Calculo Diferencial

Contents

1 Topología en el espacio euclídeo

Definición 1.0.1 [Longitud o Norma euclídea]

*Se denomina **longitud** o **norma euclídea** de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ al númeor real mayor o igual que cero definido por*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Definición 1.0.2 [Distancia euclídea]

*Se llama **distancia euclídea** entre dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ al número real mayor o igual que 0 definido por:*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 1.0.3 [Producto escalar euclídeo]

*Se llama **producto escalar euclídeo** entre dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ al número real, no necesariamente positivo, definido por:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

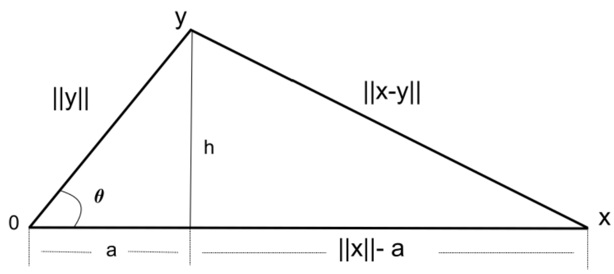
Teorema 1.0.1

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ *o* $\vec{y} = \vec{0}$.
3. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que* $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
4. $\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

Teorema 1.0.2

Para cualesquiera $x, \in \mathbb{R}^2$ se verifica que $\langle x, y \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$.

Demostración. Dados dos vectores x e y de $\mathbb{R}^2$, que supondremos distintos de 0 (pues si uno de ellos es 0 el resultado es inmediato), consideremos el triángulo de vértices 0, x, y:



Utilizando trigonometría elemental, tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\|y\|}$$

Además, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\|y\|^2 = a^2 + h^2 \implies \|y\|^2 - a^2 = h^2 = \|x-y\|^2 - (\|x\| - a)^2$$

Con lo que:

$$\|x-y\|^2 = \|y\|^2 - a^2 + \|x\|^2 - 2a\|x\| + a^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2a\|x\|$$

Usando que $a = \|y\|\cos\theta$, obtenemos:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

Si ahora usamos las propiedades del producto interior, obtenemos que:

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

De donde se deduce, teniendo en cuenta el valor previamente obtenido de $\|x-y\|^2$, que:

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

□

Definición 1.0.4 [Vectores ortogonales]

*Se dice que dos vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son **ortogonales** si $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$.*

Proposición 1.0.1 [Propiedades de la norma euclídea]

1. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *(desigualdad triangular).*

Teorema 1.0.3 [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]

Sea $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple que:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Equivalentemente

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Demostración. Fijemos $\vec{x}$ y $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\langle \alpha\vec{x} + \vec{y}, \alpha\vec{x} + \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle , \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$$

Si tomamos $A = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $B = 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ y $C = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$, tenemos que:

$$A\alpha^2 + B\alpha + C \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Entoncespodemos distinguir dos casos:

1. Si $A = 0$, entonces $\vec{x} = \vec{0}$ y la desigualdad es trivial.
2. Si $A > 0$, entonces la desigualdad anterior es una ecuación cuadrática en α, y por las propiedades del producto escalar es necasrio que su discriminantes sea no positivo, pues de lo contrario tendría dos raíces reales distintias y entonces la ecuacion tomaría algún valor negativo

$$\Longrightarrow D = B^2 - 4AC \leq 0 \iff B^2 \leq 4AC \iff 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 4\|x\|^2 \|y\|^2$$

□

Proposición 1.0.2 [Propiedades de la distancia euclídea]

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
4. $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$ *(desigualdad triangular).*

Definición 1.0.5 [Métrica]

*Se llama **métrica** sobre un conjunto arbitrario M a cualquier aplicación $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdad triangular).*

Definición 1.0.6 [Espacio métrico]

Se llama ***espacio métrico*** *a un par* (M,d) *donde* M *es un conjunto no vacío y* d *es una métrica sobre* M*.*

Ejemplo

Vemos algunos ejemploes de métricas:

1. La métrica euclídea en $\mathbb{R}^n$
2. $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
3. $d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$
4. $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ para funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
5. $d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ para funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
6. $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$, que se conoce como la **métrica discreta**.

Definición 1.0.7 [Diámetro]

Se llama ***diámetro*** *de un subconjunto* S *de un espacio métrico* (M,d) *a*

$$diam(S) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}$$

si el conjunto de números reales $\{d(x,y) : x, y \in S\}$ *es acotado superiormente y se define* $diam(S) = +\infty$ *en caso contrario. Cuando el diámetro es infinito se dice que el conjunto no es* ***acotado****.*

Definición 1.0.8 [Norma]

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. Se llama* ***norma*** *en* V *a toda aplicación* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in V$.

2. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

3. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *(desigualdad triangular).*

Ejemplo

1. $\|\vec{x}\| = |x|$
2. $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (norma euclídea).

3. $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ (norma l^1).
4. $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$ (norma l^∞).
5. $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ para funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definición 1.0.9 [Producto escalar o interior]

Llamaremos producto escalar o producto interior en V a toda aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle \geq 0 \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in V$.
2. $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
3. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle\vec{y},\vec{x}\rangle$.
4. $\langle\alpha\vec{x},\vec{y}\rangle = \alpha\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle = \langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle$ *para todo* $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$.

Definición 1.0.10 [Igualdad del paralelogramo]

*Sea una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial V. Se dice que la norma cumple la **igualdad del paralelogramo** si la norma procede de un producto escalar*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

Demostración.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}\rangle =$$
$$= \|\vec{x}\|^2 + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - \langle\vec{x},\vec{y}\rangle - \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \|\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

□

Definición 1.0.11 [Bola abierta]

*Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos **bola abierta** de centro x_0 y radio r al conjunto*

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) < r\}$$

donde d es la métrica que se está considerando en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.0.12 [Conjunto abierto]

*Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para todo punto $x_0 \in A$ existe un número real $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \subset A$.*

Proposición 1.0.3 [Propiedades de los conjuntos abiertos]

1. *El conjunto vacío y el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ son abiertos.*
2. *La unión de abiertos es un abierto*
3. *La interseccion finita de abiertos es un abierto.*

Definición 1.0.13 [Punto abierto]

*Se dice que un punto $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ es un **punto abierto** de S si existe una bola abierta $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \subset S$. Denotamos por S° al conjunto de los puntos abiertos de S.*

Observación 1.0.1

S° puede ser vacío, por ejemplo si S es un subconjunto con un solo punto

Proposición 1.0.4 [Propiedades de los puntos abiertos]

1. *S° es el mayor abierto contenido en S*
2. *S° es la unión de todos los abiertos contenidos en S.*
3. *S es abierto si y solo si $S = S^\circ$.*

Demostración.

1. S° es abierto, pues dado $x \in S^\circ$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset S$. Entonces sucede que $B(x,r) \subset S^\circ$, pues al ser $B(x,r)$ un abierto, entonces $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ \subset S^\circ$. Por otra parte, si A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ contenido en S, entonces para todo punto de A hay una bola centrada en él contenida en A y por lo tanto en S, lueg todos los puntos de A están en S°
2. Es claro que el mayor abierto contenido en S es la unión de todos los abiertos contenidos en S
3. Si S es abierto, entonces él es el mayor abierto contenido en S, luego $S = S^\circ$. Por otra parte, si $S = S^\circ$, entonces S es abierto, pues para todo punto $x \in S$, existe una bola abierta $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \subset S$, luego S es abierto.

□

Definición 1.0.14 [Bola cerrada]

*Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos **bola cerrada** de centro x_0 y radio r al conjunto*

$$\overline{B}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) \leq r\}$$

Proposición 1.0.5

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Entonces se cumple que:

$$[\overline{B}(x_0,r)]^\circ = B(x_0,r)$$

Demostración. "$\subset$"

$$\text{Sea } x \in [\overline{B}(x_0, r)]^\circ \implies \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset \overline{B}(x_0, r) \text{ tal que } \|x - x_0\| = r$$

$$\text{Sea } y = x + \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \cdot \frac{1}{2} r_x \implies \|y - x\| = \frac{1}{2} r_x < r_x \implies y \in B(x, r_x)$$

No obstante,

$$\|y - x_0\| = \|x - x_0\| \left(1 + \frac{1}{\|x - x_0\|} \frac{1}{2} r_x\right) > \|x - x_0| = r$$

Por tanto llegamos a que ningún punto de la frontera de la bola cerrada puede estar en su interior. "$\supset$"

Esta inclusión es inmediata pues $B(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r)$ y al ser $B(x_0, r) = [B(x_0, r)]^\circ$ resulta que $B(x_0, r) \subset \left[\overline{B}(x_0, r)\right]^\circ$.

