Calculo Vectorial e Integración Lebesgue

Pablo Pardo Cotos
Ciencias Matemáticas e Ingeniería Informática

Contents

1 Fundamentos de la teoría de la medida

1.1 Anillo, álgebra y σ-álgebra de conjuntos

Definición 1.1.1 [Anillo]

*Dados los conjuntos X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es decir una familia de subconjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es un **anillo de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por diferencias, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Definición 1.1.2 [Álgebra]

*Dado un conjunto X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, familia de conjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es un **álgebra de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos*
3. *$X \in \mathcal{A}$*

Definición 1.1.3 [σ-álgebra]

*Dado un conjunto X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, familia de conjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es una **σ-álgebra de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones numerables*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos*
3. *$X \in \mathcal{A}$*

Observación 1.1.1

Una álgebra es un anillo al que pertenece el conjunto total X.

Observación 1.1.2

1. *Si $\mathcal{A}$ es un anillo, entonces tomando $A, B \in \mathcal{A}$, tenemos que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$. Es decir, los anillos también son cerrados por intersección.*
2. *Sea $\mathcal{A}$ anillo y $E \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\} = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$ es una álgebra de conjuntos en E.*

Definición 1.1.4 [Espacio medible]

Dada una σ-algebra Σ de un conjunto X o también expresado como un par (X, Σ) se llama espacio *medible. A los conjuntos de Σ se les llama conjuntos medibles.*

Definición 1.1.5 [Función medible]

Dados dos espacios medibles (X, Σ_X) y (Y, Σ_Y), y una función $f : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$, se dce que es medible si $\forall E \in \Sigma_Y \, f^{-1}(E) \in \Sigma_X$.

Lema 1.1.1

*Sean un conjunto X, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ y una familia $\mathfrak{U}$ de σ-algebras/álgebras/anillos en X que contienen a $\mathcal{C}$. Entonces $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{U}} \mathcal{A}$ es una σ-álgebra/álgebra/anillo que llamamos **σ-álgebra/álgebra/anillo generada por** $\mathcal{C}$ siendo la menor σ-álgebra/álgebra/anillo que contiene a $\mathcal{C}$.*

1.2 Contenidos y medidas

Definición 1.2.1 [Contenido]

Sea X un conjunto y Σ un anillo en X. Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es un contenido en Σ si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es aditivo, esto es que, dada una sucesión de finita de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

Definición 1.2.2 [Medida]

Sea X un conjunto y Σ-algebra en X. Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es un contenido en Σ si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es σ-aditivo, esto es que, dada una sucesión numerable de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Definición 1.2.3 [Espacio de medida]

Dado un conjunto X, una σ-álgebra Σ en X y una medida $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, se llama espacio de medida a la terna (X, Σ, μ).

Observación 1.2.1

En el caso particualar en el que $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una ***medida de probabilidad*** *para cada $E \in \Sigma$ y el espacio de medida se llama* ***espacio de probabilidad****.*

Definición 1.2.4 [Espacio de medida finita]

SE dice que (X, Σ, μ) es un espacio de medida finita si $\mu(X) < +\infty$.

Definición 1.2.5 [Espacio de medida σ-finita]

SE dice que (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita si existe una sucesión numerable de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.2.2

Las definiciones anteriores se pueden aplicar de la misma manera a los contenidos.

Definición 1.2.6 [σ-álgebra de Borel]

Teniendo en cuenta la definición formal de σ-álgebra, tenemos que X es un espacio topológico con topología τ se dice que Σ es una ***σ-álgebra de Borel*** *con respecto τ y que μ es una medida de τ-Borel o una medida de Borel con respecto a τ, si $\tau \subset \Sigma$.*
Decimos que la menor σ-álgebra que contiene a τ es la σ-álgebra de Borel de τ y la denotamos por $\mathcal{B}(\tau)$.
En el caso concreto en el que el espacio topológico sea $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, denotaremos a esta σ-álgebra de Borel por $\mathcal{B}^n$.

