Calculo Vectorial e Integración Lebesgue

Pablo Pardo Cotos
Ciencias Matemáticas e Ingeniería Informática

Contents

1 Fundamentos de la teoría de la medida

1.1 Anillo, álgebra y σ-álgebra de conjuntos

Definición 1.1.1 [Anillo]

*Dados los conjuntos X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es decir una familia de subconjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es un **anillo de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por diferencias, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Definición 1.1.2 [Álgebra]

*Dado un conjunto X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, familia de conjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es un **álgebra de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos*
3. *$X \in \mathcal{A}$*

Definición 1.1.3 [σ-álgebra]

*Dado un conjunto X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, familia de conjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es una **σ-álgebra de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones numerables*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos*
3. *$X \in \mathcal{A}$*

Observación 1.1.1

Una álgebra es un anillo al que pertenece el conjunto total X.

Observación 1.1.2

1. *Si $\mathcal{A}$ es un anillo, entonces tomando $A, B \in \mathcal{A}$, tenemos que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$. Es decir, los anillos también son cerrados por intersección.*
2. *Sea $\mathcal{A}$ anillo y $E \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\} = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$ es una álgebra de conjuntos en E.*

Definición 1.1.4 [Espacio medible]

Dada una σ-algebra Σ de un conjunto X o también expresado como un par (X, Σ) se llama espacio *medible. A los conjuntos de Σ se les llama conjuntos medibles.*

Definición 1.1.5 [Función medible]

Dados dos espacios medibles (X, Σ_X) y (Y, Σ_Y), y una función $f : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$, se dce que es medible si $\forall E \in \Sigma_Y \, f^{-1}(E) \in \Sigma_X$.

Lema 1.1.1

Sean un conjunto X, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ y una familia $\mathfrak{U}$ de σ-algebras/álgebras/anillos en X que contienen a $\mathcal{C}$. Entonces $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{U}} \mathcal{A}$ es una σ-álgebra/álgebra/anillo que llamamos ***σ-álgebra/álgebra/anillo generada por*** *$\mathcal{C}$ siendo la menor σ-álgebra/álgebra/anillo que contiene a $\mathcal{C}$.*

1.2 Contenidos y medidas

Definición 1.2.1 [Contenido/Pre-medida]

Sea X un conjunto y Σ un anillo en X. Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es un contenido en Σ si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es aditivo, esto es que, dada una sucesión de finita de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

Definición 1.2.2 [Medida]

Sea X un conjunto y Σ-algebra en X. Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es un contenido en Σ si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es σ-aditivo, esto es que, dada una sucesión numerable de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Definición 1.2.3 [Espacio de medida]

Dado un conjunto X, una σ-álgebra Σ en X y una medida $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, se llama espacio de medida a la terna (X, Σ, μ).

Observación 1.2.1

En el caso particualar en el que $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una ***medida de probabilidad*** *para cada $E \in \Sigma$ y el espacio de medida se llama* ***espacio de probabilidad****.*

Definición 1.2.4 [Espacio de medida finita]

SE dice que (X, Σ, μ) es un espacio de medida finita si $\mu(X) < +\infty$.

Definición 1.2.5 [Espacio de medida σ-finita]

SE dice que (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita si existe una sucesión numerable de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.2.2

Las definiciones anteriores se pueden aplicar de la misma manera a los contenidos.

Definición 1.2.6 [σ-álgebra de Borel]

Teniendo en cuenta la definición formal de σ-álgebra, tenemos que X es un espacio topológico con topología τ se dice que Σ es una ***σ-álgebra de Borel*** *con respecto τ y que μ es una medida de τ-Borel o una medida de Borel con respecto a τ, si $\tau \subset \Sigma$.*
Decimos que la menor σ-álgebra que contiene a τ es la σ-álgebra de Borel de τ y la denotamos por $\mathcal{B}(\tau)$.
En el caso concreto en el que el espacio topológico sea $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, denotaremos a esta σ-álgebra de Borel por $\mathcal{B}^n$.

Definición 1.2.7 [Función de Borel]

Una función $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ definida entre dos espacios topológicos se dice que es una ***función de Borel*** *si $f : (X, \mathcal{B}(\tau_1)) \to (Y, \mathcal{B}(\tau_2))$ es medible.*

Definición 1.2.8 [Medida de Borel regular]

Dada una medida de Borel μ en un espacio topológico (X, τ), se dice que es una ***medida de Borel regular*** *si es regular exterior, es decir, si cumple dos condiciones:*

1. *Regularidad exterior:*

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = inf\{\mu(U) : A \subset G, G \in \Sigma \text{ abierto}\}$$

2. *Regularidad interior:*

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = sup\{\mu(K) : F \subset A, F \in \Sigma \text{ compacto}\}$$

Definición 1.2.9 [Casi todo punto]

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y $E \in \Sigma$ diremos que una propiedad P se cumple en μ-casi todo punto de E si existe $N \in \Sigma$, $N \subset E$ tal que $\mu(N) = 0$ y P se cumple en E/N.

Definición 1.2.10 [Intervalo]

Llamamos intervalos de $\mathbb{R}$ a los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (contamos al vacío como intervalo). Decimos que $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo si $I = \prod_{i=1}^n I_i$ donde cada I_i es un intervalo de $\mathbb{R} \forall i = 1, \ldots, n$.

Observación 1.2.3

Como la intersección de intervalos en $\mathbb{R}$ es un intervalo (la intersección de conexos es conexa), y dados dos intervalos $\prod_{i=1}^n I_i$ y $\prod_{i=1}^n J_i$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\left(\prod_{i=1}^n I_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^n J_i\right) = \prod_{i=1}^n (I_i \cap J_i)$$

es decir, la intersección de dos intervalos en $\mathbb{R}^n$ es un intervalo en $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.2.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y μ un contenido (medida) en $\mathcal{A}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Monotonía y subaditividad:*
$$\mu(A) \leq \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$$
Si además, $\mu(B) < +\infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. *Subaditividad de sucesión de conjuntos: Dado una sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}$ entonces:*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k \leq \sum_{k=1}^n \mu(E_k)\right)$$

3. *Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

4. *σ-subaditividad de medidas: Sea μ una medida, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

5. *σ-superadtividad de medidas: Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia disjunta dos a dos y además $\cup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)$$

Proposición 1.2.1

Sea $\mathcal{A}$ un anillo en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ un contenido. Entonces son equivalentes las siguintes condiciones:

1. *μ es σ-aditiva, esto es: Dado una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) < +\infty$ entonces:*

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

2. *Continuidad en el 0: Dada una sucesión de elementos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ y $\mu(A_1) < +\infty$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

3. *μ es continua por debajo: Dada una sucesión de elementos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < +\infty$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

4. *μ es σ-subaditiva: Dada una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces:*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Demostración. (1) $\implies$ (2): Supongamos que μ satisface (1) y que una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ decreciente tal que $\mu(A_1) < +\infty$ y $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Definimos $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, tales que pertenecen a $\mathcal{A}$, su unión es A_1 y son disjuntos dos a dos. Por lo tanto la sucesiñon dada por $s_n = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$ es monotona creciente y esta limitada por $\mu(A_1) < \infty$, por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ converge.
Finalmente, tenemos que la cola de la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Pero esta suma es igual a $\mu(A_N)$, ya que $\cup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$. Por lo tanto llegamos a la condición (2).
(2) $\implies$ (3):
Tomemos la sucesión de conjuntos $A_n = B \setminus B_n$ que satisface las hipótesis de (2) y por lo tanto

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$

(3) $\implies$ (4):
Tomando $B_n 0 \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ que satisface las hipótesis de (3) y

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(4) $\implies$ (1):
Basta aplicar el lema anterior para la demostración. □

Lema 1.2.2

Sea $\mathcal{A}$ un anillo en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Si μ es aditiva y σ-subaditiva, entonces es σ-aditiva.

