LÓGICA PROPOSICIONAL

Objetivos de la Unidad:

Razonar en forma válida acerca sobre aspectos trascendentes y particularmente abstractos. Incorporar al razonamiento símbolos y conectivos que permitan descartar ambigüedades y aporten economía de pensamiento.

Contenidos

Proposiciones, Conjunción, Disyunción, Negación, Traducción y Combinación de Conectivos, Tablas de Verdad.

Al finalizar esta unidad, el alumno estará en condiciones de:

- Hacer un reconocimiento de proposiciones lógicas.
- Uso de notación simbólica que permita razonar con claridad.
- Pasaje a lenguaje simbólico. expresiones de lenguaje coloquial.
- Operaciones con proposiciones lógicas.
- Obtención de la validez de un razonamiento.

¿Qué es la lógica simbólica?

Introducción :

Ante la necesidad de razonar en forma válida acerca de casos trascendentes, es necesario que exista absoluta claridad y distinción en todo lo concerniente al razonamiento deductivo válido, esto es: significado de los términos usuales, uso de proposiciones, definiciones, teoremas, etc. Todo ello obliga a una gran simplificación y a la introducción de un simbolismo adecuado e inequívoco, que permita razonar válidamente mediante reglas fijadas con claridad, aunque sean arbitrarias.
Para esto podemos valernos de la lógica basada en el concepto de "proposición", tomando como base las siguientes oraciones:

1.- ¿Quién viene?
2.- Pase al frente
3.- El aire es pesado
4.- 3 es un número par
5.- Juan conoce a Pedro
6.- Pedro es conocido por Juan

Como se puede observar, en estas seis oraciones diferentes aparece una pregunta, una orden y cuatro oraciones declarativas,(aunque realmente son tres, ya que la 5 y 6 corresponden a la misma expresión).
De las dos primeras no se puede decir que sean verdaderas o falsas; en cambio en las cuatro siguientes, tiene sentido decir si son verdaderas (V) o falsas (F). A estas se les da el nombre de "proposiciones".

Proposiciones

"Una proposición es una oración declarativa, es decir, susceptible de ser verdadera o falsa".
La verdad o falsedad de una proposición corresponde a su "valor de verdad". Las proposiciones se habitualmente se simbolizan con las letras minúsculas p, q, r, etc.

Algunas proposiciones se pueden componer de dos o más proposiciones simples, lo que obviamente constituye un "proposición compuesta". Los elementos que relacionan una proposición con otra para formar proposiciones compuestas son llamados "conectivos lógicos" y sus características se presentan en el siguiente cuadro:

Símbolo	Operación asociada	Significado
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	"y", "pero", "sin embargo", "aunque"
$\vee$	Disyunción o suma lógica	"o" (en sentido incluyente)
$\underline{\vee}$	Diferencia simétrica	"o" (en sentido excluyente)
$\sim$	Negación	"no", "no es cierto que", "es falso que"
$\Rightarrow$	Implicación material	"implica", "si…entonces..", "luego"
$\Leftrightarrow$	Equivalencia	"es equivalente a", "…si y sólo si…"

<u>EJEMPLO 1 :</u>

- Neil Armstrong caminó sobre la luna.
- 3 + 2 7.

- El Pato Donald es presidente.

Todas estas oraciones son proposiciones, ya que son verdaderas o falsas. Por otro lado, consideremos las expresiones:

- ¡Márchate!
- 3 + x = 7.
- ¿Qué estás haciendo?

Estas no son proposiciones en virtud de la definición dada, ya que no se pueden clasificar satisfactoriamente como verdaderas o falsas.
Pueden surgir dificultades al simplificar argumentos debido a su extensión, a la imprecisión de las palabras que se utilizan, al estilo literario, o al posible impacto emocional de las palabras de que constan. Consideremos los dos argumentos siguientes.

1.-Si George Washingtong fue asesinado, está muerto.
    Por lo tanto,si está muerto, fue asesinado.
2.- Si consumes heroína, primeramente consumiste marihuana.
    Por lo tanto, si primero consumiste marihuana, consumes heroína.

Lógicamente, estos dos argumentos son exactamente iguales, y ambos son formas *no válidas* de razonamiento. Casi todo mundo admitiría que el primer argumento es absurdo, pero muchos aceptan el segundo argumento debido al aspecto emocional de las palabras empleadas en él.

