantidad finita de discontinuidades que también son integrables. La relación entre continuidad e integrabilidad nos lo da el *Criterio de Lebesgue*. Antes una definición.

Definición. 1. *Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ decimos que tiene **contenido cero** si para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos abiertos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de modo que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i < \epsilon.$$

Ejercicio. 1. *Prueba que cualquier conjunto finito o numerable de $\mathbb{R}$ tiene contenido cero.*

Teorema. 1. ***(Criterio de Lebesgue)*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable en $[a, b]$ si y solo si el conjunto de discontinuidades de f tiene contenido cero.*

La prueba de este resultado se verá en un curso posterior de Cálculo Integral.

Este resultado tan fuerte nos permite conocer las siguientes afirmaciones.

Proposición. 1. *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces existe*

$$\int_a^b g(x)dx.$$

Demostración: Vimos en el Apéndice sobre Funciones Monótonas que el conjunto de discontinuidades de una función monótona es a lo más numerable. Por tanto tiene contenido cero y por el Criterio de Lebesgue la función es integrable $\square$

Proposición. 2. *Si* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es integrable,* f *continua y* $g([a, b]) \subseteq Dom f$*, entonces* $f \circ g$ *es integrable en* $[a, b]$*.*

Demostración: Allí donde g es continua, $f \circ g$ es continua. Luego el conjunto de discontinuidades de $f \circ g$ es el mismo que él de g. Por tanto ambos son de contenido cero por ser g integrable. De lo que se sigue que $f \circ g$ es integrable en $[a, b]$ $\square$

Proposición. 3. *Sean dos funciones* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrables. Entonces*

- **a):** f^2 *es integrable.*
- **b):** fg *es integrable.*

Demostración: **a)** Sea $h(x) = x^2$, entonces $f^2(x) = h \circ f(x)$. Como h es continua, la Proposición anterior nos dice que $h \circ f = f^2$ es integrable en [a,b].
b) Por ser f y g integrables, sabemos que $f + g$ es integrable y por tanto $(f + g)^2$, f^2 y g^2 son integrables. De lo que se sigue que

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

es integrable $\square$

Observación. 1. *El producto de una función integrable con otra monótona es de nuevo una función integrable.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. PRIMITIVAS ELEMENTALES.

Según el Teorema Fundamental del Cálculo, determinar el valor de una integral se reduce a encontrar una **primitiva** de la función a integrar.

Definición. 1. *Se dice que una función F es una **primitiva** de una función f dada si*

$$F' = f.$$

Escribimos $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)$.

Observación. 1.

1. *Si F es una primitiva de f, por el Teoream del Valor Medio, cualquier otra primitiva de f es de la forma*

$$G(x) = F(x) + K$$

para $K \in \mathbb{R}$ constante.

2. *Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una primitiva de f. Ahora bien esto no nos ayuda mucho a la hora de calcular $\int_a^b f$. Necesitamos una expresión explícita de F, que no dependa del signo integral.

3. *Hay casos, como por ejemplo $f(x) = e^{-x^2}$ donde se puede demostrar que no existe una expresión de la primitva de f en términos elementales.*

4. *En general encontrar una primitiva en forma explícita de una función no es un problema fácil. Vamos a dar algunos métodos que permiten encontrarlas en algunos casos.*

Primitivas elementales. Si le damos la vuelta a la tabla de derivadas que conocemos, tendremos un puñado de primitivas.

$\int K dx = Kx$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc}\cos x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = (\sinh)^{-1} x$

Además tenemos que tener en cuenta que

- $\displaystyle\int (f+g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- Para $K \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int K f(x) dx = K \int f(x) dx.$

En general ante el problema $\displaystyle\int f(x) dx$, si no estamos ante alguno de los casos de la tabla de arriba, debemos hacer "trasformaciones" de modo que lleguemos a uno de ellos.

Ejemplos. 1.
- $\displaystyle\int 3x^5 + 2x^3 + 7dx.$
- $\displaystyle\int \cos x + 2 \operatorname{sen} x dx.$

Demostración:

- $$\int 3x^5 + 2x^3 + 7dx = 3\int x^5 dx + 2\int x^3 dx + \int 7dx$$
  y mirando en las tablas
  $$= 3\frac{x^6}{6} + 2\frac{x^4}{4} + 7x = \frac{x^6}{2} + \frac{x^4}{2} + 7x$$
- $$\int \cos x + 2 \operatorname{sen} x dx = \int \cos x dx + 2\int \operatorname{sen} x dx$$
  y mirando en las tablas
  $$\operatorname{sen} x - 2\cos x$$

□

Ejemplos. 2.
- $\displaystyle\int (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1).$

$$\ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$udv = uv - \int vdu$$

Los ejemplos anteriores no se encuentran directamente en la tabla, pero es fácil convencerse de que hemos hayado las primitivas correctas. Cuando veamos el Teorema del Cambio de Variable quedará todo explicado.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. LA REGLA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

A partir de la regla de la derivada de un producto

$$(h(x)r(x))' = h'(x)r(x) + h(x)r'(x)$$

vamos a deducir lo siguiente.

Teorema. 1. *(**Regla de Integración por Partes**) Si f y g son funciones tales que f' y g' son continuas, entonces*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Demostración: Como

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

así

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

podemos integrar (todas las funciones que aparecen son continuas y por tanto tienen primitiva)

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$
$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

□

Observación. 1.
- *Estamos transformado el cálculo de $\int fg'$ por el de $\int f'g$ con la esperanza de que este sea más simple que el primero.*
- *La Regla de Integración por Partes suele usarse en cálculos como series Fourier y transformadas de Laplace. Además es la pieza clave para definir el concepto de soluciones débiles de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, todo ello propio de cursos más avanzados.*

Observación. 2. *Según la regla de Barrow y usando la Regla de Integración por Partes, tenemos que*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(donde notamos $h(x)|_a^b = h(b) - h(a)$).

Ejemplo. 1. $\int xe^x dx$.

Demostración: En ese caso es fácil encontrar tanto una primitiva de $f(x) = x$ o de $g(x) = e^x$. La diferencia es que al derivar la primera, está desaparece. Así, usando la Regla de Integración por Partes

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Vemos que la primera integral se convierte en otra elemental. □

Ejemplo. 2. $\int x \cos x dx$.

Demostración: Este es un caso como el anterior. Usando la Regla de Integración por Partes

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

□

Ejemplo. 3. $\int \ln x dx$.

Demostración: Aquí no vemos un producto de funciones, salvo que pongamos un uno multiplicando a $\ln x$, así

$$\int \ln x dx = \int 1 \times \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

□

Ejemplo. 4. $\int \operatorname{sen} x e^x dx$.

Demostración: Si integramos o derivamos estas funciones parece que todo nos lleva a lo mismo. Ahora aplicando dos veces la Regla de Integración por Partes y despejando después llegamos a una solución. Así

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx = \operatorname{sen} x e^x - \int \cos x e^x dx$$

$$= \operatorname{sen} x e^x - [\cos x e^x - \int - \operatorname{sen} x e^x dx] = \operatorname{sen} x e^x - \cos x e^x - \int \operatorname{sen} x e^x dx.$$

Llegamos a la integral de partida, pero podemos depejar y así

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

□

Ejercicio. 1. *Demuestra la siguiente fórmula de reducción:*
$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, *$n > 2$ y par.*

Demostración: Tenemos n par, luego $n \geq 2$. Ponemos

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{n-1} x$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx$$

usando que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) dx$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx$$

despejando

$$\int \operatorname{sen}^n x dx + (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \int (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

y por tanto

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = \frac{-1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

Series de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n (\operatorname{sen}(nx)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. EL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE.

La Regla de la Cadena de derivación:

$$f'(g(x)) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

nos permite el siguiente recurso para calcular primitivas.

Corolario. 1. ***(Fórmula de Sustitución)*** *Si f y g' son funciones continuas, entonces*

- **a:** *Si F es una primitiva de la función f, entonces $F \circ g$ es una primitiva de la función $(f \circ g)g'$, es decir*
$$\int f \circ g(x)g'(x)dx = F \circ g(x).$$
- **b:** *Si G es una primitiva de la función $(f \circ g)g'$, entonces $G \circ g^{-1}$ es una primitiva de la función f, es decir*
$$\int f dx = G \circ g^{-1}(x).$$

Demostración: Aplicando la Regla de la Cadena en ambos casos tenemos

- **a:** $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f \circ g(x)g'(x)$.
- **b:**
$$((G \circ g^{-1})'(x) = G'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$
$$= f \circ g(g^{-1}(x))g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

□

Observación. 1. *En ambos casos transformamos unas integrales en otras con la esperanza de que estas otras sean más sencillas.*

- **a:** *Ante la integral $\int f \circ g(x)g'(x)dx$ (tenemos que ver una función g compuesta con otra f y de modo que tengamos su derivada g'), en este caso el problema se puede reducir encontrando $\int f$.*

b: *Ante la integral* $\int f(x)dx$ *buscamos una función* g *de modo que sepamos resolver el problema* $\int f(g(x))g'(x)dx$.

El caso ***a****) es el más fácil de reconocer y de resolver usualmente. El caso* ***b****) necesita más imaginación pues la función* g *no aparece explícita.*

Ejemplo. 1. **a:** $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$.

b: $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Demostración:

a: $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$. La derivada de $g(x) = -x^2$ es $g'(x) = -2x$. Ésta, salvo una constante, aparece en nuestra integral. Ponemos

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx.$$

Así la fórmula de sustitución nos dice que si resolvemos el problema $\frac{-1}{2}\int e^x dx = \frac{-1}{2}e^x$, entonces la solución de nuestro problema es $\frac{-1}{2}e^{g(x)} = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$. (**Notación heurística:**) también podemos escribir

$$\int xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx$$

haciendo el cambio de variable $u = g(x)$, así $\frac{du}{dx} = -2x$ y $du = -2xdx$

$$= \frac{-1}{2}\int e^u du = \frac{-1}{2}e^u$$

ahora deshaciendo el cambio de variable

$$= \frac{-1}{2}e^{-x^2}.$$

b: $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$. Podemos pensar en sustituir x por $\ln u$ ($g(u) = \ln u$ y $g'(u) = \frac{1}{u}$). La Fórmula de Sustitución nos dice que si resolvemos el problema

$$\int \frac{1}{e^{\ln u}+1}\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u(u+1)}du$$

entonces tendremos una solución de nuestro problema. Escribimos

$$\int \frac{1}{u(u+1)}du = \int \frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1}du = \ln u - \ln(u+1) = \ln(\frac{u}{u+1}).$$

Ahora como $g^{-1}(x) = e^x$, tenemos que la solución de nuestro problema es

$$\ln(\frac{e^x}{1+e^x}).$$

(**Notación heurística:**) también podemos escribir

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

haciendo el cambio de variable $x = \ln(u)$, así $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$ y $dx = \frac{1}{u}du$

$$= \int \frac{1}{e^{\ln u}+1}\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u(u+1)}du$$

como antes resolvemos esta integral

$$= \ln(\frac{u}{u+1})$$

y deshaciendo el cambio ($x = \ln u$ luego $u = e^x$)tenemos la solución

$$= \ln(\frac{e^x}{1+e^x})$$

□

Ejercicio. 1. $\displaystyle\int \tan(\sqrt{x-1})\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx.$

Demostración: Como la derivada de $g(x) = \sqrt{x-1}$ es $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{x-1}$ y así $du = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ y tenemos

$$\int \tan(\sqrt{x-1})\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int 2\tan u du = -\int 2\frac{-\operatorname{sen} u}{\cos u}du$$

si pensamos que la derivada del coseno es el menos seno (de hecho estamos haciendo otro cambio de variable)

$$= -2\ln(\cos u) = -2\ln(\cos(\sqrt{x-1})),$$

la última igualdad se obtiene después de deshacer el primer cambio de variable □

Ejercicio. 2. $\displaystyle\int \frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

Demostración: Por un lado $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ y por otro $\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}$. Luego si hacemos el cambio de variable $u = \arccos(\frac{x}{2})$, entonces $du = \frac{-1}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}dx$, y así

$$\int \frac{\arccos(\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int -udu = -\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2}(\arccos(\frac{x}{2}))^2$$

□

Ejercicio. 3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$

Demostración: En ese caso vamos a pensar en el cambio de variable $x = \tan u$ y así $dx = 1+\tan^2 udu$. Luego

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2 u+1}}{\tan^2 u}(1+\tan^2 u)du$$

como $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$ y $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ tenemos

$$= \int \frac{1}{\cos u}(1 + \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u})du = \int \frac{1}{\cos u} + \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}du$$

usamos que $\int \frac{1}{\cos u}du = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})|$ (comprobar derivando) tenemos

$$= \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| - \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

deshaciendo el cambio $u = \arctan x$

$$= \ln|\tan(\frac{\arctan x}{2} + \frac{\pi}{4})| - \frac{1}{\operatorname{sen}(\arctan x)}.$$

Obsevemos que tanto para elegir el cambio de variable, como para demostrar que $\int \frac{1}{\cos u}du = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})|$ se necesita de una pericia que quizas queda fuera del alcance de este artículo. $\square$

Teorema. 1. ***(Fórmula de Sustitución o del Cambio de Variable).*** *Si f y g' son funciones continuas, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ g)(x)g'(x)dx.$$

Demostración: Por ser f continua admite una primitiva, la llamamos F. Entonces por la Regla de Barrow

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado $(F \circ g)'(x) = (f \circ g)(x)g'(x)$, luego de nuevo por la Regla de Barrow

$$\int_a^b (f \circ g)(x)g'(x) = F \circ g(b) - F \circ g(a),$$

lo que prueba la igualdad. $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx \quad \text{tomamos} \quad x = \tan(u) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2(u)}\,du$$

$$\int K dx = K x \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ para } n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$$

$$\int e^x dx = e^x \qquad \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \qquad \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x \qquad \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = (\sinh)^{-1} x$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(u)}}}{\tan^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} = \int \frac{\frac{1}{\cos(u)}}{\tan^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} =$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos(u)}}{\frac{\operatorname{sen}^2(u)}{\cancel{\cos^2(u)}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2(u)}} = \frac{1}{\cos(u)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2(u)}{1}$$

$$\int \frac{1}{\cos(u)} \cdot \operatorname{sen}^2(u)$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan^2(u)+1}}{\tan^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)}\,du =$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. FUNCIONES RACIONALES.

Cuando tenemos el problema de calcular la primitiva de una función racional

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}dx,$$

es decir la primitiva de un cociente de polinomios, a veces es conveniente simplificar su expresión. Para ello disponemos del método de **Descomposición en Fracciones Simples**. Este método ya lo empleamos al sumar series telescópicas (ver el Tema de Series). Ver el Apéndice siguiente para una mejor comprensión del mismo.

Vamos a empezar calculando primitivas de funciones racionales muy sencillas, aquellas que aparecerán en el método de **Descomposición.**

Primitivas de la forma $\displaystyle\int \frac{c}{(x-a)^n}dx$.

Tenemos dos casos:

- si $n = 1$, entonces

$$\int \frac{c}{x-a}dx = c\ln(x-a);$$

- si $n > 1$, entonces

$$\int \frac{c}{(x-a)^n}dx = \int c(x-a)^{-n}dx = c\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-c}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

Primitivas de la forma $\displaystyle\int \frac{dx+k}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$.

Suponemos además que el polinomio de segundo grado que aparece en el denominador no tiene raíces reales. Si las tiene el problema se reduciría al caso anterior por descomposición en fracciones simples.

Observación: Dada una primitiva como

$$\int \frac{dx+k}{(x^2+ax+b)^n}dx$$

operando

$$= \frac{d}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} + \frac{\frac{2k}{d}-a}{(x^2+ax+b)^n}dx.$$

Luego nos aparecen dos tipos de integrales

- $\displaystyle\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}\, dx$; como el númerador es la derivada de la base del denominador, con el cambio de variable $u = x^2+ax+b$ pasamos a la primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{(u)^n}du$ que ya sabemos resolver;
- el caso difícil es $\displaystyle\int \frac{\frac{2k}{d}-a}{(x^2+ax+b)^n}dx$.

Primitivas de la forma $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}\, dx$.

De nuevo suponemos que el polinomio de segundo grado x^2+ax+b es irreducible, es decir que no tiene raíces reales y que es lo mismo que decir que $a^2-4b<0 \quad \Leftrightarrow \quad b-\frac{a^2}{4}>0$.

Lema. 1. *Dada la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx$, *con denonimador irreducible, existe un cambio de variable de modo que transforma la integral en* $\displaystyle\int \frac{K}{(u^2+1)^n}dx$ *donde* K *es una constante.*

Demostración: Vamos a transformar el polinomio de segundo grado (**completando cuadrados**).

$$x^2+ax+b = x^2+2\frac{a}{2}x+(\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$$

$$= (x+\frac{a}{2})^2+\beta^2 \qquad \text{donde} \qquad \beta=\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$$

$$x^2+ax+b = (x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i)) = x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2 = (x-\alpha)^2+\beta^2$$

Luego

$$x^2+ax+b = \beta^2[\frac{1}{\beta^2}(x+\frac{a}{2})^2+1].$$

Si en nuestra integral hacemos el cambio $u=\frac{x+\frac{a}{2}}{\beta}$, así $du=\frac{1}{\beta}dx$ y tendremos la integral

$$\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int \frac{1}{(u^2+1)^n}du$$

□

Hemos reducido nuestro problema a dos situaciones posibles:

- si $n=1$, entonces $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$;
- si $n>1$, entonces a la integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ se le aplica la fórmula de reducción

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Se deja como ejercicio probar esta última fórmula. Ya probamos, usando la Regla de Integración por Partes, una fórmula de reducción para la integral $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ para n par.

Ejemplo. 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Demostración: Consideramos la ecuación $x^2+2x+5=0$, como el **discriminante** $2^2-4\times 5<0$, la ecuación no tiene soluciones y el polinomio es irreducible. Así para calcular nuestra integral tenemos que transformar la función en algo del tipo $\frac{1}{x^2+1}$. Completando cuadrados

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+2^2 = 4(\,(\frac{x+1}{2})^2+1\,),$$

y así

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1})$$

haciendo el cambio de variable $u=\frac{x+1}{2}$ con $du=\frac{1}{2}dx$ tenemos

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2})$$

□

Ejemplo. 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

Demostración:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x(x+2)}$$

intentamos la descomposición

$$= \int \frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x+2}dx$$

necesariamente

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+2) = \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

□

Primitiva de una función racional $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Para integrar cocientes de polinomios $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, primero dividimos P entre Q de modo que

$$P(x) = q(x)Q(x)+r(x)$$

donde el resto r tiene grado menor que él de Q (ver Apéndice Descomposición en Fracciones Simples). Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{q(x)Q(x)+r(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx.$$

La integral $\int q(x)dx$ sabemos resolverla, así nuestro problema queda reducido al caso en que el numerador tiene grado menor que el denominador.

En el Apéndice Descomposición en Fracciones Simples se puede ver el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ con grado de P menor que el de Q y donde tenemos la descomposición*

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}....(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1}....(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j},$$

entonces se pueden encontrar números reales $c_{*,*}, d_{*,*}$ y $k_{*,*}$ tales que

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= [\frac{c_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \frac{c_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{c_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}] + ...\\ &.... + [\frac{c_{i,1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{c_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + ... + \frac{c_{i,r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}]\\ &+[\frac{d_{1,1}x+k_{1,1}}{x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2} + ... + \frac{d_{1,s_1}x+k_{1,s_1}}{(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1}}] + ...\\ &.... + [\frac{d_{j,1}x+k_{j,1}}{x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2} + ... + \frac{d_{j,s_j}x+k_{j,s_j}}{(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j}}].\end{aligned}$$

Luego nuestra integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con grado de P menor que el de Q, queda reducida a sumas de integrales como las que hemos resuelto más arriba.

Ejemplo. 3. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx.$

Demostración: El denominador es el polinomio x^3+x, así dividiendo

$$\begin{array}{rl} x^3 + \ x + 1 & \quad |\underline{x^3+x} \\ \underline{-x^3 - x} & \qquad 1 \\ 1 & \end{array}$$

luego

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx = \int 1 + \frac{1}{x(x^2+1)}dx = x + \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx.$$

Para resolver la íntegral que falta, usando el Teorema de Descomposición, ponemos

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{c}{x} + \frac{dx+k}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l|l} 12 & 4 \\ \hline -12 & 3 \end{array}$$

$P(x) = Q(x) \cdot C + r$

Ejemplo. 3. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx.$ $\frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x^3+x \\ \hline -x^3-x & -1 \\ \hline 0 \quad 0+1 & \end{array}$$

$$\frac{-(x^3+x)+1}{x^3+x}$$

$$-\int \frac{(x^3+x)}{x^3+x} + \int \frac{1}{x^3+x}$$

$$-\int 1 + \int \frac{1}{x(x^2+1)} = -\int 1 + \int \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2\cancel{+x}}{x^2+1} =$$

$$= -x + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x^2+1)}$$

$Ax^2 + Bx = 0$; $\quad x + B = 0$; $\quad B = -x$

$A = 1 \qquad A = 1$

$$\int \frac{t^{64}}{t^{10}+t^{12}} = \int \frac{t^{64}}{t^{10}(t} = \int \frac{t^{54}}{t^2+1}$$

$$t^{54} \quad \underline{|\, t^2+1}$$

$$t^{54}+t^{52} \quad -t^{52}+t^{50}$$

$$0 - t^{52}$$

$$t^{52}+t^{50}$$

$$(-t^{52}+t^{50}-t^{48}+t^{46}-t^{44}+t^{42}-t^{40}+t^{38}-t^{36}+t^{34}-t^{32}$$
$$+t^{30}-t^{28}+t^{26}-t^{24}+t^{22}-t^{20}+t^{18}-t^{16}+t^{14}$$
$$-t^{12}+t^{10}-t^{8}+t^{6}-t^{4}+t^{2})\, t^2+1$$

$$-t^{54}+$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6} = \frac{(x^2+5x+6)(5-x)+(25x+30)}{x^2+5x+6} =$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad +1 & x^2+5x+6 \\ \hline -x^3-5x^2-6 & -x+5 \\ \hline 0 \; -5x^2 \qquad -5 & \\ \quad 5x^2+25x+30 & \\ \hline \quad 0+25x+30 & \end{array}$$

$$= \int 5-x + \frac{(25x+30)}{x^2+5x+6} =$$

$$= 5x - \frac{x^2}{2} + 5\int \frac{5x+6}{\underset{a}{x^2}+\underset{b}{5x}+\underset{c}{6}}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25-4}}{2} \rightarrow \frac{5 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow \frac{-4}{2} = -2 \\ \searrow \frac{-6}{2} = -3 \end{array}$$

$$5x - \frac{x^2}{2} + 5\int \frac{5x+6}{(x+2)(x+3)} =$$

$$= 5x - \frac{x^2}{2} + 5\int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\begin{cases} Ax+Bx = 5x \\ 3A+2B = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B = 5 \\ 3A+2B = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -2A-2B = -10 \\ 3A+2B = 6 \end{cases}$$

$$A \quad / \quad = -4$$

$$A+B = 5$$

$$-4+B = 5$$

$$B = 9$$

$$= 5x - \frac{x^2}{5} + 5\int \frac{-4}{x+2} + \frac{9}{x+3} = \boxed{5x - \frac{x^2}{5} + 5\left[\begin{array}{l} -4\ln(x+2) \\ +9\ln(x+3) \end{array}\right]}$$

operando

$$= \frac{c(x^2+1)+x(dx+k)}{x(x^2+1)}.$$

Así, igualando numeradores

$$1 = (c+d)x^2 + kx + c.$$

Dos polinomios son iguales si tienen iguales los coeficientes. LLegamos al sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccc} c & + & d & & & = & 0 \\ & & & & k & = & 0 \\ c & & & & & = & 1 \end{array}$$

Este sistema es muy fácil de resolver $c = 1, d = -1$ y $k = 0$, y así

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{c}{x} + \frac{dx+k}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int -\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Con todo lo anterior llegamos a que

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} = x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. OTRAS TÉCNICAS.

El cálculo de una primitiva $\int f(x)dx$ consiste en transformarla usando: integración por partes, cambios de variables, manipulaciones algebraicas u otros "trucos" hasta llegar a una expresión que sea una primitiva elemental. Es decir una expresión que esté en la tabla de primitivas elementales.

Como ejemplos de otros "trucos" vamos a ver integrales donde aparecen las funciones trigonométricas e hiperbólicas. Para hacer estas primitivas tendremos que usar relaciones trigonométricas (ver Apéndice correspondiente) así como relaciones hiperbólicas (ver Apéndice Funciones Logaritmo y Exponencial).

Primitivas de Funciones Trigonométricas. Recordemos que:

- $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad$ y $\quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad$ y $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y \quad$ y $\quad \operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$.

(más adelante en el Apéndice Funciones Trigonométricas probaremos todas estas propiedades).

Utilizando estas propiedades convenientemente se puede resolver primitivas en las que aparecen involucradas las funciones seno y coseno.

Ejemplo. 1. $\displaystyle\int \cos^2 x dx.$

Demostración: Observemos que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

y despejando $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$. Así

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$$

□

En general las primitivas del tipo $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$ con n y m pares se resuelven usando las fórmulas de reducción:

- $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, $n > 2$ y par (ver árticulo Integración por Partes).
- $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$, $n > 2$ y par (ejercicio).

Hasta llegar a una expresión con $\int \cos^2 x dx$ o $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

Ejemplos. 1.
- $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$ *con* n *y* m *uno par y otro impar.*
- $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 dx dx$

Demostración: Vamos a resolver el ejemplo concreto, el caso general se sigue de forma análoga.

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx = \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx =$$

$$= -\int -\operatorname{sen} x \cos^4 x dx + \int -senx \cos^6 x dx$$

podemos pensar en el cambio de variable $y = \cos x$, y lo que sale es

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}$$

□

Ejercicio. 1. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$.

Demostración:

$$\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

estas integrales ya son inmediatas

$$= \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

□

Ejemplo. 2. $\int \tan^2 x dx$.

$$udv = uv - \int v du$$

- $$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 dx dx$$

$u = \operatorname{sen}^3(x) \quad du = 3 \cdot \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x)$

$dv = \cos^4(x) \quad v = \dfrac{\cos^3(x) \cdot \operatorname{sen}(x)}{4} + \dfrac{3}{4}\int \cos^2(x) =$

$= \dfrac{\cos^3(x) \cdot \operatorname{sen}(x)}{4} + \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{\cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\int 1 =\right.$

$\dfrac{\cos^3(x) \cdot \operatorname{sen}(x)}{4} + \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{\cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)}{2} + \dfrac{x}{2}\right]$

$\int \cos^n(x) = \int \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) \cdot -\operatorname{sen}(x) \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-2}(x) =$

$u = \cos^{n-1}(x) \quad du = n-1 \cdot \cos^{n-2}(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))$

$dv = \cos(x) \quad v = \operatorname{sen}(x)$

$= \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \int \operatorname{sen}^2(x) \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-2}(x)$

$= \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1) \int (1 - \cos^2(x)) \cos^{n-2}(x)$

$= \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1)\left(\int \cos^{n-2}(x) - \cos^n(x)\right) =$

$= \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + n-1 \int \cos^{n-2}(x) - (n-1)\int \cos^n(x) =$

$I = \cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x) - (n-1) I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad I = \dfrac{\cos^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)}{n}$

tomamos $x = \arcsin(u)$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

$\int K dx = Kx$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = (\sinh)^{-1} x$

Ejercicio. 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$.

$$\int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x) \cdot (1-\operatorname{sen}(x))} = \int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)} =$$

$$\int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}$$

Demostración: ¿Qué camino elegir para resolver una primitiva? Se necesita un poco de práctica y de pericia. En la primitiva que tenemos podemos pensar en un cambio de variable $u = \tan x$ y así $du = \tan^2 x + 1dx$. Luego

$$\int \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 1} dx = \int \frac{u^2}{u^2+1} du$$

esto es un integral racional

$$= \int \frac{u^2+1}{u^2+1} + \frac{-1}{1+u^2} du = u - \arctan u = \tan x - x.$$

Aunque seguro que es más fácil el camino

$$\int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1) - 1dx = \tan x - x$$

□

Primitivas de funciones racionales en senos y cosenos. Vamos a considerar dos polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ en dos variables y la siguiente primitiva

$$\int \frac{P(\cos x, \operatorname{sen} x)}{Q(\cos x, \operatorname{sen} x)} dx.$$

si tomamos $A = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$

Por ejemplo

$$\int \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 + \cos x} dx.$$

$u = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}$

El cambio de variable

$$u = \tan \frac{x}{2}$$

transforma este tipo de integrales en integrales de funciones racionales que integramos en el artículo anterior. Es un método "infalible" del que conviene no abusar, como veremos en algún ejemplo.

Proposición. 1. *Si* $u = \tan \frac{x}{2}$, *entonces*

- $$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad y \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

  y

- $$\frac{du}{dx} = \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{2} = \frac{1+u^2}{2}.$$

Demostración: Vamos a calcular $\operatorname{sen}(\arctan u)$ y $\cos(\arctan u)$.

