Calculo Vectorial e Integración Lebesgue

Pablo Pardo Cotos
Ciencias Matemáticas e Ingeniería Informática

Contents

1 Fundamentos de la teoría de la medida

1.1 Anillo, álgebra y σ-álgebra de conjuntos

Definición 1.1.1 [Anillo]

*Dados los conjuntos X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es decir una familia de subconjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es un **anillo de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por diferencias, es decir, $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Definición 1.1.2 [Álgebra]

*Dado un conjunto X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, familia de conjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es un **álgebra de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones finitas*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos*
3. *$X \in \mathcal{A}$*

Definición 1.1.3 [σ-álgebra]

*Dado un conjunto X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, familia de conjuntos no vacía, se dice que $\mathcal{A}$ es una **σ-álgebra de conjuntos** en X si:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones numerables*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos*
3. *$X \in \mathcal{A}$*

Observación 1.1.1

Una álgebra es un anillo al que pertenece el conjunto total X.

Observación 1.1.2

1. *Si $\mathcal{A}$ es un anillo, entonces tomando $A, B \in \mathcal{A}$, tenemos que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$. Es decir, los anillos también son cerrados por intersección.*
2. *Sea $\mathcal{A}$ anillo y $E \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\} = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$ es una álgebra de conjuntos en E.*

Definición 1.1.4 [Espacio medible]

Dada una σ-algebra Σ de un conjunto X o también expresado como un par (X, Σ) se llama espacio *medible. A los conjuntos de Σ se les llama conjuntos medibles.*

Definición 1.1.5 [Función medible]

Dados dos espacios medibles (X, Σ_X) y (Y, Σ_Y), y una función $f : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$, se dce que es medible si $\forall E \in \Sigma_Y \, f^{-1}(E) \in \Sigma_X$.

Lema 1.1.1

Sean un conjunto X, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ y una familia $\mathfrak{U}$ de σ-algebras/álgebras/anillos en X que contienen a $\mathcal{C}$. Entonces $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{U}} \mathcal{A}$ es una σ-álgebra/álgebra/anillo que llamamos ***σ-álgebra/álgebra/anillo generada por*** *$\mathcal{C}$ siendo la menor σ-álgebra/álgebra/anillo que contiene a $\mathcal{C}$.*

1.2 Contenidos y medidas

Definición 1.2.1 [Contenido/Pre-medida]

Sea X un conjunto y Σ un anillo en X. Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es un contenido en Σ si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es aditivo, esto es que, dada una sucesión de finita de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

Definición 1.2.2 [Medida]

Sea X un conjunto y Σ-algebra en X. Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es un contenido en Σ si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es σ-aditivo, esto es que, dada una sucesión numerable de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$ entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Definición 1.2.3 [Espacio de medida]

Dado un conjunto X, una σ-álgebra Σ en X y una medida $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, se llama espacio de medida a la terna (X, Σ, μ).

Observación 1.2.1

En el caso particualar en el que $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una ***medida de probabilidad*** *para cada $E \in \Sigma$ y el espacio de medida se llama* ***espacio de probabilidad****.*

Definición 1.2.4 [Espacio de medida finita]

SE dice que (X, Σ, μ) es un espacio de medida finita si $\mu(X) < +\infty$.

Definición 1.2.5 [Espacio de medida σ-finita]

SE dice que (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita si existe una sucesión numerable de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.2.2

Las definiciones anteriores se pueden aplicar de la misma manera a los contenidos.

Definición 1.2.6 [σ-álgebra de Borel]

Teniendo en cuenta la definición formal de σ-álgebra, tenemos que X es un espacio topológico con topología τ se dice que Σ es una ***σ-álgebra de Borel*** *con respecto τ y que μ es una medida de τ-Borel o una medida de Borel con respecto a τ, si $\tau \subset \Sigma$.*
Decimos que la menor σ-álgebra que contiene a τ es la σ-álgebra de Borel de τ y la denotamos por $\mathcal{B}(\tau)$.
En el caso concreto en el que el espacio topológico sea $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, denotaremos a esta σ-álgebra de Borel por $\mathcal{B}^n$.

