

# Calculo Vectorial e Integración Lebesgue

Pablo Pardo Cotos

*Ciencias Matemáticas e Ingeniería Informática*

# Contents

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Fundamentos de la teoría de la medida . . . . .</b>       | <b>2</b>  |
| 1.1 Anillo, álgebra y $\sigma$ -álgebra de conjuntos . . . . . | 2         |
| 1.2 Contenidos y medidas . . . . .                             | 3         |
| 1.3 Medidas exteriores . . . . .                               | 7         |
| 1.4 Propiedades de la medida de Lebesgue . . . . .             | 10        |
| 1.4.1 Medida de Lebesgue y topología euclíadiana . . . . .     | 10        |
| 1.4.2 Transformaciones de conjuntos medibles . . . . .         | 13        |
| 1.4.3 Existencia de conjuntos no medibles . . . . .            | 16        |
| <b>2 Integración con respecto de una medida . . . . .</b>      | <b>18</b> |
| 2.1 Propiedades de las funciones medibles . . . . .            | 18        |
| 2.2 La integral de funciones positivas . . . . .               | 20        |
| 2.3 Integración de funciones reales y complejas . . . . .      | 25        |
| 2.4 Espacios $L^p$ . . . . .                                   | 27        |

# 1 Fundamentos de la teoría de la medida

## 1.1 Anillo, álgebra y $\sigma$ -álgebra de conjuntos

### Definición 1.1.1 [Anillo]

Dados los conjuntos  $X$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , es decir una familia de subconjuntos no vacía, se dice que  $\mathcal{A}$  es un **anillo de conjuntos** en  $X$  si:

1.  $\mathcal{A}$  es cerrado por uniones finitas, es decir,  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{A}$  es cerrado por diferencias, es decir,  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

### Definición 1.1.2 [Álgebra]

Dado un conjunto  $X$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , familia de conjuntos no vacía, se dice que  $\mathcal{A}$  es un **álgebra de conjuntos** en  $X$  si:

1.  $\mathcal{A}$  es cerrado por uniones finitas
2.  $\mathcal{A}$  es cerrado por complementos
3.  $X \in \mathcal{A}$

### Definición 1.1.3 [ $\sigma$ -álgebra]

Dado un conjunto  $X$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , familia de conjuntos no vacía, se dice que  $\mathcal{A}$  es una  **$\sigma$ -álgebra de conjuntos** en  $X$  si:

1.  $\mathcal{A}$  es cerrado por uniones numerables
2.  $\mathcal{A}$  es cerrado por complementos
3.  $X \in \mathcal{A}$

### Observación 1.1.1

Una álgebra es un anillo al que pertenece el conjunto total  $X$ .

### Observación 1.1.2

1. Si  $\mathcal{A}$  es un anillo, entonces tomando  $A, B \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$  y  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ . Es decir, los anillos también son cerrados por intersección.
2. Sea  $\mathcal{A}$  anillo y  $E \in \mathcal{A}$ . Entonces  $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\} = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$  es una álgebra de conjuntos en  $E$ .

### Definición 1.1.4 [Espacio medible]

Dada una  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  de un conjunto  $X$  o también expresado como un par  $(X, \Sigma)$  se llama espacio

medible. A los conjuntos de  $\Sigma$  se les llama conjuntos medibles.

### Definición 1.1.5 [Función medible]

Dados dos espacios medibles  $(X, \Sigma_X)$  y  $(Y, \Sigma_Y)$ , y una función  $f : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ , se dice que es medible si  $\forall E \in \Sigma_Y f^{-1}(E) \in \Sigma_X$ .

### Lema 1.1.1

Sean un conjunto  $X$ ,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$  y una familia  $\mathfrak{U}$  de  $\sigma$ -álgebras/álgebras/anillos en  $X$  que contienen a  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{U}} \mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra/álgebra/anillo que llamamos  **$\sigma$ -álgebra/álgebra/anillo generada por  $\mathcal{C}$**  siendo la menor  $\sigma$ -álgebra/álgebra/anillo que contiene a  $\mathcal{C}$ .

## 1.2 Contenidos y medidas

### Definición 1.2.1 [Contenido/Pre-medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\Sigma$  un anillo en  $X$ . Se dice que una función  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  es un contenido en  $\Sigma$  si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  es aditivo, esto es que, dada una sucesión de finita de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \Sigma$  es tal que  $E_k \cap E_j = \emptyset$  para  $k \neq j$  entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

### Definición 1.2.2 [Medida]

Sea  $X$  un conjunto y  $\Sigma$ -álgebra en  $X$ . Se dice que una función  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  es un contenido en  $\Sigma$  si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditivo, esto es que, dada una sucesión numerable de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma$  es tal que  $E_k \cap E_j = \emptyset$  para  $k \neq j$  entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^\infty E_k \right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

### Definición 1.2.3 [Espacio de medida]

Dado un conjunto  $X$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  en  $X$  y una medida  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ , se llama espacio de medida a la terna  $(X, \Sigma, \mu)$ .

### Observación 1.2.1

En el caso particular en el que  $\mu(X) = 1$ , se dice que  $\mu$  es una **medida de probabilidad** para cada  $E \in \Sigma$  y el espacio de medida se llama **espacio de probabilidad**.

### Definición 1.2.4 [Espacio de medida finita]

SE dice que  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida finita si  $\mu(X) < +\infty$ .

### Definición 1.2.5 [Espacio de medida $\sigma$ -finita]

SE dice que  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida  $\sigma$ -finita si existe una sucesión numerable de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$  tal que  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  y  $\mu(E_k) < +\infty$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

### Observación 1.2.2

Las definiciones anteriores se pueden aplicar de la misma manera a los contenidos.

### Definición 1.2.6 [ $\sigma$ -álgebra de Borel]

Teniendo en cuenta la definición formal de  $\sigma$ -álgebra, tenemos que  $X$  es un espacio topológico con topología  $\tau$  se dice que  $\Sigma$  es una  **$\sigma$ -álgebra de Borel** con respecto  $\tau$  y que  $\mu$  es una medida de  $\tau$ -Borel o una medida de Borel con respecto a  $\tau$ , si  $\tau \subset \Sigma$ .

Decimos que la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\tau$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\tau$  y la denotamos por  $\mathcal{B}(\tau)$ .

En el caso concreto en el que el espacio topológico sea  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual, denotaremos a esta  $\sigma$ -álgebra de Borel por  $\mathcal{B}^n$ .

### Definición 1.2.7 [Función de Borel]

Una función  $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  definida entre dos espacios topológicos se dice que es una **función de Borel** si  $f : (X, \mathcal{B}(\tau_1)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(\tau_2))$  es medible.

### Definición 1.2.8 [Medida de Borel regular]

Dada una medida de Borel  $\mu$  en un espacio topológico  $(X, \tau)$ , se dice que es una **medida de Borel regular** si es regular exterior, es decir, si cumple dos condiciones:

1. Regularidad exterior:

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = \inf \{ \mu(U) : A \subset U, U \in \Sigma \text{ abierto} \}$$

2. Regularidad interior:

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subset A, K \in \Sigma \text{ compacto} \}$$

**Definición 1.2.9** [Casi todo punto]

Dado un espacio de medida  $(X, \Sigma, \mu)$  y  $E \in \Sigma$  diremos que una propiedad  $P$  se cumple en  $\mu$ -casi todo punto de  $E$  si existe  $N \in \Sigma$ ,  $N \subset E$  tal que  $\mu(N) = 0$  y  $P$  se cumple en  $E/N$ .

