Universidad del Chubut

Matemática Aplicada I / Docente: Escobar Javier

Logaritmo revisión

Dado un número real, la función logaritmo le asigna un exponente n (exponente) a la que un número fijo b (base) se ha de elevar para obtener dicho argumento. Es la función inversa de b a la potencia n. esta función se escribe como: n=$\log_b x$, Lo que permite obtener n

$$\boldsymbol{\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x}$$

Esto se lee como, logaritmo en base b de x es igual a n, si y solo si b elevado a la n da por resultado x

Para que la definición sea válida, no todas las bases y números son posibles. La base b tiene que ser positiva y distinta a 1, luego b>0 y b≠1, x tiene que ser un numero positivo x>0 y n puede ser cualquier número real (xϵR)

Datos importantes de los logaritmos:

1. El logaritmo de la base es 1. $\log_a a$=1

2. El logaritmo de 1 es 0, cualquiera que sea la base $\log_a 1$=0

3. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$\log_a(x.y)$ = $\log_a x + \log_a y$ $\log_2(4.8)$ = $\log_2 4 + \log_2 8$=2+3=5

4. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador

   $\log_a(\frac{x.}{y})$ = $\log_a x - \log_a y$ $\log_2(\frac{4}{8})$ = $\log_2 4 - \log_2 8$ =2-3=-1

5. El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicando al logaritmo de la base del exponente.

$\log_a x^y$ = y$\log_a x$ $\log_2 4^3$ = 3$\log_2 4$ = 3.2= 6

6. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice
   $\log_a \sqrt[y]{x}$ =$\frac{1}{y}\log_a x$ $\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}\log_2 4 = \frac{1}{3}2$ = $\frac{2}{3}$

Logaritmos decimales:

Son los que tienen base 10. Se representan por log(x) la base 10 no se escribe queda implícita, es como la $\sqrt{x}$ que es la raíz cuadrada y el 2 no se escribe

Logaritmo neperiano o natural:

Son los que tienen base e (e es un número irracional como π, en este caso vale 2,71828…, se representa por ln(x) lo que sería igual a $\log_e x$

7. Cambio de base:

El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmo de otra base. Por ejemplo

$\log_4 16$ = 2 pero podríamos hacer $\frac{\log_2 16}{\log_2 4}$ = $\frac{4}{2}$= 2 que es lo mismo

En este caso no tenía mucho sentido hacerlo, pero si me piden resolver $\log_3 5$ a mi me resulta imposible saber a cuanto debo elevar al 3 para que de 5, entonces usando cambio de base y la calculadora puedo resolverlo

$\log_3 5$ = $\frac{\log 5}{\log 3}$ = $\frac{0{,}698..}{0{,}477..}$= 1,4649   y esto cierto ya que $3^{1{,}4649..}$= 5

Para revisar la teoría de logaritmo esta página puede ayudar:

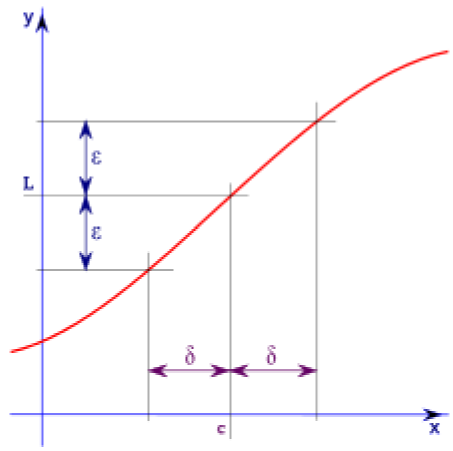
www.slideshare.net/mfatela/logaritmo-definicin-y-propiedades

Limite, algunas definiciones y contenidos importantes

Limite definición:

$\lim_{x \to a} f(x)$ =L $\leftrightarrow \forall \varepsilon > \frac{o}{}0 \; < \text{I}x\text{-}x_0\text{I} < \; \delta \; \rightarrow \; \text{I}\, f(x) - L \,\text{I} < \epsilon$

Se dice que la función f(x) tiene como límite el número L, cuando x tiene a x_0, si fijado un número real positivo ϵ, mayor que cero, existe un número positivo δ depediente de ε, tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición I$x - x_0$I$< \delta$, se cumple que I $f(x) - L$ I $< \varepsilon$



También podemos definir el concepto de límite a través de entornos:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$= L si y solo si, para cualquier entorno de L que tomemos, por pequeño que sea su radio, existe un entorno x_0, Eδ(x_0) cuyos elementos (sin contar x_0), tienen sus imágenes dentro del entorno de L, Eε(L).