Para evitar estas dificultades y ayudar a la simplificación de los argumentos lógicos complicados, puede establecerse el lenguaje simbólico artificial a que nos referimos anteriormente. El lenguaje que se inventa aquí es necesariamente más simple que cualquier lenguaje natural; es una especie de taquigrafía notacional. Se denotan las *proposiciones simples* con literales, tales como *p, q, r, s,...,* y *luego se definen ciertos conectivos. Nuestra meta, en la medida en que sea posible, consiste en:*

1. traducir las proposiciones del lenguaje ordinario a la forma simbólica
2. simplificar la forma simbólica.
3. traducir la forma simplificada de nuevo a proposiciones del lenguaje ordinario.

Para los fines de esta unidad, se supondrá que la traducción en un sentido y en otro entre el lenguaje ordinario y el simbólico se puede efectuar de manera sencilla. En realidad, no siempre sucede así, desafortunadamente. El lenguaje ordinario puede tener relaciones sutiles que sobrepasan el significado exacto de las palabras de una oración simple. Se deben tener presentes las interpretaciones que se dan a los símbolos de un problema particular. Al traducir, debemos preguntarnos qué significa la oración en el lenguaje natural, y luego se debe tratar de encontrar una proposición en lenguaje simbólico que tenga, hasta donde sea posible, el mismo significado.

Se puede evitar el problema de la extensión considerando solamente proposiciones simples unidas por ciertos conectivos bien definidos, tales como *no,* y, *o, ni... ni, si... entonces, a menos que, debido a que,* y así sucesivamente.

Una ***proposición compuesta*** se forma combinando proposiciones simples con operadores, o conectivos. De la definición básica de proposición, vemos que el *valor de verdad* de cualquier proposición puede ser o verdadero (T) o falso (F).

***VALOR D:* El valor de verdad de una proposición simple puede ser verdadero (T) o bien falso (F).**

VERDAD

El valor de verdad de una proposición compuesta es verdadero o *falso y depende* sólo de los valores de verdad de sus partes componentes simples. Se determina empleando la regla de conexión de dichas partes por medio de operadores bien definidos, tales como *y, o, no, si... entonces, ni... ni, a menos que, y debido a que*.

No podemos suponer que se conocen los significados de los conectivos *y*, *o, no,* y así sucesivamente, aunque parecen obvios y sencillos. La fuerza de la lógica radica en que no deja ningún significado al azar o a la interpretación individual. No obstante, al definir los valores de verdad correspondientes a dichos conectivos, trataremos de ajustarnos al uso común.

Conjunción

Si p y q representan dos proposiciones simples, entonces la proposición compuesta "p y q" utiliza el operador llamado conjunción. La palabra *y* se simboliza con **^**

Por ejemplo, la proposición:
Tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo y tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.
es una proposición compuesta. ¿Cuándo será verdadera esta proposición? Existen cuatro posibilidades concretas:

1. Tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo. Tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.
2. Tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo. No tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.
3. No tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo. Tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.
4. No tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo. No tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.

Representemos con *p* y *q* las proposiciones simples, de manera que:
p: Tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo.
q: Tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.

Estas cuatro posibilidades se pueden resumir como sigue:

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

Vemos que la única ocasión en que la proposición original.

Tengo un billete de 50 pesos en mi bolsillo, y tengo un billete de 100 pesos en mi bolsillo.

resulta verdadera es cuando *p* y *q* son ambas verdaderas; de lo contrario, resulta falsa Así que definimos *p***^** *q* según la Tabla 1.

Tabla 1

DEFINICIÓN DE CONJUNCIÓN

p q	***p ^ q***
T T	**T**
T F	**F**
F T	**F**
F F	**F**

Es importante notar que no se requiere que las proposiciones *p* y *q* estén relacionadas. Por ejemplo,

Los peces nadan y Neil Armstrong caminó sobre la luna es una proposición compuesta verdadera.

Disyunción

El operador *o,* denotado por V, se llama disyunción. El significado de esta palabra es ambiguo cuando se la utiliza en el lenguaje cotidiano, como puede verse considerando los ejemplos siguientes. Sean

p: Juan tiene un billete de 50 pesos en su bolsillo.
q: Juan tiene un billete de 100 pesos en su bolsillo.
r: Juan está en Rusia.
s: Juan está en España.