Definición 1.2.7 [Función de Borel]

Una función $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ definida entre dos espacios topológicos se dice que es una ***función de Borel*** *si $f : (X, \mathcal{B}(\tau_1)) \to (Y, \mathcal{B}(\tau_2))$ es medible.*

Definición 1.2.8 [Medida de Borel regular]

Dada una medida de Borel μ en un espacio topológico (X, τ), se dice que es una ***medida de Borel regular*** *si es regular exterior, es decir, si cumple dos condiciones:*

1. *Regularidad exterior:*

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = inf\{\mu(U) : A \subset G, G \in \Sigma \ abierto\}$$

2. *Regularidad interior:*

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = sup\{\mu(K) : F \subset A, F \in \Sigma \ compacto\}$$

Definición 1.2.9 [Casi todo punto]

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y $E \in \Sigma$ diremos que una propiedad P se cumple en μ-casi todo punto de E si existe $N \in \Sigma$, $N \subset E$ tal que $\mu(N) = 0$ y P se cumple en E/N.

Definición 1.2.10 [Intervalo]

Llamamos intervalos de $\mathbb{R}$ a los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (contamos al vacío como intervalo). Decimos que $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo si $I = \prod_{i=1}^n I_i$ donde cada I_i es un intervalo de $\mathbb{R} \forall i = 1, \ldots, n$.

Observación 1.2.3

Como la intersección de intervalos en $\mathbb{R}$ es un intervalo (la intersección de conexos es conexa), y dados dos intervalos $\prod_{i=1}^n I_i$ y $\prod_{i=1}^n J_i$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\left(\prod_{i=1}^n I_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^n J_i\right) = \prod_{i=1}^n (I_i \cap J_i)$$

es decir, la intersección de dos intervalos en $\mathbb{R}^n$ es un intervalo en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

La familia $\mathcal{J}_0$ de uniones finitas de intervalos limitados disjuntos dos a dos de la forma

$$\prod_{i=1}^b [a_n, b_n) = [(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n))$$

en el conjunto $\mathbb{R}^n$ forman un anillo. La familia $\mathcal{J}$ de uniones finitas de intervalos disjuntos dos a dos de forma

$$\mathbb{R}^n \cap \prod_{i=1}^b [a_n, b_n) = \mathbb{R}^n \cap [(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n))$$

donde $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$ para todo $i = 1, \ldots, n$ forman un álgebra.
Llamamos **contenido de Jordan** o **contenido de Peano-Jordan** a la función $\mu : \mathcal{J} \to [0, +\infty]$ definida como:

$$\mu\left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

donde, por simplicidad, entendemos que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Para calcular el contenido de Jordan de un conjunto cualquiera $\mathcal{J}$, como es una unión finita de intervalos disjuntos de la forma $\prod_{i=1}^b [a_n, b_n)$, basta con sumar los contenidos de todos los intervalos que lo componen.

Lema 1.2.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y μ un contenido (medida) en $\mathcal{A}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Monotonía y subaditividad:*

$$\mu(A) \leq \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$$

Si además, $\mu(B) < +\infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. *Subaditividad de sucesión de conjuntos: Dado una sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\right)$$

3. *Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

4. *σ-subaditividad de medidas: Sea μ una medida, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

5. *σ-superadtividad de medidas: Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia disjunta dos a dos y además $\cup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$$

Proposición 1.2.1

Sea $\mathcal{A}$ un anillo en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ un contenido. Entonces son equivalentes las siguintes condiciones:

1. *μ es σ-aditiva, esto es: Dado una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) < +\infty$ entonces:*

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

2. *Continuidad en el 0: Dada una sucesión de elementos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ y $\mu(A_1) < +\infty$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

3. *μ es continua por debajo: Dada una sucesión de elementos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < +\infty$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

4. *μ es σ-subaditiva: Dada una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces:*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Demostración. (1) $\implies$ (2): Supongamos que μ satisface (1) y que una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ decreciente tal que $\mu(A_1) < +\infty$ y $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Definimos $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, tales que pertenecen a $\mathcal{A}$, su unión es A_1

y son disjuntos dos a dos. Por lo tanto la sucesiñon dada por $s_n = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$ es monotona creciente y esta limitada por $\mu(A_1) < \infty$, por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ converge.
Finalmente, tenemos que la cola de la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Pero esta suma es igual a $\mu(A_N)$, ya que $\cup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$. Por lo tanto llegamos a la condición (2).
(2) $\implies$ (3):
Tomemos la sucesión de conjuntos $A_n = B \setminus B_n$ que satisface las hipótesis de (2) y por lo tanto

