

# Calculo Vectorial e Integración Lebesgue

Pablo Pardo Cotos

*Ciencias Matemáticas e Ingeniería Informática*

# Contents

<b>1 Fundamentos de la teoría de la medida . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1 Anillo, álgebra y $\sigma$ -álgebra de conjuntos . . . . .	2
1.2 Contenidos y medidas . . . . .	3
1.3 Medidas exteriores . . . . .	7
1.4 Propiedades de la medida de Lebesgue . . . . .	10
1.4.1 Medida de Lebesgue y topología euclíadiana . . . . .	10
1.4.2 Transformaciones de conjuntos medibles . . . . .	13
1.4.3 Existencia de conjuntos no medibles . . . . .	16
<b>2 Integración con respecto de una medida . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1 Propiedades de las funciones medibles . . . . .	18
2.2 La integral de funciones positivas . . . . .	20
2.3 Integración de funciones reales y complejas . . . . .	25
2.4 Espacios $L^p$ . . . . .	27
2.5 La relación entre las integrales de Riemann y de Lebesgue . . . . .	31
2.6 Teoremas de Tonelli, Fubini y cambio de Variable . . . . .	34
<b>3 Cálculo vectorial en <math>\mathbb{R}^n</math> . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1 Concepto de orientación . . . . .	41
3.2 Los operadores fundamentales del cálculo vectorial . . . . .	42
3.3 Integrales geométricas . . . . .	43
3.4 Curvas rectificables . . . . .	44
3.5 Campos gradientes y funciones potenciales . . . . .	48

# 1 Fundamentos de la teoría de la medida

## 1.1 Anillo, álgebra y $\sigma$ -álgebra de conjuntos

### Definición 1.1.1 [Anillo]

Dados los conjuntos  $X$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , es decir una familia de subconjuntos no vacía, se dice que  $\mathcal{A}$  es un **anillo de conjuntos** en  $X$  si:

1.  $\mathcal{A}$  es cerrado por uniones finitas, es decir,  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{A}$  es cerrado por diferencias, es decir,  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

### Definición 1.1.2 [Álgebra]

Dado un conjunto  $X$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , familia de conjuntos no vacía, se dice que  $\mathcal{A}$  es un **álgebra de conjuntos** en  $X$  si:

1.  $\mathcal{A}$  es cerrado por uniones finitas
2.  $\mathcal{A}$  es cerrado por complementos
3.  $X \in \mathcal{A}$

### Definición 1.1.3 [ $\sigma$ -álgebra]

Dado un conjunto  $X$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , familia de conjuntos no vacía, se dice que  $\mathcal{A}$  es una  **$\sigma$ -álgebra de conjuntos** en  $X$  si:

1.  $\mathcal{A}$  es cerrado por uniones numerables
2.  $\mathcal{A}$  es cerrado por complementos
3.  $X \in \mathcal{A}$

### Observación 1.1.1

Una álgebra es un anillo al que pertenece el conjunto total  $X$ .

### Observación 1.1.2

1. Si  $\mathcal{A}$  es un anillo, entonces tomando  $A, B \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$  y  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ . Es decir, los anillos también son cerrados por intersección.
2. Sea  $\mathcal{A}$  anillo y  $E \in \mathcal{A}$ . Entonces  $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\} = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$  es una álgebra de conjuntos en  $E$ .

### Definición 1.1.4 [Espacio medible]

Dada una  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  de un conjunto  $X$  o también expresado como un par  $(X, \Sigma)$  se llama espacio

medible. A los conjuntos de  $\Sigma$  se les llama conjuntos medibles.

#### Definición 1.1.5 [Función medible]

Dados dos espacios medibles  $(X, \Sigma_X)$  y  $(Y, \Sigma_Y)$ , y una función  $f : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ , se dice que es medible si  $\forall E \in \Sigma_Y f^{-1}(E) \in \Sigma_X$ .

#### Lema 1.1.1

Sean un conjunto  $X$ ,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$  y una familia  $\mathfrak{U}$  de  $\sigma$ -álgebras/álgebras/anillos en  $X$  que contienen a  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{U}} \mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra/álgebra/anillo que llamamos  **$\sigma$ -álgebra/álgebra/anillo generada por  $\mathcal{C}$**  siendo la menor  $\sigma$ -álgebra/álgebra/anillo que contiene a  $\mathcal{C}$ .

## 1.2 Contenidos y medidas

#### Definición 1.2.1 [Contenido/Pre-medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\Sigma$  un anillo en  $X$ . Se dice que una función  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  es un contenido en  $\Sigma$  si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  es aditivo, esto es que, dada una sucesión de finita de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \Sigma$  es tal que  $E_k \cap E_j = \emptyset$  para  $k \neq j$  entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

#### Definición 1.2.2 [Medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\Sigma$ -álgebra en  $X$ . Se dice que una función  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  es un contenido en  $\Sigma$  si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditivo, esto es que, dada una sucesión numerable de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma$  es tal que  $E_k \cap E_j = \emptyset$  para  $k \neq j$  entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^\infty E_k \right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

#### Definición 1.2.3 [Espacio de medida]

Dado un conjunto  $X$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  en  $X$  y una medida  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ , se llama espacio de medida a la terna  $(X, \Sigma, \mu)$ .

### Observación 1.2.1

En el caso particular en el que  $\mu(X) = 1$ , se dice que  $\mu$  es una **medida de probabilidad** para cada  $E \in \Sigma$  y el espacio de medida se llama **espacio de probabilidad**.

### Definición 1.2.4 [Espacio de medida finita]

SE dice que  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida finita si  $\mu(X) < +\infty$ .

### Definición 1.2.5 [Espacio de medida $\sigma$ -finita]

SE dice que  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida  $\sigma$ -finita si existe una sucesión numerable de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$  tal que  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  y  $\mu(E_k) < +\infty$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

### Observación 1.2.2

Las definiciones anteriores se pueden aplicar de la misma manera a los contenidos.

### Definición 1.2.6 [ $\sigma$ -álgebra de Borel]

Teniendo en cuenta la definición formal de  $\sigma$ -álgebra, tenemos que  $X$  es un espacio topológico con topología  $\tau$  se dice que  $\Sigma$  es una  **$\sigma$ -álgebra de Borel** con respecto  $\tau$  y que  $\mu$  es una medida de  $\tau$ -Borel o una medida de Borel con respecto a  $\tau$ , si  $\tau \subset \Sigma$ .

Decimos que la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\tau$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\tau$  y la denotamos por  $\mathcal{B}(\tau)$ .

En el caso concreto en el que el espacio topológico sea  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual, denotaremos a esta  $\sigma$ -álgebra de Borel por  $\mathcal{B}^n$ .

### Definición 1.2.7 [Función de Borel]

Una función  $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  definida entre dos espacios topológicos se dice que es una **función de Borel** si  $f : (X, \mathcal{B}(\tau_1)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(\tau_2))$  es medible.

### Definición 1.2.8 [Medida de Borel regular]

Dada una medida de Borel  $\mu$  en un espacio topológico  $(X, \tau)$ , se dice que es una **medida de Borel regular** si es regular exterior, es decir, si cumple dos condiciones:

1. Regularidad exterior:

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \in \Sigma \text{ abierto}\}$$

2. Regularidad interior:

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \Sigma \text{ compacto}\}$$

**Definición 1.2.9** [Casi todo punto]

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$  y  $E \in \Sigma$  diremos que una propiedad  $P$  se cumple en  $\mu$ -casi todo punto de  $E$  si existe  $N \in \Sigma$ ,  $N \subset E$  tal que  $\mu(N) = 0$  y  $P$  se cumple en  $E/N$ .

**Definición 1.2.10** [Intervalo]

Llamamos intervalos de  $\mathbb{R}$  a los conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  (contamos al vacío como intervalo). Decimos que  $I \subset \mathbb{R}^n$  es un intervalo si  $I = \prod_{i=1}^n I_i$  donde cada  $I_i$  es un intervalo de  $\mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$ .

**Observación 1.2.3**

Como la intersección de intervalos en  $\mathbb{R}$  es un intervalo (la intersección de conexos es conexa), y dados dos intervalos  $\prod_{i=1}^n I_i$  y  $\prod_{i=1}^n J_i$  en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\left( \prod_{i=1}^n I_i \right) \cap \left( \prod_{i=1}^n J_i \right) = \prod_{i=1}^n (I_i \cap J_i)$$

es decir, la intersección de dos intervalos en  $\mathbb{R}^n$  es un intervalo en  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.2.1**

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y  $\mu$  un contenido (medida) en  $\mathcal{A}$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Monotonía y subaditividad:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$$

Si además,  $\mu(B) < +\infty$  entonces  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

2. Subaditividad de sucesión de conjuntos: Dado una sucesión de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}$  entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

3. Sea  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

4.  $\sigma$ -subaditividad de medidas: Sea  $\mu$  una medida, entonces

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

5.  $\sigma$ -superaditividad de medidas: Sea  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una familia disjunta dos a dos y además  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ , entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right)$$

### Proposición 1.2.1

Sea  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y sea  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  un contenido. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

1.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, esto es: Dado una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B) < +\infty$  entonces:

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

2. Continuidad en el 0: Dada una sucesión de elementos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  decreciente, es decir,  $A_{n+1} \subset A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y tal que  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$  y  $\mu(A_1) < +\infty$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

3.  $\mu$  es continua por debajo: Dada una sucesión de elementos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  creciente, es decir,  $A_n \subset A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y tal que  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < +\infty$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

4.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva: Dada una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  y  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu(A) < +\infty$ , entonces:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*Demostración.* (1)  $\implies$  (2): Supongamos que  $\mu$  satisface (1) y que una sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  decreciente tal que  $\mu(A_1) < +\infty$  y  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ . Definimos  $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ , tales que pertenecen a  $\mathcal{A}$ , su unión es  $A_1$  y son disjuntos dos a dos. Por lo tanto la sucesión dada por  $s_n = \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$  es monótona creciente y esta limitada por  $\mu(A_1) < \infty$ , por lo que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$  converge.

Finalmente, tenemos que la cola de la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Pero esta suma es igual a  $\mu(A_N)$ , ya que  $\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$ . Por lo tanto llegamos a la condición (2).

(2)  $\implies$  (3):

Tomemos la sucesión de conjuntos  $A_n = B \setminus B_n$  que satisface las hipótesis de (2) y por lo tanto

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$

(3)  $\implies$  (4):

Tomando  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$  que satisface las hipótesis de (3) y

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(4)  $\implies$  (1):

Basta aplicar el lema anterior para la demostración.  $\square$

### Lema 1.2.2

Sea  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y sea  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ . Si  $\mu$  es aditiva y  $\sigma$ -subaditiva, entonces es  $\sigma$ -aditiva.

*Demostración.* Se una sucesión de conjuntos  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  disjuntos dos a dos tales que  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B) < +\infty$ . Entonces, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Por lo tanto,  $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ . □

## 1.3 Medidas exteriores

### Definición 1.3.1 [Medida exterior]

Sea  $X$  un conjunto. Dada una función  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  es una medida exterior si

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A \subset B \subset X$
3.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva, es decir, dada una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  se cumple que:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

### Definición 1.3.2 [Diferencia de dos conjuntos]

Dado un conjunto  $X$  y  $A, B \subset X$  llamamos **diferencia** de  $A$  y  $B$  al conjunto  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

### Definición 1.3.3 [Medida exterior a partir de un contenido]

Sea  $X$  un conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  tal que  $X \in \mathcal{A}$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ . Definimos la función  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  asociada a  $\mu$  tal que  $\forall A \subset X$ :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

### Definición 1.3.4 [Conjunto medible]

Sea  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $\mu^*$  una medida exterior en  $X$ . Se dice que  $A$  es  **$\mu$ -medible** si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta A_\epsilon) < \epsilon$$

Al conjunto de todos los conjuntos  $\mu$ -medibles se les denota por  $\mathcal{A}_\mu$ .

### Lema 1.3.1 [Propiedades de una medida exterior (asociada a un contenido)]

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  tal que  $X \in \mathcal{A}, B, C \subset X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ -contenido, y  $\mu^*$  la medida exterior asociada. Entonces:

1.  $\mu^*(B) \leq \mu^*(C)$  si  $B \subset C$
2.  $\mu^*$  es  $\sigma$ -subaditiva, es decir,  $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
3.  $|\mu^*(B) - \mu^*(C)| \leq \mu^*(B \Delta C)$
4. Si  $\mathcal{A}$  es un anillo y  $\mu$  es un contenido, entonces  $\mu^*(\emptyset) = 0$  y equivalentemente,  $\mu^*$  es una medida exterior en  $X$ .

*Demostración.* 1.  $\mu^*$  es por definición monótona creciente, esto es, si  $B \subset C \implies \mu^*(B) \leq \mu^*(C)$ . Esto se debe a que cualquier recubrimiento numerable de  $C$  es también un recubrimiento numerable de  $B$ .

2. Sea una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que  $A = \cup A_n$ . Dado un  $\epsilon > 0$ , existen dos casos posibles,

- Existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu^*(A_k) = +\infty$ . Entonces, como  $A_k \subset A$  se tiene que  $\mu^*(A) = \infty$  y por tanto no hay nada que demostrar.
- Si se cumple que  $\forall n \in \mathbb{N} \mu^*(A_n) < \infty$  entonces, para cada una de las  $n$  existe un recubrimiento  $\{B_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que  $A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$  y por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Por lo tanto se tiene que  $\cup A_n \subset \cup \cup B_{n,k}$  y en consecuencia se tiene que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario, tenemos el resultado.

