

Calculo Diferencial

Contents

1	Topología en el espacio euclídeo	2
---	--	---

1 Topología en el espacio euclídeo

Definición 1.0.1 [Longitud o Norma euclídea]

Se denomina **longitud o norma euclídea** de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ al número real mayor o igual que cero definido por

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Definición 1.0.2 [Distancia euclídea]

Se llama **distancia euclídea** entre dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ al número real mayor o igual que 0 definido por:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 1.0.3 [Producto escalar euclídeo]

Se llama **producto escalar euclídeo** entre dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ al número real, no necesariamente positivo, definido por:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

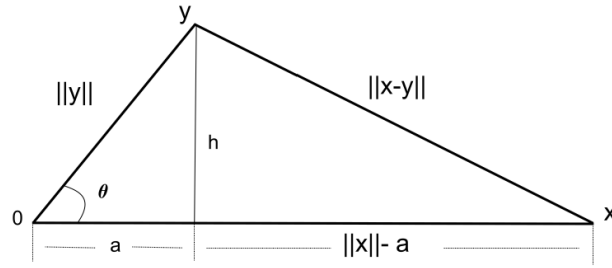
Teorema 1.0.1

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \text{ o } \vec{y} = \vec{0}.$
3. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle.$
4. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}.$
5. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle.$

Teorema 1.0.2

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^2$ se verifica que $\langle x, y \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores \vec{x} y \vec{y} .

Demostración. Dados dos vectores x e y de \mathbb{R}^2 , que supondremos distintos de 0 (pues si uno de ellos es 0 el resultado es inmediato), consideremos el triángulo de vértices 0, x , y :



Utilizando trigonometría elemental, tenemos que:

$$\cos \theta = \frac{a}{\|y\|}$$

Además, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\|y\|^2 = a^2 + h^2 \implies \|y\|^2 - a^2 = h^2 = \|x - y\|^2 - (\|x\| - a)^2$$

Con lo que:

$$\|x - y\|^2 = \|y\|^2 - a^2 + \|x\|^2 - 2a\|x\| + a^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2a\|x\|$$

Usando que $a = \|y\| \cos \theta$, obtenemos:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos \theta$$

Si ahora usamos las propiedades del producto interior, obtenemos que:

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

De donde se deduce, teniendo en cuenta el valor previamente obtenido de $\|x - y\|^2$, que:

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos \theta$$

□

Definición 1.0.4 [Vectores ortogonales]

Se dice que dos vectores \vec{x} y \vec{y} son **ortogonales** si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Proposición 1.0.1 [Propiedades de la norma euclídea]

1. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad triangular).

Teorema 1.0.3 [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]

Sea $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple que:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Equivalentemente

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Demostración. Fijemos \vec{x} y $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\langle \alpha \vec{x} + \vec{y}, \alpha \vec{x} + \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq 0$$

Si tomamos $A = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $B = 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ y $C = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$, tenemos que:

$$A\alpha^2 + B\alpha + C \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entonces podemos distinguir dos casos:

1. Si $A = 0$, entonces $\vec{x} = \vec{0}$ y la desigualdad es trivial.
2. Si $A > 0$, entonces la desigualdad anterior es una ecuación cuadrática en α , y por las propiedades del producto escalar es necesario que su discriminante sea no positivo, pues de lo contrario tendría dos raíces reales distintas y entonces la ecuación tomaría algún valor negativo

$$\implies D = B^2 - 4AC \leq 0 \iff B^2 \leq 4AC \iff 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 4\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

□

Proposición 1.0.2 [Propiedades de la distancia euclídea]

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$.
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
4. $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$ (desigualdad triangular).

Definición 1.0.5 [Métrica]

Se llama **métrica** sobre un conjunto arbitrario M a cualquier aplicación $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Definición 1.0.6 [Espacio métrico]

Se llama **espacio métrico** a un par (M, d) donde M es un conjunto no vacío y d es una métrica sobre M .

Ejemplo

Vemos algunos ejemplos de métricas:

1. La métrica euclídea en \mathbb{R}^n
2. $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
3. $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$
4. $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ para funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
5. $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ para funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
6. $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$, que se conoce como la **métrica discreta**.

