Transformações Geométricas
Parte I

Professor Gilzamir F. Gomes

Visão Geral

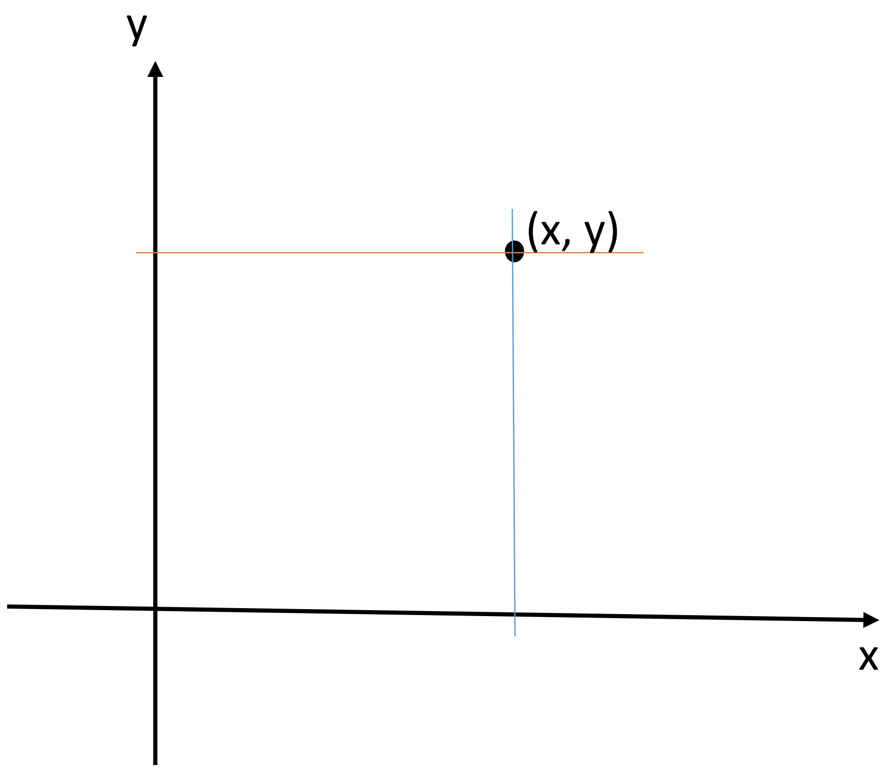
- Transformações no plano
  - Transformações Lineares
  - Translações
  - Coordenadas Homogêneas
  - Composição de Transformações

Transformações Lineares no Plano

- Pontos indicam posições no plano.
- Pontos podem ser representados ou por matrizes linha ou por matrizes colunas
- Operações sobre pontos podem ser representadas por multiplicação de matrizes

Transformações Lineares no Plano

- Pontos indicam posições no plano.



Transformações Lineares no Plano

- O conjunto de todos os pontos no R^2 é um espaço vetorial do R^2 associado às operações de soma e multiplicação por escalar!
- O conjunto de matrizes M(2,1) é um espaço vetorial M(2,1) associado às propriedades de soma e multiplicação por escalar!
- $R^2\ e\ M(2,1)$ são isomorfos
  - $(x, y) \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Transformações Lineares no Plano

- Transformação Linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares no Plano

- Transformação Linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ ? \end{bmatrix}$$

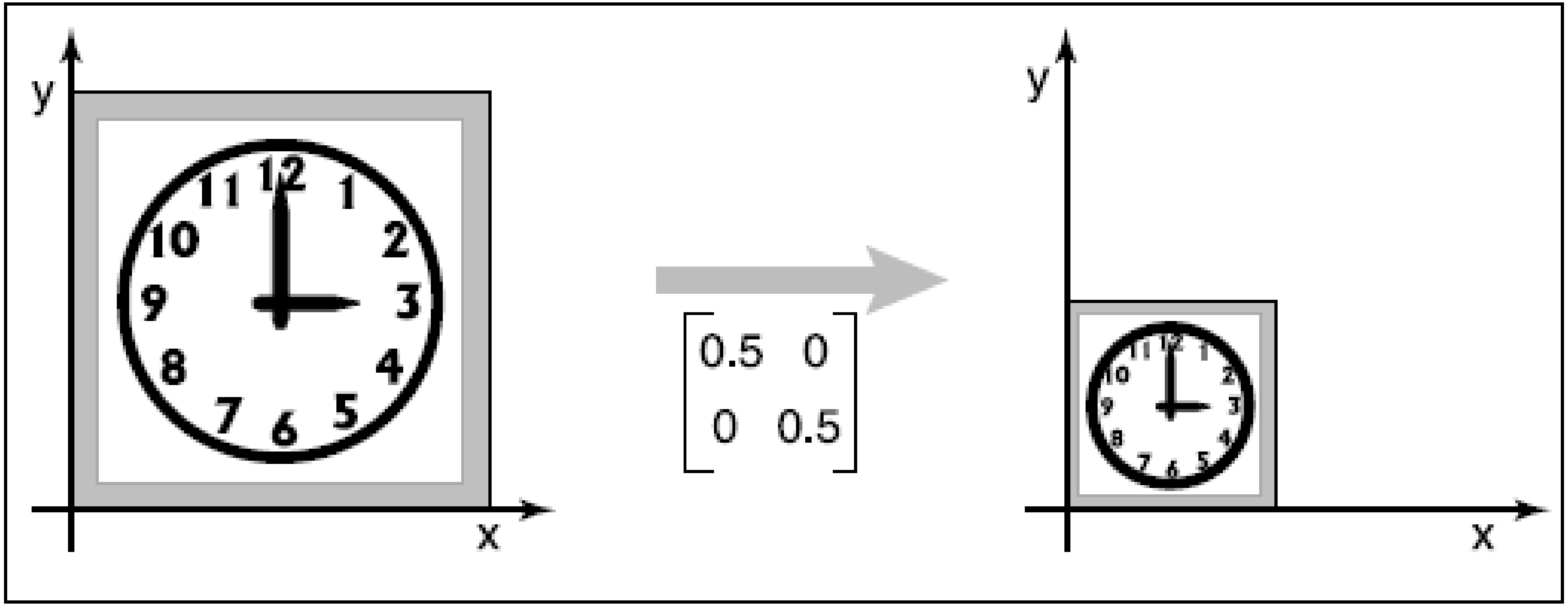
Transformações Lineares no Plano

- Transformação Linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \boxed{c \quad d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ \boxed{c \cdot x + d \cdot y} \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares no Plano