□

Definición 1.0.15 [Conjunto cerrado]

*Se dice que un subcnjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complementario (respecto a $\mathbb{R}^n$) es abierto.*

Proposición 1.0.6 [Propiedades de los conjuntos cerrados]

1. *El conjunto vacío y el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ son cerrados.*
2. *La intersección de cerrados es un cerrado.*
3. *La unión finita de cerrados es un cerrado.*

Definición 1.0.16 [Punto de acumulación]

*Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de acumulación** de un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta centrada en x contiene algún punto de S distinto de x. Equivalentemente,*

$$x \text{ es un punto de acumulación de } S \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación de un conjunto se le suele denominar $S\prime$

Ejemplo

1. Todo punto del intervalo $[0, 1]$ es un punto de acumulación de $(0, 1)$.
2. El punto 0 es un punto de acumulación de $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \implies S' = [0, 1]$.

Teorema 1.0.4

S es cerrado si y solo si $S' \subset S$.

Demostración. "$\Rightarrow$" Supongamos que S es cerrado. Entonces sea $x \in S' : x \notin S \implies$ cualquier bola de centro en x contiene puntos de $S \implies \mathbb{R}^n \setminus S$ no es abierto, luego llegamos a contradicción y que $x \in S$.

"$\Leftarrow$" Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus S \implies \exists r > 0 : B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$ (pues x no es punto de acumulación de S). Por tanto, $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$, luego $\mathbb{R}^n \setminus S$ es abierto y por tanto S es cerrado. □

Definición 1.0.17 [Punto adherente]

*Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto adherente** de un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta centrada en x contiene algún punto de S. Equivalentemente,*

$$x \text{ es un punto adherente de } S \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap S \neq \emptyset$$

Definición 1.0.18 [Adherencia o clausura]

*Se llama **adherencia** o **clausura** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ al conjunto de sus puntos adherentes, denotado por $\overline{S}$.*

Proposición 1.0.7 [Propiedades de la adherencia]

1. *$\overline{S}$ es cerrado y es el menor cerrado que contiene a S ($S \subset \overline{S}$)*
2. *$\overline{S}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a S.*
3. *S es cerrado si y solo si $S = \overline{S}$.*

Demostración.

1. Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{S} \implies \exists r > 0 : B(x,r) \cap S = \emptyset \implies \forall y \in B(x,r) : B(y, r - d(y,x)) \cap S = \emptyset \implies y \notin \overline{S} \implies B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{S}$.
   Por otro lado, si C es un cerrado que contiene a S, entonces C debe contener a $\overline{S}$, pues C cntiene a S y a S' debido a que $S' \subset C' \subset C$ por ser C cerrado.
2. Es claro que el menor cerrado que contiene a un conjunto es la intersección de todos los cerrados que lo contienen. Además, la intersección finita de cerrados es cerrada.
3. Si S es cerrado es claro que él mismo es el menor cerrado que lo contiene, luego $S = \overline{S}$. Recíprocamente, por lo visto en el primer apartado, si $\overline{S}$ es cerrado, entonces si $S = \overline{S}$, entonces S es cerrado.

□

Definición 1.0.19 [Distancia]

*Dados un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se define la **distancia** de x a S como*

$$d(x,S) = \inf\{d(x,y) : y \in S\}$$

Teorema 1.0.5

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si $d(x,S) = 0$.

Demostración. "→" $x \in \overline{S} \implies \forall r > 0, \exists y \in S : d(x,y) < r \implies \inf\{d(x,y) : y \in S\} = 0$. Obsérvese que como $x \in S$ este ínfimo se alcanza y es mínimo.

"←" El $\inf\{d(x,y) : y \in S\} = 0$ implica que $\forall \epsilon > 0, \exists y \in S : d(x,y) < \epsilon$. Entonces$B(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset$, luego x es un punto adherente de S. □

Definición 1.0.20 [Punto frontera]

*Se llama **punto frontera** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ a todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall r > 0$, se cumple que:*

$$B(x,r) \cap S \neq \emptyset \text{ y } B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$$

Equivalentemente, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de S si y solo si $x \in \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$.

Definición 1.0.21 [Punto aislado]

*Se dice que un punto $x \in S$ es un **punto aislado** de S si existe un número real $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap S = \{x\}$.*

Definición 1.0.22 [Sucesión]

*Se llama **sucesión** en $\mathbb{R}^n$ a toda aplicación $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Como se hace en el caso de sucesiones de números reales, se identificará x con la "tira" de sus valores $(x(1), x(2), \ldots)$. Normalmente se escribirá x_k en vez de $x(k)$ y las sucesiones se representarán por $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_k\}$, $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ o (x_k). Obsérvese que cada x_k es un punto de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto es de la forma $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$.*

Definición 1.0.23 [Convergencia de sucesiones]

*Se dice que una sucesión $\{x_k\}$ **converge** a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si la sucesión de números reales $\{d(x_k, x_0)\}$ converge a 0. Esto es,*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tal que } k \geq \nu \Rightarrow d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Definición 1.0.24 [Subsucesión]

*Se llama **subsucesión** de una sucesión $\{x_k\}$ a toda aplicación $m \in \mathbb{N} \to x_{k_m}$ es uno de los términos de la sucesión $\{x_k\}$ que verifique la condición de que la aplicación $m \in \mathbb{N} \to k_m$ sea estrictamente creciente.*

Proposición 1.0.8

$$x \in \overline{S} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset S : x_k \to x$$

Demostración. "⇒" Sea $x \in \overline{S} \implies \forall r > 0, B(x,r) \cap S \neq \emptyset \implies \exists y : d(x,y) < r$. Si tomamos $r = \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}$, entonces $\exists y_k \in S : d(x, y_k) < \frac{1}{k}$. Por tanto, la sucesión $\{y_k\}$ converge a x.

"⇐" Sea $\{x_k\} \subset S$ tal que $x_k \to x$. Entonces, por definición de convergencia, para todo $\epsilon > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \implies d(x_k, x) < \epsilon \iff x_k \in B(x,\epsilon)$ y como $x_k \in S$, entonces $B(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{S}$. □

Teorema 1.0.6

Si una sucesión $\{x_k\}$ convergen a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces toda subsucesión de $\{x_k\}$ también converge a x_0.

Demostración. $\{x_k\} \to x_0 \implies \forall\epsilon\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n \implies d(x_k, x_0) < \epsilon \implies$ Sea $\{x_{k_m}\}$ una subsucesión de $\{x_k\}$, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_m \geq n \implies d(x_{k_m}, x_0) < \epsilon$, entonces $\forall m \geq n$ se tiene que $k_m \geq m \geq$ y por tanto $d(x_k k_m, x_0) < \epsilon$. □

Definición 1.0.25 [Sucesión de Cauchy]

Se dice que una sucesión es de Cauchy si

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Teorema 1.0.7

Una sucesión de $\mathbb{R}^n$ es convergente si y solo si es de Cauchy.