Definición 1.2.7 [Función de Borel]

Una función $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ definida entre dos espacios topológicos se dice que es una ***función de Borel*** *si $f : (X, \mathcal{B}(\tau_1)) \to (Y, \mathcal{B}(\tau_2))$ es medible.*

Definición 1.2.8 [Medida de Borel regular]

Dada una medida de Borel μ en un espacio topológico (X, τ), se dice que es una ***medida de Borel regular*** *si es regular exterior, es decir, si cumple dos condiciones:*

1. *Regularidad exterior:*

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = inf\{\mu(U) : A \subset G, G \in \Sigma \text{ abierto}\}$$

2. *Regularidad interior:*

$$\forall A \in \Sigma \mu(A) = sup\{\mu(K) : F \subset A, F \in \Sigma \text{ compacto}\}$$

Definición 1.2.9 [Casi todo punto]

Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y $E \in \Sigma$ diremos que una propiedad P se cumple en μ-casi todo punto de E si existe $N \in \Sigma$, $N \subset E$ tal que $\mu(N) = 0$ y P se cumple en E/N.

Definición 1.2.10 [Intervalo]

Llamamos intervalos de $\mathbb{R}$ a los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (contamos al vacío como intervalo). Decimos que $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo si $I = \prod_{i=1}^n I_i$ donde cada I_i es un intervalo de $\mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$.

Observación 1.2.3

Como la intersección de intervalos en $\mathbb{R}$ es un intervalo (la intersección de conexos es conexa), y dados dos intervalos $\prod_{i=1}^n I_i$ y $\prod_{i=1}^n J_i$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\left(\prod_{i=1}^n I_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^n J_i\right) = \prod_{i=1}^n (I_i \cap J_i)$$

es decir, la intersección de dos intervalos en $\mathbb{R}^n$ es un intervalo en $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.2.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y μ un contenido (medida) en $\mathcal{A}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Monotonía y subaditividad:*
$$\mu(A) \leq \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$$
Si además, $\mu(B) < +\infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. *Subaditividad de sucesión de conjuntos: Dado una sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}$ entonces:*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k \leq \sum_{k=1}^n \mu(E_k)\right)$$

3. *Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

4. *σ-subaditividad de medidas: Sea μ una medida, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

5. *σ-superadtividad de medidas: Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia disjunta dos a dos y además $\cup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)$$

Proposición 1.2.1

Sea $\mathcal{A}$ un anillo en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ un contenido. Entonces son equivalentes las siguintes condiciones:

1. *μ es σ-aditiva, esto es: Dado una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) < +\infty$ entonces:*
$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$
2. *Continuidad en el 0: Dada una sucesión de elementos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ y $\mu(A_1) < +\infty$, entonces:*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$
3. *μ es continua por debajo: Dada una sucesión de elementos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < +\infty$, entonces:*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$
4. *μ es σ-subaditiva: Dada una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces:*
$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Demostración. (1) $\implies$ (2): Supongamos que μ satisface (1) y que una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ decreciente tal que $\mu(A_1) < +\infty$ y $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Definimos $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, tales que pertenecen a $\mathcal{A}$, su unión es A_1 y son disjuntos dos a dos. Por lo tanto la sucesiñon dada por $s_n = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$ es monotona creciente y esta limitada por $\mu(A_1) < \infty$, por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ converge.
Finalmente, tenemos que la cola de la serie
$$\sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$
Pero esta suma es igual a $\mu(A_N)$, ya que $\cup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$. Por lo tanto llegamos a la condición (2).
(2) $\implies$ (3):
Tomemos la sucesión de conjuntos $A_n = B \setminus B_n$ que satisface las hipótesis de (2) y por lo tanto
$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$
por lo que
$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$
(3) $\implies$ (4):
Tomando $B_n 0 \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ que satisface las hipótesis de (3) y
$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$
(4) $\implies$ (1):
Basta aplicar el lema anterior para la demostración. ☐

Lema 1.2.2

Sea $\mathcal{A}$ un anillo en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$. Si μ es aditiva y σ-subaditiva, entonces es σ-aditiva.

