Calculo Diferencial

Contents

1 Topología en el espacio euclídeo

Definición 1.0.1 [Longitud o Norma euclídea]

Se denomina ***longitud*** *o* ***norma euclídea*** *de un vector* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *al númeor real mayor o igual que cero definido por*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Definición 1.0.2 [Distancia euclídea]

Se llama ***distancia euclídea*** *entre dos vectores* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *al número real mayor o igual que 0 definido por:*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 1.0.3 [Producto escalar euclídeo]

Se llama ***producto escalar euclídeo*** *entre dos vectores* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *al número real, no necesariamente positivo, definido por:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

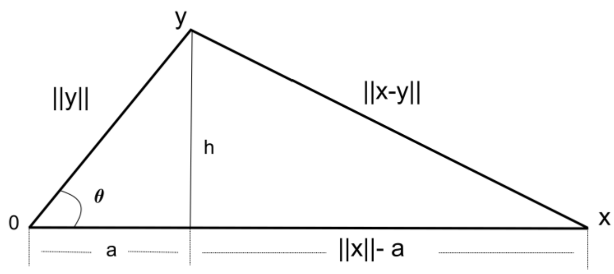
Teorema 1.0.1

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ *o* $\vec{y} = \vec{0}$.
3. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que* $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
4. $\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

Teorema 1.0.2

Para cualesquiera $x, \in \mathbb{R}^2$ *se verifica que* $\langle x, y \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$, *donde* θ *es el ángulo entre los vectores* $\vec{x}$ *y* $\vec{y}$.

Demostración. Dados dos vectores x e y de $\mathbb{R}^2$, que supondremos distintos de 0 (pues si uno de ellos es 0 el resultado es inmediato), consideremos el triángulo de vértices 0, x, y:



Utilizando trigonometría elemental, tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\|y\|}$$

Además, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\|y\|^2 = a^2 + h^2 \implies \|y\|^2 - a^2 = h^2 = \|x-y\|^2 - (\|x\| - a)^2$$

Con lo que:

$$\|x-y\|^2 = \|y\|^2 - a^2 + \|x\|^2 - 2a\|x\| + a^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2a\|x\|$$

Usando que $a = \|y\|\cos\theta$, obtenemos:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

Si ahora usamos las propiedades del producto interior, obtenemos que:

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

De donde se deduce, teniendo en cuenta el valor previamente obtenido de $\|x-y\|^2$, que:

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

$\square$

Definición 1.0.4 [Vectores ortogonales]

Se dice que dos vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son ***ortogonales*** *si $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.*

Proposición 1.0.1 [Propiedades de la norma euclídea]

1. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *(desigualdad triangular).*

Teorema 1.0.3 [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]

Sea $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple que:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Equivalentemente

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Demostración. Fijemos $\vec{x}$ y $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\langle \alpha\vec{x} + \vec{y}, \alpha\vec{x} + \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle , \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$$

Si tomamos $A = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $B = 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ y $C = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$, tenemos que:

$$A\alpha^2 + B\alpha + C \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entoncespodemos distinguir dos casos:

1. Si $A = 0$, entonces $\vec{x} = \vec{0}$ y la desigualdad es trivial.
2. Si $A > 0$, entonces la desigualdad anterior es una ecuación cuadrática en α, y por las propiedades del producto escalar es necasrio que su discriminantes sea no positivo, pues de lo contrario tendría dos raíces reales distintias y entonces la ecuacion tomaría algún valor negativo

$$\implies D = B^2 - 4AC \leq 0 \iff B^2 \leq 4AC \iff 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 4\|x\|^2 \|y\|^2$$

$\square$

Proposición 1.0.2 [Propiedades de la distancia euclídea]

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
4. $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$ *(desigualdad triangular).*

Definición 1.0.5 [Métrica]

*Se llama **métrica** sobre un conjunto arbitrario M a cualquier aplicación $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdad triangular).*

Definición 1.0.6 [Espacio métrico]

Se llama ***espacio métrico*** *a un par* (M,d) *donde* M *es un conjunto no vacío y* d *es una métrica sobre* M*.*

Ejemplo

Vemos algunos ejemploes de métricas:

1. La métrica euclídea en $\mathbb{R}^n$
2. $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
3. $d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$
4. $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ para funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
5. $d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ para funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
6. $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$, que se conoce como la **métrica discreta**.