Ahora Juan formula las dos proposiciones:
I. Tengo un billete de 50 pesos o uno de 100 en mi bolsillo.
II. Estoy en Rusia o en España.

Consideraremos la intención de estas proposiciones.

En la proposición I, Juan parece afirmar que por lo menos una de las proposiciones es verdadera, pero quizás ambas sean verdaderas. Por otro lado, la intención de la proposición II es que una y sólo una de las proposiciones es verdadera. Juan no tendría la intención de decir que se encuentra a la vez en Rusia y en España.

La proposición I ilustra uno de los usos del conectivo **o** que se llama *o incluyente* y se denota por **V**. Si *p* y *q* son dos proposiciones, a ***p V q*** se le llama ***disyunción;*** y para determinar su veracidad o falsedad, debe considerarse la veracidad o falsedad de ***p y q***. Por lo tanto, consideremos de nuevo las cuatro posibilidades para determinar si Juan dijo la verdad en su afirmación.

Tengo un billete de 50 pesos o uno de 100 en mi bolsillo

- *Caso 1 (p* es T; q es T)

Juan tiene un billete de 50 pesos en su bolsillo. Juan tiene un billete de 100 pesos en su bolsillo.

En estas condiciones no diríamos que Juan es mentiroso, así que decimos que la proposición compuesta también es verdadera.

- *Caso 2* (p es T; q es F):
  Juan tiene un billete de 50 pesos en su bolsillo. Juan no tiene un billete de 100 pesos en su bolsillo.

- *Caso 3* (p es F; q es T):
  Juan no tiene un billete de 50 pesos en su bolsillo. Juan tiene un billete de 100 pesos en su bolsillo.

En los casos 2 y 3 no diríamos que Juan está mintiendo, así que se expresa que la proposición compuesta también es verdadera.

- *Caso 4* (p es F; q es F):
  Juan no tiene un billete de 50 pesos en su bolsillo. Juan no tiene un billete de 100 pesos en su bolsillo.

En este caso diríamos que Juan ha mentido y decimos que su afirmación es falsa.
Así que definimos *p* V *q* según la tabla 2.

Tabla 2
DEFINICIÓN DE DISYUNCIÓN

p q	**p Vq**
T T	**T**
T F	**T**
F T	**T**
F F	**F**

Una disyunción es falsa sólo si ambas de sus proposiciones componentes son falsas.

La proposición II ilustra uno de los usos del conectivo *o* que se llama *o excluyente.*

Consideremos ahora si Juan dice la verdad al formular la aserción : ***Estoy en Rusia o en España.***

Obviamente no es posible que Juan se encuentre en ambos lugares al mismo tiempo. Si Juan está en Rusia, entonces no puede estar en España; si está en España, no puede estar en Rusia. Por lo tanto la intención de la proposición II es
Estoy o en Rusia o en España y la proposición es verdadera si una y sólo una de las componentes separadas es verdadera. La tabla de verdad en este caso es la siguiente:

r e	r o e
T T	F
T F	T
F T	T
F F	F

En esta unidad utilizaremos la disyunción indicada con la ***o incluyente***. Si la intención de la proposición requiere la ***o excluyente***, se enunciará la proposición empleando el conectivo ***o…o***. Recuérdese: ***la o incluyente*** significa ***cualquiera de las dos o ambas, mientras que la o excluyente*** **significa** ***cualquiera de las dos pero no*** **ambas**.

2.5 Negación

La negativa de cualquier proposición *p* se llama *negación* y se simboliza mediante ~p. La Tabla 3 proporciona una definición clara de la negación.

Tabla 3
DEFINICIÓN DE LA NEGACIÓN

p	~p
T	F
F	T

EJEMPLO 2:
Si *t:* Octavio está diciendo la verdad, entonces
~ *t:* Octavio no está diciendo la verdad.

También se puede traducir ~ *t* como "no ocurre que Octavio está diciendo la verdad", o bien, "no es cierto que Octavio está diciendo la verdad".