Demostración. Se una sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tales que $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) < +\infty$. Entonces, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \leq \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Por lo tanto, $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. □

1.3 Medidas exteriores

Definición 1.3.1 [Medida exterior]

Sea X un conjunto. Dada una función $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ es una medida eterior si

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ *si* $A \subset B \subset X$
3. μ *es σ-subaditiva, es decir, dada una sucesión de conjuntos* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ *se cumple que:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definición 1.3.2 [Diferencia de dos conjuntos]

Dado un conjunto X y $A, B \subset X$ llamamos ***diferencia*** *de A y B al conjunto $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.*

Definición 1.3.3 [Medida exterior a partir de un contenido]

Sea X un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$. Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ asociada a μ tal que $\forall A \subset X$:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}$$

Definición 1.3.4 [Conjunto medible]

*Sea A un subconjunto de X y μ^* una medida exterior en X. Se dice que A es μ-**medible** si:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu^*(A\Delta A_\epsilon) < \epsilon$$

Al conjunto de todos los conjuntos μ-medibles se les denota por $\mathcal{A}_\mu$.

Lema 1.3.1 [Propiedades de una medida exterior (asociada a un contenido])

Sea X un conjunto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}, B, C \subset X$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$-contenido, y μ^* la medida exterior asociada. Entonces:

1. $\mu^*(B) \leq \mu^*(C)$ *si* $B \subset C$
2. μ^* *es σ-subaditiva, es decir,* $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
3. $|\mu^*(B) - \mu^*(C)| \leq \mu^*(B \Delta C)$
4. *Si $\mathcal{A}$ es un anillo y μ es un contenido, entonces $\mu^*(\emptyset) = 0$ y equivalentemente, μ^* es una medida exterior en X.*

Demostración. 1. μ^* es por definición monótona creciente, esto es, si $B \subset C \implies \mu^*(B) \leq \mu^*(C)$. Esto se debe a que cualquier recubrimiento numerable de C es también un recubrimiento numerable de B.

2. Sea una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A = \cup A_n$. Dado un $\epsilon > 0$, existen dos casos posibles,

   (a) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^*(A_k) = +\infty$. Entonces, como $A_k \subset A$ se tiene que $\mu^*(A) = \infty$ y por tanto no hay nada que demostrar.

   (b) Si se cumple que $\forall n \in \mathbb{N} \mu^*(A_n) < \infty$ entonces, para cada una de las n existe un recubrimiento $\{B_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ y por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

   Por lo tanto se tiene que $\cup A_n \subset \cup \cup B_{n,k}$ y en consecuencia se tiene que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right) + \epsilon$$

   Como ϵ es arbitrario, tenemos el resultado.

3. Supongamos que $B \subset C \cup (B \Delta C)$, por lo que, por la subaditividad de μ^* obtenemos que:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(C) + \mu^*(B \Delta C) \iff \mu^*(B) - \mu^*(C) \leq \mu^*(B \Delta C)$$

   Intercambiando B y C obtenemos la otra desigualdad.

4. Basta tomar $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\emptyset\}$ como recubrimiento de $\emptyset$ y usar que como μ es un contenido, entonces $\mu(\emptyset) = 0$. El resto de propiedades ya han sido demostradas, dada cualquier funcion μ y en particular si μ es un contenido.

□

Teorema 1.3.1

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ una álgebra en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ un contenido. Entonces:

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu = \{E \in X : \forall \epsilon > 0 \exists A_\epsilon : \mu^*(E \Delta A_\epsilon) < \epsilon\}$ *y la medida exterior μ^* coincide con μ en $\mathcal{A}$.*
2. $\mathcal{A}_\mu$ *es una σ-álgebra, y la restricción de μ^* a $\mathcal{A}_\mu$ es σ-aditiva*

3. *La función μ^* es la única extensión σ-aditiva y positiva de μ en σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y también es la única extensión σ-aditiva y positiva de μ a $\mathcal{A}_\mu$.*

Demostración. □

Definición 1.3.5 [Pre-medida]

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ un contenido. Se dice que μ es una pre-medida si es σ-aditiva.

Teorema 1.3.2 [Extension de un contenido a una medida]

Sea X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una pre-medida sobre un anillo σ-finito (dada $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ monótona creciente y con $\mu(X_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$).