- Transformação Linear : Escalonamento (uniforme)



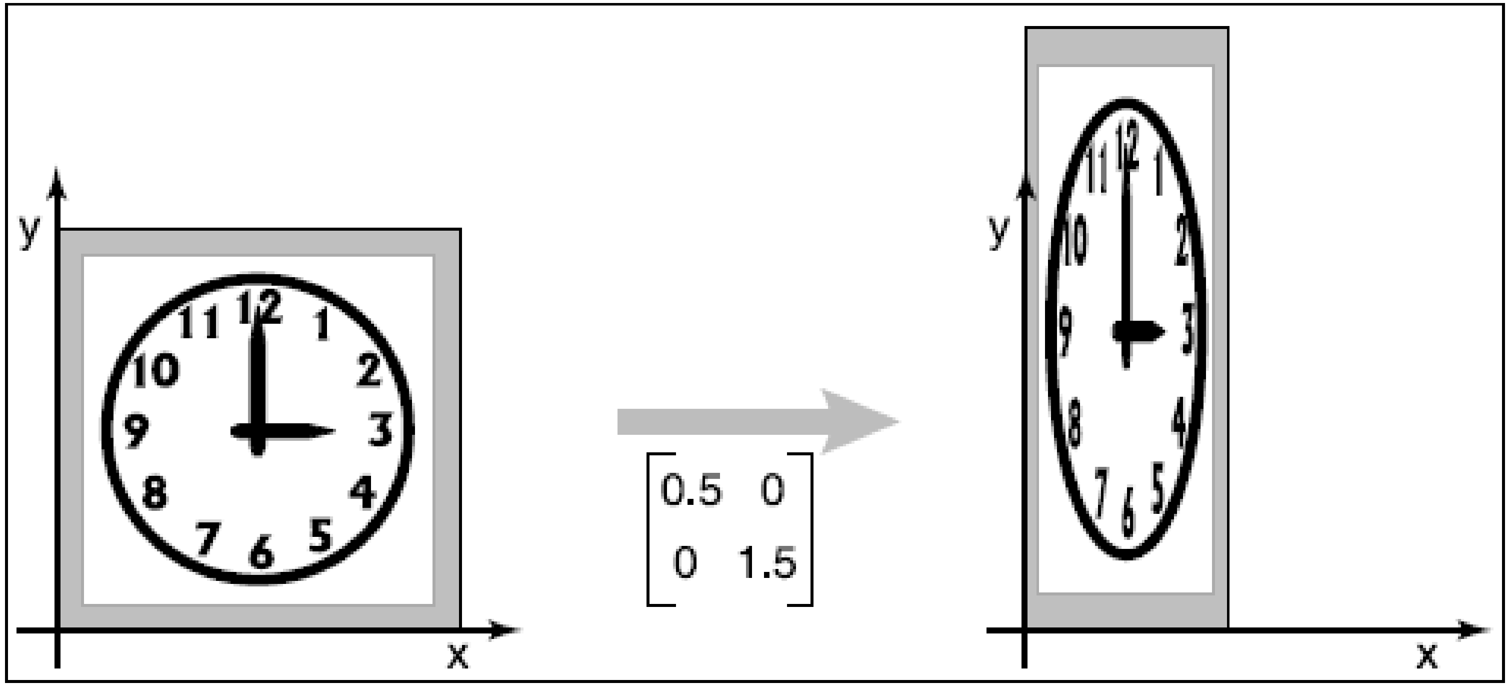
Transformações Lineares no Plano

- Transformação Linear: Escalonamento

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares no Plano

- Transformação Linear: Escalonamento (não-uniforme)



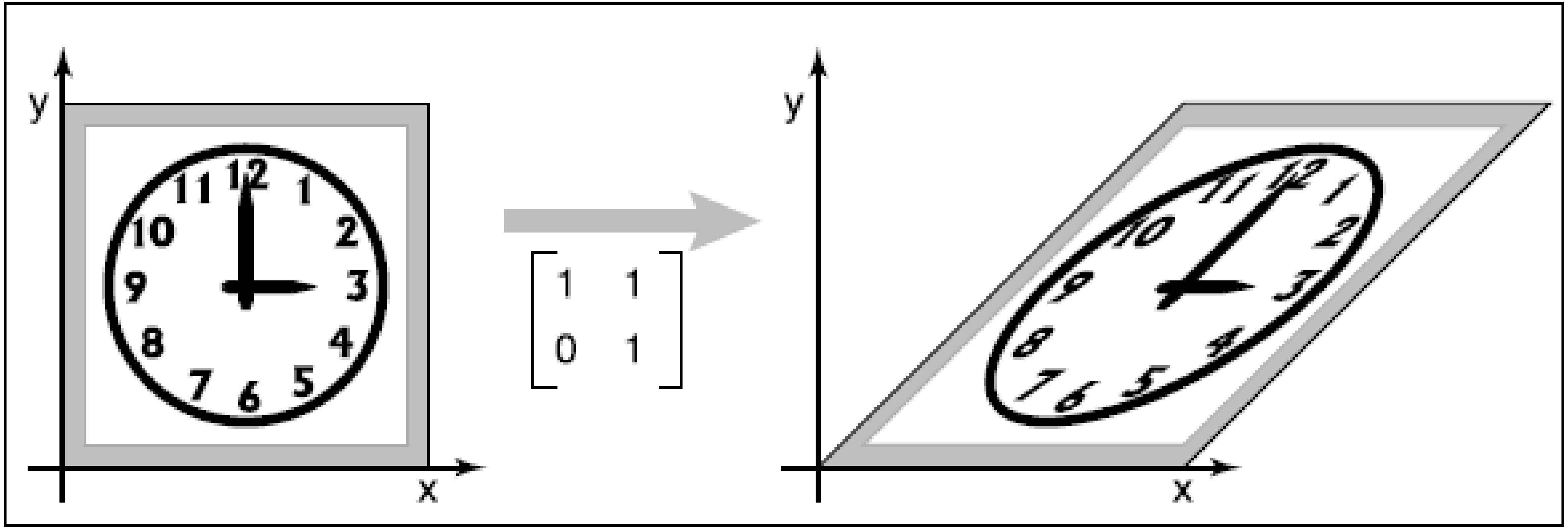
Transformações Lineares no Plano

- Transformações Lineares: Cisalhamento

$$\begin{bmatrix} 1 & s_x \\ s_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + s_x \cdot y \\ s_y \cdot x + y \end{bmatrix}$$