Demostración. "⇒" Sea $\{x_k\}$ una sucesión convergente a x_0, entonces dado $\epsilon > 0\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}k \geq n d(x_k, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Por si tomamos $m, n \geq N$, entonces tenemos por la desiguadad triangular que:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo que nos proporciona la condición de Cauchy. "⇐" Sea $\{x_k\}$ una sucesión de Cauchy, entonces dado $\epsilon > 0\exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$. En particular, la sucesión $\{x_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de número reales y por tanto por el curso de Análisis en Varible Real sabemos que existe $x_{0,i} \in \mathbb{R}$ tal que $x_{k,i} \to x_{0,i}$. Considerando que $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$ □

Definición 1.0.26

1. *Llamaremos* ***recubrimiento*** *de un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ a cualquier colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cuya unión contenga a S*
2. *Se dice que un recubrimiento es* ***abierto*** *si los conjuntosque lo forman son abiertos.*
3. *Llamaremos* ***subrecubrimiento*** *de un recubrimiento de un conjunto S a toda colección de elementos del recubrimiento que sea un recubrimiento de S*
4. *Finalmente llamaremos* ***recubrimiento finito*** *de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ cuando se trate de un recubrimiento de S formado por una cantidad finita de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.0.27 [Compacidad]

Se dice que un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es ***compacto*** *si todo recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito.*

Ejemplo

1. $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}$ es conjunto compacto de $\mathbb{R}$. En efecto, si tomamos un recubrimiento abierto $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ (Λ es un conjunto arbitrario) de nuestro conjunto, entonces el 0 debe estar en un cierto A_{α_0}. Al ser A_{α_0} abierto existe un intervalo centrado en 0 contenido en A_{α_0}. Como la sucesión $\{1/k\}$ converge a 0 existe ν tal que los x_k, con $k \geq \nu$, pertenecen a A_{α_0}. Luego si consideramos una cantidad finita de abiertos A_α que contengan a los puntos $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{\nu-1}$ y el A_{α_0} tendremos un subrecubrimiento finito del conjunto $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$. El mismo argumento prueba que el conjunto formado por los puntos de una sucesión convergente y su límite es un conjunto compacto.

2. El conjunto $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}$ no es compacto pues del recubrimiento de él formado por los abiertos $A_i : i \in \mathbb{N}$, donde $A_i = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}\right)$, no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

3. El conjunto $(0,2)$ no es compacto, pues del recubrimiento abierto
$$\left\{(1,3), \left(\frac{1}{2},3\right), \left(\frac{1}{3},3\right), \ldots\right\}$$
de él no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

Proposición 1.0.9

Los subconjuntos cerrados contenidosen un compacto son compactos.

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado contenido en K compacto.Consideremos un recubrimiento $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de C formado por abiertos. Llamaremos A al complementario de C en $\mathbb{R}^n$ (i.e. $A = \mathbb{R}^n \setminus C$). Entonces$\{A_\alpha \cup A : \alpha \in \Delta\}$ es un recubrimiento abierto de K por lo que existirán $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Delta$ tales que $K \subset A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_k} \cup A$. Evidentemente, $C \subset A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_k}$, luego $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_k}\}$ es un subrecubrimiento finito de C. □

Teorema 1.0.8 [Teorema de Bolzano-Weierstrass de compacidad por sucesiones]

Un subconjnto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda sucesión de elementos de K tiene una subsucesión convergente a un punto de K.

Demostración. "$\Rightarrow$" Sea K un conjunto compacto y sea $\{x_k\} \subset K$ una sucesión de elementos de K tal que no tiene ninguna subsucesión convergente a un punto de K.
Entonces $\{x_k\}$ tiene que tener infinitos elementos distintos, pues en caso contrario tendría subsucesiones convergente a un punto de K. Denotemos por $\{x_{k_m}\}$ subsucesión de $\{x_k\}$ y S al conjunto formado por los puntos de la subsucesión. Entonces, $S' = \emptyset$ pues si existiese $x_0 \in S'$ entonces habría una subsucesión de puntos de S convergente a x_0.
Ésto nos permite afirmar que $\forall m \in \mathbb{N} \exists r_m > 0 : B(x_{k_m}, r_m) \cap S = \{x_{k_m}\}$ (ya que el conjunto de puntos de acumulación de S es nulo $S' = \emptyset$)y que S es cerrado (pues contiene a $S' = \emptyset$) ya que como S está contenido en el compacto K es también compacto, pero ésto no es posible ya que del recubrimiento de S formado por las bolas abiertas $B(x_{k_m}, r_m)$ no es posible extraer ninguno finito.

"$\Leftarrow$" Supogamos que K tiene una sucesión de elementos de K tiene una subsucesión convergente a un punto de K. Entonces,

1. Veamos que $\forall r > 0$ existe un recubrimiento de abiertos definido por $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r)$, entonces existe una cantidad finita $x_1, \ldots, x_m$ de puntos de K tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r)$$

   Si ésto no fuera así, existiría un $r_0 > 0$ tal que K no sepodría recubrir por ninguna cantidad finita de bolas de radio r_0 centradas en puntos de K:
   Si fijamos $x_1 \in K$ como $B(x_1, r_0)$ no recubre a K existe $x_2 \in K \setminus B(x_1, r_0)$, como tampoco $B(x_1, r_0) \cup B(x_2, r_0)$ recubre a K existe $x_3 \in K \setminus (B(x_1, r_0) \cup B(x_2, r_0))$ y así sucesivamente, obtenemos una sucesión de puntos de K tales que no tienen ninguna subsucesión convergente, pues para cada $p, q \in \mathbb{N} \quad d(x_p, x_q) \geq r_0$, pero ésto llega a contradiccion con la hipótesis.

2. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ un recubrimiento abierto de K veremos como podemos extraer un subrecubrimiento finito:
   Sabemos que existe $r^* > 0$ que $\forall x \in K \exists \alpha_x \in \Delta : B(x, r^*) \subset A_{\alpha_x}$, ya que en caso contrario existiría para todo $k \in \mathbb{N}$ un $x_k \in K$ tal que $B(x_k, \frac{1}{k})$ no estaría contenida en A_β cualquiera que sea $\beta \in \Delta$; es decir, las bolas pequeñas alrededeor de x_k no caben enteramente en ningún A_β. La sucesión $\{x_k\}$ así formada deberá tener una subsucesión $\{x_{k_m}\}_{m=1}^{+\infty}$ convergente a un punto $x_0 \in K$ (por hipótesis).Ese punto x_0 deberá estar en algún A_{α_0} abierto, por lo que existe un $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \subset A_{\alpha_0}$.
   Si tomamos un m lo suficientemente grande para que $d(x_{k_m}, x_0) < \frac{r_0}{2}$ y $\frac{1}{k_m} < \frac{r_0}{2}$. Entonces $B(x_{k_m}, \frac{1}{k_m}) \subset B(x_0, r_0) \subset A_{\alpha_0}$, lo que contradice que el que $B(x_{k_m}, \frac{1}{k_m})$ no estuviera contenido en A_β para ningún $\beta \in \Delta$, por la suposición inicial.

3. Finalmente, fijemos un $r^* > 0$ tal que para todo $x \in K \exists \alpha_x \in \Delta : B(x, r^*) \subset A_{\alpha_x}$, por lo que, por lo visto anteriormente existenpuntos $x_1, \ldots, x_k \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r^*)$ y dado que cada $B(x_i, r^*)$ está contenido en algún $A_{\alpha_{x_i}}$, vemos que una cantidad finita de A_α ya recubren a K.

□

Teorema 1.0.9 [Teorema de Bolzano-Weierstrass de compacidad por conjuntos]

Un conjunto K es compacto si y sólo si todo subconjunto de él con infinitos elementos tiene un punto de acumulación en K.

Demostración. "$\Rightarrow$" Sea K un conjunto compacto y sea $S \subset K$ un subconjunto de K con infinitos elementos, entonces podemos formar una sucesión de elementos distintos y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass de compacidad por sucesiones, tenemos que existe una subsucesión convergente a un punto $x_0 \in K$. Por tanto, x_0 es un punto de acumulación de S y por tanto de K.

"$\Leftarrow$" Dada una sucesión de elementos de K pueden suceder dos cosas:

1. Tengan infinitos elementos distintos, en cuyo caso, por hipótesis, es un punto de acumulación de K y en consecuencia una subsucesión convergente a un punto de K.

2. No tenga infinitos términos distintos, en cuyo caso, necesariamente hay algún término que se repite infinitas veces, con lo que ya tiene una subsucesión convergente a un elemento de K.

□

Teorema 1.0.10 [Teorema de Heine-Borel]

Un conjunto es compacto $\iff$ es cerrado y acotado.

Demostración. "$\Leftarrow$"
Sea K un conjunto cerrado y acotado. Consideremos una sucesión $\{x_k\} \subset K$ de puntos de K, y tomemos las sucesiones de sus coordenadas, dadas por $\{x_{k,i}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Tomemos $i = 1$. Se sabe, por el curso de Análisis en Variable Real, que al ser la sucesión $\{x_{k,1}\}$ acotada en $\mathbb{R}$, existe una subsucesión $\{x_{k_\ell,1}\}$ que converge a un punto $x_{0,1}$ (teorema de Bolzano–Weierstrass para sucesiones de números reales).

