

Cálculo Integral

Pablo Pardo Cotos

February 16, 2025

Contents

1	Tema 1: Teoría de la Integral	2
---	-------------------------------	---

1 Tema 1: Teoría de la Integral

Definición 1.1: U

rectángulo n-dimensional en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Definición 1.2: E

volumen de un rectángulo R en \mathbb{R}^n se define como:

$$V(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Definición 1.3: S

el volumen de R es 0, decimos que el rectángulo es **degenerado**.

Dado que R es un conjunto, definimos su **interior** (conjunto abierto asociado) como:

$$R^\circ = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \quad \text{con } a_i < b_i, \forall i.$$

Asimismo, podemos definir otro tipo de rectángulo:

$$Q = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \quad \text{con } a_i < b_i, \forall i.$$

Definición 1.4: U

rectángulo abierto expandido en δ se define como:

$$R_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i - \delta, b_i + \delta) \quad \text{con } a_i < b_i, \forall i.$$

Observación 1.1: E

volumen de R_δ es:

$$V(R_\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i + \delta - a_i + \delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = V(R) + 2n\delta.$$

Tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V(R_\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (b_i + \delta - a_i + \delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = V(R).$$

Definición 1.5: S

a $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera, definimos la **medida exterior de Lebesgue** como:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V(R_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}.$$

Es el ínfimo de la suma de los volúmenes de los rectángulos que recubren A .