Para cada n denotaremos $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}_n}$ donde $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_n\}$ (álgebra de conjuntos en X_n) y denotaremos por Σ_n la σ-álgebra sobre A sobre la cual μ^* es una medida exterior basada en μ. Definimos:

$$\Sigma = \{A \subset X : A \cap X_n \in \Sigma_n \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \overline{\mu}(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cap X_n) : A \in \Sigma$$

Entonces Σ es una σ-álgebra que no depende de los X_n escogidos, y $\overline{\mu}$ es la única medida en Σ tal que $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Demostración. Cada una de las $\mu_n : A \to [0, \infty]$ es un contenido σ-aditivo y finito, por lo que por el teorema anterior podemos obtener las σ-algebras Σ_n y las medidas $\mu_n^*|_{\Sigma_n}$.
Sea A_k tal que $A_k \cap X_n \in \Sigma_n$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Por ser Σ_n una σ-álgebra, tenemos que $(\cup_{k=1}^\infty A_k) \cap X_n = \cup_{k=1}^\infty (A_k \cap X_n) \in \Sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $\cup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$. □

Definición 1.3.6 [Clase compacta]

*Sea una familia $\mathcal{K}$ de subconjuntos de un conjunto X, se dice que es una **clase compacta** si:*

$$\forall \{K\}_{n\in\mathbb{N}} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset \exists N \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$$

Ejemplo

Una familia arbitraria de conjuntos compactos de un espacio topologico es una clase compacta. En efecto parar demostrar el contrarecíproco tomemos una sucesion de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\cap_{n=1}^N K_n = \emptyset \forall N \in \mathbb{N}$. Definimos $\overline{K_n} = \cup_{k=1}^n K_k$. Entonces $\{\overline{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion encadenadad de conjuntos compactos y no vacíos, por lo que el teorema d ela interseccion compacta de Cantor, $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n} \neq \emptyset$ y como consecuencia $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Teorema 1.3.3

Sea μ un contenido sobre $\mathcal{A}$ un anillo $\mathcal{A}$. Supongamos que existe una clase compacta $\mathcal{K}$ que aproxima a μ en el sentido de que: Para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < +\infty$ y para todo $\epsilon > 0$ existen $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ y $A_\epsilon \in \mathcal{A}$

tales que

$$A_\epsilon \subset K_\epsilon \subset A \quad y \quad \mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$$

Entonces, μ es σ-aditiva. En particular esto es cierto si la la clase compacta $\mathcal{K}$ está contenida en $\mathcal{A}$ y para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$$

Demostración. □

Ejemplo

Consideremos los anillos

Ejemplo

Consideremos el anillo $\mathcal{J}_0$ de uniones finitas de intervalos limitados de la forma $[a, b)$ en $\mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion creciente y continua por la izquierda, y sea $v_g[a, b) = g(b) - g(a)$, con v_g un contenido sobre $\mathcal{J}_0$. Entonces, por el teorema anterior, llamese μ_g a la medida generada por el Teorema de la extensiones de medidas σ-finitas, se llama **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a g.

Definición 1.3.7 [Medida completa]

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una medida. μ se dice completa si dado $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$ entonces para cualquier $A \subset E \in \mathcal{A}$ A es medible y $\mu(A) = 0$

Teorema 1.3.4

Las medidas dadas por el Teorema de Extensión de Medidas σ-finitas son completas.

Teorema 1.3.5

Son equivalentes:

1. *A es μ-medible*
2. *$\forall E \in \mathcal{A} : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ (Condición de Carathéodory)*
3. *$\forall \epsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \mu^*(A \Delta B) < \epsilon$ (Condición de aproximación)*

1.4 Propiedades de la medida de Lebesgue

1.4.1 Medida de Lebesgue y topología euclidiana

Definición 1.4.1 [Contenido de Jordan]

Llamamos ***contenido de Jordan*** *o* ***contenido de Peano-Jordan*** *a la función $\mu : \mathcal{J} \to [0, +\infty]$*

definida como:

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

donde, por simplicidad, entendemos que $0\cdot(+\infty)=0$. Para calcular el contenido de Jordan de un conjunto cualquiera $\mathcal{J}$, como es una unión finita de intervalos disjuntos de la forma $\prod_{i=1}^{b}[a_n,b_n)$, basta con sumar los contenidos de todos los intervalos que lo componen.