Demostración. Se una sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tales que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) < +\infty$. Entonces, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Por lo tanto, $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. □

1.3 Medidas exteriores

Definición 1.3.1 [Medida exterior]

Sea X un conjunto. Dada una función $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ es una medida eterior si

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ *si* $A \subset B \subset X$
3. μ *es σ-subaditiva, es decir, dada una sucesión de conjuntos* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ *se cumple que:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definición 1.3.2 [Diferencia de dos conjuntos]

Dado un conjunto X y $A, B \subset X$ llamamos ***diferencia*** *de A y B al conjunto $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*

Definición 1.3.3 [Medida exterior a partir de un contenido]

Sea X un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ asociada a μ tal que $\forall A \subset X$:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}$$

Definición 1.3.4 [Conjunto medible]

*Sea A un subconjunto de X y μ^* una medida exterior en X. Se dice que A es μ-**medible** si:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A\Delta A_\epsilon) < \epsilon$$

Al conjunto de todos los conjuntos μ-medibles se les denota por $\mathcal{A}_\mu$.

Lema 1.3.1 [Propiedades de una medida exterior (asociada a un contenido])

Sea X un conjunto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}, B, C \subset X$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$-contenido, y μ^* la medida exterior asociada. Entonces:

1. $\mu^*(B) \leq \mu^*(C)$ *si* $B \subset C$
2. μ^* *es σ-subaditiva, es decir,* $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
3. $|\mu^*(B) - \mu^*(C)| \leq \mu^*(B \Delta C)$
4. *Si $\mathcal{A}$ es un anillo y μ es un contenido, entonces $\mu^*(\emptyset) = 0$ y equivalentemente, μ^* es una medida exterior en X.*

Demostración.

1. μ^* es por definición monótona creciente, esto es, si $B \subset C \implies \mu^*(B) \leq \mu^*(C)$. Esto se debe a que cualquier recubrimiento numerable de C es también un recubrimiento numerable de B.

2. Sea una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A = \cup A_n$. Dado un $\epsilon > 0$, existen dos casos posibles,

   (a) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^*(A_k) = +\infty$. Entonces, como $A_k \subset A$ se tiene que $\mu^*(A) = \infty$ y por tanto no hay nada que demostrar.

   (b) Si se cumple que $\forall n \in \mathbb{N} \mu^*(A_n) < \infty$ entonces, para cada una de las n existe un recubrimiento $\{B_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ y por tanto

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

   Por lo tanto se tiene que $\cup A_n \subset \cup \cup B_{n,k}$ y en consecuencia se tiene que

   $$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon$$

   Como ϵ es arbitrario, tenemos el resultado.

3. Supongamos que $B \subset C \cup (B \Delta C)$, por lo que, por la subaditividad de μ^* obtenemos que:

   $$\mu^*(B) \leq \mu^*(C) + \mu^*(B \Delta C) \iff \mu^*(B) - \mu^*(C) \leq \mu^*(B \Delta C)$$

   Intercambiando B y C obtenemos la otra desigualdad.

4. Basta tomar $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\emptyset\}$ como recubrimiento de $\emptyset$ y usar que como μ es un contenido, entonces $\mu(\emptyset) = 0$. El resto de propiedades ya han sido demostradas, dada cualquier funcion μ y en particular si μ es un contenido.

□

Teorema 1.3.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ una álgebra en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ un contenido. Entonces:

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu = \{E \in X : \forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon : \mu^*(E \Delta A_\epsilon) < \epsilon\}$ *y la medida exterior μ^* coincide con μ en $\mathcal{A}$.*
2. $\mathcal{A}_\mu$ *es una σ-álgebra, y la restricción de μ^* a $\mathcal{A}_\mu$ es σ-aditiva*

3. *La función μ^* es la única extensión σ-aditiva y positiva de μ en σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y también es la única extensión σ-aditiva y positiva de μ a $\mathcal{A}_\mu$.*

Demostración. $\square$

Definición 1.3.5 [Pre-medida]

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ un contenido. Se dice que μ es una pre-medida si es σ-aditiva.

Teorema 1.3.2 [Extension de un contenido a una medida]

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una pre-medida sobre un anillo σ-finito (dada $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ monótona creciente y con $\mu(X_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$).

Para cada n denotaremos $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}_n}$ donde $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_n\}$ (álgebra de conjuntos en X_n) y denotaremos por Σ_n la σ-álgebra sobre A sobre la cual μ^* es una medida exterior basada en μ. Definimos:

$$\Sigma = \{A \subset X : A \cap X_n \in \Sigma_n \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \overline{\mu}(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cap X_n) : A \in \Sigma$$

Entonces Σ es una σ-álgebra que no depende de los X_n escogidos, y $\overline{\mu}$ es la única medida en Σ tal que $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Demostración. Cada una de las $\mu_n : A \to [0, \infty]$ es un contenido σ-aditivo y finito, por lo que por el teorema anterior podemos obtener las σ-algebras Σ_n y las medidas $\mu_n^*|_{\Sigma_n}$.
Sea A_k tal que $A_k \cap X_n \in \Sigma_n$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Por ser Σ_n una σ-álgebra, tenemos que $(\cup_{k=1}^\infty A_k) \cap X_n = \cup_{k=1}^\infty (A_k \cap X_n) \in \Sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $\cup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$. $\square$

Definición 1.3.6 [Clase compacta]

*Sea una familia $\mathcal{K}$ de subconjuntos de un conjunto X, se dice que es una **clase compacta** si:*

$$\forall \{K\}_{n\in\mathbb{N}} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset \exists N \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$$

Ejemplo

Una familia arbitraria de conjuntos compactos de un espacio topologico es una clase compacta. En efecto parar demostrar el contrarecíproco tomemos una sucesion de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\cap_{n=1}^N K_n = \emptyset \forall N \in \mathbb{N}$. Definimos $\overline{K_n} = \cup_{k=1}^n K_k$. Entonces $\{\overline{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion encadenadad de conjuntos compactos y no vacíos, por lo que el teorema d ela interseccion compacta de Cantor, $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n} \neq \emptyset$ y como consecuencia $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Teorema 1.3.3

Sea μ un contenido sobre $\mathcal{A}$ un anillo $\mathcal{A}$. Supongamos que existe una clase compacta $\mathcal{K}$ que aproxima a μ en el sentido de que: Para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < +\infty$ y para todo $\epsilon > 0$ existen $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ y $A_\epsilon \in \mathcal{A}$

tales que

$$A_\epsilon \subset K_\epsilon \subset A \quad y \quad \mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$$

Entonces, μ es σ-aditiva. En particular esto es cierto si la la clase compacta $\mathcal{K}$ está contenida en $\mathcal{A}$ y para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$$

Demostración. □

Ejemplo

Consideremos los anillos

Ejemplo

Consideremos el anillo $\mathcal{J}_0$ de uniones finitas de intervalos limitados de la forma $[a, b)$ en $\mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion creciente y continua por la izquierda, y sea $v_g[a, b) = g(b) - g(a)$, con v_g un contenido sobre $\mathcal{J}_0$. Entonces, por el teorema anterior, llamese μ_g a la medida generada por el Teorema de la extensiones de medidas σ-finitas, se llama **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a g.

Definición 1.3.7 [Medida completa]

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una medida. μ se dice completa si dado $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$ entonces para cualquier $A \subset E \in \mathcal{A}$ A es medible y $\mu(A) = 0$

Teorema 1.3.4

Las medidas dadas por el Teorema de Extensión de Medidas σ-finitas son completas.