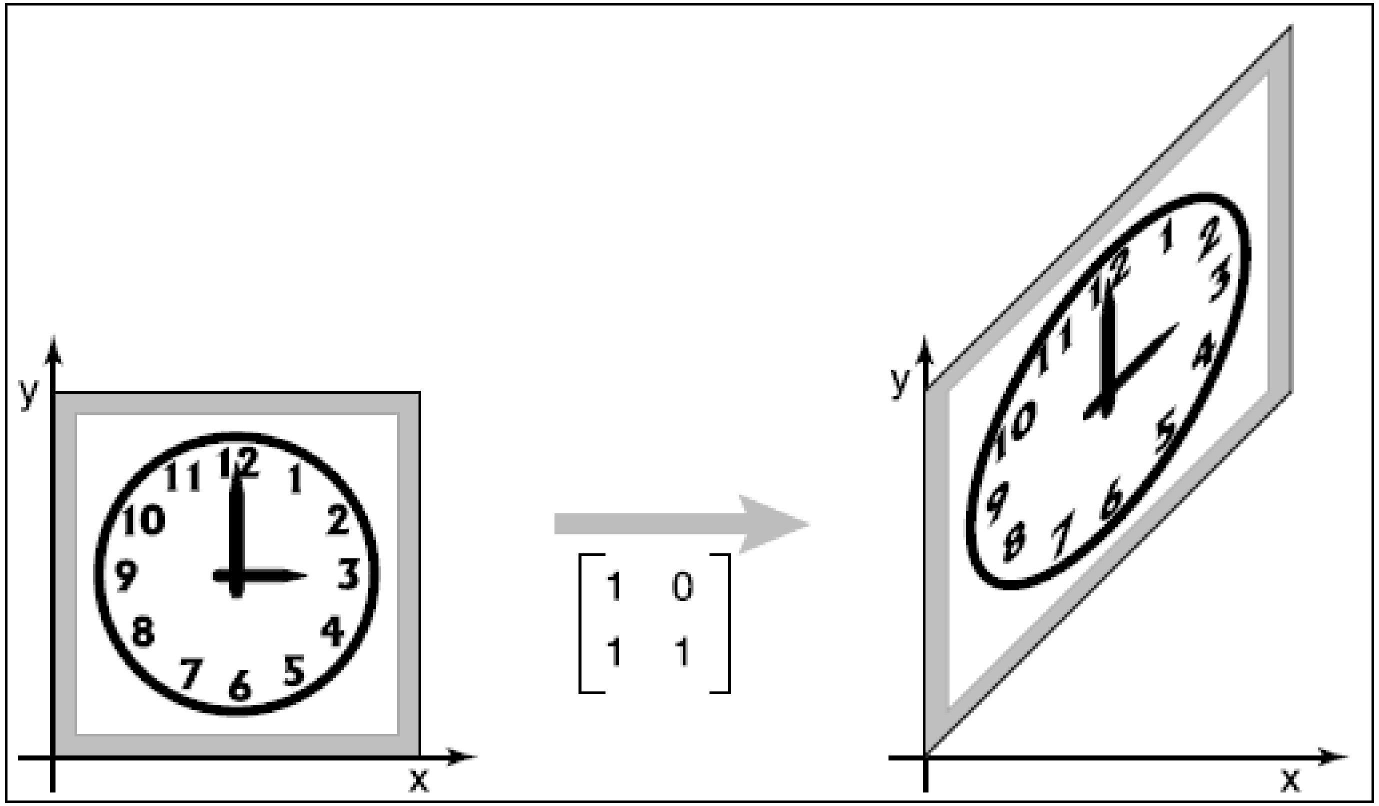
Transformações Lineares no Plano

- Transformações Lineares: Cisalhamento



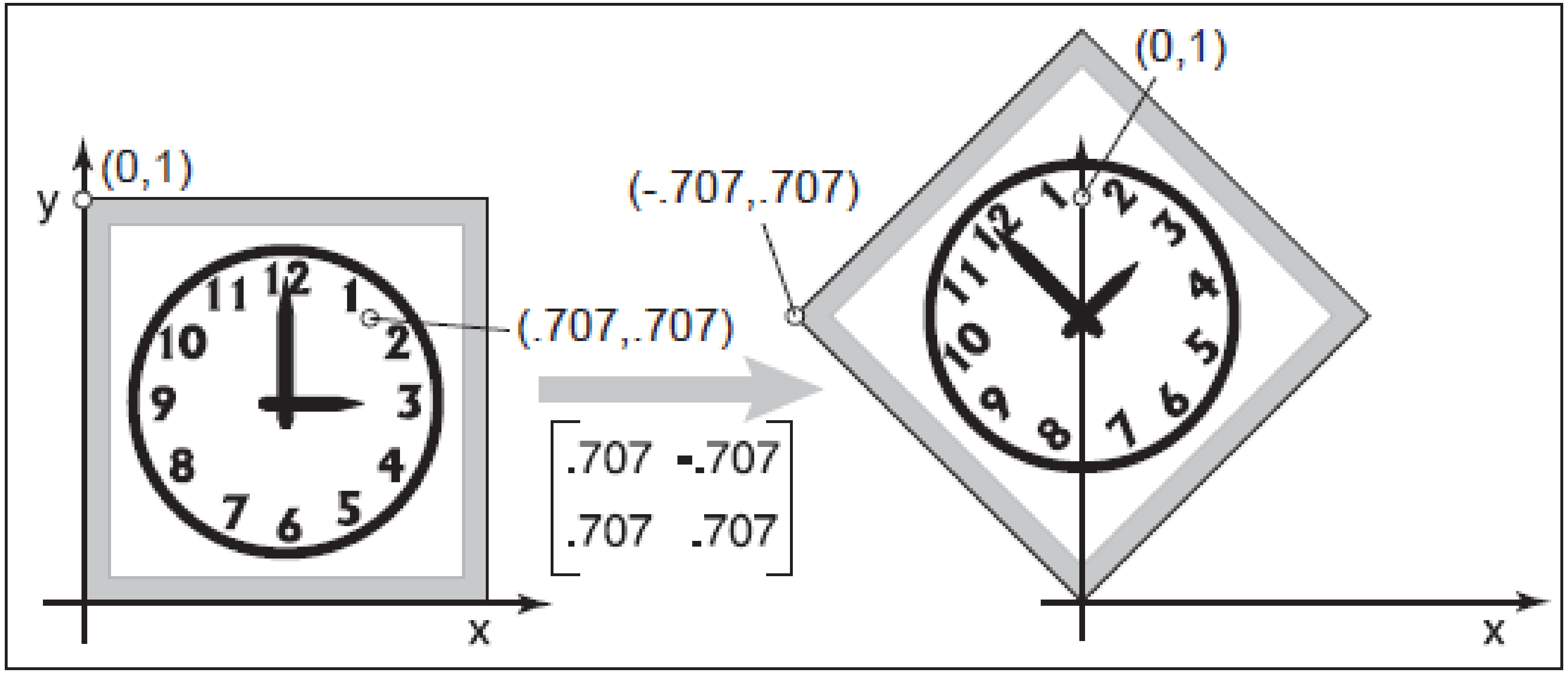
Transformações Lineares no Plano