**Definición 1.2.10** [Intervalo]

Llamamos intervalos de  $\mathbb{R}$  a los conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  (contamos al vacío como intervalo). Decimos que  $I \subset \mathbb{R}^n$  es un intervalo si  $I = \prod_{i=1}^n I_i$  donde cada  $I_i$  es un intervalo de  $\mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$ .

**Observación 1.2.3**

Como la intersección de intervalos en  $\mathbb{R}$  es un intervalo (la intersección de conexos es conexa), y dados dos intervalos  $\prod_{i=1}^n I_i$  y  $\prod_{i=1}^n J_i$  en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que:

$$\left( \prod_{i=1}^n I_i \right) \cap \left( \prod_{i=1}^n J_i \right) = \prod_{i=1}^n (I_i \cap J_i)$$

es decir, la intersección de dos intervalos en  $\mathbb{R}^n$  es un intervalo en  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.2.1**

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y  $\mu$  un contenido (medida) en  $\mathcal{A}$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Monotonía y subaditividad:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$$

Si además,  $\mu(B) < +\infty$  entonces  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

2. Subaditividad de sucesión de conjuntos: Dado una sucesión de conjuntos  $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}$  entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

3. Sea  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

4.  $\sigma$ -subaditividad de medidas: Sea  $\mu$  una medida, entonces

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

5.  $\sigma$ -superaditividad de medidas: Sea  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  es una familia disjunta dos a dos y además  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ , entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right)$$

### Proposición 1.2.1

Sea  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y sea  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  un contenido. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

1.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, esto es: Dado una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B) < +\infty$  entonces:

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

2. Continuidad en el 0: Dada una sucesión de elementos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  decreciente, es decir,  $A_{n+1} \subset A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y tal que  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$  y  $\mu(A_1) < +\infty$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

3.  $\mu$  es continua por debajo: Dada una sucesión de elementos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  creciente, es decir,  $A_n \subset A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y tal que  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < +\infty$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

4.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva: Dada una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  y  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu(A) < +\infty$ , entonces:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*Demostración.* (1)  $\implies$  (2): Supongamos que  $\mu$  satisface (1) y que una sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  decreciente tal que  $\mu(A_1) < +\infty$  y  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ . Definimos  $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ , tales que pertenecen a  $\mathcal{A}$ , su unión es  $A_1$  y son disjuntos dos a dos. Por lo tanto la sucesión dada por  $s_n = \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$  es monótona creciente y esta limitada por  $\mu(A_1) < \infty$ , por lo que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$  converge.

Finalmente, tenemos que la cola de la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Pero esta suma es igual a  $\mu(A_N)$ , ya que  $\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$ . Por lo tanto llegamos a la condición (2).

(2)  $\implies$  (3):

Tomemos la sucesión de conjuntos  $A_n = B \setminus B_n$  que satisface las hipótesis de (2) y por lo tanto

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$

(3)  $\implies$  (4):

Tomando  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$  que satisface las hipótesis de (3) y

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(4)  $\implies$  (1):

Basta aplicar el lema anterior para la demostración.  $\square$

### Lema 1.2.2

Sea  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y sea  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ . Si  $\mu$  es aditiva y  $\sigma$ -subaditiva, entonces es  $\sigma$ -aditiva.

*Demostración.* Se una sucesión de conjuntos  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  disjuntos dos a dos tales que  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B) < +\infty$ . Entonces, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Por lo tanto,  $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ . □

## 1.3 Medidas exteriores

### Definición 1.3.1 [Medida exterior]

Sea  $X$  un conjunto. Dada una función  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  es una medida exterior si

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A \subset B \subset X$
3.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva, es decir, dada una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  se cumple que:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

### Definición 1.3.2 [Diferencia de dos conjuntos]

Dado un conjunto  $X$  y  $A, B \subset X$  llamamos **diferencia** de  $A$  y  $B$  al conjunto  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

### Definición 1.3.3 [Medida exterior a partir de un contenido]

Sea  $X$  un conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  tal que  $X \in \mathcal{A}$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ . Definimos la función  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  asociada a  $\mu$  tal que  $\forall A \subset X$ :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

### Definición 1.3.4 [Conjunto medible]

Sea  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $\mu^*$  una medida exterior en  $X$ . Se dice que  $A$  es  $\mu$ -**medible** si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta A_\epsilon) < \epsilon$$

Al conjunto de todos los conjuntos  $\mu$ -medibles se les denota por  $\mathcal{A}_\mu$ .

**Lema 1.3.1** [Propiedades de una medida exterior (asociada a un contenido)]

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  tal que  $X \in \mathcal{A}, B, C \subset X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ -contenido, y  $\mu^*$  la medida exterior asociada. Entonces:

1.  $\mu^*(B) \leq \mu^*(C)$  si  $B \subset C$
2.  $\mu^*$  es  $\sigma$ -subaditiva, es decir,  $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
3.  $|\mu^*(B) - \mu^*(C)| \leq \mu^*(B \Delta C)$
4. Si  $\mathcal{A}$  es un anillo y  $\mu$  es un contenido, entonces  $\mu^*(\emptyset) = 0$  y equivalentemente,  $\mu^*$  es una medida exterior en  $X$ .

*Demostración.* 1.  $\mu^*$  es por definición monótona creciente, esto es, si  $B \subset C \implies \mu^*(B) \leq \mu^*(C)$ . Esto se debe a que cualquier recubrimiento numerable de  $C$  es también un recubrimiento numerable de  $B$ .

2. Sea una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que  $A = \cup A_n$ . Dado un  $\epsilon > 0$ , existen dos casos posibles,

- Existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu^*(A_k) = +\infty$ . Entonces, como  $A_k \subset A$  se tiene que  $\mu^*(A) = \infty$  y por tanto no hay nada que demostrar.
- Si se cumple que  $\forall n \in \mathbb{N} \mu^*(A_n) < \infty$  entonces, para cada una de las  $n$  existe un recubrimiento  $\{B_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que  $A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$  y por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Por lo tanto se tiene que  $\cup A_n \subset \cup \cup B_{n,k}$  y en consecuencia se tiene que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario, tenemos el resultado.

3. Supongamos que  $B \subset C \cup (B \Delta C)$ , por lo que, por la subaditividad de  $\mu^*$  obtenemos que:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(C) + \mu^*(B \Delta C) \iff \mu^*(B) - \mu^*(C) \leq \mu^*(B \Delta C)$$

Intercambiando  $B$  y  $C$  obtenemos la otra desigualdad.

4. Basta tomar  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\emptyset\}$  como recubrimiento de  $\emptyset$  y usar que como  $\mu$  es un contenido, entonces  $\mu(\emptyset) = 0$ . El resto de propiedades ya han sido demostradas, dada cualquier función  $\mu$  y en particular si  $\mu$  es un contenido.