Definición 1.0.7 [Diámetro]

Se llama **diámetro** de un subconjunto S de un espacio métrico (M, d) a

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

si el conjunto de números reales $\{d(x, y) : x, y \in S\}$ es acotado superiormente y se define $\text{diam}(S) = +\infty$ en caso contrario. Cuando el diámetro es infinito se dice que el conjunto no es **acotado**.

Definición 1.0.8 [Norma]

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Se llama **norma** en V a toda aplicación $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in V$.
2. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualdad triangular).

Ejemplo

1. $\|\vec{x}\| = |x|$
2. $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (norma euclídea).

3. $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ (norma l^1).
4. $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$ (norma l^∞).
5. $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ para funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.0.9 [Producto escalar o interior]

Llamaremos *producto escalar o producto interior* en V a toda aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.
2. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.
4. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$.

Definición 1.0.10 [Igualdad del paralelogramo]

Sea una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial V . Se dice que la norma cumple la **igualdad del paralelogramo** si la norma procede de un producto escalar

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \|\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

□

Definición 1.0.11 [Bola abierta]

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos **bola abierta** de centro x_0 y radio r al conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r\}$$

donde d es la métrica que se está considerando en \mathbb{R}^n .

Definición 1.0.12 [Conjunto abierto]

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para todo punto $x_0 \in A$ existe un número real $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$.

Proposición 1.0.3 [Propiedades de los conjuntos abiertos]

1. El conjunto vacío y el espacio euclídeo \mathbb{R}^n son abiertos.
2. La unión de abiertos es un abierto
3. La intersección finita de abiertos es un abierto.

Definición 1.0.13 [Punto abierto]

Se dice que un punto $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ es un **punto abierto** de S si existe una bola abierta $B(x, r)$ tal que $B(x, r) \subset S$. Denotamos por S° al conjunto de los puntos abiertos de S .

Observación 1.0.1

S° puede ser vacío, por ejemplo si S es un subconjunto con un solo punto

Proposición 1.0.4 [Propiedades de los puntos abiertos]

1. S° es el mayor abierto contenido en S
2. S° es la unión de todos los abiertos contenidos en S .
3. S es abierto si y solo si $S = S^\circ$.

Demostración. 1. S° es abierto, pues dado $x \in S^\circ$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset S$. Entonces sucede que $B(x, r) \subset S^\circ$, pues al ser $B(x, r)$ un abierto, entonces $B(x, r) = [B(x, r)]^\circ \subset S^\circ$. Por otra parte, si A es un abierto de \mathbb{R}^n contenido en S , entonces para todo punto de A hay una bola centrada en él contenida en A y por lo tanto en S , luego todos los puntos de A están en S°

2. Es claro que el mayor abierto contenido en S es la unión de todos los abiertos contenidos en S

3. Si S es abierto, entonces él es el mayor abierto contenido en S , luego $S = S^\circ$. Por otra parte, si $S = S^\circ$, entonces S es abierto, pues para todo punto $x \in S$, existe una bola abierta $B(x, r)$ tal que $B(x, r) \subset S$, luego S es abierto.

□

Definición 1.0.14 [Bola cerrada]

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos **bola cerrada** de centro x_0 y radio r al conjunto

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

Proposición 1.0.5

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Entonces se cumple que:

$$[\overline{B}(x_0, r)]^\circ = B(x_0, r)$$

Demostración. “ \subset ”

Sea $x \in [\overline{B}(x_0, r)]^\circ \implies \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset \overline{B}(x_0, r)$ tal que $\|x - x_0\| = r$

Sea $y = x + \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \cdot \frac{1}{2}r_x \implies \|y - x\| = \frac{1}{2}r_x < r_x \implies y \in B(x, r_x)$

No obstante,

$$\|y - x_0\| = \|x - x_0\| \left(1 + \frac{1}{\|x - x_0\|} \frac{1}{2}r_x\right) > \|x - x_0\| = r$$

Por tanto llegamos a que ningún punto de la frontera de la bola cerrada puede estar en su interior. “ \supset ”

Esta inclusión es inmediata pues $B(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r)$ y al ser $B(x_0, r) = [B(x_0, r)]^\circ$ resulta que $B(x_0, r) \subset [\overline{B}(x_0, r)]^\circ$.

□

Definición 1.0.15 [Conjunto cerrado]

Se dice que un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complementario (respecto a \mathbb{R}^n) es abierto.