Teorema 1.3.5

Son equivalentes:

1. *A es μ-medible*
2. *$\forall E \in \mathcal{A} : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ (Condición de Carathéodory)*
3. *$\forall \epsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta B) < \epsilon$ (Condición de aproximación)*

1.4 Propiedades de la medida de Lebesgue

1.4.1 Medida de Lebesgue y topología euclidiana

Definición 1.4.1 [familia de semi-abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$]

Denotamos $\mathcal{J}_0$ a la familia de todos los intervalos semi-abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$, dado por

$$\mathcal{J}_0 = \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

Definición 1.4.2 [Contenido de Jordan]

Llamamos ***contenido de Jordan*** *o* ***contenido de Peano-Jordan*** *a la función* $\mu : \mathcal{J} \to [0, +\infty]$ *definida como:*

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

donde, por simplicidad, entendemos que $0 \cdot (+\infty) = 0$*. Para calcular el contenido de Jordan de un conjunto cualquiera* $\mathcal{J}$*, como es una unión finita de intervalos disjuntos de la forma* $\prod_{i=1}^{b}[a_n, b_n)$*, basta con sumar los contenidos de todos los intervalos que lo componen.*

Definición 1.4.3 [Medida de Lebesgue]

Sea $\mathcal{J}_0$ *el anillo de* uniones finitas disjuntas de rectángulos limitados *de la forma*

$$\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^n,$$

y sea μ *el* contenido de Jordan *definido sobre* $\mathcal{J}_0$*.*

Aplicando el Teorema de Extensión de Medidas σ-finitas *(por ejemplo, tomando la secuencia* $X_k = [-k, k]^n$ *para* $k \in \mathbb{N}$*), se obtiene una única medida*

$$\lambda_n : \mathcal{L}_n \to [0, \infty]$$

llamada ***medida de Lebesgue*** *en* $\mathbb{R}^n$*, definida sobre la* σ*-álgebra* $\mathcal{L}_n$ *de* conjuntos Lebesgue medibles, *que extiende el contenido de Jordan y es* σ*-aditiva.*

Además, para cualquier subconjunto $X \in \mathcal{L}_n$*, podemos definir la* medida restringida

$$\lambda_X(A) := \lambda_n(A \cap X), \quad \forall A \in \mathcal{L}_n.$$

Definición 1.4.4 [Medida exterior de Lebesgue]

Siguiendo el teorema anterior de obtención de una medida exterior a partir de un contenido sobre un anillo, en este caso el contenido de Jordan sobre el anillo $\mathcal{J}_0$ *de uniones finitas de intervalos limitados de la forma* $[a, b)$ *en* $\mathbb{R}$*, obtenemos la* ***medida exterior de Lebesgue*** $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ *definida como:*

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n) : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}_0, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}$$

Definición 1.4.5 [Medida de Lebesgue-Stieltjes]

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función creciente y continua por la izquierda. La* ***medida de Lebesgue-Stieltjes*** *asociada a* g *es la medida de Lebesgue* μ_g *generada por el contenido definido en el anillo de uniones finitas de intervalos limitados de la forma* $[a, b)$ *como:*

$$v_g[a, b) = g(b) - g(a)$$

Lema 1.4.1

Todo intervalo $I = \prod_{k=1}^{n} I_k \in \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-medible. Si I es degenerado, entonces $\lambda_n(I) = 0$. Si no, su medida coincide con el producto de las longitudes de sus aristas, es decir:

$$\lambda_n(I) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

Demostración. Realicemos una distinción de casos:

1. Si I es degenerado, quiere decir que está contenido en un hiperplano paralelo a los ejes de coordenadas de $\mathbb{R}^n$, por lo que I es medible y $\lambda_n(I) = 0$.

2. Supongamos que I es no-degenerado. Si $I = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^n$ el resultado es evidente dada la definición de medida de lebesgue.

3. Consideremos ahora cualquier tipo de intervalo de la forma $I = \prod_{k=1}^{n} I_k \subset \mathbb{R}^n$. Definamos $a_k = \inf I_k, b_k = \sup I_k$. Observese que ∂I está contenida en la unión de $2n$ hiperplanos por lo que ∂I es medible (por ser la medida de Lebesgue completa) y $\lambda_n(\partial I) = 0$. Ahora definamos $\mathcal{J} = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k)$ tenemos que $\mathcal{J}$ es medible y ∂I es medible por lo tanto $I = (I \setminus \mathcal{J}) \cup (\mathcal{J} \setminus (\mathcal{J} \setminus I))$ es medible ya que $I \setminus \mathcal{J}, \mathcal{J} \setminus I \subset \partial I$. luego son medibles y se cumple que

$$\lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) = \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = 0$$

y además,

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) + \lambda_n(\mathcal{J}) - \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = \lambda_n(\mathcal{J}) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

□

Proposición 1.4.1

Todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es medible-Lebesgue. Es decir, λ_n es una medida de Borel con respecto la topología usual, por tanto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$.

Demostración. Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es una unión numerable de intervalos abiertos, y por tanto medible. □

Proposición 1.4.2

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es regula, es decir, para todo $A \in \mathcal{L}_n$ se cumple que:

1. *Regularidad exterior:*
$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(U) : U \supset A, U \ \textit{abierto}\}$$

2. *Regularidad interior:*

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K subset A, K \ \textit{compacto}\}$$

Demostración. □

Definición 1.4.6 [Conjunto G_δ]

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto G_δ si existe una sucesión numerable de conjuntos abiertos $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$$

Definición 1.4.7 [Conjunto F_σ]

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto F_σ si existe una sucesión numerable de conjuntos cerrados $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Observación 1.4.1

Como consecuencia del resultado anterior, concluimos que para todo conjunto Lebesgue medible $A \in \mathcal{L}_n$ existe un conjunto $U \in G_\delta$ y un conjunto $F \in F_\sigma$ tales que

$$F \subset A \subset U \quad y \quad \lambda_n(F) = \lambda_n(U) = \lambda_n(A)$$

1.4.2 Transformaciones de conjuntos medibles

Definición 1.4.8 [Aplicación lipschitziana]

Sea X, Y dos espacios métricos con métricas d_X, d_Y respectivamente. Una función $f : X \to Y$ es ***lipschitziana*** *si existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

Teorema 1.4.1

Sea $F : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$ una aplicación lipschitziana de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Entonces para todo conjunto Lebesgue medible $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $F(A)$ también es Lebesgue medible y $\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(F(A))$

Demostración. Comencemos observando que si tenemos un hipercubo $I = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^n$ de arista r y de centro y, y $x \in I$ entonces

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \leq L\frac{r}{2}$$

por lo que si $F(y) = (z_1, \ldots, z_n)$ entonces $F(x) \in \prod_{k=1}^{n} [z_k - L\frac{r}{2}, z_k + L\frac{r}{2})$ y por lo tanto

$$F(I) = F(\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k)) \subset \prod_{k=1}^{n} [z_k - L\frac{r}{2}, z_k + L\frac{r}{2})$$

lo que implica que $\lambda_n(F(I)) \leq (Lr)^n = L^n \lambda_n(I)$.
Ahora, lo demostraremos para conjuntos medibles más generales. Por la regularidad interior de $\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$ podemos definir el conjunto

$$B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

Entonces por construcción tenemos que $\lambda_n(B) = \lambda_n(A) - \lim_{j\to\infty} \lambda_n(K_j) = 0$, por tanto podemos deducir que

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup B$$

donde cada K_j se compacto y cada B es un conjunto de medida nula. Como F es continua

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(K_j)$$

y también es Borel-medible, por ser unión numerable de compactos. Así, se llega a demostrar que $F(B)$ también es medible. Sea $\varepsilon > 0$, podemos cubrir B con una familia numerable de hipercubos de la formal

$$I_j = \prod_{k=1}^{n} [a_{j,k}, b_{j,k})$$

de arista r_j y centro $y_j = (y_{j,1}, \ldots, y_{j,n})$ tales que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_j) < \varepsilon$. TEnemos entones que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(F(I_j)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L^n r_j^n = L^n \sum_{j=1}^{\infty} r_j^n = L^n \lambda_n(I_j) < L^n \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, se dedice que $F(B)$ tiene medida nula, y como la desigualdad se da para cualquier hipercubo, se tiene que

$$\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$$

$\square$

Corolario 1.4.1

Sea $F : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$ una aplicación bilipschitziana (función lipschitziana con inversa lipschitziana) de constante L_2 y F^{-1} con constante L_1. Entonces para todo conjunto Lebesgue medible $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $F(A)$ también es Lebesgue medible y

$$L_1^n \lambda_n(A) \leq \lambda_n(F(A)) \leq L_2^n \lambda_n(A)$$

Corolario 1.4.2

Sea $F : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$ una isometría para todo conjunto Lebesgue medible $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $F(A)$ también es Lebesgue medible y $\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(A)$

Teorema 1.4.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue de medida finita. Entonces

1. $\lambda_n(A + h) = \lambda_n(A) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
2. $\lambda_n(U(A)) = \lambda_n(A)$ *para todo operador lineal ortogonal* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

3. $\lambda_n(cA) = |c|^n \lambda_n(A) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Demostración. 1. Es consecuencia del corolario anterior.