□

**Teorema 1.3.1**

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  una álgebra en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  un contenido. Entonces:

1.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu = \{E \in X : \forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon : \mu^*(E \Delta A_\epsilon) < \epsilon\}$  y la medida exterior  $\mu^*$  coincide con  $\mu$  en  $\mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{A}_\mu$  es una  $\sigma$ -álgebra, y la restricción de  $\mu^*$  a  $\mathcal{A}_\mu$  es  $\sigma$ -aditiva

3. La función  $\mu^*$  es la única extensión  $\sigma$ -aditiva y positiva de  $\mu$  en  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$  y también es la única extensión  $\sigma$ -aditiva y positiva de  $\mu$  a  $\mathcal{A}_\mu$ .

Demostración. □

### Definición 1.3.5 [Pre-medida]

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  un contenido. Se dice que  $\mu$  es una pre-medida si es  $\sigma$ -aditiva.

### Teorema 1.3.2 [Extension de un contenido a una medida]

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  una pre-medida sobre un anillo  $\sigma$ -finito (dada  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  monótona creciente y con  $\mu(X_n) < +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ).

Para cada  $n$  denotaremos  $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}_n}$  donde  $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_n\}$  ( $\sigma$ -álgebra de conjuntos en  $X_n$ ) y denotaremos por  $\Sigma_n$  la  $\sigma$ -álgebra sobre  $A$  sobre la cual  $\mu^*$  es una medida exterior basada en  $\mu$ . Definimos:

$$\Sigma = \{A \subset X : A \cap X_n \in \Sigma_n \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \bar{\mu}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A \cap X_n) : A \in \Sigma$$

Entonces  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra que no depende de los  $X_n$  escogidos, y  $\bar{\mu}$  es la única medida en  $\Sigma$  tal que  $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ .

Demostración. Cada una de las  $\mu_n : A \rightarrow [0, \infty]$  es un contenido  $\sigma$ -aditivo y finito, por lo que por el teorema anterior podemos obtener las  $\sigma$ -álgebras  $\Sigma_n$  y las medidas  $\mu_n^*|_{\Sigma_n}$ .

Sea  $A_k$  tal que  $A_k \cap X_n \in \Sigma_n$  para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ . Por ser  $\Sigma_n$  una  $\sigma$ -álgebra, tenemos que  $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap X_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap X_n) \in \Sigma_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  por lo que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ . □

### Definición 1.3.6 [Clase compacta]

Sea una familia  $\mathcal{K}$  de subconjuntos de un conjunto  $X$ , se dice que es una **clase compacta** si:

$$\forall \{K\}_{n \in \mathbb{N}} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset \exists N \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset$$

### Ejemplo

Una familia arbitraria de conjuntos compactos de un espacio topológico es una clase compacta. En efecto para demostrar el contrarecíproco tomemos una sucesión de compactos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset \forall N \in \mathbb{N}$ . Definimos  $\overline{K_n} = \bigcup_{k=1}^n K_k$ . Entonces  $\{\overline{K_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión encadenada de conjuntos compactos y no vacíos, por lo que el teorema de la intersección compacta de Cantor,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{K_n} \neq \emptyset$  y como consecuencia  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ .

### Teorema 1.3.3

Sea  $\mu$  un contenido sobre  $\mathcal{A}$  un anillo  $\mathcal{A}$ . Supongamos que existe una clase compacta  $\mathcal{K}$  que approxima a  $\mu$  en el sentido de que: Para todo  $A \in \mathcal{A}$  con  $\mu(A) < +\infty$  y para todo  $\epsilon > 0$  existen  $K_\epsilon \in \mathcal{K}$  y  $A_\epsilon \in \mathcal{A}$

tales que

$$A_\epsilon \subset K_\epsilon \subset A \quad y \quad \mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$$

Entonces,  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva. En particular esto es cierto si la clase compacta  $\mathcal{K}$  está contenida en  $\mathcal{A}$  y para todo  $A \in \mathcal{A}$  se cumple que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$$

Demostración. □

### Ejemplo

Consideremos los anillos

### Ejemplo

Consideremos el anillo  $\mathcal{J}_0$  de uniones finitas de intervalos limitados de la forma  $[a, b)$  en  $\mathbb{R}$  y sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y continua por la izquierda, y sea  $v_g[a, b) = g(b) - g(a)$ , con  $v_g$  un contenido sobre  $\mathcal{J}_0$ . Entonces, por el teorema anterior, llámosela  $\mu_g$  a la medida generada por el Teorema de las extensiones de medidas  $\sigma$ -finitas, se llama **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a  $g$ .

### Definición 1.3.7 [Medida completa]

Sea  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra en  $X$  y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una medida.  $\mu$  se dice completa si dado  $E \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(E) = 0$  entonces para cualquier  $A \subset E \in \mathcal{A}$   $A$  es medible y  $\mu(A) = 0$

### Teorema 1.3.4

Las medidas dadas por el Teorema de Extensión de Medidas  $\sigma$ -finitas son completas.

### Teorema 1.3.5

Son equivalentes:

1.  $A$  es  $\mu$ -medible
2.  $\forall E \in \mathcal{A} : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$  (Condición de Carathéodory)
3.  $\forall \epsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta B) < \epsilon$  (Condición de aproximación)

## 1.4 Propiedades de la medida de Lebesgue

### 1.4.1 Medida de Lebesgue y topología euclíadiana

#### Definición 1.4.1 [familia de semi-abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ ]

Denotamos  $\mathcal{J}_0$  a la familia de todos los intervalos semi-abiertos acotados en  $\mathbb{R}^n$ , dado por

$$\mathcal{J}_0 = \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

#### Definición 1.4.2 [Contenido de Jordan]

Llamamos **contenido de Jordan** o **contenido de Peano-Jordan** a la función  $\mu : \mathcal{J} \rightarrow [0, +\infty]$  definida como:

$$\mu \left( \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

donde, por simplicidad, entendemos que  $0 \cdot (+\infty) = 0$ . Para calcular el contenido de Jordan de un conjunto cualquiera  $\mathcal{J}$ , como es una unión finita de intervalos disjuntos de la forma  $\prod_{i=1}^b [a_n, b_n]$ , basta con sumar los contenidos de todos los intervalos que lo componen.

#### Definición 1.4.3 [Medida de Lebesgue]

Sea  $\mathcal{J}_0$  el anillo de uniones finitas disjuntas de rectángulos limitados de la forma

$$\prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n,$$

y sea  $\mu$  el contenido de Jordan definido sobre  $\mathcal{J}_0$ .

Aplicando el Teorema de Extensión de Medidas  $\sigma$ -finitas (por ejemplo, tomando la secuencia  $X_k = [-k, k]^n$  para  $k \in \mathbb{N}$ ), se obtiene una única medida

$$\lambda_n : \mathcal{L}_n \rightarrow [0, \infty]$$

llamada **medida de Lebesgue** en  $\mathbb{R}^n$ , definida sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}_n$  de conjuntos Lebesgue medibles, que extiende el contenido de Jordan y es  $\sigma$ -aditiva.