Proposición 1.0.6 [Propiedades de los conjuntos cerrados]

1. El conjunto vacío y el espacio euclídeo \mathbb{R}^n son cerrados.
2. La intersección de cerrados es un cerrado.
3. La unión finita de cerrados es un cerrado.

Definición 1.0.16 [Punto de acumulación]

Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de acumulación** de un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta centrada en x contiene algún punto de S distinto de x . Equivalentemente,

$$x \text{ es un punto de acumulación de } S \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación de un conjunto se le suele denominar S'

Ejemplo

1. Todo punto del intervalo $[0, 1]$ es un punto de acumulación de $(0, 1)$.
2. El punto 0 es un punto de acumulación de $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \implies S' = [0, 1]$.

Teorema 1.0.4

S es cerrado si y solo si $S' \subset S$.

Demostración. “ \Rightarrow ” Supongamos que S es cerrado. Entonces sea $x \in S' : x \notin S \Rightarrow$ cualquier bola de centro en x contiene puntos de $S \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus S$ no es abierto, luego llegamos a contradicción y que $x \in S$.

“ \Leftarrow ” Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus S \Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$ (pues x no es punto de acumulación de S). Por tanto, $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$, luego $\mathbb{R}^n \setminus S$ es abierto y por tanto S es cerrado. \square

Definición 1.0.17 [Punto adherente]

Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto adherente** de un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta centrada en x contiene algún punto de S . Equivalentemente,

$$x \text{ es un punto adherente de } S \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap S \neq \emptyset$$

Definición 1.0.18 [Adherencia o clausura]

Se llama **adherencia** o **clausura** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ al conjunto de sus puntos adherentes, denotado por \overline{S} .

Proposición 1.0.7 [Propiedades de la adherencia]

1. \overline{S} es cerrado y es el menor cerrado que contiene a S ($S \subset \overline{S}$)
2. \overline{S} es la intersección de todos los cerrados que contienen a S .
3. S es cerrado si y solo si $S = \overline{S}$.

Demostración. 1. Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{S} \Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \cap S = \emptyset \Rightarrow \forall y \in B(x, r) : B(y, r - d(y, x)) \cap S = \emptyset \Rightarrow y \notin \overline{S} \Rightarrow B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{S}$.

Por otro lado, si C es un cerrado que contiene a S , entonces C debe contener a \overline{S} , pues C contiene a S y a S' debido a que $S' \subset C' \subset C$ por ser C cerrado.

2. Es claro que el menor cerrado que contiene a un conjunto es la intersección de todos los cerrados que lo contienen. Además, la intersección finita de cerrados es cerrada.

3. Si S es cerrado es claro que él mismo es el menor cerrado que lo contiene, luego $S = \overline{S}$. Recíprocamente, por lo visto en el primer apartado, si \overline{S} es cerrado, entonces si $S = \overline{S}$, entonces S es cerrado. \square

Definición 1.0.19 [Distancia]

Dados un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se define la **distancia** de x a S como

$$d(x, S) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}$$

Teorema 1.0.5

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si $d(x, S) = 0$.

Demostración. “ \rightarrow ” $x \in \bar{S} \implies \forall r > 0, \exists y \in S : d(x, y) < r \implies \inf\{d(x, y) : y \in S\} = 0$. Obsérvese que como $x \in S$ este ínfimo se alcanza y es mínimo.

“ \leftarrow ” El $\inf\{d(x, y) : y \in S\} = 0$ implica que $\forall \epsilon > 0, \exists y \in S : d(x, y) < \epsilon$. Entonces $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$, luego x es un punto adherente de S . \square

Definición 1.0.20 [Punto frontera]

Se llama **punto frontera** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ a todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall r > 0$, se cumple que:

$$B(x, r) \cap S \neq \emptyset \text{ y } B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$$

Equivalentemente, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de S si y solo si $x \in \bar{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$.

Definición 1.0.21 [Punto aislado]

Se dice que un punto $x \in S$ es un **punto aislado** de S si existe un número real $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap S = \{x\}$.