Si llamamos $x = \arctan u$, entonces

$$u = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}. \to \text{despejar } u$$

Llamamos $A = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\arctan u)$. Luego tenemos que

$$u = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}.$$

Despejando A respecto de u

$$u^2(1-A^2) = A^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad u^2 = (1+u^2)A^2,$$

$u^2 - A^2u^2 = A^2$; $u^2 = A^2 + A^2u^2$; $u^2 = A^2(1+u^2)$;

y así

$$A = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

$\frac{u^2}{1+u^2} = A^2$

$\boxed{\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = A}$

Es decir

$$\operatorname{sen}(\arctan u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Usando un argumento similar, si $x = \arctan u$, entonces

$$u = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}.$$

Llamamos $B = \cos x = \cos(\arctan u)$. Luego tenemos que

$$u = \frac{\sqrt{1-B^2}}{B}.$$

Despejando B respecto de u

$$u^2B^2 = 1 - B^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (1+u^2)B^2 = 1,$$

y así

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\arctan(u) = \frac{x}{2}$

Es decir

$$\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

$\boxed{x = 2\arctan(u)}$ → despejar $\operatorname{sen}(x)$

Ahora si $u = \tan \frac{x}{2}$, entonces

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2\arctan u) = 2\operatorname{sen}(\arctan u)\cos(\arctan u) =$$

$$2\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2};$$

y

$$\cos x = \cos(2\arctan u) = \cos^2(\arctan u) - \operatorname{sen}^2(\arctan u) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

□

Ejercicio. 2. $\displaystyle\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}dx.$

Ejercicio. 2. $\displaystyle\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}dx.$

$$\int \frac{2-\operatorname{sen}(x)}{2+\cos(x)} = \int$$

$\arctan(u) = \frac{x}{2} \iff 2\arctan(u) = x$

$\Longleftarrow$

tomando $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff u = \dfrac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x/2)}} \Rightarrow$

tomando $A = \operatorname{sen}(x/2)$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} = u; \quad \frac{A^2}{1-A^2} = u^2 \iff A^2 = u^2(1-A^2) \iff$$

$$\iff A^2 = u^2 - u^2A^2 \iff A^2 + u^2A^2 = u^2 \iff$$

$$\iff A^2(1+u^2) = u^2 \iff A = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \iff$$

$$\iff u = \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x/2)}} \iff u = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\arctan(u)}{2}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\arctan(u)}{2}\right)}} =$$

$=$

$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(2\arctan(u)) =$

$= 2\cdot \operatorname{sen}(\arctan(u))\cdot\cos(\arctan(u))$

Demostración: El cambio de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ nos lleva a

$$\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}dx = \int \frac{2-\frac{2u}{1+u^2}}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du =$$

$$2\int \frac{\frac{2+2u^2-2u}{1+u^2}}{2+2u^2+1-u^2}du = 2\int \frac{2u^2-2u+2}{(1+u^2)(3+u^2)}du.$$

Esto ya es una primitiva de una función racional, la cuál podemos resolver
□

Ejercicio. 3. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx$

Demostración: Esta primitiva es inmediata

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x.$$

Ahora, podemos pensar que con el cambio de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ seguro que podemos resolverla. Tendríamos

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{1}{1-(\frac{2u}{1+u^2})^2}\frac{2}{1+u^2}du =$$

$$2\int \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2-4u^2}du = 2\int \frac{1+u^2}{(u^2-1)^2}du.$$

La cuál podemos resolver, pero nos llevará un poco más de tiempo □

Primitivas donde aparecen funciones hiperbólicas. Recordemos que:

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
- $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$ y $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
- $\operatorname{senh}(x+y) = \cosh x \operatorname{senh} y + \operatorname{senh} x\cosh y$ y $\operatorname{senh} 2x = 2\cosh x \operatorname{senh} x$.

(ver Apéndice Funciones Logaritmo y Exponencial).

Ejemplo. 3. $\displaystyle\int \cosh^2 x dx.$

Demostración: Observemos que

$$\cosh 2x = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x + (\cos^2 x - 1)$$

y despejando $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$. Así

$$\int \cosh^2 x dx = \int \frac{\cosh 2x+1}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int \cosh 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x$$

□

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \cos(nx) \cdot sen(mx)\ dx$$

$u = \cos(nx)$ $\quad du = -n\,sen(nx)$

$dv = sen(mx)$ $\quad v = -\frac{1}{m} \cdot \cos(mx)$

$$\cos(nx) \cdot \cos(mx) - \int + \frac{1}{m} \cdot \cos(mx) \cdot n \cdot sen(nx) =$$

$$= \cos(nx) \cdot \cos(mx) - \frac{n}{m} \int \cos(mx) \cdot sen(nx) =$$

$$I = \cos(nx) \cdot \cos(mx) + \frac{\cancel{n}}{m} \left[+ \frac{1}{\cancel{n}} \cos(nx) \cdot \cos(mx) + I \cdot \frac{m}{\cancel{n}} \right];$$

$$I = \cos(nx) \cdot \cos(mx) + \frac{\cancel{1}}{\cancel{m}} \left[\frac{\cos(nx)\cos(mx)}{m} + \cancel{m} I \right]$$

$$\int \cos(mx) \cdot sen(nx) = -\frac{1}{n} \cos(nx) \cdot \cos(mx) - \int -\frac{1}{n} \cos(nx) \cdot (-m) \cdot sen(mx)$$

$u = \cos(mx)$ $\quad du = -m \cdot sen(mx)$

$dv = sen(nx)$ $\quad v = -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx)$

$$= -\frac{1}{n} \cos(nx) \cdot \cos(mx) - \int \frac{m}{n} \cos(nx) \cdot sen(mx) =$$

$$= -\frac{1}{n} \cos(nx) \cdot \cos(mx) - \frac{m}{n} \int \cos(nx) \cdot sen(mx) =$$

$$= -\frac{1}{n} \cos(nx) \cdot \cos(mx) - \frac{Im}{n}$$

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \cos(nx) \cdot \text{sen}(mx)\ dx$$

$u = \cos(nx)$ $\quad du = -\text{sen}(nx) \cdot n$

$dv = \text{sen}(mx)$ $\quad v = -\frac{1}{m} \cdot \cos(mx)$

$$I = \cos(nx) \cdot \cos(mx) \cdot \left(-\frac{1}{m}\right) - \int +\frac{1}{m} \cdot \cos(mx) \cdot (+\text{sen}(nx)) \cdot n;$$

$$I = \cos(nx) \cdot \cos(mx) \cdot \left(-\frac{1}{m}\right) - \frac{n}{m} \int \cos(mx) \cdot \text{sen}(nx);$$

$$\int \cos(mx) \cdot \text{sen}(nx) = \cos(mx) \cdot -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) + \int -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \cdot (+\text{sen}(mx)) \cdot m;$$

$u = \cos(mx)$ $\quad du = -\text{sen}(mx) \cdot m$

$dv = \text{sen}(nx)$ $\quad v = -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx)$

$$\cos(mx) \cdot \frac{(-1)}{n} \cdot \cos(nx) - \frac{m}{n} \int \cos(nx) \cdot \text{sen}(mx);$$

$$\cos(mx) \cdot \left(\frac{-1}{n}\right) \cdot \cos(nx) - \frac{mI}{n}$$

$$I = \cos(nx) \cdot \cos(mx) \cdot \frac{(-1)}{m} + \frac{\cancel{n}}{m} \left[\cos(mx) \cdot \frac{(+1)}{\cancel{n}} \cdot \cos(nx) + \frac{mI}{\cancel{n}} \right]$$

$$I = \cos(nx) \cdot \cos(mx) \cdot \frac{(-1)}{m} + \frac{\cos(mx) \cdot \cos(nx)}{m} + I$$

Observación: $\langle , \rangle : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

$$(x,y) \to \langle x,y\rangle = \sum_{i=0}^{k} x_i y_i$$

$\Rightarrow$ x e y son ortogonales $\Leftrightarrow$ $\langle x,y\rangle = 0$

Sea el conjunto $C[0,2\pi] = \{ f : [0,2\pi] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua} \}$

$\Rightarrow$ Un ejemplo de producto escalar en este conjunto es $\langle , \rangle = C[0,2\pi] \times C[0,2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\langle f,g\rangle \to \int_0^{2\pi} f \cdot g$$

$\Rightarrow$ f y g son ortogonales si $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f\cdot g = 0$

Por ejemplo, $\{1, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx)\}$ es una familia de vectores ortogonales

¿ $f \in C[0,2\pi) \Rightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$

Observación (Ejercicio):

$$\int_2^3 \frac{\text{sen}(x^2)}{x}\,dx \qquad \text{tomando } y = x^2 \rightarrow dy = 2x\,dx$$

$$\int_2^3 \frac{\text{sen}(x^2)}{x}\,dx = \int_2^3 \frac{\text{sen}(x^2)}{x} \cdot \frac{2x}{2x} \cdot dx = \int_4^9 \frac{\text{sen}(y)}{2x^2}\,dy =$$

$$= \int_4^9 \frac{\text{sen}(y)}{2y}\,dy$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$= \int \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} = \int \frac{2}{(x-1)^2} + \int \frac{3}{(x-1)^3}$$

C

$$C + \cancel{A} - B = 1$$

$$C - 2 = 1$$

$$C = 3$$

$$A(x-1)^2 = Ax^2 + A - 2xA$$

$$B(x-1) = Bx - B$$

$$Ax^2 = 0 \; ; \; \boxed{A = 0}$$

$$Bx - \cancel{2xA} = 2x$$

$$\boxed{B = 2}$$

$$(x-1)^{-1}$$

$$-1(x-1)^{-2} \cdot (1)$$

$\cos(x) = y$

tomamos $dy = -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = \int \frac{1}{1-\cos^2(x)} = \int \frac{1}{1-\cos(x)\cdot\cos(x)}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \qquad u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{sen}^{-1}(x) \quad du = -1(\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{-2}(x))$$

$$dv = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \qquad v = \qquad \int \frac{1}{1-\cos^2(x)} \cdot \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-\operatorname{sen}(x)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1-\cos^2(x)} \qquad \int \frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\,dy$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \qquad \begin{aligned} y &= \operatorname{sen}^2(x) \\ dy &= 2(\operatorname{sen}(x))\cdot\cos(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \frac{2(\operatorname{sen}(x))\cdot\cos(x))}{2(\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}\cdot dx$$

$$\int \frac{2+\sqrt{1+x}}{(x+1)^2-\sqrt{1+x}} =$$

tomamos $y=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$

$dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$\int \frac{2+\sqrt{1+x}}{(x+1)^2-\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}} =$$

$$=\int\frac{2+y}{y^4-y}\cdot\frac{dy}{\frac{1}{2}\frac{1}{y}} = \int\frac{2+y}{y^4-y}\cdot\frac{dy}{\frac{1}{2y}} = \int\frac{2y(2+y)}{y^4-y}dy$$

$$=2\int\frac{2+y}{y^3-1}dy = 2\int\frac{2+y}{(y-1)(y^2+y+1)} = 2\int\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1}$$

$$\begin{array}{l|l} y^3-1 & y-1 \\ \hline -y^3+y^2 & y^2+y+1 \\ \hline 0\ \ y^2-1 & \\ -y^2+y & \\ \hline 0\ \ y-1 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C+A=1 \\ A-C=2 \end{cases}$$

$2A=3$

$A=3/2$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcos}(x)$$

$$\int \frac{-\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsen}(x)$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\partial x = \int \sqrt{1-\cos^2(y)} \cdot (-\operatorname{sen}(y)) =$$

tomando $x = \cos(y)$

$\partial x = -\operatorname{sen}(y)$

$$= \int \operatorname{sen}(y) \cdot (-\operatorname{sen}(y)\,\partial y = -\int \operatorname{sen}^2(y)\,\partial y =$$

$$= \frac{y}{2} + \frac{\cos(2y)}{4} = \frac{\arccos(x)}{2} + \frac{\cos^2(y) - \operatorname{sen}(2y)}{2} =$$

$$= \frac{\arccos(x)}{2} + \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{Arcsen}(y)} - \operatorname{sen}(\operatorname{Arcsen} x)}{4} =$$

$$= \frac{\arccos(x)}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2} - x^2}{4}$$

con $\int \sqrt{1+x^2}$ podemos tomar los cosenos y senos hiperbólicos ya que

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \cosh^2(x) = 1 + \operatorname{senh}^2(x)$$

tomamos $x = \arcsen^2(y)$

$$dx = 2(\arcsen(y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{1}{\sen^2(x)} = \frac{1}{\sen(x)} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sen(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\int \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\frac{Ax+C}{x^2-2x+1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\cancel{Ax^2} + \cancel{Cx} + \cancel{3Ax} + 3C + \cancel{Bx^2}\ \cancel{[illegible]} + B$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C + 3A - 2B = 1 \\ 3C + B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A + B = 2 \\ -3C - 9A + 6B = -3 \\ 3C + B = 1 \end{cases}$$

$$0 - 9A + 7B = -2$$

$$\cancel{2}A - B = \cancel{-9}A + 7B$$

$$8A = 8B \qquad A = B$$

$$\boxed{A = B = 1}$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$3C + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\frac{x}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x+3}$$

$$\cancel{[illegible]} + 1$$

$$2x^2 + x + 1$$

Ejemplo. 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Demostración: Si pensamos en el cambio de variable $x = \sqrt{2}\cosh u$ y así $dx = \sqrt{2}\operatorname{senh} u du$, tendremos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{\sqrt{2}\operatorname{senh} u du}{\sqrt{2\cosh^2 u - 2}}$$
$$= \int \frac{\operatorname{senh} u}{\operatorname{senh} u} du = u = \operatorname{arccosh}(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

□

Otras primitivas. Aunque encontrar primitivas no es una tarea fácil, tampoco hay que tener miedo a ciertas expresiones. Si las miramos con detalle podemos ver métodos sencillos de integración.

Ejemplo. 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$.

Demostración: No sabemos que hacer con esta expresión. Podemos poner $y = \sqrt{\sqrt{x}+1}$, despejando $x = (y^2-1)^2$ y derivando en y, $dx = 4y(y^2-1)dy$. Así

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \int \frac{4y(y^2-1)dy}{y} = \int 4y^2 - 4dy$$
$$= \frac{4}{3}y^3 - 4y = \frac{4}{3}(\sqrt{\sqrt{x}+1})^3) - 4\sqrt{\sqrt{x}+1}$$

□

Ejemplo. 6. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen} t dt)dx$.

Demostración: A primera vista, impresiona esta primitiva. Si nos fijamos en la función $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t dt$, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que su derivada es $\operatorname{sen} x$, luego el cambio de variable $u = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t dt$ nos da

$$\int (\operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen} t dt)dx = \int u du$$
$$= \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}(\int_0^x \operatorname{sen} t dt)^2$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

Cuando tenemos una función racional
$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
es decir un cociente de polinomios, a veces es conveniente simplificar su expresión. Vamos a estudiar algunas cuestiones sobre polinomios que nos ayudarán en esa dirección.

Notación: Sea un polinomio con coeficientes reales
$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
así $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. El conjunto de polinomios con coeficiente reales lo llamaremos $\mathbb{R}[x]$ y así escribiremos $P \in \mathbb{R}[x]$. Llamaremos **grado** del polinomio $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a n si $a_n \neq 0$.

División de polinomios. Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ se pueden dividir de modo que existen $q, r \in \mathbb{R}[x]$ con
$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$
de modo que el grado de r, **el resto** , es menor que el de Q (**Teorema del Resto para Polinomios.**)

En el Tema de Números estudiamos el Teorema del Resto para números enteros. De forma similar se hace para polinomios.

Ejemplo. 1. *Vamos a dividir el* $P(x) = 3x^3 - x + 1$ *entre* $Q(x) = x^2 + 1$.

Demostración:
$$\begin{array}{rl} 3x^3 \; - x + 1 & \quad |\underline{x^2 + 1} \\ \underline{-3x^3 - 3x} & \quad\;\; 3x \\ -4x + 1 & \end{array}$$
Y así $P(x) = 3xQ(x) - 4x + 1 \quad \square$

Raíces de un polinomio. Dado un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ decimos que que α es una **raíz** del polinomio si $P(\alpha) = 0$.

Teorema. 1. *Si α es una raíz del polinomio P, entonces $x-\alpha$ divide a P, es decir existe q polinomio tal que*

$$P(x) = q(x)(x-\alpha).$$

Demostración: Dividiendo $P(x)$ entre $(x-\alpha)$, tenemos

$$P(x) = q(x)(x-\alpha) + r,$$

con grado de r menor que 1, luego r es un número. Además

$$0 = P(\alpha) = q(\alpha)(\alpha-\alpha) + r.$$

Así $r = 0$. $\square$

Teorema. 2. *(**Fundamental del Álgebra.**) Todo polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado n tienen n raíces que pueden ser reales o complejas y no necesariamente distintas.*

Ejemplo. 2. *Sea $P(x) = (x-3)^2(x^2+1)$. Este es un polinomio de grado 4 (hacer la multiplicación) que tiene por raíces a $\alpha = 3$ dos veces y las raíces complejas $\alpha = i$ y $\alpha = -i$.*

Teorema. 3. *Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio con coeficientes reales.*

- *Si $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces su conjugado $a - bi$ también es una raíz de P.*
- *El polinomio $(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$ tiene coeficientes reales.*
- *Si $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces el polinomio de segundo grado $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ divide a P.*

El Teorema Fundamental del Álgebra es difícil de probar, queda fuera de nuestro alcance. El Teorema anterior se entenderá al estudiar un poco sobre números complejos $\mathbb{C}$.

Descomposición de polinomios. Con los resultados anteriores no es muy difícil probar que todo todo polinomio de coeficientes reales se puede escribir como un producto de potencias de polinomios de grado 1 y 2.

Corolario. 1. *Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ un polinomios de coeficientes reales y grado m. Q se puede escribir como*

$$Q(x) = b_m(x-\alpha_1)^{r_1} \ldots .(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1} \ldots .(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j}$$

donde $\alpha_1, .., \alpha_i$ *son las raíces reales de* Q *y* $a_1 \pm b_1 i, ..., a_j \pm b_j i$ *las complejas. Además*

$$r_1 + r_2 + ... + r_i + 2(s_1 + ... + s_j) = m.$$

Descomposición en Fracciones Simples.

Dado un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde el grado de P es menor que el de Q, se puede escribir este cociente como suma de fracciones de polinomios más sencillos. Esto es lo que nos dice el siguiente Teorema.

Teorema. 4. *Dados dos polinomios* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ *con grado de* P *menor que el de* Q *y donde tenemos la descomposición*

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} ....(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1} ....(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{s_j},$$

entonces se pueden encontrar números reales $c_{*,*}, d_{*,*}$ *y* $k_{*,*}$ *tales que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = [\frac{c_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \frac{c_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{c_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}] + ...$$
$$.... + [\frac{c_{i,1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{c_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + ... + \frac{c_{i,r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}]$$
$$+[\frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2} + ... + \frac{d_{1,s_1}x + k_{1,s_1}}{(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1}}] + ...$$
$$.... + [\frac{d_{j,1}x + k_{j,1}}{x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2} + ... + \frac{d_{j,s_j}x + k_{j,s_j}}{(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{s_j}}].$$

Ejemplo. 3. *Sea la función racional*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1}.$$

¿Como se descompone en fracciones simples?

Demostración: Lo primero que tenemos que hacer es descomponer el denominador. Esto **no siempre es posible.** En este caso es fácil ver que $\alpha = 1$ es una raíz, que es doble y dividiendo el polinomio por $(x-1)^2$ se ve que

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2+1)^2(x-1)^2.$$

Ahora, el Teorema anterior nos dice que

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)^2} = \frac{c_{1,1}}{x-1} + \frac{c_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2+1} + \frac{d_{1,2}x + k_{1,2}}{(x^2+1)^2}.$$

¿Como se calculan de forma efectiva los coeficientes de arriba? La de arriba es una ecuación. Operamos la parte de la derecha de la ecuación hasta que nos quede una única fracción e igualamos numeradores. Nos tendrá que quedar un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas (las que tenemos) y lo resolvemos. De hecho lo que dice el Teorema de arriba es que este sistema tiene solución única. □

Aplicaciones de la Descomposición en Fracciones Simples Es una técnica muy usual que se aplica con frecuencia. Veamos algunos ejemplos.

- En el Tema de Series empleamos este método con las series Telescópicas.
- Se usa para calcular primitivas de funciones racionales.
- La **Transformada de Laplace** es una herramienta matemática que se usa para resolver algunas **Ecuaciones Diferenciales**. En particular las que describen algunos circuítos eléctricos. Es por tanto una herramienta útil en **Teoría de la Señal.** La Transformada de Laplace se estudia en cursos superiores. Allí para calcular transformadas Inversas se usa el método de Descomposición en Fracciones Simples.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTRODUCCIÓN.

Las aplicaciones de la **integral** son muchas y variadas. Lo que ocurre es que muchas de ellas tiene que ver con integrales de funciones de varias variables. Esto se escapa del alcance de este curso. Veamos una idea preliminar.

Sea una función de varias variables

$$\begin{array}{rcll} f & : & [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

acotada. De forma similar a como hemos construido la integral de Riemann se puede construir la integral de Riemann para funciones de varias variables

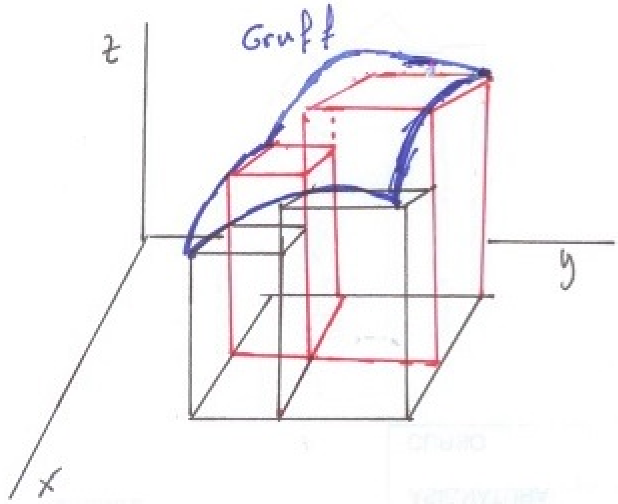


Figura 1. Suma inferior de Riemann para una función de dos variables.

Con un poco de trabajo veríamos que

$$\int_{[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]} f(x_1, .., x_n) dx_1..dx_n$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(.... \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, .., x_n) dx_1 \right) ... \right) dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Es decir, para calcular la integral de una función de n variables tenemos que hacer n integrales de funciones de una variable. Veamos un ejemplo para comprender lo anterior.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función de dos variables* $f(x,y) = x + y$ *para* $(x,y) \in [0,1] \times [1,2]$, *entonces tendríamos que*

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[1,2]} x + y dx dy &= \int_1^2 (\int_0^1 x + y dx) dy \\ &= \int_1^2 (\frac{x^2}{2} + yx|_0^1) dy = \int_1^2 \frac{1}{2} + y dy \\ &= (\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}|_1^2 = 2\end{aligned}$$

Hemos integrado primero sobre la variable "x", tomando la "y" como constante. Después hemos integrado respecto de "y".

Aplicaciones.

- Una primera aplicación de la integral de Riemann de funciones de una variable es poder calcular integrales de funciones de más variables (pero esto se escapa de este curso)
- Una segunda aplicación es poder definir integrales de funciones no acotadas o sobre intervalos no acotados: la **integral impropia** (que vemos a continuación).
- La integral impropia permite definir el concepto de función de distribución: **Estadística** (que se ve en cursos posteriores).
- La integral impropia permite definir el concepto de **transformada de Laplace**, útil para estudiar E.D.O., circuítos eléctricos ..etc (que se ve en cursos posteriores).
- La integral se construye para **medir**. Veremos algunas cosas sobre longitudes, áreas y volúmenes.
- Con la integral se definen funciones de forma rigurosa (ver péndices sobre la construcción del **logaritmo** o el **coseno**).
- Haremos mención, en los Apéndices de este Tema, de otras aplicaciones que quedan fuera del alcance de este curso (pero que puede encontrarse en cursos superiores).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

INTEGRAL IMPROPIA. DEFINICIÓN.

La integral de Riemann la hemos definido para funciones acotadas en un intervalo cerrado. Es fácil imaginar situaciones distintas.

Ejemplos. 1. 1.

$$\begin{array}{rcccc} f & : & (0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx\text{?}.$$

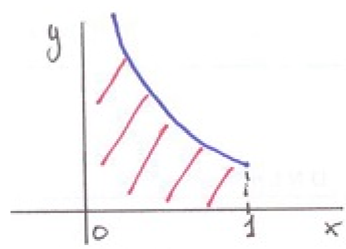


Figura 1. Función no acotada sobre un intervalo acotado.

2.

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [1,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \frac{1}{x^2} \end{array}; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx\text{?}.$$

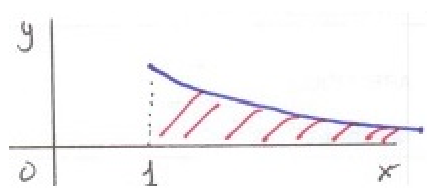


Figura 2. Función acotada sobre una semirecta.

3.

$$\begin{array}{rcccc} f & : & (-\infty,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = e^{-x^2} \end{array}; \qquad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\text{?}.$$

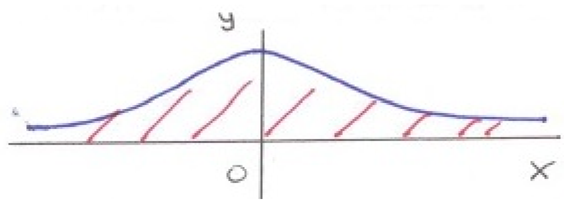
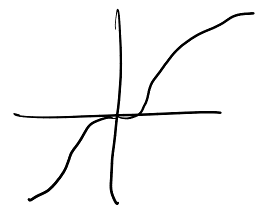


FIGURA 3. Función acotada sobre la recta.



4.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & (1,2) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}} \end{array} ; \quad \text{¿}\textit{qué entendemos por} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}dx\text{?}.$$

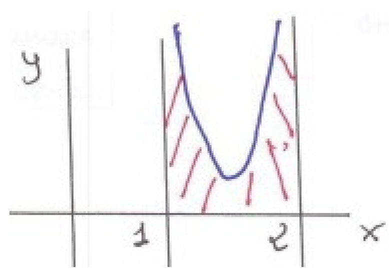


FIGURA 4. Función no acotada sobre un intervalo acotado.

Observamos, en los dos primeros ejemplos, que el problema surge al acercarnos a un extremo del dominio, ya sea por que allí la función no está acotada o por ser infinito el extremo. En los otros dos casos, los problemas están en ambos extremos del dominio.

Para tratar estas situaciones vamos a unir dos cosas que ya conocemos. La **integral de Riemann** y la idea de **límite.** Así procederemos de la siguiente manera.

Ejemplos. 2. 1. *Para la función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, *continua en* $(0,1]$, *siempre existe* $\displaystyle\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *para todo* $r \in (0,1]$.

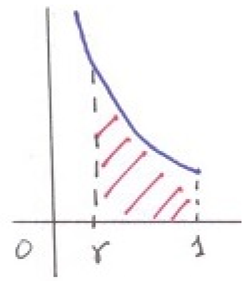


FIGURA 5. Integral de Riemann.

Ahora lo que podemos hacer es acercar r a cero. En concreto

$$\lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{x}|_r^1 = \lim_{r\to 0^+} 2-2\sqrt{r} = 2,$$

donde en la primera igualdad hemos usado la Regla de Barrow.

2. *Para la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$, continua en $[1,\infty]$, siempre existe $\displaystyle\int_1^s \frac{1}{x^2}dx$ para todo $s>1$.*

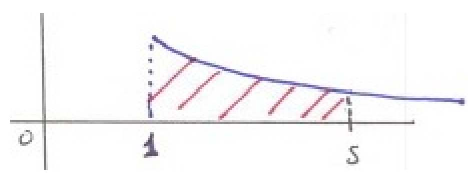


FIGURA 6. Integral de Riemann.

Ahora lo que podemos hacer es acercar s a infinito. En concreto

$$\lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x^2}dx = \lim_{s\to\infty}\frac{-1}{x}|_1^s = \lim_{s\to\infty}\frac{-1}{s}-\frac{-1}{1} = 1,$$

donde en la primera igualdad hemos usado la Regla de Barrow.

Lo anterior nos da pie a la siguiente definición.

Definición. 1. **a:** *Sea $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, con $b\in\mathbb{R}$ o $b=\infty$, una función que verifica que para todo $s\in[a,b)$ existe la integral de Riemann $\int_a^s f(x)dx$. Se define la **integral impropia** de f en $[a,b)$ por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to b^-}\int_a^s f(x)dx.$$

*Si el límite anterior existe, decimos que existe la integral impropia o que la integral es **convergente**. En caso contrario, decimos que la integral **diverge**.*

b: *Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, con $a\in\mathbb{R}$ o $a=-\infty$, una función que verifica que para todo $r\in(a,b]$ existe la integral de Riemann $\int_r^b f(x)dx$. Se define la* ***integral impropia*** *de f en $(a,b]$ por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+}\int_r^b f(x)dx.$$

Si el límite anterior existe, decimos que existe la integral impropia o que la integral es ***convergente****. En caso contrario, decimos que la integral* ***diverge****.*

En los ejemplos anteriores podemos decir que existen las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Observemos que en el primer caso la integral tiene aspecto de integral de Riemann, que no lo sea está implícito pués la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ no está acotada en $(0,1]$. El segundo caso, con el extremo de integración ∞ nos indica claramente que estamos ante una integral impropia.

Hay, claro, integrales impropias no convergentes.

Ejemplo. 1. *Si $p>1$, entonces $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx=\infty$, es decir la integral diverge.*

Demostración: La función $\frac{1}{x^p}$ no está acotada en $(0,1]$, así estamos ante una integral impropia. Por definición

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{r\to 0^+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}|_r^1 = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{1-p}-\frac{-1}{(p-1)r^{p-1}}=\infty$$

□

En el caso de que tengamos problemas en ambos extremos del dominio de una función, tenemos la siguiente definición de integral impropia.

Definición. 2. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, con $a,b\in\mathbb{R}$ o $a=-\infty$ o $b=\infty$, una función que verifica que para todo $r,s\in(a,b)$ existe la integral de Riemann $\int_r^s f(x)dx$. Se define la* ***integral impropia*** *de f en (a,b) por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+}\int_r^c f(x)dx + \lim_{s\to b^-}\int_c^s f(x)dx,$$

para algún $c\in(a,b)$. Si los dos límites anteriores existen, decimos que existe la integral impropia o que la integral es ***convergente****. En caso contrario, decimos que la integral* ***diverge****.*

Ejemplo. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx.$

Demostración: Lo que tenemos que calcular gráficamente es

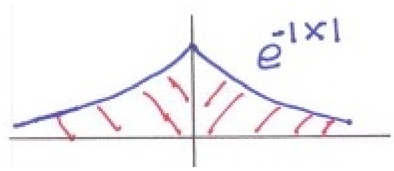


FIGURA 7. Área finita no acotada.

Por la definición anterior tenemos que escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{c} e^{-|x|}dx + \int_{c}^{\infty} e^{-|x|}dx$$

para algún $c \in (-\infty, \infty)$. Dado que la función depende del valor absoluto, nos interesaría que c fuese cero. Observemos que f es una función par y por simetría $\int_{-s}^{0} e^{-|x|}dx = \int_{0}^{s} e^{-|x|}dx$. Veámoslo.

$$\int_{-s}^{0} e^{-|x|} = \int_{-s}^{0} e^{x}dx$$

haciendo el cambio de variable $u = -x$, así $du = -dx$, tenemos

$$= \int_{s}^{0} -e^{-u}du = \int_{0}^{s} e^{-u}du = \int_{0}^{s} e^{-|u|}du.$$

Usaremos lo anterior para ver si existe

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 2\lim_{s\to\infty}\int_{0}^{s} e^{-x}dx = 2\lim_{s\to\infty}(-e^{-x}|_{0}^{s} = 2\lim_{s\to\infty}(-e^{-s}+1) = 2$$

□

La pregunta que debemos hacernos es si cualquier otro valor de c en el problema anterior nos hubiese dado el mismo resultado. La respuesta es que si.