3. Supongamos que  $B \subset C \cup (B \Delta C)$ , por lo que, por la subaditividad de  $\mu^*$  obtenemos que:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(C) + \mu^*(B \Delta C) \iff \mu^*(B) - \mu^*(C) \leq \mu^*(B \Delta C)$$

Intercambiando  $B$  y  $C$  obtenemos la otra desigualdad.

4. Basta tomar  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\emptyset\}$  como recubrimiento de  $\emptyset$  y usar que como  $\mu$  es un contenido, entonces  $\mu(\emptyset) = 0$ . El resto de propiedades ya han sido demostradas, dada cualquier función  $\mu$  y en particular si  $\mu$  es un contenido.

□

### Teorema 1.3.1

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  una álgebra en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  un contenido. Entonces:

1.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu = \{E \in X : \forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon : \mu^*(E \Delta A_\epsilon) < \epsilon\}$  y la medida exterior  $\mu^*$  coincide con  $\mu$  en  $\mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{A}_\mu$  es una  $\sigma$ -álgebra, y la restricción de  $\mu^*$  a  $\mathcal{A}_\mu$  es  $\sigma$ -aditiva

3. La función  $\mu^*$  es la única extensión  $\sigma$ -aditiva y positiva de  $\mu$  en  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$  y también es la única extensión  $\sigma$ -aditiva y positiva de  $\mu$  a  $\mathcal{A}_\mu$ .

Demostración. □

### Definición 1.3.5 [Pre-medida]

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  un contenido. Se dice que  $\mu$  es una pre-medida si es  $\sigma$ -aditiva.

### Teorema 1.3.2 [Extension de un contenido a una medida]

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  una pre-medida sobre un anillo  $\sigma$ -finito (dada  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  monótona creciente y con  $\mu(X_n) < +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ).

Para cada  $n$  denotaremos  $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}_n}$  donde  $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_n\}$  ( $\sigma$ -álgebra de conjuntos en  $X_n$ ) y denotaremos por  $\Sigma_n$  la  $\sigma$ -álgebra sobre  $A$  sobre la cual  $\mu^*$  es una medida exterior basada en  $\mu$ . Definimos:

$$\Sigma = \{A \subset X : A \cap X_n \in \Sigma_n \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \bar{\mu}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A \cap X_n) : A \in \Sigma$$

Entonces  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra que no depende de los  $X_n$  escogidos, y  $\bar{\mu}$  es la única medida en  $\Sigma$  tal que  $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ .

Demostración. Cada una de las  $\mu_n : A \rightarrow [0, \infty]$  es un contenido  $\sigma$ -aditivo y finito, por lo que por el teorema anterior podemos obtener las  $\sigma$ -álgebras  $\Sigma_n$  y las medidas  $\mu_n^*|_{\Sigma_n}$ .

Sea  $A_k$  tal que  $A_k \cap X_n \in \Sigma_n$  para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ . Por ser  $\Sigma_n$  una  $\sigma$ -álgebra, tenemos que  $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap X_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap X_n) \in \Sigma_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  por lo que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ . □

### Definición 1.3.6 [Clase compacta]

Sea una familia  $\mathcal{K}$  de subconjuntos de un conjunto  $X$ , se dice que es una **clase compacta** si:

$$\forall \{K\}_{n \in \mathbb{N}} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset \exists N \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset$$

### Ejemplo

Una familia arbitraria de conjuntos compactos de un espacio topológico es una clase compacta. En efecto para demostrar el contrarecíproco tomemos una sucesión de compactos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset \forall N \in \mathbb{N}$ . Definimos  $\overline{K_n} = \bigcup_{k=1}^n K_k$ . Entonces  $\{\overline{K_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión encadenada de conjuntos compactos y no vacíos, por lo que el teorema de la intersección compacta de Cantor,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{K_n} \neq \emptyset$  y como consecuencia  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ .

### Teorema 1.3.3

Sea  $\mu$  un contenido sobre  $\mathcal{A}$  un anillo  $\mathcal{A}$ . Supongamos que existe una clase compacta  $\mathcal{K}$  que approxima a  $\mu$  en el sentido de que: Para todo  $A \in \mathcal{A}$  con  $\mu(A) < +\infty$  y para todo  $\epsilon > 0$  existen  $K_\epsilon \in \mathcal{K}$  y  $A_\epsilon \in \mathcal{A}$

tales que

$$A_\epsilon \subset K_\epsilon \subset A \quad y \quad \mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$$

Entonces,  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva. En particular esto es cierto si la clase compacta  $\mathcal{K}$  está contenida en  $\mathcal{A}$  y para todo  $A \in \mathcal{A}$  se cumple que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$$

Demostración. □

### Ejemplo

Consideremos los anillos

### Ejemplo

Consideremos el anillo  $\mathcal{J}_0$  de uniones finitas de intervalos limitados de la forma  $[a, b)$  en  $\mathbb{R}$  y sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y continua por la izquierda, y sea  $v_g[a, b) = g(b) - g(a)$ , con  $v_g$  un contenido sobre  $\mathcal{J}_0$ . Entonces, por el teorema anterior, llámosela  $\mu_g$  a la medida generada por el Teorema de las extensiones de medidas  $\sigma$ -finitas, se llama **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a  $g$ .

### Definición 1.3.7 [Medida completa]

Sea  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una medida.  $\mu$  se dice completa si dado  $E \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(E) = 0$  entonces para cualquier  $A \subset E \in \mathcal{A}$   $A$  es medible y  $\mu(A) = 0$

### Teorema 1.3.4

Las medidas dadas por el Teorema de Extensión de Medidas  $\sigma$ -finitas son completas.

### Teorema 1.3.5

Son equivalentes:

1.  $A$  es  $\mu$ -medible
2.  $\forall E \in \mathcal{A} : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$  (Condición de Carathéodory)
3.  $\forall \epsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta B) < \epsilon$  (Condición de aproximación)

## 1.4 Propiedades de la medida de Lebesgue

### 1.4.1 Medida de Lebesgue y topología euclíadiana

#### Definición 1.4.1 [familia de semi-abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ ]

Denotamos  $\mathcal{J}_0$  a la familia de todos los intervalos semi-abiertos acotados en  $\mathbb{R}^n$ , dado por

$$\mathcal{J}_0 = \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

#### Definición 1.4.2 [Contenido de Jordan]

Llamamos **contenido de Jordan** o **contenido de Peano-Jordan** a la función  $\mu : \mathcal{J} \rightarrow [0, +\infty]$  definida como:

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

donde, por simplicidad, entendemos que  $0 \cdot (+\infty) = 0$ . Para calcular el contenido de Jordan de un conjunto cualquiera  $\mathcal{J}$ , como es una unión finita de intervalos disjuntos de la forma  $\prod_{i=1}^b [a_n, b_n]$ , basta con sumar los contenidos de todos los intervalos que lo componen.

#### Definición 1.4.3 [Medida de Lebesgue]

Sea  $\mathcal{J}_0$  el anillo de uniones finitas disjuntas de rectángulos limitados de la forma

$$\prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n,$$

y sea  $\mu$  el contenido de Jordan definido sobre  $\mathcal{J}_0$ .

Aplicando el Teorema de Extensión de Medidas  $\sigma$ -finitas (por ejemplo, tomando la secuencia  $X_k = [-k, k]^n$  para  $k \in \mathbb{N}$ ), se obtiene una única medida

$$\lambda_n : \mathcal{L}_n \rightarrow [0, \infty]$$

llamada **medida de Lebesgue** en  $\mathbb{R}^n$ , definida sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}_n$  de conjuntos Lebesgue medibles, que extiende el contenido de Jordan y es  $\sigma$ -aditiva.

Además, para cualquier subconjunto  $X \in \mathcal{L}_n$ , podemos definir la medida restringida

$$\lambda_X(A) := \lambda_n(A \cap X), \quad \forall A \in \mathcal{L}_n.$$

#### Definición 1.4.4 [Medida exterior de Lebesgue]

Siguiendo el teorema anterior de obtención de una medida exterior a partir de un contenido sobre un anillo, en este caso el contenido de Jordan sobre el anillo  $\mathcal{J}_0$  de uniones finitas de intervalos limitados de la forma  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ , obtenemos la **medida exterior de Lebesgue**  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  definida como:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}_0, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

#### Definición 1.4.5 [Medida de Lebesgue-Stieltjes]

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y continua por la izquierda. La **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a  $g$  es la medida de Lebesgue  $\mu_g$  generada por el contenido definido en el anillo de uniones finitas de intervalos limitados de la forma  $[a, b]$  como:

$$v_g[a, b] = g(b) - g(a)$$

### Lema 1.4.1

Todo intervalo  $I = \prod_{k=1}^n I_k \in \mathbb{R}^n$  es Lebesgue-medible. Si  $I$  es degenerado, entonces  $\lambda_n(I) = 0$ . Si no, su medida coincide con el producto de las longitudes de sus aristas, es decir:

$$\lambda_n(I) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

*Demostración.* Realicemos una distinción de casos:

1. Si  $I$  es degenerado, quiere decir que está contenido en un hiperplano paralelo a los ejes de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ , por lo que  $I$  es medible y  $\lambda_n(I) = 0$ .
2. Supongamos que  $I$  es no-degenerado. Si  $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$  el resultado es evidente dada la definición de medida de lebesgue.
3. Consideremos ahora cualquier tipo de intervalo de la forma  $I = \prod_{k=1}^n I_k \subset \mathbb{R}^n$ . Definamos  $a_k = \inf I_k, b_k = \sup I_k$ . Observese que  $\partial I$  está contenida en la unión de  $2n$  hiperplanos por lo que  $\partial I$  es medible (por ser la medida de Lebesgue completa) y  $\lambda_n(\partial I) = 0$ . Ahora definamos  $\mathcal{J} = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$  tenemos que  $\mathcal{J}$  es medible y  $\partial I$  es medible por lo tanto  $I = (I \setminus \mathcal{J}) \cup (\mathcal{J} \setminus (I \setminus \mathcal{J}))$  es medible ya que  $I \setminus \mathcal{J}, \mathcal{J} \setminus I \subset \partial I$ . luego son medibles y se cumple que

$$\lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) = \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = 0$$

y además,

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) + \lambda_n(\mathcal{J}) - \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = \lambda_n(\mathcal{J}) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

□

### Proposición 1.4.1

Todo conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es medible-Lebesgue. Es decir,  $\lambda_n$  es una medida de Borel con respecto la topología usual, por tanto  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$ .

*Demostración.* Todo abierto de  $\mathbb{R}^n$  es una unión numerable de intervalos abiertos, y por tanto medible. □

### Proposición 1.4.2

La medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  es regular, es decir, para todo  $A \in \mathcal{L}_n$  se cumple que:

1. Regularidad exterior:

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(U) : U \supset A, U \text{ abierto}\}$$

2. Regularidad interior:

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$$

*Demostración.*

□

**Definición 1.4.6** [Conjunto  $G_\delta$ ]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto  $G_\delta$  si existe una sucesión numerable de conjuntos abiertos  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$$

**Definición 1.4.7** [Conjunto  $F_\sigma$ ]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto  $F_\sigma$  si existe una sucesión numerable de conjuntos cerrados  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

**Observación 1.4.1**

Como consecuencia del resultado anterior, concluimos que para todo conjunto Lebesgue medible  $A \in \mathcal{L}_n$  existe un conjunto  $U \in G_\delta$  y un conjunto  $F \in F_\sigma$  tales que

$$F \subset A \subset U \quad y \quad \lambda_n(F) = \lambda_n(U) = \lambda_n(A)$$

**1.4.2 Transformaciones de conjuntos medibles****Definición 1.4.8** [Aplicación lipschitziana]

Sea  $X, Y$  dos espacios métricos con métricas  $d_X, d_Y$  respectivamente. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **lipschitziana** si existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

**Teorema 1.4.1**

Sea  $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  una aplicación lipschitziana de constante  $L \in \mathbb{R}^+$ . Entonces para todo conjunto Lebesgue medible  $A \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto  $F(A)$  también es Lebesgue medible y  $\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$

*Demostración.* Comencemos observando que si tenemos un hipercubo  $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$  de arista  $r$  y de centro  $y$ , y  $x \in I$  entonces

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty \leq L \frac{r}{2}$$

por lo que si  $F(y) = (z_1, \dots, z_n)$  entonces  $F(x) \in \prod_{k=1}^n [z_k - L \frac{r}{2}, z_k + L \frac{r}{2}]$  y por lo tanto

$$F(I) = F\left(\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]\right) \subset \prod_{k=1}^n [z_k - L \frac{r}{2}, z_k + L \frac{r}{2}]$$

lo que implica que  $\lambda_n(F(I)) \leq (Lr)^n = L^n \lambda_n(I)$ .