La sucesión $\{x_{k_\ell,2}\}$, por la misma razón, tiene una subsucesión convergente $\{x_{k_{\ell_r},2}\}$ a un punto $x_{0,2}$.

Reiterando este proceso para cada coordenada $i = 1, \ldots, n$, obtenemos finalmente una sucesión

$$\left\{x_{k_{\ell_1 \ldots \ell_n}}\right\}$$

convergente a un punto $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$.

Este punto es adherente a la sucesión $\{x_k\}$, y por tanto, adherente a K. Como K es cerrado, se concluye que $x_0 \in K$.

"$\Rightarrow$" Demostraremos primero que si un conjunto es compacto, entonces es cerrado:

Sea K un compacto, probaremos que $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto. Para ello sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Como $x \notin K$ entonces $\forall y \in K \exists r_y > 0 : B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. Es claro que K está contenido en $\bigcup_{y\in K} B(y, r_y)$ y por tanto existen puntos $y_1, \ldots, y_k \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, r_{y_i})$. Entonces la bola de centro x y radio igual al mínimo de los r_{y_i} está contenida en $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Ahora veamos que si es compacto, está acotado:
Sea K un conjunto compacto. Del recubrimiento por bolas abiertas $\{B(0, k) : k = 1, 2, \ldots\}$ se tiene que poder extraer no finito. Esto es $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B(0, k_0)$ con lo que

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in K\} \leq 2k_0$$

y entonces K es acotado. □

Definición 1.0.28 [Limite]

Se dice que f tiene por ***límite*** *l en el punto x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \implies d(f(x), l) < \epsilon$$

Teorema 1.0.11

Si la función f toma valores reales $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $l \neq 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

Demostración. Como $l \neq 0$ existe una bola cenrada en x_0 tal que la función es no nula en ella, o equivalentemente, $l \neq 0 \exists \delta_1 > 0 : f(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, \delta_1) \cap S$ tal que $x \neq x_0$.
Asimismo, también tenemos que para cierto $\delta_1 > 0$ se cumple que para $\epsilon = \frac{|l|}{2}$, $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$ para todo $x \in B(x_0, \delta_1) \setminus \{x_0\}$. Con lo que obtenemos que $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$. Para los $x \in B(x_0, \delta_1) \cap S$ se verifica que:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - f(x)}{l f(x)}\right| = \frac{|f(x) - l|}{|l||f(x)|} \leq \frac{|f(x) - l|}{\frac{|l|^2}{2}}$$

Dado un $\epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta_2) \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - l| < \epsilon \cdot \frac{|l|^2}{2}$. Luego para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple que para todo $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \epsilon$$

□

Teorema 1.0.12 [Criterio del límite por sucesiones]

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función que tiene límite l en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_k\} \subset S$ tal que $x_k \to x_0$, se cumple que $f(x_k) \to l$.

Demostración. "$\Rightarrow$" Sean $x_0 \in S$ y $\{x_k\} \subset S : x_k \to x_0$ y $x_k \neq x_0 \forall k$. Dado $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $x \in S$ y $0 < d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), l) < \epsilon$. Como $x_k \to x_0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $d(x_k, x_0) < \delta$ y por tanto $d(f(x_k), l) < \epsilon$. Luego $f(x_k) \to l$.

"$\Leftarrow$"
Supongamos que f no tiene límite $\implies \exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in S : 0 < d(x, x_0) < \delta$ tal que $d(f(x), l) \geq \epsilon_0$. En particular $\forall k (\delta = \frac{1}{k}) \exists x_k \in S : 0 < d(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ y $d(f(x_k), l) \geq \epsilon_0$. Por tanto, la sucesión $\{x_k\}$ vemos que $d(x_k, x_0) \to 0$ pero como $d(f(x_k), l) \geq \epsilon_0$ entonces $f(x_k) \not\to l$. Luego llegamos a contradicción y si que tiene que haber límite. □

Definición 1.0.29 [Continuidad]

*Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, x_0 un punto de $S \cap S'$ y $f : S \to \mathbb{R}^m$ se dice que f es **continua** en x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, equivalentemente,*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in S, 0 < d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Teorema 1.0.13 [Criterio de continuidad por sucesiones]

Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S \cap S'$ y $f : S \to \mathbb{R}^m$. Entonces, f es continua en x_0 si y solo si para toda sucesión $\{x_k\} \subset S$ tal que $x_k \to x_0$, se cumple que $f(x_k) \to f(x_0)$.

Definición 1.0.30 [Aplicación continua]

*Diremos que una aplicación $f : S \to \mathbb{R}^m$ es **continua** si es continua en cada punto de S.*

Observación 1.0.2

Sean $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in S$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

- *Si f y g son continuas en x_0, entonces $f + g$ también es continua en x_0.*
- *Si f es continua en x_0, entonces αf también es continua en x_0.*
- *Si $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en x_0, entonces fg es continua en x_0.*

- *Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 y $f(x) \neq 0$ para todo x en un entorno de x_0, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en x_0.*

Teorema 1.0.14

Para una aplicación $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *f es continua en S*
2. *Para todo abierto $A \subset \mathbb{R}^m$, existe un abierto $B \subset S$ tal que $f^{-1}(A) = B \cap S$ (es decir, $f^{-1}(A) \subset S$)*

Demostración. "$\Rightarrow$"
Hagamos una distinción de casos:

1. $f^{-1}(A) = \emptyset \implies B = \emptyset$ que cómo es abierto, lo cumple.
2. Si $f^{-1}(A) \neq \emptyset$: $\forall x \in f^{-1}(A) \quad \exists \epsilon_x > 0 : B(f(x), \epsilon_x) \subset A$. La continuidad de f en x nos da que existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B(x, \delta_x) \cap S) \subset B(f(x), \epsilon_x)$. Sea $B = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B(x, \delta_x)$ abierto.
   Veamos que se cumple que $f^{-1}(A) = B \cap S$:
   - "$\subset$": $x_0 \in f^{-1}(A) \implies x \in B \cap S$
   - "$\supset$": Si $x_0 \in B \cap S$, entonces existe $x \in f^{-1}(A)$ tal que $x_0 \in B(x, \delta_x)$ como $f(B(x, \delta_x) \cap S) \subset B(f(x), \epsilon_x) \subset A \implies f(x_0) \in A \implies x_0 \in f^{-1}(A)$.

"$\Leftarrow$"
Dado $x_0 \in S$ y $\epsilon > 0$ consideremos la bola abierta $A = B(f(x_0), \epsilon)$y el abierto B tal que $f^{-1}(A) = B \cap S$. Como $x_0 \in f^{-1}(A)$, entonces $x_0 \in B \cap S$, y dado que B es un abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset B \implies f(B(x_0, \delta) \cap S) \subset B(f(x_0), \epsilon)$. □

Definición 1.0.31 [Homeomorfismo]

*Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to T \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación continua y biyectiva. Se dice que f es un **homeomorfismo** si su inversa $f^{-1} : T \to S$ también es continua.*

Teorema 1.0.15

Si f es una aplicación continua en K compacto $\implies f(K)$ es un compacto en $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$, entonces $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} f^{-1}(A_\alpha)$. Para cada $\alpha \in \Delta$ sea G_α un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(A_\alpha) = G_\alpha \cap K$. Entonces, $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$. La compacidad de K nos da la existencia de un conjunto finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Delta$ tal que $K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_k}$. Por tanto, $f(K) \subset A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_k}$, lo que implica que $f(K)$ es compacto. □

Teorema 1.0.16 [Teorema del máximo y el mínimo]

Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua,siendo K compacto

$$\implies \exists a, b \in K : f(a) = \inf f(x) : x \in K \;\; y \;\; f(b) = \sup f(x) : x \in K$$

Demostración. $f(K)$ es compacto (por teorema anterior) $\implies$ $f(K)$ es acotado $\implies$ tiene ínfimo y supremo. El ínfimo es un punto adhere pero como $f(K)$ es cerrado ese punto pertence al conjunto luego es $f(a)$ para algún $a \in K$ y lo mismo con el supremo. □

Definición 1.0.32 [Continuidad uniforme]

*SEa $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice que es **uniformemente continua** en S si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, y \in S, d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Observación 1.0.3

La diferencia esencial con respecto a la continuidad en cada punto es que aquí dado un ϵ existe un único δ que sirva para todo par de puntos de S que estén a una distancia menor que δ.