Proposición. 1. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$, una función que verifica que para todo $r, s \in (a,b)$ existe la integral de Riemann $\int_r^s f(x)dx$. Existe la* ***integral impropia*** *de f en (a,b) si y solo si*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

para todo $c \in (a,b)$.

Demostración:

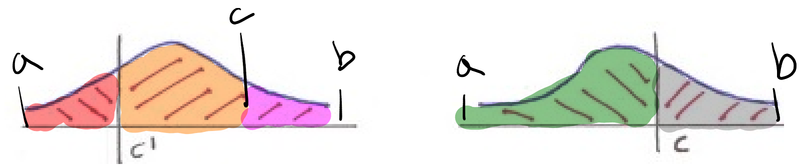


FIGURA 8. Demostración sin palabras.

Para convencernos de que es cierto lo que dice la Proposición tomemos $c' < c$ y supongamos que existen $\int_a^{c'} f(x)dx$ y $\int_{c'}^b f(x)dx$, entonces usando las propiedades de la integral de Riemann y la de los límites

$$\int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^{c'} f(x)dx + \lim_{s\to b^-} \int_{c'}^s f(x)dx$$

$$= \lim_{r\to a^+} \int_r^{c'} f(x)dx) + \lim_{s\to b^-} (\int_{c'}^{c} f(x)dx + \int_c^s f(x)dx) =$$

$$= \lim_{r\to a^+} \int_r^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{c} f(x)dx + \lim_{s\to b^-} \int_c^s f(x)dx =$$

$$= \lim_{r\to a^+} (\int_r^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{c} f(x)dx) + \lim_{s\to b^-} \int_c^s f(x)dx$$

$$= \lim_{r\to a^+} \int_r^{c} f(x)dx + \lim_{s\to b^-} \int_c^s f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

□

Ejercicio. 1. *Tenemos que calcular* $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s xdx$, *y comprobar que* ***no*** *existe* $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$.

Demostración: Como $\int_{-s}^s xdx = 0$, para todo $s > 0$, se sigue que $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s xdx = 0$. Por otro lado, para toda $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s\to\infty} \int_c^s xdx = \lim_{s\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_c^s = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{2} - \frac{c^2}{2} = \infty,$$

luego por definición de integral impropia ésta no existe □

Las siguientes propiedades de la integral impropia se deducen fácilmente de las propiedades de la integral de Riemann y la de los límites.

Proposición. 2. *Sean* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *o* $a = -\infty$ *o* $b = \infty$, *dos funciones para las que existen sus respectivas integrales impropias sobre el intervalo* (a, b). *Entonces*

a: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *para todo* $c \in (a, b)$.

b: $\int_a^b f + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

c: $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: (Ejercicio) $\square$

Observación. 1. *A diferencia de lo que pasa en la integral de Riemann, **no** es cierto que si una función tiene integral impropia también la tenga el valor absoluto de la función.*

Ejemplo. 3. *Sea* $f(x) = \begin{cases} -1/(2k-1) & si \quad x \in [2k-1, 2k) \\ 1/(2k) & si \quad x \in [2k, 2k+1), \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ $\int \ln x$

Demostración: Es claro que $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} < \infty$. Sin embargo, al tomar valores absolutos

$x\ln x - x$

$$\int_1^\infty |f(x)|dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N |f(x)|dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$ $r > \ln r$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Como la serie armónica $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ es divergente, la integral impropia anterior es divergente $\square$

Ejemplo. 4. *Vamos a calcular la integral* $\int_0^1 \ln x dx$. *Vamos a ver como usar de forma extendida la **Fómula de Integración por Partes**.*

$\int_0^1 \ln x \, dx$

Demostración:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \ln x dx =$$

$\lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \ln x \, dx = \left[x(\ln x - 1)\right]_r^1 =$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$\lim_{r\to 0^+} (x \ln x|_r^1 - \int_r^1 dx =$$

$= \lim_{r\to 0^+} \left(-1-(r(\ln(r)-1))\right)$

escribiremos, dado por hecho que hay límites subyacentes,

$$x \ln x|_0^1 - \int_0^1 dx =$$

$= \lim_{r\to 0^+} -1 - (\quad = -1$

$$0 - 0 - \int_0^1 dx = -1 \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Para calcular integrales impropias, usando la definición de las mismas, primero calculamos una integral de Riemann (calculamos una primitiva y después usamos la Regla de Barrow) y por último calculamos un límite. Ahora bien, no siempre se puede calcular una primitiva de una función. Por ejmplo, la función

$$f(x) = e^{-x^2}$$

no admite una primitiva en términos elementales. Sin embargo la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

es una integral muy importante (en Estadística; ver el artículo de Aplicaciones).

Como en el caso de la Series, tenemos recursos para decidir si una integral impropia existe o no, sin necesidad de calcularla. Para ello tenemos los **criterios de convergencia**. Como en el caso de series, los veremos para funciones positivas. Además **solo** los vamos a enunciar para el extremo derecho del dominio; para la parte izquierda se tiene resultados del todo análogos.

Un criterio teórico y muy general es el siguiente.

Teorema. 1. ***(Criterio de Cauchy.)*** *Sea la integral impropia* $\int_a^b f(t)dt = \lim_{s \to b^-} \int_a^s f(t)dt$.

A): *Si* $b \in \mathbb{R}$, *la integral es convergente si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *de modo que si* $x_1, x_2 \in (b - \delta, b)$ *entonces*

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| < \epsilon.$$

B): *Si* $b = \infty$, *la integral es convergente si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $M > 0$ *de modo que si* $x_1, x_2 > M$ *entonces*

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| < \epsilon.$$

Demostración: Dejamos **B)** como ejercicio.

$\Rightarrow)$ **A)** Sea $l = \lim_{s\to b^-} \int_a^s f(t)dt$. Por definición de límite, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $x \in (b-\delta, b)$ se tiene que $|l - \int_a^x f(t)dt| < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, si $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$, entonces

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| = |\int_{x_1}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x_2} f(t)dt| =$$

$$|l - \int_a^{x_1} f(t)dt - l + \int_a^{x_2} f(t)dt| \leq |l - \int_a^{x_1} f(t)dt| + |\int_a^{x_2} f(t)dt - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\Leftarrow)$ En el otro sentido, sea $(x_n)_n \uparrow b$. Si se cumple la condición,lo que tenemos es que la sucesión $(\int_a^{x_n} f(t)dt)_n$ es de Cauchy y existe

y_n

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{x_n} f(t)dt = l.$$

$\Rightarrow |y_n - y_m| = |\int_a^{x_n} \theta - \int_a^{x_m} \theta| =$

$= |\int_{x_m}^{x_n} \theta| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

Ahora, para todo $\epsilon > 0$ tomemos el $\delta > 0$ de la hipótesis y tomemos $s > x_n \in (b-\delta, b)$ de modo que

$$|l - \int_a^{x_n} f(t)dt| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$|\int_{x_n}^{s} f(t)dt| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

entonces

$$|l - \int_a^{s} f(t)dt| \leq |l - \int_a^{x_n} f(t)dt| + |\int_a^{x_n} f(t)dt - \int_a^{s} f(t)dt| =$$

$$|l - \int_a^{x_n} f(t)dt| + |\int_{x_n}^{s} f(t)dt| \leq \epsilon \qquad \square$$

Definición. 1. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ es absolutamente convergente siempre y cuando la integral impropia*

$$\int_a^b |f(t)|dt$$

es convergente.

Como en el caso de las series, las integrales absolutamente convergentes son a su vez convergentes. Lo que nos indica que los criterios para funciones positivas son doblemente útiles.

Proposición. 1. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ de modo que la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ es absolutamente convergente, entonces integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ es convergente.*

sean $x, y \in (b-\delta, b) \Rightarrow \left|\int_y^x g\right| < \varepsilon/2$

$$\left|\ell - \int_a^x g\right| = \left|\ell - \int_a^{x_n} g + \int_{x_n}^x g\right| \leq$$

$$\leq \left|\ell - \int_a^{x_n} g\right| + \left|\int_{x_n}^x g\right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Teorema. 1. *(**Criterio de Cauchy.**) Sea la integral impropia* $\int_a^b f(t)dt = \lim_{s\to b^-} \int_a^s f(t)dt$.

A): *Si* $b \in \mathbb{R}$, *la integral es convergente si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *de modo que si* $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$ *entonces*

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| < \epsilon.$$

B): *Si* $b = \infty$, *la integral es convergente si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $M > 0$ *de modo que si* $x_1, x_2 > M$ *entonces*

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| < \epsilon.$$

1

Hipótesis: la integral

$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to\infty^-} \int_a^s f(t)\,dt$ converge $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}$: si $x_1, x_2 > M \Rightarrow |\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| < \varepsilon$

$\Rightarrow$) $\exists \lim_{s\to\infty^-} \int_a^s f(t)\,dt \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: si

$\lim_{s\to\infty^-} g(s) - g(a) = g(a) + \lim_{s\to\infty^-} g(s) \iff$

$\iff \exists \lim_{s\to\infty^-} g(s) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$: si $x > M \Rightarrow |g(s)| < \varepsilon$

sustituyendo llegamos a la implicación

$\Leftarrow$) Tomando como hipótesis que

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}$: si $x_1, x_2 > M \Rightarrow |\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt| < \varepsilon$

Demostración: Es una sencilla aplicación del Criterio de Cauchy, ya que la integral del valor absoluto $\int_a^b |f(t)|dt$ lo verifica y

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leq \epsilon,$$

por tanto la integral también o verifica $\square$

Sigamos ahora con unos pocos criterios de convergencia para funciones positivas.

Proposición. 2. ***(Criterio de Comparación.)*** *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$, dos funciones positivas ($f, g \geq 0$) para las que se verifica que*

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in (a, b),$$

entonces

a: *si existe $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ también existe la de la función f y*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

b: *si **no** existe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ tampoco existe la integral de g.*

Demostración: Como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^s f(x)dx \leq \int_a^s g(x)dx \quad \text{para todo} \quad s \in (a, b)$$

y por tanto

$$\lim_{s \to b^-} \int_a^s f(x)dx \leq \lim_{s \to b^-} \int_a^s g(x)dx$$

$\square$

Ejemplo. 1. *¿Converge $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$?*

Demostración: $f(x) = e^{-x^2} = e^{-(-x)^2} = f(-x)$ es una función **par**, por tanto es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

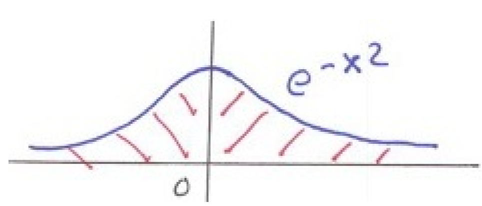


Figura 1. Campana de Gauss.

Como en el caso de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$ (vista en el artículo anterior) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Ahora es fácil convencerse que

$$e^{-x^2} < e^{-x} \quad \text{para todo} \quad x > 1,$$

y así

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}dx < \int_0^1 e^{-x^2} + \int_1^{\infty} e^{-x}dx < \infty.$$

Luego nuestra integral es convergente $\square$

Ejemplo. 2. *Tenemos que determinar si existe* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln x}dx.$

Demostración: El problema lo tenemos en $x = 1$ ya que allí el logaritmo se anula. Si recordamos la gráfica del logaritmo,

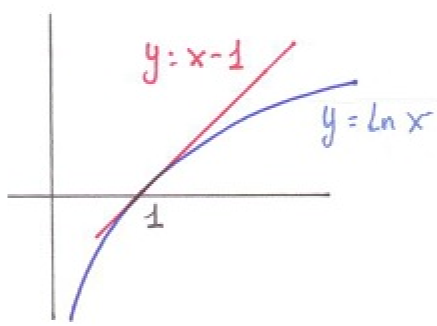


Figura 2. Gráfica del logaritmo.

vemos que la recta tangente a su gráfica por el punto $(1, 0)$ es la recta $y = x - 1$. Como el logaritmo es una función concava tenemos que

$$\ln x < x - 1 \quad \text{para todo} \quad x > 1$$

y por tanto

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{\ln x} \quad \text{para todo} \quad x > 1.$$

Luego para todo $r \in (1, 2]$

$$\int_r^2 \frac{1}{x-1}dx < \int_r^2 \frac{1}{\ln x}dx.$$

Ahora

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{r\to 1^+}\int_r^2 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{r\to 1^+} \ln(x-1)|_r^2 = \lim_{r\to 1^+} \ln 1 - \ln(r-1) = \infty.$$

Luego nuestra integral que sería más grande tampoco converge.

□

Proposición. 3. ***(Criterio de Comparación por Cociente.)*** *Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$ o $b = \infty$, dos funciones positivas ($f, g \geq 0$) para las que se verifica que*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad \textit{con} \quad l = 0, l > 0 \text{ ó } l = \infty.$$

Entonces

A): *para $l > 0$ la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe si y solo si existe la integral $\int_a^b g(x)dx$.*

B): *Para $l = 0$, que la integral $\int_a^b g(x)dx$ exista implica que la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe.*

C): *Para $l = \infty$, que la integral $\int_a^b g(x)dx$* ***no*** *exista implica que tampoco exista la integral $\int_a^b f(x)dx$.*

Demostración: Dejamos **B)** y **C)** como ejercicios.

A) De la definición de límite, si $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, para $\epsilon = \frac{l}{2}$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x \in (b - \delta, b)$, entonces

$$\frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3l}{2};$$

y por tanto

$$\frac{l}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3l}{2} g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in (b - \delta, b).$$

Como las integrales de Riemann $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ y $\int_a^{b-\delta} g(x)dx$ existen, ya solo hace falta aplicar el Criterio de Comparación a las integrales $\int_{b-\delta}^b f(x)dx$ y $\int_{b-\delta}^b g(x)dx$ □

Algunas integrales con las que comparar son las siguientes.

Ejemplos. 1.

- $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} < \infty & si \quad \alpha \in (0, 1) \\ = \infty & si \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Sea $\varepsilon = \ell/2 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$; si $x \in (b-\delta, b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \ell - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon = \frac{\ell}{2} \iff \frac{\ell}{2} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \frac{3\ell}{2} \quad \forall x \in (b-\delta, b)$$

$$\iff \frac{\ell}{2} g(x) \le f(x) \le \frac{3\ell}{2} g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{\ell}{2} g(x) \le \int f(x) \le \int \frac{3\ell}{2} g(x)} \rightarrow \text{no hacer mucho caso}$$

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{\ell}{2} g + \int_a^{b-\delta} f \le \int_a^b f = \int_a^{b-\delta} f + \int_{b-\delta}^{b} f \le$$

$$\le \int_a^{b-\delta} f + \int_{b-\delta}^{b} \frac{3\ell}{2} g$$

↳ criterio de comparación

-
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \begin{cases} = \infty & si \quad \alpha \in (0,1] \\ \\ < \infty & si \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Demostración: Calcular todos estas integrales impropias es un simple ejercicio $\square$

Ejemplo. 3. *Queremos sabe si es convergente la integral* $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

Demostración: Encontrar una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ no parece sencillo. Por otro lado la función dada es continua en todo $\mathbb{R}$, luego nuestra integral impropia se debe a que consideramos una semirecta. Mirando el cociente $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$, vemos que este es parecido a $\frac{1}{x^2+x^{4/3}+1}$. Así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}} = 1.$$

Luego

$$\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}.$$

La segunda integral converge ya que lo hace $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA FUNCIONES NO POSITIVAS.

Como en el caso de las series, existen funciones que en valor absoluto tienen integrales impropias no convergentes; sin embargo la integral impropia de la función existe. Ya hemos visto algún ejemplo y alguno más veremos a continuación. Es por esto que necesitamos **Criterios de Convergencia para Funciones No Positivas**.

Teorema. 1. ***(Criterio de las Series)*** *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$ o bien $b = \infty$. Entonces:*

A): *La integral $\int_a^b f(t)dt$ es convergente si y solo si para toda sucesión* con $x_n \leq b$ *$(x_n) \to_{n\to\infty} b$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$$

es convergente.

B): *Si f es positiva, entonces la integral $\int_a^b f(t)dt$ es convergente si y solo si para toda sucesión creciente $(x_n) \uparrow_{n\to\infty} b$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt < \infty.$$

Demostración: A) Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b)$. F es continua. Por tanto

$$\int_a^b f(t)dt \qquad \text{existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe} \qquad \lim_{x\to b^-} F(x);$$

este límite existe si y solo si para toda sucesión $(x_n) \to_{n\to\infty} b$ existe (y son iguales) el límite

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Ahora, tomando $x_0 = a$,

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt.$$

Así, son equivalentes

- existe $\int_a^b f(t)dt$;
- existe $\lim_{n\to\infty} F(x_n)$;
- la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ es convergente.

B) Es un caso particular del anterior. Ejercicio $\square$

Ejemplo. 1. *La integral* $\int_\pi^\infty |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|dx$ *no es convergente. La función* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *no es absolutamente integrable en* $[\pi,\infty)$*. Después veremos que si es integrable.*

Demostración: La función $f(x) = |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|$ es positiva.

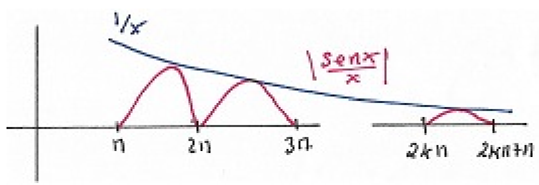


FIGURA 1

Además, como $f''(x) = \frac{1}{x^3}(-x^2\operatorname{sen} x - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x) \le 0$ si $x \in [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ k=1,2,3....., f es concava en tales intervalos (así la gráfica de la función queda por encima de la cuerda).

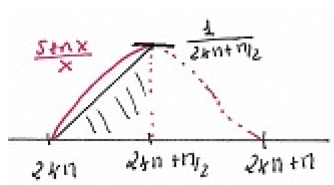


FIGURA 2

Por tanto se tiene que

$$\int_\pi^\infty f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} f(t)dt \ge$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2j\pi}^{2j\pi+\frac{\pi}{2}} f(t)dt \ge \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2j\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}.$$

La última serie es divergente (es comparable a la serie armónica), por lo tanto la integral no converge $\square$

Para dar el siguiente criterio necesitamos un lema previo.

Lema. 1. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$, funciones de modo que f es integrable (Riemann) en $[a, b]$, g positiva y decreciente y tales que fg es integrable (Riemann) en $[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ de modo que*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt$$

Dejamos la prueba para el final del artículo.

Teorema. 2. ***(Criterio de Dirichlet)*** *Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$ o bien $b = \infty$, funciones de modo que:*

- *existe $M > 0$ para el cuál*
$$|\int_a^x f(t)dt| \leq M$$
para todo $x \in [a, b)$;
- *existe $\int_a^x f(t)g(t)dt$ para todo $x \in [a, b)$;*
- *g es una función monótona y $\lim_{t\to b} g(t) = 0$.*

Entonces existe la integral impropia

$$\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Demostración: Vamos a usar el Criterio de Cauchy junto al Lema anterior. En primer lugar, para $x_1, x_2 \in [a, b)$ se tiene que

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| = |\int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt| \leq$$
$$|\int_a^{x_2} f(t)dt| + |\int_a^{x_1} f(t)dt| \leq 2M.$$

Supondremos que g es decreciente y por tanto positiva. En otro caso tomamos $-g$ y probamos que existe la integral impropia de $f(-g)$ y así también la de fg. $\frac{\epsilon}{2M} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: si $x \in (b-\delta, b)$ tomaremos $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$

Dado $\epsilon > 0$ sea existe un x_0 de modo si $x_0 < x < b$, entonces $|g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Por otro lado, para

$$x_0 < x_1 < x_2 < b$$
$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)dt| =$$

aplicando el lema para algún $c \in [x_1, x_2] \subseteq (b-\delta, b)$

$$|g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(t)dt| = |g(x_1|| \int_{x_1}^{c} f(t)dt| \leq \frac{\epsilon}{2M}2M = \epsilon.$$

Ahora el Criterio de Cauchy nos dice que existe la integral impropia $\int_a^b f(t)g(t)dt$

□

$$\left|g(x_1)\int_{x_1}^{c}\vartheta(t)\,dt\right| = |g(x_1)|\left|\int_{x_1}^{a}\vartheta(t)\,dt + \int_{a}^{c}\vartheta(t)\,dt\right| =$$

$$= |g(x_1)|\left|\int_{a}^{c}\vartheta(t)\,dt - \int_{a}^{x_1}\vartheta(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq |g(x_1)|\cdot\left(\int_{a}^{c}\vartheta(t)\,dt + \int_{a}^{x_1}\vartheta(t)\,dt\right) \leq \frac{\varepsilon}{2m}\cdot 2m = \varepsilon$$

$\square$

Ejemplo. 2. *Existe la integral impropia* $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$.

Demostración: Por un lado $\operatorname{sen} x$ es continua y por tanto existe la integral de la función en $[\pi, s]$ para todo $s > \pi$. Además si $s \in [2K\pi, 2(K+1)\pi]$ se sigue que

$$|\int_\pi^s \operatorname{sen} x dx| = |\int_{2K\pi}^s \operatorname{sen} x dx| \leq |\int_{2K\pi}^{2K\pi+\pi} \operatorname{sen} x dx| = |\int_{2\pi}^{3\pi+\pi} \operatorname{sen} x dx|.$$

Además la función $\frac{1}{x}$ es decreciente y $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ahora el Criterio de Dirichlet nos dice que

$$\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

existe $\square$

Teorema. 3. ***(Criterio de Abel)*** *Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$ o bien $b = \infty$, funciones que verifican que*

- *existe la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$;*
- *existe $\int_a^x f(t)g(t)dt$ para todo $x \in [a, b)$;*
- *g es monótona y acotada.*

Entonces existe la integral impropia

$$\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Demostración: Puesto que existe $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$, existe $M > 0$ de modo que

→ continua ya que es integrable

$$F(x) = |\int_a^x f(t)dt| \leq M$$

para todo $x \in [a, b)$.

Por otro lado, por ser g monótona y acotada, existe

$$\lim_{t\to b^-} g(t) = l.$$

Sea $h(t) = g(t) - l$. Es monótona y $\lim_{t\to b^-} h(t) = 0$. Por el Criterio de Dirichlet existe

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)h(t)dt = \lim_{x\to b} \left(\int_a^x f(t)g(t)dt - l \int_a^x f(t)dt \right).$$

Puesto que existe el primer límite y la función f tiene integral impropia se sigue que existe

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \qquad \square$$

Como $\exists \lim_{x\to b} F(x) = l$ Se $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: si $x \in (b-\delta, b)$

$\Rightarrow |F(x) - l| < \varepsilon \rightarrow |F(x)| < l + \varepsilon$

$\hookrightarrow |F(x)| - |l| \leq |F(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow$

Por otro lado $F[a, b-\delta] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ F está acotada

$\hookrightarrow$ verifica la hipótesis 1 de Dirchlet

Por ser monótona y acotada $\exists \lim_{x\to b^-} g(x) = \gamma$

sea $h(x) = g(x) - \gamma \Rightarrow \lim_{x\to b^-} h(x) = 1$

$\hookrightarrow$ verifica la hipótesis c

Por último, $\int_a^x lh = \int_a^x l \cdot g - \int_a^x l \cdot \gamma \Rightarrow \exists \int_a^x lh\,dt$

lo que verifica la última hipótesis

y por tanto, se verifica por el criterio de Dirchlet:

$$\int_a^b lh = \lim_{x\to b^-} \int_a^x l(t)\,h(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \left(\int_a^x l(t)\,g(t)\,dt - \int_a^x l(t)\,\gamma\,dt \right)$$

y como ambas $\exists \Rightarrow \int_a^b lh\,dt$ también existe

Ejemplo

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}\Big|_1^2 = |2-0| = 2$$

$(x-1)^{-1/2}$

$2(x-1)^{1/2} \Rightarrow 2\sqrt{x-1}$

$2 \cdot (x-1)^{1/2}$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot (x-1)^{-1/2} \cdot (1) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int_0^3 \frac{x-2}{x^2-3x+2}\,dx = \int_0^3 \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-1)}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \lim_{s\to 1^+}\int_s^3 \frac{1}{x-1}\,dx + \lim_{r\to 1^-}\int_0^r \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \lim_{s\to 1^+} \ln(x-1)\Big|_s^3 + \lim_{r\to 1^-} \ln(x-1)\Big|_0^r =$$

$$= \lim_{s\to 1^+} \ln(2)-\ln(s-1) + \lim_{s\to 1^-} \ln(r-1)-\ln(-1)$$

Ejemplo 2: Supongamos que $\exists \int_0^\infty f(x)\,dx$ tal que

a) $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow$ ¿$l=0$?

Distinción de casos: $l>0$ ó $l<0$ ó $l=0$

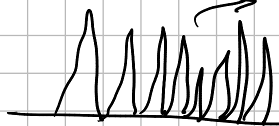
$l>0$

$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}$: si $x\geq m \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ si tomamos $\varepsilon = l/2 \Rightarrow f(x) = l/2$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^m f(x) + \int_m^\infty f(x) \geq \int_0^m f(x)\,dx + \int_m^\infty l/2\,dx = \infty$$

$l<0$ igual $\Rightarrow \boxed{l=0}$

b) ¿Si $\exists \int_0^\infty f \Rightarrow \exists \lim_{x\to\infty} f(x)=0$?



$$\int_0^\infty f(x) = \sum \frac{1}{2}\,1\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

c) ¿Si $\int_0^\infty f(x)\,dx$ y f es uniformemente continua $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=0$?

Supongamos que $\nexists \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \exists d>0$ y $\exists x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ tal que
$f(x_n)>d \Rightarrow$ para $\varepsilon = d/2>0\ \exists \delta$: $\forall x,y$ con $|x-y|<\delta$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)| < d/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall y\in(x_n-\delta, x_n+\delta) \Rightarrow |f(y)| > d/2$

Observación. 1. *El producto de una función integrable Riemann con una función monótona siempre es integrable (ver Apéndice Criterio de Integrabilidad de Lebesgue). Por ello, en los tres últimos resultados prodríamos prencindir de la hipótesis de que exista* $\int_a^x f(t)g(t)dt$ *para todo* $x \in [a, b)$.

Demostración: (del **Lema**) Puesto que f es integrable, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en $[a, b]$. Por tanto F alcanza su mínimo y su máximo en el intervalo $[a, b]$. Sean

$$r \qquad \text{de modo que} \qquad F(r) = m = \min\{F(x) \ : \ x \in [a, b]\}$$

y

$$s \qquad \text{de modo que} \qquad F(s) = M = \max\{F(x) \ : \ x \in [a, b]\}.$$

Vamos a probar que

$$g(a)m \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq g(a)M \qquad\qquad (*).$$

Visto esto, por el Teorema de Bolzano, existe $c \in [a, b]$ de modo que

$$g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Para probar $(*)$ procederemos en tres pasos.

Primero. Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = a\} \in P([a, b])$ una partición del intevalo $[a, b]$. Definimos

$$\rho(P) = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(\,F(x_i) - F(x_{i-1})\,) =$$

$$-g(x_0)F(x_0) + (\,g(x_0) - g(x_1)\,)F(x_1) + (\,g(x_1) - g(x_2)\,)F(x_2) + ...$$

$$... + (\,g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})\,)F(x_{n-1}) + g(x_{n-1})F(x_n).$$

Ahora, como

- $F(x_0) = F(a) = 0$,
- g es positiva, luego $g(x_{n-1}) \geq 0$,
- g es creciente, luego $(\,g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n-1$,
- y $m \leq F(x) \leq M$ para todo $x \in [a, m]$,

se sigue que (sustituyendo $F(x_i)$ por m o M, se cancelan términos)

$$mg(a) \leq \rho(P) \leq Mg(a).$$

Segundo. Si $mg(a) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ o $Mg(a) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, no hay nada más que probar. Supongamos que

$$\text{mín}\{\ |mg(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt|,\ |Mg(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt|\ \} > 0.$$

Vamos a probar que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in P([a,b])$ de modo que

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt - \rho(P)| < \epsilon.$$

Claro, por ser f integrable, f está acotada. Sea $K > 0$ con

$$|f(t)| \leq K \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a,b].$$

Dado $\epsilon > 0$ existe una partición

$$P = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = a\} \in P([a,b]),$$

de modo que

$$x_i - x_{i-1} \leq \frac{\epsilon}{K(\,g(a) - g(b)\,)} \qquad \text{para todo} \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Para esta P tenemos que

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt - \rho(P)| =$$

$$|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)dt - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)(\,g(t) - g(x_{i-1})\,)dt| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\,|(\,g(t) - g(x_{i-1})\,)|dt \leq$$

por ser g decreciente y f acotada

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} K\,(\,g(x_{i-1}) - g(x_i)\,)dt \leq$$

$$\sum_{i=1}^n K \frac{\epsilon}{K(\,g(a) - g(b)\,)}(\,g(x_{i-1}) - g(x_i)\,) = \epsilon.$$

Tercero. Para terminar, y probar $(*)$, no puede ocurrir que

$$mg(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt = \delta > 0$$

o que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt - Mg(a) = \delta > 0,$$

ya que para $\epsilon = \delta/2$ existiría P partición con

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt - \rho(P)| \leq \delta/2,$$

lo cuál no es compatible con

$$mg(a) \leq \rho(P) \leq Mg(a) \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

APLICACIONES.

Integrales Impropias y Series En primer lugar daremos un criterio de convergencia de series que tenemos pendiente desde que las estudiamos.

Teorema. 1. *(**Criterio de la Integral.**) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva ($f \geq 0$), decreciente y con*

$$\int_0^\infty f(x)dx < \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente.

Demostración: Como la función f es decreciente, recordando la definición de integral, tenemos que

$$\sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^N f(x)dx \leq \int_0^\infty f(x)dx < \infty.$$

Así las sumas parciales de la serie, que son crecientes por ser una serie de términos positivos, están acotadas y por tanto la serie converge.

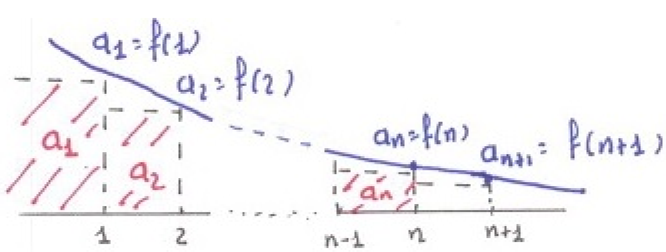


FIGURA 1. Demostración sin palabras.

□

El siguiente resultado nos quedo pendiente al estudiar series.