Definición 1.0.22 [Sucesión]

Se llama **sucesión** en \mathbb{R}^n a toda aplicación $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como se hace en el caso de sucesiones de números reales, se identificará x con la “tira” de sus valores $(x(1), x(2), \dots)$. Normalmente se escribirá x_k en vez de $x(k)$ y las sucesiones se representarán por $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, $\{x_k\}$, $(x_k)_{k=0}^\infty$ o (x_k) . Obsérvese que cada x_k es un punto de \mathbb{R}^n y por lo tanto es de la forma $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$.

Definición 1.0.23 [Convergencia de sucesiones]

Se dice que una sucesión $\{x_k\}$ **converge** a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si la sucesión de números reales $\{d(x_k, x_0)\}$ converge a 0. Esto es,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tal que } k \geq \nu \implies d(x_k, x_0) < \epsilon.$$

Definición 1.0.24 [Subsucesión]

Se llama **subsucesión** de una sucesión $\{x_k\}$ a toda aplicación $m \in \mathbb{N} \rightarrow x_{k_m}$ es uno de los términos de la sucesión $\{x_k\}$ que verifique la condición de que la aplicación $m \in \mathbb{N} \rightarrow k_m$ sea estrictamente creciente.

Proposición 1.0.8

$$x \in \bar{S} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset S : x_k \rightarrow x$$

Demostración. “ \Rightarrow ” Sea $x \in \bar{S} \implies \forall r > 0, B(x, r) \cap S \neq \emptyset \implies \exists y : d(x, y) < r$. Si tomamos $r = \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}$, entonces $\exists y_k \in S : d(x, y_k) < \frac{1}{k}$. Por tanto, la sucesión $\{y_k\}$ converge a x .

“ \Leftarrow ” Sea $\{x_k\} \subset S$ tal que $x_k \rightarrow x$. Entonces, por definición de convergencia, para todo $\epsilon > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \implies d(x_k, x) < \epsilon \iff x_k \in B(x, \epsilon)$ y como $x_k \in S$, entonces $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \bar{S}$. \square

Teorema 1.0.6

Si una sucesión $\{x_k\}$ convergen a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces toda subsucesión de $\{x_k\}$ también converge a x_0 .

Demostración. $\{x_k\} \rightarrow x_0 \implies \forall \epsilon \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n \implies d(x_k, x_0) < \epsilon \implies$ Sea $\{x_{k_m}\}$ una subsucesión de $\{x_k\}$, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_m \geq n \implies d(x_{k_m}, x_0) < \epsilon$, entonces $\forall m \geq n$ se tiene que $k_m \geq m \geq n$ y por tanto $d(x_{k_m}, x_0) < \epsilon$. \square

Definición 1.0.25 [Sucesión de Cauchy]

Se dice que una sucesión es de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Teorema 1.0.7

Una sucesión de \mathbb{R}^n es convergente si y solo si es de Cauchy.

Demostración. “ \implies ” Sea $\{x_k\}$ una sucesión convergente a x_0 , entonces dado $\epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} k \geq n \implies d(x_k, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Por si tomamos $m, n \geq N$, entonces tenemos por la desigualdad triangular que:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo que nos proporciona la condición de Cauchy. “ \Leftarrow ” Sea $\{x_k\}$ una sucesión de Cauchy, entonces dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$. En particular, la sucesión $\{x_{k,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de número reales y por tanto por el curso de Análisis en Variable Real sabemos que existe $x_{0,i} \in \mathbb{R}$ tal que $x_{k,i} \rightarrow x_{0,i}$. Considerando que $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$ \square

Definición 1.0.26

1. Llamaremos **recubrimiento** de un subconjunto S de \mathbb{R}^n a cualquier colección de subconjuntos de \mathbb{R}^n cuya unión contenga a S
2. Se dice que un recubrimiento es **abierto** si los conjuntos que lo forman son abiertos.
3. Llamaremos **subrecubrimiento** de un recubrimiento de un conjunto S a toda colección de elementos del recubrimiento que sea un recubrimiento de S
4. Finalmente llamaremos **recubrimiento finito** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ cuando se trate de un recubrimiento de S formado por una cantidad finita de subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Definición 1.0.27 [Compacidad]

Se dice que un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** si todo recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito.