Teorema 1.0.17

Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua en S y $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy en S, entonces $\{f(x_k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ Por cada $x \in K \exists \delta_x > 0$ tal que si $y \in K$ y $d(x, y) < \delta_x$ entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. La colección de bolas $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ cuando x varia en K es un recubrimiento abierto de K, luego existen $x_1, \ldots, x_k \in K$ tales que $K \subset B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}) \cup \ldots \cup B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2})$.
Sea δ el mínimo de los δ_{x_i}, entonces dados x e $y \in K$ tales que $d(x, y) < \delta$ consideramos un $j = 1, \ldots k$ tal que $x \in B(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$ resulta que $y \in B(x_j, \delta_{x_j})$ pues:

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) < \delta_{x_j}$$

En consecuencia

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

2 Aplicaciones diferenciables

Definición 2.0.1 [Dirección]

*Llamaremos **dirección** a un vector $v \in \mathbb{R}^n$. Normalmente de norma 1.*
Si por ejemplo tenemos $n = 1$ tenemos sólo dos direcciones, $v = 1$ y $v = -1$. En cambio para $n > 1$ tenemos infinitas direcciones. En el caso de $\mathbb{R}^2$ las direccionesde norma 1 pueden escribirse de la forma $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$.

Definición 2.0.2 [Recta]

*Llamaremos **recta** pasando por x_0 y de dirección v a la recta $x(t) = x_0 + tv$, donde $t \in \mathbb{R}$.*

Definición 2.0.3 [Derivada direccional]

Si f es una función definida en un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$, x_0 es un punto de A y v es una dirección de $\mathbb{R}^n$, se define la derivada de f en x_0 en la dirección v como

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Observación 2.0.1

Para cualquier dirección v tanto ella como su opuesta $-v$ definen lamisma recta pasando por x_0 (el vector de dirección también determina una orientación). Sin embargo, las derivadas en las direcciones v y $-v$ son de signo opuesto:

$$\begin{aligned} D_{-v} f(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(x_0 + t(-v)\big) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(x_0 + (-t)\, v\big) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f\big(x_0 + s\, v\big) - f(x_0)}{-s} \\ &= -\lim_{s\to 0} \frac{f\big(x_0 + s\, v\big) - f(x_0)}{s} \\ &= -D_v f(x_0)\,. \end{aligned}$$

Definición 2.0.4 [Derivadas parciales]

*Consideemos en $\mathbb{R}^m$ las direccionesdadas porlos vectores $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donde 1 está en la i-ésima posición. Las derivadas en un punto x_0 de una función f en estas direcciones (si es que existen) se llaman **derivadas parciales** de f en x_0 y se denotan por $D_i f(x_0) = D_{e_i} f(x_0)$, o también por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ o $f_{x_i}(x_0)$.*

Definición 2.0.5 [Gradiente]

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que tenga todas las derivadas parciales en un punto $x_0 \in A$, se *llama* ***gradiente*** *de f en x_0 al vector*

$$\nabla f(x_0) = \big(D_1 f(x_0), D_2 f(x_0), \ldots, D_n f(x_0)\big) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\big) \in \mathbb{R}^n$$

Definición 2.0.6 [Diferenciable]

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es ***diferenciable*** *en un punto $x_0 \in A$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Lo cual equivale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Observación 2.0.2

La existencia del gradiente no garantiza la diferenciabilidad de la función.

Proposición 2.0.1

Toda aplicaciónlineal es diferenciable $\forall x \in \mathbb{R}^n$ y su gradiente es la aplicación lineal misma.

Teorema 2.0.1

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A$, entonces es derivable en x_0 en todas las direcciones $v \in \mathbb{R}^n$. Además sea $v \in \mathbb{R}^n$ una dirección, que supondremos de norma 1, y una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

entonces

$$L(v) = D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Demostración. Tomando sólo vectores h de la forma tv con $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - tL(v)}{|t|} = 0$$

(nótese que $\|v\| = 1$) con lo que, con el mismo argumento que hemos utilizado al principio de esta sección, obtenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - tL(v)}{t} = 0$$

y por lo tanto que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = L(v),$$

luego f es derivable en x_0 en la dirección v y $D_v f(x_0) = L(v)$. $\square$

Definición 2.0.7 [Diferencial]

Para represemtar la función L usaremos la notación df_{x_0}, *que se llama* ***diferencial*** *de* f *en* x_0.

Observación 2.0.3

Cuando f *es diferenciable en* x_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_i f(x_0) = df(x_0)(e_i) = \nabla f(x_0) \cdot e_i$$

donde e_i *es el vector de dirección en la i-ésima coordenada.*

Corolario 2.0.1

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una aplicación diferenciable en un punto* $x_0 \in A$ *tal que* $\nabla f(x_0) \neq 0$. *Entonces el valor máximo de* $|D_v f(x_0)|$ *se alcanza para* $v = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ *y ese valor máximo es* $\|\nabla f(x_0)\|_2$.

Demostración. Sabemos que la derivada direccional de f en el punto x_0 y en la dirección del vector unitario v viene dada por

$$D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq \|\nabla f(x_0)\|_2 \|v\|_2 = \|\nabla f(x_0)\|_2,$$

ya que v es unitario ($\|v\|_2 = 1$).

El valor máximo se alcanza cuando v tiene la misma dirección que $\nabla f(x_0)$, es decir,

$$v = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|_2}.$$

En ese caso,

$$D_v f(x_0) = \left\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|_2} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(x_0)\|_2^2}{\|\nabla f(x_0)\|_2} = \|\nabla f(x_0)\|_2.$$

Por lo tanto, el valor máximo de $|D_v f(x_0)|$ es $\|\nabla f(x_0)\|_2$ y se alcanza precisamente en la dirección del gradiente. □

Definición 2.0.8 [Espacio afín tangente]

Cuando f *es diferenciable en* x_0 *llamaremos* ***espacio afín tangente*** *a la gráfica* $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *en el punto* $(x_0, f(x_0))$ *a*

$$T = \{(x, f(x_0)) : \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle : x \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, f(x_0)) + df(x_0)(x - x_0)\}$$

Observación 2.0.4

Los espacis afines tangentes son hiperplanos

Observación 2.0.5

El concepto intuitivo de tangencia que tenemos para el caso de curvas en $\mathbb{R}^2$ mantiene también para superficies en $\mathbb{R}^n$ pues si T es el espacio afín tangente a la superficie $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, entonces para cada punto $(x, f(x)) : x \in A$ existe un punto $(x, y) \in T$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - y}{\|x - x_0\|} = 0$$

basta tomar $y = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$.

Teorema 2.0.2

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto x_0 entonces f es continua en x_0.