Además, para cualquier subconjunto  $X \in \mathcal{L}_n$ , podemos definir la medida restringida

$$\lambda_X(A) := \lambda_n(A \cap X), \quad \forall A \in \mathcal{L}_n.$$

#### Definición 1.4.4 [Medida exterior de Lebesgue]

Siguiendo el teorema anterior de obtención de una medida exterior a partir de un contenido sobre un anillo, en este caso el contenido de Jordan sobre el anillo  $\mathcal{J}_0$  de uniones finitas de intervalos limitados de la forma  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ , obtenemos la **medida exterior de Lebesgue**  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  definida como:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}_0, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

#### Definición 1.4.5 [Medida de Lebesgue-Stieltjes]

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y continua por la izquierda. La **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a  $g$  es la medida de Lebesgue  $\mu_g$  generada por el contenido definido en el anillo de uniones finitas de intervalos limitados de la forma  $[a, b]$  como:

$$v_g[a, b] = g(b) - g(a)$$

### Lema 1.4.1

Todo intervalo  $I = \prod_{k=1}^n I_k \in \mathbb{R}^n$  es Lebesgue-medible. Si  $I$  es degenerado, entonces  $\lambda_n(I) = 0$ . Si no, su medida coincide con el producto de las longitudes de sus aristas, es decir:

$$\lambda_n(I) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

*Demostración.* Realicemos una distinción de casos:

1. Si  $I$  es degenerado, quiere decir que está contenido en un hiperplano paralelo a los ejes de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ , por lo que  $I$  es medible y  $\lambda_n(I) = 0$ .
2. Supongamos que  $I$  es no-degenerado. Si  $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$  el resultado es evidente dada la definición de medida de lebesgue.
3. Consideremos ahora cualquier tipo de intervalo de la forma  $I = \prod_{k=1}^n I_k \subset \mathbb{R}^n$ . Definamos  $a_k = \inf I_k, b_k = \sup I_k$ . Observese que  $\partial I$  está contenida en la unión de  $2n$  hiperplanos por lo que  $\partial I$  es medible (por ser la medida de Lebesgue completa) y  $\lambda_n(\partial I) = 0$ . Ahora definamos  $\mathcal{J} = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$  tenemos que  $\mathcal{J}$  es medible y  $\partial I$  es medible por lo tanto  $I = (I \setminus \mathcal{J}) \cup (\mathcal{J} \setminus (I \setminus \mathcal{J}))$  es medible ya que  $I \setminus \mathcal{J}, \mathcal{J} \setminus I \subset \partial I$ . luego son medibles y se cumple que

$$\lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) = \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = 0$$

y además,

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) + \lambda_n(\mathcal{J}) - \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = \lambda_n(\mathcal{J}) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

□

### Proposición 1.4.1

Todo conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es medible-Lebesgue. Es decir,  $\lambda_n$  es una medida de Borel con respecto la topología usual, por tanto  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$ .

*Demostración.* Todo abierto de  $\mathbb{R}^n$  es una unión numerable de intervalos abiertos, y por tanto medible. □

### Proposición 1.4.2

La medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  es regular, es decir, para todo  $A \in \mathcal{L}_n$  se cumple que:

1. Regularidad exterior:

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(U) : U \supset A, U \text{ abierto}\}$$

2. Regularidad interior:

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$$

*Demostración.*

□

**Definición 1.4.6** [Conjunto  $G_\delta$ ]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto  $G_\delta$  si existe una sucesión numerable de conjuntos abiertos  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$$

**Definición 1.4.7** [Conjunto  $F_\sigma$ ]

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto  $F_\sigma$  si existe una sucesión numerable de conjuntos cerrados  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

**Observación 1.4.1**

Como consecuencia del resultado anterior, concluimos que para todo conjunto Lebesgue medible  $A \in \mathcal{L}_n$  existe un conjunto  $U \in G_\delta$  y un conjunto  $F \in F_\sigma$  tales que

$$F \subset A \subset U \quad y \quad \lambda_n(F) = \lambda_n(U) = \lambda_n(A)$$

**1.4.2 Transformaciones de conjuntos medibles****Definición 1.4.8** [Aplicación lipschitziana]

Sea  $X, Y$  dos espacios métricos con métricas  $d_X, d_Y$  respectivamente. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **lipschitziana** si existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

**Teorema 1.4.1**

Sea  $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  una aplicación lipschitziana de constante  $L \in \mathbb{R}^+$ . Entonces para todo conjunto Lebesgue medible  $A \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto  $F(A)$  también es Lebesgue medible y  $\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$

*Demostración.* Comencemos observando que si tenemos un hipercubo  $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$  de arista  $r$  y de centro  $y$ , y  $x \in I$  entonces

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty \leq L \frac{r}{2}$$

por lo que si  $F(y) = (z_1, \dots, z_n)$  entonces  $F(x) \in \prod_{k=1}^n [z_k - L \frac{r}{2}, z_k + L \frac{r}{2}]$  y por lo tanto

$$F(I) = F\left(\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]\right) \subset \prod_{k=1}^n [z_k - L \frac{r}{2}, z_k + L \frac{r}{2}]$$

lo que implica que  $\lambda_n(F(I)) \leq (Lr)^n = L^n \lambda_n(I)$ .

Ahora, lo demostraremos para conjuntos medibles más generales. Por la regularidad interior de  $\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$  podemos definir el conjunto

$$B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

Entonces por construcción tenemos que  $\lambda_n(B) = \lambda_n(A) - \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_n(K_j) = 0$ , por tanto podemos deducir que

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup B$$

donde cada  $K_j$  se compacto y cada  $B$  es un conjunto de medida nula. Como  $F$  es continua

$$F \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(K_j)$$

y también es Borel-medible, por ser unión numerable de compactos. Así, se llega a demostrar que  $F(B)$  también es medible. Sea  $\varepsilon > 0$ , podemos cubrir  $B$  con una familia numerable de hipercubos de la forma

$$I_j = \prod_{k=1}^n [a_{j,k}, b_{j,k})$$

de arista  $r_j$  y centro  $y_j = (y_{j,1}, \dots, y_{j,n})$  tales que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_n(I_j) < \varepsilon$ . Entonces tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(F(I_j)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L^n r_j^n = L^n \sum_{j=1}^{\infty} r_j^n = L^n \lambda_n(I_j) < L^n \varepsilon$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario, se deduce que  $F(B)$  tiene medida nula, y como la desigualdad se da para cualquier hipercubo, se tiene que

$$\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$$

□

### Corolario 1.4.1

Sea  $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  una aplicación bilipschitziana (función lipschitziana con inversa lipschitziana) de constante  $L_2$  y  $F^{-1}$  con constante  $L_1$ . Entonces para todo conjunto Lebesgue medible  $A \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto  $F(A)$  también es Lebesgue medible y

$$L_1^n \lambda_n(A) \leq \lambda_n(F(A)) \leq L_2^n \lambda_n(A)$$

### Corolario 1.4.2

Sea  $F : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  una isometría para todo conjunto Lebesgue medible  $A \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto  $F(A)$  también es Lebesgue medible y  $\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(A)$

### Teorema 1.4.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible Lebesgue de medida finita. Entonces

1.  $\lambda_n(A + h) = \lambda_n(A) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
2.  $\lambda_n(U(A)) = \lambda_n(A) \quad \text{para todo operador lineal ortogonal } U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$3. \lambda_n(cA) = |c|^n \lambda_n(A) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

*Demostración.* 1. Es consecuencia del corolario anterior.

