Estadística

Contents

1 Estimacion por Regiones de Confianza

Para este tema denotemos lo siguiente:
Sea $X \sim (\chi, \beta_\chi, F_\theta)_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k}$ un modelo estadistico k-parametrico.
Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$.
Sea finalmente P_θ la ley de probabilidad de nuestra muestra.

Definición 1.0.1 [Region de confianza]

Sea $C(X_1, \ldots, X_n) \subset \Theta$ una region aleatoria de nuestro espacio parametrico que cumple lo siguiente:

$$P_\theta \{\theta \in C(X_1, \ldots, X_n)\} \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$$

Entonces denominamos $C(X_1, \ldots, X_n)$ una region de confianza de nivel $1 - \alpha$ de nuestar muestra $(x_1 \cdots x_n) \in \chi^n$ para el parametro θ.

2 Integrales de línea: campos escalares y vectoriales

Ejercicio 1 [Ejercicio 2.7.1]

Sea X una observación de una población $N(0, \sigma)$. ¿Es $|X|$ un estadístico suficiente?

Solucion

Para una variable aleatoria X con distribución normal $N(0, \sigma)$, la función de densidad de probabilidad es:

$$f(x|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

Podemos entonces aplicar el teorema de factorización (2.2.1) para obtener una factorización de la siguiente forma:

$$f(x|\sigma) = h(x)g(|x|, \sigma) \tag{2}$$

Donde nuestro estadístico es $T(X) = |X|$. Podemos tomar:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

$$g(|x|, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

Finalmente, podemos ver que:

$$f(x|\sigma) = h(x)g(|x|, \sigma) \tag{5}$$

Por lo que $|X|$ es un estadístico suficiente para σ.

3 Appendix

3.1 Momentos Notables

Media

Definición 3.1.1 [Media]

Distinguimos entre casos discretos y continuos:

- ***Caso discreto:*** *Se define la media de una variable aleatoria discreta X como:*

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \tag{6}$$

donde x_i son los valores que puede tomar la variable aleatoria y p_i son las probabilidades asociadas a cada valor.

- ***Caso continuo:*** *Se define la media de una variable aleatoria continua X como:*

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \tag{7}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria.

Propiedades

Si X y Y son **variables aleatorias** con esperanza finita y $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes entonces

1. $E[c] = c$.
2. $E[cX] = cE[X]$.
3. Si $X \geq 0$ entonces $E[X] \geq 0$.
4. Si $X \leq Y$ entonces $E[X] \leq E[Y]$.
5. Si X está delimitada por dos números reales, a y b, esto es $a < X < b$ entonces también lo está su media, es decir,
$$a < E[X] < b.$$
6. Si $Y = a + bX$, entonces
$$E[Y] = E[a + bX] = a + bE[X].$$
7. En general, $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, la igualdad sólo se cumple cuando las variables aleatorias son independientes.

Teorema 3.1.1 [Linealidad de la Esperanza]

*El operador esperanza $E[\cdot]$ es una **aplicación lineal**, pues para cualesquiera **variables aleatorias** X y Y y cualquier constante c tal que $c \in \mathbb{R}$, se cumple lo siguiente:*

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[cX] = cE[X]$$

Demostración. Demostrar este resultado es sencillo. Si consideramos que X y Y son **variables aleatorias** discretas, entonces

$$E[X+Y] = \sum_{x,y}(x+y)P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} xP(X=x, Y=y) + \sum_{x,y} yP(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x} xP(X=x, Y=y) + \sum_{y} y \sum_{x} P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x} xP(X=x) + \sum_{y} yP(Y=y)$$

$$= E[X] + E[Y]$$

□

Teorema 3.1.2 [Multiplicación de las Esperanzas]

Sean $X_1, \ldots, X_n$ ***variables aleatorias independientes****, tales que $\exists E[X_i]$ $\forall i = 1 \ldots n$. Entonces $\exists E[X_1 \cdots X_n]$, y se verifica:*

$$E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Demostración. La demostración de este resultado es muy sencilla, sólo hay que considerar el concepto de independencia. El resultado se demuestra sólo para el caso discreto bidimensional (la demostración del caso continuo es análoga).

$$E[XY] = \sum_{x}\sum_{y} xy\, P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x}\sum_{y} xy\, P(X=x)P(Y=y)$$

$$= \sum_{x} x\, P(X=x) \sum_{y} y\, P(Y=y)$$

$$= E[X]E[Y]$$

□

Varianza

Definición 3.1.2 [Varianza]

Distinguimos entre casos discretos y continuos:

- ***Caso discreto:*** *Se define la varianza de una variable aleatoria discreta X como:*

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \tag{8}$$

donde x_i son los valores que puede tomar la variable aleatoria, p_i son las probabilidades asociadas a cada valor y μ es la media de la variable aleatoria.