- Transformações Lineares: Cisalhamento



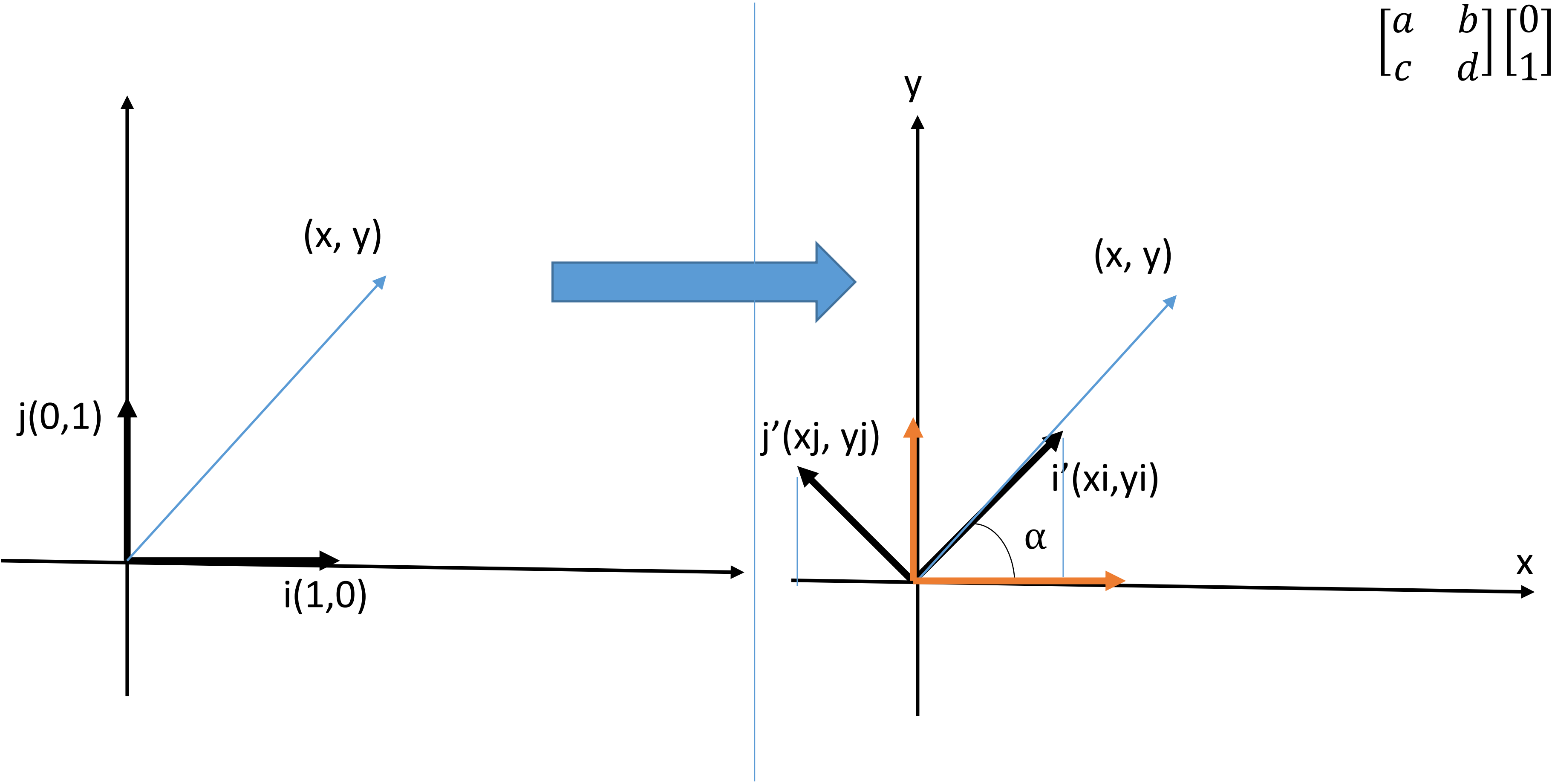
Transformações Lineares no Plano

- Rotação



Transformações Lineares no Plano

- Pontos indicam posições no plano.