Entorno de un número real x:

Un conjunto Q de números reales es un entorno de un número real x si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que: $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq Q$ $(esto$ $\subseteq$ quiere decir está incluido)

En particular, cualquier que sea $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es un entorno de x

Informalmente, el hecho que una función f tiene un límite L en el punto c, significa que el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee, tomando puntos suficientemente cercanos a c, independientemente de lo que ocurra en c.

Regla práctica para calcular el límite: en la práctica, para calcular límites, vamos a reemplazar en la función la variable x por la coordenada del punto en el cual estudiamos el límite.

Por ejemplo: $\lim_{x \to 7}(x - 3)$= 7-3 =4 osea calcular el límite es hacer el reemplazo de la x por su valor

Algunos ejemplos de cálculo de límite:

a) $\lim_{x \to 5} x - 2 =$ 5-2 = 3

b) $\lim_{x \to 1} x^2 + 3x - 5 =$ 1+3.2 -5 = -1

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x} = \frac{0-0}{0} = \frac{o}{0}$ como esta división no se puede resolver, aquí tenemos una indeterminación.

Primero veremos las propiedades de los límites que nos darán herramientas para poder resolverlo de mejor manera, luego veremos algunos mecanismos de resolución y así poder resolver el ejercicio anterior, luego algunos ejemplos.

Propiedades de los límites:

a) Unicidad del límite: si una función tiene límite es un punto ese límite es único.

b) Si en un entorno reducido de un punto una función g toma los mismos valores que otra función f, que tiene límite l en ese punto, entonces la primer función también tiene límite en ese punto y coincide con el límite de la primera función

$$\lim_{x \to a} fx = \lim_{x \to a} gx$$

c) Límite de la función constante: el límite de la función constante en cualquier punto es dicha constante

d) Si una función tiene imite finito l en un punto x=a, y se considera K>l, entonces existe un entorno reducido del punto donde para cualquier x de ese entorno f(x)>K

e) Si en una función, en el entorno reducido de un punto, está constantemente comprendida entre otras 2 funciones que tienen el mismo limite en dicho punto, la primera función también tiene ese límite en el punto considerado

f) Conservación del signo: en un entorno reducido de un punto la función tiene el mismo signo que su límite en ese punto

Si l <0 → f(x)<0 $\forall\ x \ \epsilon\ E'(a)$

Si l >0 → f(x)>0 $\forall\ x \ \epsilon\ E'(a)$

Algebra de límites

a) Límite de una suma: el límite de la suma de dos o más funciones , cada una de las cuales tiene límite finito para x→a es igual a la suma de los límites de cada una de ellas

b) Límite del producto de dos o más funciones, cada una de las cuales tiene límite finito para x→a es igual al producto de los límites de cada una de ellas.

c) Límite de un cociente de dos funciones , cada una de las cuales tiene límite finito para x→a es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el límite del denominador es ≠0

d) Límite del logaritmo de una función es el logaritmo del limite

$$\lim_{x\to a} \log f(x) = \log \lim_{x\to a} f(x)$$

e) Límite de una función potencial exponencial: es igual al límite de la base elevado al límite del exponente.