- ***Caso continuo:*** *Se define la varianza de una variable aleatoria continua X como:*

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\, dx \tag{9}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria y μ es la media de la variable aleatoria.

La varianza también puede ser expresada como:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \tag{10}$$

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2 \tag{11}$$

La varianza también puede ser vista como covarianza de una variable consigo misma:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X) \tag{12}$$

Propiedades

Si X y Y son **variables aleatorias** con varianza finita entonces

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$.
2. $\mathrm{Var}(X) = 0$ si y sólo si X es constante.
3. $\mathrm{Var}(X) = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $P(X = c) = 1$.
4. $\mathrm{Var}(X + a) = \mathrm{Var}(X)$.
5. $\mathrm{Var}(aX) = a^2\, \mathrm{Var}(X)$.
6. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
7. $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Teorema 3.1.3 [Identidad de Bienaymé]

En general, para la suma de n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se cumple que

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \tag{13}$$

Si las variables aleatorias son independientes, entonces la covarianza entre ellas es nula, y la varianza de la suma de las variables aleatorias es la suma de las varianzas de las variables aleatorias, es decir, se cumple que

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) \tag{14}$$

Producto de Variables Aleatorias

- **Variables Aleatorias Independientes** Si dos variables X e Y son **independientes**, la varianza de su producto está dada por:

$$\operatorname{Var}(XY) = [E(X)]^2 \operatorname{Var}(Y) + [E(Y)]^2 \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y).$$

  De manera equivalente, utilizando las propiedades básicas de la esperanza, se expresa como:

$$\operatorname{Var}(XY) = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)]^2[E(Y)]^2.$$

- **Variables Aleatorias Correlacionadas** En general, si dos variables son **estadísticamente dependientes**, entonces la varianza de su producto está dada por:

$$\operatorname{Var}(XY) = E[X^2Y^2] - [E(XY)]^2$$

$$= \operatorname{Cov}(X^2, Y^2) + E(X^2)E(Y^2) - [E(XY)]^2$$

$$= \operatorname{Cov}(X^2, Y^2) + (\operatorname{Var}(X) + [E(X)]^2)(\operatorname{Var}(Y) + [E(Y)]^2)$$

$$-[\operatorname{Cov}(X, Y) + E(X)E(Y)]^2$$

3.2 Función Característica

Definición 3.2.1 [Función Característica]

*La **función característica** de una variable aleatoria X es una función $\varphi_X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como:*

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

donde i es la unidad imaginaria y t es un número real.

Cuando los momentos de una variable aleatoria existen, se pueden calcular mediante las derivadas de la función característica. De modo que se puede obtener derivando formalmente a ambos lados de la definición y tomando $t = 0$:

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E[X^n]$$

Propiedades

- La función característica de una variable aleatoria real siempre existe, ya que es una integral de una función continua acotada sobre un espacio cuya medida es finita.
- Una función característica es **uniformemente continua** en todo el espacio.
- No se anula en una región alrededor de cero: $\varphi(0) = 1$.
- Es acotada: $|\varphi(t)| \leq 1$.
- Es **hermítica**: $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$. En particular, la función característica de una variable aleatoria simétrica (alrededor del origen) es de valores reales y **par**.
- Existe una **biyección** entre **distribuciones de probabilidad** y funciones características. Es decir, dos variables aleatorias X_1 y X_2 tienen la misma distribución de probabilidad si y solo si $\varphi_{X_1} = \varphi_{X_2}$.
- Si una variable aleatoria X tiene **momentos** hasta orden k, entonces su función característica φ_X es k veces continuamente diferenciable en toda la recta real. En este caso:

$$E[X^k] = i^{-k}\varphi_X^{(k)}(0).$$

- Si una función característica φ_X tiene derivada de orden k en cero, entonces la variable aleatoria X tiene todos los momentos hasta k si k es par, pero solo hasta $k-1$ si k es impar.

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k].$$

- Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes y $a_1, ..., a_n$ son constantes, entonces la función característica de la combinación lineal de las variables X_i es

$$\varphi_{a_1X_1+\cdots+a_nX_n}(t) = \varphi_{X_1}(a_1t)\cdots\varphi_{X_n}(a_nt).$$

  Un caso particular es la suma de dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2, en cuyo caso se cumple

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t).$$

- Sean X y Y dos variables aleatorias con funciones características φ_X y φ_Y. X y Y son independientes si y solo si

$$\varphi_{X,Y}(s,t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t) \quad \text{para todo } (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

- El comportamiento en la cola de la función característica determina la **suavidad** de la función de densidad correspondiente.
- Sea la variable aleatoria $Y = aX + b$, una transformación lineal de la variable aleatoria X. La función característica de Y es

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

  Para vectores aleatorios $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}+\mathbf{B}$ (donde A es una matriz constante y $\mathbf{B}$ un vector constante), se tiene

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(t) = e^{it^T\mathbf{B}}\varphi_{\mathbf{X}}(A^Tt).$$