Ejemplo

1. $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ es conjunto compacto de \mathbb{R} . En efecto, si tomamos un recubrimiento abierto $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ (Λ es un conjunto arbitrario) de nuestro conjunto, entonces el 0 debe estar en un cierto A_{α_0} . Al ser A_{α_0} abierto existe un intervalo centrado en 0 contenido en A_{α_0} . Como la sucesión $\{1/k\}$ converge a 0 existe ν tal que los x_k , con $k \geq \nu$, pertenecen a A_{α_0} . Luego si consideramos una cantidad finita de abiertos A_α que contengan a los puntos $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{\nu-1}$ y el A_{α_0} tendremos un subrecubrimiento finito del conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. El mismo argumento prueba que el conjunto formado por los puntos de una sucesión convergente y su límite es un conjunto compacto.
2. El conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ no es compacto pues del recubrimiento de él formado por los abiertos $A_i : i \in \mathbb{N}$, donde $A_i = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}\right)$, no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.
3. El conjunto $(0, 2)$ no es compacto, pues del recubrimiento abierto

$$\left\{ (1, 3), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \dots \right\}$$

de él no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

Proposición 1.0.9

Los subconjuntos cerrados contenidos en un compacto son compactos.

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado contenido en K compacto. Consideremos un recubrimiento $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de C formado por abiertos. Llamaremos A al complementario de C en \mathbb{R}^n (i.e. $A = \mathbb{R}^n \setminus C$). Entonces $\{A_\alpha \cup A : \alpha \in \Delta\}$ es un recubrimiento abierto de K por lo que existirán $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta$ tales que $K \subset A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_k} \cup A$. Evidentemente, $C \subset A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_k}$, luego $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_k}\}$ es un subrecubrimiento finito de C . \square

Teorema 1.0.8 [Teorema de Bolzano-Weierstrass de compacidad por sucesiones]

Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda sucesión de elementos de K tiene una subsucesión convergente a un punto de K .

Demostración. “ \Rightarrow ” Sea K un conjunto compacto y sea $\{x_k\} \subset K$ una sucesión de elementos de K tal que no tiene ninguna subsucesión convergente a un punto de K .

Entonces $\{x_k\}$ tiene que tener infinitos elementos distintos, pues en caso contrario tendría subsucesiones convergente a un punto de K . Denotemos por $\{x_{k_m}\}$ subsucesión de $\{x_k\}$ y S al conjunto formado por los puntos de la subsucesión. Entonces, $S' = \emptyset$ pues si existiese $x_0 \in S'$ entonces habría una subsucesión de puntos de S convergente a x_0 .

Ésto nos permite afirmar que $\forall m \in \mathbb{N} \exists r_m > 0 : B(x_{k_m}, r_m) \cap S = \{x_{k_m}\}$ (ya que el conjunto de puntos de acumulación de S es nulo $S' = \emptyset$) y que S es cerrado (pues contiene a $S' = \emptyset$) ya que como S está contenido en el compacto K es también compacto, pero ésto no es posible ya que del recubrimiento de S formado por las bolas abiertas $B(x_{k_m}, r_m)$ no es posible extraer ninguno finito.

“ \Leftarrow ” Supongamos que K tiene una sucesión de elementos de K que no tiene una subsucesión convergente a un punto de K . Entonces,

1. Veamos que $\forall r > 0$ existe un recubrimiento de abiertos definido por $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, r)$, entonces existe una cantidad finita x_1, \dots, x_m de puntos de K tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r)$$

Si ésto no fuera así, existiría un $r_0 > 0$ tal que K no se podría recubrir por ninguna cantidad finita de bolas de radio r_0 centradas en puntos de K :

Si fijamos $x_1 \in K$ como $B(x_1, r_0)$ no recubre a K existe $x_2 \in K \setminus B(x_1, r_0)$, como tampoco $B(x_1, r_0) \cup B(x_2, r_0)$ recubre a K existe $x_3 \in K \setminus (B(x_1, r_0) \cup B(x_2, r_0))$ y así sucesivamente, obtenemos una sucesión de puntos de K tales que no tienen ninguna subsucesión convergente, pues para cada $p, q \in \mathbb{N}$ $d(x_p, x_q) \geq r_0$, pero ésto llega a contradicción con la hipótesis.

2. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ un recubrimiento abierto de K veremos como podemos extraer un subrecubrimiento finito:

Sabemos que existe $r^* > 0$ que $\forall x \in K \exists \alpha_x \in \Delta : B(x, r^*) \subset A_{\alpha_x}$, ya que en caso contrario existiría para todo $k \in \mathbb{N}$ un $x_k \in K$ tal que $B(x_k, \frac{1}{k})$ no estaría contenida en A_β cualquiera que sea $\beta \in \Delta$; es decir, las bolas pequeñas alrededor de x_k no caben enteramente en ningún A_β . La sucesión $\{x_k\}$ así formada deberá tener una subsucesión $\{x_{k_m}\}_{m=1}^{+\infty}$ convergente a un punto $x_0 \in K$ (por hipótesis). Ese punto x_0 deberá estar en algún A_{α_0} abierto, por lo que existe un $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \subset A_{\alpha_0}$.

Si tomamos un m lo suficientemente grande para que $d(x_{k_m}, x_0) < \frac{r_0}{2}$ y $\frac{1}{k_m} < \frac{r_0}{2}$. Entonces $B(x_{k_m}, \frac{1}{k_m}) \subset B(x_0, r_0) \subset A_{\alpha_0}$, lo que contradice que el que $B(x_{k_m}, \frac{1}{k_m})$ no estuviera contenido en A_β para ningún $\beta \in \Delta$, por la suposición inicial.

3. Finalmente, fijemos un $r^* > 0$ tal que para todo $x \in K \exists \alpha_x \in \Delta : B(x, r^*) \subset A_{\alpha_x}$, por lo que, por lo visto anteriormente existen puntos $x_1, \dots, x_k \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r^*)$ y dado que cada $B(x_i, r^*)$ está contenido en algún $A_{\alpha_{x_i}}$, vemos que una cantidad finita de A_α ya recubren a K .

□

Teorema 1.0.9 [Teorema de Bolzano-Weierstrass de compacidad por conjuntos]

Un conjunto K es compacto si y sólo si todo subconjunto de él con infinitos elementos tiene un punto de acumulación en K .

Demostración. “ \Rightarrow ” Sea K un conjunto compacto y sea $S \subset K$ un subconjunto de K con infinitos elementos, entonces podemos formar una sucesión de elementos distintos y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass de compacidad por sucesiones, tenemos que existe una subsucesión convergente a un punto $x_0 \in K$. Por tanto, x_0 es un punto de acumulación de S y por tanto de K .

“ \Leftarrow ” Dada una sucesión de elementos de K pueden suceder dos cosas:

1. Tengan infinitos elementos distintos, en cuyo caso, por hipótesis, es un punto de acumulación de K y en consecuencia una subsucesión convergente a un punto de K .
2. No tenga infinitos términos distintos, en cuyo caso, necesariamente hay algún término que se repite infinitas veces, con lo que ya tiene una subsucesión convergente a un elemento de K .

□

Teorema 1.0.10 [Teorema de Heine-Borel]

Un conjunto es compacto \iff es cerrado y acotado.

Demostración. “ \Leftarrow ”

Sea K un conjunto cerrado y acotado. Consideremos una sucesión $\{x_k\} \subset K$ de puntos de K , y tomemos las sucesiones de sus coordenadas, dadas por $\{x_{k,i}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Tomemos $i = 1$. Se sabe, por el curso de Análisis en Variable Real, que al ser la sucesión $\{x_{k,1}\}$ acotada en \mathbb{R} , existe una subsucesión $\{x_{k_{\ell},1}\}$ que converge a un punto $x_{0,1}$ (teorema de Bolzano–Weierstrass para sucesiones de números reales).

La sucesión $\{x_{k_{\ell},2}\}$, por la misma razón, tiene una subsucesión convergente $\{x_{k_{\ell_r},2}\}$ a un punto $x_{0,2}$.

Reiterando este proceso para cada coordenada $i = 1, \dots, n$, obtenemos finalmente una sucesión

$$\{x_{k_{\ell_1 \dots \ell_n}}\}$$

convergente a un punto $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$.

Este punto es adherente a la sucesión $\{x_k\}$, y por tanto, adherente a K . Como K es cerrado, se concluye que $x_0 \in K$.