2. Veamos que, para todo cubo cerrado K se cumple que

$$\lambda_n(U(K)) = \lambda_n(K)$$

Supongamos que esto no es cierto para algún cubo cerrado K, es decir,

$$\lambda_n(U(K)) = r\lambda_n(K)$$

donde $r = \frac{\lambda_n(U(I))}{\lambda_n(I)} \neq 1$. Vamos a demostrar que, para toda bola abierta $Q \subset I$ centrada en el origen se tiene que

$$\lambda_n(U(Q)) = r\lambda_n(Q) \quad \text{siempre que } U(Q) \subset I = [0,1]^n$$

Supongamos que el cubo K tiene arista de longitud d. Dividamos dicho cubo en p^n subcubos: $K_1, K_2, \ldots, K_{p^n}$ cada uno con arista de longitud d/p. Los subcubos son disjuntos salvo en sus caras. Como los subcubos son traslaciones unas de otras, es decir, podemos expresarlos de forma $K_j = K_1 + t_j$ donde t_j es un vector de traslación, se tiene que

$$\lambda_n(U(K_j)) = \lambda_n(U(K_1 + t_j)) = \lambda_n(U(K_1) + U(t_j)) = \lambda_n(U(K_1))$$

ya que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones por el apartado anterior. Entonces, tenemos que

$$\lambda_n(U(K)) = \sum_{j=1}^{p^n} \lambda_n(U(K_j)) = p^n \lambda_n(U(K_1))$$

Entones tenemos que

$$\begin{cases} \lambda_n(U(K)) = r\lambda_n(K) \\ \lambda_n(K) = p^n \lambda_n(K_1) \end{cases} \implies \lambda_n(U(K_1)) = r\lambda_n(K_1)$$

Dado que podemos tomar cualquier p, es decir, podemos subdividir tanto como queramos, podemos trasladar los cubos y obtenemos que $\lambda_n(U(K')) = r\lambda_n(K')$ para cualquier cubo de la forma $K' = qK + h$ donde $q \in \mathbb{Q}^+$ indica la escala y $h \in \mathbb{R}^n$ la traslación. Es decir, que se cumple para todo los cubos con vértices en coordenadas racionales y aristas paralelas a los ejes.
Ahora extendamos el resultado a bolas abiertas: Sea Q una bola abierta centrada en el origen. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, tomemos dos bolas auxiliares Q_1, Q_2 tales que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $\lambda_n(Q_2 \setminus Q_1) < \varepsilon$. Construimos $E_1 :=$ Unión de cubos que está contenido en Q_1 (aproximación por dentro) y $E_2 :=$ Unión de cubos que contiene a Q_2 (aproximación por fuera), entonces sabemos que se cumple que

$$Q_1 \subset E_1 \subset Q \subset E_2 \subset Q_2$$

Entonces, por lo demostrado anteriormente tenemos que

$$\lambda_n(U(E_1)) = r\lambda_n(E_1) \quad \text{y} \quad \lambda_n(U(E_2)) = r\lambda_n(E_2)$$

Y además, como $E_1 \subset Q \subset E_2$, se tiene que

$$U(E_1) \subset U(Q) \subset U(E_2) \implies \lambda_n(U(E_1)) \leq \lambda_n(U(Q)) \leq \lambda_n(U(E_2)) =$$

$$= r\lambda_n(E_1) \leq \lambda_n(U(Q)) \leq r\lambda_n(E_2) \implies \lambda_n(U(Q)) = r\lambda_n(Q)$$

Pero dado que $U(Q) = Q$ debido a que es una bola centrada en el origen, llegamos a la contradicción $r = 1$.

3. Es evidente para hipercubos con aristas paralelas a los ejes coordenados, lo cual es suficiente.

□

Corolario 1.4.3

Toda aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lleva conjuntos medibles-Lebesgue en conjuntos medibles-Lebesgue, y se cumple que para todo conjunto medible-Lebesgue $A \subset \mathbb{R}^n$ de medida finita:

$$\lambda_n(L(A)) = |\det(L)|\lambda_n(A)$$

Además, también se cumple que la preimagen de todo conjunto medible-Lebesgue de una aplicación lineal es medible-Lebesgue.

Demostración. Hagamos una distinción de casos:

1. Si $|det(L)| = 0$, entones la imagen de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio lineal propio y tiene medida nula
2. Supongamos que $|\det(L)| \neq 0$. Entonces, L se puede escribir como una composición $L = UL_0V$ donde U y V son operadores lineales orotogonales y L_0 está ddado por una matriz diagonal con autovalores estrictamente positivos α_j. Entonces como $\|det(L)\| = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ y las aplicaciones U y V preservan la medida por el teorema anterior, basta considerar L_0. Sea $A = [b_i, c_i]^n$ es un cubo con aristas paralelas a los ejes de coordenadas, entonces la igualdad
$$\lambda_n(L_0(A)) = (\alpha_i c_i - \alpha_i b_i)^n = \alpha_i(c_i - b_i)^n = |\det(L_0)|\lambda_n(A)$$
es evidente. Por lo tanto, dado que esto se cumple para cubos con aristas paralelas a los ejes coordenados, se cumple para cualquier conjunto medible-Lebesgue de medida finita (siguiendo el procedimiento del teorema anterior).

□

Teorema 1.4.3

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-medible. Si $F : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces es de Borel.

Demostración. Sea B abierto en $(\mathbb{R}^m, \tau_m)$, $f^{-1}(B)$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$. Denotamos $f^{-1}(\tau_m) = \{f^{-1}(B) : B \in \tau_m\}$. Tenemos que $f^{-1}(\tau_m) \subset \tau_n$ y así $\sigma(f^{-1}(\tau_m)) \subset \mathcal{B}_n$. Ahora bien, como la imagen inversa conmuta con las uniones y las intersecciones, $\sigma(f^{-1}(\tau_m)) = f^{-1}(\sigma(\tau_m)) = f^{-1}(\mathcal{B}_m)$ por lo que $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_n$. □

Lema 1.4.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Lebesgue medible, y sea $B \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto Lebesgue medible. Entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es Lebesgue medible y se tiene que $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)$

Demostración. Dado un recubrimiento $\mathcal{U} \subset \mathcal{J}_0$ de A y un recubrimiento $\mathcal{V} \subset \mathcal{J}_0$ de B, el conjunto $\mathcal{W} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ es un recubrimiento en $\mathcal{J}_0$ de $A \times B$ y además, $\lambda_{n+m}(U \times V) = \lambda_n(U) \cdot \lambda_m(V)$ de donde se sigue el resultado. □

1.4.3 Existencia de conjuntos no medibles

Definición 1.4.9

Consideremos la relación de eqiuivalencia en $\mathbb{R}$ definida como $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Utilicemos el axioma de elecciñon para construir el conjunto $V \subset [0, 1]$ que contiene exactamente un elemento de *cada clase de equivalencia de* $\sim$

2 Integración con respecto de una medida

2.1 Propiedades de las funciones medibles

Definición 2.1.1 [Medibilidad de funciones]

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $(Y, \mathcal{B})$ otro espacio medible. Una función $f : X \to Y$ es ***medible*** *si para todo conjunto medible $B \in \mathcal{B}$, el conjunto inverso $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Lema 2.1.1

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra y $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es medible si y sólo si $f^{-1}((-\infty), c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathbb{R}$. $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ es medible si y sólo si $f^{-1}((-\infty), c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$.