Definición 1.0.7 [Diámetro]

Se llama ***diámetro*** *de un subconjunto* S *de un espacio métrico* (M,d) *a*

$$diam(S) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}$$

si el conjunto de números reales $\{d(x,y) : x, y \in S\}$ *es acotado superiormente y se define* $diam(S) = +\infty$ *en caso contrario.Cual del diámetro es ifnito se dice que el conjunto es* (acotado)*;*

Definición 1.0.8 [Norma]

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. Se llama* ***norma*** *en* V *a toda aplicación* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in V$.

2. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

3. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *(desigualdad triangular).*

Ejemplo

1. $\|\vec{x}\| = |x|$
2. $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (norma euclídea).

3. $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ (norma l^1).

4. $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$ (norma l^∞).

5. $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ para funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definición 1.0.9 [Producto escalar o interior]

Llamaremos producto escalar o producto interior en V a toda aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle \geq 0 \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in V$.
2. $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle\vec{y},\vec{x}\rangle$.
4. $\langle\alpha\vec{x},\vec{y}\rangle = \alpha\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle = \langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle$ *para todo* $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$.

Definición 1.0.10 [Igualdad del paralelogramo]

Sea una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial V. Se dice que la norma cumple la ***igualdad del paralelogramo*** *si la norma procede de un producto escalar*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

Demostración.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}\rangle =$$
$$= \|\vec{x}\|^2 + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - \langle\vec{x},\vec{y}\rangle - \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \|\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

□

Definición 1.0.11 [Bola abierta]

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos ***bola abierta*** *de centro x_0 y radio r al conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r\}$$

donde d es la métrica que se está considerando en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.0.12 [Conjunto abierto]

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es ***abierto*** *si para todo punto $x_0 \in A$ existe un número real $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$.*

Proposición 1.0.3 [Propiedades de los conjuntos abiertos]

1. *El conjunto vacío y el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ son abiertos.*
2. *La unión de abiertos es un abierto*
3. *La interseccion finita de abiertos es un abierto.*

Definición 1.0.13 [Punto abierto]

Se dice que un punto $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ es un ***punto abierto*** *de S si existe una bola abierta $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \subset S$. Denotamos por S° al conjunto de los puntos abiertos de S.*

Observación 1.0.1

S° puede ser vacío, por ejemplo si S es un subconjunto con un solo punto

Proposición 1.0.4 [Propiedades de los puntos abiertos]

1. *S° es el mayor abierto contenido en S*
2. *S° es la unión de todos los abiertos contenidos en S.*
3. *S es abierto si y solo si $S = S^\circ$.*

Demostración.

1. S° es abierto, pues dado $x \in S^\circ$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset S$. Entonces sucede que $B(x,r) \subset S^\circ$, pues al ser $B(x,r)$ un abierto, entonces $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ \subset S^\circ$. Por otra parte, si A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ contenido en S, entonces para todo punto de A hay una bola centrada en él contenida en A y por lo tanto en S, lueg todos los puntos de A están en S°
2. Es claro que el mayor abierto contenido en S es la unión de todos los abiertos contenidos en S
3. Si S es abierto, entonces él es el mayor abierto contenido en S, luego $S = S^\circ$. Por otra parte, si $S = S^\circ$, entonces S es abierto, pues para todo punto $x \in S$, existe una bola abierta $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \subset S$, luego S es abierto.

□

Definición 1.0.14 [Bola cerrada]

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos ***bola cerrada*** *de centro x_0 y radio r al conjunto*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

Demostración. □