Ahora, lo demostraremos para conjuntos medibles más generales. Por la regularidad interior de  $\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$  podemos definir el conjunto

$$B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

Entonces por construcción tenemos que  $\lambda_n(B) = \lambda_n(A) - \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_n(K_j) = 0$ , por tanto podemos deducir que

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup B$$

donde cada  $K_j$  se compacto y cada  $B$  es un conjunto de medida nula. Como  $F$  es continua

$$F \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(K_j)$$

y también es Borel-medible, por ser unión numerable de compactos. Así, se llega a demostrar que  $F(B)$  también es medible. Sea  $\varepsilon > 0$ , podemos cubrir  $B$  con una familia numerable de hipercubos de la forma

$$I_j = \prod_{k=1}^n [a_{j,k}, b_{j,k})$$

de arista  $r_j$  y centro  $y_j = (y_{j,1}, \dots, y_{j,n})$  tales que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_n(I_j) < \varepsilon$ . Entonces tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(F(I_j)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L^n r_j^n = L^n \sum_{j=1}^{\infty} r_j^n = L^n \lambda_n(I_j) < L^n \varepsilon$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario, se deduce que  $F(B)$  tiene medida nula, y como la desigualdad se da para cualquier hipercubo, se tiene que

$$\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$$

□

### Corolario 1.4.1

Sea  $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  una aplicación bilipschitziana (función lipschitziana con inversa lipschitziana) de constante  $L_2$  y  $F^{-1}$  con constante  $L_1$ . Entonces para todo conjunto Lebesgue medible  $A \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto  $F(A)$  también es Lebesgue medible y

$$L_1^n \lambda_n(A) \leq \lambda_n(F(A)) \leq L_2^n \lambda_n(A)$$

### Corolario 1.4.2

Sea  $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  una isometría para todo conjunto Lebesgue medible  $A \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto  $F(A)$  también es Lebesgue medible y  $\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(A)$

### Teorema 1.4.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible Lebesgue de medida finita. Entonces

1.  $\lambda_n(A + h) = \lambda_n(A) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
2.  $\lambda_n(U(A)) = \lambda_n(A) \quad \text{para todo operador lineal ortogonal } U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$3. \lambda_n(cA) = |c|^n \lambda_n(A) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

*Demostración.* 1. Es consecuencia del corolario anterior.

2. Veamos que, para todo cubo cerrado  $K$  se cumple que

$$\lambda_n(U(K)) = \lambda_n(K)$$

Supongamos que esto no es cierto para algún cubo cerrado  $K$ , es decir,

$$\lambda_n(U(K)) = r\lambda_n(K)$$

donde  $r = \frac{\lambda_n(U(K))}{\lambda_n(K)} \neq 1$ . Vamos a demostrar que, para toda bola abierta  $Q \subset I$  centrada en el origen se tiene que

$$\lambda_n(U(Q)) = r\lambda_n(Q) \quad \text{siempre que } U(Q) \subset I = [0, 1]^n$$

Supongamos que el cubo  $K$  tiene arista de longitud  $d$ . Dividamos dicho cubo en  $p^n$  subcubos:  $K_1, K_2, \dots, K_{p^n}$  cada uno con arista de longitud  $d/p$ . Los subcubos son disjuntos salvo en sus caras. Como los subcubos son traslaciones unas de otras, es decir, podemos expresarlos de forma  $K_j = K_1 + t_j$  donde  $t_j$  es un vector de traslación, se tiene que

$$\lambda_n(U(K_j)) = \lambda_n(U(K_1 + t_j)) = \lambda_n(U(K_1) + U(t_j)) = \lambda_n(U(K_1))$$

ya que la medida de Lebesgue es invariantes por traslaciones por el apartado anterior. Entonces, tenemos que

$$\lambda_n(U(K)) = \sum_{j=1}^{p^n} \lambda_n(U(K_j)) = p^n \lambda_n(U(K_1))$$

Entones tenemos que

$$\begin{cases} \lambda_n(U(K)) = r\lambda_n(K) \\ \lambda_n(K) = p^n \lambda_n(K_1) \end{cases} \implies \lambda_n(U(K_1)) = r\lambda_n(K_1)$$

Dado que podemos tomar cualquier  $p$ , es decir, podemos subdividir tanto como queramos, podemos trasladar los cubos y obtenemos que  $\lambda_n(U(K')) = r\lambda_n(K')$  para cualquier cubo de la forma  $K' = qK + h$  donde  $q \in \mathbb{Q}^+$  indica la escala y  $h \in \mathbb{R}^n$  la traslación. Es decir, que se cumple para todo los cubos con vértices en coordenadas racionales y aristas paralelas a los ejes.

Ahora extendamos el resultado a bolas abiertas: Sea  $Q$  una bola abierta centrada en el origen. Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomemos dos bolas auxiliares  $Q_1, Q_2$  tales que  $Q_1 \subset Q \subset Q_2$  y  $\lambda_n(Q_2 \setminus Q_1) < \varepsilon$ . Construimos  $E_1 :=$  Unión de cubos que está contenido en  $Q_1$  (aproximación por dentro) y  $E_2 :=$  Unión de cubos que contiene a  $Q_2$  (aproximación por fuera), entonces sabemos que se cumple que

$$Q_1 \subset E_1 \subset Q \subset E_2 \subset Q_2$$

Entonces, por lo demostrado anteriormente tenemos que

$$\lambda_n(U(E_1)) = r\lambda_n(E_1) \quad \text{y} \quad \lambda_n(U(E_2)) = r\lambda_n(E_2)$$

Y además, como  $E_1 \subset Q \subset E_2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} U(E_1) \subset U(Q) \subset U(E_2) &\implies \lambda_n(U(E_1)) \leq \lambda_n(U(Q)) \leq \lambda_n(U(E_2)) = \\ &= r\lambda_n(E_1) \leq \lambda_n(U(Q)) \leq r\lambda_n(E_2) \implies \lambda_n(U(Q)) = r\lambda_n(Q) \end{aligned}$$

Pero dado que  $U(Q) = Q$  debido a que es una bola centrada en el origen, llegamos a la contradicción  $r = 1$ .

3. Es evidente para hipercubos con aristas paralelas a los ejes coordinados, lo cual es suficiente. □

### Corolario 1.4.3

Toda aplicación lineal  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lleva conjuntos medibles-Lebesgue en conjuntos medibles-Lebesgue, y se cumple que para todo conjunto medible-Lebesgue  $A \subset \mathbb{R}^n$  de medida finita:

$$\lambda_n(L(A)) = |\det(L)|\lambda_n(A)$$

Además, también se cumple que la preimagen de todo conjunto medible-Lebesgue de una aplicación lineal es medible-Lebesgue.

*Demostración.* Hagamos una distinción de casos:

1. Si  $|\det(L)| = 0$ , entonces la imagen de  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio lineal propio y tiene medida nula
2. Supongamos que  $|\det(L)| \neq 0$ . Entonces,  $L$  se puede escribir como una composición  $L = UL_0V$  donde  $U$  y  $V$  son operadores lineales orotogonales y  $L_0$  está dado por una matriz diagonal con autovalores estrictamente positivos  $\alpha_j$ . Entonces como  $|\det(L)| = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$  y las aplicaciones  $U$  y  $V$  preservan la medida por el teorema anterior, basta considerar  $L_0$ . Sea  $A = [b_i, c_i]^n$  es un cubo con aristas paralelas a los ejes de coordenadas, entonces la igualdad

$$\lambda_n(L_0(A)) = (\alpha_i c_i - \alpha_i b_i)^n = \alpha_i (c_i - b_i)^n = |\det(L_0)|\lambda_n(A)$$

es evidente. Por lo tanto, dado que esto se cumple para cubos con aristas paralelas a los ejes coordinados, se cumple para cualquier conjunto medible-Lebesgue de medida finita (siguiendo el procedimiento del teorema anterior).

□

### Teorema 1.4.3

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  Borel-medible. Si  $F : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua, entonces es de Borel.

*Demostración.* Sea  $B$  abierto en  $(\mathbb{R}^m, \tau_m)$ ,  $f^{-1}(B)$  es abierto en  $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$ . Denotamos  $f^{-1}(\tau_m) = \{f^{-1}(B) : B \in \tau_m\}$ . Tenemos que  $f^{-1}(\tau_m) \subset \tau_n$  y así  $\sigma(f^{-1}(\tau_m)) \subset \mathcal{B}_n$ . Ahora bien, como la imagen inversa commuta con las uniones y las intersecciones,  $\sigma(f^{-1}(\tau_m)) = f^{-1}(\sigma(\tau_m)) = f^{-1}(\mathcal{B}_m)$  por lo que  $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_n$ . □

### Lema 1.4.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto Lebesgue medible, y sea  $B \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto Lebesgue medible. Entonces  $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es Lebesgue medible y se tiene que  $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)$

*Demostración.* Dado un recubrimiento  $\mathcal{U} \subset \mathcal{J}_0$  de  $A$  y un recubrimiento  $\mathcal{V} \subset \mathcal{J}_0$  de  $B$ , el conjunto  $\mathcal{W} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$  es un recubrimiento en  $\mathcal{J}_0$  de  $A \times B$  y además,  $\lambda_{n+m}(U \times V) = \lambda_n(U) \cdot \lambda_m(V)$  de donde se sigue el resultado. □

### 1.4.3 Existencia de conjuntos no medibles

#### Definición 1.4.9

Consideremos la relación de equivalencia en  $\mathbb{R}$  definida como  $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ . Utilicemos el axioma de elección para construir el conjunto  $V \subset [0, 1]$  que contiene exactamente un elemento de

*cada clase de equivalencia de  $\sim$*

## 2 Integración con respecto de una medida

### 2.1 Propiedades de las funciones medibles

**Definición 2.1.1** [Medibilidad de funciones]

Sea  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $(Y, \mathcal{B})$  otro espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **medible** si para todo conjunto medible  $B \in \mathcal{B}$ , el conjunto inverso  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

**Lema 2.1.1**

Sea  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra y  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  es medible si y sólo si  $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{A}$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$  es medible si y sólo si  $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{A}$  para todo  $c \in \mathbb{R}$  y  $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ : Es trivial, ya que si  $f$  es medible, por definición  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  para todo  $B \in \mathcal{B}$  y en particular para  $B = (-\infty, c)$ .

$\Leftarrow$ : Dados  $a > b$  se tiene que:

$$[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a), \quad (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ a + \frac{b-a}{n+1}, b \right)$$

Puesto que todo abierto en  $\mathbb{R}$  es unión numerable de intervalos abiertos se cumple que  $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  para todo  $U \in \tau$  la topología usual de  $\mathbb{R}$ . Esto significa que  $\sigma(f^{-1}(\tau)) = f^{-1}(\sigma(\tau)) = f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$  por lo que  $f$  es medible.  $\square$

**Teorema 2.1.1**

Sean  $f, g, f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), n \in \mathbb{N}$  funciones medibles con respecto a una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Entonces:

1. La función  $\varphi \circ f$  es medible para cualquier función de Borel  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en particular esto es cierto si  $\varphi$  es continua.
2.  $\alpha f + \beta g$  es medible para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
3.  $f \cdot g$  es medible.
4. Si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in X$ , entonces  $\frac{f}{g}$  es medible.
5. Si existe el límite  $f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x$ , entonces  $f_0$  es medible.
6. Las funciones  $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  son medibles.

*Demostración.* (I) Sea  $B \in \mathcal{B}$ , entonces  $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$ , luego  $\varphi \circ f$  es medible.

Por (I), para demostrar (II) basta con considerar el caso  $\alpha = \beta = 1$  y observar que para  $(-\infty, c) \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{aligned} (f + g)^{-1}((-\infty, c)) &= \{x \in X : f(x) + g(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < c - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < c - g(x)\}). \end{aligned}$$

El lado derecho de esta relación pertenece a  $\mathcal{A}$ , puesto que las funciones  $f$  y  $g$  son medibles.

(III) Dedúcese de la igualdad  $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$  y de las afirmaciones ya probadas; en particular, el cuadrado de una función medible es medible por (I).

(IV) Observando que la función  $\varphi$  definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es de Borel (comprobarlo), obtenemos (IV).

(V) Basta comprobar que

$$\{x \in X : f_0(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n+1}^{\infty} \left\{ x \in X : f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}.$$

(VI) Basta observar que

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k=1, \dots, n} f_k(x).$$

y demostrar la medibilidad de  $\max_{k=1, \dots, n} f_k(x)$ . Por inducción, esto se reduce al caso  $n = 2$ . En este caso, tenemos:

$$\{x \in X : \max(f_1(x), f_2(x)) < c\} = \{x \in X : f_1(x) < c\} \cap \{x \in X : f_2(x) < c\}.$$

La afirmación correspondiente para el ínfimo se verifica con la igualdad

$$\underline{f}(x) = -\sup_{n \in \mathbb{N}} [-f_n(x)].$$

□

### Lema 2.1.2

Sean  $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, el conjunto  $L$  de todos los puntos  $x \in X$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existe, es finito y pertenece a  $\mathcal{A}$ . Lo mismo vale para los conjuntos  $L^-$  y  $L^+$  de todos aquellos puntos donde el límite es  $-\infty$  o  $+\infty$  respectivamente.

*Demostración.* Basta observar que el punto  $x$  está en  $L$  si y sólo si  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, es decir,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k}$  para todo  $p, q \geq N$ . Es decir,

$$L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{p,q \geq N} \{x : f_p(x) - f_q(x) < \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}$$

Los casos de  $L^-$  y  $L^+$  se demuestran de forma análoga. □

### Definición 2.1.2

Una función  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es simple si es combinación lineal (finita) de funciones características de conjuntos medibles. Esto es que  $f$  viene dada por una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  y por coeficientes  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , de modo que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x)$$

### Observación 2.1.1

La condición de que los conjuntos  $A_k$  sean disjuntos y de que los coeficientes  $\alpha_k$  sean distintos no es necesaria para la definición, pero garantiza que la expresión de  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$  es única salvo el

orden de los sumandos.