Cualquier proposición puede ser negada, pero se requiere tener cuidado con la manera en que se forme la negación de una proposición compuesta. La negación de:

Tengo un billete de 50 pesos y uno de 100 en mi bolsillo.
se simboliza mediante ~ (*p* ∧ *q)* y se traduce como

No es cierto que tengo un billete de 50 pesos y uno de 100 en mi bolsillo.

La negación no se forma denegando cada una de las proposiciones simples. Al negar una proposición, no se debe alterar dicha proposición. Por ejemplo, sean

b: El carro de Juan es azul.
c: El carro de Juan es rojo.

La proposición *c* no es la negación de la proposición *b,* aunque no pueda ser que ambas sean verdaderas. La negación de *b* es
~ *b:* El carro de Juan no es azul.
y la negación de *c* es la proposición
~ *c:* El carro de Juan no es rojo.
Se debe tener cuidado al negar proposiciones que contienen las palabras *todos*, *ninguno*, *o algunos*.

EJEMPLO 3 Escribir la negación de:

Todos los estudiantes tienen lápices.
Solución
Veamos si son respuestas correctas las proposiciones "Ningún estudiante tiene lápices", o bien "Todos los estudiantes carecen de lápices". Recuérdese que si una proposición es falsa, entonces su negación debe ser verdadera. La negación correcta es:

No todos los estudiantes tienen lápices.
o bien

Por lo menos un estudiante no tiene lápiz.
o bien
Algunos estudiantes no tienen lápices.

En matemáticas, la palabra *algunos* se emplea en el sentido de "por lo menos unos". La Tabla 4 proporciona algunas de las negaciones comunes.

Tabla 4
NEGACIÓN DE TODOS, ALGUNOS y NINGUNO

Proposición	Negación
Todos	Algunos...no
Algunos	Ningún
Algunos...no	Todos
Ningún	Algunos

EJEMPLO 4 Escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes
a. Todas las personas tienen compasión.
b. Algunos animales son sucios.
c. Algunos estudiantes no llevan el curso de matemáticas I.
d. Ningún estudiante es entusiasta.

Solución
a. Algunas personas no tienen compasión.
b. Ningún animal es sucio.

c. Todos los estudiantes llevan el curso de matemáticas I.
d. Algunos estudiantes son entusiastas.
En el siguiente capítulo consideraremos la negación de proposiciones compuestas.

Traducción y combinación de conectivos

El trabajar con los argumentos lógicos requiere la aptitud de traducirlos del lenguaje ordinario al simbólico y del simbólico de nuevo al lenguaje ordinario. Por ejemplo, la proposición

Bertha y Claudia son atractivas.
se puede traducir como sigue. Sean
b: Bertha es atractiva.
c: Claudia es atractiva.
Entonces tenemos que
b L c Bertha es atractiva y Claudia es atractiva. así que *b L c* es la proposición simbólica.

EJEMPLO 5 Traducir la proposición compuesta

O Bertha es atractiva o Claudia es atractiva a la forma simbólica.

Solución
Vemos que el conectivo *o... o* se traduce como la *o excluyente.* La oración se puede reescribir como *Bertha es atractiva o Claudia es atractiva, pero no ambas.*
La proposición se traduce en la forma

$b \vee c) \wedge [\sim(b \wedge c)]$.

Obsérvese que en este ejemplo se emplean los paréntesis exactamente como en álgebra: para indicar el orden de las operaciones. Por consiguiente, *(b ∧ c)* significa la negación de la proposición *b* y *c.*

No solamente se requiere traducir del lenguaje ordinario a los símbolos lógicos, sino que también de los símbolos lógicos al lenguaje ordinario.

EJEMPLO 6 Supongamos que:
p: Como espinacas.
q: Estoy fuerte.
Se desea traducir las siguientes proposiciones al lenguaje ordinario:

a. $p \wedge q$
b. $\sim p$
c. $\sim (p \vee p)$
d. $p \vee q$.
e. $(\sim q)$
f. $p \wedge q$

Solución Traducciones serían las siguientes:
a. Como espinacas y estoy fuerte.
b. No como espinacas.
c. No es cierto que como espinacas o que estoy fuerte.
d. No como espinacas, o estoy fuerte.
e. No es cierto que no estoy fuerte [lo que significa, desde luego, que estoy fuerte].
f. Como espinacas y no estoy fuerte.