2. Veamos que, para todo cubo cerrado  $K$  se cumple que

$$\lambda_n(U(K)) = \lambda_n(K)$$

Supongamos que esto no es cierto para algún cubo cerrado  $K$ , es decir,

$$\lambda_n(U(K)) = r\lambda_n(K)$$

donde  $r = \frac{\lambda_n(U(K))}{\lambda_n(K)} \neq 1$ . Vamos a demostrar que, para toda bola abierta  $Q \subset I$  centrada en el origen se tiene que

$$\lambda_n(U(Q)) = r\lambda_n(Q) \quad \text{siempre que } U(Q) \subset I = [0, 1]^n$$

Supongamos que el cubo  $K$  tiene arista de longitud  $d$ . Dividamos dicho cubo en  $p^n$  subcubos:  $K_1, K_2, \dots, K_{p^n}$  cada uno con arista de longitud  $d/p$ . Los subcubos son disjuntos salvo en sus caras. Como los subcubos son traslaciones unas de otras, es decir, podemos expresarlos de forma  $K_j = K_1 + t_j$  donde  $t_j$  es un vector de traslación, se tiene que

$$\lambda_n(U(K_j)) = \lambda_n(U(K_1 + t_j)) = \lambda_n(U(K_1) + U(t_j)) = \lambda_n(U(K_1))$$

ya que la medida de Lebesgue es invariantes por traslaciones por el apartado anterior. Entonces, tenemos que

$$\lambda_n(U(K)) = \sum_{j=1}^{p^n} \lambda_n(U(K_j)) = p^n \lambda_n(U(K_1))$$

Entones tenemos que

$$\begin{cases} \lambda_n(U(K)) = r\lambda_n(K) \\ \lambda_n(K) = p^n \lambda_n(K_1) \end{cases} \implies \lambda_n(U(K_1)) = r\lambda_n(K_1)$$

Dado que podemos tomar cualquier  $p$ , es decir, podemos subdividir tanto como queramos, podemos trasladar los cubos y obtenemos que  $\lambda_n(U(K')) = r\lambda_n(K')$  para cualquier cubo de la forma  $K' = qK + h$  donde  $q \in \mathbb{Q}^+$  indica la escala y  $h \in \mathbb{R}^n$  la traslación. Es decir, que se cumple para todo los cubos con vértices en coordenadas racionales y aristas paralelas a los ejes.

Ahora extendamos el resultado a bolas abiertas: Sea  $Q$  una bola abierta centrada en el origen. Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomemos dos bolas auxiliares  $Q_1, Q_2$  tales que  $Q_1 \subset Q \subset Q_2$  y  $\lambda_n(Q_2 \setminus Q_1) < \varepsilon$ . Construimos  $E_1 :=$  Unión de cubos que está contenido en  $Q_1$  (aproximación por dentro) y  $E_2 :=$  Unión de cubos que contiene a  $Q_2$  (aproximación por fuera), entonces sabemos que se cumple que

$$Q_1 \subset E_1 \subset Q \subset E_2 \subset Q_2$$

Entonces, por lo demostrado anteriormente tenemos que

$$\lambda_n(U(E_1)) = r\lambda_n(E_1) \quad \text{y} \quad \lambda_n(U(E_2)) = r\lambda_n(E_2)$$

Y además, como  $E_1 \subset Q \subset E_2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} U(E_1) \subset U(Q) \subset U(E_2) &\implies \lambda_n(U(E_1)) \leq \lambda_n(U(Q)) \leq \lambda_n(U(E_2)) = \\ &= r\lambda_n(E_1) \leq \lambda_n(U(Q)) \leq r\lambda_n(E_2) \implies \lambda_n(U(Q)) = r\lambda_n(Q) \end{aligned}$$

Pero dado que  $U(Q) = Q$  debido a que es una bola centrada en el origen, llegamos a la contradicción  $r = 1$ .

3. Es evidente para hipercubos con aristas paralelas a los ejes coordinados, lo cual es suficiente. □

### Corolario 1.4.3

Toda aplicación lineal  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lleva conjuntos medibles-Lebesgue en conjuntos medibles-Lebesgue, y se cumple que para todo conjunto medible-Lebesgue  $A \subset \mathbb{R}^n$  de medida finita:

$$\lambda_n(L(A)) = |\det(L)|\lambda_n(A)$$

Además, también se cumple que la preimagen de todo conjunto medible-Lebesgue de una aplicación lineal es medible-Lebesgue.

*Demostración.* Hagamos una distinción de casos:

1. Si  $|\det(L)| = 0$ , entonces la imagen de  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio lineal propio y tiene medida nula
2. Supongamos que  $|\det(L)| \neq 0$ . Entonces,  $L$  se puede escribir como una composición  $L = UL_0V$  donde  $U$  y  $V$  son operadores lineales orotogonales y  $L_0$  está dado por una matriz diagonal con autovalores estrictamente positivos  $\alpha_j$ . Entonces como  $|\det(L)| = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$  y las aplicaciones  $U$  y  $V$  preservan la medida por el teorema anterior, basta considerar  $L_0$ . Sea  $A = [b_i, c_i]^n$  es un cubo con aristas paralelas a los ejes de coordenadas, entonces la igualdad

$$\lambda_n(L_0(A)) = (\alpha_i c_i - \alpha_i b_i)^n = \alpha_i (c_i - b_i)^n = |\det(L_0)|\lambda_n(A)$$

es evidente. Por lo tanto, dado que esto se cumple para cubos con aristas paralelas a los ejes coordinados, se cumple para cualquier conjunto medible-Lebesgue de medida finita (siguiendo el procedimiento del teorema anterior).

□

### Teorema 1.4.3

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  Borel-medible. Si  $F : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua, entonces es de Borel.

*Demostración.* Sea  $B$  abierto en  $(\mathbb{R}^m, \tau_m)$ ,  $f^{-1}(B)$  es abierto en  $(\mathbb{R}^n, \tau_n)$ . Denotamos  $f^{-1}(\tau_m) = \{f^{-1}(B) : B \in \tau_m\}$ . Tenemos que  $f^{-1}(\tau_m) \subset \tau_n$  y así  $\sigma(f^{-1}(\tau_m)) \subset \mathcal{B}_n$ . Ahora bien, como la imagen inversa commuta con las uniones y las intersecciones,  $\sigma(f^{-1}(\tau_m)) = f^{-1}(\sigma(\tau_m)) = f^{-1}(\mathcal{B}_m)$  por lo que  $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_n$ . □

### Lema 1.4.2

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto Lebesgue medible, y sea  $B \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto Lebesgue medible. Entonces  $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es Lebesgue medible y se tiene que  $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)$

*Demostración.* Dado un recubrimiento  $\mathcal{U} \subset \mathcal{J}_0$  de  $A$  y un recubrimiento  $\mathcal{V} \subset \mathcal{J}_0$  de  $B$ , el conjunto  $\mathcal{W} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$  es un recubrimiento en  $\mathcal{J}_0$  de  $A \times B$  y además,  $\lambda_{n+m}(U \times V) = \lambda_n(U) \cdot \lambda_m(V)$  de donde se sigue el resultado. □

### 1.4.3 Existencia de conjuntos no medibles

#### Definición 1.4.9

Consideremos la relación de equivalencia en  $\mathbb{R}$  definida como  $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ . Utilicemos el axioma de elección para construir el conjunto  $V \subset [0, 1]$  que contiene exactamente un elemento de

*cada clase de equivalencia de  $\sim$*

## 2 Integración con respecto de una medida

### 2.1 Propiedades de las funciones medibles

**Definición 2.1.1** [Medibilidad de funciones]

Sea  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $(Y, \mathcal{B})$  otro espacio medible. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **medible** si para todo conjunto medible  $B \in \mathcal{B}$ , el conjunto inverso  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

**Lema 2.1.1**

Sea  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra y  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  es medible si y sólo si  $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{A}$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$  es medible si y sólo si  $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{A}$  para todo  $c \in \mathbb{R}$  y  $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ : Es trivial, ya que si  $f$  es medible, por definición  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  para todo  $B \in \mathcal{B}$  y en particular para  $B = (-\infty, c)$ .