” \Rightarrow ” Demostraremos primero que si un conjunto es compacto, entonces es cerrado:

Sea K un compacto, probaremos que $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto. Para ello sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Como $x \notin K$ entonces $\forall y \in K \exists r_y > 0 : B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. Es claro que K está contenido en $\bigcup_{y \in K} B(y, r_y)$ y por tanto existen puntos $y_1, \dots, y_k \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, r_{y_i})$. Entonces la bola de centro x y radio igual al mínimo de los r_{y_i} está contenida en $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Ahora veamos que si es compacto, está acotado:

Sea K un conjunto compacto. Del recubrimiento por bolas abiertas $\{B(0, k) : k = 1, 2, \dots\}$ se tiene que poder extraer no finito. Esto es $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B(0, k_0)$ con lo que

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in K\} \leq 2k_0$$

y entonces K es acotado. □

Definición 1.0.28 [Limite]

Se dice que f tiene por **límite** l en el punto x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \implies d(f(x), l) < \epsilon$$

Teorema 1.0.11

Si la función f toma valores reales $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ y $l \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

Demostración. Como $l \neq 0$ existe una bola cenrada en x_0 tal que la función es no nula en ella, o equivalentemente, $l \neq 0 \exists \delta_1 > 0 : f(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, \delta_1) \cap S$ tal que $x \neq x_0$.

Asimismo, también tenemos que para cierto $\delta_1 > 0$ se cumple que para $\epsilon = \frac{|l|}{2}$, $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$ para todo $x \in B(x_0, \delta_1) \setminus \{x_0\}$. Con lo que obtenemos que $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$. Para los $x \in B(x_0, \delta_1) \cap S$ se verifica que:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l - f(x)}{lf(x)} \right| = \frac{|f(x) - l|}{|l||f(x)|} \leq \frac{|f(x) - l|}{\frac{|l|^2}{2}}$$

Dado un $\epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta_2) \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - l| < \epsilon \cdot \frac{|l|^2}{2}$. Luego para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple que para todo $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \epsilon$$

□

Teorema 1.0.12 [Criterio del límite por sucesiones]

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función que tiene límite l en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_k\} \subset S$ tal que $x_k \rightarrow x_0$, se cumple que $f(x_k) \rightarrow l$.

Demostración. “ \implies ” Sean $x_0 \in S$ y $\{x_k\} \subset S : x_k \rightarrow x_0$ y $x_k \neq x_0 \forall k$. Dado $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $x \in S$ y $0 < d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), l) < \epsilon$. Como $x_k \rightarrow x_0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $d(x_k, x_0) < \delta$ y por tanto $d(f(x_k), l) < \epsilon$. Luego $f(x_k) \rightarrow l$.

“ \impliedby ”

Supongamos que f no tiene límite $\implies \exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in S : 0 < d(x, x_0) < \delta$ tal que $d(f(x), l) \geq \epsilon_0$. En particular $\forall k (\delta = \frac{1}{k}) \exists x_k \in S : 0 < d(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ y $d(f(x_k), l) \geq \epsilon_0$. Por tanto, la sucesión $\{x_k\}$ vemos que $d(x_k, x_0) \rightarrow 0$ pero como $d(f(x_k), l) \geq \epsilon_0$ entonces $f(x_k) \not\rightarrow l$. Luego llegamos a contradicción y si que tiene que haber límite. □

Definición 1.0.29 [Continuidad]

Sean S un subconjunto de \mathbb{R}^n , x_0 un punto de $S \cap S'$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que f es **continua** en x_0 si existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, equivalentemente,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in S, 0 < d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Teorema 1.0.13 [Criterio de continuidad por sucesiones]

Sean S un subconjunto de \mathbb{R}^n , $x_0 \in S \cap S'$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces, f es continua en x_0 si y solo si para toda sucesión $\{x_k\} \subset S$ tal que $x_k \rightarrow x_0$, se cumple que $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$.

Definición 1.0.30 [Aplicación continua]

Diremos que una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **continua** si es continua en cada punto de S .

Observación 1.0.2

Sean $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in S$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

- Si f y g son continuas en x_0 , entonces $f + g$ también es continua en x_0 .
- Si f es continua en x_0 , entonces αf también es continua en x_0 .
- Si $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en x_0 , entonces fg es continua en x_0 .

- Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 y $f(x) \neq 0$ para todo x en un entorno de x_0 , entonces $\frac{1}{f}$ es continua en x_0 .