Ejemplo. 1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$, *con $p > 1$, es convergente.*

$$\frac{1}{e^t} \cdot t^x \cdot \frac{1}{t}$$

$$\int e^u \cdot u^{x-1}$$

tomamos $t = \log_t(u)$

$$u = \left(t^{-1}\right)^{x-1}$$

$$e^{-\log_t(u)}$$

tomamos $u = \ln(n) \Rightarrow du = \frac{1}{n}$

$$\int \frac{t^{x-1}}{e^t}$$

$$\int \frac{1}{u^3} \cdot du =$$

$$-\frac{1}{2} u^{-2} \Rightarrow \cancel{-2} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot u^{-3} = \frac{1}{u^3}$$

$dx = (x+1) \cdot du$

si tomamos $\ln(x+1) = u \Rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \Rightarrow$

$$\int \frac{(2k+2) - x}{\ln(1+x)} = \int$$

Demostración: Sea la función $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = \frac{1}{x^p}$ si $x > 1$. Esta función cumple la hipótesis del Teorema ya que

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = 1 + (\frac{x^{1-p}}{1-p}|_1^\infty = 1 + \frac{1}{p-1}.$$

Luego la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente $\square$

Ejemplo. 2. *Veamos el carácter de la serie* $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Demostración: La función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ es claramente decreciente para todo $x > 1$. Además

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \frac{-1}{\ln x}|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2}$$

Luego ya es fácil convencerse de que la serie es convergente $\square$

Observación. 1. *La idea de la prueba anterior, invirtiendo los papeles de series e integrales, nos permite dar un criterio de convergencia de integrales si conocemos como se comporta la serie* $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

no entra en el examen

Integrales Impropias y Estadística.

Los siguientes conceptos son esenciales en **Estadística.**

Definición. 1. *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *positiva* ($f \geq 0$) *y tal que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ *se llama* ***función de densidad.***

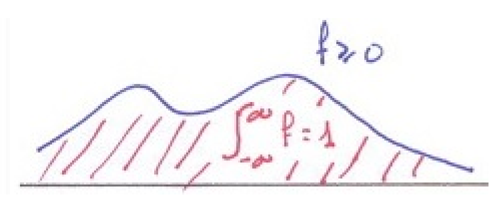


Figura 2. Función de densidad.

Definición. 2. *Dada una función de densidad* f *a la función*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

se le llama función de ***distribución de probabilidad*** *con densidad* f.

$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\cos($

tomamos $1/x = \arccos(u) \Leftrightarrow \frac{1}{\arccos(u)} = x \Leftrightarrow$

$\arccos(u)^{-1} = x \Rightarrow$

$\int \cos(\arccos(u))$ $-1 \cdot (\arccos(u)^{-2} \cdot \quad = \partial x$

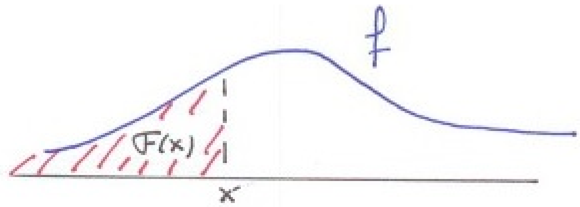


FIGURA 3. Función de distribución.

Observación. 2. *Uno de los problemas más importantes de la* ***Estadística*** *es él de asignar una función de distribución a un fenómeno aleatorio.*

Ante un fenómeno aleatorio, la hora de llegada de un autobús a una parada (no será exacta por el tráfico, el tiempo, el número de pasajeros que suben y bajan...etc), nos gustaría contar con una función de distribución F de modo que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(s)ds$$

nos de la probabilidad de que el fenómeno ocurrar en el intervalo $[a, b]$ (que el autobús llegue en ese rango de tiempo).

Definición. 3. *Dada* $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ *una función de distribución se llama*

- ***media*** *de la distribución a*

$$E(F) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$$

- ***varianza*** *de la distribución a*

$$\tau^2(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(F)]^2 f(x)dx.$$

Entender el significado de estas expresiones integrales requiere de un curso más avanzado de Cálculo Integral que está fuera de nuestras posibilidades.

Ejemplo. 3. *Veamos que* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}$ *es una función de densidad.*

Demostración: Usaremos que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, aunque para probarlo se requiere de un curso más avanzado de Cálculo Integral que está fuera de nuestras posibilidades. Así lo que tenemos que ver es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]} dx = 1$$

Veámoslo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$$

el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\tau}$ con $dt = \frac{1}{\sqrt{2}\tau}$, donde además los límites de integración no cambian, nos da

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt = 1$$

donde hemos utilizado que la función e^{-t^2} es par $\square$

Ejemplo. 4. *Si F es la función de distribución de la función de densidad f del ejemplo anterior, entonces $E(F) = \mu$.*

Demostración: Usando la definición de arriba

$$E(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$$

haciendo el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\tau}$ y así $x = \sqrt{2}\tau t + \mu$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\tau t + \mu}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{2}\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2}dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}dt = \mu$$

ya que la segunda integral vale 1 y la primera vale cero por ser la función te^{-t^2} impar $\square$

Definición. 4. *A la función de distribución*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{s-\mu}{\tau})^2]}ds$$

se le llama ***distribución normal*** *de* ***media*** *$\mu = E(F)$ y* ***varianza*** *$\tau^2 = \tau^2(F)$ (comprobar).*

Observación. 3. *Muchos procesos aleatorios se* ***ajustan*** *(es decir se les asigna) por una distribución de probabilidad* ***normal****. Se calculan μ y τ^2 la media y varianza* ***muestrales*** *(es decir se toman datos y se calcula la media y varianza como enseñan en el cole) del proceso en cuestión y se ajusta su probabilidad por*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{s-\mu}{\tau})^2]}ds.$$

Se puede probar que si un proceso viene dado por una distribución normal de media μ y varianza τ^2, entonces hay al menos un 95 % de probabilidad de que el fenómeno ocurra en el intervalo $[\mu - 3\tau, \mu + 3\tau]$.

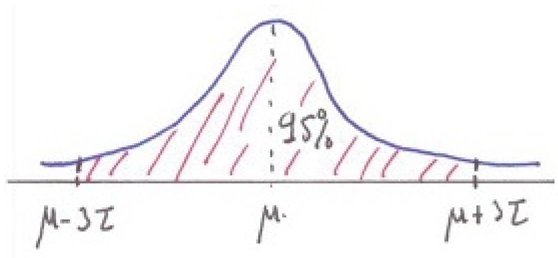


Figura 4. Probabilidad y desviación de la media.

Definición. 5. *Para cada $x > 0$ se define la función* ***Gamma de Euler*** *por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Veamos propiedades de la función Gamma de Euler.

1. Está bien definida. **Demostración:**

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Ahora si $x \geq 1$ se tiene $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \infty$ ya que $e^{-t} t^{x-1}$ es continua.

Si $x \in (0,1)$, entonces como $1/e \leq e^{-t} \leq 1$

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt < \infty.$$

Nos acupamos ahora de la segunda integral. Fijado $x > 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $x - 1 \leq n$ y así

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{1-x} dt \leq \int_1^\infty e^{-t} t^n dt$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$= -e^{-t} t^n |_1^\infty + n \int_1^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = \frac{1}{e} + n \int_1^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$$

aplicando $n - 1$-veces más La Regla de Integración por Partes

$$\frac{1}{e} + n\frac{1}{e} + (n-1)\frac{1}{e} + ... + n! \int_1^\infty e^{-t} dt < \infty$$

□

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. **Demostración:**

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x+1-1} dt$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$= -e^{-t} t^x |_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = 0 + x\Gamma(x)$$

□

3. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1$ De lo que se deduce que

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = ... = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$ (Ejercicio).

Definición. 6. *Se define la función*

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad x > 0 \\ 0, & si \quad 0 < x. \end{cases}$$

La función

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t,\alpha,\beta)dt$$

*es la función de distribución **Gamma** de parámetros α y β.*

Si $\alpha = \frac{n}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$ a F se le llama χ^2 (ji-cuadrado) con n-grados de libertad.

Observación. 4. *La función χ^2 (ji-cuadrado) es muy útil en **inferencia estadística.***

La Transformada de Laplace. Dada una función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la vamos a transformar en otra función con propiedades interesantes.

Definición. 7. *Dada una función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se define su **transformada de Laplace** por la función*

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

con

$$DomLf = \{\, s \in (0,\infty) \ : \ la\ integral\ impropia\ Lf(s)\ exista\}.$$

Ejemplo. 5. *Si $f(x) = x$ vamos a calcular su transformada de Laplace.*

Demostración:

$$Lf(s) = \int_0^\infty xe^{-sx}dx$$

integrando por Partes

$$\frac{-1}{s}xe^{-sx}|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}dx = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}dx$$
$$= \frac{-1}{s^2}e^{-sx}|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

□

La propiedad más importante de la Transformada de Laplace es la siguiente.

Proposición. 1. *Si* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *es una función derivable y* $\lim_{x\to\infty} e^{-sx}f(x) = 0$ *para todo* $s>0$, *entonces*

$$Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$$

Demostración:

$$Lf'(s) = \int_0^\infty f'(x)e^{-sx}dx$$

integrando por partes

$$= f(x)e^{-sx}|_0^\infty - s\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-sx}f(x) - f(0) - s\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = sLf(s) - f(0)$$

□

Observación. 5. *Los problemas de circuitos eléctricos tienen una expresión matemática en términos de* ***ecuaciones diferenciales lineales*** *(lo cuál se ve en cursos superiores). Usando la Transformada de Laplace las ecuaciones diferenciales lineales se transforman en ecuaciones algebraicas lineales que se resuelven como se enseña en un curso de Álgebra Lineal.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

$f(x) = 1 \Rightarrow Lf(s) = \frac{1}{s}$

$f(x) = x \Rightarrow Lf(s) = \frac{1}{s^2}$

$f(x) = x^n \Rightarrow Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

$f(x) = \operatorname{sen}\beta x \Rightarrow Lf(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

$f(x) = \cos\beta x \Rightarrow Lf(s) = \frac{s}{s^2+\beta^2}$

$g(x) = e^{\alpha x}f(x) \Rightarrow Lg(s) = Lf(s-\alpha)$

$f(x) = e^{\alpha x}\cdot\operatorname{sen}\beta x \Rightarrow Lf(s) = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$f(x) = e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x \Rightarrow Lf(s) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES.

Un tratamiento amplio de la integral permite el cálculo de longitudes de curvas, áreas de superficies (planas y alabeadas) y de volúmenes. Con nuestro conocimiento de la Integral de Riemann para funciones de una variable solo somos capaces de calcular áreas plana de recintos limitados por gráficas. Vamos a ir un poco más allá usando solo la integral de Riemann, aunque la justificación de lo que vamos a decir queda fuera de nuestro alcance (apuntaremos algunas ideas en los Apéndices siguientes).

Longitud de un gráfica. Vamos a dar una fórmula de la longitud de una gráfica.

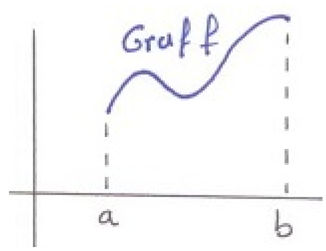


FIGURA 1. ¿Cómo medimos la longitud de una gáfica?.

Teorema. 1. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable con derivada f' continua en $[a,b]$, la longitud de su gráfica viene dada por la fórmula*

$$LongGraff = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

En el Apéndice: Longitud de una Curva Paramétrica, justificaremos de donde sale está fórmula. Es más, daremos una definición de longitud de una curva. Aunque todo ello queda fuera del alcance de este curso.

Ejemplo. 1. *Queremos medir la longitud del arco de parábola $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$.*

$$\int K dx = Kx \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ \text{ para } \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arc\cos x$$

$$\int e^x dx = e^x \qquad \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \qquad \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x \qquad \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = (\sinh)^{-1} x$$

$$\frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}{\cos(t)}$$

$$\cos(t) + \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos(t)} = \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \cdot \tan(t)$$

$$A - B = 0$$
$$A + B = 1$$

$$\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A + Au + B - Bu}{(1-u)(1+u)} =$$

$$\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\cancel{u}}{2} + 1/2 - \cancel{u}/2$$

Demostración: La fórmula anterior nos dice que tenemos que calcular

$$\int_0^1 \sqrt{1+(\,(x^2)'\,)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

Vamos a calcular una primitiva de esta función. Así

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx$$

si hacemos el cambio de variable $y = 2x$, así dy=2dx, tenemos

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{1+y^2}dy$$

el cambio de variable $y = \operatorname{senh} u$, y así $dy = \cosh u$, tenemos

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 u}\cosh u du = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u du$$

usando la relaciones de las funciones hiperbólicas (ver Artículo: Otras Técinas de Cálculo de Primitvas)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cosh 2u}{2} + \frac{1}{2}du = \frac{1}{8}\operatorname{senh} 2u + \frac{1}{4}u$$

como senh2u = 2cosh$u$senh$u$ = $2\sqrt{1+\text{senh}^2 u}$senh$u$ y u = arcsenh$y$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{1+y^2}y + \text{arcsenh}y) = \frac{1}{4}(\sqrt{1+4x^2}2x + \text{arcsenh}2x).$$

Luego tenemos que

$$\int_0^1 \sqrt{1+(\,(x^2)'\,)^2}dx = (\frac{1}{4}(\sqrt{1+4x^2}2x + \text{arcsenh}2x)|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\text{arcsenh}2}{4}$$

□

Área entre gráficas. Sabemos calcular el área por debajo de una gráfica de una función positiva.

Vamos a definir el área entre dos gráficas.

Definición. 1. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$, Definimos el recinto entre las dos gráficas por*

$$A_{f,g} = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in [a,b] \;\; y \; con \;\; f(x) \le y \le g(x) \;\; o \; g(x) \le y \le f(x)\,\}.$$

El siguiente dibujo nos convence de como calcular el área entre dos gráficas.

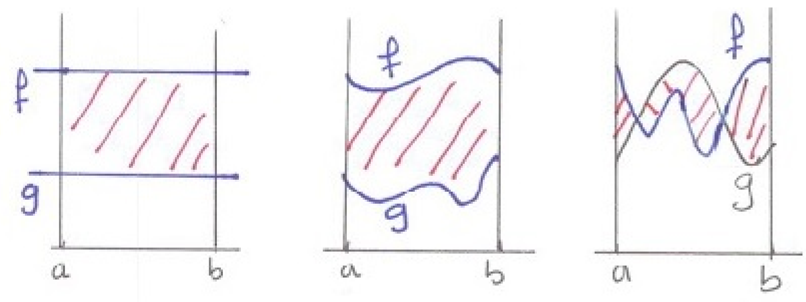


FIGURA 2. Área entre dos gráficas.

Teorema. 2. *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$. El área del recinto entre gráficas $A_{f,g}$ viene dada por*

$$\int_a^b |(f-g)(x)|dx.$$

Ejemplo. 2. *Vamos a calcular el área comprendida entre las gráficas: $y = 2 - x^2$ e $y^3 = x^2$.*

Demostración: Representamos las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$, algo que no es muy complicado (observemos que ambas son funciones pares).

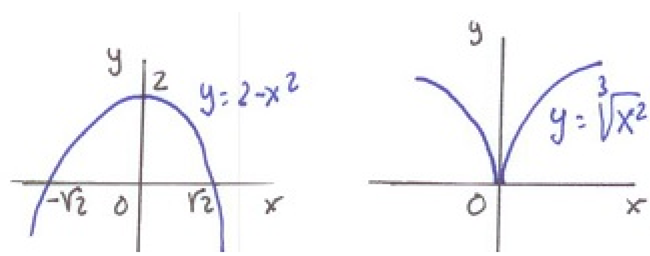


FIGURA 3. Gráficas de las funciones f y g.

A continuación las sobreponemos mirando los puntos donde se cortan, es decir las soluciones de

$$2 - x^2 = \sqrt[3]{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (2-x^2)^3 = x^2$$

y las soluciones son claramente $x = -1$ y $x = 1$. Así tenemos que el área a calcular es

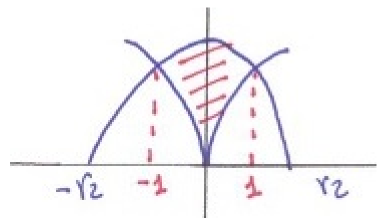


Figura 4. Área entre dos gráficas.

Vemos además que $f(x) = 2 - x^2 \geq \sqrt[3]{x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$. Luego el área entre gráfica es

$$\int_{-1}^{1} |2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}| dx = \int_{-1}^{1} 2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$= (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^{5/3}}{5}|_{-1}^{1} = 2(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}) = 2(2 - \frac{14}{15}) = \frac{2}{15}$$

□

La circunferencia y el círculo. En el Artículo de Representanción de Gráficas pintamos la elipse

$$y = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}.$$

Cuando $a = b$ tenemos una circunferencia de radio a. De la circunferencia de radio 1 conocemos su longitud y el área del círculo.

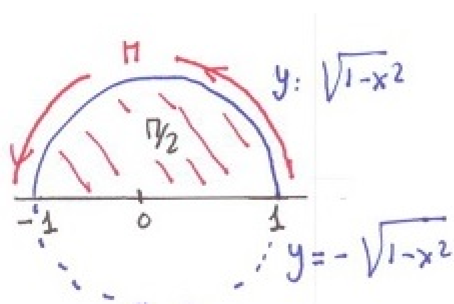


Figura 5. Área del semicírculo y longitud de la semicircunferencia.

¿De donde salen estos números? Como la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en $[-1, 1]$, la siguiente definición tiene sentido.

Definición. 2. *Llamamos número π (pi) al valor de la integral*

$$\pi = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Ejercicio. 1. *¿Cuál es la longitud de la semicircunferencia de radios 1 ?*

Demostración: Tenemos la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Por la fórmula del cálculo de la longitud de una gráficas y como $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, así

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'^2(x)}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Observemos que lo que hemos calculado es una integral impropia dado que hemos integrado una función no acotada. De hecho, hemos abusado de la fórmula de la longitud de una gráfica. La forma correcta hubiese sido calcular

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{r\to -1^+} \int_{r}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{s\to 1^-} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

El resultado es el mismo $\square$

Ejercicio. 2. *¿Cuál es el área de la semicírculo de radios R ?*

Demostración: Tenemos la función $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$. El área por debajo de una gráfica es

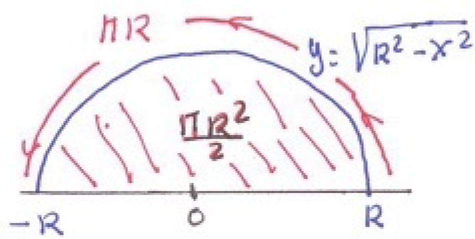


FIGURA 6. Área del semicírculo de radio R.

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx = \int_{-R}^{R} R\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}dx$$

es cambio de variable $y = \frac{x}{R}$, y así $dy = \frac{1}{R}dx$, nos da

$$= R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}dy = \frac{\pi R^2}{2}$$

por la definición de π. Luego nos sale la solución conocida $\square$

Observación. 1. *La definición que hemos dado del número π es coherente con lo que sabemos sobre áreas de círculos y longitudes de circunferencias.*

Ejercicio. 3. *Consideramos la semicircunferncia de radio la unidad $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Fijamos un punto sobre la gráfica $(x, y) = (x, \sqrt{1-x^2})$. Este punto determina un sector circular. Lo que vamos a probar es que el área del sector circular es la mitad que la longitud del arco del sector: θ.*

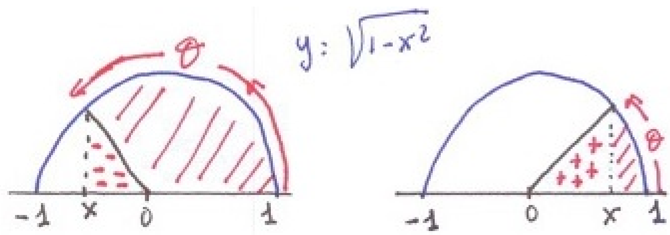


FIGURA 7. Sector circular.

Demostración: Sea $A(x)$ el área del sector circular determinado por los puntos: $(0,0), (1,0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$. Así
$$A(x) = \int_x^1 \sqrt{1-s^2}ds + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$
El segundo sumando es el área de un triángulo que suma si $x > 0$ y que resta en otro caso.

Sea $\theta(x)$ la longitud del arco del sector de arriba. Así aplicando la fórmula de la longitud de una gráfica
$$\theta(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds$$
(según hemos visto al calcular al longitud de la semicircunferencia un poco más arriba).

Lo que queremos probar es que
$$2A(x) = \theta(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [-1, 1].$$

Consideramos la función $H(x) = 2A(x) - \theta(x)$. Es claro que $H(1) = 0$. Y que es continua en $[-1, 1]$ (ejercicio).

Por otra parte, usando el Teorema Fudamental del Cálculo
$$\begin{aligned} H'(x) &= 2A'(x) - \theta'(x) \\ &= -2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$
Como su derivada es nula, H es constante y como $H(0) = 0$, vemos que es una función nula

□

Volumen de un sólido de revolución.

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, podemos hacer girar su gráfica alrededor del eje de abcisas ($y = 0$). Con ello producimos un **sólido de revolución**

$$V_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in [a, b] \text{ y } y^2 + z^2 \leq f(x)^2 \}.$$

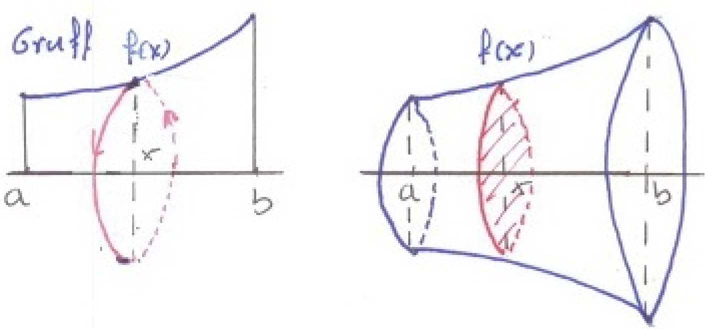


FIGURA 8. Volumen de Revolución.

Tenemos una fórmula para calcular este tipo de volumenes.

Teorema. 3. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces el **volumen** del sólido de revolución que produce la gráfica de f al rotar respecto del eje $y = 0$ es*

$$VolV_f = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Observemos que lo que hacemos es integrar las áreas de las secciones circulares del sólido. Probar este resultado no está a nuestro alcance, pués supone conocer la integral de Riemann para funciones de varias variables y el Teorema de Fubinni (la herramienta que permite calcularlas reduciendo el problema a calcular varias integrales de funciones de una variable).

Ejemplo. 3. *Vamos a calcular el volumen que se produce al girar, alrededor del eje $0X$, el arco de catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ para $a \in [-a, a]$.*

Demostración: Tenemos la función

$$f(x) = a\cosh(\frac{x}{a}) = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} > 0.$$

Claramente es una función continua. Observemos además que

$$f^2(x) = a^2\frac{e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}}}{4}.$$

El volumen del sólido de revolución que genera es, según la fórmula de arriba,

$$\int_{-a}^{a} \pi a^2 \cosh^2(\frac{x}{a})dx$$

usando las fórmulas hiperbólicas (ver el artículo Cálculo de Primitivas: Otras Técnicas)

$$= \pi a^2 \int_{-a}^{a} \frac{1+\cosh(2\frac{x}{a})}{2} dx = \frac{\pi a^2}{2}(x + \frac{a}{2}\operatorname{senh}(2\frac{x}{a})|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}(2a + \frac{a}{2} 2 \operatorname{senh} 2) = \pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2}\operatorname{senh} 2 = \pi a^3(1 + \frac{\operatorname{senh} 2}{2}).$$

El cálculo anterior también lo podiamos haber echo de la forma

$$\int_{-a}^{a} \pi a^2 \cosh^2(\frac{x}{a})dx = \pi a^2 \int_{-a}^{a} \frac{e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}}}{4} dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}[\frac{a}{2}e^{2\frac{x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2\frac{x}{a}}|_{-a}^{a} = \pi a^3(1 + \frac{\operatorname{senh} 2}{2})$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$. Su gráfica como vimos es la semicircunferencia de radio uno y centro el origen de coordenadas.

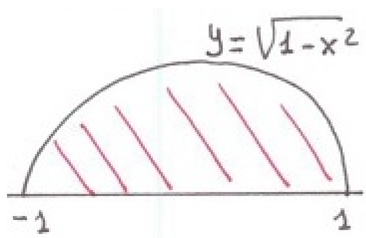


FIGURA 1. Círculo unidad.

Por ello la siguiente definición tiene sentido.

Definición. 1. *Llamamos número π (pi) al valor de la integral*

$$\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

Además la circunferencia de radio uno nos ayuda a dar la definición de ángulo entre vectores; medido este ángulo en **radianes**. Dado un vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ su distancia al origen $(0,0)$ la medimos por

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}>} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Así el vector

$$\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} = (\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}) \in \mathrm{Graf}f,$$

es decir, cae sobre la circunferencia de radio 1. Con esto podemos dar la siguiente definición.

Definición. 2. *Dados dos vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ llamamos ángulo entre ambos a la longitud del arco de circunferencia entre $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ y $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$: θ.*

Por simplicidad no entramos en el problema de la orientación del ángulo.

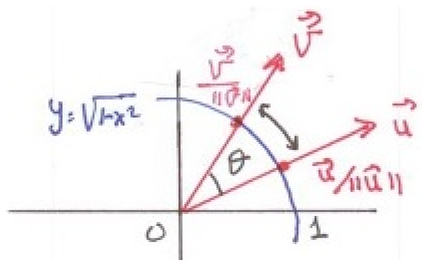


Figura 2. Ángulo entre dos vectores.

Dado un ángulo θ, si llevamos esta longitud desde el punto $(1, 0)$ a lo largo de la gráfica de f llegaremos a un punto $(x, \sqrt{1-x^2})$ de esta gráfica. La forma geométrica de definir el coseno y el seno del ángulo es

$$\cos\theta = x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}.$$

(Ver Apéndice preliminar sobre Trigonometría). Ahora, disponiendo de la integral, vamos a dar una definición más precisa de estas funciones.

En el artículo sobre Longitudes, Áreas y Volúmenes vimos lo siguiente.

Ejercicio. 1. *Consideramos la semicircunferncia de radio la unidad $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Fijamos un punto sobre la gráfica $(x, y) = (x, \sqrt{1-x^2})$. Este punto determina un sector circular. Lo que vamos a probar es que el área del sector circular es la mitad que la longitud del arco del sector: θ.*

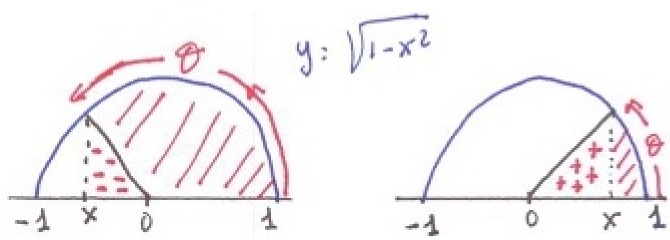


Figura 3. Sector circular.

Demostración: Sea $A(x)$ el área del sector circular determinado por los puntos: $(0, 0), (1, 0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$. Así

$$A(x) = \int_x^1 \sqrt{1-s^2}ds + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

El segundo sumando es el área de un triángulo que suma si $x > 0$ y que resta en otro caso.

Sea $\theta(x)$ la longitud del arco del sector de arriba. Así aplicando la fórmula de la longitud de una gráfica (ver artículo anterior)

$$\theta(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds$$

(según hemos visto al calcular al longitud de la semicircunferencia en el artículo Longitudes, Áreas y Volúmenes).

Lo que queremos probar es que

$$2A(x) = \theta(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [-1,1].$$

Consideramos la función $H(x) = 2A(x) - \theta(x)$. Es claro que $H(1) = 0$. Y que es continua en $[-1,1]$ (ejercicio).

Por otra parte, usando el Teorema Fudamental del Cálculo

$$H'(x) = 2A'(x) - \theta'(x)$$
$$= -2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Como su derivada es nula, H es constante. Además $H(0) = 0$, así vemos que es una función nula

□

Este resultado nos pone en relación el ángulo θ con la x que por geometría sabemos que se corresponde con su coseno.

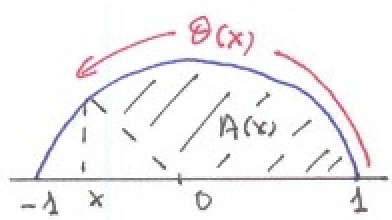


Figura 4. Relación entre ángulo y coordenadas.

Definición. 3. *Se define la función $B(x) = 2A(x)$ para $x \in [-1,1]$*

Observación. 1. *Por el resultado anterior*

$$B(x) = 2A(x) = \theta(x).$$

Luego lo que estamos diciendo es que nuestra función B va a ser la inversa de la función coseno.

Gráfica de B. $B(x) = 2A(x)$ para $x \in [-1, 1]$. Así de los cálculos anteriores:

- $B(x) \geq 0$.
- $B'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ para todo $x \in (-1, 1)$. Luego B es decreciente.
- $B(-1) = 2A(x) = \pi$, por la definición de este número dada al principio del artículo.
- $B(0) = 2A(x) = \frac{\pi}{2}$, por la definición de π y la simetría de la función A (Ejerccio: hacer el cálculo)
- $B(1) = 2A(1) = 0$.
- Calculando su derivada segunda

$$B''(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ < 0, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Luego es convexa en $[-1, 0]$ y concava en el resto. La gráfica de B es

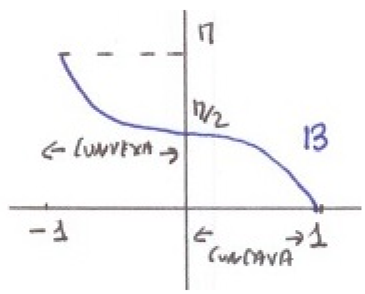


FIGURA 5. Gráfica de B.

B es una función decreciente y por tanto inyectiva. Tiene sentido, por tanto, la siguiente definición.

Definición. 4. **a:** *Si* $\theta \in [0, \pi]$, $\cos\theta$ *es el único* $x \in [-1, 1]$ *con* $B(x) = \theta$. *(Es decir,* $\cos\theta = B^{-1}(\theta)$ *).*

b: *Si* $\theta \in [0, \pi]$, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$.

Observación. 2. *De la definición anterior se tiene que*

- *Para todo* $\theta \in [0, \pi]$ *se tiene que* $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.
- *Como* B *es continua y derivable con* $B'(x) \neq 0$, *se sigue que su inversa* $\cos x$ *es continua y derivable con*

$$\cos'\theta = \frac{1}{B'(\cos\theta)} = -\sqrt{1 - \cos^2\theta} = -\operatorname{sen}\theta,$$

donde hemos usado el Teorema de la Función Inversa y la definición del $\operatorname{sen}\theta$.