$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90+\alpha) \\ \sin(90+\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$a = \cos(\alpha)$$
$$c = \sin(\alpha)$$
$$b = -\sin(\alpha)$$
$$d = \cos(\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Translação

- $T(x, y) = (x, y) + (dx, dy)$ (Definição), com x, y, dx e dy reais.
- É uma transformação linear?
  - $T((x1, y1) + (x2, y2)) = T(x1,y1) + T(x2, y2)$?
    - $T((x1, y1) + (x2, y2)) = (x1+x2+dx, \ y1+y2+dy)$
    - $T(x1, y1) = (x1 + dx, y1 + dy)$
    - $T(x2, y2) = (x2 + dx, y2 + dy)$
    - $T(x1, y1) + T(x2, y2) = (x1 + x2 + 2dx, y1 + y2 + 2dy)$
    - Portanto:
    - $T((x1, y1) + (x2, y2)) != T(x1, y1) + T(x2, y2)$
    - Logo $T(x, y)$ não é linear
  - $T(k (x1, y1)) = k T(x1, y1)$?

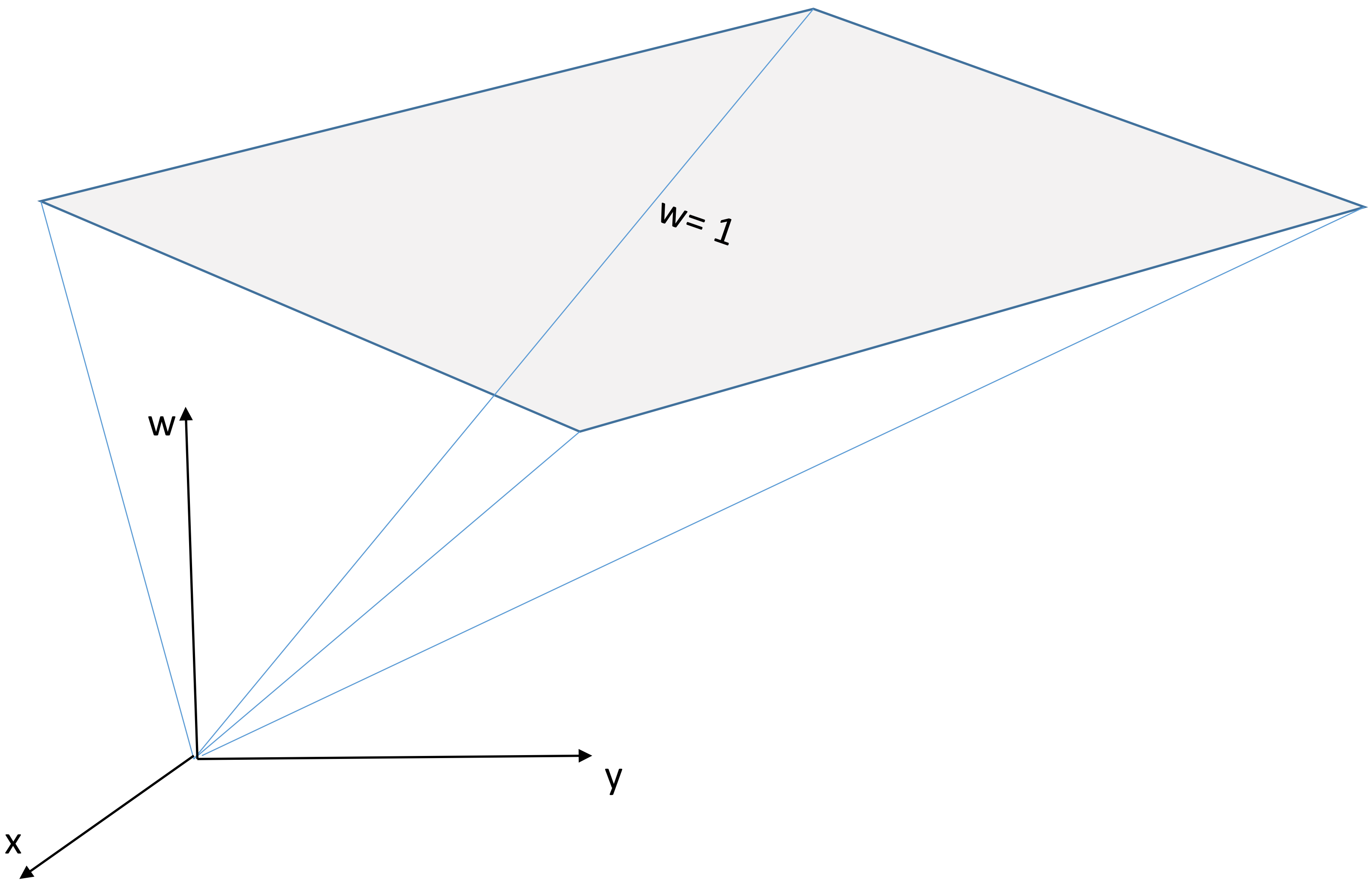
Translação

- O fato da translação não ser uma transformação linear, impede dessa transformação no plano ser representada por uma matriz bidimensional.
  - Isso dificulta a implementação de sistemas gráficos
  - Qual a solução?