### Lema 2.1.3

Sea  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  medible y y limitada. Entonces existe una sucesión de funciones simples  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $s_n \leq s_{n+1} \leq f$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Sea  $c = \sup_{x \in X} \{|f(x)| + 1\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , particionamos el intervalo  $[-c, c]$  en  $n$  subintervalos disjuntos:

$$I_j = [-c + c(j-2)2^{-n}, -c + cj2^{-n}]$$

de longitud  $c2^{-n}$ . Definamos entonces  $A_j = f^{-1}(I_j)$ ; está claro que  $A_j \in \mathcal{A}$  ya que  $\cup_{j=1}^n A_j = X$ . Sea  $c_j$  el extremo izquierdo de  $I_j$  y definamos la función simple  $s_n(x) \leq s_{n+1}$  y  $s_n(x) \leq f(x)$  y también se cumple que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - s_n(x)| \leq 2^{-n}c$$

ya que la función  $f$  lleva  $A_j$  a  $I_j$  y  $s_n$  lleva  $A_j$  a  $c_j \in I_j$ , que está a una distancia como máximo de  $2^{-n}c$  de cualquier punto de  $I_j$ .  $\square$

### Corolario 2.1.1

Sea  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces para toda función  $\mathcal{A}$ -medible,  $f$  existe una sucesión de funciones simples  $s_n$  que converge a  $f$  en cada punto. Si  $f \geq 0$  satisface además que  $s_n \leq s_{n+1} \leq f$

*Demostración.* Definamos las funciones  $g_n$  por

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos encontrar funciones simples  $s_n$  tales que  $|s_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}$ . Es claro que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ . Si  $f \geq 0$  por el lema anterior podemos escoger  $s_n$  tales que  $s_n \leq s_{n+1} \leq f$ .  $\square$

## 2.2 La integral de funciones positivas

### Definición 2.2.1 [Integral de Lebesgue de funciones simples sobre un espacio de medidas]

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Para cualquier función simple  $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definimos su integral de Lebesgue respecto a la medida  $\mu$  como

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

Si la medida que estamos utilizando es evidente (por ejemplo, en el caso de usar la medida de Lebesgue), podemos omitir la referencia a la medida anterior y escribir  $\int_X f(x) d\mu$ . Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces la integral de  $f$  sobre el conjunto  $A$  se define como la integral de la función simple  $\chi_A f$ , es decir,

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k \cap A)$$

Cuando no se indique el conjunto de integración, se entenderá que se está integrando con respecto al dominio de  $f$ .

### Lema 2.2.1 [Propiedades de la integral de funciones simples]

La integral de Lebesgue sobre funciones simples cumple las siguientes propiedades:

1. Se verifica que

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \sup_{x \in X} f(x)\mu(X)$$

2. Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces

$$\int_X [\alpha f(x) + \beta g(x)]d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x) + \beta \int_X g(x)d\mu(x)$$

En particular, si  $A$  y  $B$  son conjuntos medibles disjuntos (en  $\mathcal{A}$ ) se cumple que

$$\int_{A \cup B} f(x)d\mu(x) = \int_A f(x)d\mu(x) + \int_B f(x)d\mu(x)$$

*Demostración.* 1. Es evidente por la definición de la integral de funciones simples. Además la definición implica la igualdad

$$\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x)$$

Por lo tanto ahora basta con verificar la afirmación (2) para  $\alpha = \beta = 1$ .

2. Sea  $f$  función simple que toma valores distintos  $c_k$  tales que se definen  $A_k = \{x \in X : f(x) = c_k\}$  y sea  $g$  una función que toma valores distintos  $b_j$  tales que se definen  $B_j = \{x \in X : g(x) = b_j\}$ . Entonces los conjuntos  $A_k \cap B_j = \{x \in X : f(x) = c_k\} \cap \{x \in X : g(x) = b_j\} \subset \mathcal{A}$ -disjuntos, entonces  $f + g = c_k + b_j$  en el conjunto  $A_k \cap B_j$ .

Sea  $\{d_r\}_{r=1}^l = \{c_k + b_j\}_{k=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$  y  $C_r = \bigcup\{A_k \cap B_j : c_k + b_j = d_r\}$  para  $r = 1, \dots, l$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_X [f(x) + g(x)] &= \sum_{r=1}^l d_r \mu(C_r) = \sum_{r=1}^l d_r \mu(\bigcup\{A_k \cap B_j : c_k + b_j = d_r\}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (c_k + b_j) \mu(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

pues  $\sum_{j=1}^m \mu(A_k \cap B_j) = \mu(A_k)$  y  $\sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap B_j) = \mu(B_j)$ . Esta última afirmación se deduce de  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ , ya que los conjuntos  $\{A_k\}$  y  $\{B_j\}$  son disjuntos y cubren todo  $X$ .

□

### Corolario 2.2.1

Si  $f$  y  $g$  son funciones simples tales que  $f \leq g$  casi en todo punto, entonces

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x)$$

*Demostración.* Sea  $A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ . Entonces  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu(X \setminus A) = 0$ . Entonces, por hipótesis tenemos que  $g - f$  es una función simple en  $A$ . No obstante, la función podría ser negativa en  $X \setminus A$ , por lo que definamos la constante positiva:

$$c = \sup_{x \in X} \{|f(x)| + |g(x)|\}$$

Por tanto definamos la función auxiliar

$$h(x) = g(x) - f(x) + c\chi_{X \setminus A}(x)$$

Entonces  $h$  es una función simple no negativa en  $X$ :

1. Si  $x \in A$ :

$$h(x) = g(x) - f(x) + c \cdot 0 = g(x) - f(x) \geq 0$$

2. Si  $x \in X \setminus A$ :

$$h(x) = g(x) - f(x) + c \cdot 1 \geq -|g(x) - f(x)| + c \geq 0$$

Ahora, por el lema anterior se cumple que

$$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_X g d\mu(x) - \int_X f d\mu(x) + \int_X c\chi_{X \setminus A}(x)d\mu(x) \geq 0$$

Entonces, por la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_X g d\mu(x) - \int_X f d\mu(x) \geq 0$$

□

### Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue de funciones positivas sobre un conjunto medible]

Sea  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función medible y  $E \in \mathcal{A}$ . Definimos la integral de Lebesgue de  $f$  respecto a  $\mu$  sobre  $E$  como

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ medible, } s \leq f \right\} \in \mathbb{R}^+$$

Al igual que para las funciones simples usaremos la notación  $\int_E f \equiv \int_E f d\mu \equiv \int_E f(x) d\mu(x)$ .

### Lema 2.2.2

Sean  $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, \infty)$  medibles,  $A, B, E \in \mathcal{A}$ . Entonces se tienen las siguientes propiedades:

(I) Si  $0 \leq f \leq g$ , entonces

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(II) Si  $A \subset B$  y  $f \geq 0$ , entonces

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

(III) Si  $f \geq 0$  y  $c$  es una constante con  $0 \leq c < \infty$ , entonces

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(IV) Si  $f(x) = 0$  para todo  $x \in E$ , entonces

$$\int_E f d\mu = 0,$$

incluso si  $\mu(E) = \infty$ .

(V) Si  $\mu(E) = 0$ , entonces

$$\int_E f d\mu = 0,$$

aún si  $f(x) = \infty$  para todo  $x \in E$ .

(VI) Si  $f \geq 0$ , entonces

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu.$$

### Teorema 2.2.1 [Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue]

Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones medibles en  $X$ , y supongamos que:

1.  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$  para todo  $x \in X$ .
2.  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in X$

Entonces  $f$  es medible y se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Demostración.* Como  $\int f_n \leq \int f_{n+1}$  existe  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \alpha$$

Para ver la igualdad, dividiremos la demostración en las dos desigualdades:

1.  $\alpha \leq \int_X f d\mu$ : Sea  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ , entonces como  $f$  es medible y  $f_n \leq f$  se cumple que  $\int f_n \leq \int f$  para todo  $n$  por lo que tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene que  $\alpha \leq \int_X f d\mu$ .
2.  $\alpha \geq \int_X f d\mu$ : Sea  $s$  cualquier función simple medible tal que  $0 \leq s \leq f$ , sea  $c \in (0, 1)$  y definamos  $E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Cada  $E_n$  es medible,  $E_n \subset E_{n+1}$  y  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Para ver esta igualdad considérese  $x \in X$ , entonces se pueden dar dos casos:
  - (a) Si  $f(x) = 0$  entonces  $s(x) = 0$  (pues  $s \leq f$ ) así que  $cs(x) = 0 \leq f_1(x)$  luego,  $x \in E_1$
  - (b) Si  $f(x) > 0$  entonces  $cs(x) < f(x)$  ya que  $c < 1$  por lo que existe alguna  $n$  tal que  $x \in E_n$ .

También se cumple que para  $n \in \mathbb{N}$  que  $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} s$  por lo que tomando el límite

$$\alpha \geq c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s$$

donde la última igualdad se debe a la continuidad por abajo de la medida. Como  $c \in (0, 1)$  fue fijado arbitrariamente si tomamos  $c \rightarrow 1^-$ , obtenemos que  $\alpha \geq \int_X s$ . Como  $s$  fue fijada arbitrariamente con  $0 \leq s \leq f$ , y por definición tenemos que

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : s \text{ simple}, 0 \leq s \leq f \right\}$$

concluimos que  $\alpha \geq \int_X f d\mu$ .

□

### Teorema 2.2.2 [Teorema de Beppo Levi]

sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Entonces  $f$  es medible y se cumple que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

*Demostración.* Primero, existen sucesiones crecientes  $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(s_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples y medibles tales que  $s_n \leq f_1, s_n \leq f_2, s_n^1 \rightarrow f_1$  y  $s_n^2 \rightarrow f_2$ . Definiendo  $s_n = s_n^1 + s_n^2$ , observese que  $s_n \rightarrow f_1 + f_2$ . Entonces por el Teorema de la convergencia monótona anterior y por la linealidad de la integral en funciones simples, se tiene que

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

Sea  $g_n = f_1 + \dots + f_n$ , entonces la sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  crece monótonamente y converge a  $f$ . Aplicando la inducción observamos que

$$\int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu$$

Aplicando de nuevo el Teorema de la convergencia monótona se obtiene la igualdad deseada:

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

□

### Lema 2.2.3 [Lema de Fatou]

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  para cada entero positivo  $n$ . Entonces se cumple que

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

*Demostración.* Definamos  $g_k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x) : k \in \mathbb{N}, x \in X$ . Entonces  $g_k \leq f_k$ , por lo que

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además,  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$ , cada  $g_k$  es medible y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

□

## 2.3 Integración de funciones reales y complejas

### Definición 2.3.1

Definimos  $\mathcal{L}^1((X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{C}) = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$  como el conjunto de todas las funciones complejas medibles  $f$  sobre  $X$  tales que

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Cabe señalar que la medibilidad de  $f$  implica la de  $|f|$ , por lo tanto, la integral anterior está bien definida.

Los elementos de  $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  se llaman *funciones integrables en sentido de Lebesgue* (respecto de  $\mu$ ) o *funciones sumables*.

### Definición 2.3.2

Sea  $f = u + iv$  donde  $u$  y  $v$  son funciones reales medibles sobre  $X$  y supongamos que  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ . Definimos para todo conjunto medible  $E$ :

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \left( \int_E v^+ d\mu - \int_E v^- d\mu \right)$$

donde  $g^+ = \max\{g, 0\}$  y  $g^- = \max\{-g, 0\}$  para cualquier función real  $g$ . Las funciones  $u^+, u^-, v^+, v^-$  son funciones reales medibles no negativas y sumables.. Además tenemos que  $u^+u^-, v^+v^- \leq |f|$  por lo que cada una de estas cuatro integrales existe y es finita.

### Teorema 2.3.1

Sean  $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  y

$$\int_X [\alpha f(x) + \beta g(x)] d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) + \beta \int_X g(x) d\mu(x)$$

*Demostración.* La medibilidad de  $\alpha f + \beta g$  es inmediata. Además, se tiene que

$$\int_X |\alpha f(x) + \beta g(x)| d\mu(x) \leq |\alpha| \int_X |f(x)| d\mu(x) + |\beta| \int_X |g(x)| d\mu(x) < \infty$$

Por lo tanto  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ . Finalmente queda probar que

$$\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x)$$

y que

$$\int_X cf(x) d\mu(x) = c \int_X f(x) d\mu(x)$$

Definamos la función auxiliar  $h = f + g$ , tenemos que

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

reordenando, esto es

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

Así, por la linealidad de la integral para funciones no negativas, tenemos que

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

Y como cada una de estas integrales es finita, espejando obtenemos la primera igualdad.  
Para la segunda igualdad, sea  $\alpha$  distinguimos casos:

1. Si  $\alpha \geq 0$ , entonces el resultado es inmediato
2. Si  $\alpha = -1$  entonces el resultado también es inmediato usando que  $(-g)^+ = g^-$
3. Si  $\alpha = i$  el resultado también es sencillo:

$$\int(if) = \int i(u + iv) = \int(-v + iu) = \int -v + i \int u = i \int f$$

Combinando estos resultados, obtenemos la segunda igualdad para  $\alpha \in \mathbb{C}$  arbitrario.  $\square$

### Teorema 2.3.2

Sea  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ . Entonces

$$\left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)| d\mu(x)$$

*Demostración.* Definamos  $z = \int_X f(x) d\mu(x)$ . Como  $z$  es un número complejo, existe un número complejo  $\alpha$  tal que

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{z}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \end{cases} \implies |z| = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ 1 & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

y tal que  $\alpha \cdot z = |z|$ . Sea  $u = \Re(\alpha f)$ . Entonces  $u \leq |\alpha f| = |f|$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu &= |z| = \alpha z = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X \alpha f(x) d\mu(x) = \int_X \Re(\alpha f(x)) d\mu(x) + i \int_X \Im(\alpha f(x)) d\mu(x) = \\ &= \int u \leq \int |f| \end{aligned}$$

La parte imaginaria de la integral es nula ya que es igual a un módulo, i.e. a un número real.  $\square$

### Teorema 2.3.3 [Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue]

Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones complejas y medibles en  $X$  tales que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Si existe una función  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } n \in \mathbb{N}$$

Entonces  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  y se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

y además que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

*Demostración.* Como  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todo  $n$  y  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , tomando límite obtenemos  $|f(x)| \leq g(x)$ . Como  $f$  es medible (límite de funciones medibles) y  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ , se tiene que  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ .

Además, observemos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$$

Como  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ , tenemos que  $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  para todo  $x \in X$ , es decir:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ para todo } x \in X$$

Aplicamos el Lema de Fatou a las funciones no negativas  $h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \geq 0$ :

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$$

Como  $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 2g(x) - \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 2g(x) - 0 = 2g(x)$ , tenemos:

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu$$

Por linealidad de la integral:

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_X 2g d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \right]$$

Como  $\int_X 2g d\mu < \infty$  (pues  $g \in \mathcal{L}^1$ ), podemos escribir:

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

donde usamos que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ . Restando  $\int_X 2g d\mu$  en ambos lados:

$$0 \leq -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

Es decir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$$

Como siempre  $\int_X |f_n - f| d\mu \geq 0$ , tenemos:

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$$

Por tanto, existe el límite y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

Finalmente, para la segunda conclusión:

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

□

## 2.4 Espacios $L^p$

### Definición 2.4.1

Sean  $p \in [1, \infty)$  y  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Definimos

$$\mathcal{L}^p(X, \mathbb{F}) \equiv \mathcal{L}^p(X, \mu, \mathbb{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{F} : f \text{ medible}, \|f\|_p < \infty\}$$

donde  $\|\cdot\|_p$  se define como

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \in [0, \infty)$$

Definimos además  $\mathcal{L}(X, \mathbb{F}) = \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})|_{\sim}$  donde  $f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ . Observese que si  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})$  y  $f \sim g$  entonces  $\|f\|_p = \|g\|_p$ .

Definimos también

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{F} : f \text{ medible}, \|f\|_\infty < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ para casi todo } x \in X\}$$

y por definición  $\inf\{\emptyset\} = \infty$ .

### Definición 2.4.2 [Exponentes conjugados]

Sean  $p, q \in [1, \infty]$ . Decimos que  $p$  y  $q$  son exponentes conjugados (o duales) si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para  $1 < p < \infty$  esto determina  $q = \frac{p}{p-1}$ . Se adoptan las convenciones  $p = 1$  corresponde a  $q = \infty$  y  $p = \infty$  corresponde a  $q = 1$ .

### Proposición 2.4.1 [Desigualdad de Young]

Sea  $p \in (1, \infty)$ , entonces para  $a, b \in \mathbb{R}^+$  se tiene que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

*Demostración.* Distingamos casos:

1. Si  $ab = 0$ , la desigualdad es evidente
2. Si  $a, b > 0$ , podemos escribir  $a = tb$  con  $t > 0$ . Para demostrar que la desigualdad se cumple para todo  $t$ , basta ver que la función

$$f(t) = \frac{(tb)^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*} - (tb)b \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Derivemos la función anterior 2 veces para analizar su crecimiento:

$$f'(t) = b(tb)^{-1} - b^2, \quad f''(t) = (p-1)b^2(tb)^{p-2} > 0$$

Luego  $f$  es estrictamente convexa. Además  $f'$  sólo se anula en  $t_0 = b^{\frac{2-p}{p-1}}$ , donde alcanza un mínimo relativo con  $f(t_0) = 0$ , luego  $f(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ .

□

**Proposición 2.4.2** [Desigualdad de Hölder]

Sean  $p \in [1, \infty]$ ,  $(X, \mu)$ -espacio de medida y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{F}$  medibles. Entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*Demostración.* Distingamos casos:

- Si  $f \cdot g = 0$ , la desigualdad es evidente.

- Si  $f \cdot g \neq 0$ , aplicamos la desigualdad de Young a  $a = |f(x)|/\|f\|_p$  y  $b = |g(x)|/\|g\|_{p^*}$  para todo  $x \in X$ :

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_{p^*}} = \int \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_{p^*}} d\mu \leq \int \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} d\mu + \int \frac{|g|^{p^*}}{p^* \|g\|_{p^*}^{p^*}} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

por lo que  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$ .

□

**Proposición 2.4.3** [Desigualdad de Minkowski]

Sea  $p \in [1, \infty]$ ,  $(X, \mu)$ -espacio de medida y  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})$ . Entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

*Demostración.* Distingamos casos:

- Si  $\|f\|_p = 0$  o  $\|g\|_p = 0$  el resultado es evidente
- Supongamos que  $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ . Podemos ver que  $\|f + g\|_p < \infty$ , ya que

$$|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

Para demostrar este hecho, usamos que la función  $h(x) = |x|^p$  es convexa sobre  $\mathbb{R}^+$  (para  $p > 1$ ) y por la definición de convexidad:

$$\left| \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \right|^p \leq \left| \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}|g| \right|^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p$$

Esto implica que

$$|f + g|^p \leq 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p$$

Por lo tanto, sabemos que  $\|f + g\|_p < \infty$ . Distingamos casos:

- Si  $\|f + g\|_p = 0$  el resultado es evidente.
- Si  $\|f + g\|_p \neq 0$ , usando la desigualdad triangular y luego la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Dividiendo por  $\|f + g\|_p^{p-1}$  obtenemos la desigualdad deseada:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

### Definición 2.4.3 [Espacio de Banach]

*Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  se dice un espacio de Banach si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en  $V$  converge a un elemento de  $V$ .*

#### Ejemplo

El espacio  $\mathcal{B}(X, \mathbb{F})$  de funciones limitadas  $f : X \rightarrow \mathbb{F}$  se dice que es un espacio de Banach con la norma  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

### Proposición 2.4.4

*$L^p(X, \mathbb{F})$  es un espacio de Banach para todo  $p \in [1, \infty]$ . Además, si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \mathbb{F})$ , entonces existe una subsucesión  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  para casi todo  $x \in X$ .*

Demostración. QUEDA PONERLA

□

### Definición 2.4.4 [Espacio de sucesiones de potencia p-ésima sumables]

Sea  $p \in [1, \infty)$ . Definimos  $\ell^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| \leq \infty\}$  donde

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \in \mathbb{R}^+$$

### Observación 2.4.1

Observese que si  $X = \mathbb{N}$ , y  $\mu$  es una medida de Cantor, es decir  $\Sigma = 2^\mathbb{N}$  y  $\mu(A) = \#(A \cap \mathbb{N})$  donde  $\#$  denota el cardinal del conjunto si  $A$  es finito y  $\mu(A) = \infty$ , en caso contrario, tenemos que  $L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{F}) = \ell^p$ .

### Definición 2.4.5 [Continuidad absoluta]

Sea  $I$  un intervalo  $(M, d)$  un espacio métrico,  $f : I \rightarrow M$  se dice absolutamente continua si para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  existe  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tal que para cualquier familia finita de intervalos abiertos contenidos en  $I$ ,  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$  que cumpla que  $\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)z\delta$  se tiene que

$$\sum_{k=1}^n d(f(y_k), f(x_k)) < \varepsilon$$

denotamos  $\mathcal{AC}(I, M)$  al conjunto de las funciones absolutamente continuas de  $I$  en  $M$ .

### Observación 2.4.2

En caso de funciones del tipo  $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  es absolutamente continua si y sólo si  $f_k$  es absolutamente continua para todo  $k = 1, \dots, n$

### Definición 2.4.6 [Derivada débil]

Sean  $A \subset \mathbb{R}$  medible,  $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medibles. Decimos que  $g$  es una derivada débil de  $F$  si  $g$  es Lebesgue-integrable y existen  $c, x_0 \in \mathbb{R}$  tales que

$$f(x) = c + \int_{A \cup [x_0, x)} g(y) dy$$

### Teorema 2.4.1 [Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Lebesgue]

Sea  $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ . Entonces la función  $F[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = c + \int_a^x f(y) dy$$

donde  $c \in \mathbb{R}$  es una constante cualquiera y derivable en casi todo punto  $F' = f$  en casi todo punto. Además,  $F \in \mathcal{AC}([a, b], \mathbb{R})$  y toda función  $F \in \mathcal{AC}([a, b], \mathbb{R})$  y de esta forma, en particular

$$F(b) - F(a) = \text{int}_a^b dy \quad (\text{Regla de Barrow})$$

## 2.5 La relación entre las integrales de Riemann y de Lebesgue

### Definición 2.5.1 [Integral de Riemann]

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Una partición de  $[a, b]$  es un conjunto finito

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Para cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  definimos

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

La suma superior y la suma inferior de Riemann asociadas a la partición  $P$  son

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}).$$

La integral superior (resp. integral inferior) de  $f$  en  $[a, b]$  se definen por

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_P U(f, P), \quad \underline{\int_a^b} f = \sup_P L(f, P),$$

donde los ínfimos y supremos se toman sobre todas las particiones finitas  $P$  de  $[a, b]$ . Decimos que  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$  si

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

En tal caso su valor común se llama integral de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$  y se denota

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Alternativamente,  $f$  es Riemann-integrable con integral  $I$  si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición  $P$  con norma  $\|P\| := \max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$  y para cualquier elección de puntos marcados  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  se cumple

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

### Teorema 2.5.1

Sea una función limitada  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann integral entonces es Lebesgue integrable y ambas integables coinciden.

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , dividimos el intervalo  $I = [a, b]$  en subintervalos disjuntos

$$[a, a + 2^{-n}(b - a), \dots, [b - 2^{-n}(b - a), b]$$

de longitud  $2^{-n}$ . Denotamos estos subintervalos por  $I_{n,1}, \dots, I_{n,2^n}$ . Sean

$$m_{n,k} = \inf f(I_{n,k}), \quad M_{n,k} = \sup f(I_{n,k}).$$

Consideramos las funciones escalonadas

$$f_n(x) = m_{n,k} \text{ si } x \in I_{n,k}, \quad g_n(x) = M_{n,k} \text{ si } x \in I_{n,k}, \quad k = 1, \dots, 2^n.$$

Es claro que

$$f_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x).$$

Además,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad g_{n+1}(x) \leq g_n(x).$$

Las funciones escalonadas son Riemann integrables y, en particular,  $f_n$  satisface

$$\int_{[a,b]} f_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n} m_{n,k}.$$

Estas funciones  $f_n$  son también simples medibles y, por tanto, Lebesgue integrables, con

$$\int_{[a,b]} f_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n} m_{n,k}$$

(se puede verificar). Así,  $\int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f_n$  y lo mismo ocurre con  $g_n$ . La integrabilidad Riemann de  $f$  implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} g_n = \int_{[a,b]} f$$

Las funciones límite

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

son acotadas y medibles en el sentido de Lebesgue (pues son límite de funciones escalonadas), por lo que son integrables en el sentido de Lebesgue. Es claro que para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por la igualdad (??), concluimos que

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por la igualdad (??), concluimos que

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} f,$$

y dado que  $\varphi(x) \leq \psi(x)$ , tenemos que  $\varphi(x) = \psi(x)$  casi en todas partes (se puede verificar). Como  $\varphi \leq f \leq \psi$ , se sigue que  $f = \varphi = \psi$  casi en todas partes, por lo que  $f$  es medible y

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} f.$$

□

### Corolario 2.5.1

Sea  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada y sea  $D$  el conjunto de dos puntos de discontinuidad de  $f$  en  $[a,b]$ . Entonces  $f$  es Riemann-integrable en  $[a,b]$  si y sólo si  $D$  es un conjunto de medida nula.

*Demostración.* Primero veamos que las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  definidas en el apartado anterior a partir de la sucesión de particiones  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfacen que, para  $c \in [a,b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ , se tiene que  $\varphi(c) = \psi(c)$  si y solo si  $f$  es continua en  $c$ .

Supongamos que  $f$  es continua en  $c$ . Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, dados dos elementos  $x, y \in B(c, \delta)$ , tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)| < \varepsilon.$$

En particular,

$$\sup\{f(x) : x \in B(c, \delta)\} - \inf\{f(x) : x \in B(c, \delta)\} \leq \varepsilon.$$

Consideremos entonces  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $1/N < \delta$ , es decir,  $n \geq N$ . En este caso, para  $I_{n,j_n} \subset B(c, \delta)$ , se deduce que

$$M_{n,j_n} - m_{n,j_n} \leq \sup\{f(x) : x \in B(c, \delta)\} - \inf\{f(x) : x \in B(c, \delta)\} \leq \varepsilon,$$

por lo que  $|\varphi(c) - \psi(c)| \leq \varepsilon$ , y como  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  es arbitrario, concluimos que  $\varphi(c) = \psi(c)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\varphi(c) = \psi(c)$ . Entonces, para  $c \in I_{n,j_n}$ ,  $M_{n,j_n} - m_{n,j_n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En este caso, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$M_{n,j_n} - m_{n,j_n} < \varepsilon.$$

En particular, dado  $\delta > 0$  tal que  $B(c, \delta) \subset I_{n,j_N}$ , tenemos

$$|f(x) - f(c)| \leq M_{n,j_N} - m_{n,j_N} < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in B(c, \delta),$$

por lo que  $f$  es continua en  $c$ .

Así, si  $f$  es Riemann integrable en  $[a, b]$ , entonces existe un conjunto  $E \subset [a, b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$  con  $\lambda_1(E) = 0$  tal que

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{para todo } x \in \left( [a, b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \right) \setminus E.$$

Denotamos

$$\tilde{E} = E \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \right).$$

Como el conjunto  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$  es numerable, tenemos que  $\lambda_1(\tilde{E}) = 0$ . Por lo tanto,  $f$  es continua en los puntos de  $[a, b] \setminus \tilde{E}$ , es decir,  $f$  es continua salvo en un conjunto de medida nula.