Teorema 1.0.14

Para una aplicación $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es continua en S
2. Para todo abierto $A \subset \mathbb{R}^m$, existe un abierto $B \subset S$ tal que $f^{-1}(A) = B \cap S$ (es decir, $f^{-1}(A) \subset S$)

Demostración. “ \Rightarrow ”

Hagamos una distinción de casos:

1. $f^{-1}(A) = \emptyset \implies B = \emptyset$ que cómo es abierto, lo cumple.
2. Si $f^{-1}(A) \neq \emptyset$: $\forall x \in f^{-1}(A) \exists \epsilon_x > 0 : B(f(x), \epsilon_x) \subset A$. La continuidad de f en x nos da que existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B(x, \delta_x) \cap S) \subset B(f(x), \epsilon_x)$. Sea $B = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B(x, \delta_x)$ abierto. Veamos que se cumple que $f^{-1}(A) = B \cap S$:
 - “ \subset ”: $x_0 \in f^{-1}(A) \implies x \in B \cap S$
 - “ \supset ”: Si $x_0 \in B \cap S$, entonces existe $x \in f^{-1}(A)$ tal que $x_0 \in B(x, \delta_x)$ como $f(B(x, \delta_x) \cap S) \subset B(f(x), \epsilon_x) \subset A \implies f(x_0) \in A \implies x_0 \in f^{-1}(A)$.

“ \Leftarrow ”

Dado $x_0 \in S$ y $\epsilon > 0$ consideremos la bola abierta $A = B(f(x_0), \epsilon)$ y el abierto B tal que $f^{-1}(A) = B \cap S$. Como $x_0 \in f^{-1}(A)$, entonces $x_0 \in B \cap S$, y dado que B es un abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset B \implies f(B(x_0, \delta) \cap S) \subset B(f(x_0), \epsilon)$. \square

Definición 1.0.31 [Homeomorfismo]

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow T \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación continua y biyectiva. Se dice que f es un **homeomorfismo** si su inversa $f^{-1} : T \rightarrow S$ también es continua.

Teorema 1.0.15

Si f es una aplicación continua en K compacto $\implies f(K)$ es un compacto en \mathbb{R}^m .

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$, entonces $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} f^{-1}(A_\alpha)$. Para cada $\alpha \in \Delta$ sea G_α un abierto de \mathbb{R}^n tal que $f^{-1}(A_\alpha) = G_\alpha \cap K$. Entonces, $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$. La compacidad de K nos da la existencia de un conjunto finito de índices $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta$ tal que $K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_k}$. Por tanto, $f(K) \subset A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_k}$, lo que implica que $f(K)$ es compacto. \square

Teorema 1.0.16 [Teorema del máximo y el mínimo]

Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, siendo K compacto

$$\implies \exists a, b \in K : f(a) = \inf f(x) : x \in K \text{ y } f(b) = \sup f(x) : x \in K$$

Demostración. $f(K)$ es compacto (por teorema anterior) $\implies f(K)$ es acotado \implies tiene ínfimo y supremo. El ínfimo es un punto adhiere pero como $f(K)$ es cerrado ese punto pertenece al conjunto luego es $f(a)$ para algún $a \in K$ y lo mismo con el supremo. \square

Definición 1.0.32 [Continuidad uniforme]

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es **uniformemente continua** en S si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in S, d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Observación 1.0.3

La diferencia esencial con respecto a la continuidad en cada punto es que aquí dado un ϵ existe un único δ que sirva para todo par de puntos de S que estén a una distancia menor que δ .

Teorema 1.0.17

Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua en S y $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy en S , entonces $\{f(x_k)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^m .

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ Por cada $x \in K \exists \delta_x > 0$ tal que si $y \in K$ y $d(x, y) < \delta_x$ entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. La colección de bolas $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ cuando x varia en K es un recubrimiento abierto de K , luego existen $x_1, \dots, x_k \in K$ tales que $K \subset B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}) \cup \dots \cup B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2})$. Sea δ el mínimo de los δ_{x_i} , entonces dados x e $y \in K$ tales que $d(x, y) < \delta$ consideramos un $j = 1, \dots, k$ tal que $x \in B(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$ resulta que $y \in B(x_j, \delta_{x_j})$ pues:

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) < \delta_{x_j}$$

En consecuencia

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

\square