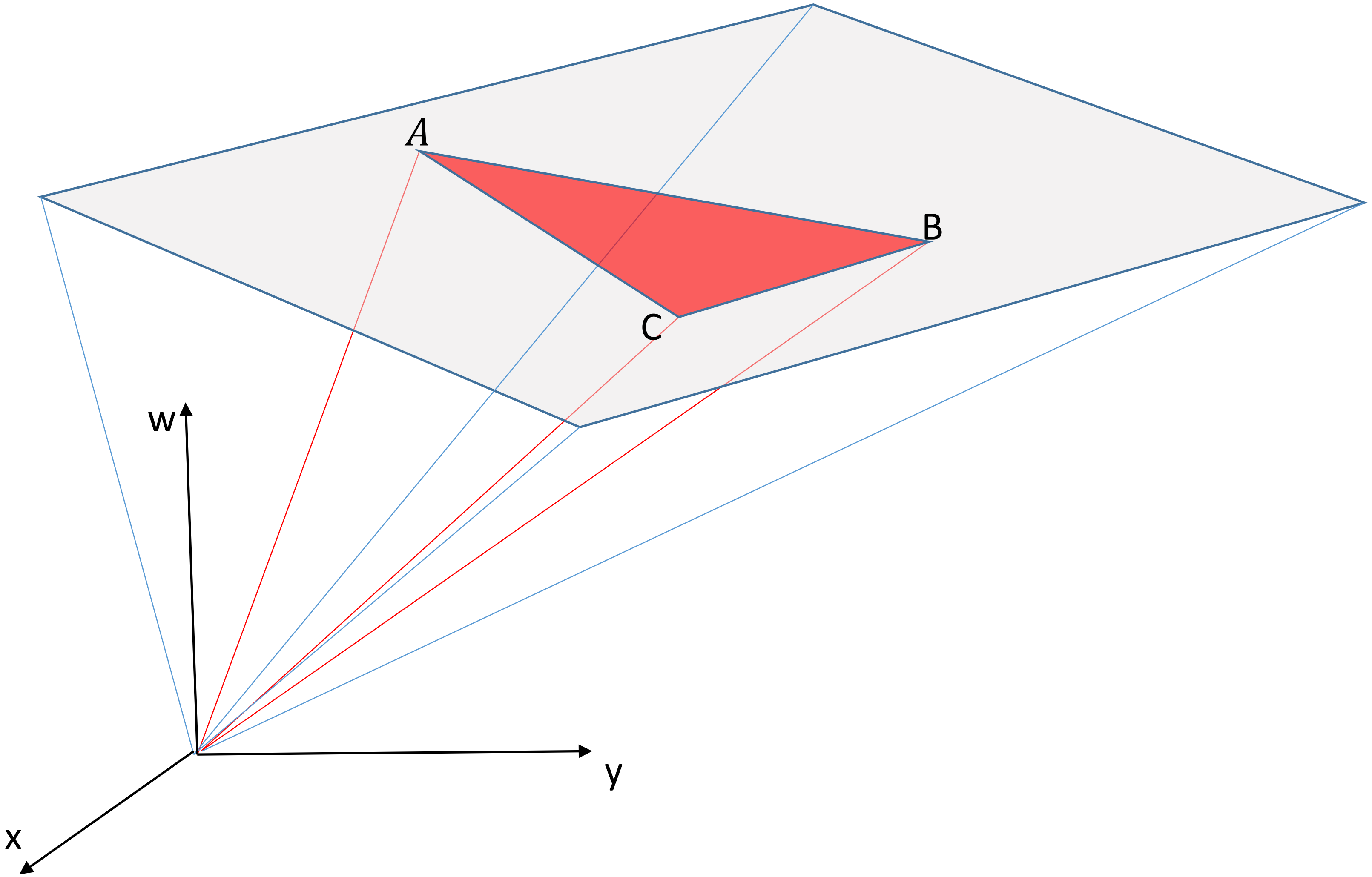
Translação

- O fato da translação não ser uma transformação linear, impede dessa transformação no plano ser representada por uma matriz bidimensional.
  - Isso dificulta a implementação de sistemas gráficos
  - Qual a solução?