Demostración. Escribamos

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

y consideremos el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle}{\|x - x_0\|} = 0$$

resulta que

$$\exists \|x - x_0\| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle| \leq \|x - x_0\|$$

Dado que por Cauchy-Schwarz $\|\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle\| \leq \|\nabla f(x_0)\| \|x - x_0\|$, podemos escribir

$$|f(x) - f(x_0)| < (1 + \|\nabla f(x_0)\|) \|x - x_0\|$$

si $\|x - x_0\| < \delta_1$. Luego si dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{1 + \|\nabla f(x_0)\|}\}$, tenemos que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. □

Teorema 2.0.3

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación que tiene derivadas parciales en cada punto de A. Si para cada $i = 1, \ldots, n$ la función

$$df : x \in A \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

es continua en un punto $x_0 \in A$, entonces f es diferenciable en x_0

Demostración. Queremos ver si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x_0 - x \rangle}{\|x - x_0\|} = 0$$

Sea una función de la forma $\varphi_i(x) = f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{i-1}}, x_i, x_{0_{i+1}}, \ldots, x_{0_n})$ para $i = 1, \ldots, n$ y fijemos el punto $x_0 \in A$ en el que todas las derivadas de f son continua y consideremos un $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$. Entonces, para cada punto $x \in B(x_0, r)$, tenemos que

$$f(x) - f(x_0) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_n}) =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_{0_1}, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+f(x_{0_1}, x_2, \dots, x_n) - f(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_n)+$$
$$+\dots + f(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_n) - f(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$$
$$= f(x) - \varphi_1(x) + \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) - \varphi_n(x) - f(x_0)$$

Entonces, apliquemos el Teorema de Valor Medio a $\varphi_1(x)$: $\varphi_1(s) = f(s, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$ para $s \in [x_{0_1}, x_1]$ es continua y derivable por lo que debe existir un punto $u_1 \in (x_{0_1}, x_1)$ tal que

$$\varphi_1(x_1) - \varphi_1(x_{0_1}) = \varphi_1'(u_1)(x_1 - x_{0_1})$$

Si $x_1 = x_{0_1}$ pasamos a la siguiente coordenada, pues en esta primerala diferencia es nula. Pero además tenemos que:

$$\varphi_1'(u_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$$

Por lo que,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{0_1}, x_2, \dots, x_n) = D_1 f(u_1, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})(x_1 - x_{0_1})$$

Repitiendo el proceso, conseguimos la existencia de un vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tales que

$$f(x_{0_1}, \dots, x_{0_{i-1}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_{0_1}, \dots, x_{0_{i-1}}, x_{0_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) = D_i f(x_{0_1}, \dots, x_{0_{i-1}}, u_i, x_{i+1}, \dots, x_n)(x_i - x_{0_i})$$

Tenemos entonces que,

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_{0_1}, \dots, x_{0_{i-1}}, u_i, x_{i+1}, \dots, x_n)(x_i - x_{0_i})$$

Ahora volvamos al límite que queríamos calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|}$$

Sustiuyamos la expresión que hemos obtenido para $f(x) - f(x_0)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} =$$

$$= \frac{D_1(u_1, \dots, x_n)(x_1 - x_{0_1}) + \dots + D_n f(x_{0_1}, \dots, u_n)(x_n - x_{0_n}) - [D_1 f(x_0)(x_1 - x_{0_1}) + \dots + D_n f(x_n)(x_n - x_{0_n})]}{\|x - x_0\|}$$

$$\leq \frac{|D_1 f(x_{0_1}, \dots, u_n)(x_1 - x_{0_1}) - D_1 f(x_0)(x_1 - x_{0_1})| + \dots + |D_n f(x_{0_1}, \dots, u_n)(x_n - x_{0_n}) - D_n f(x_0)(x_n - x_{0_n})|}{\|x - x_0\|}$$

$$\leq \frac{(D_1 f(u_1, \dots, x_n) - D_1 f(x_0))(x - x_0)}{\|x - x_0\|} + \dots + \frac{(D_n f(x_{0_1}, \dots, u_n) - D_n f(x_0))(x - x_0)}{\|x - x_0\|} =$$

$$= (D_1 f(u_1, \dots, x_n) - D_1 f(x_0)) + \dots + (D_n f(x_{0_1}, \dots, u_n) - D_n f(x_0)) \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

□

Observación 2.0.6

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es tal que $\exists df(x) \forall x \in A$, entonces se puede hablar de la función diferencial $df : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}$, que es una aplicación lineal en cada punto $x \in A$

Definición 2.0.9 [Matriz Jacobiana]

*Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable, entonces la matriz $J_f(x)$ de la función diferencial $df(x)$ se llama **matriz jacobiana** de f en el punto x. Si f tiene derivadas parciales en x, entonces* *la matriz jacobiana es la matriz cuyas entradas son las derivadas parciales de f en x:*

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

donde $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Observación 2.0.7

Para aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se verifica que existe $C > 0$ tal que

$$\|L(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Proposición 2.0.2 [Propiedades de la matriz jacobiana]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Entonces:

1. *$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$ para $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en x_0.*
2. *$d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en x_0.*
3. *$d(f \cdot g) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$ para $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en x_0.*

Teorema 2.0.4

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en un punto de $x_0 \in A$. Entonces existen constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$$

En particular, esto implica la continuidad de f en x_0.

Demostración. Dado que f es diferenciable se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Sea $\epsilon = 1 \implies \exists \delta_1 > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta_1$ entonces

$$0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| < \|x - x_0\|$$

Con lo que

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0)(x - x_0) + [f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)] \implies$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |df(x_0)(x - x_0) + [f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)]\,|$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|df(x_0)(x - x_0)\| + \|x - x_0\| \leq |df(x_0)(x - x_0)| + |f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)|$$

Pero por la hipótesis tenemos que

$$|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| < \|x - x_0\|$$

Entonces
$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq |df(x_0)(x - x_0)| + \|x - x_0\|$$
Pero como $df(x_0)$ es una aplicación lineal, existe una constante $C > 0$ tal que
$$\|df(x_0)(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\|$$
Entonces tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que
$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$$
para los x tales que $\|x - x_0\| < \delta_1$, donde $M = C + 1$. $\square$

Teorema 2.0.5 [Regla de la cadena]

Sea $A, \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \to \mathbb{R}^p$ tales que $f(A) \subset B$, f es diferenciable en $x_0 \in A$ y g es diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y
$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$
A nivel de matrices, ésto es equivalente a que
$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

Demostración. Tenemos que
$$\frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0)) \circ df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|}$$
Al ser f diferenciable en x_0 por el teorema anterior, $M > 0$ y $\delta_1 > 0$ tales que
$$\|x - x_0\| < \delta_1 \implies \|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$$
Por otra parte tenemos que al ser g diferenciable en $f(x_0)$, dado $\frac{\epsilon}{2M} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que
$$0 < \|y - f(x_0)\| < \delta_2 \implies \frac{\|g(y) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0))(y - f(x_0))\|}{\|y - f(x_0)\|} < \frac{\epsilon}{2M}$$
Y esto se cumple $\forall y \in B$, en particular para $y = f(x)$.
Tomando $delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que
$$0 < \|x - x_0\| < \delta_3 \implies \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} =$$
$$= \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|\|f(x) - f(x_0)\|} \leq \frac{\epsilon}{2M} \cdot \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \frac{\epsilon}{2}$$
Además, por ser $dg(f(x_0))$ una aplicación lineal, existe $C^* > 0$ tal que $\|dg(f(x_0))(y)\| \leq C^*\|y\|$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$.

Además, por ser f diferenciable en x_0, existe $\delta_4 > 0$ tal que
$$0 < \|x - x_0\| < \delta_4 \implies \frac{\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \frac{\epsilon}{2C^*} \implies$$

$$\frac{\|df(x_0)\left[f(x)-f(x_0)-df(x_0)(x-x_0)\right]\|}{\|x-x_0\|} \leq \frac{C^*\cdot\|f(x)-f(x_0)-df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \leq \frac{C^*}{2}\cdot\frac{\epsilon}{C^*}=\frac{\epsilon}{2}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_3, \delta_4\}$ y tomando x tales que $0 < \|x-x_0\| < \delta$ resulta que

$$\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-dg(f(x_0))\circ df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}+\frac{\|dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0)-df(x_0)(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

□

Definición 2.0.10 [Convexidad]

Se dice que un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si para todo par de puntos $x, y \in S : x \neq y$ se verifica que el segmento $L[x,y] = \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\} = \{xt + y(t-1) : t \in [0,1]\}$ de extremos x e y está contenido en S