Ahora agregaremos algunos cálculos sencillos como ejemplos:

$\lim_{x\to 5}(4x-3)$= 4 (5) -3= 20 -3 = 17

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-2}\right)+3$= $\frac{1}{0-2}+3$= $-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

Ejercicio número 1: ir al práctico

Generalizando el concepto de límite

1) Limite infinito en un punto:

$$\lim_{x\to a} fx = \infty$$

Una función tiene límite infinito en un punto x=a cuando a medida que los valores de x se aproximan a x=a por la izquierda y por la derecha, los valores de la función superan, en valor absoluto, cualquier valor k, por más grande que sea este. (Se puede comprobar haciendo una tabla de valores)

Ejemplo: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ = ∞

2) Limite finito de una variable infinita

$\lim_{x\to\infty}(fx)$ = 0

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ = 0

A medida que los valores de x crecen, los valores de la función se aproximan cada vez más a cero. (Se puede comprobar haciendo tabla de valores)

Las operaciones 1 y 2 son solo validas cuando calculamos limite, siempre se refieren al que se aproxima una función, acorde al concepto de limite. Por ejemplo, sabemos que la división por cero no existe entre las operaciones reales, pero si en un cociente el denominador →0, podemos decir que el cociente →∞, lo que quiere decir que cuanto más pequeño es el denominador, mayor es el cociente. Como sabemos que trabajamos en un entorno reducido del punto, sabemos que denominador nunca llega a valer 0.

3) Limite infinito de variable infinita

$\lim_{x \to \infty} fx$ = ∞

A medida que x toma valores cada vez más grandes, en valores absolutos, los valores de la función también crecen indefinidamente. (Se puede analizar haciendo tabla de valores)

Ejemplo: $\lim_{x \to \infty} (2 + x)$ = 2+ ∞ = ∞

Ejercicio número 2: ir al práctico

Todo esto es posible siempre y cuando no lleguemos a una operación que no se puede resolver, a eso se le dice indeterminación, en esos casos se debe operar sobre la función a la cual se le quiere calcular el límite, luego simplificarla para poder sobre ese resultado reemplazar y ver si da un resultado que exista. Pero ojo a que le decimos que un resultado no se puede resolver, por que como en el cálculo del límite nosotros no usamos el punto exacto si no el valor de su entorno (ose al ladito), hay resultados que entre las operaciones comunes no son ciertas y en el límite sí. Por ejemplo, 1/0 entre las operaciones matemáticas no es posible, en cambio en el límite esa operación da ∞, lo cual en el límite es un resultado que me sirve. (Aclaración: infinito no es un número es una idea, es algo tan grande que no puedo llegar, pero como en el límite no necesito llegar, el resultado de infinito es un valor aceptado como tal)

Entonces 1/0=∞ y 1/∞=0 estos dos resultados son ciertos solo en el límite

A lo que se conoce como indeterminado es a: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞-∞ , 0^0 , ∞^0 , 0 . ∞ y 1^∞

Volviendo al uso de la simplificación para poder resolver los ejercicios que nos dan indeterminaciones: Explicación intuitiva del uso de simplificación para el cálculo de límites indeterminados:

Grafiquemos la función y=$\frac{x^2}{x}$ por medio de una tabla de valores, démosle a la variable x los valores -2, -1, 0, 1, 2

Luego a la función la simplificamos, con lo cual quedará y=x, le hacemos lo mismo

Si comparamos las dos gráficas, vemos que son exactamente iguales, salvo en el valor x=0, entonces lo plantea el cálculo de límite es analizar toda la función en el entorno reducido del punto, y como dice el apunte el entorno es todo lo que está alrededor del punto, reducido es sin tener en cuenta al punto.

X	$Y=x^2/x$	Y=x
-2	$(-2)^2/-2=-2$	-2
-1	$(-1)^2/-1=-1$	-1
0	0/0= ∃	0
1	$(1)^2/1=1$	1
2	$(2)^2/2=2$	2

Si nosotros vemos las dos tablas, y analizamos el límite tendiendo a 0, en el límite, las dos gráficas son exactamente iguales, ya que el valor de x=0 no lo tenemos en cuenta, salvo en el valor de x=0, pero como en el límite ese valor no se tiene en cuenta podemos decir que calcular el límite en la función original o en la que queda después de haberla simplificado es lo mismo.

Volvemos a la función en la que tuvimos problemas por la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \frac{0-0}{0} = \frac{o}{0}$$

Si en vez de usar esta función igualamos a que salga de operar, y simplificar

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x \quad +1)}{x} = \text{si simplificamos queda} \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{} = 0+1 = 0$$

Y con eso calculamos una solución.

Regla general para resolver un ejercicio de límite:

1) Reemplazar el valor al que la función tiende por todas las x que aparezcan en ella.
2) Resolver las operaciones, si da por resultado un número, fin de la operación, si en cambio da una indeterminación, opero nuevamente (operar es aplicar algún algoritmo conocido, factoreo, racionalización, etc.)
3) Simplifico lo que pueda. Vuelvo al punto 1

Vamos a ver algunos modelos de resolución

Primer caso de límite con indeterminaciones

Cociente $\frac{0}{0}$

Ejemplo: primero reemplazo $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{0}{0}$

Segundo paso, opero: $\lim_{x \to 0} \frac{(x+5)\,(x-5)}{x-5} =$

Tercer paso: simplifico $\lim_{x \to 0} x + 5 =$

Vuelvo al primero (siempre después de simplificar se vuelve al primero)

$5 + 5 = 10$ resultado final 10

Otro ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Esta vez la operación no es aplicar factoreo sino que es racionalizar

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} =$$

$si\ aplico\ distributiva\ en\ el\ numerador\ nos\ queda$ $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

Luego esto lo puedo simplificar, $\lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

Y vuelvo al primer paso, reemplazar

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio número 3: ir al práctico

b) cociente de infinitos $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{px}{qx}$$

Para resolver estos límites se dividen ambos polinomios por x^a siendo a el exponente de mayor grado que aparezca

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-2}{4x^3+x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicamos los tres mismos pasos que en el ejercicio anterior

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}} =$$

Simplifico

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^1}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{}+\frac{1}{x^1}-\frac{2}{x^2}} =$$

Reemplazo

$$\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{\frac{4}{}+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}} =$$

Resuelvo recordando que si divido por infinito da como resultado cero

$$\frac{0+0-0}{4+0-0} = \frac{0}{4} = 0$$

Ejercicio 4: ir al práctico

Limites laterales

El limite lateral por la izquierda de una función y=f(x) en el punto x=a es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima al valor de a por valores menores que a. lo representamos por:

$$\lim_{x\to a-} fx$$

El limite lateral por la derecha de una función y=f(x) en el punto x=a es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima al valor de a por valores mayores que a. lo representamos por:

$$\lim_{x\to a+} fx$$

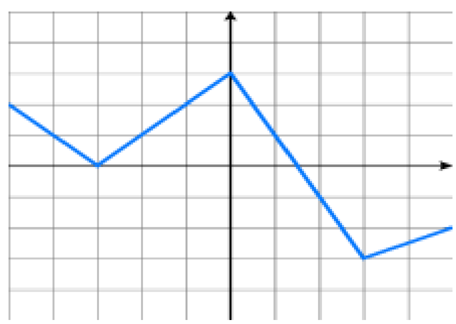
Para que exista el límite, se debe cumplir que L-=L+ =L

Quiere decir que par que la condición de existencia del límite es que los limites laterales sean iguales, o sea que si cuando me aproximo tanto por derecha como por izquierda siempre me tiene que dar por resultado el mismo valor.

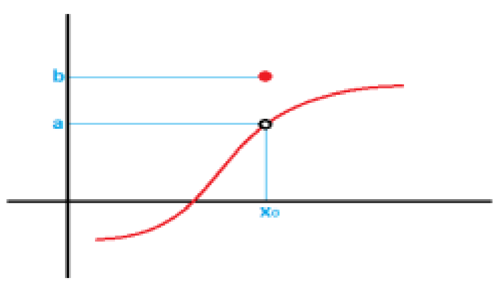
Continuidad

La continuidad de una función esta asociada intuitivamente al concepto de no tener interrupciones, en un gráfico a no tener agujeros, ni saltos, se podría decir que una función es continua cuando no tengo que levantar el lápiz para dibujara

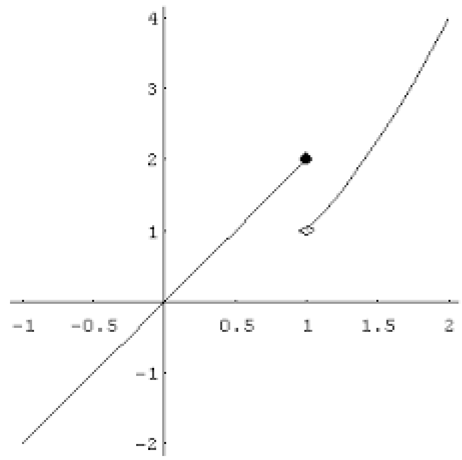
En el primer gráfico se ve una función continua en el punto en el cual se la está analizando



En el segundo gráfico e ve una función que no es continua ya que tiene un hueco en su trazo:



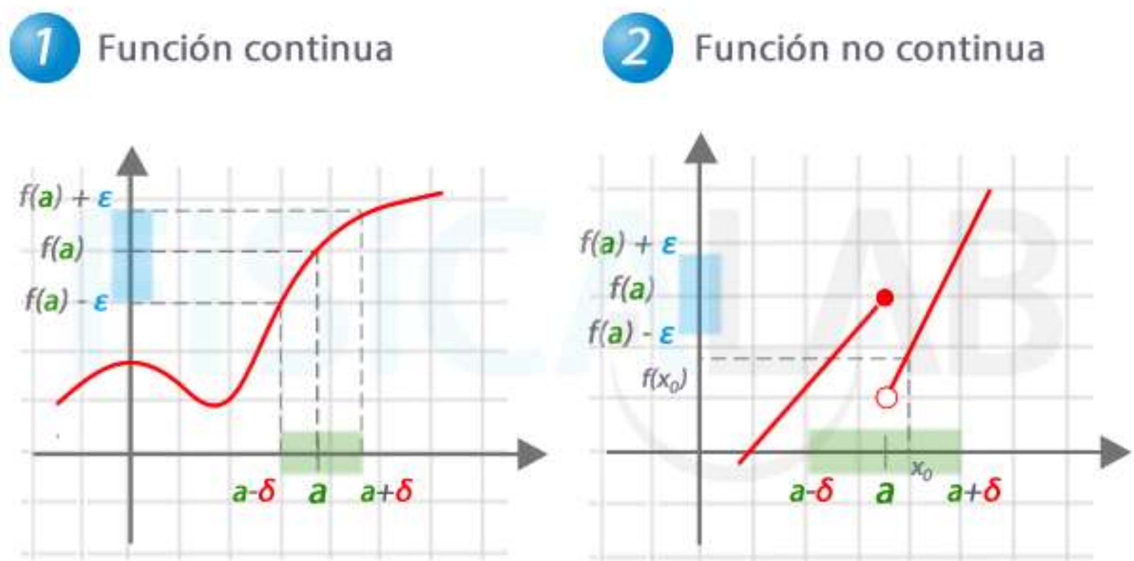
Y en el tercer gráfico se ve otra función que no es continua, pero por un salto en su trazo



Para que una función sea continua debe cumplir con tres condiciones, 1) que la función exista en el punto (que no tenga hueco), 2) que el límite exista en el punto (que los límites laterales sean iguales) 3) y que los putos 1y2 den el mismo resultado, quiere decir que si la función existe y tiene límite, que los dos valgan lo mismo

1) F(a)= L
2) $\lim_{x \to a} fx$ =L
3) L = L

Si al menos una de esas tres condiciones deja de cumplirse se dice que la función f se discontinua (no continua) en x=a



En el gráfico 1 la función es continua ya que todo coincide en a. en el gráfico 2 la función es discontinua, ya que no existe limite porque los limites laterales son distintos.

Entonces una función es continua en x=a si y solo si se satisfacen las tres condiciones….

Una función *f* es **discontinua** en *a* (o tiene una **discontinuidad en *a***) si se cumplen al menos una de estas tres condiciones:

1. No existe la función en *a*, es decir, no existe la imagen de *a*:

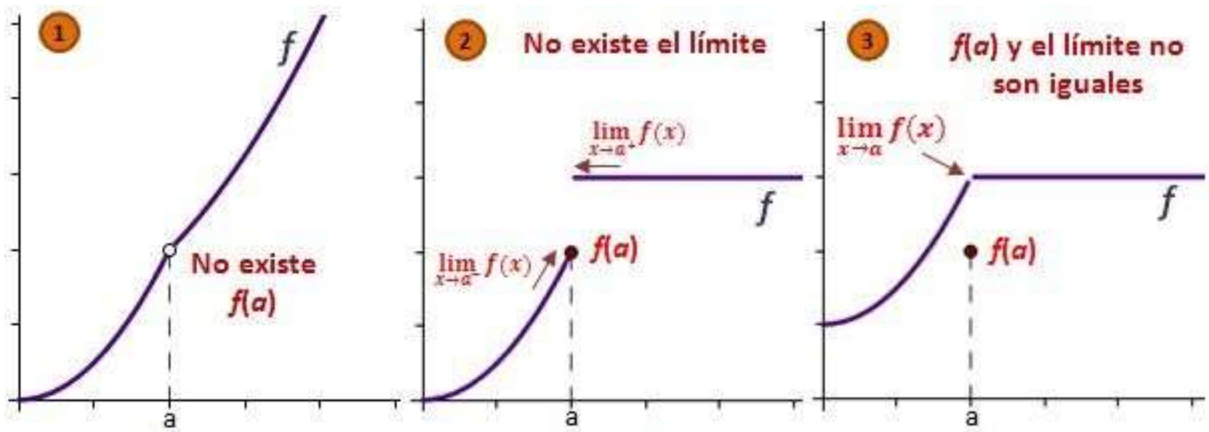
$$\text{No existe } \ f(a)$$

2. No existe el límite de *f* en el punto *x* = *a*:

$$\text{No existe } \ \lim_{x\to a} f(x) \ \text{, es decir } \ \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

3. La imagen de *a* y el límite de la función en *a* son diferentes.

$$f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$$



Los tres casos en los que *f* es discontinua en a

Ejemplo de resolución de un ejercicio:

Analicemos la continuidad de esta función partida:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Primero miramos donde puede tener problemas la función, en este caso será en el uno pues cambia de forma… entonces todo e análisis lo haremos en el punto x=1

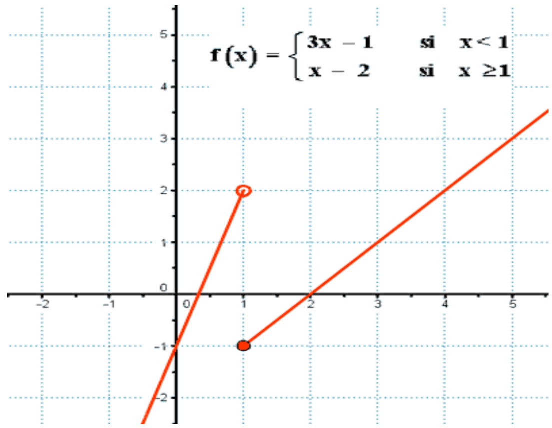
1) F(1) = 1-2 = -1 la función existe y vale -1
2) Analizamos el límite en x=1, pero como la función es partida justo en 1 vamos a hacer limite lateral

$\lim_{x\to 1-} 3x - 1$= 3 (1)-1 =2

$\lim_{x\to 1+} x - 2$ = 1-2= -1

Como los limites laterales son distintos, entonces no existe el límite con x=1 por lo tanto la función es discontinua en ese punto.

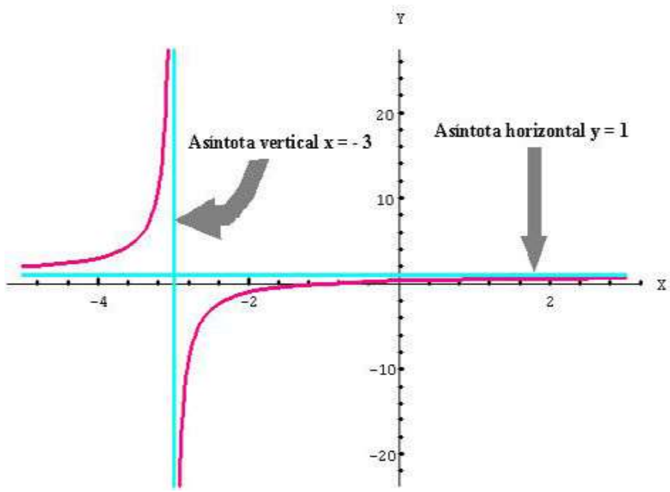
Si la dibujamos que da



Ejercicio número 5: ir al práctico

Asíntotas

Si la distancia entre una recta y una curva tiende a cero cuando x tiende a infinito o a un punto, la recta recibe el nombre de asíntota (gráficamente se ve como que la curva se acerca a la recta pero nunca la toca)



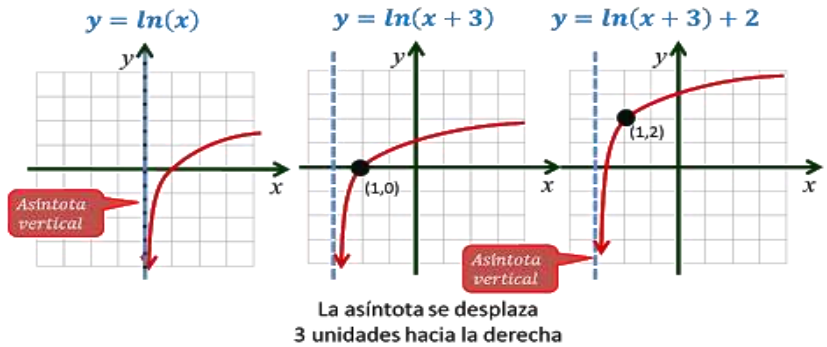
Existen tres tipos de asíntotas, vertical, horizontal y oblicua.

En este curso vamos a trabajar solo dos: vertical y horizontal

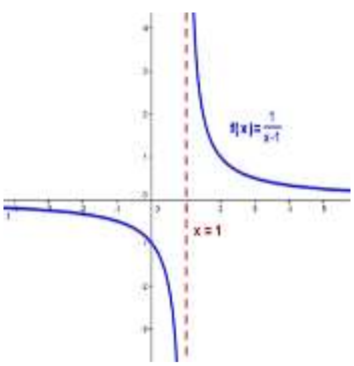
Asíntota vertical: son verticales de ecuación x=a

X=a es asíntota vertical si y solo si $\lim_{x \to a} fx = \infty$.

En el siguiente ejemplo hay una asíntota vertical en cada caso



Ejemplo fx= $\frac{1}{x-1}$ tiene asíntota vertical en x=1 ya que el 1 es el único número que hace esa fracción tenga denominador =0 y que sabemos que esa operación es el límite va a tender a infinito, condición para que la función tenga asíntota vertical.

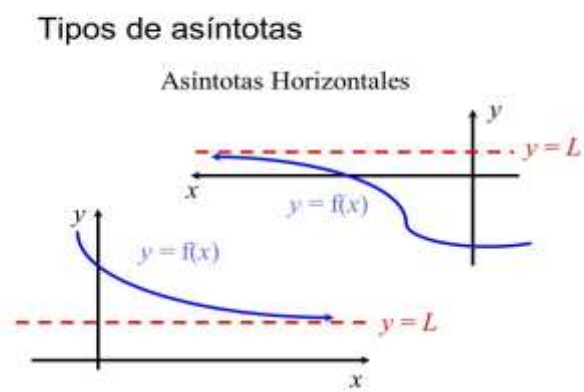


Conclusión en el ejercicio anterior la función tiene asíntota vertical en x=1

fx= $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

Asíntota horizontal: son rectas horizontales de ecuación y=K

Y=K es asíntota horizontal si y solo si $\lim_{x \to \infty} fx = K$



En el caso del cálculo de asíntota horizontal se procede como en el siguiente ejemplo

F(x)=$\frac{x+3}{x^2}=$ en estos casos lo que hay que hacer es calcular el límite con x→∞, por tal motivo aplicamos lo visto en indeterminaciones de límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1}=\ \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{1}= 0+0 =0$$

Conclusión: esta función tiene límite horizontal en x igual a cero

Ejercicio 6: ir al práctico