$\Leftarrow$ : Dados  $a > b$  se tiene que:

$$[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a), \quad (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ a + \frac{b-a}{n+1}, b \right)$$

Puesto que todo abierto en  $\mathbb{R}$  es unión numerable de intervalos abiertos se cumple que  $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  para todo  $U \in \tau$  la topología usual de  $\mathbb{R}$ . Esto significa que  $\sigma(f^{-1}(\tau)) = f^{-1}(\sigma(\tau)) = f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$  por lo que  $f$  es medible.  $\square$

**Teorema 2.1.1**

Sean  $f, g, f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), n \in \mathbb{N}$  funciones medibles con respecto a una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Entonces:

1. La función  $\varphi \circ f$  es medible para cualquier función de Borel  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en particular esto es cierto si  $\varphi$  es continua.
2.  $\alpha f + \beta g$  es medible para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
3.  $f \cdot g$  es medible.
4. Si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in X$ , entonces  $\frac{f}{g}$  es medible.
5. Si existe el límite  $f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x$ , entonces  $f_0$  es medible.
6. Las funciones  $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  son medibles.

*Demostración.* (I) Sea  $B \in \mathcal{B}$ , entonces  $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$ , luego  $\varphi \circ f$  es medible.

Por (I), para demostrar (II) basta con considerar el caso  $\alpha = \beta = 1$  y observar que para  $(-\infty, c) \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{aligned} (f + g)^{-1}((-\infty, c)) &= \{x \in X : f(x) + g(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < c - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < c - g(x)\}). \end{aligned}$$

El lado derecho de esta relación pertenece a  $\mathcal{A}$ , puesto que las funciones  $f$  y  $g$  son medibles.

(III) Dedúcese de la igualdad  $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$  y de las afirmaciones ya probadas; en particular, el cuadrado de una función medible es medible por (I).

(IV) Observando que la función  $\varphi$  definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es de Borel (comprobarlo), obtenemos (IV).

(V) Basta comprobar que

$$\{x \in X : f_0(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n+1}^{\infty} \left\{ x \in X : f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}.$$

(VI) Basta observar que

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k=1, \dots, n} f_k(x).$$

y demostrar la medibilidad de  $\max_{k=1, \dots, n} f_k(x)$ . Por inducción, esto se reduce al caso  $n = 2$ . En este caso, tenemos:

$$\{x \in X : \max(f_1(x), f_2(x)) < c\} = \{x \in X : f_1(x) < c\} \cap \{x \in X : f_2(x) < c\}.$$

La afirmación correspondiente para el ínfimo se verifica con la igualdad

$$\underline{f}(x) = -\sup_{n \in \mathbb{N}} [-f_n(x)].$$

□

### Lema 2.1.2

Sean  $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, el conjunto  $L$  de todos los puntos  $x \in X$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existe, es finito y pertenece a  $\mathcal{A}$ . Lo mismo vale para los conjuntos  $L^-$  y  $L^+$  de todos aquellos puntos donde el límite es  $-\infty$  o  $+\infty$  respectivamente.

*Demostración.* Basta observar que el punto  $x$  está en  $L$  si y sólo si  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, es decir,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k}$  para todo  $p, q \geq N$ . Es decir,

$$L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{p,q \geq N} \{x : |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}$$

Los casos de  $L^-$  y  $L^+$  se demuestran de forma análoga. □

### Definición 2.1.2

Una función  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es simple si es combinación lineal (finita) de funciones características de conjuntos medibles. Esto es que  $f$  viene dada por una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  y por coeficientes  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , de modo que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x)$$

### Observación 2.1.1

La condición de que los conjuntos  $A_k$  sean disjuntos y de que los coeficientes  $\alpha_k$  sean distintos no es necesaria para la definición, pero garantiza que la expresión de  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$  es única salvo el

orden de los sumandos.

### Lema 2.1.3

Sea  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  medible y y limitada. Entonces existe una sucesión de funciones simples  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $s_n \leq s_{n+1} \leq f$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Sea  $c = \sup_{x \in X} \{|f(x)| + 1\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , particionamos el intervalo  $[-c, c]$  en  $n$  subintervalos disjuntos:

$$I_j = [-c + c(j-2)2^{-n}, -c + cj2^{-n}]$$

de longitud  $c2^{-n}$ . Definamos entonces  $A_j = f^{-1}(I_j)$ ; está claro que  $A_j \in \mathcal{A}$  ya que  $\cup_{j=1}^n A_j = X$ . Sea  $c_j$  el extremo izquierdo de  $I_j$  y definamos la función simple  $s_n(x) \leq s_{n+1}$  y  $s_n(x) \leq f(x)$  y también se cumple que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - s_n(x)| \leq 2^{-n}c$$

ya que la función  $f$  lleva  $A_j$  a  $I_j$  y  $s_n$  lleva  $A_j$  a  $c_j \in I_j$ , que está a una distancia como máximo de  $2^{-n}c$  de cualquier punto de  $I_j$ .  $\square$

### Corolario 2.1.1

Sea  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces para toda función  $\mathcal{A}$ -medible,  $f$  existe una sucesión de funciones simples  $s_n$  que converge a  $f$  en cada punto. Si  $f \geq 0$  satisface además que  $s_n \leq s_{n+1} \leq f$

*Demostración.* Definamos las funciones  $g_n$  por

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in [-n, n] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos encontrar funciones simples  $s_n$  tales que  $|s_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}$ . Es claro que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ . Si  $f \geq 0$  por el lema anterior podemos escoger  $s_n$  tales que  $s_n \leq s_{n+1} \leq f$ .  $\square$

## 2.2 La integral de funciones positivas

### Definición 2.2.1 [Integral de Lebesgue de funciones simples sobre un espacio de medidas]

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Para cualquier función simple  $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definimos su integral de Lebesgue respecto a la medida  $\mu$  como

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

Si la medida que estamos utilizando es evidente (por ejemplo, en el caso de usar la medida de Lebesgue), podemos omitir la referencia a la medida anterior y escribir  $\int_X f(x) d\mu$ . Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces la integral de  $f$  sobre el conjunto  $A$  se define como la integral de la función simple  $\chi_A f$ , es decir,

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k \cap A)$$

Cuando no se indique el conjunto de integración, se entenderá que se está integrando con respecto al dominio de  $f$ .