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$

(3) $\implies$ (4):
Tomando $B_n 0 \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ que satisface las hipótesis de (3) y

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(4) $\implies$ (1):
Basta aplicar el lema anterior para la demostración. □

Lema 1.2.2

Sea $\mathcal{A}$ un anillo en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Si μ es aditiva y σ-subaditiva, entonces es σ-aditiva.

Demostración. Se una sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tales que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) < +\infty$. Entonces, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Por lo tanto, $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. □

1.3 Medidas exteriores

Definición 1.3.1 [Medida exterior]

Sea X un conjunto. Dada una función $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ es una medida eterior si

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ *si* $A \subset B \subset X$
3. μ *es σ-subaditiva, es decir, dada una sucesión de conjuntos* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ *se cumple que:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definición 1.3.2 [Diferencia de dos conjuntos]

*Dado un conjunto X y $A, B \subset X$ llamamos **diferencia** de A y B al conjunto $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*

Definición 1.3.3 [Medida exterior de Lebesgue]

Sea X un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ asociada a μ tal que $\forall A \subset X$:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

Definición 1.3.4 [Conjunto medible]

*Sea A un subconjunto de X y μ^* una medida exterior en X. Se dice que A es μ-**medible** si:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta A_\epsilon) < \epsilon$$

Lema 1.3.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}, B, C \subset X$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$-¿¿medida exterior??. Entonces:

1. *$\mu^*(B) \leq \mu^*(C)$ si $B \subset C$*
2. *μ^* es σ-subaditiva, es decir, $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$*
3. *$|\mu^*(B) - \mu^*(C)| \leq \mu^*(B \Delta C)$*
4. *Si $\mathcal{A}$ es un anillo y μ es un contenido, entonces $\mu^*(\emptyset) = 0$ y equivalentemente, μ^* es una medida exterior en X.*

Demostración.

1. μ^* es por definición monótona creciente, esto es, si $B \subset C \implies \mu^*(B) \leq \mu^*(C)$. Esto se debe a que cualquier recubrimiento numerable de C es también un recubrimiento numerable de B.
2. Sea una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A = \cup A_n$. Dado un $\epsilon > 0$, existen dos casos posibles,
   (a) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^*(A_k) = +\infty$. Entonces, como $A_k \subset A$ se tiene que $\mu^*(A) = \infty$ y por tanto no hay nada que demostrar.
   (b) Si se cumple que $\forall n \in \mathbb{N} \mu^*(A_n) < \infty$ entonces, para cada una de las n existe un recubrimiento $\{B_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ y por tanto

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

   Por lo tanto se tiene que $\cup A_n \subset \cup \cup B_{n,k}$ y en consecuencia se tiene que

   $$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon$$

   Como ϵ es arbitrario, tenemos el resultado.

3. Supongamos que $B \subset C \cup (B\Delta C)$, por lo que, por la subaditividad de μ^* obtenemos que:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(C) + \mu^*(B\Delta C) \iff \mu^*(B) - \mu^*(C) \leq \mu^*(B\Delta C)$$

   Intercambiando B y C obtenemos la otra desigualdad.

4. Basta tomar $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\emptyset\}$ como recubrimiento de $\emptyset$ y usar que como μ es un contenido, entonces $\mu(\emptyset) = 0$. El resto de propiedades ya han sido demostradas, dada cualquier funcion μ y en particular si μ es un contenido.

$\square$

Teorema 1.3.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ una álgebra en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ un contenido. Entonces:

1. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ y la medida exterior μ^* coincide con μ en $\mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}_\mu$ es una σ-álgebra, y la restricción de μ^* a $\mathcal{A}_\mu$ es σ-aditiva*
3. *La función μ^* es la única extensi´n σ-aditiva y positiva de μ a σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y también es la única extensión σ-aditiva y positiva de μ a $\mathcal{A}_\mu$.*

Demostración. $\square$