Recíprocamente, si  $f$  es continua salvo en un conjunto de medida nula, entonces  $\varphi(x) = \psi(x)$  para casi todo punto del intervalo  $[a, b]$ , de donde se deduce que las integrales superior e inferior coinciden, siendo entonces  $f$  Riemann integrable en el intervalo  $[a, b]$ .  $\square$

### Teorema 2.5.2

*Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  y  $|f|$  son integrables en el sentido impropio de Riemann (i.e. en intervalos de integración infinitos, con discontinuidades infinitas, no acotadas, etc). Entonces  $f$  es integrable en el sentido de Lebesgue en  $I$  y*

$$\int_R f = \int_L f$$

*Demostración.* Consideremos el caso en el que el intervalo es  $I = (a, b]$  y limitado, y  $f$  es integrable en el sentido propio de Riemann en cada intervalo  $[a + \varepsilon, b]$  con  $\varepsilon > 0$ . O el caso en el que  $a = -\infty$  es similar.

El caso general se reduce a un número finito de los dos casos anteriores. Sea  $f_n = f$  en  $[a + n^{-1}, b]$  y  $f_n = 0$  en  $(a, a + n^{-1})$ . Por la integrabilidad de Riemann la función  $f$  es Lebesgue-medible en el intervalo  $[a + n^{-1}, b]$  y en consecuencia  $f_n$  es medible. Es claro que  $f_n \rightarrow f$  puntualmente, por lo que  $f$  es medible en  $(a, b]$ .

Por la integrabilidad impropia de  $|f|$  las funciones  $|f_n| \leq |f|$  tienen integrales de Lebesgue uniformemente limitadas (iguales a sus correspondientes integrales de Riemann por el teorema anterior). Por el Lema de Fatou, la función  $|f|$  es integrable-Lebesgue. Por el teorema de la convergencia dominada, las integrales de Lebesgue de las funciones  $f_n$  sobre  $(a, b]$  convergen a la integral de Lebesgue de  $f$ .

En consecuencia, la integral de Lebesgue de  $f$  coincide con la integral impropia de Riemann.  $\square$

## 2.6 Teoremas de Tonelli, Fubini y cambio de Variable

### Definición 2.6.1 [Espacio de medida producto]

*Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  dos espacios de medida. Definimos el espacio de medida producto  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$  como sigue:*

- $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$
- $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos del tipo  $A \times B$  con  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$

- La medida producto  $\mu \times \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  está definida por

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

para todo  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$ .

### Teorema 2.6.1 [Teoremas de Tonelli y Fubini]

Sean  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  y  $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ , dos espacios de medida  $\sigma$ -finitos, y sea  $f$  una función  $(\mathcal{S} \otimes \mathcal{F})$ -medible sobre  $X \times Y$

1. (Teorema de Tonelli) Si  $0 \leq f \leq \infty$ , definimos  $f_x(y) = f(x, y)$  y  $f^y(x) = f(x, y)$  y

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \bar{\varphi}(x) = \int_X f^y d\mu, \quad x \in X, y \in Y$$

entonces  $\varphi$  es  $\mathcal{S}$ -medible,  $\bar{\varphi}$  es  $\mathcal{F}$ -medible y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \bar{\varphi} d\nu$$

O dicho de otra forma

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

2. Si  $f$  es una función compleja, entonces

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f_x| d\nu \text{ satisface que } \int_X \varphi^* d\mu < \infty$$

entonces  $f \in L^1(\mu \times \nu)$

3. (Teorema de Fubini) Si  $f \in L^1(\mu \times \nu)$  entonces  $f_x \in L^1(\nu)$  para casi todo  $x \in X$  y  $f^y \in L^1(\mu)$  para casi todo  $y \in Y$ . Además,  $\varphi \in L^1(\mu)$  y  $\bar{\varphi} \in L^1(\nu)$  y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \bar{\varphi} d\nu$$

O escrito de otra manera

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

### Observación 2.6.1

$$\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}_{n+m}$$

A pesar de esto, se cumple que  $\lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{n+m}|_{\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m}$

### Teorema 2.6.2 [Teorema de Cambio de Variable]

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$ -abierto,  $h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$  inyectiva,  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ . Entonces para todo  $A \subset U$  Lebesgue-

medible, tenemos queda

$$\int_A f(h(x)) |\det(h'(x))| dx = \int_{h(A)} f(y) dy$$

### 3 Calculo vectorial en $\mathbb{R}^n$

#### Observación 3.0.1 [Recuerdo de algunas definiciones]

1. Norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ :  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .
2. Distancia euclídea en  $\mathbb{R}^n$ :  $d(x, y) = \|x - y\|$  para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
3. Norma infinita en  $\mathbb{R}^n$ :  $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$  para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .
4. Función norma en  $\mathbb{R}^n$ : Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \|x\|$ . Entonces,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ .
5. Conjunto de funciones continuas: Sea  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$  el conjunto de funciones continuas de un espacio topológico  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ .
6. Conjunto de funciones continuas y acotadas: Sea  $\mathcal{BC}(X, \mathbb{R}^n)$  el conjunto de funciones continuas y acotadas de un espacio topológico  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ .

#### Observación 3.0.2

Si  $X$  es compacto, entonces  $\mathcal{BC}(X, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ , ya que toda función continua en un espacio compacto es acotada (Teorema de Weierstrass).

#### Definición 3.0.1 [Hiperplano]

Un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto  $H \subset \mathbb{R}^n$  de puntos que satisfacen que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$$

donde  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $b \in \mathbb{R}$  - constante.

Como consecuencia, un hiperplano tiene un gradiente constante.

#### Definición 3.0.2 [Hipersuperficie]

Una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  tal que para cada punto  $p \in S$  existe un entorno abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $p$  y un hiperplano  $H$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $S \cap U$  es homeomorfo a  $H$ .

En otras palabras, es un objeto que tiene una dimensión menor, es suave y localmente parece un plano, aunque globalmente puede estar curvado.

#### Definición 3.0.3 [Parametrización]

Una parametrización de un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es una función continua  $\xi : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\xi(X) = S$ . Si  $X \subset X'$  y  $\xi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n)$  decimos que la parametrización es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\xi$  es inyectiva, decimos que la parametrización es un homeomorfismo entre  $X$  y  $S$ .

#### Definición 3.0.4 [Hipersuperficie parametrizada]

Una hipersuperficie parametrizada de  $\mathbb{R}^n$  es un par  $(\xi, S)$  donde la parametrización  $\xi : X \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua, con dominio  $X \subset \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $X$  es conexo (esto garantiza que la

hipersuperficie no sea fragmentada) y tal que  $S = \xi(X)$ .

Diremos que la hipersuperficie es de clase  $\mathcal{C}^1$  si la parametrización  $\xi$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

### Definición 3.0.5 [Hipersuperficie (parametrizada) de clase $\mathcal{C}^1$ ]

Una hipersuperficie parametrizada  $(S, \xi)$  se dice de clase  $\mathcal{C}^1$  si existe un conjunto abierto  $X' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $X \subset X'$  y  $\xi$  se puede extender a una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en todo  $X'$ .

### Definición 3.0.6 [Hipersuperficie simple]

Una hipersuperficie simple es una hipersuperficie parametrizada  $(\xi, S)$  en la que si  $\xi$  es inyectiva en  $X^\circ$ .

### Definición 3.0.7 [Vector normal]

Dada una hipersuperficie parametrizada  $(\xi, S)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , el vector normal en un punto  $p = \xi(u) \in S$  es el vector

$$N_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial e_1}(u) \times \frac{\partial \xi}{\partial e_2}(u) \times \cdots \times \frac{\partial \xi}{\partial e_{n-1}}(u),$$

Tomando que  $\xi' \in \mathcal{M}_{n \times (n-1)}(\mathbb{R})$  es la matriz jacobiana de  $\xi$  de tamaño  $n \times n-1$  y que  $\xi'_{[k]} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  es la matriz jacobiana quitandole la fila  $k$ -ésima (i.e. es de tamaño  $(n-1) \times (n-1)$ ), entonces el vector normal se puede expresar como

$$N_\xi = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \det(\xi'_{[k]}) e_k,$$

donde  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Denotaremos al vector normal unitario por  $\hat{N}_\xi = \frac{N_\xi}{\|N_\xi\|}$ .

### Ejemplo

Sea una parametrización de una esfera en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\xi(\theta, \phi) = (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi))$$

Calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = (-\sin(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \cos(\theta), 0)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \phi} = (\cos(\phi) \cos(\theta), \cos(\phi) \sin(\theta), -\sin(\phi))$$

Entonces la matriz jacobiana es de la forma:

$$J_\xi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el vector normal:

$$N_\xi = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \det(J_{\xi[k]}) e_k =$$

$$= e_1 \begin{vmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} -\sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} -\sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) \end{vmatrix}.$$

Calculando los determinantes:

$$= -\sin^2(\phi) \cos(\theta) e_1 - \sin^2(\phi) \sin(\theta) e_2 - \sin(\phi) \cos(\phi) e_3.$$

### Proposición 3.0.1 [Propiedades del vector normal]

Dada una hipersuperficie parametrizada  $(\xi, S)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $\xi : X \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el vector normal  $N_\xi$  satisface las siguientes propiedades:

- (I) Para  $n = 3$ ,  $N_\xi = \partial_1 \xi \times \partial_2 \xi$ .
- (II)  $\langle v, N_\xi \rangle = |v| \xi'$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .
- (III)  $|N_\xi| \xi' = \|N_\xi\|^2$ .
- (IV)  $N_\xi \perp \partial_k \xi$  para todo  $k = 1, \dots, n$ .
- (V)  $\|N_\xi\|$  coincide con el volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $\partial_1 \xi, \dots, \partial_n \xi$ .
- (VI) Dada una base del hiperplano ortogonal a  $N_\xi$ , y para cada  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $v_k$  el vector que se obtiene al proyectar  $\partial_k \xi$  sobre dicho hiperplano expresado en términos de la base escogida, se tiene que

$$\|N_\xi\| = |\det(v_1 | \dots | v_{n-1})|.$$

*Demostración.* (I) Para  $n = 3$ , tenemos que  $\xi : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . La matriz jacobiana es

$$\xi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial e_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial e_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial e_2} \end{pmatrix}.$$

Quitando la fila  $k$ -ésima obtenemos matrices  $2 \times 2$ :

$$\xi'_{[1]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial e_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial e_2} \end{pmatrix}, \quad \xi'_{[2]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial e_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial e_2} \end{pmatrix}, \quad \xi'_{[3]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial e_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial e_2} \end{pmatrix}.$$

Por definición del vector normal:

$$N_\xi = \det(\xi'_{[1]}) e_1 - \det(\xi'_{[2]}) e_2 + \det(\xi'_{[3]}) e_3.$$

Por otro lado, el producto vectorial de  $\partial_1 \xi$  y  $\partial_2 \xi$  es:

$$\partial_1 \xi \times \partial_2 \xi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial e_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial e_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial e_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial e_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial e_2} \end{vmatrix} = \det(\xi'_{[1]}) e_1 - \det(\xi'_{[2]}) e_2 + \det(\xi'_{[3]}) e_3 = N_\xi.$$

(II) Sea  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in \mathbb{R}^n$ . Entonces:

$$\langle v, N_\xi \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \langle e_i, N_\xi \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot (-1)^{i+1} \det(\xi'_{[i]}).$$

Desarrollando el determinante de  $\xi'$  por la fila adicional que contiene  $v$ , y considerando que  $\xi'$  es una matriz  $n \times (n - 1)$ , podemos extenderla a una matriz  $n \times n$  añadiendo  $v$  como columna adicional. El determinante de esta matriz extendida es precisamente:

$$\det(\xi' \ v) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} v_i \det(\xi'_{[i]}).$$

Ajustando los signos y notando que el determinante de una matriz con columnas linealmente dependientes puede expresarse en términos de productos escalares, obtenemos  $\langle v, N_\xi \rangle = |v|\xi'$ .

**(III)** Aplicando la propiedad (II) con  $v = N_\xi$ :

$$\langle N_\xi, N_\xi \rangle = |N_\xi|\xi'.$$

Pero  $\langle N_\xi, N_\xi \rangle = \|N_\xi\|^2$ , por lo que  $|N_\xi|\xi'| = \|N_\xi\|^2$ .

**(IV)** Para cualquier  $k = 1, \dots, n-1$ , el vector  $\partial_k \xi$  es una columna de la matriz jacobiana  $\xi'$ . Consideremos:

$$\langle N_\xi, \partial_k \xi \rangle = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det(\xi'_{[i]}) \cdot (\partial_k \xi)_i.$$

Esto es equivalente al desarrollo del determinante de una matriz  $n \times n$  construida al agregar la columna  $\partial_k \xi$  a  $\xi'_{[i]}$ . Como  $\partial_k \xi$  ya es una columna de  $\xi'$ , esta matriz resultante tiene dos columnas iguales, por lo que su determinante es cero. Por tanto:

$$\langle N_\xi, \partial_k \xi \rangle = 0,$$

lo que significa que  $N_\xi \perp \partial_k \xi$  para todo  $k = 1, \dots, n-1$ .

**(V)** El volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $\partial_1 \xi, \dots, \partial_{n-1} \xi$  en  $\mathbb{R}^n$  está dado por:

$$\text{Vol} = \sqrt{\det(G)},$$

donde  $G$  es la matriz de Gram  $G_{ij} = \langle \partial_i \xi, \partial_j \xi \rangle$ . Por otro lado, usando la fórmula de Cauchy-Binet:

$$\det(G) = \det(\xi'^T \xi') = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} [\det(\xi'_{[i_1, \dots, i_{n-1}]})]^2,$$

donde la suma se toma sobre todas las submatrices  $(n-1) \times (n-1)$  de  $\xi'$ . En nuestro caso, esta suma se reduce a:

$$\det(G) = \sum_{k=1}^n [\det(\xi'_{[k]})]^2 = \|N_\xi\|^2.$$

Por tanto,  $\|N_\xi\| = \sqrt{\det(G)}$  coincide con el volumen del paralelepípedo.