Definición 1.4.2 [Medida de Lebesgue]

Sea $\mathcal{J}_0$ el anillo de uniones finitas disjuntas de rectángulos limitados *de la forma*

$$\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k)\subset\mathbb{R}^n,$$

y sea μ el contenido de Jordan *definido sobre $\mathcal{J}_0$.*

Aplicando el Teorema de Extensión de Medidas σ-finitas *(por ejemplo, tomando la secuencia $X_k=[-k,k]^n$ para $k\in\mathbb{N}$), se obtiene una única medida*

$$\lambda_n:\mathcal{L}_n\to[0,\infty]$$

*llamada **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$, definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{L}_n$ de* conjuntos Lebesgue medibles, *que extiende el contenido de Jordan y es σ-aditiva.*

Además, para cualquier subconjunto $X\in\mathcal{L}_n$, podemos definir la medida restringida

$$\lambda_X(A):=\lambda_n(A\cap X),\quad\forall A\in\mathcal{L}_n.$$

Definición 1.4.3 [Medida exterior de Lebesgue]

---

*Siguiendo el teorema anterior de obtención de una medida exterior a partir de un contenido sobre un anillo, en este caso el contenido de Jordan sobre el anillo $\mathcal{J}_0$ de uniones finitas de intervalos limitados de la forma $[a,b)$ en $\mathbb{R}$, obtenemos la **medida exterior de Lebesgue** $\lambda^*:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to[0,+\infty]$ definida como:*

$$\lambda^*(A)=\inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n):\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{J}_0,A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right\}$$

Definición 1.4.4 [Medida de Lebesgue-Stieltjes]

---

*Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función creciente y continua por la izquierda. La **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a g es la medida de Lebesgue μ_g generada por el contenido definido en el anillo de uniones finitas de intervalos limitados de la forma $[a,b)$ como:*

$$v_g[a,b)=g(b)-g(a)$$

Lema 1.4.1

Todo intervalo $I=\prod_{k=1}^{n}I_k\in\mathbb{R}^n$ es Lebesgue-medible. Si I es degenerado, entonces $\lambda_n(I)=0$. Si no, *su medida coincide con el producto de las longitudes de sus aristas, es decir:*

$$\lambda_n(I) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

Demostración. Realicemos una distinción de casos:

1. Si I es degenerado, quiere decir que está contenido en un hiperplano paralelo a los ejes de coordenadas de $\mathbb{R}^n$, por lo que I es medible y $\lambda_n(I) = 0$.

2. Supongamos que I es no-degenerado. Si $I = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^n$ el resultado es evidente dada la definición de medida de lebesgue.

3. Consideremos ahora cualquier tipo de intervalo de la forma $I = \prod_{k=1}^{n} I_k \subset \mathbb{R}^n$. Definamos $a_k = \inf I_k, b_k = \sup I_k$. Observese que ∂I está contenida en la unión de $2n$ hiperplanos por lo que ∂I es medible (por ser la medida de Lebesgue completa) y $\lambda_n(\partial I) = 0$. Ahora definamos $\mathcal{J} = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k)$ tenemos que $\mathcal{J}$ es medible y ∂I es medible por lo tanto $I = (I \setminus \mathcal{J}) \cup (\mathcal{J} \setminus (\mathcal{J} \setminus I))$ es medible ya que $I \setminus \mathcal{J}, \mathcal{J} \setminus I \subset \partial I$. luego son medibles y se cumple que

$$\lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) = \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = 0$$

y además,

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I \setminus \mathcal{J}) + \lambda_n(\mathcal{J}) - \lambda_n(\mathcal{J} \setminus I) = \lambda_n(\mathcal{J}) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

□

Proposición 1.4.1

Todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es medible-Lebesgue. Es decir, λ_n es una medida de Borel con respecto la topología usual, por tanto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$.