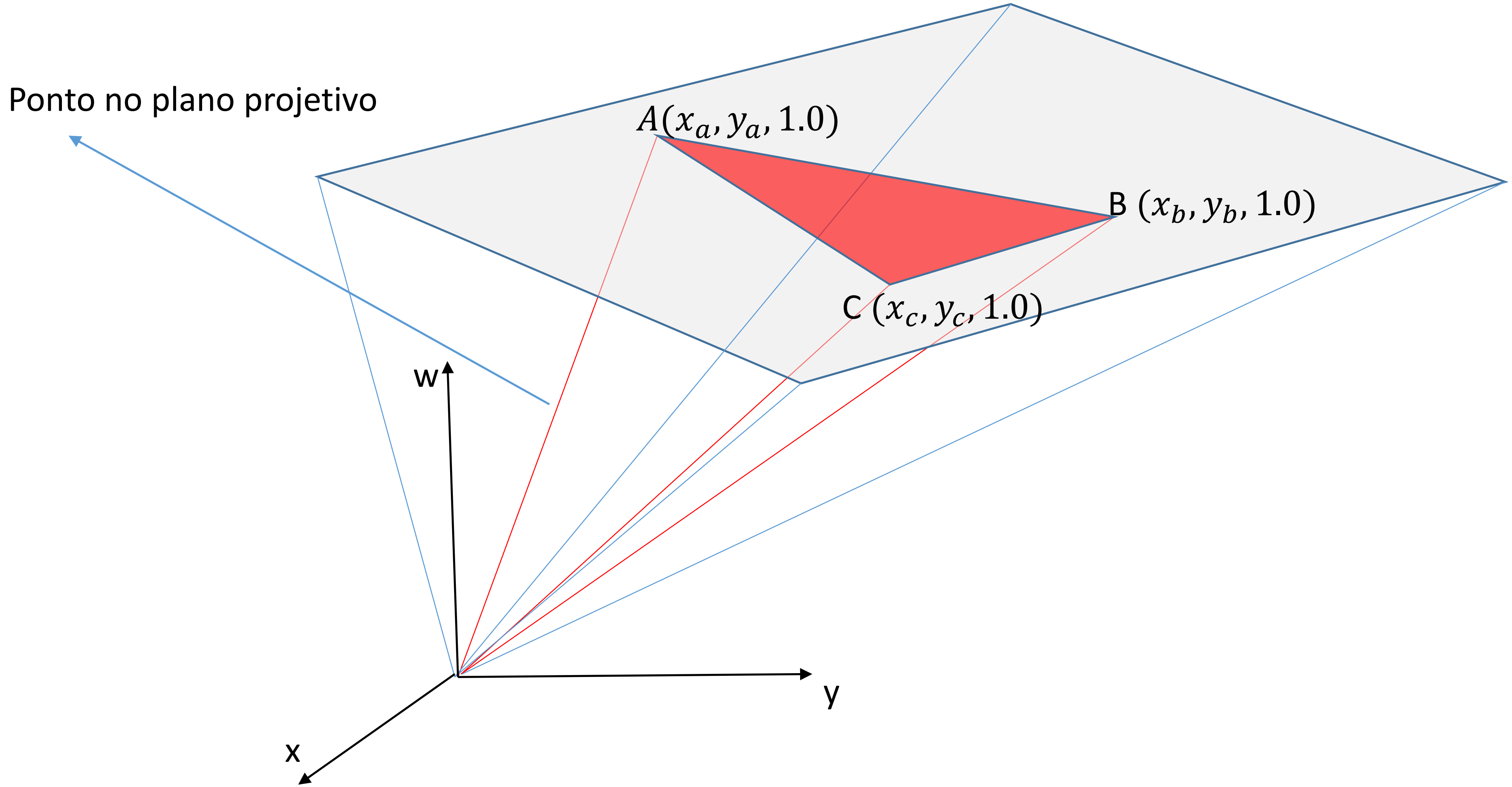
Plano Projetivo Real



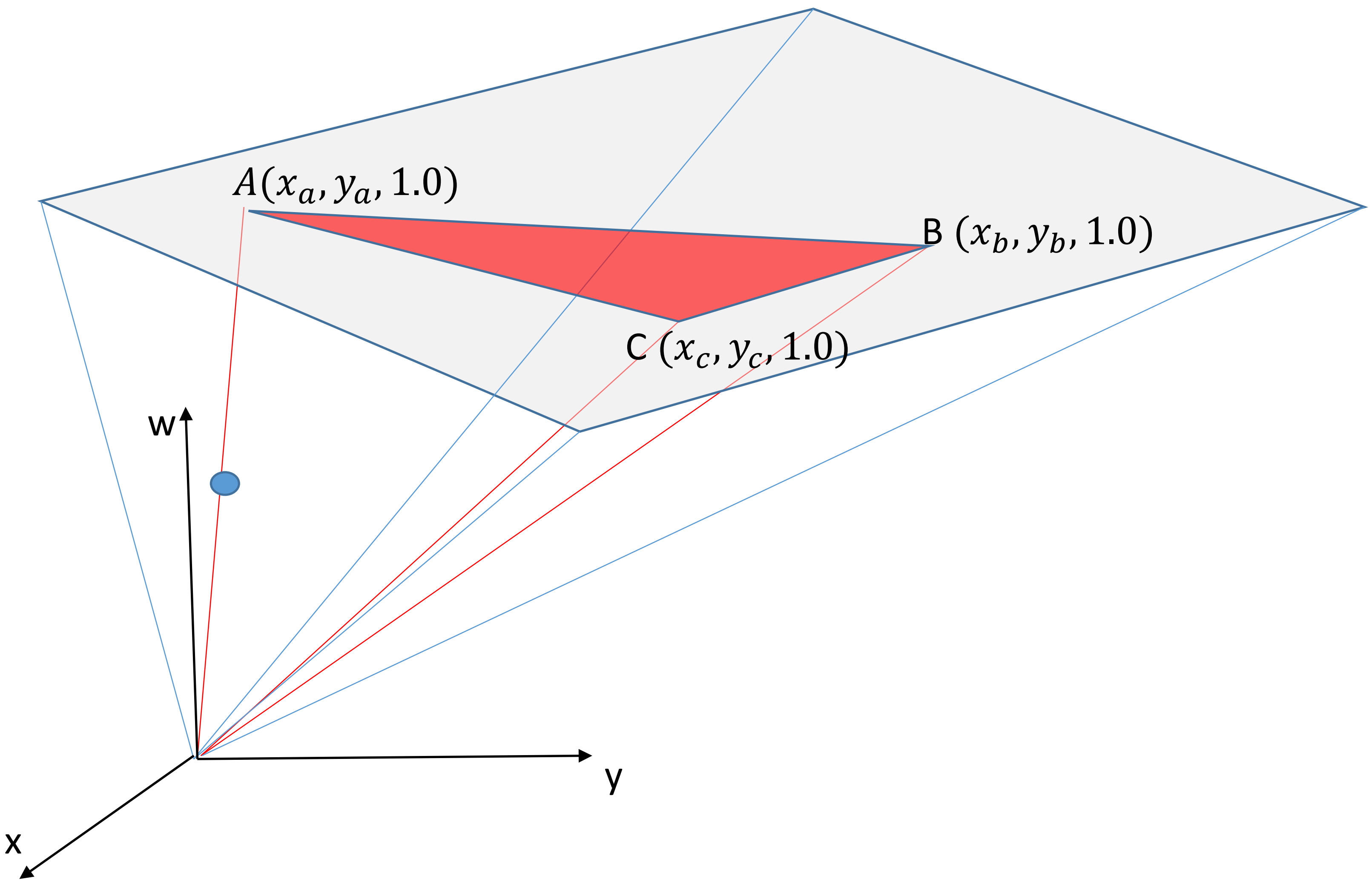
Plano Projetivo Real