**(VI)** Sea  $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$  una base ortonormal del hiperplano ortogonal a  $N_\xi$ . Para cada  $k = 1, \dots, n-1$ , la proyección de  $\partial_k \xi$  sobre este hiperplano es:

$$v_k = \sum_{j=1}^{n-1} \langle \partial_k \xi, w_j \rangle w_j.$$

El volumen del paralelepípedo formado por  $v_1, \dots, v_{n-1}$  en el hiperplano es:

$$|\det(v_1 | \dots | v_{n-1})| = |\det([\langle \partial_i \xi, w_j \rangle]_{i,j})|.$$

Como los  $v_k$  son las proyecciones de los  $\partial_k \xi$  sobre el hiperplano ortogonal a  $N_\xi$ , y  $N_\xi$  es perpendicular a este hiperplano, tenemos que:

$$\|\partial_k \xi\|^2 = \|v_k\|^2 + \left( \frac{\langle \partial_k \xi, N_\xi \rangle}{\|N_\xi\|} \right)^2.$$

Pero por la propiedad (IV),  $\langle \partial_k \xi, N_\xi \rangle = 0$ , por lo que  $\|\partial_k \xi\| = \|v_k\|$ . Por tanto:

$$\|N_\xi\| = |\det(v_1 | \dots | v_{n-1})|.$$

□

### 3.1 Concepto de orientación

#### Definición 3.1.1 [Preservación de orientación en aplicaciones lineales]

Dada una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión y tal que  $f$  es invertible (ya que si no, no tiene sentido hablar de orientación ( $\det(f) = 0$ )). Dada una base  $B$  de  $V$  y una base  $C$  de  $W$ , definimos la preservación de la orientación de la siguiente manera:

*Si  $\det([f]_B) > 0$ , entonces  $f$  preserva la orientación,*

*Si  $\det([f]_B) < 0$ , entonces  $f$  invierte la orientación.*

#### Definición 3.1.2 [Preservación de orientación en aplicaciones diferenciables]

Dada  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable tal que  $J_F(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ , decimos que  $F$  preserva la orientación si  $\det(J_F(x)) > 0$  para todo  $x \in A$  y que invierte la orientación en caso contrario. Equivalentemente si la aplicación diferencial  $\partial_x F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  está orientada positivamente respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $x \in A$ .

#### Definición 3.1.3 [Orientación de las hipersuperficies compactas]

Sea  $(\xi, S)$  una hipersuperficie parametrizada de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $S = \partial A$  para algún  $A \subset \mathbb{R}^n$ -acotado, abierto y conexo, decimos que  $(\xi, S)$  está orientada positivamente si  $N_\xi$  apunta a la cara exterior de  $A$ .

#### Observación 3.1.1

Estas dos nociones pueden entrar en conflicto de la siguiente manera: Supongamos que  $(\xi, S)$  es una hipersuperficie parametrizada  $\mathcal{C}^1$  y que  $S = \partial A$  para algún  $A \subset \mathbb{R}^n$ -acotado, abierto y conexo. Por definición de vector normal, está escogido de forma que siempre tiene orientación positiva respecto a la base dada por  $\xi'$ , es decir, la matriz  $(N_\xi | \xi')$  tiene determinante positivo. No obstante podría ocurrir que esta noción de orientación positiva no concordase con la de las superficies, esto es, que el vector normal apuntase a la cara de dentro de la hipersuperficie y por lo tanto tenga orientación negativa respecto a la de la superficie.

#### Ejemplo

En  $\mathbb{R}^n$  definimos las coordenadas  $(n - 1)$ -esféricas como el sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\phi_1) \\ x_2 = r \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ x_3 = r \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin(\phi_1) \dots \sin(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \\ x_n = r \sin(\phi_1) \dots \sin(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-1}) \end{cases}$$

donde  $r \in \mathbb{R}^+$  y  $\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \in (0, \pi)$  y  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Obsérvese que estas coordenadas coinciden con las coordenadas polares cuando  $n = 2$  y con las esféricas cuando  $n = 3$ .

Sea  $\Delta(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)$  la transformación asociada a este cambio de variables. La matriz jacobiana

del cambio de coordenadas, es decir  $J_\Delta$  viene dada por:

$$J_\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi_1} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \phi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Siendo su determinante:

$$\det(J_\Delta) = r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_1) \sin^{n-3}(\phi_2) \cdots \sin(\phi_{n-2}).$$

Si ahora asumimos que  $r = 1$  estamos restringiendo a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  por lo que podemos considerar la hipersuperficie parametrizada simple  $C^1$  donde  $\xi : [0, \pi)^{n-2} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por:

$$\xi(\phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = \Delta(1, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}).$$

Con esta parametrización, el vector normal de la esfera es:

$$N_\xi(\phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = \sin^{n-2}(\phi_1) \sin^{n-3}(\phi_2) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \xi(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$$

Por último observamos que

$$\begin{aligned} & \int_{[0, \pi)^{n-2}} |J_\Delta(1, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})| d\phi_1 \dots d\phi_{n-1} = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^{n-2}(\phi_1) d\phi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}(\phi_2) d\phi_2 \cdots \int_0^\pi \sin(\phi_{n-2}) d\phi_{n-2} = \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

La aplicación  $\Delta$  tiene orientación positiva como aplicación diferencial ya que  $\Delta^n$  tiene orientación positiva como aplicación lineal dado que  $J_\Delta > 0$ . por otra parte  $N_\xi = \alpha \xi$  con  $\alpha > 0$ , luego

$$|N_\xi^i| = |\alpha \xi^i| = \alpha |\xi^i| = \alpha^n J_\Delta > 0$$

es decir, la orientación de  $|N_\xi|(\xi^i)$  coincide con la de  $\Delta$ . Además, la orientación de  $h$  como hipersuperficie compacta es siempre positiva (coincide con la de  $\Delta$  ya que el vector normal  $N_\xi$  tiene la misma dirección y sentido que el vector de posición  $\xi$ , que apunta siempre hacia la componente conexa no limitada del complementario de la superficie).

### 3.2 Los operadores fundamentales del cálculo vectorial

#### Definición 3.2.1 [Gradiente]

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $A$ . El gradiente de  $f$  en un punto  $x \in A$  es el vector en  $\mathbb{R}^n$  definido como

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

#### Definición 3.2.2 [Divergencia]

Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable en  $A$ . La divergencia de  $F$  en un punto  $x \in A$  es el

escalar definido como

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \nabla \cdot F(x) = \langle \nabla, F(x) \rangle$$

Básicamente, mide la tasa de cambio neta de un campo vectorial en un punto, es decir, cuánto "flujo" sale o entra en ese punto.

### Definición 3.2.3 [Laplaciano]

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $A$ . El laplaciano de  $f$  en un punto  $x \in A$  es el escalar definido como

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

### Definición 3.2.4 [Rotacional]

Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función diferenciable en  $A$ . El rotacional de  $F$  en un punto  $x \in A$  es el vector definido como

$$\operatorname{rot} F(x) = \nabla \times F(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) \end{vmatrix}$$

Básicamente mide la tendencia de un campo vectorial a rotar alrededor de un punto.

### Proposición 3.2.1

Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función diferenciable en  $A$ . Entonces, para todo  $x \in A$  se cumple que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x) = 0$$

### Proposición 3.2.2

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $A$ . Entonces, para todo  $x \in A$  se cumple que

$$\operatorname{rot}(\nabla f)(x) = 0$$

## 3.3 Integrales geométricas

### Definición 3.3.1 [Integral de campo vectorial]

Sea  $(\xi, S)$  una hipersuperficie parametrizada  $C^1$  con  $\xi : X \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $F \in C(S, \mathbb{R}^n)$ . Definimos la integral del campo vectorial  $F$  sobre  $S$  como

$$\int_S F = \int_X \langle F \circ \xi, N_\xi \rangle$$

Sea  $f \in C(S, \mathbb{R})$  definimos la integral de campo escalar  $f$  sobre  $S$  como

$$\int_S f = \int_X (f \circ \xi) \|N_\xi\|$$

En el caso particular de que  $f \equiv 1$  decimos que  $\text{vol}(S) = \int_S 1 = \int_X \|N_\xi\|$  es la medida (área en el caso de  $n = 3$  y volumen en el caso de  $n = 4$ ) de la hipersuperficie  $S$ .

### Definición 3.3.2 [Integrales de línea]

Dada  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un camino absolutamente continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , denotamos la integral de  $F$  a lo largo del camino  $\gamma$  como

$$\oint_{\gamma} F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la integral de un campo escalar  $f$  a lo largo del camino  $\gamma$  como

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

### Observación 3.3.1

Como  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  es absolutamente continua, sus componentes  $\gamma_k$  también lo son y por el teorema fundamental del cálculo, las  $\gamma'_k$  existen en casi todo punto y  $\gamma'_k \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Si  $F \circ \gamma \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  entonces  $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \in L^1([a, b], \mathbb{R})$  por lo que existe  $\oint_{\gamma} F$ . Un razonamiento similar puede aplicarse a  $\oint_{\gamma} f$ .

### Observación 3.3.2

Por el teorema del cambio de variable,  $\oint_{\gamma} F$  y  $\oint_{\gamma} f$  no dependen de la parametrización  $\gamma(I)$  siempre que la parametrización preserva la orientación del camino.

## 3.4 Curvas rectificables

### Definición 3.4.1 [Parametrizaciones equivalentes]

Sean  $I, J \subset \mathbb{R}$ -intervalos,  $(Y, d)$  un espacio métrico y  $u : I \rightarrow Y$ ,  $v : J \rightarrow Y$  dos funciones continuas. Diremos que son equivalentes si existen dos aplicaciones monótonas  $\varphi : I \rightarrow J$  y  $\psi : J \rightarrow I$  tales que  $u(t) = v(\varphi(t)) \forall t \in I$  y Equivalentemente  $u(\psi(s)) = v(s) \forall s \in J$ .

Denotaremos  $u \sim v$  si  $u$  y  $v$  son equivalentes y a  $\varphi$  y  $\psi$  las denominamos cambios de parámetro.

### Observación 3.4.1

La relación definida anteriormente es una relación de equivalencia.

### Definición 3.4.2 [Curva]

Una curva  $\gamma$  es una clase de equivalencia de representaciones paramétricas. En el caso  $Y = \mathbb{R}^n$ , se dice que la curva  $\gamma$  es  $C^n$  si admite una representación de clase  $C^n$ .

Si  $u : [a, b] \rightarrow Y$  es una representación paramétrica de  $\gamma$  y  $u(a) = u(b)$  entonces  $\gamma$  es una curva cerrada. Asimismo, también se define curva simple si  $u$  es inyectiva en  $[a, b]$ .

### Lema 3.4.1

Si  $u : I \rightarrow Y$  es una representación paramétrica de una curva  $\gamma$ , entonces existe otra representación paramétrica  $v : J \rightarrow Y$  no constante en intervalos no degenerados.

*Demostración.* Por simplicidad, asumamos que  $I = [a, b]$  es compacto (en el caso general bastaría con particionar adecuadamente  $I$  en intervalos compactos). Construiremos una serie de funciones que nos ayudarán a obtener la parametrización buscada:

Comencemos definiendo en  $I$  la relación  $t \sim s \iff u(\tau) = u(t) = u(s) \forall \tau \in [\min(t, s), \max(t, s)]$  es constante. Dado que esta relación es de equivalencia y que por ser  $u$  continua y  $I$  compacto, las clases de equivalencia son intervalos compactos.

Sea  $g : I \rightarrow I$  dada por  $g(t) = \max t_\sim = \max\{s \in I : s \sim t\}$ ,  $g$  es creciente y  $u \circ g = u$ .

Sea  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\psi(x) = \lambda_1(g[a, x]) = \lambda_1(\{g(t) : t \in [a, x]\})$ . La función  $\psi$  lo que hace es medir el intervalo después de haber contraído todos los puntos en los que la curva era constante, por lo que  $\psi$  es creciente y contractiva, ya que dado  $y > x$

$$0 \leq \psi(y) - \psi(x) = \lambda_1(g[a, y] \setminus g[a, x]) = \lambda_1(g[x, y]) \leq \lambda_1([x, y]) = y - x$$

Por lo tanto  $\psi$  es continua y  $J = \psi(I)$  es un intervalo.

Definimos entonces el cambio de parámetro  $\varphi(t) = \max\{\psi^{-1}(\{t : t \in J\})\}$ . Se tiene entonces que  $\varphi$  es creciente y  $\psi(\varphi(t)) = t$ .

Veamos ahora que  $v = u \circ \varphi$  no es constante en intervalos no degenerados: Supongamos que  $u \circ \varphi$  es constante en  $[t, s] \subset J$ . Así,  $g(\varphi(t)) = g(\varphi(s))$  por lo que

$$s - t = \psi(\varphi(s)) - \psi(\varphi(t)) = \lambda_1(g[\varphi(t), \varphi(s)]) = 0$$

y por lo tanto  $[t, s]$  es degenerado.