Demostración. Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es una unión numerable de intervalos abiertos, y por tanto medible. □

Proposición 1.4.2

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es regula, es decir, para todo $A \in \mathcal{L}_n$ se cumple que:

1. *Regularidad exterior:*
$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(U) : U \supset A, U \ \textit{abierto}\}$$

2. *Regularidad interior:*

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K subset A, K \ \textit{compacto}\}$$

Demostración. □

Definición 1.4.5 [Conjunto G_δ]

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto G_δ si existe una sucesión numerable de conjuntos abiertos $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

tal que:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$$

Definición 1.4.6 [Conjunto F_σ]

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto F_σ si existe una sucesión numerable de conjuntos cerrados $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Observación 1.4.1

Como consecuencia del resultado anterior, concluimos que para todo conjunto Lebesgue medible $A \in \mathcal{L}_n$ existe un conjunto $U \in G_\delta$ y un conjunto $F \in F_\sigma$ tales que

$$F \subset A \subset U \quad y \quad \lambda_n(F) = \lambda_n(U) = \lambda_n(A)$$

1.4.2 Transformaciones de conjuntos medibles

Definición 1.4.7 [Aplicación lipschitziana]

Sea X, Y dos espacios métricos con métricas d_X, d_Y respectivamente. Una función $f : X \to Y$ es ***lipschitziana*** *si existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

Teorema 1.4.1

Sea $F : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$ una aplicación lipschitziana de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Entonces para todo conjunto Lebesgue medible $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $F(A)$ también es Lebesgue medible y $\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(F(A))$

Demostración. Comencemos observando que si tenemos un hipercubo $I = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^n$ de arista r y de centro y, y $x \in I$ entonces

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \leq L\frac{r}{2}$$

por lo que si $F(y) = (z_1, \ldots, z_n)$ entonces $F(x) \in \prod_{k=1}^{n}[z_k - L\frac{r}{2}, z_k + L\frac{r}{2})$ y por lo tanto

$$F(I) = F(\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k)) \subset \prod_{k=1}^{n}[z_k - L\frac{r}{2}, z_k + L\frac{r}{2})$$

lo que implica que $\lambda_n(F(I)) \leq (Lr)^n = L^n\lambda_n(I)$.
Ahora, lo demostraremos para conjuntos medibles más generales. Por la regularidad interior de $\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$ podemos definir el conjunto

$$B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

Entonces por construcción tenemos que $\lambda_n(B) = \lambda_n(A) - \lim_{j\to\infty}\lambda_n(K_j) = 0$, por tanto podemos deducir que

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup B$$

donde cada K_j se compacto y cada B es un conjunto de medida nula. Como F es continua

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(K_j)$$

y también es Borel-medible, por ser unión numerable de compactos. Así, se llega a demostrar que $F(B)$ también es medible. Sea $\varepsilon > 0$, podemos cubrir B con una familia numerable de hipercubos de la formal

$$I_j = \prod_{k=1}^{n} [a_{j,k}, b_{j,k})$$

de arista r_j y centro $y_j = (y_{j,1}, \ldots, y_{j,n})$ tales que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_j) < \varepsilon$. TEnemos entones que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(F(I_j)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L^n r_j^n = L^n \sum_{j=1}^{\infty} r_j^n = L^n \lambda_n(I_j) < L^n \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, se dedice que $F(B)$ tiene medida nula, y como la desigualdad se da para cualquier hipercubo, se tiene que

$$\lambda_n(F(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$$

$\square$

Corolario 1.4.1

Sea $F : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$ una aplicación bilipschitziana (función lipschitziana con inversa lipschitziana) de constante L_2 y F^{-1} con constante L_1. Entonces para todo conjunto Lebesgue medible $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $F(A)$ también es Lebesgue medible y

$$L_1^n \lambda_n(A) \leq \lambda_n(F(A)) \leq L_2^n \lambda_n(A)$$

Corolario 1.4.2

Sea $F : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$ una isometría para todo conjunto Lebesgue medible $A \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $F(A)$ también es Lebesgue medible y $\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(A)$

Teorema 1.4.2

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue de medida finita. Entonces

1. $\lambda_n(A + h) = \lambda_n(A) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
2. $\lambda_n(U(A)) = \lambda_n(A)$ *para todo operador lineal ortogonal* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
3. $\lambda_n(cA) = |c|^n \lambda_n(A) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Demostración. $\square$