Demostración. $\Rightarrow$: Es trivial, ya que si f es medible, por definición $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$ y en particular para $B = (-\infty, c)$.
$\Leftarrow$: Dados $a > b$ se tiene que:

$$[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a), \quad (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{b-a}{n+1}, b\right)$$

Puesto que todo abierto en $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos se cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ para todo $U \in \tau$ la topología usual de $\mathbb{R}$. Esto significa que $\sigma(f^{-1}(\tau)) = f^{-1}(\sigma(\tau)) = f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ por lo que f es medible. $\square$

Teorema 2.1.1

Sean $f, g, f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}), n \in \mathbb{N}$ funciones medibles con respecto a una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Entonces:

1. *La función $\varphi \circ f$ es medible para cualquier función de Borel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en particular esto es cieto si φ es continua.*
2. *$\alpha f + \beta g$ es medible para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
3. *$f \cdot g$ es medible.*
4. *Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces $\frac{f}{g}$ es medible.*
5. *Si existe el límite $f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo x, entones f_0 es medible.*
6. *Las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ y $\liminf_{n\to\infty} f_n$ son medibles.*

Demostración. (I) Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$, luego $\varphi \circ f$ es medible.

Por (I), para demostrar (II) basta con considerar el caso $\alpha = \beta = 1$ y observar que para $(-\infty, c) \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}(f+g)^{-1}((-\infty, c)) &= \{x \in X : f(x) + g(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < c - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < c - g(x)\}).\end{aligned}$$

El lado derecho de esta relación pertenece a $\mathcal{A}$, puesto que las funciones f y g son medibles.

(III) Dedúcese de la igualdad $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$ y de las afirmaciones ya probadas; en particular, el cuadrado de una función medible es medible por (I).

(IV) Observando que la función φ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es de Borel (comprobarlo), obtenemos (IV).

(V) Basta comprobar que

$$\{x \in X : f_0(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n+1}^{\infty} \left\{x \in X : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}.$$

(VI) Basta observar que

$$\overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} f_k(x).$$

y demostrar la medibilidad de $\max_{k=1,\dots,n} f_k(x)$. Por inducción, esto se reduce al caso $n = 2$. En este caso, tenemos:

$$\{x \in X : \max(f_1(x), f_2(x)) < c\} = \{x \in X : f_1(x) < c\} \cap \{x \in X : f_2(x) < c\}.$$

La afirmación correspondiente para el ínfimo se verifica con la igualdad

$$\underline{f}(x) = -\sup_{n\in\mathbb{N}}[-f_n(x)].$$

$\square$

Lema 2.1.2

Sean $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ funciones medibles para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el conjunto L de todos los puntos $x \in X$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, es finito y pertenece a $\mathcal{A}$. Lo mismo vale para los conjuntos L^- y L^+ de todos aquellos puntos donde el límite es $-\infty$ o $+\infty$ respectivamente.

Demostración. Basta observar que el punto x está en L si y sólo si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, es decir, $\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k}$ para todo $p, q \geq N$. Es decir,

$$L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{p,q\geq N} \{x : f_p(x) - f_q(x) < \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}$$

Los casos de L^- y L^+ se demuestran de forma análoga. $\square$

Definición 2.1.2

Una función $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ se dice que es simple si es combinación lineal (finita) de funciones características de conjuntos medibles. Esto es que f viene dada por una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y por coeficientes $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, de modo que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x)$$

Observación 2.1.1

La condición de que los conjuntos A_k sean disjuntos y de que los coeficientes α_k sean distintos no es necesaria para la definición, pero garantiza que la expresión de $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ es única salvo el *orden de los sumandos.*

Lema 2.1.3

Sea $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ medible y y limitada. Entonces existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $s_n \leq s_{n+1} \leq f$ y $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Sea $c = \sup_{x\in X}\{|f(x)| + 1\}$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, particionamos el intervalo $[-c, c)$ en n subintervalos disjuntos:

$$I_j = [-c + c(j-2)2^{-n}, -c + cj2^{-n})$$

de longitud $c2^{-n}$. Definamos entones $A_j = f^{-1}(I_j)$; está claro que $A_j \in \mathcal{A}$ ya que $\cup_{j=1}^n A_j = X$. Sea c_j el extremo izquierdo de I_j y definamos la función simple $s_n(x) \leq s_{n+1}$ y $s_n(x) \leq f(x)$ y también se cumple que

$$\sup_{x\in X} |f(x) - s_n(x)| \leq 2^{-n}c$$

ya que la función f lleva A_j a I_j y s_n lleva A_j a $c_j \in I_j$, que está a una distancia como máximo de $2^{-n}c$ de cualquier punto de I_j. □

Corolario 2.1.1

Sea $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ medible. Entonces para toda función $\mathcal{A}$-medible, f existe una sucesión de funciones simples s_n que converge a f en cada punto. Si $f \geq 0$ satisface además que $s_n \leq s_{n+1} \leq f$

Demostración. Definamos las funciones g_n por

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos encontrar funciones simples s_n tales que $|s_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Si $f \geq 0$ por el lema anterior podemos escoger s_n tales que $s_n \leq s_{n+1} \leq f$. □

2.2 La integral de funciones positivas

Definición 2.2.1 [Integral de Lebesgue de funciones simples sobre un espacio de medidas]

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para cualquier función simple $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$, definimos su integral de Lesbesgue respecto a la medida μ como

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

Si la medida que estamos utilizando es evidente (por ejemplo, en el caso de usar la medida de Lebesgue), podemos omitir la referencia a la medida anterior y escribir $\int_X f(x)$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces la integral de f sobre el conjunto A se define como la integral de la función simple $\chi_A f$, es decir,

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k \cap A)$$

Cuando no se indique el conjunto de integración, se entenderá que se está integrando con respecto al dominio de f.

Lema 2.2.1 [Propiedades de la integral de funciones simples]

La integral de Lebesgue sobre funciones simples cumple las siguientes propiedades:

1. *Se verifica que*
$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \sup_{x\in X} f(x)\mu(X)$$
2. *Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces*
$$\int_X [\alpha f(x) + \beta g(x)]d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x) + \beta \int_X g(x)d\mu(x)$$
En particular, si A y B son conjuntos medibles disjuntos (en $\mathcal{A}$) se cumple que
$$\int_{A\cup B} f(x)d\mu(x) = \int_A f(x)d\mu(x) + \int_B f(x)d\mu(x)$$

Demostración.

1. Es evidente por la definición de la integral de funciones simples. Además la definición implica la igualdad
$$\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x)$$
Por lo tanto ahora basta con verificar la afirmación (2) para $\alpha = \beta = 1$.
2. Sea f función simple que toma valores distintos c_k tales que se definen $A_k = \{x \in X : f(x) = c_k\}$ y sea g una función que toma valores distintos b_j tales que se definen $B_j = \{x \in X : g(x) = b_j\}$. Entonces los conjuntos $A_k \cap B_j = \{x \in X : f(x) = c_k\} \cap \{x \in X : g(x) = b_j\} \subset \mathcal{A}$-disjuntos, entonces $f + g = c_k + b_j$ en el conjunto $A_k \cap B_j$.
Sea $\{d_r\}_{r=1}^{l} = \{c_k + b_j\}_{k=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ y $C_r = \bigcup\{A_k \cap B_j : c_k + b_j = d_r\}$ para $r = 1, \ldots, l$. Entonces
$$\int_X [f(x) + g(x)] = \sum_{r=1}^{l} d_r\mu(C_r) = \sum_{r=1}^{l} d_r\mu(\bigcup\{A_k \cap B_j : c_k + b_j = d_r\}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_k + b_j)\mu(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^{n} c_k\mu(A_k) + \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x)$$
pues $\sum_{j=1}^{m} \mu(A_k \cap B_j) = \mu(A_k)$ y $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap B_j) = \mu(B_j)$. Esta última afirmación se deduce de $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, ya que los conjuntos $\{A_k\}$ y $\{B_j\}$ son disjuntos y cubren todo X.