### Lema 2.2.1 [Propiedades de la integral de funciones simples]

La integral de Lebesgue sobre funciones simples cumple las siguientes propiedades:

1. Se verifica que

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \sup_{x \in X} f(x)\mu(X)$$

2. Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces

$$\int_X [\alpha f(x) + \beta g(x)]d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x) + \beta \int_X g(x)d\mu(x)$$

En particular, si  $A$  y  $B$  son conjuntos medibles disjuntos (en  $\mathcal{A}$ ) se cumple que

$$\int_{A \cup B} f(x)d\mu(x) = \int_A f(x)d\mu(x) + \int_B f(x)d\mu(x)$$

*Demostración.* 1. Es evidente por la definición de la integral de funciones simples. Además la definición implica la igualdad

$$\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x)$$

Por lo tanto ahora basta con verificar la afirmación (2) para  $\alpha = \beta = 1$ .

2. Sea  $f$  función simple que toma valores distintos  $c_k$  tales que se definen  $A_k = \{x \in X : f(x) = c_k\}$  y sea  $g$  una función que toma valores distintos  $b_j$  tales que se definen  $B_j = \{x \in X : g(x) = b_j\}$ . Entonces los conjuntos  $A_k \cap B_j = \{x \in X : f(x) = c_k\} \cap \{x \in X : g(x) = b_j\} \subset \mathcal{A}$ -disjuntos, entonces  $f + g = c_k + b_j$  en el conjunto  $A_k \cap B_j$ .

Sea  $\{d_r\}_{r=1}^l = \{c_k + b_j\}_{k=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$  y  $C_r = \bigcup\{A_k \cap B_j : c_k + b_j = d_r\}$  para  $r = 1, \dots, l$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_X [f(x) + g(x)] &= \sum_{r=1}^l d_r \mu(C_r) = \sum_{r=1}^l d_r \mu(\bigcup\{A_k \cap B_j : c_k + b_j = d_r\}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (c_k + b_j) \mu(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

pues  $\sum_{j=1}^m \mu(A_k \cap B_j) = \mu(A_k)$  y  $\sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap B_j) = \mu(B_j)$ . Esta última afirmación se deduce de  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ , ya que los conjuntos  $\{A_k\}$  y  $\{B_j\}$  son disjuntos y cubren todo  $X$ .

□

### Corolario 2.2.1

Si  $f$  y  $g$  son funciones simples tales que  $f \leq g$  casi en todo punto, entonces

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x)$$

*Demostración.* Sea  $A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ . Entonces  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu(X \setminus A) = 0$ . Entonces, por hipótesis tenemos que  $g - f$  es una función simple en  $A$ . No obstante, la función podría ser negativa en  $X \setminus A$ , por lo que definamos la constante positiva:

$$c = \sup_{x \in X} \{|f(x)| + |g(x)|\}$$

Por tanto definamos la función auxiliar

$$h(x) = g(x) - f(x) + c\chi_{X \setminus A}(x)$$

Entonces  $h$  es una función simple no negativa en  $X$ :

1. Si  $x \in A$ :

$$h(x) = g(x) - f(x) + c \cdot 0 = g(x) - f(x) \geq 0$$

2. Si  $x \in X \setminus A$ :

$$h(x) = g(x) - f(x) + c \cdot 1 \geq -|g(x) - f(x)| + c \geq 0$$

Ahora, por el lema anterior se cumple que

$$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_X g d\mu(x) - \int_X f d\mu(x) + \int_X c\chi_{X \setminus A}(x)d\mu(x) \geq 0$$

Entonces, por la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_X g d\mu(x) - \int_X f d\mu(x) \geq 0$$

□

### Definición 2.2.2 [Integral de Lebesgue de funciones positivas sobre un conjunto medible]

Sea  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función medible y  $E \in \mathcal{A}$ . Definimos la integral de Lebesgue de  $f$  respecto a  $\mu$  sobre  $E$  como

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ medible, } s \leq f \right\} \in \mathbb{R}^+$$

Al igual que para las funciones simples usaremos la notación  $\int_E f \equiv \int_E f d\mu \equiv \int_E f(x) d\mu(x)$ .

### Lema 2.2.2

Sean  $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, \infty)$  medibles,  $A, B, E \in \mathcal{A}$ . Entonces se tienen las siguientes propiedades:

(I) Si  $0 \leq f \leq g$ , entonces

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(II) Si  $A \subset B$  y  $f \geq 0$ , entonces

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

(III) Si  $f \geq 0$  y  $c$  es una constante con  $0 \leq c < \infty$ , entonces

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(IV) Si  $f(x) = 0$  para todo  $x \in E$ , entonces

$$\int_E f d\mu = 0,$$

incluso si  $\mu(E) = \infty$ .

(V) Si  $\mu(E) = 0$ , entonces

$$\int_E f d\mu = 0,$$

aún si  $f(x) = \infty$  para todo  $x \in E$ .

(VI) Si  $f \geq 0$ , entonces

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu.$$

### Teorema 2.2.1 [Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue]

Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones medibles en  $X$ , y supongamos que:

1.  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$  para todo  $x \in X$ .
2.  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in X$

Entonces  $f$  es medible y se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Demostración.* Como  $\int f_n \leq \int f_{n+1}$  existe  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \alpha$$

Para ver la igualdad, dividiremos la demostración en las dos desigualdades:

1.  $\alpha \leq \int_X f d\mu$ : Sea  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ , entonces como  $f$  es medible y  $f_n \leq f$  se cumple que  $\int f_n \leq \int f$  para todo  $n$  por lo que tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene que  $\alpha \leq \int_X f d\mu$ .
2.  $\alpha \geq \int_X f d\mu$ : Sea  $s$  cualquier función simple medible tal que  $0 \leq s \leq f$ , sea  $c \in (0, 1)$  y definamos  $E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Cada  $E_n$  es medible,  $E_n \subset E_{n+1}$  y  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Para ver esta igualdad considérese  $x \in X$ , entonces se pueden dar dos casos:
  - (a) Si  $f(x) = 0$  entonces  $s(x) = 0$  (pues  $s \leq f$ ) así que  $cs(x) = 0 \leq f_1(x)$  luego,  $x \in E_1$
  - (b) Si  $f(x) > 0$  entonces  $cs(x) < f(x)$  ya que  $c < 1$  por lo que existe alguna  $n$  tal que  $x \in E_n$ .

También se cumple que para  $n \in \mathbb{N}$  que  $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} s$  por lo que tomando el límite

$$\alpha \geq c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s$$

donde la última igualdad se debe a la continuidad por abajo de la medida. Como  $c \in (0, 1)$  fue fijado arbitrariamente si tomamos  $c \rightarrow 1^-$ , obtenemos que  $\alpha \geq \int_X s$ . Como  $s$  fue fijada arbitrariamente con  $0 \leq s \leq f$ , y por definición tenemos que

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : s \text{ simple}, 0 \leq s \leq f \right\}$$

concluimos que  $\alpha \geq \int_X f d\mu$ .