- *Por ser* $\cos\theta$ *continua y derivable, lo mismo le ocurre al* $\operatorname{sen}\theta$ *y derivando*
$$\operatorname{sen}'\theta = \frac{1}{2\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta)) = \cos\theta.$$
- *Es fácil ver que en* $\theta = 0$ *y* π *las funciones seno y coseno son continuas y derivables con* $\cos'(0) = \cos'\pi = 0$ *y* $\operatorname{sen}'(0) = 1$ *y* $\operatorname{sen}'\pi = -1$

Lo que acabamos de ver son las propiedades usuales del coseno y del seno (incluidas las reglas de derivación que dejamos pendientes de prueba en su momento).

¿Cómo se definen las funciones seno y coseno en toda la recta?

Definición. 5. **a:** *Si* $\theta \in [\pi, 2\pi]$, *se define* $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$
b: *Si* $\theta = 2\pi k + \theta'$ *con* $k \in \mathbb{Z}$ *y* $\theta' \in [0, 2\pi]$, *se define* $\cos\theta = \cos\theta'$

Así con un poco de trabajo y teniendo en cuenta la gráfica de la función B nos sale que

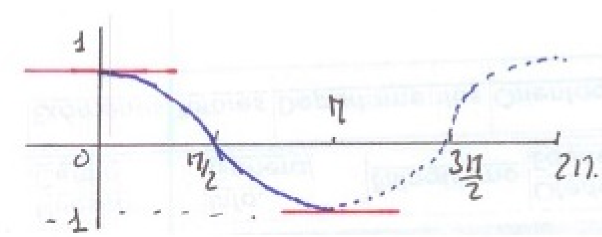


FIGURA 6. Gráfica del coseno.

Definición. 6. **a:** *Si* $\theta \in [\pi, 2\pi]$, *se define* $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(2\pi - \theta)$
b: *Si* $\theta = 2\pi k + \theta'$ *con* $k \in \mathbb{Z}$ *y* $\theta' \in [0, 2\pi]$, *se define* $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$

Así con un poco de trabajo y teniendo en cuenta la gráfica de la función B nos sale que

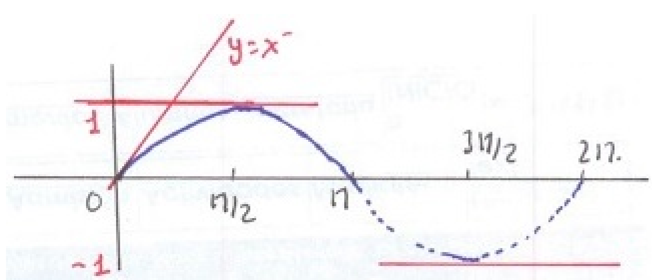


FIGURA 7. Gráfica del seno.

Observación. 3. *Con las definiciones anteriores se extienden las funciones seno y coseno a todo* $\mathbb{R}$. *Además*

- *es evidente que las funciones seno y coseno, así definidas, son funciones* 2π*-periódicas;*
- *con paciencia, se prueba de forma evidente que las funciones seno y cosenos son continuas y derivables con* $\cos' \theta = -\operatorname{sen} \theta$ *y* $\operatorname{sen}' \theta = \cos \theta$;
- *de las definiciones de arriba es evidente que*

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1, \qquad \textit{para todo} \qquad \theta \in \mathbb{R};$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta;$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta.$$

Otra propiedades del seno y del coseno muy utilizadas son las siguientes. En este caso su prueba es un poco más sofisticada.

Teorema. 1. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

y

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

La demostración necesita de dos resultados previos.

Lema. 1. *Si* f *es una función de modo que existe* f'' *en todo* $\mathbb{R}$, $f'' + f = 0$ *y* $f(0) = f'(0) = 0$, *entonce* f *es la función nula.*

Demostración:

$$0 = f'' + f = f' f'' + f' f = \frac{1}{2}(f'^2 + f^2)',$$

por lo tanto la función $f'^2 + f^2$ es constente y como $f(0) = f'(0) = 0$, llegamos a que $f' = f = 0$ $\square$

Lema. 2. *Si* f *es una función de modo que existe* f'' *en todo* $\mathbb{R}$, $f'' + f = 0$, $f(0) = a$ *y* $f'(0) = b$, *entonce*

$$f(x) = b \operatorname{sen} x + a \cos x.$$

En particular, si $f(0) = 0$ *y* $f'(0) = 1$, *entonces* $f(x) = \operatorname{sen} x$.
En particular, si $f(0) = 1$ *y* $f'(0) = 0$, *entonces* $f(x) = \cos x$.

Demostración: Sean

$$g(x) = f(x) - b\operatorname{sen} x - a\cos x$$

así

$$g'(x) = f'(x) - b\cos x + a\operatorname{sen} x$$

y

$$g''(x) = f''(x) + b\operatorname{sen} x + a\cos x.$$

Luego $g + g'' = 0$ con $g(0) = f(0) - a = g'(0) = f'(0) - b = 0$. Así por el Lema anterior $g = 0$, lo que prueba el enunciado $\square$

Demostración: (**del Teorema**).

- Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo y $f(x) = \operatorname{sen}(x+y)$, entonces
$$f'(x) = \cos(x+y)$$
y
$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x+y).$$
Así $f''+f = 0$ con $f(0) = \operatorname{sen} y$ y $f'(0) = \cos y$, luego el Lema anterior nos dice que
$$f(x) = \operatorname{sen} y\cos x + \cos y\operatorname{sen} x.$$
- Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo y $f(x) = \cos(x+y)$, entonces
$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x+y)$$
y
$$f''(x) = -\cos(x+y).$$
Así $f'' + f = 0$ con $f(0) = \cos y$ y $f'(0) = -\operatorname{sen} y$, luego el Lema anterior nos dice que
$$f(x) = \cos y\cos x - \operatorname{sen} y\operatorname{sen} x$$

$\square$

Otras funciones trigonométrica. Definidas el seno y el coseno se pueden definir otras funciones a partie de ellas.

$$\textbf{secante} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

y

$$\textbf{tangente} \qquad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

siempre que $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$$\textbf{cosecante} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

y

$$\textbf{cotangente} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

siempre que $x \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$$\textbf{arcoseno} \qquad \arcsin x = \operatorname{sen}^{-1} x$$

y

$$\textbf{arcocoseno} \qquad \operatorname{arc}\cos x = \cos^{-1} x = B(x)$$

siempre que $x \in [-1, 1]$.

$$\textbf{arcotangente} \qquad \arctan x = \tan^{-1} x$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Las propiedades de estas funciones: derivadas, gráficas...etc se deducen de las del seno y cosenos usandos los resultados que ya conocemos. Por ejemplo, la gráfica de la función tangente es

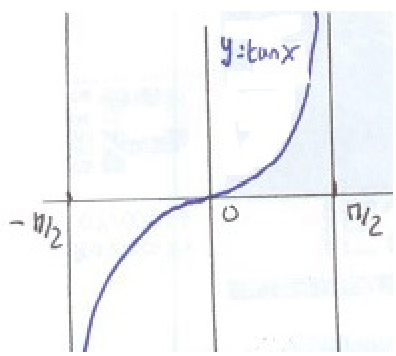


FIGURA 8. Gráfica de la tangente.

o de su inversa la arcotangente

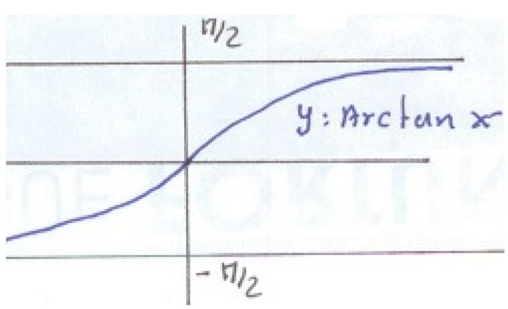


FIGURA 9. Gráfica de la función arcotangente.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LONGITUD DE UNA CURVA PARAMÉTRICA.

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, x_2, ..., x_n), P_2 = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ (pensemos en puntos del espacio, de $\mathbb{R}^3$) sabemos calcular la distancia que los separa

$$||P_1 - P_2|| = \sqrt{< P_1 - P_2, P_1 - P_2 >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

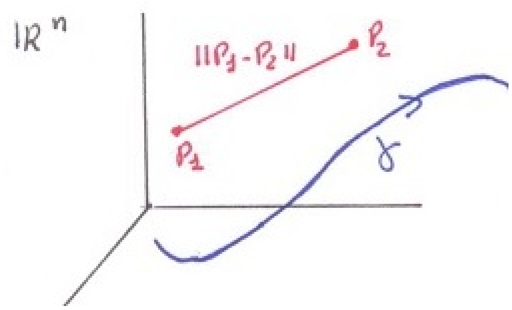


FIGURA 1. Distancia entre dos puntos.

Sabemos medir la **longitud** del segmento que los une. ¿Como medimos la **longitud** de una curva γ? Para dar respuesta a esta pregunta usaremos lo que ya conocemos sobre medir segmentos.

En primer lugar recordemos lo que es una curva paramétrica.

Curvas Paramétricas. Una curva paramétrica es una aplicación

$$\begin{array}{rcccccl} \gamma & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & t & \to & \gamma(t) & = & (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas en $t \in [a,b]$ para $k = 1, 2, .., n$. La imagen de γ es un subconjuto de $\mathbb{R}^n$ que es lo que reconocemos como *curva*.

Volvamos al problema de medir la **longitud de la curva.** Para ello tomamos una partición del intevalo $[a,b]$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{m-1} < t_m = b\}$$

(ver la definición de la Integral de Riemann) y consideramos los puntos sobre ls curva γ :

$$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_{m-1}), \gamma(t_m).$$

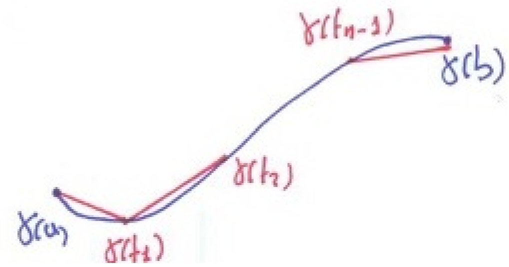


FIGURA 2. Poligonal sobre una curva.

Podemos medir la **poligonal** dada por los puntos anteriores

$$S(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{m} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||.$$

La propiedad **triangular** de la norma ($|| \cdot ||$, equivalente a la del valor absoluto que estudiamos sobre el cuerpo de números $\mathbb{R}$) nos dice que si P' es una partición más fina que P, entonces

$$S(\gamma, P) \leq S(\gamma, P').$$

En vista de lo cuál tenemos la siguiente definición.

Definición. 1. *Se dice que una curva paramétrica γ es **rectificable** (es decir, que tiene **longitud** finita) si existe*

$$\sup\{\, S(\gamma, P) \ : \ P \in P([a, b]) \,\}.$$

*Al número anterior, si existe, lo llamamos **longitud** de la curva γ (Escribimos: longγ).*

Ya tenemos una definición de lontidud de una curva cualquiera, aproximar por una poligonal y pasar al límite. No debemos esperar que todas las curvas tengan una longitud finita.

Ejemplo. 1. *Se considera la curva plana (en $\mathbb{R}^2$) paramétrica*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & & r & \to & \gamma(r) & = & (r\cos\frac{1}{r}, r\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{r}), \qquad si \qquad r \neq 0 \end{array}$$

y $\gamma(0) = (0, 0)$. Veamos que aunque la curva está acotada, su longitud es infinita.

Demostración: Tomando límites, es fácil ver que es una curva continua. Además con un poco de trabajo vemos que es una espiral.

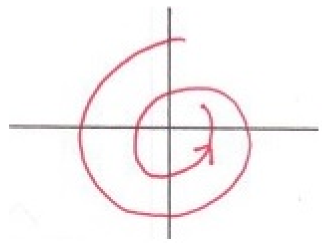


FIGURA 3. Espiral.

Ahora consideramos la partición

$$P_n = \{0 < \frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{(2n-1)\pi} < \frac{1}{(2n-2)\pi} < .... < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1\}$$

y calculamos la longitud de la poligonal asociada (usamos que $\frac{1}{i\pi}\operatorname{sen} i\pi = 0$)

$$S(\gamma, P_n) = \sum_{i=1}^{2n} ||\gamma(\frac{1}{i\pi}) - \gamma(\frac{1}{(i-1)\pi})|| \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j\pi} + \frac{1}{(2j-1)\pi}$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \to_{n\to\infty} \infty,$$

dado que la serie **armónica** no es convergente. Por tanto esta curva no es rectificable, **no** tiene longitud finita. □

La integral nos va ayudar a carlular longitudes, como lo hace para calcular áreas.

Teorema. 1. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica de modo que existe γ' y es continua en todo $[a,b]$, entonces la curva γ es **rectificable** y se verifica que*

$$long\,\gamma = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Para la noción de derivada de una curva ver el Apéndice Derivadas de Funciones de Varias Variables.

Demostración: Veamos el esquema de la demostración de este resultado.

Supondremos que

$$\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \quad \text{para} \quad t \in [a,b];$$

donde cada f_k es una función derivable con derivada continua sobre $[a, b]$ para todo $k = 1, 2, ..., n$. Si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces

$$S(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{m} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$$

usando la definición de norma en $\mathbb{R}^n$ vista arriba

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\, f_k(t_i) - f_k(t_{i-1})\,)^2}$$

usando el Teorema del Valor Medio para cada f_k

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\, f_k'(t_{k,i})(t_i - t_{i-1})\,)^2} \simeq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (f_k'(t_i)^2 (t_i - t_{i-1})}$$

ya que $t_{k,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ y f_k' es continua, así

$$= \sum_{i=1}^{m} ||\gamma'(t_i)||(t_i - t_{i-1}) \to_{m\to\infty} \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

por la caracterización de la integral de Riemann para funciones continuas. $\square$

Observación. 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de una variable con derivada continua sobre $[a, b]$. Entonces*

- *una parametrización de la $Graff$ es $\gamma(x) = (\, x, f(x)\,)$ para $x \in [a, b]$;*
- *así $\gamma'(x) = (1, f'(x))$ y $||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + (f')^2(x)}$;*
- *por tanto $longGraff = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx$, la fórmula que hemos dado para longitudes de gráficas en el artículo Longitudes, Áreas y Volúmenes.*

Parámetro Longitud de Arco . Supongamos que la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tiene derivada continua γ'. Entonces la función

$$L(x) = \int_a^x ||\gamma'(t)||dt$$

mide la longitud de la curva desde su inicio en el punto $\gamma(a)$ hasta el punto $\gamma(x)$ (en particular $L(a) = 0$ y $L(b) = \text{long}\gamma$). Como la función $||\gamma'|| \geq 0$, la función L es estrictamente creciente y por tanto inyectiva, así existe su inversa

$$L^{-1} : [0, \text{long}\gamma] \to [a, b]$$

Si consideramos ahora la curva paramétrica

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\gamma} & : & [0, \text{long}\gamma] & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & x & \to & \overline{\gamma}(s) & = & \gamma \circ L^{-1}(s), \end{array}$$

entonces $\mathrm{Im}\,\overline{\gamma} = \mathrm{Im}\gamma$ (es decir, estamos ante la misma curva de $\mathbb{R}^n$, dada por dos parametrizaciones distintas). Además

$$\int_0^s ||\overline{\gamma}'(t)||dt = s$$

(es decir el parámetro s nos da de entrada la longitud de la curva desde su inicio $\overline{\gamma(0)} = \gamma(a)$ hasta el punto correspondiente $\overline{\gamma}(s)$.

Demostración:

$$\overline{\gamma}\,'(t) = (\gamma \circ L^{-1})'(t)$$

por la Regla de la Cadena

$$= \gamma\,'(L^{-1}(t))(L^{-1})'(t)$$

y por los Teoremas de la Función Inversa y Fundamental del Cálculo

$$= \gamma'(L^{-1}(t))\frac{1}{L'(L^{-1}(t))} = \gamma'(L^{-1}(t))\frac{1}{||\gamma\,'(L^{-1}(t))||}.$$

Luego

$$\int_0^s ||\overline{\gamma}\,'(t)||dt = \int_0^s ||\gamma'(L^{-1}(t))\frac{1}{||\gamma\,'(L^{-1}(t))||}||dt$$
$$= \int_0^s ||\gamma'(L^{-1}(t))||\frac{1}{||\gamma\,'(L^{-1}(t))||}dt = \int_0^s 1ds = s$$

□

En algunos cálculos es conveniente tener una curva dada parametrizada respecto del parámetro longitud de arco.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OTRAS INTEGRALES.

Como pasa con la derivada, las integrales más interesantes se corresponden a funciones de varias variables. Algunas fórmulas tan populares como las **ecuaciones de Maxwell** vienen dadas por el símbolo integral "($\int$)" que nos es familiar, pero con un significado que se nos escapa. Para entenderlo necesitamos de un curso de Cálculo Diferencial e Integral Superior. Esto queda fuera de nuestras pretensiones, pero si queremos indicar como la integral de Riemann para funciones de una variable está detrás de estas otras integrales.

Figura 1. Ecuaciones de Maxwell: forma diferencial e integral.

Integrales de funciones de varias variables. Como dijimos en la Introducción de esta Tema, se puede construir la integral de Riemann para funciones de dos, tres y más variables. Lo cuál permite calcular, entre otras cosas, volúmenes. Pero también las integrales de línea y superficie que veremos más abajo.

Sea una función de varias variables

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

acotada. De forma similar a como hemos construido la integral de Riemann se puede construir la integral de Riemann para funciones de varias variables

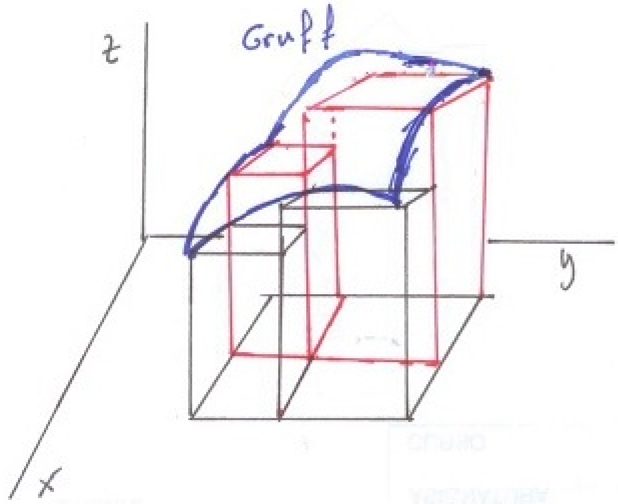


Figura 2. Suma inferior de Riemann para una función de dos variables.

Con un poco de trabajo veríamos que

$$\int_{[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]} f(x_1, .., x_n)dx_1..dx_n$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(.... \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, .., x_n)dx_1 \right) ... \right) dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Es decir, para calcular la integral de una función de n variables tenemos que hacer n integrales de funciones de una variable. Veamos un ejemplo para comprender lo anterior.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función de dos variables* $f(x, y) = x + y$ *para* $(x, y) \in [0, 1] \times [1, 2]$, *entonces tendríamos que*

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} x + ydxdy = \int_1^2 (\int_0^1 x + ydx)dy$$

$$= \int_1^2 (\frac{x^2}{2} + yx|_0^1)dy = \int_1^2 \frac{1}{2} + ydy$$

$$= (\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}|_1^2 = 2$$

Hemos integrado primero sobre la variable "x", tomando la "y" como constante. Después hemos integrado respecto de "y".

Integrales de línea. La ley de Faraday-Henry, la tercera de las leyes de Maxwell, se escribe de forma integral como

$$\oint_L \overrightarrow{E}dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \overrightarrow{B}dS.$$

Independientemente de lo que sean $\overrightarrow{E}$ (campo eléctrico) y $\overrightarrow{B}$ (campo magnético) y el significado físico de la fórmula, vemos que la primera integral es una integral de linea y la segunda es una integral de superficie.

Definición. 1. *Sea $L : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva paramétrica. Y sea $\overrightarrow{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Se define la* ***integral de línea*** *del campo a lo largo de la curva L por*

$$\int_L \overrightarrow{E}dl = \int_a^b \overrightarrow{E}(L(t)) \cdot L'(t)dt.$$

Al multiplicar escalarmente $\overrightarrow{E}(L(t))$ por $L'(t)$ nos queda una función de una variable $\overrightarrow{E}(L(t)) \cdot L'(t)$, de la cuál calculamos su integral de Riemann.

Nos quedamos con la definición formal como conexión entre la integral de línea y la de Riemann (la que conocemos). Un estudio más detallado nos daría el sentido de esta definición.

El símbolo "$\oint$" indica además que la curva es cerrada (el final se une con el inicio).

Integrales de superficie. La definición de la integral de superficie $\int_S \overrightarrow{B}dS$, nos llevaría primero a definir lo que es una superficie paramétrica (algo análogo a las curvas paramétricas, pero para dimensión dos) y a conectar la integral de superficie con una integral de Riemann para funciones de dos variables.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

Cuando tenemos una función racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

es decir un cociente de polinomios, a veces es conveniente simplificar su expresión. Vamos a estudiar algunas cuestiones sobre polinomios que nos ayudarán en esa dirección.

Notación: Sea un polinomio con coeficientes reales

$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

así $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. El conjunto de polinomios con coeficiente reales lo llamaremos $\mathbb{R}[x]$ y así escribiremos $P \in \mathbb{R}[x]$. Llamaremos **grado** del polinomio $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a n si $a_n \neq 0$.

División de polinomios. Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ se pueden dividir de modo que existen $q, r \in \mathbb{R}[x]$ con

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$

de modo que el grado de r, **el resto** , es menor que el de Q (**Teorema del Resto para Polinomios.**)

En el Tema de Números estudiamos el Teorema del Resto para números enteros. De forma similar se hace para polinomios.

Ejemplo. 1. *Vamos a dividir el* $P(x) = 3x^3 - x + 1$ *entre* $Q(x) = x^2 + 1$.

Demostración:

$$\begin{array}{rl} 3x^3 \;\; - x + 1 & \quad |\underline{x^2 + 1} \\ \underline{-3x^3 - 3x} & \quad\;\; 3x \\ -4x + 1 & \end{array}$$

Y así $P(x) = 3xQ(x) - 4x + 1 \quad \square$

Raíces de un polinomio. Dado un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ decimos que que α es una **raíz** del polinomio si $P(\alpha) = 0$.

Teorema. 1. *Si α es una raíz del polinomio P, entonces $x-\alpha$ divide a P, es decir existe q polinomio tal que*

$$P(x) = q(x)(x-\alpha).$$

Demostración: Dividiendo $P(x)$ entre $(x-\alpha)$, tenemos

$$P(x) = q(x)(x-\alpha) + r,$$

con grado de r menor que 1, luego r es un número. Además

$$0 = P(\alpha) = q(\alpha)(\alpha-\alpha) + r.$$

Así $r = 0$. $\square$

Teorema. 2. *(**Fundamental del Álgebra.**) Todo polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado n tienen n raíces que pueden ser reales o complejas y no necesariamente distintas.*

Ejemplo. 2. *Sea $P(x) = (x-3)^2(x^2+1)$. Este es un polinomio de grado 4 (hacer la multiplicación) que tiene por raíces a $\alpha = 3$ dos veces y las raíces complejas $\alpha = i$ y $\alpha = -i$.*

Teorema. 3. *Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio con coeficientes reales.*

- *Si $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces su conjugado $a - bi$ también es una raíz de P.*
- *El polinomio $(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$ tiene coeficientes reales.*
- *Si $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces el polinomio de segundo grado $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ divide a P.*

El Teorema Fundamental del Álgebra es difícil de probar, queda fuera de nuestro alcance. El Teorema anterior se entenderá al estudiar un poco sobre números complejos $\mathbb{C}$.

Descomposición de polinomios. Con los resultados anteriores no es muy difícil probar que todo todo polinomio de coeficientes reales se puede escribir como un producto de potencias de polinomios de grado 1 y 2.

Corolario. 1. *Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ un polinomios de coeficientes reales y grado m. Q se puede escribir como*

$$Q(x) = b_m(x-\alpha_1)^{r_1} \ldots . (x-\alpha_i)^{r_i}(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1} \ldots . (x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j}$$

donde $\alpha_1, .., \alpha_i$ *son las raíces reales de* Q *y* $a_1 \pm b_1 i, ..., a_j \pm b_j i$ *las complejas. Además*

$$r_1 + r_2 + ... + r_i + 2(s_1 + ... + s_j) = m.$$

Descomposición en Fracciones Simples.

Dado un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde el grado de P es menor que el de Q, se puede escribir este cociente como suma de fracciones de polinomios más sencillos. Esto es lo que nos dice el siguiente Teorema.

Teorema. 4. *Dados dos polinomios* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ *con grado de* P *menor que el de* Q *y donde tenemos la descomposición*

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} ....(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1} ....(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{s_j},$$

entonces se pueden encontrar números reales $c_{*,*}, d_{*,*}$ *y* $k_{*,*}$ *tales que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = [\frac{c_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \frac{c_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{c_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}] + ...$$
$$.... + [\frac{c_{i,1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{c_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + ... + \frac{c_{i,r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}]$$
$$+[\frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2} + ... + \frac{d_{1,s_1}x + k_{1,s_1}}{(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1}}] + ...$$
$$.... + [\frac{d_{j,1}x + k_{j,1}}{x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2} + ... + \frac{d_{j,s_j}x + k_{j,s_j}}{(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{s_j}}].$$

Ejemplo. 3. *Sea la función racional*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1}.$$

¿Como se descompone en fracciones simples?

Demostración: Lo primero que tenemos que hacer es descomponer el denominador. Esto **no siempre es posible.** En este caso es fácil ver que $\alpha = 1$ es una raíz, que es doble y dividiendo el polinomio por $(x-1)^2$ se ve que

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2+1)^2(x-1)^2.$$

Ahora, el Teorema anterior nos dice que

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)^2} = \frac{c_{1,1}}{x-1} + \frac{c_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2+1} + \frac{d_{1,2}x + k_{1,2}}{(x^2+1)^2}.$$

¿Como se calculan de forma efectiva los coeficientes de arriba? La de arriba es una ecuación. Operamos la parte de la derecha de la ecuación hasta que nos quede una única fracción e igualamos numeradores. Nos tendrá que quedar un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas (las que tenemos) y lo resolvemos. De hecho lo que dice el Teorema de arriba es que este sistema tiene solución única. □

Aplicaciones de la Descomposición en Fracciones Simples Es una técnica muy usual que se aplica con frecuencia. Veamos algunos ejemplos.

- En el Tema de Series empleamos este método con las series Telescópicas.
- Se usa para calcular primitivas de funciones racionales.
- La **Transformada de Laplace** es una herramienta matemática que se usa para resolver algunas **Ecuaciones Diferenciales**. En particular las que describen algunos circuítos eléctricos. Es por tanto una herramienta útil en **Teoría de la Señal.** La Transformada de Laplace se estudia en cursos superiores. Allí para calcular transformadas Inversas se usa el método de Descomposición en Fracciones Simples.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

Problema: $g, f : [-\infty, 7) \to [0, \infty)$ continuas

con $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ¿ $\int_{-\infty}^{7} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{7} g(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{7} f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{7} f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{N}^{7} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{N} f(x)\,dx =$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \iff \forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}:$ si $x > N \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$

$\iff f(x) > M\, g(x)$

$$= \int_{N}^{7} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{r}^{N} f(x)\,dx \geq \int_{N}^{7} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{r}^{N} M g(x)$$

$$= \int_{N}^{7} f(x)\,dx + M \cdot \lim_{r\to\infty} \int_{r}^{N} g(x)\,dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Esto nos dice que:

si $\exists \int_{-\infty}^{7} f \Rightarrow \exists \int_{-\infty}^{7} g$ ó con

si $\nexists \int_{-\infty}^{7} g \Rightarrow \nexists \int_{-\infty}^{7} f$

calcular:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$ sabiendo que f es uniformemente continua,

y $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 0 = \frac{f(x)}{\frac{1+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}}$

$$\int_0^{N} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_N^{r} f(x)\,dx \leq$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} = 2\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\infty} = 2$$

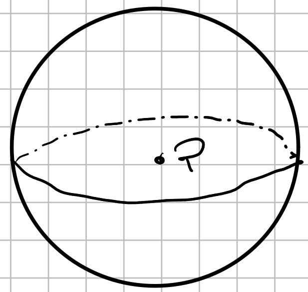
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :$ si $x > n_0$: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\frac{1+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}} < \varepsilon \iff$

$\iff f(x) < \varepsilon \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$ y si tomamos $\varepsilon = 1 \wedge n_0 = N \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < \frac{1+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$

$$\leq \int_0^{N} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_0^{r} \frac{1+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} < \infty$$ por tanto, existe

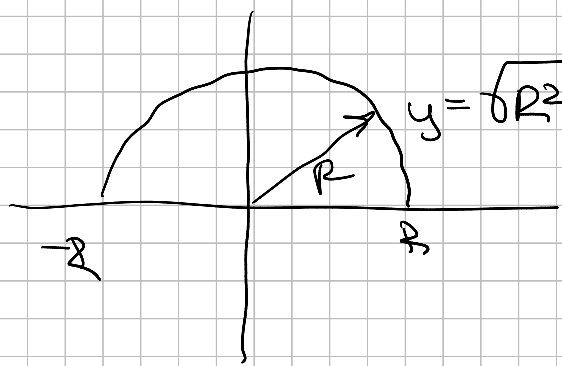
volumen de la esfera de radio r



$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|x,y,z - P\| \le R\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-p_1)^2+(y-p_2)^2+(z-p_3)^2} \le r$$

Si hacemos un corte a la esfera obtenemos una circunferencia



$(x, \sqrt{R^2-x^2}, 0) \Rightarrow$ aplicando $y\ P=(0,0,0)$ obtenemos que:

$\cancel{x^2} + R^2 \cancel{-x^2} + 0 = R^2$

$\Rightarrow V$ es el volumen de revolución que se consigue al girar $(x, \sqrt{R^2-x^2}, 0)$ respecto del eje $y=0$ (eje de abscisas)

$$V = \int_{-R}^{R} \pi \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 = \int_{-R}^{R} \pi \cdot (R^2-x^2) = \pi \int_{-R}^{R} R^2-x^2$$

$$= \pi \left| R^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-R}^{R}$$

$$\pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right) = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) =$$

$$= \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \pi R^3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \pi R^3 \left(\frac{6}{3} - \frac{2}{3} \right) =$$

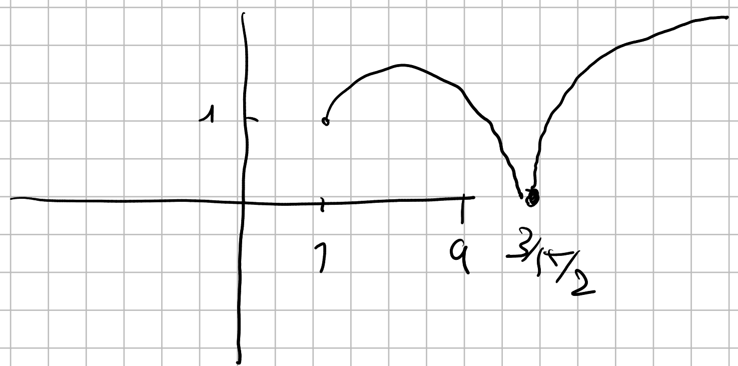
$$= \boxed{\pi R^3 \, 4/3}$$

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t^2+1, \ y = 1+\text{sen}(t); t \geq 0 \}$

$dx = 2t\,dt$

la función estará en el 2° cuadrante

$9 = t^2+1 ; \ t = 2\sqrt{2}$



$-1 = \text{sen}(t)$

$u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int_0^{3\pi/2} y\,dx = \int_0^{3\pi/2} 1+\text{sen}(t) \cdot 2t \cdot dt =$$

$$= \int_0^{3\pi/2} 2t + 2t\cdot\text{sen}(t)\,dt = \int_0^{3\pi/2} 2t + \int_0^{3\pi/2} 2t\cdot\text{sen}(t)\,dt =$$

$u = 2t \Rightarrow du = 2$ $\quad = I + 2t\cdot(-\cos(t)) + \int_0^{3\pi/2} +\cos(t)\cdot 2 =$

$dv = \text{sen}(t) \Rightarrow v = -\cos(t)$

$$= \int_0^{3\pi/2} 2t\,dt + 2t\cdot(-\cos(t)) + 2\int_0^{3\pi/2} \cos(t)\,dt =$$

$$= t^2 + 2t\cdot(-\cos(t)) + 2\cdot\text{sen}(t) \Big|_0^{3\pi/2} =$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \cancel{2}\cdot\frac{3\pi}{\cancel{2}}\cdot\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) + 2\cdot\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) -$$

$$-\left(-\cos(0) + 2\cdot\text{sen}(0)\right) = \frac{3\pi^2}{2} + 3\pi - 2 - (-1) =$$

$$= \frac{3\pi^2}{2} + 3\pi - 2 + 1 = \boxed{\frac{3\pi^2}{2} + 3\pi - 1}$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

POLINOMIOS DE TAYLOR. DEFINICIÓN.

Vamos a considerar una función polinómica

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Observemos que

$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & a_0 \\ P'(0) & = & a_1 \\ P''(0) & = & 2a_2 \\ \vdots & & \\ P^{k)}(0) & = & k!a_k \\ \vdots & & \\ P^{n)}(0) & = & n!a_n. \end{array}$$

Ahora despejando los coeficientes del polinomio, éste lo podemos escribir como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{k)}(0)}{k!} x^k,$$

donde $P^{0)}(0) = P(0)$ y $0! = 1$.

Si tenemos un polinomio P de grado n cuyas potencias están dadas sobre $(x-a)$, es decir

$$P(x) = a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + ... + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0,$$

de forma análoga a lo de arriba, podemos escribir

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Observación. 1. *Existe una relación entre los coeficientes de un polinomio y las derivadas sucesivas del mismo. ¿Algo parecido ocurre con otras funciones?*

De entrada damos la siguiente definición.

Definición. 1. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función al menos n-veces derivable en un punto $a\in \mathrm{Dom}f$. Se llama* ***polinomio de Taylor*** *de la función f de grado n y centrado en el punto a al polinomio*

$$P_{n,a}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Ahora nos podemos preguntar que relación hay entre una función f y sus polinomios de Taylor (que varían según el grado n).

- Para $n=1$, el polinomio de Taylor de grado 1 es

$$P_{1,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a);\text{verifica que}\ \begin{array}{rcl}P_{1,a}(a)&=&f(a)\\ P'_{1,a}(a)&=&f'(a)\end{array}$$

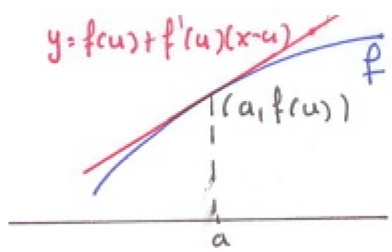


FIGURA 1. Polinomio de Taylor de grado uno.

- $n=2$, el polinomio de Taylor de grado 2 es

$$P_{2,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2;\text{verifica que}\ \begin{array}{rcl}P_{2,a}(a)&=&f(a)\\ P'_{2,a}(a)&=&f'(a)\\ P''_{2,a}(a)&=&f''(a)\end{array}$$

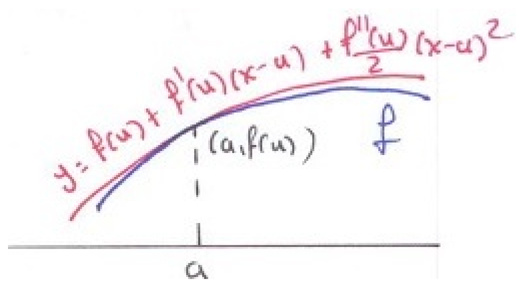


FIGURA 2. Polinomio de Taylor de grado dos.

El polinomio de grado uno $P_{1,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ no es más que la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(a,f(a))$. Como vimos, ésta era una aproximación de la función cerca del punto $a\in\mathrm{Dom}f$.

El polinomio de grado dos $P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$, una parábola, parece una mejor aproximación de f cerca de a, ya que en este caso coinciden en el punto a hasta la segunda derivada. En general tenemos el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Sea una función $f : (a-\epsilon, a+\epsilon) \to \mathbb{R}$ derivable n-veces en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ con $f^{n)}$continua. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Demostración: Si al límite anterior le aplicamos n-veces la Regla de L'Hôpital llegamos a que

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{n)}(x) - P_{n,a}^{n)}(x)}{n!} = 0$$

$\square$

Observación. 2. *Se puede probar que si $P(x)$ es un polinomio de grado n de modo que para todo $k \leq n$ se verifica que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = 0,$$

entonces necesriamente $P(x) = P_{n,a}(x)$. Para ver la demostración ver el apéndice siguiente.

El resultado anterior nos permite hacer una prueba sobre máximos y mínimos relativos que dejamos pendiente desde el Tema de Derivadas.

Corolario. 1. *Sea $a \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset Domf$ de modo que existen f' y f'' en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ y $f'(a) = 0$.*

- **a:** *Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f*
- **b:** *Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f*

Demostración: **b)** Ejercicio.

a) Sabemos por el Teorema anterior que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Ahora

$$\frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} - \frac{f''(a)}{2} \to_{x\to a} = 0$$

Luego se tiene que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2} > 0.$$

Como $(x-a)^2$ es positivo, necesariamente $f(x) - f(a) > 0$ en un entorno de a. Luego por definición de mínimo local, a lo es $\square$

Este resultado admite una versión más general. Pensemos en funciones como $f(x) = x^6$ y $g(x) = x^5$ en $a = 0$.

Teorema. 2. *Sea $a \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset Domf$ de modo que existen f', f'',.....$f^{n)}$ en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Además $f'(a) = f'(a) = ...f^{n-1)}(a) = 0$ y $f^{n)}(a) \neq 0$.*

a: *Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f.*
b: *Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f.*
c: *Si n es impar, entonces f no tiene un mínimo ni un máximo local en a.*

Demostración: La prueba de **a)** y **b)** es como la del Corolario.
c) Por el Teorema

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{n)}(a)}{n!} \right]$$

Ahora si n es impar y supongamos que $f^{n)}(a) > 0$ (el caso $f^{n)}(a) < 0$ se razona de forma análoga), entonces

- si $x > a$, $(x-a)^n > 0$ y así $f(x) - f(a) > 0$, cerca de a;
- si $x < a$, $(x-a)^n < 0$ y así $f(x) - f(a) < 0$, cerca de a.

Luego a no puede ser un mínimo o máximo local $\square$

Vamos a poner algunos ejemplos de cálculo de polinomios de Taylor.

Ejemplo. 1. *Vamos a calcular los polinomios de Taylor de las siguientes funciones centrados en los puntos a que se indican.*

1. $f(x) = e^x$, *en* $a = 0$.
2. $f(x) = e^x$, *en* $a = 1$.
3. $f(x) = \cos x$, *en* $a = 0$.
4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, *en* $a = 0$.
5. $f(x) = \ln x$, *en* $a = 1$.

Demostración:

1. Para todo k se tiene que $(e^x)^{k)}_{|x=0} = e^0 = 1$, así

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Como en el caso anterior, $(e^x)^{k)}_{|x=1} = e^1 = e$, así
$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e(x-1)^k}{k!}.$$
3. Si $f(x) = \cos x$, se tiene que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, y $f^4(x) = \cos x$; volvemos al principio. Así $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ y $f'''(0) = 0$ y se vuelve a repetir esta secuencia. Por lo tanto
$$P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$
(ejercicio)
4. De forma muy parecida al caso del coseno, se ve el caso $f(x) = \operatorname{sen} x$,
$$P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
(ejercicio).
5. Para $f(x) = \ln x$, tenemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{-2}{x^3}$, $f^4(x) = \frac{6}{x^4}$,...etc Viendo estas derivadas si suponemos que $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, derivando tenemos que
$$f^{k+1}(x) = \frac{-kx^{k-1}(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$
Luego por inducción hemos probado que
$$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \text{y por tanto} \quad f^{k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$
Ahora el polinomio de Taylor buscado es
$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

□

¿Para que nos pueden servir estos polinomios de Taylor? Los polinomios son fáciles de evaluar, solo aparecen sumas y productos. Hay funciones más difíciles de evaluar, pero se puede aproximar por su polinomio de Taylor.

Ejemplo. 2. *Queremos evaluar $f(x) = \sqrt{1+x}$ cerca de cero.*

Demostración: Para $x = 0,1$ tenemos $f(0,1) = \sqrt{1,1}$. ¿Quién se acuerda de como se hace una raíz cuadrada? Podemos hacer otra cosa.
$$\begin{array}{rcl} f(x) = \sqrt{1+x} & \text{y por tanto} & f(0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & \text{y por tanto} & f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)}\frac{1}{\sqrt{1+x}} & \text{y por tanto} & f''(0) = \frac{-1}{4}. \end{array}$$

El polinomio de Taylor de orden dos es por tanto

$$P_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Ahora el polinomio de Taylor aproxima la función

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \simeq \sqrt{1+x} \quad \text{si} \quad x \simeq 0.$$

Así

$$1 + \frac{1,1}{2} - \frac{(1,1)^2}{8} \simeq \sqrt{1,1}$$

□

Quizas en este caso es mejor recordar la regla del cálculo para raíces cuadradas. ¿Y si queremos calcular $\operatorname{sen} 1$ o $\ln 2$?

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LA MEJOR APROXIMACIÓN POLINÓMICA.

Lo que vamos a ver es que la mejor aproximación polinómica a una función f por un punto es la que dan sus polinómios de Taylor.

Definición. 1. *Dos funciones f y g se dicen* ***iguales hasta el orden n*** *en un punto a del dominio común si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Observemos que si $0 \leq i \leq n$ y $|x-a| < 1$, entonces

$$|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^i}| \leq |\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}|$$

y así para dos funciones f y g iguales hasta el orden n

$$0 = \lim_{x\to a} |\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}| = \lim_{x\to a} |\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^i}|.$$

Con la Definición anterior, ya podemos decir que una función f y su polonimio de Taylor de orden $P_{n,a}$ son iguales hasta el orden n en a.

Teorema. 1. *Sean P y Q dos polinomios en potencias de $(x-a)$ de grado, ambos, menor o igual a n. Supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a. Entonces son iguales, $P = Q$.*

Demostración: Sea $R(x) = P(x) - Q(x)$, que será un polinomio de orden menor o igual a n. Así

$$R(x) = b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x,y)}{(x-a)^n} = 0.$$

Por la observación anterior,

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{R(x,y)}{(x-a)^{0)}} = b_0,$$

luego $b_0 = 0$. Ahora
$$0 = \lim_{x \to a} \frac{R(x, y)}{(x - a)} = b_1,$$
luego $b_1 = 0$. Seguimos así y vemos que $R = 0$ que es lo que queremos probar
$\square$

Corolario. 1. *Sea $f : (a - \delta, a + \delta)$ una función n veces derivable y con $f^{n)}$ continua. Sea P un polinomio en potencias de $(x - a)$ de orden menor o igual que n de modo que sea igual a f hasta el orden n en a. Entonces*
$$P(x) = P_{n,a}(x)$$

Demostración: Sea $P_{n,a}$ el polinomio de Taylor de orden n centrado en a de f. Tenemos que
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{P(x) - f(x) + f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$
Como P y P_n, a son iguales hasta el orden n el Teorema nos dice que son iguales $\square$

Estos resultados nos permiten dar otra definicón del Polinomio de Taylor. $P_{n,a}$ es el único polinomio centrado en a de orden n igual a f hasta el orden n en el punto a.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA DE TAYLOR.

Al tomar el valor del polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ en lugar del valor de la función $f(x)$ cometemos un error. En lo que sigue vamos a determinar tal error.

Definición. 1. *Sea f una función para la que existe su polinomio de Taylor de grado n centrado en a, $P_{n,a}(x)$. Se define el **resto** de orden n en a como*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x) =$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - ... - \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Observación. 1. *El error que se comete al tomar $P_{n,a}(x)$ en lugar de $f(x)$ es precisamente*

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|.$$

El Teorema siguiente lo que nos da es una caracterización de este error.

Teorema. 1. ***(de Taylor)****. Sea $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ una función $n+1$-veces derivable en el intervalo $[a,x]$.*

a): *Fórmula del Resto de Cauchy:*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a),$$

para algún $t \in (a,x)$.

b): *Fórmula del Resto de Lagrange:*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \textit{para algún} \quad t \in (a,x).$$

c): *Fórmula del Resto Integral:* *si además $f^{n+1)}$ es integrable en $[a,x]$,*

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Un resultado análogo se puede probar en el intervalo $[x, a]$.

Demostración: Como existen las derivadas de f en $[a, x]$, podemos escribir para cada $t \in (a, b)$

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + ... + \frac{f^{n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x) \qquad (*)$$

Consideramos las funciones:

$$s(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(t)}{k!}(x-t)^k = R_{n,t}(x)$$

y

$$g(t) = (x-t)^{n+1}.$$

Estas funciones son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x), en particular

$$s'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

poniendo $j = k-1$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

$$= -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Y

$$g'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Además $s(x) = g(x) = 0$ y $s(a) = R_{n,a}(x)$ y $g(a) = (x-a)^{n+1}$.

a) Ahora, aplicando el Teorema del Valor Medio a la función s sobre $[a, x]$, existe $t \in [a, b]$ de modo que

$$\frac{s(x) - s(a)}{x - a} = s'(t) = -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Así

$$-s(a) = -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$$

y por tanto

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

b) Si aplicamos a s y g el Teorema del Valor Medio de Cauchy, existe $t \in (a, x)$ de modo que

$$\frac{s(x) - s(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{s'(t)}{g'(t)} = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

y despejando $s(a)$

$$s(a) = R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

c) Esta parte es una simple aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo

$$s(x)-s(a)=\int_a^x s'(t)dt$$

y sustituyendo

$$-s(a)=-R_{n,a}(x)=-\int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

$\square$

Observación. 2. $f(x)=P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$. *Si*

$$R_{n,a}(x)\to_{n\to\infty} 0,$$

entonces

$$P_{n,a}(x)\to_{n\to\infty} f(x).$$

Lo cuál nos daría una mejor aproximación de $f(x)$ *al aumentar el grado del polinomio de Taylor.*

Ejemplo. 1. *Vamos a evaluar el error máximo que cometemos al tomar* $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ *en lugar de* $\sqrt{1+x}$ *para* $x\in[-0,2\,,0,2]$.

Demostración: El error que cometemos es

$$|\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8})|=|f(x)-P_{2,0}(x)|=|R_{n,0}(x)|$$

aplicando la fórmula integral del resto

$$=|\int_0^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2dt|$$

como $(\sqrt{1+x})'''=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

$$\leq \int_0^x |\frac{3}{8}\frac{(1+x)^{-\frac{5}{2}}}{2}||(x-t)|^2dt$$

como $0,8\leq 1+x$ y $|x-t|<0,2$ para todo $x\in[-0,2\,,\,0,2]$

$$\leq 0,2\times\frac{3}{16}\frac{1}{(0,8)^{\frac{5}{2}}}(0,2)^2=\frac{2^3}{10^3}\frac{3}{2^4}\frac{10^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{15}{2}}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{2^{\frac{17}{2}}}\leq\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}.$$

Luego al tomar $P_{2,0}(x)$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ cometemos un error menor que 4 milésimas ($\frac{1}{256}<\frac{4}{1000}$) siempre que $x\in[-0,2\,,\,0,2]$ $\square$

Ejemplo. 2. *Vamos a explicar la siguiente desigualdad*

$$|\operatorname{sen}(a+h)-(\operatorname{sen}a+h\cos a)|\leq\frac{1}{2}h^2.$$

Demostración: Consideramos $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$P_{1,a}(x) = \operatorname{sen} a + \cos a(x - a).$$

Así

$$|\operatorname{sen}(a+h) - (\operatorname{sen} a + h\cos a)| = |f(a+h) - P_{1,a}(a+h| = |R_{1,a}(a+h)|$$

tomando la fórmula integral del resto

$$= |\int_a^{a+h} \frac{\operatorname{sen}''(t)}{1}(a+h-t)dt| \leq \int_a^{a+h} |\frac{\operatorname{sen}''(t)}{1}||(a+h-t)|dt$$

como la derivada segunda del seno es otro seno y ésta es una función acotada

$$\leq \int_a^{a+h} |(a+h-t)|dt = -\frac{|(a+h-t)|^2}{2}|_a^{a+h} = \frac{h^2}{2}$$

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SERIES DE POTENCIAS.

Las series de Taylor son un caso particular de **Series de Potencias**.

Definición. 1. *Dada una sucesión* $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *y un número real* $a \in \mathbb{R}$, *se llama* ***serie de potencias*** *centrada en "a" a la expresión*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

La serie de Taylor de una función f es una serie de potencias (y diceversa, pero eso lo vemos después) donde $a_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!}$. Por otro lado, todo serie de potencias al menos converge para $x = a$.

Una serie de potencia la podemos ver como una función

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = f(x).$$

Visto así nos interesa el dominio de esta función, es decir para que valores de x converge la serie.

Ejemplos. 1.
- *El dominio de* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *es todo* $\mathbb{R}$.
- *El dominio de* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ *es* $[-1,1]$ *y allí coincide con la* $\arctan x$ *como vimos en un artículo anterior.*
- *El dominio de* $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ *solo es* $x = 0$.

En general se tiene el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Sea una serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = f(x),$$

de modo que $y \in Domf$, *y sea un real positivo* $0 < r < |y-a|$, *entonces*

- $[a-r, a+r] \subset Domf$, *es decir la serie de potencias converge para todo* x *de modo que* $|x-a| \le r$; *además lo hace absolutamente.*

- *La serie de potencias converge a f uniformemente en $[a-r, a+r]$, para todo $0 \le r < |a-y|$.*
- *Existe $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ para todo x de modo que $|x-a| \le r$.*
- *f' es el límite uniforme de $\sum_{k=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ en $[a-r, a+r]$, para todo $0 \le r < |a-y|$.*

Demostración: Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-a)^k$ es convergente, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} a_k(y-a)^k = 0$$

y así existe $M > 0$ de modo que

$$|a_k||(y-a)|^k < M \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ahora si $|x-a| \le r < |y-a|$, así $\frac{|x-a|}{|y-a|} = s < 1$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||(x-a)|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||(y-a)|^k (\frac{|x-a|}{|y-a|})^k \le \sum_{k=0}^{\infty} Ms^k < \infty$$

ya que la serie geométrica es convergente. Luego por el Criterio de comparación nuestra serie es absolutamente convergente y por tanto la serie es convergente (hay que repasar los Criterios de Convergencia de Series en el Tema de Series). Además, la Prueba M-Weierstrass nos asegura que la convergencia es uniforme.

Ahora observemos que para x_0, con $r < |x_0 - a| < |y-a|$, se sigue que

$$|ka_k(x_0-a)^{k-1}| \le k|a_k|\frac{1}{r}|x_0-a|^k \le k|a_k|\frac{1}{r}|y-a|^k\frac{|x_0-a|^k}{|y-a|^k} \le \frac{M}{r}ks^k,$$

donde $s = \frac{|x_0-a|}{|y-a|} < 1$. Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} ks^k < \infty$ (ya que $0 < s < 1$, compruebalo), entonces la serie de pontencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

converge en x_0 y aplicando la demostración anterior, la serie de potencias de derivadas converge absolutamente y uniformemente en $[a-r, a+r]$.

Observemos que esta última serie es la derivada formal, término a término, de la serie de potencias de partida. De nuevo, la Prueba M-Weierstrass nos dice que esta convergencia es uniforme. Ahora el Teorema sobre al derivada y la convergencia uniforme nos dice que efectivamente

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \qquad \square$$

$\square$

Observación. 1. *Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *existe su derivada y es otra serie de potencias* $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-a)^{k-1}$, *con* $f'(a) = a_1$, *luego existe* f'' *y el resto de derivadas sucesivas, que son series de potencias con* $f^{k)}(a) = a_k k!$. *Así la serie de Taylor de una función, que viene dada por una serie de potencias, existe y coincide con la serie de potencias.*

El Teorema anterior también nos dice que si una función viene dada por una serie de potencias, entonces su dominio es un punto, un intervalo o bien toda la recta real.

Definición. 2. *Dada una serie de potencias* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *se llama **radio de convergencia** de la serie al número*

$$R = \sup\{\ |y-a|\ :\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-a)^k \qquad \textit{es convergente}\ \}.$$

R al menos es *cero* ya que para $y = a$ la serie converge. Además del Teorema anterior tenemos que

Teorema. 2. *Dada una serie de potencias* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *entonces o bien*

- $R = 0$, *o bien*
- $R > 0$ *y para todo* $0 < r < R$ *la serie* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *converge absolutamente para todo* $x \in [a-r, a+r]$, *y por tanto para todo* $x \in (a-R, a+R)$ *(la convergencia en* $[a-r, a+ar]$ *es uniforme); o bien*
- $R = \infty$.

Demostración: Es una aplicación del Teorema anterior $\square$

Ejemplo. 1. *Nos dan la serie* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k}$. *¿Cuál es radio de convergencia de la serie? ¿Cuál es el dominio de* f*?*

Demostración: Echamos mano del Criterio de Cociente, para ver para que valores de x la serie converge. Así

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x-2|^{k+1}}{3^{k+1}}}{\frac{|x-2|^k}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x-2|}{3} = \frac{|x-2|}{3}.$$

Así el criterio de cocientes nos dice que si

- $\frac{|x-2|}{3} < 1$, la serie converge absolutamente (equivalente a $|x-2| < 3$);
- $\frac{|x-2|}{3} > 1$, la serie diverge.

Luego por el Teorema anterior el radio de convergencia que buscamos es $R = 3$. Por oto lado, para

- $x = 5$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty; \qquad \text{y para}$$
- $x = -1$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$
  la serie diverge.

Luego concluimos que $\mathrm{Dom} f = (-1, 5)$ □

Por último damos la siguiente definición.

Definición. 3. *Un función f se llama* ***analítica*** *en un entorno del punto a si se puede representar como una serie de potencias centrada en a, es decir existe $\delta > 0$ de modo que para todo $|x-a| < \delta$ se tiene que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Ejemplo. 2. *Ejemplos de funciones análiticas son:*

- e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$*...etc en toda la recta* $\mathbb{R}$.
- $\arctan x$, *en un entorno de cero o* $\ln x$ *en un entorno de* 1, *también son ejemplos de funciones analíticas.*

El concepto de función analítica alcanza su mayor poder cuando trabajamos con funciones de variable compleja.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

SUCESIONES DE FUNCIONES

Ya conocemos el concepto de convergencia de una sucesión de números. Decíamos que dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, ésta convergía a un número x (o límite de la sucesión) y escribiamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{o} \qquad x_n \to_{n\to\infty} x$$

si para todo para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > n_0$ entonces ocurre siempre que $|x - x_n| < \epsilon$.

Ejemplos 1. *a)* $\frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$ *b)* $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \to_{N\to\infty} e$

c) El método de las tangentes de Newton nos permitía encontrar una sucesión que converge a la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$

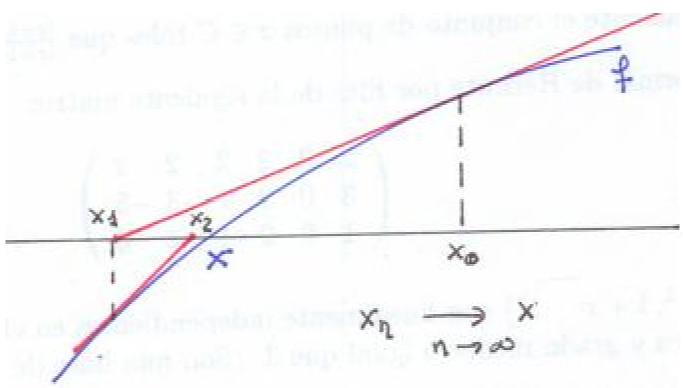
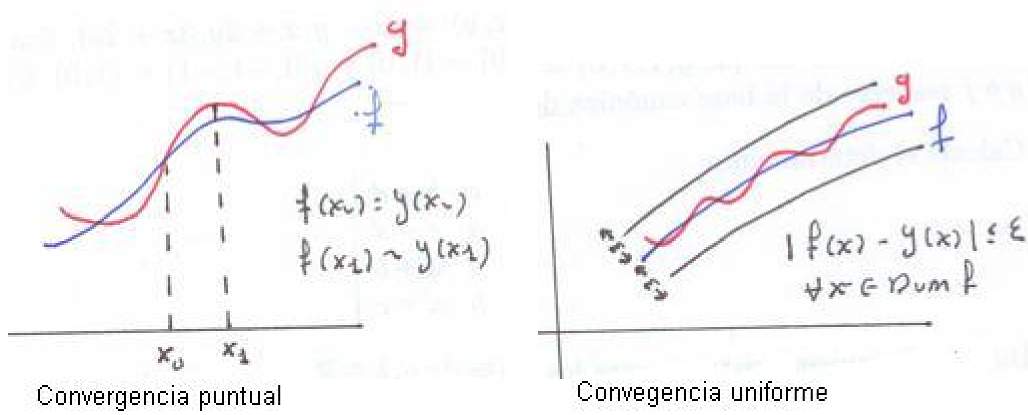


FIGURA 1. Tangentes de Newton

Otro problema distinto, más general, es él de aproximar una función dada f por otras f_n, que han de ser más sencillas y que se *acercan* a f cuando n se hace grande. La primera cuestión que se plantea es que significa que una función este cerca de otra o equivalentemente como medimos la *distancia* entre dos funciones. Veamos los siguientes ejemplos gráficos.

Ejemplos 2.



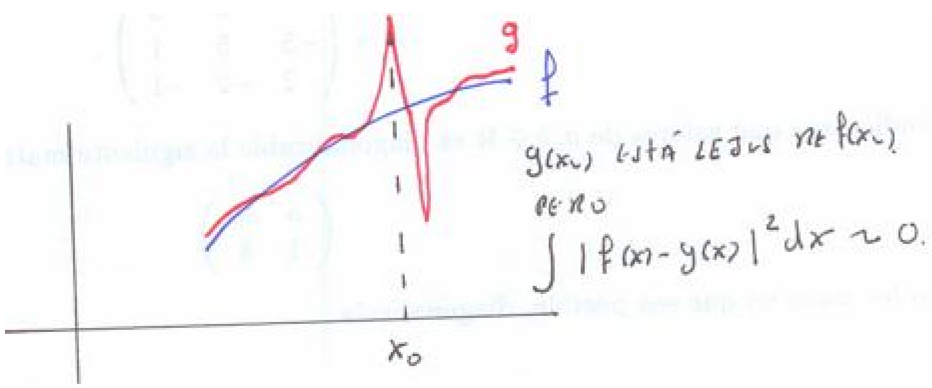


FIGURA 2. Convergencia en media cuadrática

Vamos a estudiar los dos primeros tipos de convergencias. La convergencia en media cuadrática es sin embargo la más apropiada para estudiar señales (de alguna forma la integral de la función al cuadrado mide la energía de la señal).

Definición 1. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas sobre un mismo dominio $A \subset \mathbb{R}$ (podemos pensar que A es un intervalo).*

1. *Decimos que la función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ si para todo $x \in A$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

2. *Decimos que la función* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es el límite uniforme de la sucesión* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un natural* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de manera que*

$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \qquad$ *para todo* $\qquad x \in A$

(o también, equivalentemente, que $\sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in A\} < \epsilon$*).*

Ejemplo 1. *Consideramos la sucesión de funciones* $f_n(x) = x^n$ *donde* $x \in A = [0, 1]$ *y* $n \in \mathbb{N}$*. Las gráficas de las funciones de la sucesión son del tipo*

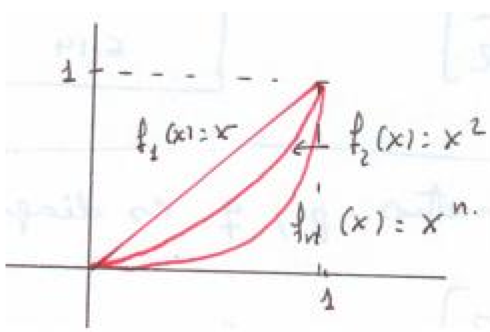


FIGURA 3. Gráficas de f_1,f_2,..,f_n

En primer lugar calculamos su límite puntual

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

luego la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ es el límite puntual de la sucesión. Sin embargo f no puede ser el límite uniforme de la sucesión; si tomamos $\epsilon = 1/4$ no es posible que $|f(x) - x^n| < 1/4$ para todo $x \in [0, 1]$.

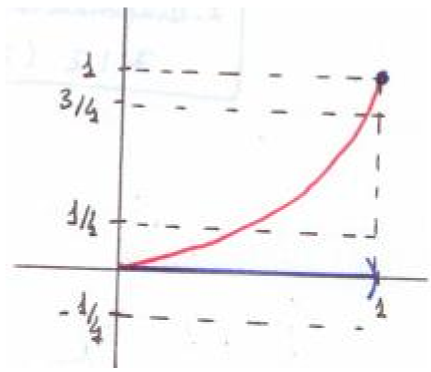


FIGURA 4

Lo que si ocurre siempre, y no es más que un sencillo ejerciccio para conprobar si se ha entendido las definiciones anteriores, es

Observación 1. *Si f es el límite uniforme de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces f también es el límite putual de tal sucesión (el recíproco no es cierto como vimos en el ejemplo anterior).*

Ejemplo 2. *Condideramos la sucesión $(\frac{x}{n})_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$. En primer lugar calculamos el límite puntual. $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, para todo $x \in [0,1]$ (¡Hay que acordarse de calcular límites!). Por tanto $f \equiv 0$ es el límite puntual de la sucesión y candidato a límite uniforme. Ahora*

$$|f(x) - f_n(x)| = |0 - \frac{x}{n}| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0,$$

luego para todo $\epsilon > 0$ tomando un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$, se tiene que para todo $n > n_0$ se verifica que

$$|0 - \frac{x}{n})| =\leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in [0,1].$$

Luego deducimos que también $f \equiv 0$ es el límite uniforme de la sucesión.

Un resultado que nos ayuda a entender la importancia de la convergencia uniforme es el siguiente.

Teorema 1. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones*

$$f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

que converge uniformemente a la función f sobre el intervalo $[a,b]$.

1. *Si cada función* f_n *es continua en* $[a, b]$*, entonces* f *es continua en* $[a, b]$*.*
2. *Si cada función* f_n *es integrable en el intervalo* $[a, b]$*, entonces* f *también es integrable en el intervalo* $[a, b]$ *y además se verifica la fórmula*

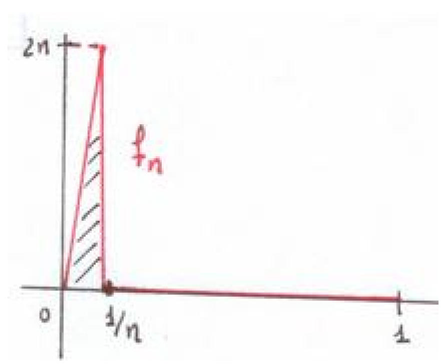
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Veamos algunos ejemplos que ponen en valor el enunciado del Teorema. Depués vemos la prueba.

Si no hay convergencia uniforme, lo enunciado en el teorema anterior no tiene por que ser cierto.

Ejemplo 3. *La sucesión* $(x^n)_{n=1}^{\infty}$*,* $x \in [0, 1]$*, está formada por funciones* $f_n(x) = x^n$ *continuas en el intervalo* $[0, 1]$*. El límite puntual es la función* $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$ *. Esta función no es continua en todo* $[0, 1]$*, ya que es discontinua en* $x = 1$*. Luego no puede ser el límite uniforme de la sucesión (algo que vimos antes; este es otro método de comprobarlo).*

Ejemplo 4. *Sea* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión de funciones sobre* $[0, 1]$ *dadas por el dibujo*



observemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *para todo* $x \in [0, 1]$*; y que además* $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Luego* $f \equiv 0$ *es el límite puntual de la sucesión, que no es uniforme en* $[0, 1]$ *ya que no es cierto que*

$$\int_0^1 0dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Ejemplo 5. *Para calcular* $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx$*, en primer lugar calculamos el límite puntual de la sucesión de funciones* $(\frac{ne^x}{n+x})_{n=1}^{\infty}$ *con* $x\in[0,1]$*,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ne^x}{n+x} = e^x \qquad \textit{para todo} \qquad x\in[0,1].$$

Ahora comprobamos que este límite es uniforme

$$|e^x - \frac{ne^x}{n+x}| = e^x|1-\frac{n}{n+x}| = e^x|\frac{x}{n+x}| \leq e\frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$$

(donde la desigualdad se tiene ya que $0\leq x\leq 1$*). Luego* $f(x)=e^x$ *es el límite uniforme de la sucesión de funciones* f_n*. Estas funciones son continuas en* $[0,1]$ *y por tanto integrables en* $[0,1]$*. Luego por el teorema anterior se sigue que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\,\Big|_0^1 = e-1.$$

Demostración: (del Teorema) **1)** Tomamos $x\in(a,b)$ (los casos $x=a$ y $x=b$ quedan como ejercicios). Veamos que f es continua en x.

Sea $\epsilon>0$. De la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ existe N de modo que para todo $n\geq N$

$$|f(y)-f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo} \qquad y\in[a,b].$$

Ahora como cada f_n es continua, para $n_0>N$ y el ϵ anterior existe $\delta>0$ de modo que

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo} \qquad y\in(x-\delta,x+\delta).$$

Así sumando y restando $f_{n_0}(x)$ y $f_{n_0}(y)$

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+|f_{n_0}(y)-f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

para todo $y\in(x-\delta,x+\delta)$. Lo que termina la prueba.

2) Usaremos el Criterio de Integrabilidad de Riemann para ver que f es integrable en $[a,b]$.

Sea $\epsilon > 0$. De la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_n$ existe N de modo que para todo $n \geq N$

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{para todo} \qquad y \in [a,b].$$

Deducimos que f está acotada por estarlo cada f_n. Ahora por ser f_N integrable, para el ϵ anterior existe una partición P del intevalo $[a,b]$

$$P = \{t_0 = a < t_1 < .... < t_k = b\}$$

de modo que la diferencia entre suma superior e inferior es pequeña,

$$S(f_N, P) - I(f_N, P) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Además de la convegencia uniforme

$$m_{i,f_N} - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq m_{i,f} \leq M_{i,f} \leq M_{i,f_N} + \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Veamos ahora que

$$S(f,P) \leq S(f_N, P) + \frac{\epsilon}{4} \qquad (*)$$

y que

$$I(f_N, P) - \frac{\epsilon}{4} \leq I(f,P). \qquad (**)$$

Si esto es así, entonces

$$S(f,P) - I(f,P) \leq S(f_N,P) + \frac{\epsilon}{4} - I(f,P) + \frac{\epsilon}{4} \leq \epsilon$$

y por el Criterio de Integrabilidad f es integrable en $[a,b]$.

Para ver $(*)$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{k} M_{i,f}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{k}(M_{i,f_N} + \frac{\epsilon}{4(b-a)})(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_{i,f_N}(t_i - t_{i-1}) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1}) = S(f_N, P) + \frac{\epsilon}{4}.$$

La desigualdad $(**)$ se sigue de un modo análogo.

Por último, si $n \geq N$

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq$$

$$\int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)} = \frac{\epsilon}{4}.$$

La definición de límite de una sucesión nos dice que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

Ejercicio 1. *Dado que* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, *justifica las siguientes cuentas.*

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \qquad \square$$

Otro ejemplo completo del estudio de la convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones es el siguiente.

Ejemplo 6. *Sea la sucesión de funciones* $(\frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx})_{n=1}^{\infty}$ *para* $x \geq 0$. *Se pide estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión. Vamos a calcular el límite puntual, veremos que no hay convergencia uniforme sobre* $[0,\infty)$. *Sin embargo si hay convergencia uniforme sobre* $[a,\infty)$ *si* a *es un número mayor que* 0.

1. *El límite puntual es*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx} = \begin{cases} 0 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

   luego $f=0$ *es el límite puntual de la función.*
2. *Vamos a representar la gráfica de la función* $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1+nx}$, *para un* n *fijo.* f_n *es continua en* $x \geq 0$; *además* $f_n(0) = 0$ *y* $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. f_n *cambia de signo cuando lo hace la función* $\operatorname{sen} nx$.
   Derivando vemos que $f_n'(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}(\cos nx - \operatorname{sen} nx + nx\cos nx)$.
   Localizar los máximos y mínimos locales en este caso no parece sencillo.

   Se puede observar, sin embargo, que para $x = \frac{\pi}{2n}$ *se tiene que* $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}$ *independientemente de* n. *Así nuestra función será como*

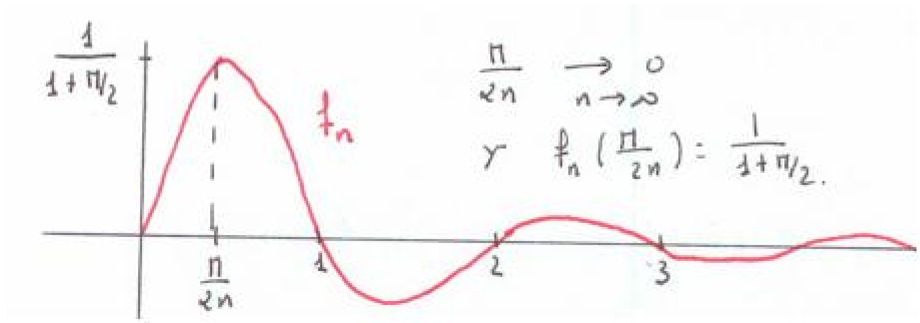


FIGURA 5. Gráfica de f_n

No es posible meter casi todas las funciones f_n (todas salvo un número finito de ellas) dentro de una banda suficientemente estrecha alrededor de la función $f = 0$. Por tanto no hay convergencia uniforme en $[0, 1]$.

3. *Por otro lado si $x \in [a, \infty)$ con $a > 0$, entonces*

$$|f(x) - f_n(x)| = |0 - \frac{\operatorname{sen} nx}{1 + nx}| = |\frac{\operatorname{sen} nx}{1 + nx}|$$

$$\leq \frac{1}{1 + an} \to_{n \to \infty} 0$$

ya que $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ para todo t y $x \geq a > 0$. Todo ello independientemente de x. Por tanto $f_n \to f = 0$ uniformemente sobre $[a, \infty)$, siendo a un número mayor que cero.

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LA DERIVADA Y LA CONVERGENCIA DE FUNCIONES.

El comportamiento de la convergencia uniforme respecto de la derivada es un poco más complejo de lo que pasa para la continuidad y la integral.

Ejercicio 1. *Sea la sucesión de funciones* $f_n(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & si \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ x & si \quad x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$

Prueba que son funciones derivables y que sus gráficas como las del dibujo siguiente.

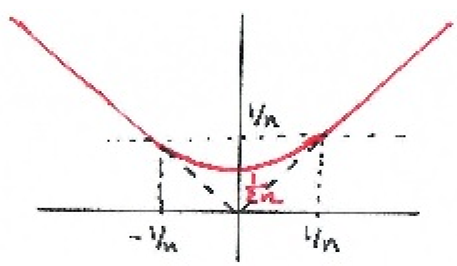


FIGURA 1. Gráfica de f_n.

Claramente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$. Y no lleva mucho esfuerzo comprobar que la convergencia a $|x|$ es uniforme en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo la función $|x|$ no es derivable en $x = 0$. No se conserva la derivabilidad.

Ejemplo 1. *Consideramos la sucesión de funciones* $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2 x)$. *Ocurre que*

- *Cada f_n es derivable, $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$.*
- *La sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a $f = 0$ en todo $\mathbb{R}$.*
- *El límite uniforme $f = 0$ es una función derivable.*
- ***No*** *es cierto que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(0).$$

Demostración: Observemos que $|\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2x)| \leq \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$.

Además para $x = 0$, $f_n'(0) = n$ y $f'(0) = 0$ $\square$

Un último ejemplo. Consideremos la sucsión de funciones (f_n) dada por las siguientes gráficas

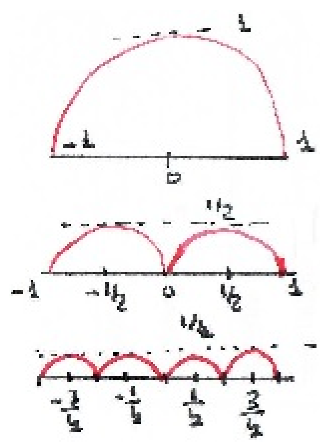


FIGURA 2. Gráfica de f_1, f_2 y f_3.

Todas ellas tienen la misma longitud π. Es decir, $\pi = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f_n')^2(x)}dx$. Esta sucesión de funciones claramente converge uniformemente a $f = 0$. Si fuese cierto que la sucesión de derivadas $(f_n')_n$ convergiese a $f'(x) = 0$ uniformemente, entonces tendríamos que

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f_n')^2(x)}dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+0}dx = 2,$$

lo cuál **no** es posible.

Los ejemplos anteriores nos indican que, para dar un Teorema que nos asegure la conservación de la derivada por paso al límite de una sucesión de funciones, hay que dar hipótesis suplementarias.

Teorema 1. *Sea $(f_n)_n$ una sucsión de funciones derivables, con derivadas integrables en $[a,b]$. Supongamos que $(f_n)_n$ converge puntualmente a una función f en $[a,b]$. Supongamos también que la sucesión de derivadas $(f_n')_n$ converge uniformemente a una función continua g en $[a,b]$. Entonces f es derivable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

para todo $x \in [a,b]$.

Ejercicio 2. *Mira en los ejemplos anteriores las hipótesis que no se cumplen.*

Demostración: (del Teorema) Por ser f_n' integrables y por converger uniformemente tenemos que

$$\int_a^x g = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' =$$

por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a).$$

Por ser g continua y el Teorema Fundamental del Cálculo

$$f'(x) = \left(f(a) + \int_a^x g \right)' = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \square$$

Este Teorema, de demostración tan elegante, tiene como defecto las muchas hipótesis que se requieren. Vamos a dar un Teorema análogo, con menos hipótesis, pero la demostraicón será algo más compleja.

Para hacer lo que sigue necesitamos un Criterio para caracterizar la convergencia uniforme.

Teorema 2. *(**Criterio de Cauchy de la Convergencia Uniforme**). Sea una sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas en $A \subset \mathbb{R}$. La sucesión de funciones converge uniformemente en A si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n, m \geq N$ se tiene que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Observemos que par dar el Criterio no necesitamos nombrar al límite puntual.

Demostración: Si la sucesión (f_n) converge uniformemente, lo hará sobre cierta función f (su límite puntual). Así, por definición de convergencia uniforme, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq N$ se sigue que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $x \in A$. Así, para $n, m \geq N$ tenemos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $x \in A$.

Veamos ahora el recíproco. Supuesto cierto el criterio y fijado $x \in A$, el criterio nos dice que la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$; por tanto convergente. Es decir, para $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n, m \geq N$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

para todo $x \in A$. Si fijamos $x \in A$, lo anterior nos dice que existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

(llamamos $f(x)$ al límite puntual). Además, si $m, n \geq N$ y tomando el límite en m

$$\begin{array}{ccc} |f_m(x) - f_n(x)| & \leq & \epsilon \\ & \downarrow_{m\to\infty} & \\ |f(x) - f_n(x)| & \leq & \epsilon. \end{array}$$

Luego, para todo $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon,$$

para todo $x \in A$. Lo que prueba que $(f_n)_n$ converge uniformemente a f $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar un resultado con muchas menos hipótesis que él dado anteriormente.

Teorema 3. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones sobre un intervalo $[a,b]$. Supongamos que existe $x_0 \in [a,b]$ de modo que existe el límite (puntual)*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Si cada f_n es derivable y la sucesión de derivadas $(f'_n)_n$ convergen uniformemente a una función g en $[a,b]$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente a una función f (límite puntual), de modo que f es derivable en $[a,b]$ y se verifica que

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = g(x).$$

Demostración: Sean $x \in [a,b]$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema del Valor Medio a $f_m - f_n$, x y x_0, existe y entre x y x_0 de modo que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(\, f'_m(y) - f'_n(y)\,).$$

De aquí

$$\sup\{\,|f_m(x) - f_n(x)| \;:\; x \in [a,b]\,\} \leq$$
$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)\sup\{\,|f'_m(y) - f'_n(y)| \;:\; y \in [a,b]\,\}.$$

Como $f_n(x_0) \to_{n\to\infty} f(x_0)$ (así la sucesión $(f_n(x_0))_n$ es de Cauchy) y la sucesión $(f'_n)_n$ verifica el Criterio de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para $m, n \geq N$ se verifica que:

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$|f'_m(y) - f'_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{para todo} \qquad y \in [a,b].$$

De lo que se sigue que

$$\sup\{\,|f_m(x) - f_n(x)| \;:\; x \in [a,b]\,\} \leq \epsilon.$$

Así por el Criterio de Cauchy de la Convergencia Uniforme la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente en todo $[a,b]$ a su límite puntual que llamaremos f,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{uniformemente en} \qquad [a,b].$$

Además, puesto que cada función f_n es continua en [a,b], el límite puntual f es una función continua en $[a,b]$.

Tomamos ahora $c, x \in [a,b]$ y para $m, n \in \mathbb{N}$. Aplicamos el Teorema del Valor Medio a $f_m - f_n$ y así

$$(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c) = (x-c)(f_m - f_n)'(y),$$

para cierto y entre c y x. De lo que se sigue que

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} \right| \leq$$

$$\sup\{\, |(f_m - f_n)'(y)| \;:\; y \in [a,b]\,\}.$$

De nuevo por la convergencia uniforme de $(f_n')_n$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para $m, n \geq N$ se verifica que:

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} \right| \leq \epsilon \qquad \text{claro} \qquad c \neq x.$$

Ahora, tomando límite para $m \to \infty$, se tiene que

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} \right| \leq \epsilon \qquad\qquad c \neq x,$$

y $n \geq N$. Como $g(c) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n'(c)$, existe $N' \in \mathbb{N}$ de modo si $n \geq N'$

$$|f_n'(c) - g(c)| < \epsilon.$$

Ahora fijamos $K = \text{máx}\{N, N'\}$. Puesto que $f_K'(c)$ existe, para el ϵ anterior existe $\delta > 0$ de modo que para $0 < |x-c| < \delta$ se tiene que

$$\left| \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x-c} - f_K'(c) \right| \leq \epsilon.$$

Al combinar las últimas desigualdades, se concluye que si $0 < |x-c| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - (c)}{x-c} - g(c) \right| \leq$$

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x-c} \right| +$$

$$\left| \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x-c} - f_K'(c) \right| + |f_K'(c) - g(c)| \leq 3\epsilon.$$

Lo que quiere decir que existe

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = g(c) \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

SERIES DE FUNCIONES

Las series de funciones son un caso particular, especialmente importante, de sucesiones de funciones.

Ya hemos estudido las series de Taylor que nos permiten representar una función como una serie. En los problemas de integrales salían las *series de Fourier*.

Si consideramos una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y formamos la sucesión de sumas parciales

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x), \qquad \text{donde} \qquad N \in \mathbb{N}$$

(proceso análogo al seguido en el caso de series numéricas visto en la primera parte del curso) podemos preguntarnos si existe el límite de la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N=1}^{\infty}$. Así por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ denotamos una *serie de funciones* que hace referencia al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N=1}^{\infty}$.

Definición 1. *La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, donde $x \in A \subset \mathbb{R}$,*

1. *converge puntualmente a la función f en $x \in A$ si $f(x)$ es el límite puntual de la sucesión de sumas parciales $(S_N(x))_{N=1}^{\infty}$. En ese caso escribimos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.*
2. *La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f sobre A si $f(x)$ es el límite uniforme sobre A de la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N=1}^{\infty}$. En ese caso escribimos $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sobre A.*

Ahora los resultados que tenemos para la convergencia de sucesiones de funciones se trasladan directamente a la convergencia de series con un simple cambio de notación.

Corolario 1. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones que converge uniformemente a la función* f *sobre un intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, entonces*

1. *si cada función* f_n *es continua en* $[a,b]$*, también lo será* $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ *para cada* N *y así* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *es continua sobre* $[a,b]$*;*
2. *si cada función* f_n *es integrable sobre* $[a,b]$*, también lo será* $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ *para cada* N *y así* f *es integrable sobre* $[a,b]$ *y se verifica la fórmula*
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx;$$
3. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge puntualmente en un punto* $x_0 \in [a,b]$*, cada* f_n *es derivable y la serie de las funciones derivadas* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *converge uniformemente a una función* g *sobre* $[a,b]$*, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente a su límite puntual* f *en* $[a,b]$*, función derivable y tal que*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x).$$

Ejemplo 1. *Para la función* $f(x) = e^x$ *vamos a ver que su serie de Taylor converge uniformemente.*

La serie de Taylor de la función exponencial es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Tenemos que ver que la sucesión de sumas parciales $(S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!})_N$ (o de los polinomios de Taylor de la función exponencial) converge uniformemente.

$$|e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}| = |R_{N,0,e^x}|$$

El Teorema de Taylor, en su forma integral, nos decía que el resto anterior es igual a

$$\left|\int_0^x \frac{f^{N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N dt\right| = \left|\int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right| \leq e^{|x|}\int_0^x \frac{|x-t|^N}{N!}dt$$
$$= e^{|x|}\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{\text{máx}\{1,e^a\}a^{N+1}}{(N+1)!} \rightarrow_{N\to\infty} 0$$

para todo $x \in [-a, a]$ donde a es una cantidad positiva. Por tanto la serie de Taylor de la exponencial converge uniformemente a la exponencial sobre todo intervalo $[-a, a]$ siendo $a > 0$.

Ejemplo 2. *Queremos calcular la integral* $\int_0^a e^{-x^2}dx$.

Ya hemos avisado que la función e^{-x^2} no admite una primitiva elemental, y por tanto la regla de Barrow no es aplicable en este caso. Por otro lado una integral como la de arriba es muy importante en la Teoría de las Probabilidades. Para calcularla tenemos en cuenta que

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} \qquad \forall x \in [-a, a]$$

con convergencia uniforme. Luego podemos aplicar la segunda parte del corolario anterior y así

$$\int_0^a e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^a \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx$$

calculando una primitiva y, ahora si, aplicando la regla de Barrow

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Big|_0^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

En el caso de las series de funciones tenemos un criterio que nos dice cuando una serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual.

Teorema 1. *(***Prueba M de Weierstrass***) Sea* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones definidas sobre* $A \subset \mathbb{R}$. *Supongamos que existe una sucesión númerica* $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *de modo que*

1. $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in A,$
2. *la serie númerica* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *es convergente;*

entonces para todo $x \in A$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente y además la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a su límite puntual sobre A.

Demostración:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

por tanto existe una función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para toda $x \in A$, límite puntual de la serie de funciones. Además

$$|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)| = |\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} M_n \to_{N\to\infty} 0$$

independientemente de la x. Así la convergencia de la serie de funciones es uniforme sobre N $\square$

Ejemplo 3. *Queremos averiguar el carácter de la serie de funciones* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}$.

Como $\displaystyle|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y sabemos que esta última serie numérica es convergente, la prueba M de Weierstrass nos dice que la serie de funciones converge uniformemente sobre todo $\mathbb{R}$.

Observación 1. *Para tratar con series de funciones es conveniente recordar los criterios de convergencia de series numéricas que vimos en la primera parte del curso (en particular el Criterio de Comparación y el Criterio del Cociente).*

Ejemplo 4. *Si queremos estudiar la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \in [0,1]$,*

hay que tener en cuenta que es una *serie geométrica* y por tanto converge si $|x| < 1$. Así si $x \in (0,1)$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Es nula si $x = 0$ y diverge para $x = 1$. Usando la prueba M de Weierstrass se puede ver que la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente sobre todo intervalo $[0,a]$ siempre que $a < 1$.

Ejemplo 5. *Sabemos que* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *con convergencia uniforme sobre* $[-a, a], \ a > 0$. *Otra forma de verlo es la que sigue.*

Para todo $x \in [-a, a]$, podemos usar el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

y así deducimos que la serie de funciones converge puntualmente en cada $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado $\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|a|^n}{n!}$ para todo $x \in [-a, a]$, como además la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$ es convergente, la prueba M de Weierstrass nos dice que la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniforme sobre $[-a, a]$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

MÉTODO DE LAS TANGENTE DE NEWTON.

Dada la ecuación $f(x) = 0$, donde f es alguna función "razonable", la solución se encuentra despejando la x, es decir

$$x = f^{-1}(0).$$

El Teorema de la Función Inversa nos dice cuando podemos esperar que exista f^{-1} (si existe f' continua y no se anula). Lo que no nos dice tal Teorema es como calcular f^{-1}.

Un **procedimiento númerico** para aproximar las soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, para f una función razonable (que exista f' no nula) lo da el llamado *Método de las Tangente de Newton*. El siguiente dibujo nos da la idea del método.

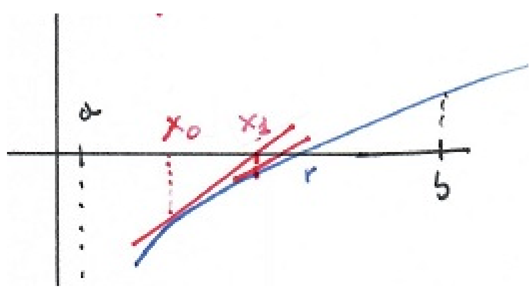


FIGURA 1

Pensemos en una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Así el Teorema de Bolzano nos dice que al menos la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución en el intervalo $[a, b]$. Pedimos algo más, que existe f' continua y que no se anule. Así f es monótona, como la gráfica del dibujo anterior, y la raíz esperada r es única. Ahora

- tomamos $x_0 \in [a, b]$;
- consideramos $r(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ la **recta tangente** a la gráfica de f por el punto $(\,x_0, f(x_0)\,)$;

- consideramos el punto de corte de esta tangente r con el eje de la $''x''$, es decir

$$\left\{ \begin{array}{c} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ \\ y = 0 \end{array} \right. ;$$

- el punto de corte $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ parece estar "cerca" de la raíz r.

Si el proceso anterior lo iteramos, es decir para $x_0 \in [a, b]$ consideramos la sucesión recurrente

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{para} \qquad n \geq 1$$

¿podemos esperar que la sucesión resultante (x_n) converga a la raiz r, como sugiere el dibujo?

Los siguientes dibujos nos muestran que debemos pedir condiciones adicionales.

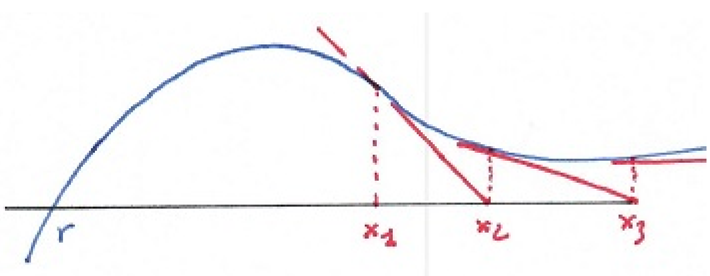


Figura 2

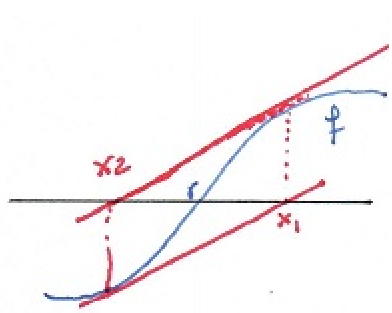


Figura 3

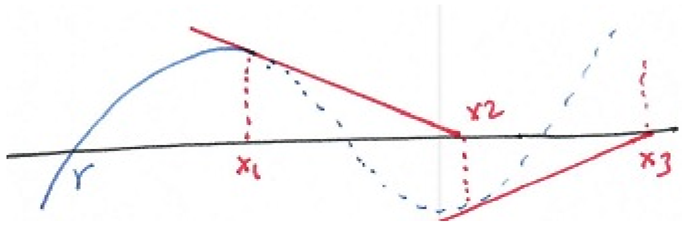


FIGURA 4

Teorema. 1. *(**Método Newton**). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f(a)f(b) = 0$, de modo que existen $m, M > 0$ para las cuáles*

$$0 < m \leq |f'(x)| \qquad y \qquad |f''(x)| \leq M \qquad para\ todo \qquad x \in [a,b].$$

Sea $r \in [a,b]$, la única raíz de $f(x) = 0$ en $[a,b]$. Existe un subintervalo $I \subset [a,b]$, que contiene a r, de modo que para todo $x_0 \in I$ la sucesisón recurrente definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad para \qquad n \geq 1,$$

converge a r. En particular,

$$|r - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}|x_n - r|^2, \qquad para\ cada \qquad n.$$

Demostración: Como $f(a)f(b) < 0$, el Teorema de Bolzano nos dice que existe $r \in [a,b]$ raíz de $f(x) = 0$.

Como f' es continua (ya que existe f'') y $f' \neq 0$, se sigue que f es monótona, por tanto inyectiva en $[a,b]$. Luego la raíz r es única en el intervalo $[a,b]$.

Llamamos $K = \frac{M}{2m}$. Tomamos $\delta > 0$ de modo que

$$\delta < \frac{1}{K} \qquad \text{y tal que} \qquad I = [r-\delta, r+\delta] \subset [a,b].$$

Ahora si tomamos $x_0 \in I$, la Fórmula del Resto de Lagrange del Teorema de Taylor nos dice que

$$f(r) = f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(r - x_0)^2 = P_{f,1,x_0}(r) + R_{f,1,x_0}(r),$$

para un c entre x_0 y r. Como $f(r) = 0$,

$$-f(x_0) = f'(x_0)(r - x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(r - x_0)^2$$

y así

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (r - x_0) + \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2.$$

Si consideramos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

entonces

$$x_1 = x_0 + (r - x_0) + \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2.$$

Así

$$x_1 - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2.$$

Tomando valores absolutos y acotando

$$|x_1 - r| = |\frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2| \leq \frac{M}{2m}\delta^2 < \delta,$$

la última desigualdad la tenemos de que $K = \frac{M}{2m} < 1/\delta$.

Hemos visto que $x_1 \in I = [r-\delta, r+\delta]$. De la misma forma, para cualquier $x' \in I$ se tiene que

$$x' - \frac{f(x')}{f'(x')} \in I.$$

Luego si $x_0 \in I$, la sucesión recurrente $(x_n)_n$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

está dentro del intervalo I. También sabemos que

$$|x_{n+1} - r| = |\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2|,$$

donde c es un punto entre r y x_n. Luego con la acotación de arriba

$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 \leq$$

de forma recurrrente

$$K\delta|x_n - r| \leq (K\delta)K|x_{n-1} - r|^2 \leq (K\delta)^2|x_{n-1} - r| \leq ....$$

$$...... \leq (K\delta)^n|x_1 - r| \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$

ya que $K\delta < 1$. Lo que prueba que la sucesión $(x_n)_n$ converge a r $\square$

El Teorema anterior nos dice que el proceso de las tangentes de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

puede converger a la raíz buscada. Ahora, para determinar el intervalo I donde tomar el primer término de la sucesión x_0 de arranque, necesitamos conocer r la raíz que buscamos.

Vamos a mejorar el procedimiento para encontar r sin necesidad de "conocerla " previamente. El siguiente Lema nos ayudará en ello.