□

Corolario 2.2.1

Si f y g son funciones simples tales que $f \leq g$ casi en todo punto, entonces
$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x)$$

Demostración. Sea $A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$. Entonces $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(X \setminus A) = 0$. Entonces, por hipótesis tenemos que $g - f$ es una función simple en A. No obstante, la función podría ser negativa en $X \setminus A$, por lo que definamos la constante positiva:

$$c = \sup_{x \in X} \{|f(x) + g(x)|\}$$

Por tanto definamos la función auxiliar

$$h(x) = g(x) - f(x) + c\chi_{X \setminus A}(x)$$

Entonces h es una función simple no negativa en X:

1. Si $x \in A$:
$$h(x) = g(x) - f(x) + c \cdot 0 = g(x) - f(x) \geq 0$$

2. Si $x \in X \setminus A$:
$$h(x) = g(x) - f(x) + c \cdot 1 \geq -|g(x) - f(x)| + c \geq 0$$

Ahora, por el lema anterior se cumple que

$$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_X gd\mu(x) - \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X c\chi_{X \setminus A}(x)d\mu(x) \geq 0$$

Entonces, por la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_X g(x)d\mu(x) - \int_X f(x)d\mu(x) \geq 0$$

□

Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue de funciones positivas sobre un conjunto medible]

Sea $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^+$ una función medible y $E \in \mathcal{A}$. Definimos la integral de Lesbesgue de f respecto a μ sobre E como

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s : X \to \mathbb{R}^+ \text{ medible }, s \leq f \right\} \in \mathbb{R}^+$$

Al igual que para las funciones simples usaremos la notación $\int_E f \equiv \int_E f d\mu \equiv \int_E f(x)d\mu(x)$.

Lema 2.2.2

Sean $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, \infty)$ medibles, $A, B, E \in \mathcal{A}$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

(I) Si $0 \leq f \leq g$, entonces
$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(II) Si $A \subset B$ y $f \geq 0$, entonces
$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

(III) Si $f \geq 0$ y c es una constante con $0 \leq c < \infty$, entonces

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(IV) Si $f(x) = 0$ para todo $x \in E$, entonces

$$\int_E f d\mu = 0,$$

incluso si $\mu(E) = \infty$.

(V) Si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f d\mu = 0,$$

aún si $f(x) = \infty$ para todo $x \in E$.

(VI) Si $f \geq 0$, entonces

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu.$$

Teorema 2.2.1 [Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue]

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles en X, y supongamos que:

1. *$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$ para todo $x \in X$.*
2. *$f_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in X$*

Entonces f es medible y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Demostración. Como $\int f_n \leq \int f_{n+1}$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \alpha$$

Para ver la igualdad, dividiremos la demostración en las dos desigualdades:

1. $\alpha \leq \int_X f d\mu$: Sea $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, entonces como f es medible y $f_n \leq f$ se cumple que $\int f_n \leq \int f$ para todo n por lo que tomando límites cuando $n \to \infty$ se tiene que $\alpha \leq \int_X f d\mu$.
2. $\alpha \geq \int_X f d\mu$: Sea s cualquier función simple medible tal que $0 \leq s \leq f$, sea $c \in (0, 1)$ y definamos $E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Cada E_n es medible, $E_n \subset E_{n+1}$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Para ver esta igualdad considérese $x \in X$, entonces se pueden dar dos casos:

   (a) Si $f(x) = 0$ entonces $s(x) = 0$ (pues $s \leq f$) así que $cs(x) = 0 \leq f_1(x)$ luego, $x \in E_1$

   (b) Si $f(x) > 0$ entonces $cs(x) < f(x)$ ya que $c < 1$ por lo que existe alguna n tal que $x \in E_n$.

   También se cumple que para $n \in \mathbb{N}$ que $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} s$ por lo que tomando el límite

   $$\alpha \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s$$

   donde la última igualdad se debe a la continuidad por abajo de la medida. Como $c \in (0, 1)$ fue fijado arbitrariamente si tomamos $c \to 1^-$, obtenemos que $\alpha \geq \int_X s$. Como s fue fijada arbitrariamente con $0 \leq s \leq f$, y por definición tenemos que

   $$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X s\, d\mu : s \text{ simple },\ 0 \leq s \leq f\right\}$$

concluimos que $\alpha \geq \int_X f d\mu$.

$\square$

Teorema 2.2.2 [Teorema de Beppo Levi]

sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : X \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Entonces f es medible y se cumple que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

Demostración. Primero, existen sucesiones crecientes $(s_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples y medibles tales que $s_n \leq f_1$, $s_n \leq f_2$, $s_n^1 \to f_1$ y $s_n^2 \to f_2$. Definiendo $s_n = s_n^1 + s_n^2$, observse que $s_n \to f_1 + f_2$. Entonces por el Teoema de la convergencia monótona anterior y por la linealidad de la integral en funciones simples, se tiene que

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu = \int_X f_1 + \int_X f_2$$

Sea $g_n = f_1 + \ldots + f_n$, entonces la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece monótonamente y converge a f. Aplicando la induccion observamos que

$$\int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu$$

Aplicando de nuevo el Teorema de la convergencia monótona se obtiene la igualdad deseada:

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

$\square$

Lema 2.2.3 [Lema de Fatou]

Sea $\{f_n\}$ una sucesón de funciones medibles $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ para cada entero positivo n. Entonces se cumple que

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Demostración. Definamos $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x) : k \in \mathbb{N}.\ x \in X$. Entocnes $g_k \leq f_k$, por lo que

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$, cada g_k es medible y

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

Por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

$\square$

2.3 Integracion de funciones reales y complejas

Definición 2.3.1

Definimos $\mathcal{L}^1((X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{C}) = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ *como el conjunto de todas las funciones complejas medibles* f *sobre* X *tales que*

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Cabe señalar que la medibilidad de f *implica la de* $|f|$*, por lo tanto, la integral anterior está bien definida.*
Los elementos de $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ *se llaman funciones integrables en sentido de Lebesgue (respecto de* μ*) o funciones sumables.*

Definición 2.3.2

Sea $f = u + iv$ *donde* u *y* v *son funciones reales medibles sobre* X *y supongamos que* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$*. Definimos para todo conjunto medible* E*:*

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \left(\int_E v^+ d\mu - \int_E v^- d\mu \right)$$

donde $g^+ = \max\{g, 0\}$ *y* $g^- = \max\{-g, 0\}$ *para cualquier función real* g*. Las funciones* u^+, u^-, v^+, v^- *son funciones reales medibles no negativas y sumables.. Además tenemos que* $u^+ u^-, v^+ v^- \leq |f|$ *por lo que cada una de estas cuatro integrales existe y es finita.*

Teorema 2.3.1

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Entonces* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ *y*

$$\int_X [\alpha f(x) + \beta g(x)] d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) + \beta \int_X g(x) d\mu(x)$$

Demostración. La medibilidad de $\alpha f + \beta g$ es inmediata. Además, se tiene que

$$\int_X |\alpha f(x) + \beta g(x)| d\mu(x) \leq |\alpha| \int_X |f(x)| d\mu(x) + |\beta| \int_X |g(x)| d\mu(x) < \infty$$

Por lo tanto $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$. Finalmente queda probar que

$$\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x)$$

y que

$$\int_X c f(x) d\mu(x) = c \int_X f(x) d\mu(x)$$

Definamos la función auxiliar $h = f + g$, tenemos que

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

reordenado, esto es

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

Así, por la linealidad de la integral para funciones no negativas, tenemos que

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

Y como cada una de estas integrales es finita, espejando obtenemos la primera igualdad.
Para la segunda igualdad, sea α distinguamos casos:

1. Si $\alpha \geq 0$, entonces el resultado es inmediato
2. Si $\alpha = -1$ entonces el resultado también es inmediato usando que $(-g)^+ = g^-$
3. Si $\alpha = i$ el resultado también es sencillo:

$$\int (if) = \int i(u+iv) = \int (-v+iu) = \int -v + i\int u = i\int f$$

Combinando estos resultados, obtenemos la segunda igualdad para $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrario. $\square$