Observación 2.0.8

Las bolas son conjuntos convexos con lo que $L[x,y] \subset B(x_0, r)$

Teorema 2.0.6 [Teorema del Valor Medio]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en cada punto de A. Entonces para todo $x, y \in A$ tales que $L[x,y] \subset A$ y para todo $z \in \mathbb{R}^m$ se verifica que existe $c \in L[x,y]$ tales que:

$$\langle z, f(y)-f(x)\rangle = \langle z, df(c)(y-x)\rangle$$

En principio, c depende de x, y, z

Demostración. Como A es abierto $\implies \exists\delta > 0 : (1-t)x + ty \in A \forall t \in [-\delta, \delta+1]$.
Fijemos $z \in \mathbb{R}^m$ un vector cualquiera, definamos la función

$$\varphi(t) = \langle z, f((1-t)x+ty)\rangle : t \in (-\delta, \delta+1)$$

Esta función es derivable en $(-\delta, \delta+1)$ y

$$\varphi'(t) = \langle z, df((1-t)x+ty)((y-x))\rangle$$

pues

$$\varphi(t) = z_1 f_1((1-t)x+ty) + z_2 f_2((1-t)x+ty) + \ldots + z_m f_m((1-t)x+ty)$$

téngase en cuenta que se trata de la diferencial de la composicion de f con la función lineal $g(t) = (1-t)x+ty$. Luego por el Teorema del Valor Medio para funciones en $\mathbb{R}$ existe $s \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(s)(1-0)$$

de donde se sigue que:

$$\langle z, f(y)-f(x)\rangle = \langle z, f(y)\rangle - \langle z, f(x)\rangle = \varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(s) = \langle z, df((1-s)x+sy)(y-x)\rangle = \langle z, df(c)(y-x)\rangle$$

Basta tomar $c = (1-s)x + sy$ para concluir la demostración. □

Teorema 2.0.7 [Teorema del valor medio para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en cada punto de A. Entonces para todo $x, y \in A$ tales que $L[x, y] \subset A$ existe $c \in L[x, y]$ tales que

$$f(y) - f(x) = df(c)(x - y)$$

Demostración. Como en este caso $m = 1$ si tomamos $z = 1$ el resultado se sigue directamente del Teorema del Valor Medio anterior, pues

$$f(y) - f(x) = \langle 1, f(y) - f(x)\rangle = \langle 1, df(c)(y - x)\rangle = df(c)(y - x)$$

□

Teorema 2.0.8 [Desigualdad del valor medio para aplicaciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o Teorema de los incrementos finitos]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en A. Entonces para todo $x, y \in A$ tales que $L[x, y] \subset A$ se verifica que

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{c\in L[x,y]} \|df(c)\| \cdot \|(y - x)\|$$

Demostración. Sea $x, y \in A : L[x, y] \subset A$ y sea $z = \frac{f(y)-f(x)}{\|f(y)-f(x)\|}$, vector unitario. Por el Teorema del Valor Medio para funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, existe $c \in L[x, y]$ tal que

$$\langle z, f(y) - f(x)\rangle = \langle z, df(c)(y - x)\rangle$$

De donde se sigue que

$$\|f(y) - f(x)\| = \frac{\|f(y) - f(x)\|^2}{\|f(y) - f(x)\|} = \langle \frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|}, f(y) - f(x)\rangle = \langle \frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|}, df(c)(y - x)\rangle \leq$$

$$\leq \|\frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|}\|\|df(c)(y - x)\| = \|df(c)(y - x)\| \leq \|df(c)\| \cdot \|y - x\| \leq \sup_{c\in L[x,y]} \|df(c)\| \cdot \|(y - x)\|$$

□

Teorema 2.0.9

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en A. Entonces para todo $x, y \in A$ tales que $L[x, y] \subset A$ se verifica que

$$f_j(y) - f_j(x) = df_j(c_j)(y - x)$$

para algún $c_j \in L[x, y]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$.

Corolario 2.0.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexoy $f : A \subset \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A y $df(x) = 0 \forall x \in A$. Entonces f es constante en A.

Definición 2.0.11 [Derivada parciales segundo]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable en A. Entonces la ***derivada parcial segunda*** *de f respecto a la variable x_i es*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

y la ***derivada parcial mixta*** *de f respecto a las variables x_i y x_j es*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

Definición 2.0.12 [Clase C^1]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es de clase C^1 si tiene derivadas parciales en cada punto de A y estas son continuas en A. Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación de clase C^1, entonces se dice que es de clase C^1 si cada componente f_i es de clase C^1.

Definición 2.0.13 [Clase C^2]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es de clase C^2 si tiene derivadas parciales de orden 2 en cada punto de A y estas son continuas en A. Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación de clase C^2, entonces se dice que es de clase C^2 si cada componente f_i es de clase C^2.

Definición 2.0.14 [Clase C^p]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es de clase C^p si tiene derivadas parciales de orden k en cada punto de A y estas son continuas en A para todo $k = 1, \ldots, p$. Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación de clase C^p, entonces se dice que es de clase C^p si cada componente f_i es de clase C^p.

Lema 2.0.1

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Fijado $x_0 \in A$ sea $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$. Entonces para cada u y $v \in B(0, \frac{\delta}{2}) \setminus \{0\}$ existen $\alpha, \beta \in (0, 1)$ talesque

$$f\big(x_0 + u + v\big) \; - \; f\big(x_0 + u\big) \; - \; \big(f\big(x_0 + v\big) - f(x_0)\big) \; = \; D_v\big(D_u f\big)\big(x_0 + \alpha\, u + \beta\, v\big).$$

Demostración. Consideremos la función

$$g : B(0, \frac{\delta}{2}) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = f(x + v) - f(x)$$

Esta funcion g es diferenciable en $B(x_0, \frac{\delta}{2})$ y $dg(x) = df(x + v) - df(x)$. Apliquemos el teorema del valor medio a g en el segmento $L[x_0, x_0 + u]$ y obtenemos la existencia de un punto c entre x_0 y $x_0 + u$ tal que

$$g(x_0 + u) - g(x_0) = dg(c)(u)$$

Esto es,

$$f(x_0 + u + v) - f(x_0 + u) - (f(x_0 + v) - f(x_0)) = (df(c + v) - df(c))(u)$$

Si escribirmos $c = x_0 + \alpha u$ para algún $\alpha \in (0,1)$, tenemos que

$$f(x_0+u+v)-f(x_0+u)-(f(x_0+v)-f(x_0)) = (df(x_0+\alpha u+v)-df(x_0+\alpha u))(u) = D_uf(x_0+\alpha u+v)-D_uf(x_0+\alpha u)$$

Ahora como D_uf es diferenciable en A y $L[x_0+\alpha u, x_0+\alpha u+v] \subset A$, aplicamos el teorema del valor medio a D_uf y nos da que existe un punto $e \in L[x_0+\alpha u, x_0+\alpha u+v]$ tal que

$$D_uf(x_0+\alpha u+v) - D_uf(x_0+\alpha u) = d(D_uf(e))(v) = D_v(D_uf)(e)$$

Si escribimos $e = x_0 + \alpha u + \beta v$ para algún $\beta \in (0,1)$, tenemos el resultado $\square$

Teorema 2.0.10 [Teorema de Schwarz]

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C^2(A)$, entonces $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$ para todo $x \in A$ y para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Demostración. Sea $x_0 \in A$. Probaremos que $\forall \epsilon > 0 |D_{ij}f(x_0) - D_{ji}f(x_0)| < \epsilon$. Como $D_{ij}f$ y $D_{ji}f$ son continuas en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$ y

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \begin{cases} |D_{ij}f(x) - D_{ij}f(x_0)| < \epsilon/2 \\ |D_{ji}f(x) - D_{ji}f(x_0)| < \epsilon/2 \end{cases}$$

Tomemos $u = te_i$ y $v = se_j$ con $t, s \in (0, \frac{\delta}{2})$. Tenemos así puntos que están en las condiciones del lema anterior, aplicando ese lema obtenemos que existen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in (0,1)$ tales que

$$\begin{cases} f(x_0+te_i+se_j) - f(x_0+te_i) - (f(x_0+se_j) - f(x_0)) = D_{se_j}(D_{te_i}f)(x_0+\alpha_1 te_i + \beta_1 se_j) \\ f(x_0+se_j+te_i) - f(x_0+se_j) - (f(x_0+te_i) - f(x_0)) = D_{te_i}(D_{se_j}f)(x_0+\alpha_2 se_j + \beta_2 te_i) \end{cases}$$

Como en general $D_{\lambda u}f(x) = \lambda D_uf(x)$ y $A = B$, tenemos que

$$stD_{ij}f(x_0+\alpha_1 te_i+\beta_1 se_j) = tsD_{ji}f(x_0+\alpha_2 se_j+\beta_2 te_i)$$

Entoncesporla desigualdad triangular tenemos que

$$|D_{ij}f(x_0) - D_{ji}f(x_0)| \leq |D_{ij}f(x_0) - D_{ij}f(x_0+\alpha_2 se_j+\beta_2 te_i)| + |D_{ji}f(x_0+\alpha_2 se_j+\beta_2 te_i) - D_{ji}f(x_0)|$$

y tal como habíamos tomado s y t esta suma esmenor que ϵ pues $\|\alpha_2 se_j + \beta_2 te_i\| < s+t < \delta$ y $\|\alpha_1 te_i + \beta_1 se_j\| < s+t < \delta$. Por tanto, la arbitrariedad de ϵ nos da que $D_{ij}f(x_0) = D_{ji}f(x_0)$. $\square$

Observación 2.0.9

1. *Si f es de clase C^1 y existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y es continua entonces también existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y coinciden.*
2. *También se puede obtener la igualdad entre D_{12} y D_{21} a partir de la existencia de D_1f y D_2f en un entorno de (x_0, y_0) y su diferenciabilidad.*

Corolario 2.0.3

Si $f \in C^3(A)$ entonces $D_{ijk}f(x) = D_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)}f(x)$ para todo $x \in A$ y toda permutación σ de $\{i, j, k\}$.