Lema. 1. *(**Teorema de Punto fijo de Banach**). Sea una función* $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ ***contractiva*** *, es decir que existe* $K \in (0, 1)$ *de modo que*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|.$$

Entonces existe un único $x^* \in [a, b]$ *de modo que es un* ***punto fijo***

$$\varphi(x^*) = x^*.$$

Además para todo $x_0 \in [a, b]$*, la sucesión recurrente*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad \textit{para} \qquad n \geq 0$$

converge a x^* *y se tiene que*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1 - K}|x_0 - x_1|.$$

Obeservemos que si φ es derivable y $|\varphi'(x)| \leq K < 1$, entonces por el Teorema del Valor Medio la función φ es contractiva.

Demostración: Sea $x_0 \in [a, b]$. La sucesión recurrente $(x_n)_n$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

es de Cauchy. Claro, si $m > n$

$$|x_m - x_n| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{n-1}| \leq K|x_{m-1} - x_{n-1}| \leq$$

repitiendo el proceso

$$K^2|x_{m-2} - x_{n-2}| \leq ... \leq K^n|x_{m-n} - x_0| \leq$$

usando la propiedad triangular del valor absoluto

$$K^n \left[|x_{m-n} - x_{m-n-1}| + |x_{m-n-1} - x_{m-n-2}| + ... + |x_1 - x_0|\right] \leq$$

usando de nuevo lo de arriba

$$K^n|x_1 - x_0|[K^{m-n-1} + ... + K^2 + K + 1] \leq$$

usando la suma de la serie geometric de razón K

$$K^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1 - K} \to_{n\to\infty} 0.$$

Como es una sucesión de Cauchy, es convergente. Sea $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tenemos por lado que

$$\begin{array}{lcl} |x_m - x_n| & \leq & K^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1-K} \\ \downarrow_{m\to\infty} & & \\ |x^* - x_n| & \leq & K^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1-K}. \end{array}$$

Por otro lado, al ser φ continua (lo es por ser contractiva), se tiene que

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \varphi(x_n) \\ \downarrow_{m\to\infty} & & \downarrow_{m\to\infty} \\ x^* & = & \varphi(x^*). \end{array}$$

Por último, que x^* es el único punto fijo se ve fácilmente. Supongamos que existe otro y punto fijo, entonces

$$|x^* - y| = |\varphi(x^*) - \varphi(y)| \leq K|x^* - y|,$$

como $K < 1$, lo anterior solo es posible si $x^* = y$ $\square$

Ahora podemos "mejorar" el método de Newton.

Teorema. 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f(a)f(b) = 0$, de modo que existen $m, M > 0$ para las cuáles*

$$0 < m < |f'(x)| < M \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a, b].$$

Dado $x_0 \in [a, b]$ la sucesión recurrente $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M} \qquad \textit{para} \qquad n \geq 1,$$

converge a la única raíz $x^* \in [a, b]$ de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

En particular,

$$|x^* - x_n| \leq \frac{f(x_0)}{m}(1 - \frac{m}{M})^n.$$

Demostración: Supondremos que $f(a) < 0 < f(b)$, en otro caso se trabaja con $-f$.

Si $f' > 0$, la función es monótona creciente, por tanto inyectiva y solo tiene una **única raíz** en $[a, b]$.

Lo que vamos a hacer es forzar rectas de pendiente M en el método de las tangentes.

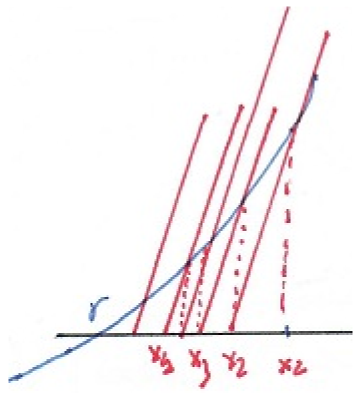


FIGURA 5

Definimos la función

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{M}. \end{array}$$

Observemos que $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{M}$, luego

$$0 \leq \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{M} \leq 1 - \frac{m}{M} = K < 1.$$

Luego, usando el Teorema de Valor Medio, φ es **contractiva**. Además es no decreciente ($\varphi' \geq 0$), luego

$$a < a - \frac{f(a)}{M} = \varphi(a) \leq \varphi(x) \leq \varphi(b) = b - \frac{f(b)}{M} < b,$$

luego $\varphi(\,[a,b]\,) \subseteq [a,b]$.

Ahora podemos aplicar el Lema anterior y existe un $x^* \in [a,b]$ de modo que

$$x^* = \varphi(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{M} \qquad \text{lo que implica que} \qquad f(x^*) = 0.$$

Además, para todo $x_0 \in [a,b]$ la sucesión

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{M} \to_{n\to\infty} x^*.$$

Y por último, usando también el Lema anterior,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0| =$$

como $K = 1 - \frac{m}{M}$ y $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{M}$

$$\frac{|f(x_0)|}{m}(1 - \frac{m}{M})^n \to_{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

Ejemplo. 1. *Queremos calcular* $\sqrt{2}$ *con un error menor que* $\frac{1}{10^3}$*.*

Demostración: Consideramos la función $f(x) = x^2 - 2$. Es una función continua y derivable. Sabemos que $\sqrt{2} \in [1, 2]$ es la única raíz de esta función.

Además

- $f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$.
- $f'(x) = 2x$ y así $0 < 2 = m \leq f'(x) \leq 4 = M$ para todo $x \in [1, 2]$.

El Teorema nos dice que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{4} \to_{n \to \infty} \sqrt{2}.$$

Podemos empezar en cualquier punto de $[1, 2]$. Tomamos $x_0 = 1$ y sabemos que

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{|f(1)|}{2}(1 - \frac{2}{4})^n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Luego para $1/2^{9+1} = \frac{1}{1024}$, el término x_9 de nuestra sucesión aproxima $\sqrt{2}$ con el error deseado $\square$

Observemos que las operaciones $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{4}$ para $x_0 = 1$ solo hacen intervenir número racionales. Lo anterior es por tanto una aproximación racional a un número irracional.

Observación. 1. *¿Cuáles son las ventajas e inconvenientes de ambos Teoremas?*

- *En el segundo método tenemos la seguridad de llegar a la raíz buscada y no es necesario calcular derivadas (solo se usa la cota M).*
- *En cambio, en el primer método la convergencia es más rápida ya que*
$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 \qquad (K = \frac{M}{2m}).$$
Así, si llamamos $e_n = |x_n - r|$, el error cometido al tomar x_n en lugar de r, el siguiente error
$$e_{n+1} \leq K e_n^2$$
se reduce de "forma cuadrática".

Una aplicación de los resultados anteriores es otra prueba del Teorema de la Función Inversa. Este tipo de prueba cobrará más sentido para funciones de varias variables.

Teorema. 3. ***(de la Función Inversa.)*** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de modo que existe f' y es continua. Si $f(a) = b$ y $f'(a) \neq 0$, entonces existe dos intervalos $[a - \delta, a + \delta]$ y $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ de modo que*

$$\textit{para todo} \qquad y \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$$

*existe un **único***

$$x \in [a-\delta, a+\delta]$$

para el cuál

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}(y) = x.$$

Además x es el límite de la sucesión recurrente $x_0 = a$ y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(a)}.$$

Demostración: Elegimos $\delta > 0$ de modo que

$$|f'(x) - f'(a)| \leq \frac{1}{2}|f'(a)|$$

lo cual es posible por ser f' continua y $f'(a) \neq 0$.

Sea $\epsilon = \frac{1}{2}\delta|f'(a)| > 0$. Fijado $y \in [b-\epsilon, b+\epsilon]$, definimos

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x) - y}{f'(a)} \qquad \text{para} \qquad x \in [a-\delta, a+\delta].$$

Veamos las propiedades de φ.

- φ es contractiva.

$$|\varphi'(x)| = |1 - \frac{f'(x)}{f'(a)}| = \frac{|f'(a) - f'(x)|}{|f'(a)|} \leq 1/2 \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a-\delta, a+\delta].$$

- $\varphi(\,[a-\delta, a+\delta]\,) \subseteq [a-\delta, a+\delta]$. Ya que

$$|\varphi(x) - a| \leq |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a) - a| \leq$$

$$1/2|x-a| + \frac{|f(a) - y|}{|f'(a)|} \leq \delta/2 + \frac{\epsilon}{|f'(a)|} \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Ahora podemos aplicar el Lema de la función contractiva y existe un **único** $x^* \in [a-\delta, a+\delta]$ de modo que

$$x^* = \varphi(x^*) = x^* - \frac{f(x^*) - y}{f'(a)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x^*) = y.$$

Además, si $x_0 = a \in [a-\delta, a+\delta]$, la sucesión recurrente

$$\varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(a)} \to_{n\to\infty} x^* \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL MONSTRUO DE WEIERSTRASS.

Las series de funciones nos permiten dar un ejemplo, al principio al menos, un tanto sorprendente.

Para $x \in \mathbb{R}$ definimos la distancia de x a $\mathbb{Z}$ por

$$[x] = \text{distancia}(x, \mathbb{Z}) = \text{mín}\{|x - z| \ : \ z \in \mathbb{Z}\}.$$

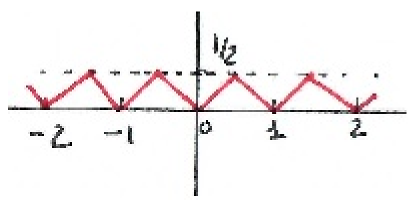


FIGURA 1. Gráfica de $[x]$.

Es una función continua en todo $\mathbb{R}$. No es derivable es los puntos de la forma $x = \frac{k}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Definimos las funciones f_n por

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}[10^n x] \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{y para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

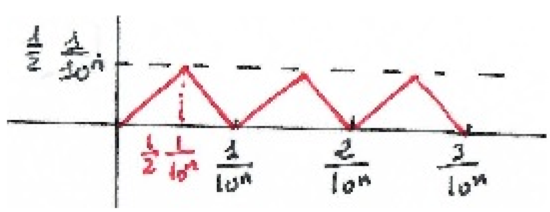


FIGURA 2. Gráfica de f_n.

Son de nuevo funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, no derivables en los puntos $x = \frac{k}{2}\frac{1}{10^n}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema. 1. *La función*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}[10^n x]$$

es continua en todo $\mathbb{R}$*, pero no es derivable en ningún punto de* $\mathbb{R}$*.*

Demostración: Si aplicamos la prueba M-Weierstrass,

$$|f_n(x)| < \frac{1}{10^n} \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathbb{R};$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} < \infty$, llegamos a que la serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual f en todo $\mathbb{R}$. De la convergencia uniforme deducimos también que f es continua en toda la recta.

Observemos que todas las funciones f_n so 1-periódicas y por tanto f también lo es.

Para ver que f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$, fijamos $a \in \mathbb{R}$, vamos a encontrar una sucesión particular $(h_m)_m$ convergente a cero de modo que **no existe**

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}.$$

Como f es 1-periódica, es suficiente con tomar $a \in (0,1]$. Este a lo escribimos en forma decimal

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{10^m}$$

(ver el artículo de Aplicaciones de Series numéricas). Observemos que

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,49999999.......$$

Definimos la sucesión $(h_m)_m$ por

$$h_m = \tfrac{1}{10^m} \quad \text{si} \quad a_m \neq 4 \text{ ó } 9;$$

$$h_m = -\tfrac{1}{10^m} \quad \text{si} \quad a_m = 4 \text{ ó } 9.$$

Claramente es una sucesión que converge a cero. Además

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \frac{[10^n(a+h_m)]-[10^n a]}{\pm 10^{-m}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n} \left([10^n(a+h_m)] - [10^n a] \right) = \sum_{n=1}^{m-1} \pm 10^{m-n} \left([10^n(a+h_m)] - [10^n a] \right).$$

La última igualdad viene de que si $n \geq m$, entonces $10^n h_m$ es entero, como la función $[x]$ es 1-periódica, se tiene que $[10^n(a+h_m)] = [10^n a]$.

Por otra parte, para $n < m$, podemos escribir

$$10^n a = \text{entero} + 0, a_{n+1}\, a_{n+2} \,....a_m....$$

$$10^n(a + h_m) = \text{entero} + 0, a_{n+1}\, a_{n+2} \,....(a_m \pm 1).....$$

Supongamos que

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2} \,....a_m.... \leq 1/2 = 0,499999999.....,$$

entonces por la elección de h_m

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2} \,....(a_m \pm 1).... \leq 1/2 = 0,499999999......$$

Lo cuál significa que

$$[10^n(a + h_m)] - [10^n a] = \pm 10^{n-m}$$

y así

$$10^{m-n} \left([10^n(a + h_m)] - [10^n a] \right) = \pm 1.$$

De forma análoga, si suponemos que

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2} \,....a_m.... > 1/2 = 0,499999999.....,$$

entonces por la elección de h_m

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2} \,....(a_m \pm 1).... > 1/2 = 0,499999999......$$

Lo cuál significa que

$$[10^n(a + h_m)] - [10^n a] = \pm 10^{n-m}$$

y así

$$10^{m-n} \left([10^n(a + h_m)] - [10^n a] \right) = \pm 1.$$

Lo que hemos es que

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

es la suma de $m - 1$ números, cada uno de los cuáles es 1 ó -1. Ahora al sumar a un entero un 1 ó -1 cambia la paridad del número (pasa de ser par a impar o viceversa). En consecuencia la sucesión de cociente

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

no puede converger ya que es una sucesión de enteros alternativamente pares e impares $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL CONJUNTO DE CANTOR.

Este es un ejemplo de un conjunto singular en $\mathbb{R}$.

Definición. 1. *Llamamos* ***Conjunto de Cartor*** *a*

$$C = \{x \in [0,1] \ : \ x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \ \textit{con} \ a_j \in \{0,2\} \ \}.$$

Estamos considerando los números en $[0,1]$ que en base tres no tienen (o puede obviarse) un 1 en su desarrollo.

Observación. 1. *Sea* $x = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^N}$ *con* $a_j \in \{0,2\}$, *entonces*

$$x \in C$$

Demostración: Claro, ya que sin más que sumar la serie geométrica se tiene que

$$\frac{1}{3^N} = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \qquad \square$$

Vamos primero a tratar de visualizar el conjunto C y después veremos las propiedades que lo hacen singular.

Sean para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$c_0 = \{\frac{1}{3}\} \qquad \text{consideramos el intervalo} \qquad C_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$c_1 = \{\frac{0}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\} \qquad \text{consideramos la unión de intervalos} \qquad C_1 = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \bigcup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_k = \{\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}} \ \text{con} \ a_j \in \{0,2\}\} = \{b_k^i \ : \ i = 1, 2, .., 2^k\} \qquad \text{consideramos la unión de intervalos}$$

$$C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} (b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}})$$

Teorema. 1. $\qquad C = [0,1] \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$.

Demostración: De forma gráfica, que es la más fácil de entender.

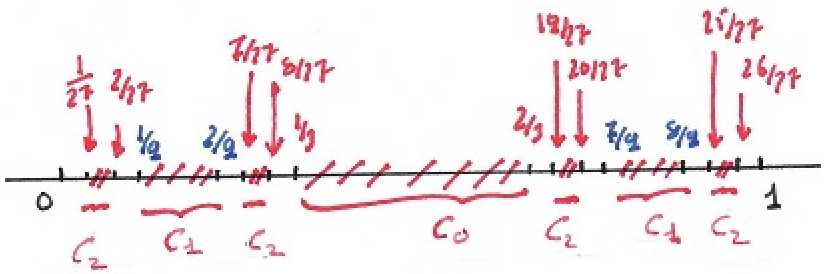


FIGURA 1. Eliminación de intervalos en $[0,1]$.

Observemos que los conjuntos de puntos $c_k = \{ b_k^1 < b_k^2 < .... < b_k^{2^k} \}$ tienen 2^k elementos (tantos como 0's y 2's ponemos poner en k posiciones); los cuáles podemos suponer ordenados. Además como

$$b_k^i < b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}} < b_k^{i+1} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq i < 2^k$$

la unión $C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} (b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}})$ es disjunta.

Por otro lado la unión $\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ también es disjuntta ya que

$$C_n \bigcup C_m = \emptyset \qquad \text{si} \qquad n < m.$$

Claro,

$$(b_n^i, b_n^i + \frac{1}{3^{n+1}}) \bigcap (b_m^r, b_m^r + \frac{1}{3^{m+1}}) = \emptyset \qquad \text{para todo} \qquad i, r;$$

ya que para todo $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in (b_n^i, b_n^i + \frac{1}{3^{n+1}})$, el primer $a_j = 1$ es necesariamente para $j = n+1$ y sin embargo para todo $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in (b_m^r, b_n^r + \frac{1}{3^{m+1}})$, el primer $a_j = 1$ es necesariamente para $j = m+1$. Luego $x \neq y$.

Observemos que de la Observación 1. se sigue que

$$\{b_k^i \ : \ i = 1, 2, ..., 2^k \text{ y } k = 0, 1, 2, , , , \} \subset C.$$

Probemos ya que $\qquad C = [0,1] \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$.

- Si $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$, entonces para algún k, tenemos que $y \in C_k$ y por tanto

  $$a_{k+1} = 1 \qquad \text{y existe} \qquad a_m \neq 0 \qquad \text{con} \qquad \text{m} > j.$$

  Luego $y \notin C$.

- Si $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in [0,1] \setminus (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$, ninguno de los a_j es igual a 1, de lo contrario estaría en algún C_k, luego $y \in C$. Más preciso, si
$$x = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}} + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j},$$
donde $a_{k+1} = 1$ es el primer uno que aparece en la serie, entonces como
$$\sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} < \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^{k+1}},$$
se tendría que $x \in (\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}}) \subset C_k$ $\square$

Propiedades del conjunto de Cantor.

1. *C es cerrado.*

   Demostración: C_k es abierto por ser unión de intervalos abiertos. $\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ es abierto por ser unión de abiertos. El complementario de un abierto
$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$$
   es un cerrado. La intersección finita de cerrados es un cerrado, así
$$[0,1] \bigcap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k \right) = [0,1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k = C$$
   es un cerrado $\square$
2. *C es compacto.*

   Demostración: Claro, es un cerrado y acotado.
3. *Si $x, y \in C$ con $x < y$, entonces existe $z \notin C$ tal que $x < z < y$. Es decir, C es totalmente desconexo.*

   Demostración: Sean $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}$, con $a_j, b_j \in \{0, 2\}$. Si $x < y$, existe un primer j_0 de modo que
$$a_{j_0} < b_{j_0} \qquad \text{y así} \qquad a_{j_0} = 0 < 2 = b_{j_0}.$$
   Ahora es claro que
$$x < \sum_{j=1}^{j_0 - 1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{j_0}} + \frac{1}{3^{j_0+1}} = z < \sum_{j=1}^{j_0 - 1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{j_0}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j} = y \qquad \square$$

4. *C no tiene puntos aislados.*

Demostración: Sea $x \in C$ con $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$, $a_j \in \{0, 2\}$. Sea $\delta > 0$. Tenemos que probar que

$$C \cap ((x-\delta, x+\delta) \backslash \{x\}) \neq \emptyset.$$

Sea el j_0 de modo que $\frac{1}{3^{j_0}} < \delta$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} < \sum_{j=1}^{j_0+1} \frac{a_j}{3^j} + \sum_{j=j_0+2}^{\infty} \frac{2}{3^j} = z = \sum_{j=1}^{j_0+1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{j_0+1}} < x + \delta.$$

Claramente $z \in C \backslash \{x\}$ $\square$

5. *C tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.*

Demostración: Como vimos en el **Apéndice** Cardinalidad de los números Reales, el Cardinal del intervalo $(0, 1)$ es él mismo que él de $\mathbb{R}$. Por tanto $[0, 1]$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$. Con esto, es suficiente con probar que existe una biyección entre C y el intervalo $[0, 1]$. Vamos a definirla:

$$\begin{array}{cccccc} f_0 & : & C & \to & [0,1] & \\ & & x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} & \to & f_0(x) & = & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j}. \end{array}$$

Como $a_j \in \{0, 2\}$, así $a_j/2 \in \{0, 1\}$ y entonces

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j} = f_0(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1;$$

lo que prueba que f_0 está bien definida.

Ahora f_0 es **creciente**, es decir si $x < y$, entonces $f_0(x) < f_0(y)$, lo que nos dice además que f_0 es **inyectiva**. Veámoslo. Sean $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}$, con $a_j, b_j \in \{0, 2\}$. Si $x < y$, existe un primer j_0 de modo que

$$a_{j_0} < b_{j_0} \qquad \text{y así} \qquad a_{j_0} = 0 < 2 = b_{j_0}.$$

Luego

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{a_j/2}{2^j} + 0 + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j} < \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^{j_0}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{b_j/2}{2^j} = f_0(y).$$

Ver que f_0 es **suprayectiva** es más sencillo. Si tomamos $y \in [0, 1]$, lo podemos escribir como

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j} \qquad \text{con} \qquad b_j \in \{0, 1\}.$$

Así es claro que
$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2b_j}{3^j}\in C$$
y que $f_0(x)=y$ $\square$.

6. *C tiene medida cero.* La noción de **medida** tiene un amplio recorrido como se puede ver en la asignatura de Teoría de la Medida. Aquí solo vamos a usarla de forma intuitiva, pero que concuerda con lo que más adelante será adecuadamente formalizado.
   - El intervalo $C_0=(1/3,2/3)$ mide $|2/3-1/3|=1/3$ y escribimos $m(C_0)=1/3$
   - Los dos intervalos de C_1 miden $|2/9-1/9|+|8/9-7/9|=2/9$ y escribimos $m(C_1)=2^1/3^2$.
   - Los 2^k intervalos de C_k, que no se solapan, miden
   $$m(C_k)=2^k|b_k^i+\frac{1}{3^{k+1}}-b_k^i|=2^k/3^{k+1}.$$
   - Como los conjuntos C_k son disjuntos, parece razonable pesar que
   $$m(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k)=\sum_{k=0}^{\infty}m(C_k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{3^{k+1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{3^k}=1.$$
   - Como $[0,1]=C\bigcup(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k)$ unión disjunta, ya que C y $\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k$ no tienen elementos comunes, parece razonable poner
   $$m([0,1])=m(C)+m(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k).$$
   Como la medida $m([0,1])=1$, se deduce que $m(C)=0$ $\square$

Observación. 2. *Las propiedades* 3), 4) *y* 5) *también las tienen los números irracionales del intervalo* $[0,1]$*, el conjunto* $[0,1]\cap\mathbb{I}$*. Sin embargo,* $[0,1]\cap\mathbb{I}$ ***no*** *es cerrado ya que*
$$\overline{[0,1]\cap\mathbb{I}}=[0,1].$$
Por otro lado se puede probar que $m([0,1]\cap\mathbb{I})=1$*.*

La función de Cantor o Cantor-Lebesgue.

La siguiente curiosa función va unida al conjunto de Cantor. Tendremos en cuenta la función f_0 que hemos definido anteriormenete. Además usaremos que
$$[0,1]=C\bigcup\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k\right),$$

unión disjunta.

Definimos la **función de Cantor** o de Cantor-Lebesgue F_0 por

$$\begin{array}{rcl} F_0 & : & [0,1] \rightarrow [0,1] \\ & & x \rightarrow F_0(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si} \quad x \in C \\ f_0(b_k^i) & \text{si} \quad x \in (b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}}) \subset C_k, \\ \text{para todo} \quad i = 1, 2, .., 2^k & \quad \text{y } k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \end{array}$$

Gráficamente

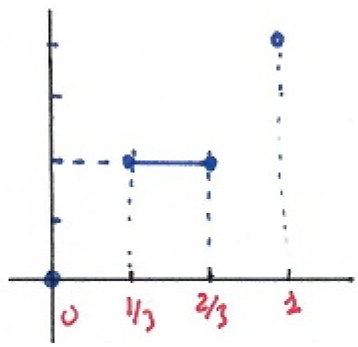


FIGURA 2. Primera iteración de la F_0.

La segunda iteración seria

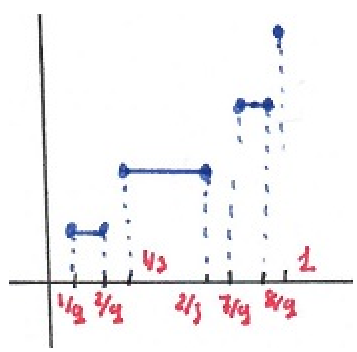


FIGURA 3

Observemos que la función F_0 verifica que:

- $F_0(b_k^i) = F_0(b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}})$, ya que

$$F_0(b_k^i) = f_0(b_k^i) = f_0(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}) = f_0(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + 0 + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^j}) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j/2}{2^j} + 0 + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^{k+1}} = f_0(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{k+1}}) = F_0(b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}}).$$

- F_0 es **creciente**, por serlo f_0 y ser constante en cada $[b_k^i, b_k^i + \frac{1}{3^{k+1}}]$.
- $F_0([0,1]) = [0,1]$, por ser f_0 suprayectiva.
- F es **continua** en todo $[0,1]$, ya que al ser creciente solo puede tener discontinuidades de salto (ver apéndice de Funciones Monótonas). Pero vemos que no las tiene.
  - Si $x \notin C$, entonces x pertenece a un intervalo abierto donde F_0 es constante y por tanto F_0 es continua en x.
  - Si $x = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^N} \in C$, entonces $z_n = x + \frac{1}{3^n} \to_{n\to\infty} x$ y así

$$F_0(z_n) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j/2}{2^j} + \frac{1}{2^N} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = F_0(x) + \frac{1}{2^{n+2}} \to_{n\to\infty} F_0(x),$$

  luego no puede haber discontinuidad de salto.
  - Si Si $x = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^N} \in C$, tomamos $z_n = x - \frac{1}{3^n}$ y se procede igual que en el caso anterior.
  - Si $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in C$, entonces se tomo $z_n = x + \frac{1}{3^n}$ si $a_n = 0$ o $z_n = x - \frac{1}{3^n}$ si $a_n = 2$. Esta sucesión $(z_n)_n$ converge a x, así como la sucesión $(F_0(z_n))_n$ converge a $F_0(x)$, luego no puede haber discontinuidades de salto $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es

ÁLGEBRA LINEAL

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

Como con las funciones reales, se pueden definir funciones complejas de variable compleja.

Definición 1. *Una aplicación f de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \rightarrow & f(z) \end{array}$$

se le llama ***función de variable compleja****.*

Ejemplo 1. *Ejemplos de funciones de variable compleja son*

- ***funciones polinómicas****:*

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ (en particular pueden ser todos o algunos reales).

- ***funciones racionales****:*

$$f(z) = \frac{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0}{\beta_m z^m + ... + \beta_1 z + \beta_0}$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_0, ..., \beta_m \in \mathbb{C}$ (en particular pueden ser todos o algunos reales).

Otro ejemplo importante de función de variable compleja es la exponencial compleja.

Definición 2. *Para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ se define la función* ***exponencial compleja*** *por*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Tomando módulos $|z|$ en la serie y aplicando el criterio del cociente, vemos que la serie que define a la exponencial compleja converge absolutamente para todo z y por tanto es convergente. También se puede ver que la convergencia es uniforme en todo conjunto acotado de $\mathbb{C}$.

La convergencia (o Topología) en $\mathbb{C}$ es la misma que la que tenemos en el plano $\mathbb{R}^2$ y viene dada por el **módulo**, la herramienta que nos permite medir distancias. El módulo nos permite dar la noción de límite y también de derivada.

Definición 3. *Dada una función f de variable compleja y un punto $z_0 \in Dom f$ de su dominio, se dice que*

- *b es el* ***límite de la función*** *en el punto z_0, (escribimos $\lim_{z \to z_0} f(z) = b$) si y solo si*

para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $0 < |z - z_0| < \delta$,

entonces
$$|f(z) - b| < \epsilon.$$

- *f es* ***derivable*** *en el punto z_0 si existe el límite*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};$$
si existe este límite lo denotamos por $f'(z_0)$.

Todo lo anterior es análogo a lo visto para funciones reales y se puede probar que las fórmulas de derivación son las mismas.

Ejemplos 1. *Sean f y g funciones de variable compleja derivables, entonces:*

- $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- *Si $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + ... + \alpha_1 z + \alpha_0$, entonces*
$$P'(z) = n\alpha_n z^{n-1} + (n - 1)\alpha_{n-1} z^{n-2} + ... + \alpha_1.$$
- *Si $f(z) = e^z$, entonces*
$$f'(z) = e^z.$$
Claro, como la serie de potencias, que define e^z, converge uniformemente, se puede derivar término a término y lo que queda es la misma serie.
- *........etc.*

Las funciones de variable compleja derivables (también se llaman **Holomorfas**) tienen buenas propiedades. Por ejemplo, si una función f es derivable en un disco de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$,

$$D(z_0, r) = \{ \ z \in \mathbb{C} \ \ : \ \ |z - z_0| < r \ \},$$

entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \qquad \text{para todo} \qquad z \in D(z_0, r).$$

Es decir, si f es derivable, se puede probar que f tiene derivadas de todos los ordenes y además que coincide con su serie de Taylor (esto se estudiará en los cursos de Variable Compleja).

También se verá que la exponencial compleja tiene las propiedades de la exponencial real:

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad \text{para todo} \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Ahora dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, por al propiedad anterior, se tiene que

$$\boxed{e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)}\,.$$

La última igualdad se debe a la Fórmula de Euler que probamos a continuación.

Proposición 1. (**Fórmula de Euler**) *Si $t \in \mathbb{R}$ entonces*

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

*D*emostración:

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i i^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

donde hemos usado que $i^2 = -1$ y las expresiones en serie de Taylor de las funciones coseno y seno $\square$

De aquí, se deduce la siguiente curiosidad (¿curiosidad o la perfección del universo?).

Observación 1. $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Las siguientes propiedades de la exponencial compleja nos serán útiles a la hora de calcular, por ejemplo transformadas de Fourier.

Proposición 2.
1. $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$
2. $|e^{it}| = 1$
3. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$
4. $\cos nt = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ *y* $\operatorname{sen} nt = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}.$

*D*emostración: 1 y 2 salen directamente de la fórmula de Euler. Para ver 3

$$\overline{e^{it}} = \overline{\cos t + i \operatorname{sen} t} = \cos t - i \operatorname{sen} t = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = e^{-it}$$

Veamos la primera igualdad de 4; la segunda queda como ejercicio.

$$\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}=\frac{cosnt+i\operatorname{sen}nt+\cos nt-i\operatorname{sen}nt}{2}=\cos nt.$$

Una forma de ver 5 es la que sigue

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt+i\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}ntdt$$

$$\frac{\operatorname{sen}nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+i(\frac{-\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi})=\frac{i\operatorname{sen}nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}+(\frac{\cos nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi})=\frac{e^{int}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\ \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`