Teorema 2.3.2

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| \leq \int_X |f(x)|d\mu(x)$$

Demostración. Definamos $z = \int_X f(x)d\mu(x)$. Como z es un número compejo, existe un número complejo α tal que

$$\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } z = 0 \\ \frac{z}{|z|} \text{ si } z \neq 0 \end{cases} \implies |z| = \begin{cases} 0 \text{ si } z = 0 \\ 1 \text{ si } z \neq 0 \end{cases}$$

y tal que $\alpha \cdot z = |z|$. Sea $u = \Re(\alpha f)$. Entonces $u \leq |\alpha f| = |f|$. Por tanto

$$\int_X f(x)d\mu = |z| = \alpha z = \alpha \int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \int_X \Re(\alpha f(x))d\mu(x) + i\int_X \Im(\alpha f(x))d\mu(x) =$$

$$= \int u \leq \int |f|$$

La parte imaginaria de la integral es nula ya que es igual a un módulo, i.e. a un número real. $\square$

Teorema 2.3.3 [Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue]

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas y medibles en X tales que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Si existe una función $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } n \in \mathbb{N}$$

Entonces $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu(x) = 0$$

y además que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

Demostración. Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n y $f_n(x) \to f(x)$, tomando límite obtenemos $|f(x)| \leq g(x)$. Como f es medible (límite de funciones medibles) y $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$, se tiene que $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$.

Además, observemos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$$

Como $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$, tenemos que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ para todo $x \in X$, es decir:

$$\liminf_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ para todo } x \in X$$

Aplicamos el Lema de Fatou a las funciones no negativas $h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \geq 0$:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu$$

Como $\liminf_{n\to\infty} h_n(x) = 2g(x) - \liminf_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 2g(x) - 0 = 2g(x)$, tenemos:

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu$$

Por linealidad de la integral:

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\int_X 2g \, d\mu - \int_X |f_n - f| \, d\mu \right]$$

Como $\int_X 2g \, d\mu < \infty$ (pues $g \in \mathcal{L}^1$), podemos escribir:

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

donde usamos que $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty}(a_n)$. Restando $\int_X 2g \, d\mu$ en ambos lados:

$$0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

Es decir:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0$$

Como siempre $\int_X |f_n - f| \, d\mu \geq 0$, tenemos:

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0$$

Por tanto, existe el límite y:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Finalmente, para la segunda conclusión:

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu(x) = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

□

2.4 Espacios L^p

Definición 2.4.1

Sean $p \in [1, \infty)$ y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos

$$\mathcal{L}^p(X, \mathbb{F}) \equiv \mathcal{L}^p(X, \mu, \mathbb{F}) = \{f : X \to \mathbb{F} : f \text{ medible }, \|f\|_p < \infty\}$$

donde $\|\cdot\|_p$ se define como

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \in [0, \infty)$$

Definimos además $\mathcal{L}(X, \mathbb{F}) = \mathcal{L}^p(F, \mathbb{F})|_\sim$ donde $f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Observese que si $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})$ y $f \sim g$ entonces $\|f\|_p = \|g\|_p$.
Definimos también

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{F}) = \{f : X \to \mathbb{F} : f \text{ medible }, \|f\|_\infty < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ para casi todo } x \in X\}$$

y por definición $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Definición 2.4.2 [Exponentes conjugados]

Sean $p, q \in [1, \infty]$. Decimos que p y q son exponentes conjugados (o duales) si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para $1 < p < \infty$ esto determina $q = \frac{p}{p-1}$. Se adoptan las convenciones $p = 1$ corresponde a $q = \infty$ y $p = \infty$ corresponde a $q = 1$.

Proposición 2.4.1 [Desigualdad de Young]

Sea $p \in (1, \infty)$, entonces para $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

Demostración. Distingamos casos:

1. Si $ab = 0$, la desigualdad es evidente

2. Si $a, b > 0$, podemos escribir $a = tb$ con $t > 0$. Para demostrar que la desigualdad se cumple para todo t, basta ver que la función

$$f(t) = \frac{(tb)^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*} - (tb)b \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Derivemos la función anterior 2 veces para analizar su crecimiento:

$$f'(t) = b(tb)^{-1} - b^2, \quad f''(t) = (p-1)b^2(tb)^{p-2} > 0$$

Luego f es estrictamente convexa. Aemás f' sólo se anula en $t_0 = b^{\frac{2-p}{p-1}}$, donde alcanza un mínimo relativo con $f(t_0) = 0$, luego $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

$\square$

Proposición 2.4.2 [Desigualdad de Hölder]

Sean $p \in [1, \infty]$, (X, μ)-espacio de medida y $f, g : X \to \mathbb{F}$ medibles. Entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración. Distingamos casos:

1. Si $f \cdot g = 0$, la desigualdad es evidente.
2. Si $f \cdot g \neq 0$, aplicamos la desigualdad de Young a $a = |f(x)|/\|f\|_p$ y $b = |g(x)|/\|g\|_{p^*}$ para todo $x \in X$:
$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_{p^*}} = \int \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_{p^*}} \, \mathrm{d}\mu \leq \int \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} \, \mathrm{d}\mu + \int \frac{|g|^{p^*}}{p^* \|g\|_{p^*}^{p^*}} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$
por lo que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$.

□

Proposición 2.4.3 [Desigualdad de Minkowski]

Sea $p \in [1, \infty]$, (X, μ)-espacio de medida y $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})$. Entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demostración. Distingamos casos:

1. Si $\|p\|_p$ o $\|g\|_p = \infty$ el resulatdo es evidente
2. Supongamos que $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$. Podemos ver que $\|f + g\|_p < \infty$, ya que
$$|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$
Para demostrar este hecho, usamos que la función $h(x) = |x|^p$ es convexa sobre $\mathbb{R}^+$ (para $p > 1$) y por la definición de convexidad:
$$\left| \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} g \right|^p \leq \left| \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}|g| \right|^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p$$
Esto implica que
$$|f + g|^p \leq 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p$$
Por lo tanto, sabemos que $\|f + g\|_p < \infty$. Distingamos casos:
   (a) Si $\|f + g\|_p = 0$ el resultado es evidente.
   (b) Si $\|f + g\|_p \neq 0$, usando la desigualdad triangular y luego la desigualdad de Hölder, tenemos que
$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int |f| \, |f + g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int |g| \, |f + g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Dividiendo por $\|f+g\|_p^{p-1}$ obtenemos la desigualdad deseada:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Definición 2.4.3 [Espacio de Banach]

Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ se dice un espacio de Banach si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento de V.

Ejemplo

El espacio $\mathcal{B}(X, \mathbb{F})$ de funciones limitadas $f : X \to \mathbb{F}$ se dice que es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Proposición 2.4.4

$L^p(X, \mathbb{F})$ es un espacio de Banach para todo $p \in [1, \infty]$. Además, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $L^p(X, \mathbb{F})$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in X$.

Demostración. QUEDA PONERLA □

Definición 2.4.4 [Espacio de sucesiones de potencia p-ésima sumables]

Sea $p \in [1, \infty)$. Definimos $\ell^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \leq \infty\}$ donde

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}^+$$

Observación 2.4.1

Observese que si $X = \mathbb{N}$, y μ es una medida de Cantor, es decir $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ y $\mu(A) = \#(A \cap \mathbb{N})$ donde $\#$ denota el cardinal del conjunto si A es finito y $\mu(A) = \infty$, en caso contrario, tenemos que $L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{F}) = \ell^p$.

Definición 2.4.5 [Continuidad absoluta]

Sea I un intervalo (M, d) un espacio métrico, $f : I \to M$ se dice absolutamente continua si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualquier familia finita de intervalos abiertos contenidos en I, $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ que cumpla que $\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) z\delta$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} d(f(y_k), f(x_k)) < \varepsilon$$

denotamos $\mathcal{AC}(I, M)$ al conjunto de las funciones absolutamente continua de I en M.