□

### Teorema 2.2.2 [Teorema de Beppo Levi]

sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Entonces  $f$  es medible y se cumple que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

*Demostración.* Primero, existen sucesiones crecientes  $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(s_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples y medibles tales que  $s_n \leq f_1, s_n \leq f_2, s_n^1 \rightarrow f_1$  y  $s_n^2 \rightarrow f_2$ . Definiendo  $s_n = s_n^1 + s_n^2$ , observese que  $s_n \rightarrow f_1 + f_2$ . Entonces por el Teorema de la convergencia monótona anterior y por la linealidad de la integral en funciones simples, se tiene que

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

Sea  $g_n = f_1 + \dots + f_n$ , entonces la sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  crece monótonamente y converge a  $f$ . Aplicando la inducción observamos que

$$\int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu$$

Aplicando de nuevo el Teorema de la convergencia monótona se obtiene la igualdad deseada:

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

□

### Lema 2.2.3 [Lema de Fatou]

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  para cada entero positivo  $n$ . Entonces se cumple que

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

*Demostración.* Definamos  $g_k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x) : k \in \mathbb{N}, x \in X$ . Entonces  $g_k \leq f_k$ , por lo que

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además,  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$ , cada  $g_k$  es medible y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

□

## 2.3 Integración de funciones reales y complejas

### Definición 2.3.1

Definimos  $\mathcal{L}^1((X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{C}) = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$  como el conjunto de todas las funciones complejas medibles  $f$  sobre  $X$  tales que

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Cabe señalar que la medibilidad de  $f$  implica la de  $|f|$ , por lo tanto, la integral anterior está bien definida.

Los elementos de  $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  se llaman *funciones integrables en sentido de Lebesgue* (respecto de  $\mu$ ) o *funciones sumables*.

### Definición 2.3.2

Sea  $f = u + iv$  donde  $u$  y  $v$  son funciones reales medibles sobre  $X$  y supongamos que  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ . Definimos para todo conjunto medible  $E$ :

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \left( \int_E v^+ d\mu - \int_E v^- d\mu \right)$$

donde  $g^+ = \max\{g, 0\}$  y  $g^- = \max\{-g, 0\}$  para cualquier función real  $g$ . Las funciones  $u^+, u^-, v^+, v^-$  son funciones reales medibles no negativas y sumables.. Además tenemos que  $u^+u^-, v^+v^- \leq |f|$  por lo que cada una de estas cuatro integrales existe y es finita.

### Teorema 2.3.1

Sean  $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  y

$$\int_X [\alpha f(x) + \beta g(x)] d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) + \beta \int_X g(x) d\mu(x)$$

*Demostración.* La medibilidad de  $\alpha f + \beta g$  es inmediata. Además, se tiene que

$$\int_X |\alpha f(x) + \beta g(x)| d\mu(x) \leq |\alpha| \int_X |f(x)| d\mu(x) + |\beta| \int_X |g(x)| d\mu(x) < \infty$$

Por lo tanto  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ . Finalmente queda probar que

$$\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x)$$

y que

$$\int_X cf(x) d\mu(x) = c \int_X f(x) d\mu(x)$$

Definamos la función auxiliar  $h = f + g$ , tenemos que

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

reordenando, esto es

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

Así, por la linealidad de la integral para funciones no negativas, tenemos que

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

Y como cada una de estas integrales es finita, espejando obtenemos la primera igualdad.  
Para la segunda igualdad, sea  $\alpha$  distinguimos casos:

1. Si  $\alpha \geq 0$ , entonces el resultado es inmediato
2. Si  $\alpha = -1$  entonces el resultado también es inmediato usando que  $(-g)^+ = g^-$
3. Si  $\alpha = i$  el resultado también es sencillo:

$$\int(if) = \int i(u + iv) = \int(-v + iu) = \int -v + i \int u = i \int f$$

Combinando estos resultados, obtenemos la segunda igualdad para  $\alpha \in \mathbb{C}$  arbitrario.  $\square$

### Teorema 2.3.2

Sea  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ . Entonces

$$\left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)| d\mu(x)$$

*Demostración.* Definamos  $z = \int_X f(x) d\mu(x)$ . Como  $z$  es un número complejo, existe un número complejo  $\alpha$  tal que

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{z}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \end{cases} \implies |z| = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ 1 & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

y tal que  $\alpha \cdot z = |z|$ . Sea  $u = \Re(\alpha f)$ . Entonces  $u \leq |\alpha f| = |f|$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu &= |z| = \alpha z = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X \alpha f(x) d\mu(x) = \int_X \Re(\alpha f(x)) d\mu(x) + i \int_X \Im(\alpha f(x)) d\mu(x) = \\ &= \int u \leq \int |f| \end{aligned}$$

La parte imaginaria de la integral es nula ya que es igual a un módulo, i.e. a un número real.  $\square$

### Teorema 2.3.3 [Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue]

Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones complejas y medibles en  $X$  tales que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Si existe una función  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } n \in \mathbb{N}$$

Entonces  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$  y se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

y además que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

*Demostración.* Como  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todo  $n$  y  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , tomando límite obtenemos  $|f(x)| \leq g(x)$ . Como  $f$  es medible (límite de funciones medibles) y  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ , se tiene que  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ .

Además, observemos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$$

Como  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ , tenemos que  $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  para todo  $x \in X$ , es decir:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ para todo } x \in X$$

Aplicamos el Lema de Fatou a las funciones no negativas  $h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \geq 0$ :

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$$

Como  $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 2g(x) - \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 2g(x) - 0 = 2g(x)$ , tenemos:

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu$$

Por linealidad de la integral:

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_X 2g d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \right]$$

Como  $\int_X 2g d\mu < \infty$  (pues  $g \in \mathcal{L}^1$ ), podemos escribir:

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

donde usamos que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ . Restando  $\int_X 2g d\mu$  en ambos lados:

$$0 \leq -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

Es decir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$$

Como siempre  $\int_X |f_n - f| d\mu \geq 0$ , tenemos:

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$$

Por tanto, existe el límite y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

Finalmente, para la segunda conclusión:

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

□

## 2.4 Espacios $L^p$

### Definición 2.4.1

Sean  $p \in [1, \infty)$  y  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Definimos

$$\mathcal{L}^p(X, \mathbb{F}) \equiv \mathcal{L}^p(X, \mu, \mathbb{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{F} : f \text{ medible}, \|f\|_p < \infty\}$$

donde  $\|\cdot\|_p$  se define como

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \in [0, \infty)$$

Definimos además  $\mathcal{L}(X, \mathbb{F}) = \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})|_{\sim}$  donde  $f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ . Observese que si  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})$  y  $f \sim g$  entonces  $\|f\|_p = \|g\|_p$ .

Definimos también

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{F} : f \text{ medible}, \|f\|_\infty < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ para casi todo } x \in X\}$$

y por definición  $\inf\{\emptyset\} = \infty$ .

### Proposición 2.4.1 [Desigualdad de Young]

Sea  $p \in (1, \infty)$ , entonces para  $a, b \in \mathbb{R}^+$  se tiene que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración.

□

### Proposición 2.4.2 [Desigualdad de Hölder]

Sean  $p \in [1, \infty]$ ,  $(X, \mu)$ -espacio de medida y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{F}$  medibles. Entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración.

□

### Proposición 2.4.3 [Desigualdad de Minkowski]

Sea  $p \in [1, \infty]$ ,  $(X, \mu)$ -espacio de medida y  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{F})$ . Entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

### Definición 2.4.2 [Espacio de Banach]

Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  se dice un espacio de Banach si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en  $V$  converge a un elemento de  $V$ .

**Ejemplo**

El espacio  $\mathcal{B}(X, \mathbb{F})$  de funciones limitadas  $f : X \rightarrow \mathbb{F}$  se dice que es un espacio de Banach con la norma  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .