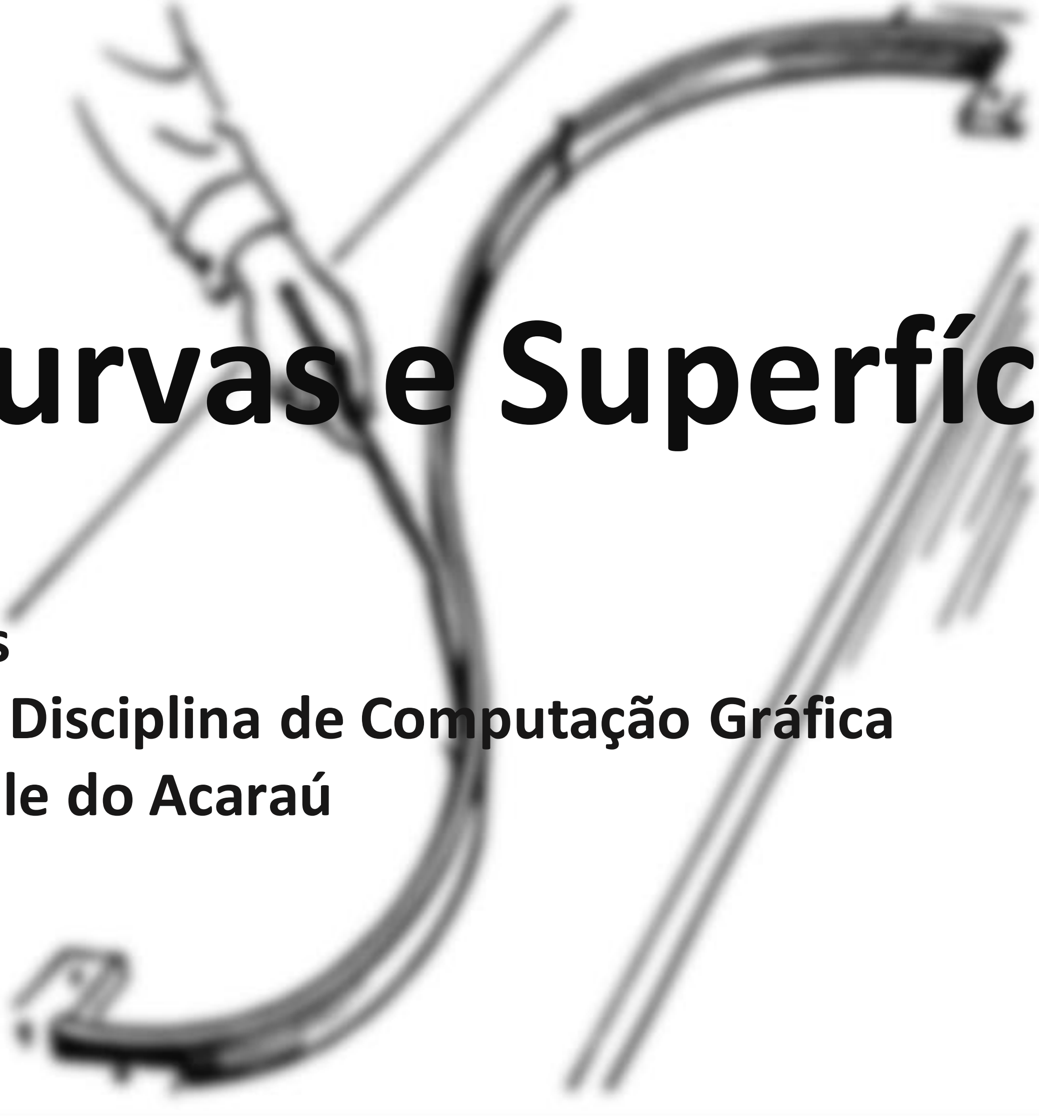


Curvas e Superfícies

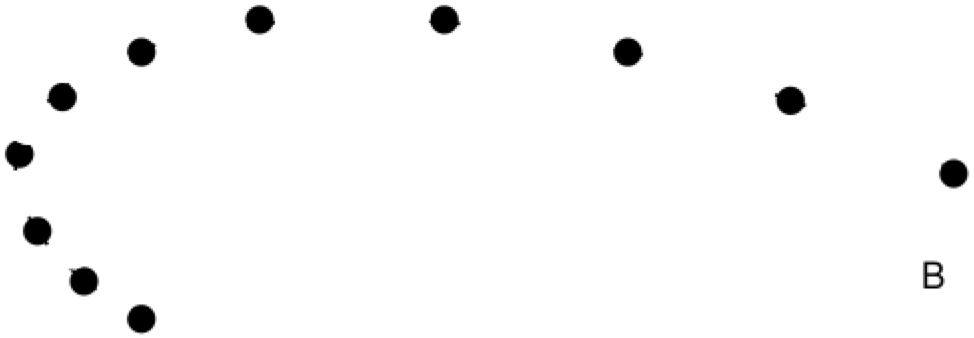
Professor Gilzamir Gomes
Ciência da Computação – Disciplina de Computação Gráfica
Universidade Estadual Vale do Acaraú

Introdução

- Representação de Curvas
  - Conjunto de Pontos
  - Analítica
    - Não-Paramétrica
      - Explicita
      - Implícita
    - Paramétrica

Introdução

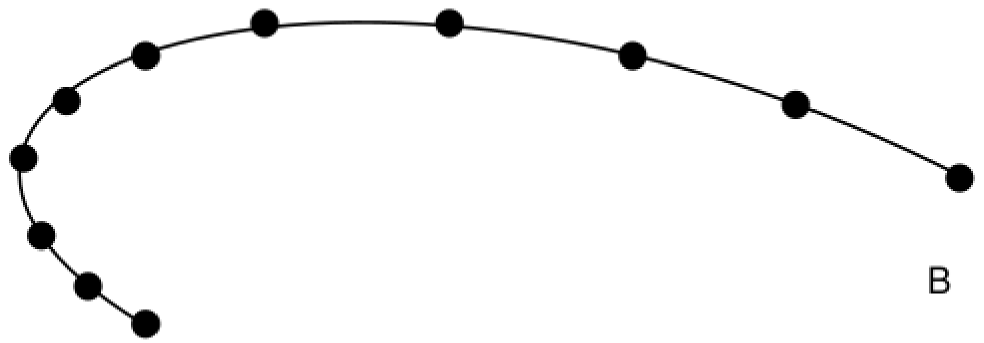
- Representação de Curvas
  - Conjunto de Pontos



Encontrar a curva que melhor se adéqua ao conjunto de pontos dados

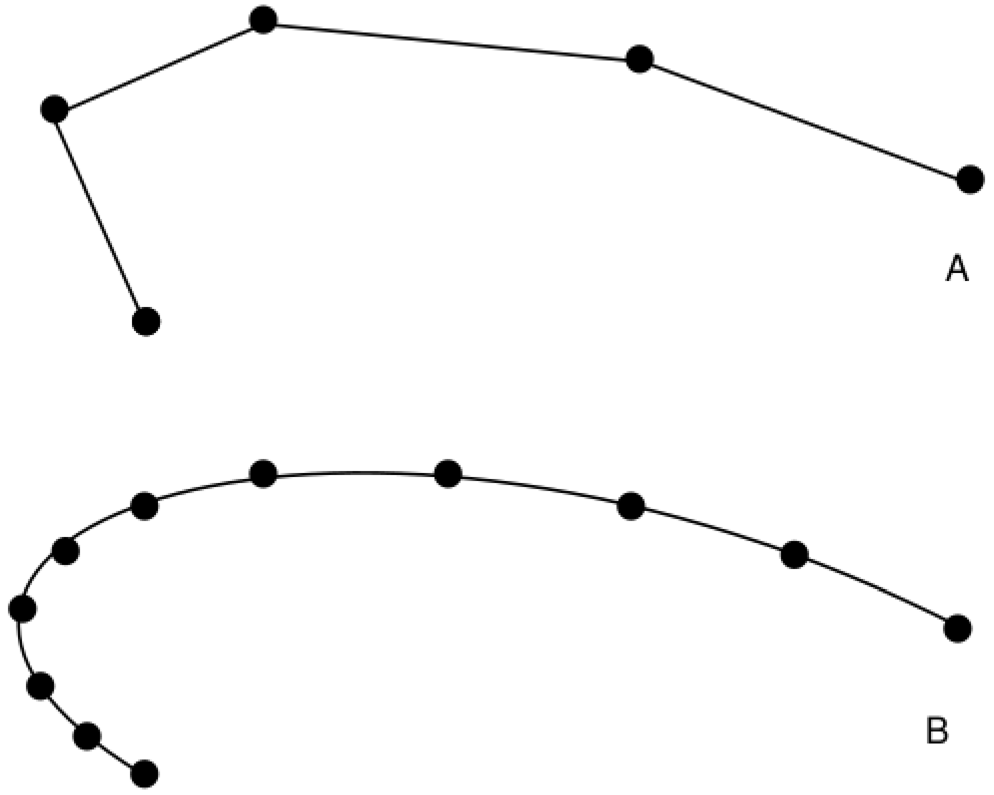
Introdução

- Representação de Curvas
  - Conjunto de Pontos



Introdução

- Representação de Curvas
  - Conjunto de Pontos



Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica: a curva é representada por uma equação.

Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica Explicita => $y = f_x(x)$ ou $x = f_y(y)$

$y = \sqrt{10^2 - x^2}$ ou $x = \sqrt{10^2 - y^2}$ — Um quarto de círculo

$y = 2x - 1$ ou $x = ½(y+1)$ — Reta

$y = ax^2 + bx + c$ — Parábola

Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica explicita:
    - Ordem ou grau da curva: a potência de maior valor em que x for elevado
    - Polinômios são amplamente utilizados para representarem curvas:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Introdução

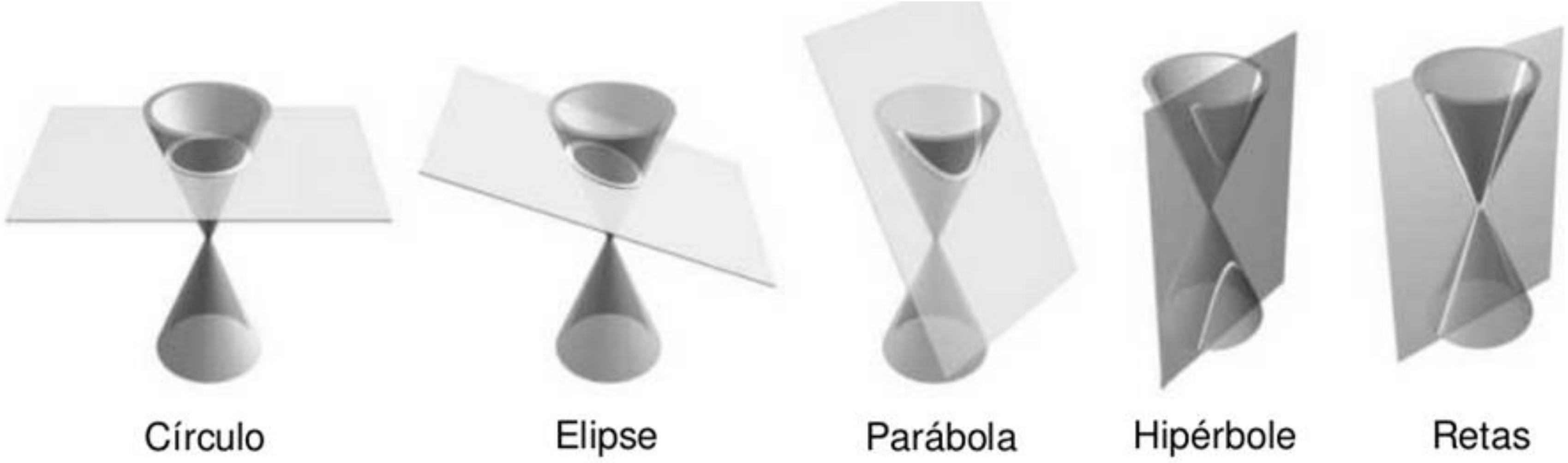
- Representação de Curvas
  - Analítica explicita:
    - Problema: não dá para desenhar curvas tal que é possível obter dois ou mais valores de y para cada valor de x, como, por exemplo, círculos e outras curvas fechadas.

Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica implicita => $f(x,y) = 0$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Curva implícita do 2° grau



Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica implicita => $f(x,y) = 0$

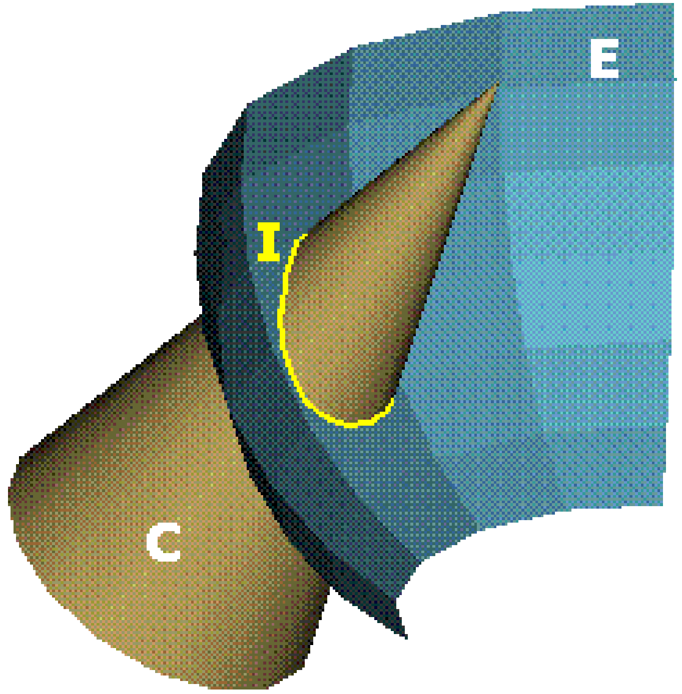
$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Curva 3D: intersecção de duas superfícies

Geralmente utilizada para representação 2D, dado que o custo para obtenção de curvas 3D a partir da implícita tem um custo computacional mais caro do que outras alternativas...

Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica implicita => $f(x,y) = 0$ $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$



Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica implícita => $f(x,y) = 0$
  - Vantagem: muito mais fácil verificar se um dado ponto pertence ou não à curva, o que é útil em muitas aplicações de modelagem geométrica:
    - Conhecer pontos interiores, exteriores e na fronteira de objetos.

Introdução

- Do explícito ao implícito:
  - Passando da forma explícita para a forma implícita: implicitação

$$y = \sqrt{10^2 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Introdução

- Representação de Curvas
  - Analítica:
    - Vantagens:
      - Exatidão na obtenção de pontos adicionais
      - Maior simplicidade no cálculo de propriedades: área, volume, inclinação, etc.
      - Maior simplicidade para ser redesenhada quando sujeita a transformações como mudança de escala, rotação, projeções e outras.

Introdução

- Desvantagens das formas implícita e explícita:
  - Dependentes do sistema de coordenadas
  - Se os pontos da curva forem calculados a partir de incrementos uniformes em x ou y podem não ficar igualmente distribuídos uniformemente ao longo da curva.
  - Solução: representação paramétrica.

Introdução

- Representação paramétrica:

$$x = 10\ cos\ \theta = f_x(\theta)$$
$$y = 10\ sen\ \theta = f_y(\theta)$$

Um quarto de círculo de raio 10

$$x = t+1 = f_x(t)$$
$$y = 2t+1 = f_y(t)$$

Equação da
reta

Introdução

- Representação paramétrica. A posição do ponto na curva:

$$P(t) = (x(t),\ y(t))$$

- Para obter intervalos em comprimentos constantes, basta incrementar *t* de forma constante.
- Para obter a tangente:

$$P'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Introdução

- Representação paramétrica.
  - Permite representar curvas fechadas e com valores múltiplos
  - A forma da curva independente do sistema de coordenadas, portanto, facilmente manipuladas por transformações geométricas
  - Os extremos e o comprimento da curva são fixos pelo intervalo de variação do parâmetro

Introdução

- Exemplos
-

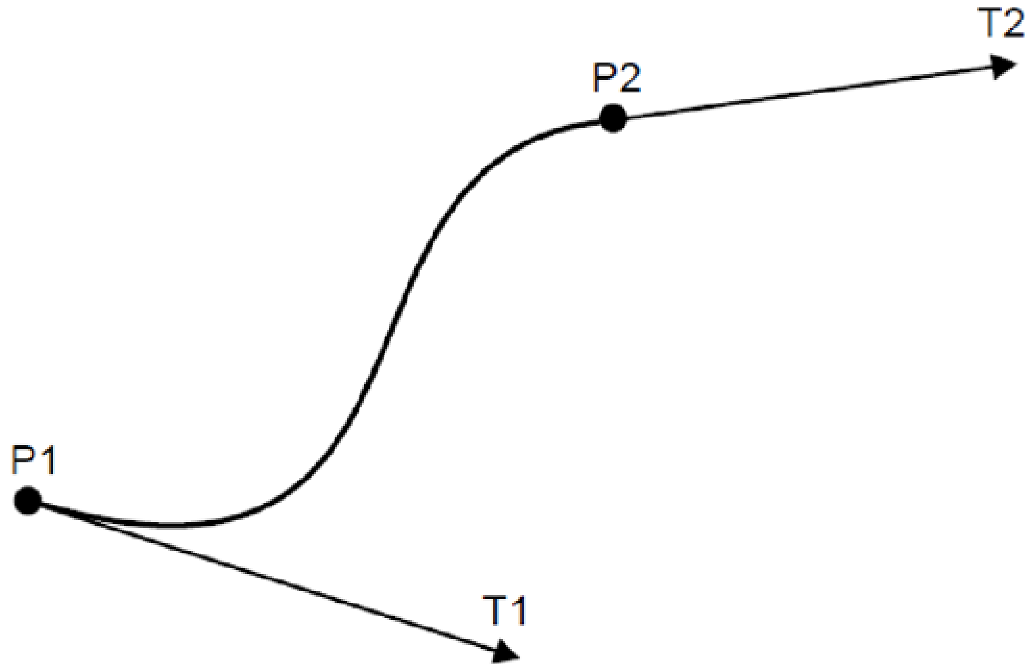
Cônica	Forma Paramétrica	Forma Implícita
Elipse	$x = a\ cos\ \theta$ $y = b\ sen\ \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Parábola	$x = at^2,\ y = 2at$	$y^2 - 4ax = 0$
Hipérbole	$x = a\ cosh\ \theta$ $y = b\ senh\ \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Introdução: Curvas Paramétricas de 3ª Ordem

- Modelos matemáticas complexos de curvas foram desenvolvidos inicialmente por Lagrange, Hermite e mais recentemente pelo Francês Paul Bézier, que utilizou em 1972 sua formulação do sistema Unisurf para representar formas complexas de um painel de carro produzido pela empresa na qual trabalhava, Renault.

Curvas de Hermite

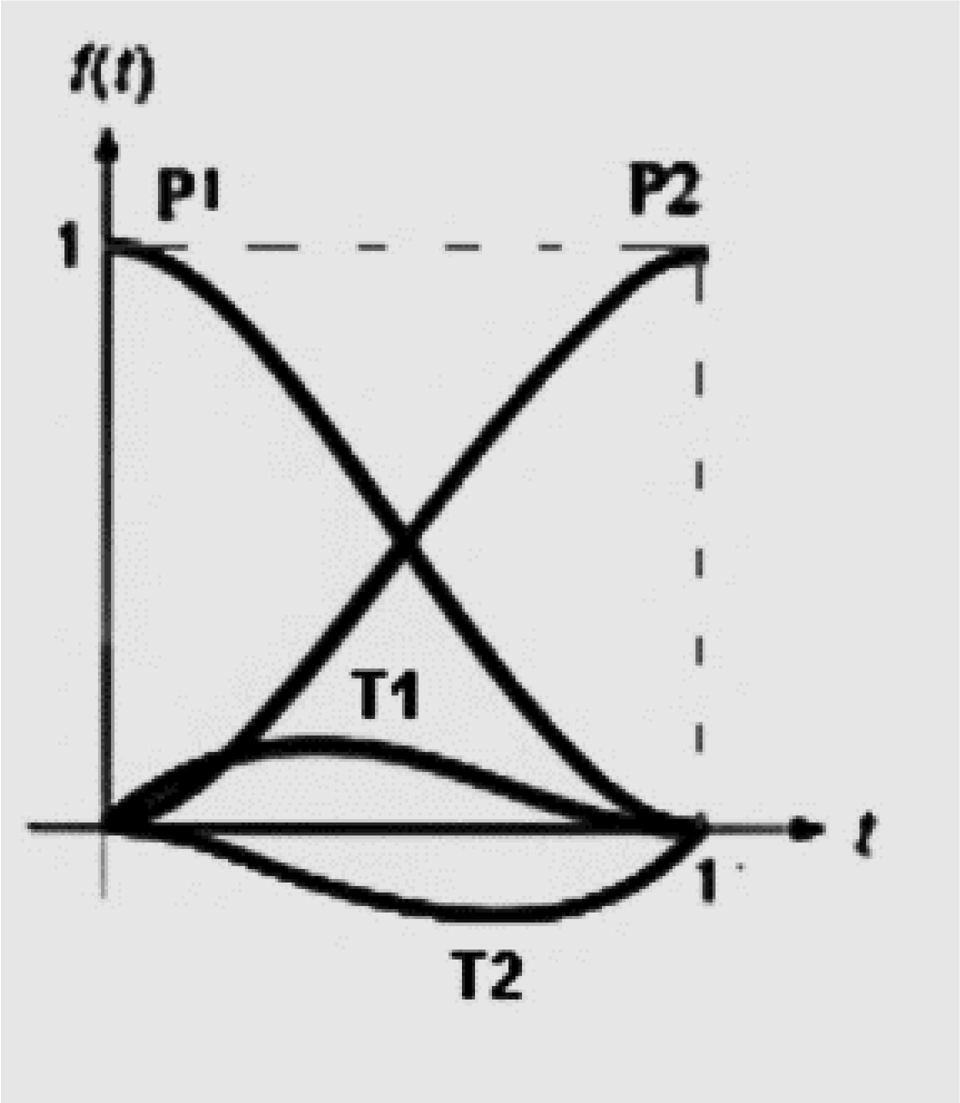
- P1 = ponto inicial
- P2 = ponto final
- T1 = tangente e peso no ponto P1
- T2 = tangente e peso no ponto P2



Elementos da curva de Hermite.

Curvas de Hermite

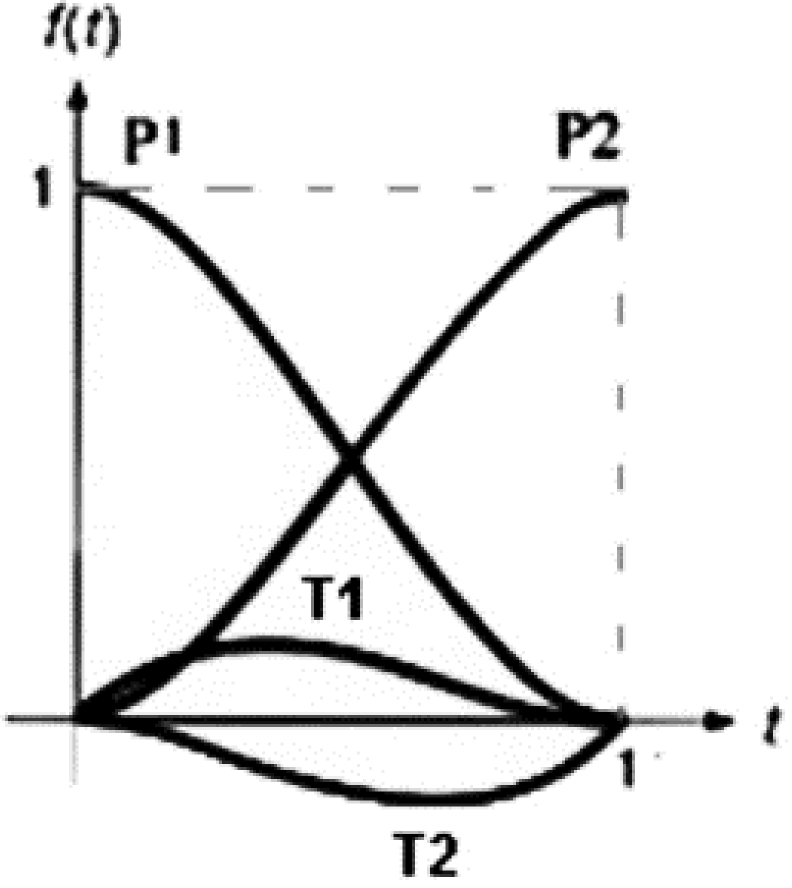
- Composição da geometria da Curva de Hermite.



Curvas de Hermite

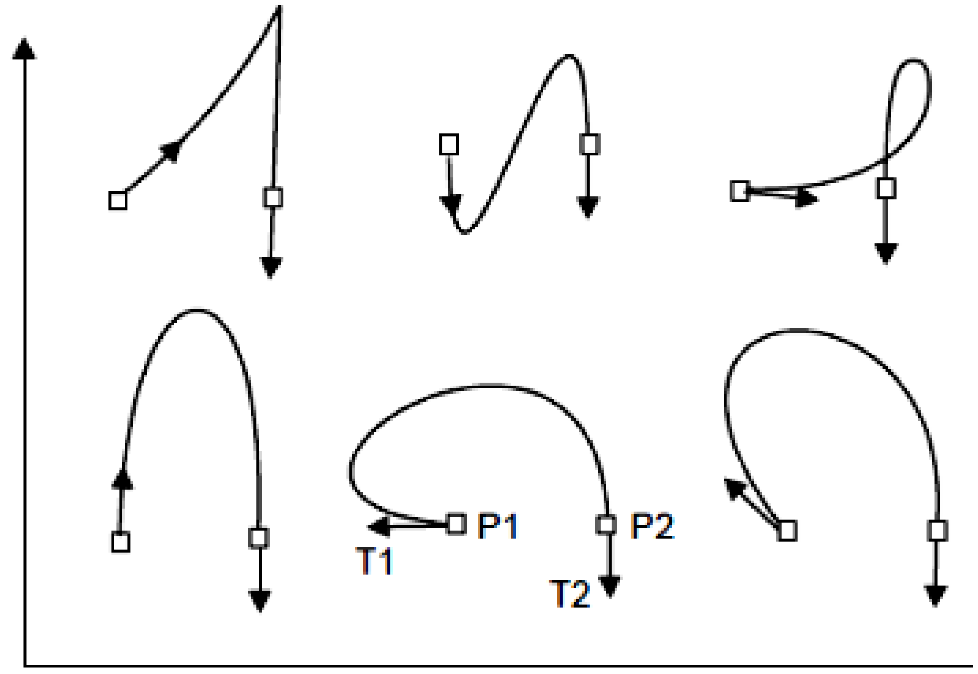
- Funções Interpolantes de Hermite

$$P(t) = \left((2t^3 - 3t^2 + 1), (-2t^3 + 3t^2), (t^3 - 2t^2 + t), (t^3 - t^2) \right) \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ T1 \\ T2 \end{bmatrix}$$



Curvas de Hermite

- A curva de Hermite é a que possibilita maior controle entre as demais de terceiro grau usadas em computação.
- A simples alteração na tangente introduz mudanças significativas na curva gerada:



Curva de Bézier

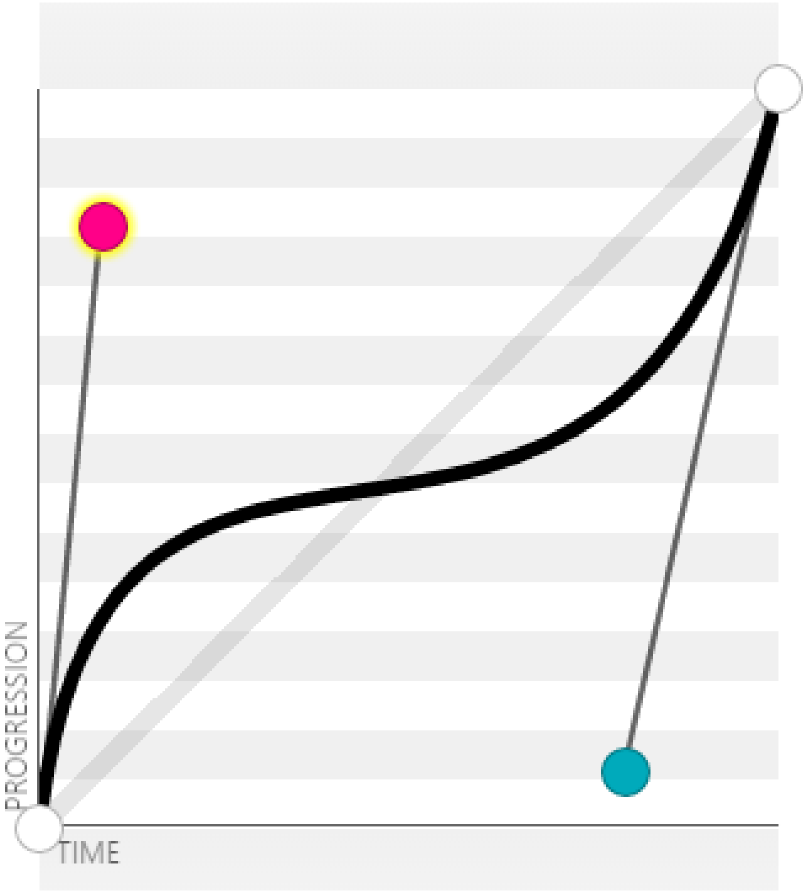
- Década de 60: Pierre Bézier, na Renault, baseou sua curva nos princípios descritos por Hermite, com a diferença básica que para a determinação das tangentes em P1 e P2 utiliza pontos e não vetores.
- A grande maioria dos softwares de computação gráfica, disponíveis no mercado, utiliza o conceito da curva de Bézier. Entre eles, encontramos o Adobe Illustrator, O Corel Draw, o Auto CAD, o Paint Shop Pro, 3D MAX.
- Casteljau, da Citröen, paralelamente à Bézier, desenvolveu um algoritmo para gerar curvas como as de Bézier.
- O uso do nome Bézier foi devido a Pierre Bézier ter publicado seus trabalhos antes de Casteljau.

Curvas de Bézier

- São as mais comumente utilizadas entre as curvas para desenhar letras ou logos
- Animação
  - Guias para objetos seguirem
  - Curvas de função para modelar as propriedades de objetos

Curva de Bézier

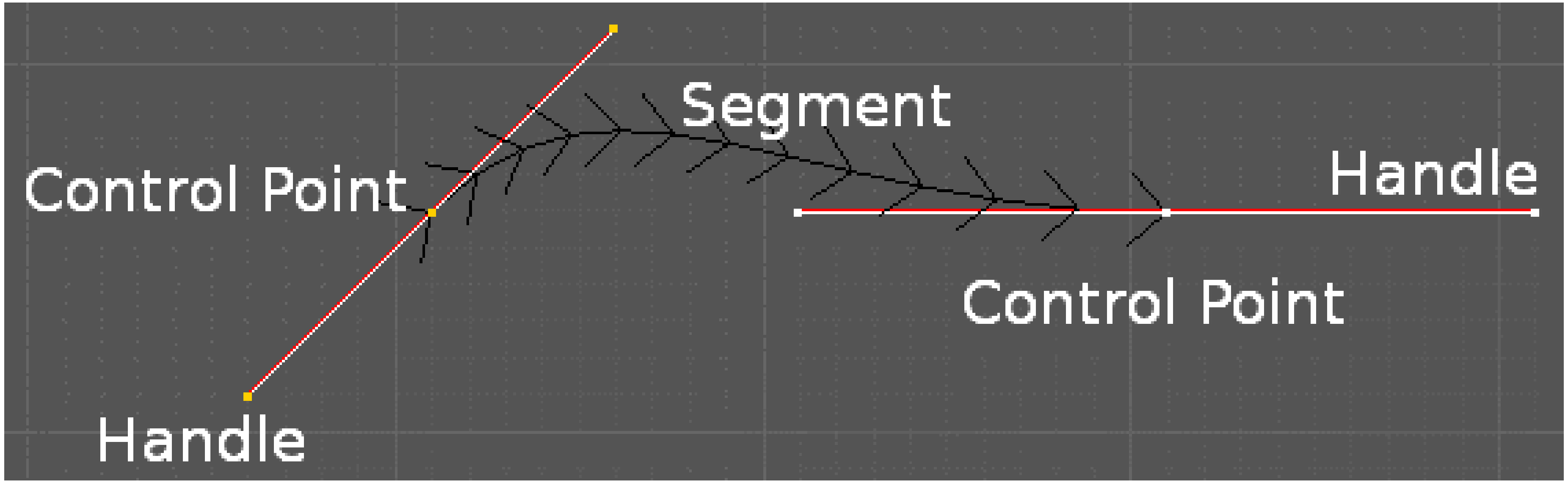
- Para uma curva de grau n, uma curva de Bézier é gerada por $n+1$ pontos de controle.
- Geralmente utilizada a forma cúbica, que requer 4 pontos de controle.
- A curva de Bézier cúbica passa pelo primeiro e pelo último ponto de controle e utiliza os outros dois para construir a tangente.



Fonte: http://cubic-bezier.com/#.08,.81,.79,.08

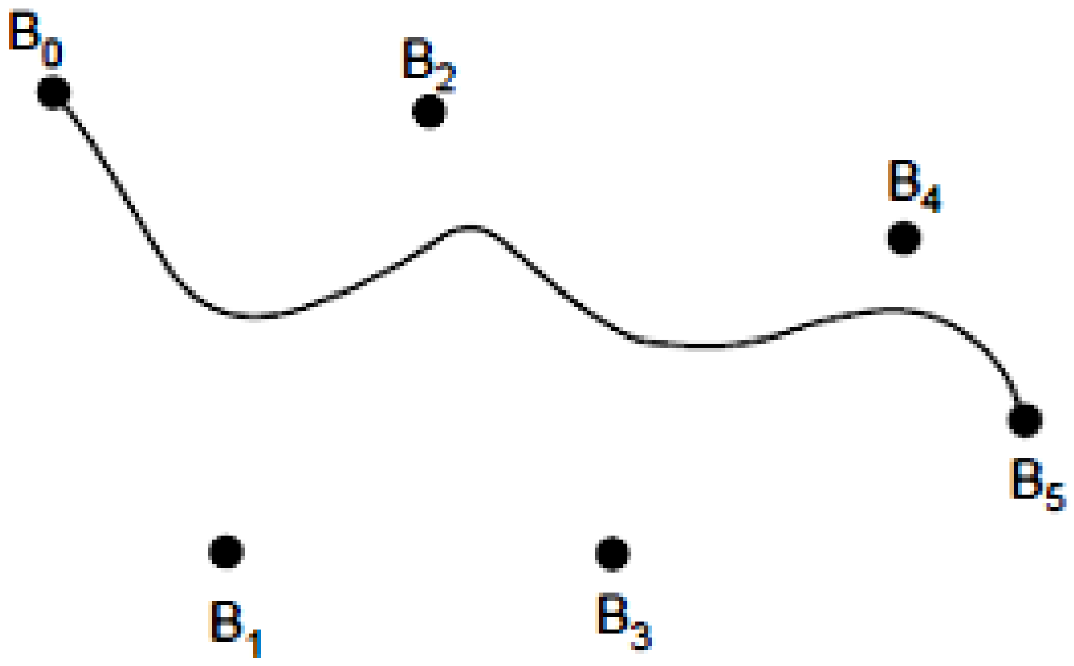
Curvas de Bézier

- Definidas por pontos de controle
- Diferentes softwares trabalham de diferentes abstrações dessas curvas



Curvas de Bézier

- Exemplo com 5 pontos de controle

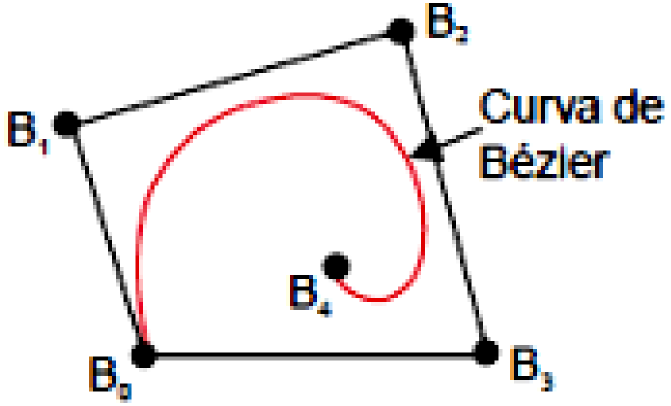


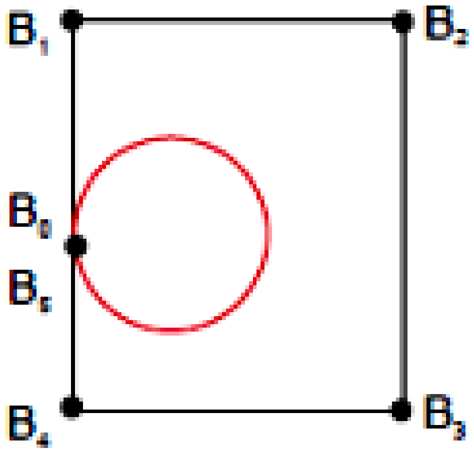
Pontos de controle da curva de Bézier.

Curva de Bézier

- Definição

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i \, J_{n,i}(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$





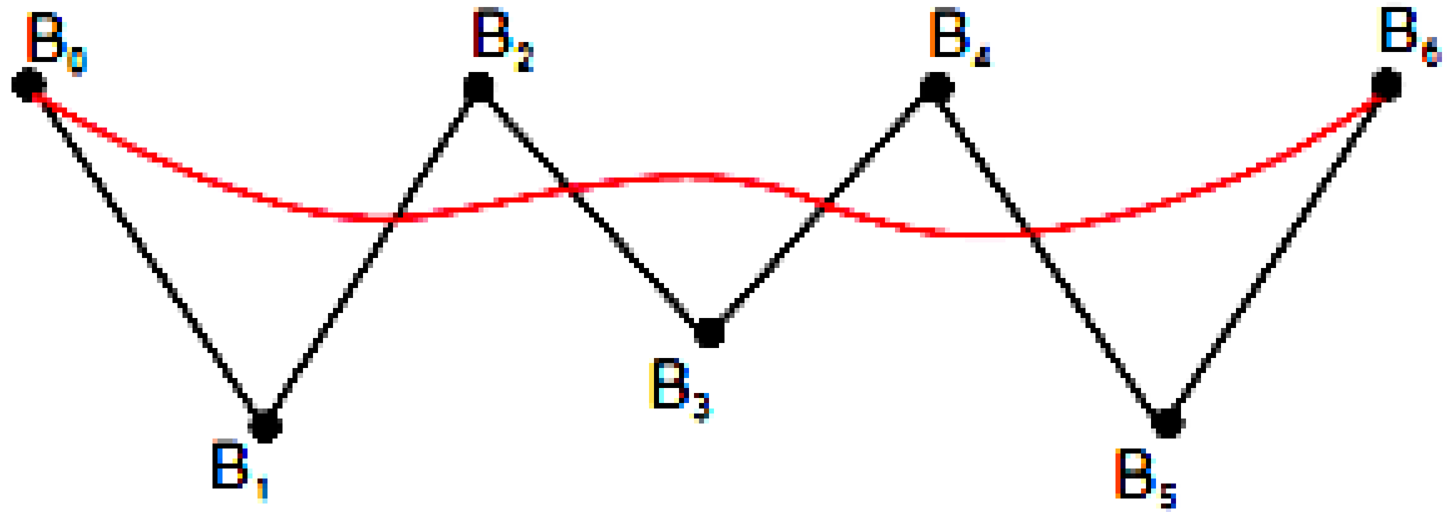
- Polinômio de Bernistein

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$J_{n,i}(t) \geq 0 \forall i \in [0,1]$$

$$\sum_{i=0}^{n} J_{n,i}(t) = 1 \, , \forall t \in [0,1]$$

Curvas de Bézier



Adicionando pontos de controle a curva de Bézier.

Exemplo 1)

- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$

Exemplo 1)

- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$
  - $P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_i J_{1,i}(t)$

Exemplo 1)

- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$
  - $P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_i J_{1,i}(t)$
  - $P(t) = B_0 J_{1,0}(t) + B_1 J_{11}(t)$

Exemplo 1)

- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$
  - $P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_i J_{1,i}(t)$
  - $P(t) = B_0 J_{1,0}(t) + B_1 J_{11}(t)$
  - $J_{1,0} = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0}$

Exemplo 1)

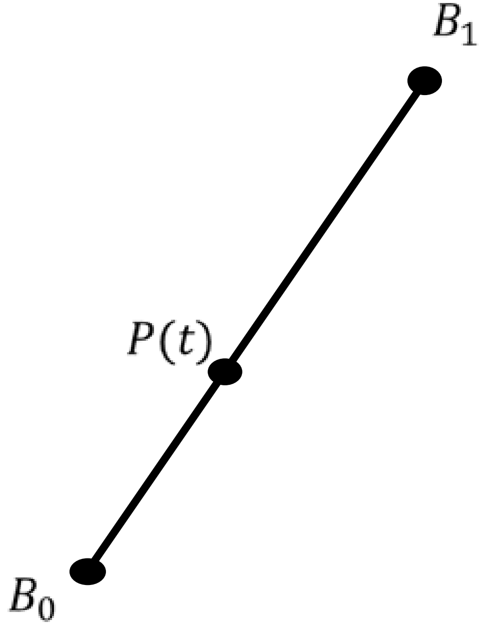
- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$
  - $P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_i J_{1,i}(t)$
  - $P(t) = B_0 J_{1,0}(t) + B_1 J_{11}(t)$
  - $J_{1,0} = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = (1-t)$

Exemplo 1)

- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$
  - $P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_i J_{1,i}(t)$
  - $P(t) = B_0 J_{1,0}(t) + B_1 J_{11}(t)$
  - $J_{1,0} = \binom{1}{0} t^0 (1 - t)^{1-0} = (1 - t)$
  - $J_{1,1} = \binom{1}{1} t^1 (1 - t)^{1-1} = t$

Exemplo 1)

- Desenvolver a equação de Bezier para $n = 1$
  - $P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_i J_{1,i}(t)$
  - $P(t) = B_0 J_{1,0}(t) + B_1 J_{11}(t)$
  - $J_{1,0} = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = (1-t)$
  - $J_{1,1} = \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = t$
  - $P(t) = B_0(1-t) + B_1 t = (1-t)B_0 + tB_1$



Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{21}(t) + B_2 J_{22}(t)$$

Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{21}(t) + B_2 J_{22}(t)$$

$$J_{2,0} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2$$

Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{21}(t) + B_2 J_{22}(t)$$

$$J_{2,0} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2$$

$$J_{2,1} = \binom{2}{1} t\,(1-t)$$

Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{21}(t) + B_2 J_{22}(t)$$

$$J_{2,0} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2$$

$$J_{2,1} = \binom{2}{1} t\,(1-t)$$

$$J_{2,2} = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0$$

Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{21}(t) + B_2 J_{22}(t)$$

$$J_{2,0} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2$$

$$J_{2,1} = \binom{2}{1} t\,(1-t)$$

$$J_{2,2} = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0$$

$$P(t) = B_0(1 - 2t + t^2) + B_1(2t - 2t^2) + B_2 t^2$$

Exemplo 2) Encontre a equação da curva de Bézier com 3 pontos de controle

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{21}(t) + B_2 J_{22}(t)$$

$$J_{2,0} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2$$

$$J_{2,1} = \binom{2}{1} t\,(1-t)$$

$$J_{2,2} = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0$$

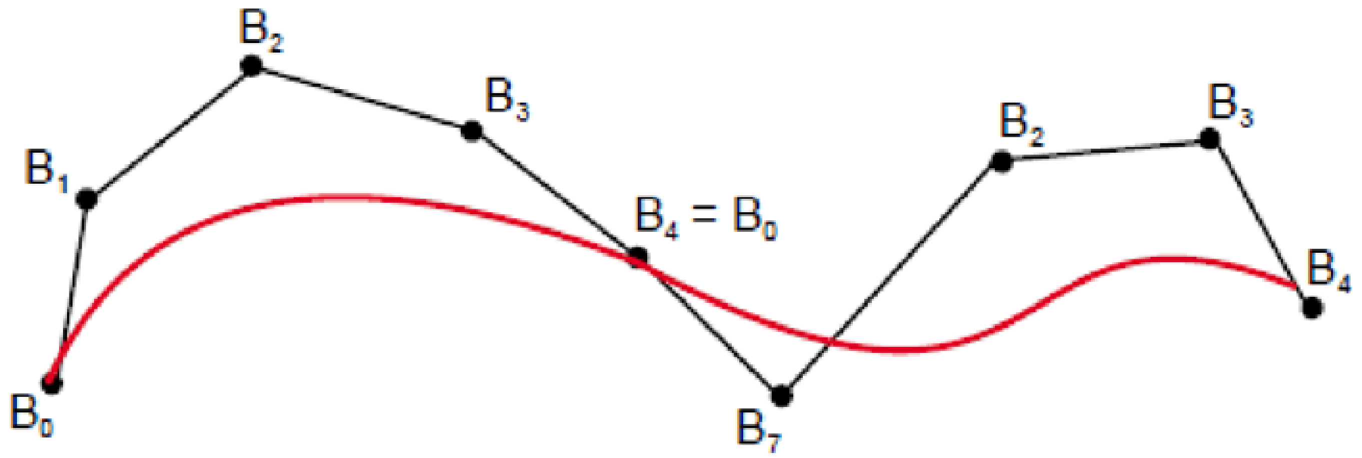
$$P(t) = B_0(1 - 2t + t^2) + B_1(2t - 2t^2) + B_2 t^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier

- Muitos pontos de controle aumentam a complexidade
- Alternativa: conexão de vários segmentos de curvas de graus menores.
  - Duas curvas devem ter a mesma inclinação no ponto união (devem ter três pontos em linha reta)

Junção de duas cúbicas

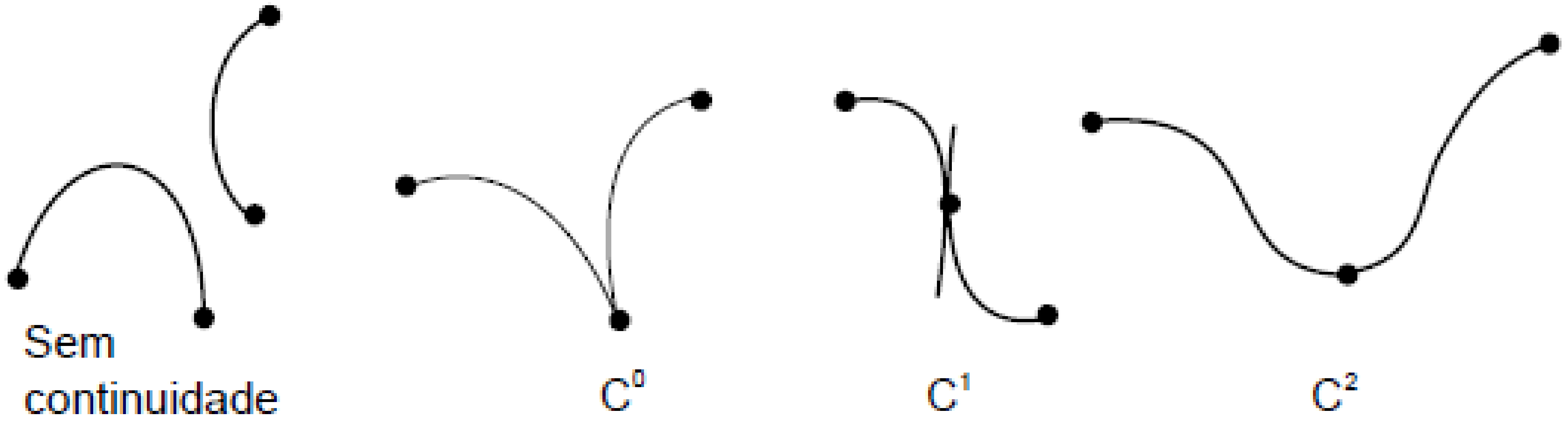


Curvas de Bézier

- Deve-se controlar a continuidade no ponto de junção
  - Continuidade de ordem 0 (C^0): duas curvas se encontram.
  - Continuidade de primeira ordem (C^1): duas curvas devem ter tangentes comuns nos pontos de junção.
  - Continuidade de segunda ordem (C^2): exige-se que as curvaturas sejam as mesmas.

Curvas de Bézier

- Níveis de Continuidade



Níveis de continuidade na união de duas curvas.

Curvas de Bézier

- Exemplo 3: três pontos de controle, B_0, B_1 e B_2.

$$P(t) = B_0 J_{2,0}(t) + B_1 J_{2,1}(t) + B_2 J_{2,2}(t)$$

$$J_{2,0} = \frac{2!}{0!2!} t^0 (1-t)^2 = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$$

$$J_{2,1} = \frac{2!}{1!1!} t^1 (1-t)^1 = 2t(1-t) = 2t - 2t^2$$

$$J_{2,2} = \frac{2!}{2!0!} t^2 (1-t)^0 = t^2$$

$$P(t) = (1-t)^2 B_0 + 2t(1-t) B_1 + t^2 B_2$$

Forma matricial

$$P(t) = [(1-t)^2 \; 2t(1-t) \; t^2] \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Curva de Bézier

- Exemplo 3: três pontos de controle, B_0, B_1 e B_2.
  - Forma matricial

$$P(t) = [(1-t)^2 \; 2t(1-t) \; t^2] \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(t) = [t^2 \; t \; 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P(t) = T \; M_B \; G_B$$

Curvas de Bézier

- Exemplo: com 4 pontos de controle, B_0, B_1, B_2 e B_3

$$P(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier

- Características Gerais das Curvas de Bézier
  - Pontos de controle aproximados por um único polinômio.
  - Grau depende do número de pontos de controle utilizados.
  - Controle global (movendo-se a posição de um único ponto, toda a forma da curva se modifica).
    - Ruim para a realização de ajustes finos na forma final de um desenho.
  - Para mais flexibilidade, deve-se aumentar muito o número de pontos de controle.
  - As curvas de Bézier sempre suavizam o polígono de controle.
  - São invariantes sob transformação afim:
    - Tanto faz primeiro calcular a um ponto na curva e em seguida aplicar uma transformação afim quanto aplicar uma transformação afim no polígono de definição e depois gerar a curva.

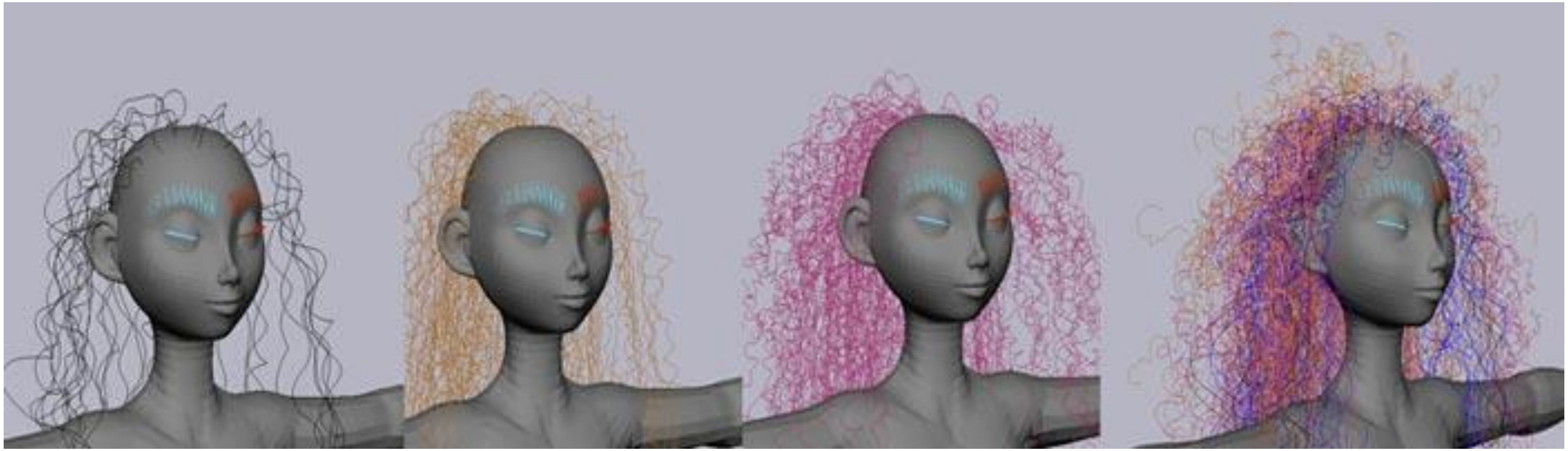
Curvas Racionais

- Descritas como a razão de dois polinômios...

	Forma Inteira	Forma Racional
Bézier	$\sum_{i=0}^{n} B_i \, J_{n,i}(t)$	$\dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i \, J_{n,i}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \, J_{n,i}(t)}$
B-Spline	$\sum_{i=0}^{n} B_i \, N_{i,k}(t)$	$\dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i \, N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \, N_{i,k}(t)}$

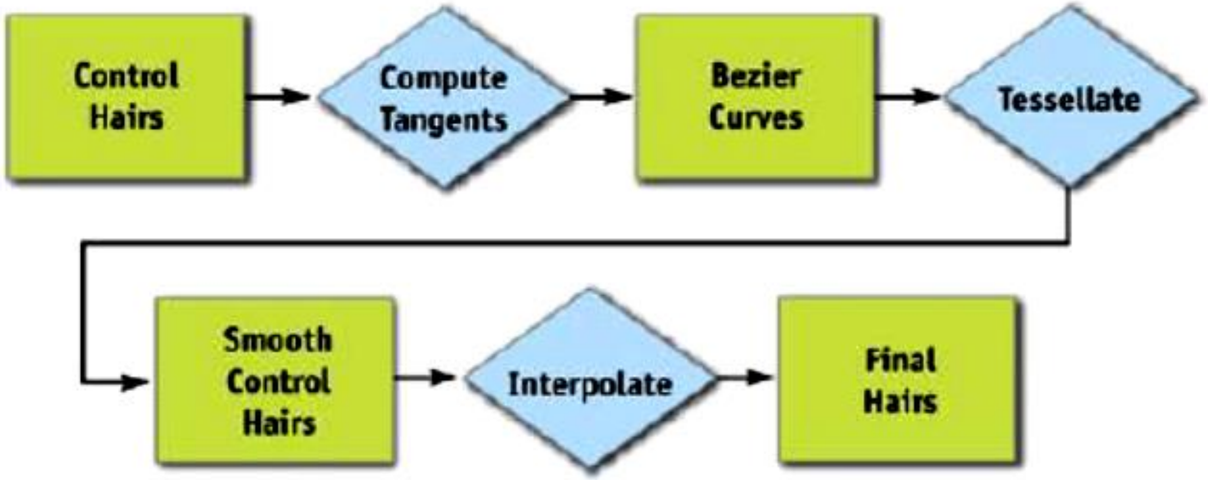
Aplicações na Industria

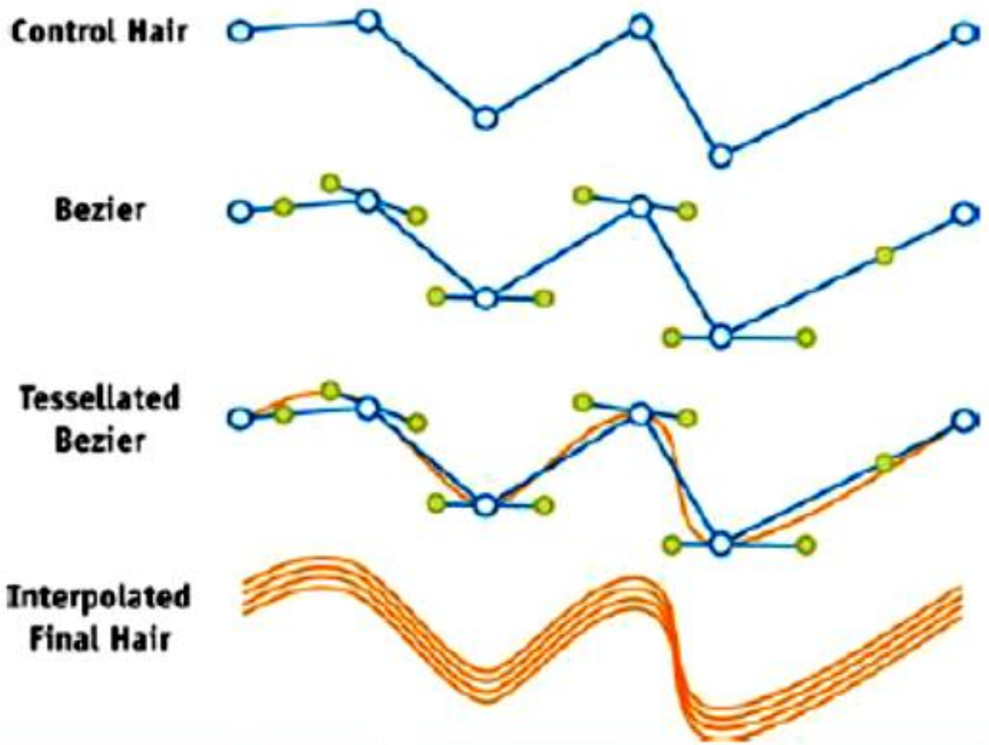
- *Hair modeling*

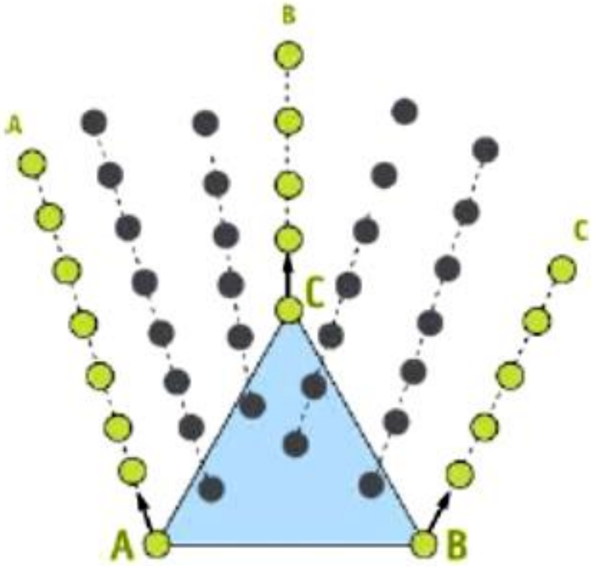


https://www.wired.com/2012/06/pl_bravehairtech/

- Modelo


Control Hairs
Compute Tangents
Bezier Curves
Tessellate
Smooth Control Hairs
Interpolate
Final Hairs


Control Hair
Bezier
Tessellated Bezier
Interpolated Final Hair


A
B
C
C
A
B

(a) (b)

Brave (Disney)

Desenvolveram um simulador chamado Taz. O cabelo foi modelado usando sistema Massa-mola. No entanto, os cachos são bem formados e deveriam ser rígidos, mas com movimento, sendo contraditório a resistência das molas. Deveriam voar ao vento, mas não muito. Além disto, tinham os problemas da intersecção e colisão que tornaram o projeto desafiador.

O simulador trata grupo de cabelos usando multi-threads. Os cabelos-chave são B-splines que foram usadas para ihnterpolar o resto dos cabelos.

Merida had 1500 hand placed curves which interpolate to some 111,000 curves at final render. Merida's hair was simulated at about 20 to 30 seconds a frame.