Observación 2.4.2

En caso de funciones del tipo $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$, f es absolutamente continua si y sólo si f_k es absolutamente continua para todo $k = 1, \ldots, n$

Definición 2.4.6 [Derivada débil]

Sean $A \subset \mathbb{R}$ medible, $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medibles. Decimos que g es una derivada débil de F si g es Lebesgue-integrable y existen $c, x_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = c + \int_{A \cup [x_0, x)} g(y)dy$$

Teorema 2.4.1 [Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Lebesgue]

Sea $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$. Entonces la función $F[a,b]to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = c + \int_a^x f(y)dy$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante cualquiera y derivable en casi todo punto $F' = f$ en casi todo punto. Además, $F \in \mathcal{AC}([a,b], \mathbb{R})$ y toda función $F \in \mathcal{AC}([a,b], \mathbb{R})$ y de esta forma, en particular

$$F(b) - F(a) = int_a^b dy \text{ (Regla de Barrow)}$$

2.5 La relación entre las integrales de Riemann y de Lebesgue

Definición 2.5.1 [Integral de Riemann]

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Una partición *de $[a,b]$ es un conjunto finito*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definimos

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

La suma superior y la suma inferior de Riemann asociadas a la partición P son

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i\,(x_i - x_{i-1}), \qquad L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

La integral superior *(resp.* integral inferior*) de f en $[a,b]$ se definen por*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_P U(f,P), \qquad \underline{\int_a^b} f = \sup_P L(f,P),$$

donde los ínfimos y supremos se toman sobre todas las particiones finitas P de $[a,b]$. Decimos que f es Riemann-integrable *en $[a,b]$ si*

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

En tal caso su valor común se llama integral de Riemann de f en $[a,b]$ y se denota

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Alternativamente, f es Riemann-integrable con integral I si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P con norma $\|P\| := \max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$ y para cualquier elección de puntos marcados $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se cumple

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Teorema 2.5.1

Sea una función limitada $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Riemann integral entonecs es Lebesgue integrable y ambas integables coinciden.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $I = [a,b]$ en subintervalos disjuntos

$$[a, a + 2^{-n}(b-a), \ldots, [b - 2^{-n}(b-a), b]$$

de longitud 2^{-n}. Denotamos estos subintervalos por $I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}$. Sean

$$m_{n,k} = \inf f(I_{n,k}), \quad M_{n,k} = \sup f(I_{n,k}).$$

Consideramos las funciones escalonadas

$$f_n(x) = m_{n,k} \text{ si } x \in I_{n,k}, \quad g_n(x) = M_{n,k} \text{ si } x \in I_{n,k}, \quad k = 1, \ldots, 2^n.$$

Es claro que

$$f_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x).$$

Además,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad g_{n+1}(x) \leq g_n(x).$$

Las funciones escalonadas son Riemann integrables y, en particular, f_n satisface

$$\int_{[a,b]} f_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n} m_{n,k}.$$

Estas funciones f_n son también simples medibles y, por tanto, Lebesgue integrables, con

$$\int_{[a,b]} f_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n} m_{n,k}$$

(se puede verificar). Así, $\int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f_n$ y lo mismo ocurre con g_n. La integrabilidad Riemann de f implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n = \int_{[a,b]} f$$

Las funciones límite

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} f_n, \quad \psi = \lim_{n\to\infty} g_n$$

son acotadas y medibles en el sentido de Lebesgue (pues son límite de funciones escalonadas), por lo que son integrables en el sentido de Lebesgue. Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la igualdad (**??**), concluimos que

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la igualdad (**??**), concluimos que

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} f,$$

y dado que $\varphi(x) \le \psi(x)$, tenemos que $\varphi(x) = \psi(x)$ casi en todas partes (se puede verificar). Como $\varphi \le f \le \psi$, se sigue que $f = \varphi = \psi$ casi en todas partes, por lo que f es medible y

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} f.$$

□

Corolario 2.5.1

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitaa y sea D el conjunto de dos puntos de discontinuidad de f en $[a,b]$. Entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$ si y sólo si D es un conjunto de medida nula.

Demostración. Primero veamos que las funciones φ y ψ definidas en el apartado anterior a partir de la sucesión de particiones $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen que, para $c \in [a,b] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, se tiene que $\varphi(c) = \psi(c)$ si y solo si f es continua en c.

Supongamos que f es continua en c. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, dados dos elementos $x, y \in B(c,\delta)$, tenemos

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)| < \varepsilon.$$

En particular,

$$\sup\{f(x) : x \in B(c,\delta)\} - \inf\{f(x) : x \in B(c,\delta)\} \le \varepsilon.$$

Consideremos entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \delta$, es decir, $n \ge N$. En este caso, para $I_{n,j_n} \subset B(c,\delta)$, se deduce que

$$M_{n,j_n} - m_{n,j_n} \le \sup\{f(x) : x \in B(c,\delta)\} - \inf\{f(x) : x \in B(c,\delta)\} \le \varepsilon,$$

por lo que $|\varphi(c) - \psi(c)| \le \varepsilon$, y como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ es arbitrario, concluimos que $\varphi(c) = \psi(c)$.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi(c) = \psi(c)$. Entonces, para $c \in I_{n,j_n}$, $M_{n,j_n} - m_{n,j_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. En este caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \ge N$,

$$M_{n,j_n} - m_{n,j_n} < \varepsilon.$$

En particular, dado $\delta > 0$ tal que $B(c,\delta) \subset I_{n,j_N}$, tenemos

$$|f(x) - f(c)| \le M_{n,j_N} - m_{n,j_N} < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in B(c,\delta),$$

por lo que f es continua en c.

Así, si f es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces existe un conjunto $E \subset [a, b] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ con $\lambda_1(E) = 0$ tal que

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{para todo } x \in \left([a, b] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\right) \setminus E.$$

Denotamos

$$\widetilde{E} = E \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\right).$$

Como el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ es numerable, tenemos que $\lambda_1(\widetilde{E}) = 0$. Por lo tanto, f es continua en los puntos de $[a, b] \setminus \widetilde{E}$, es decir, f es continua salvo en un conjunto de medida nula.

Recíprocamente, si f es continua salvo en un conjunto de medida nula, entonces $\varphi(x) = \psi(x)$ para casi todo punto del intervalo $[a, b]$, de donde se deduce que las integrales superior e inferior coinciden, siendo entonces f Riemann integrable en el intervalo $[a, b]$. $\square$

Teorema 2.5.2

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f y $|f|$ son integrables en el sentido impropio de Riemann (i.e. en intervalos de integracion infinitos, con discontinuidades infinitas, no acotadas, etc). Entonces f es integrable en el sentio de Lebesgue en I y

$$\int_R f = \int_L f$$

Demostración. Consideremos el caso en el que el intervalo es $I = (a, b]$ y limitado, y f es integrable en el sentido propio de Riemann en caa intervalo $[a + \varepsilon, b]$ con $\varepsilon > 0$. O el caso en el que $a = -\infty$ es similar.
El caso general se reduce a un número finito de los dos casos anteriores. Sea $f_n = f$ en $[a + n^{-1}, b]$ y $f_n = 0$ en $(a, a + n^{-1})$. Por la integrabilidad de Riemann la función f es Lebesgue-medible en el intervalo $[a + n^{-1}, b]$ y en consecuencia f_n es medible. Es claro que $f_n \to f$ puntualmente, por lo que f es medible en $(a, b]$.
Por la integrabilidad impropia de $|f|$ las funciones $|f_n| \leq |f|$ tienen integrales de Lebesgue uniformemente limitadas (iguales a sus correspondientes integrales de Riemann por el teorema anterior). Por el Lema de Fatou, la función $|f|$ es integrable-Lesbesgue. Por el teorema de la convergencia dominada, las integrales de Lebesgue de las funciones f_n sobre $(a, b]$ convergen a la integral de Lebesgue de f.
En consecuencia, la integral de Lebesgue de f coincide con la integral impropia de Riemann. $\square$