Demostración. Supongamos que σ está dada por $\sigma(i)=k, \sigma(j)=i, \sigma(k)=j$.

$$\begin{aligned} D_{ijk}f(x) &= D_i(D_j(D_kf))(x) \\ &= D_i(D_{jk}f)(x) = D_i(D_{kj}f)(x) \\ &= D_i(D_k(D_jf))(x) = D_{ik}(D_jf)(x) = D_{ki}(D_jf)(x) = D_{kij}f(x). \end{aligned}$$

Las Dpf son de clase C^2 y se les puede aplicar el teorema de Schwarz. $\square$

Teorema 2.0.11 [Teorema de Taylor]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{k+1} en A y sean $x_0, \in A$ y $h \neq 0$ tales que $L[x_0, x_0+h] \subset A$. Entonces existe un punto $c \in L[x_0, x_0+h]$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_0+h) = f(x_0) &+ \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1}f(x_0)h_{i_1} \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} D_{i_1i_2}f(x_0)h_{i_1}h_{i_2} + \cdots \\ &+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1\cdots i_k}f(x_0)h_{i_1}\cdots h_{i_k} \\ &+ \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k+1}=1}^{n} D_{i_1\cdots i_k i_{k+1}}f(c)h_{i_1}\cdots h_{i_k}h_{i_{k+1}}, \end{aligned}$$

o equivalentemente usando $h = (x - x_0)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1}f(x_0)(x_{i_1} - x_{0i_1}) \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} D_{i_1i_2}f(x_0)(x_{i_1} - x_{0i_1})(x_{i_2} - x_{0i_2}) + \cdots \\ &+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1\cdots i_k}f(x_0)(x_{i_1} - x_{0i_1})\cdots(x_{i_k} - x_{0i_k}) \\ &+ \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k+1}=1}^{n} D_{i_1\cdots i_k i_{k+1}}f(c)(x_{i_1} - x_{0i_1})\cdots(x_{i_k} - x_{0i_k})(x_{i_{k+1}} - x_{0i_{k+1}}). \end{aligned}$$

Demostración. Sea la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t) = x_0 + th$. Dado que φ es continua entonces $B = \varphi^{-1}(A) \subset \mathbb{R}$ es abierto.

Consideremos la composicion $g = f \circ \varphi : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(t) = f(x_0 + th)$, que es de clase C^{k+1} en B (pues es una función polinómica y por tanto es f la que restringe la clase). Además se tienq eue $varphi'(t) = h$. Entonces aplicando la regla de la cadena a φ obtenemos que:

$$g'(t) = df(\varphi(t)) \circ d\varphi(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1}f(\varphi(t))h_{i_1} = \langle \nabla f(\varphi(t)), h\rangle$$

$$g^{j)} = \sum_{i_1=1,\ldots,i_j=1}^{n} D_{i_1\ldots i_j}f(\varphi(t)) \cdot h_{i_1}\cdots h_{i_j}$$

Si aplicamos nuevamente la regla de la cadena a φ obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla f(\varphi(t)) = H_f(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = H_f(\varphi(t)) \cdot h$$

Entonces tendríamos que

$$g''(t) = \langle\langle H_f(\varphi(t)), h\rangle, h\rangle = H_f(\varphi(t)) \cdot h \cdot h = \sum_{i_1=1,i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(\varphi(t))h_{i_1}h_{i_2}$$

Entonces por inducción podemos llegar a la derivada $\varphi^{j)}$:

$$g^{j)}(t) = \sum_{i_1=1,\ldots,i_n=1}^{n} D_{i_1\ldots i_j} f(\varphi(t))h_{i_1}\cdots h_{i_j}$$

Podemos aplicar el Teorema de Taylor para una variable una variable real φ centrado en a:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{i)}(a)(x-a)}{i!}$$

Tomando $a = 0$ como centro y $x = 1$ y además tomaremos la f´romula del resto del valor medio del resto $R_k(x) = \frac{f^{k+1}(\alpha)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$, donde $\alpha \in (0,1)$, entonces tenemos que:

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{k!}g^{(k)}(0) + R_k(1) =$$

$$= f(x_0) + \sum_{i_1=1}^{n} D_{i_1} f(x_0)h_{i_1} + \frac{1}{2!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} D_{i_1 i_2} f(x_0)h_{i_1}h_{i_2} + \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1\cdots i_k} f(x_0)h_{i_1}\cdots h_{i_k} + R_k(1)$$

□

Definición 2.0.15 [Extremos relativos y absolutos]

Diremos $f : A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A$. Diremos que f tiene un máximo relativo en x_0 si existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$ y $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Si existe una bola centrada en x_0 en la $f(x) \leq f(x_0)$ diremos que f tiene un mínimo relativo en x_0. Cuando se da alguna de esas desigualdades para todo $x \in A$ diremos que f tiene un máximo absoluto en x_0 y un mínimo absoluto en x_0.

Definición 2.0.16 [Punto crítico]

---

*Si f tiene todas las derivadas parciales de primer orden en un punto x_0 diremos que x_0 es un **punto crítico** de f si $\nabla f(x_0) = 0$.*

Teorema 2.0.12

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en $x_0 \in A$ y f tiene todas las derivadas parciales en ese punto entonces $\nabla f(x_0) = 0$.

Demostración. f tiene un máximo relativo en x_0, entonces

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0 \quad \forall t > 0$$

Dado que existe el límitede ese cociente, necesariamente tiene que ser 0. □

Definición 2.0.17 [Punto de ensilladura]

Los puntos críticos de f que no son ni máximos ni mínimos relativos se denominan ***puntos de ensilladura*** *o* ***puntos de silla****.*

Definición 2.0.18 [Matriz hesiana]

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en A. Entonces la ***matriz hesiana*** *de f en un punto $x_0 \in A$ es la matriz cuadrada de orden n cuyas entradas son las derivadas parciales segundas de f:*

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x_0) & D_{12}f(x_0) & \cdots & D_{1n}f(x_0) \\ D_{21}f(x_0) & D_{22}f(x_0) & \cdots & D_{2n}f(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(x_0) & D_{n2}f(x_0) & \cdots & D_{nn}f(x_0) \end{pmatrix}$$

Definición 2.0.19 [Definición de signo]

Se dice que una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es ***definida positiva*** *si $Q(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Se dice que es* ***definida negativa*** *si $Q(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Se dice que es* ***indefinida*** *si no es ni positiva ni negativa. Se dice que una forma cuadrática es* ***semidefinida positiva*** *si $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se dice que es* ***semidefinida negativa*** *si $Q(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.0.13

Sea f una función de clase C^2 en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que un punto x_0 de él es un punto crítico para f.

(a) Si la forma cuadrática Q asociada a $H_f(x_0)$ es definida negativa, entonces f tiene en x_0 un máximo relativo.

(b) Si f tiene un máximo relativo en x_0, entonces Q es semidefinida negativa.

(c) Si Q es definida positiva, entonces f tiene en x_0 un mínimo relativo.

(d) Si f tiene un mínimo relativo en x_0, entonces Q es semidefinida positiva.

(e) Si Q es indefinida entonces la función tiene un punto de ensilladura en x_0.

Demostración. □