Para finalizar, vemos que  $u$  es continua: Sea  $t_n \rightarrow t$ . Si  $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t)$  entonces  $u(\varphi(t_n)) = u(g(\varphi(t_n)))$  y si no  $\varphi(t_n) \rightarrow x < \varphi(t)$  y  $u(x) = u(\varphi(t))$  por lo que  $u(\varphi(t_n)) = u(g(\varphi(t_n)))$ .  $\square$

### Definición 3.4.3 [Longitud de una curva]

Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico y  $\gamma$  una curva en  $Y$ . Sea  $u : I \rightarrow Y$  una representación paramétrica de  $\gamma$ , donde  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  es un intervalo, entonces definimos la longitud de  $\gamma$  como

$$L(\gamma) = \text{Var}_I(u) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n d(u(t_k), u(t_{k-1})) : a = t_0, \dots, t_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\text{Var}_K(u)$  se llama variación total de la función  $u$ . Decimos que la curva  $\gamma$  es rectificable si  $L(\gamma) < \infty$ . Decimos que  $\gamma$  es **localmente rectificable** si  $\text{Var}_{[a,b]}(u) < \infty$  para todo intervalo  $[a, b] \subset I$ .

### Proposición 3.4.1

Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico. Dadas dos representaciones paramétricas  $u : I \rightarrow Y$  y  $v : J \rightarrow Y$  son equivalentes, entonces  $\text{Var}_I(u) = \text{Var}_J(v)$ . En consecuencia, las definiciones de rectificabilidad y de longitud de una curva no dependen de la representación paramétrica particular.

### Proposición 3.4.2

Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo, sea  $(Y, d)$  un espacio métrico y sea  $u : I \rightarrow Y$  una función. Si  $c \in I$  entonces

$$Var_{I \cap (-\infty, c]}(u) + Var_{I \cap [c, +\infty)}(u) = Var_I(u)$$

### Teorema 3.4.1

Sea  $Y$  una curva rectificable en  $\mathbb{R}^n$  con representación paramétrica  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo. Entonces  $u'$  existe en casi todo punto y se cumple que

$$\int_I \|u'(t)dt\| \leq L(\gamma)$$

La igualdad se cumple si y sólo si  $u \in AC(I; \mathbb{R}^n)$

### Definición 3.4.4 [Curva parametrizada por longitud de arco]

Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico. Dada una curva localmente rectificable  $\gamma$  en  $Y$ , decimos que  $\gamma$  está parametrizada por longitud de arco se admite una representación paramétrica  $\gamma : J \rightarrow Y$  tal que

$$Var_{[t,s]}(\gamma) = t - s$$

para todo  $t, s \in J$  con  $t < s$

Intuitivamente, significa que una curva crece a la misma "velocidad" a que se recorre el intervalo que la define.

Equivalentemente a esta definición, una curva  $\gamma$  también se puede decir que se puede parametrizar por longitud de arco si existe una representación paramétrica  $u : J \rightarrow Y$  tal que

$$\|u'(t)\| = 1 \text{ para casi todo } t \in J$$

### Observación 3.4.2

Obsérvese que la función  $\gamma$  es lipschitziana cuya constante es menor o igual que 1, ya que

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq Var_{[s,t]}(\gamma) = |t - s|$$

para todo  $t, s \in J : t < s$ .

### Proposición 3.4.3

Sea  $\gamma$  una curva en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $\gamma$  puede ser parametrizada por longitud de arco y sea  $\omega : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  una representación por longitud de arco. Entonces

$$\|\omega'(s)\| = 1 \text{ para casi todo } s \in J$$

*Demostración.* Como  $\omega$  es lipschitziana, es absolutamente continua y por tanto derivable para casi todo  $s \in J$ . Y por una proposición anterior se tiene que

$$L(\gamma) = s_2 - s_1 \geq \|\omega(s_2) - \omega(s_1)\| \iff \left\| \frac{\omega(s_2) - \omega(s_1)}{s_2 - s_1} \right\| \leq 1$$

por lo que  $\|\omega'(s)\| \leq 1$  para  $\lambda_1$ -casi todo  $s \in J$

Por otra parte, se tiene que

$$\lambda_1(J_1) = \text{Var}_{J_1}(\omega) = \int_{J_1} \|\omega'(s)\| ds$$

Así, se tiene que

$$0 = \lambda_1(J_1) - \int_{J_1} \|\omega'(s)\| ds = \int_{J_1} (1 - \|\omega'(s)\|) ds$$

Dado que  $\|\omega'(s)\| \leq 1$  para casi todo  $s \in J_1$ , necesariamente  $\|\omega'\| = 1$  para casi todo  $s \in J_1$ .  $\square$

### Teorema 3.4.2

Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico y  $\gamma$  una curva continua localmente rectificable. Entonces,  $\gamma$  puede ser parametrizada por longitud de arco.

*Demostración.* Consideremos una parametrización  $u : I \rightarrow Y$  no constante en intervalos no degenerados y  $t_0 \in I$ . Puede comprobarse que la función

$$V(t) = \begin{cases} \text{Var}_{[t_0, t]}(u) & \text{si } t \geq t_0 \\ -\text{Var}_{[t, t_0]}(u) & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

es continua, creciente y sobreyectiva sobre su imagen. Así,  $J = V(I)$  es un intervalo.

Afirmamos que  $V$  es estrictamente creciente. Dados  $t_1 < t_2$  tales que  $V(t_1) = V(t_2)$ , entonces o bien  $t_1, t_2 \geq t_0$  o bien  $t_1, t_2 \leq t_0$ , y en ambos casos se tiene que

$$\text{Var}_{[t_1, t_2]}(u) = 0$$

lo que implica que  $u$  es constante en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , contradiciendo la hipótesis.

Por tanto,  $V : I \rightarrow J$  es un homeomorfismo y admite inversa continua  $V^{-1} : J \rightarrow I$ . Definimos

$$\omega(s) = u(V^{-1}(s))$$

que es la parametrización por longitud de arco buscada, pues para  $s_1 < s_2$  en  $J$  se tiene

$$\text{Var}_{[s_1, s_2]}(\omega) = \text{Var}_{[V^{-1}(s_1), V^{-1}(s_2)]}(u) = s_2 - s_1$$

$\square$

### Teorema 3.4.3

Sea  $\mathcal{CR}$  el espacio de parametrizaciones  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de curvas rectificables en  $\mathbb{R}^n$  y consideremos la distancia entre  $u$  y  $v$  dada por  $d(u, v) = \|u - v\|_\infty + \text{Var}(u - v)$ . Entonces la función de longitud de arco  $L : \mathcal{CR} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua.

### Teorema 3.4.4

Sea  $\gamma$  una curva simple (inyectiva) rectificable en  $\mathbb{R}^2$  de longitud  $L(\gamma)$ . Para cada  $h > 0$  denotemos  $\gamma_h$  al conjunto de los puntos del plano que están a una distancia no mayor que  $h$  de  $\gamma$ , es decir

$$\gamma_h = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| \leq h \text{ para algún } y \in \gamma\}$$

Entonces

$$\lambda_2(\gamma_h) \leq \pi h^2 + 2hL(\gamma)$$

*Demostración.* Si  $\gamma$  es un segmento de la recta, la región  $\gamma_h$  es la unión de un rectángulo y de dos discos semicirculares, y en este caso el área de  $\gamma_h$  es exactamente igual a  $\pi h^2 + 2hL(\gamma)$ .

Si  $\gamma$  es una curva formada por dos segmentos de recta, el conjunto  $\gamma_h$  es la unión de dos rectángulos solapados, dos discos semicirculares y un sector circular. Como el área del sector circular no excede el área al área del cuadrilátero formado por los rectángulos solapados, se deduce que en este caso el área de  $\gamma_h$  no excede a  $\pi h^2 + 2hL(\gamma)$ .

Un argumento similar se puede emplear para demostrar la desigualdad

$$\lambda_2(\gamma_h) \leq \pi h^2 + 2hL(\gamma)$$

para cualquier curva poligonal  $\gamma$  utilizando inducción sobre el número de aristas.

Para demostrar el teorema para una curva rectificable arbitraria  $\gamma$ , dejamos  $\delta > 0$  dado y construimos un polígono inscrito  $P$  con vértices  $p_0, p_1, \dots, p_n$  tal que todo punto del segmento de  $\gamma$  que une  $p_{k-1}$  y  $p_k$  está a una distancia menor que  $\delta$  del segmento de recta entre  $p_{k-1}$  y  $p_k$ .

Si un punto está a una distancia menor o igual que  $h$  de  $\gamma$ , entonces está a una distancia menor que  $h + \delta$  de  $P$ . Por tanto,  $\gamma_h \subset P_{h+\delta}$  entonces tenemos

$$\lambda_2(\gamma_h) \leq \lambda_2(P_{h+\delta}) \leq \pi(h + \delta)^2 + 2(h + \delta)L(P) \leq \pi(h + \delta)^2 + 2(h + \delta)L(\gamma)$$

Pero como  $\delta$  es arbitrario, se deduce que se debe tener que

$$\lambda_2(\gamma_h) \leq \pi h^2 + 2hL(\gamma)$$

□

### Teorema 3.4.5

Consideremos el espacio  $\mathcal{CR}_C$  de parametrización de curvas cerradas rectificables con norma  $\|\cdot\|_\infty$  entonces la función  $A : \mathcal{CR}_C \rightarrow \mathbb{R}$  que da el área de la región limitada por la curva es continua.

*Demostración.* Sea  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  y  $u \in \mathcal{CR}_C$  encerrado en la región  $B$ . Sea  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\pi\delta^2 + 2\delta L(u) < \epsilon$  y sea  $v \in \mathcal{CR}$  encerrado en la región  $C$  tal que  $\|u - v\|_\infty < \delta$ . Entonces,

$$|A(B) - A(C)| \leq \lambda_2(B \Delta C) \leq \pi\delta^2 + 2\delta L(u) < \epsilon$$

por lo que  $A$  es continua. □

## 3.5 Campos gradientes y funciones potenciales

### Definición 3.5.1 [Campo gradiente y función potencial]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $F \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ . Decimos que  $F$  es un campo gradiente o campo integrable, si existe  $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$  tal que  $F = f'$ . Se dice que  $f$  es una función potencial de  $F$ .

### Definición 3.5.2 [Estrellado]

Un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  se dice estrellado respecto de  $p \in X$  si

$$tx + (1-t)p \in X$$

para todo  $t \in [0, 1]$  y  $x \in X$ .

### Lema 3.5.1 [Lema de Poincaré]

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ . Si  $F$  es un campo gradiente, entonces  $F'$  es una matriz simétrica, es decir,  $\partial_j F_k = \partial_k F_j$  para todo  $j, k = 1, \dots, n$ . Además, si  $A$  es estrellado respecto de un punto, el recíproco también es cierto.

*Demostración.* Si  $F$  es un gradiente,  $F = f'$  para algún  $f \in C^2(A, \mathbb{R})$  y por el Teorema de Schwartz, las derivadas parciales cruzadas son iguales, así

$$\partial_j F_k = \partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f = \partial_k F_j \iff F' \text{ es simétrica}$$

El recíproco es un caso particular de este lema:

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $A$  es estrellado respecto de 0, si no, basta obtenerlo a través de una traslación. Tomamos el potencial de forma

$$W_F(x) = \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle dt = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 F_k(tx) dt$$

$W_F$  está bien definida ya que  $tx \in A$  para todo  $x \in A$  y  $t \in [0, 1]$  por ser  $A$  estrellado respecto de 0. Así, para  $x \in A$  tenemos por una parte,

$$F_j(x) = 1 \cdot F_j(x) - F_j(0) \cdot 0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} (F_j(tx)) dt = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 \partial_k F_j(tx) dt + \int_0^1 F_j(tx) dt$$

Por otra parte,

$$\partial_j W_F(x) = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 \partial_j F_k(tx) dt + \int_0^1 F_j(tx) dt$$

Como  $\partial_j F_k = \partial_k F_j$  concluimos que  $\partial_j W_F(x) = F_j(x)$  para todo  $x \in A$

□

### Observación 3.5.1

Podemos interpretar la proposición anterior en términos físicos. Si  $F$  es una fuerza física, la función  $W_F$  es el trabajo realizado por dicha fuerza al desplazar el objeto sometido a dicha fuerza de posición 0 a posición  $x$  siguiendo una línea recta. Como el campo es conservativo, se tiene que  $W'_F = F$ .

### Teorema 3.5.1 [Teorema fundamental del cálculo para una integral de línea]

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva absolutamente continua y  $A$  un abierto tal que  $\gamma([a, b]) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  es tal que  $F \circ \gamma \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  entonces la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = c + \oint_{\gamma|_{[a,x]}} F$$

donde  $c \in \mathbb{R}$  es una constante cualquier y es derivable en casi todo punto y  $f' = \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle$  en casi todo punto.

Si  $g \in AC(A, \mathbb{R})$  es tal que  $g' \circ \gamma \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  entonces

$$g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = \oint_a^b g'$$

*Demostración.* Basta aplicar el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue. En efecto:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \langle F(\gamma(t)), \gamma' \rangle dt = \langle F(\gamma(x)), \gamma'(x) \rangle$$

para casi todo  $x \in [a, b]$ .

Por otra parte, si  $g \in \mathcal{AC}(A, \mathbb{R})$  es tal que  $g' \circ \gamma \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\oint_{\gamma} g' = \int_a^b \langle g'(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b (g \circ \gamma)'(t) dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

□

### Teorema 3.5.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo,  $F \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $F$  es un campo gradiente
2. La integral de  $F$  a lo largo de cualquier camino en  $A$  sólo depende de los extremos del camino. Es decir, si  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow A$  son dos caminos tales que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  y  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , entonces

$$\oint_{\gamma_1} F = \oint_{\gamma_2} F$$

3. La integral de  $F$  a lo largo de cualquier camino cerrado es nulo.