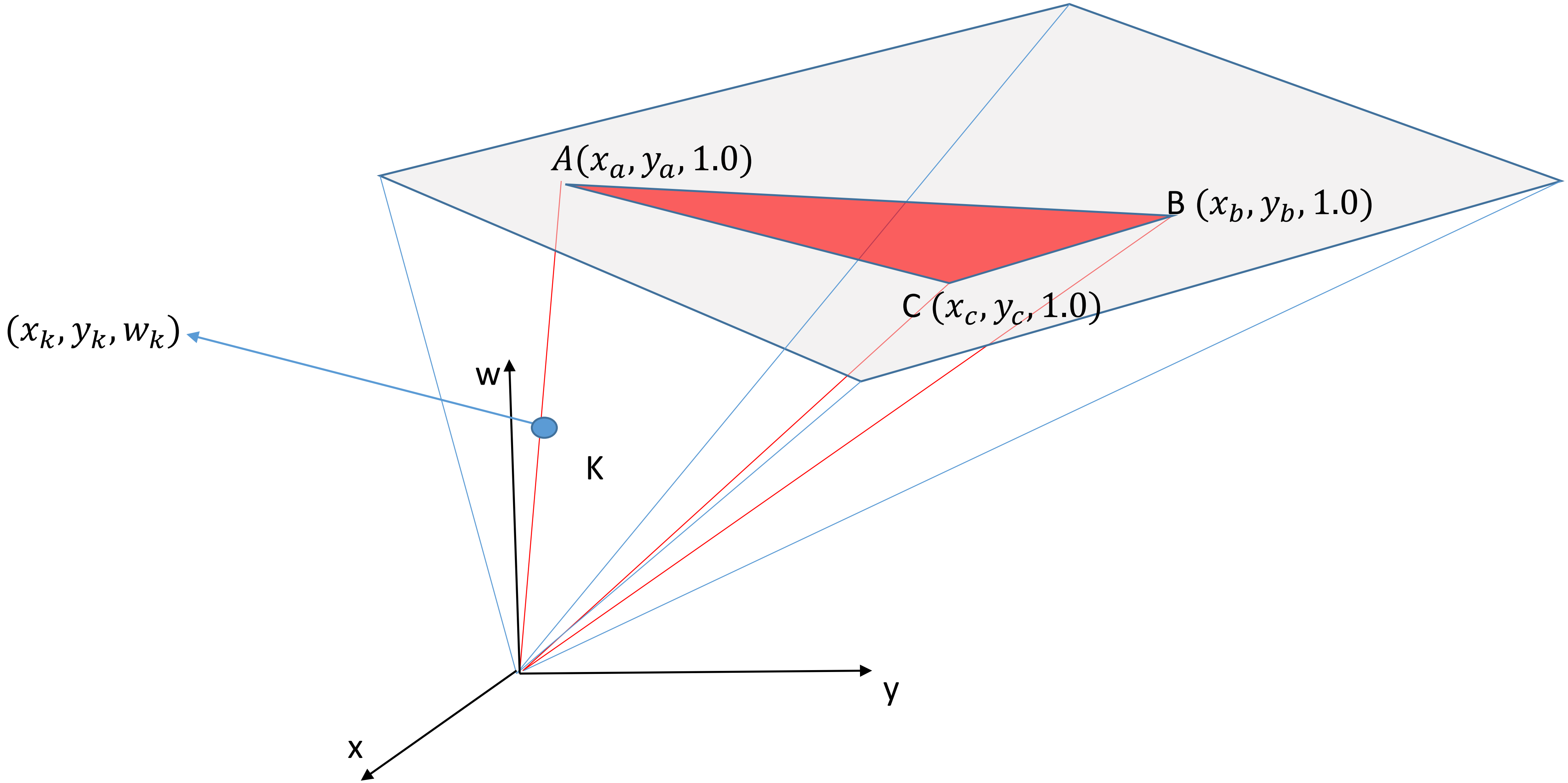
Plano Projetivo Real



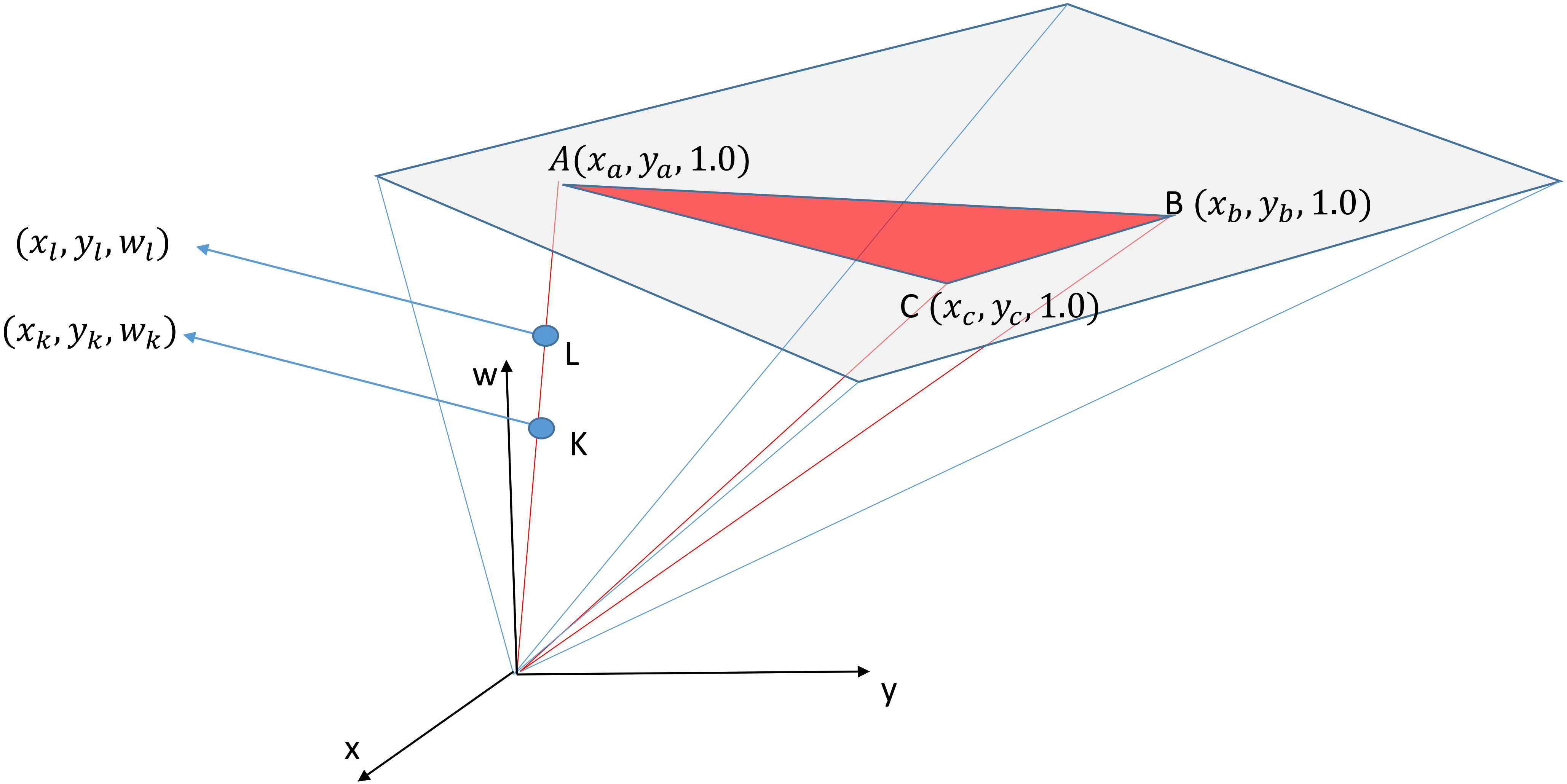
Plano Projetivo Real



Plano Projetivo Real

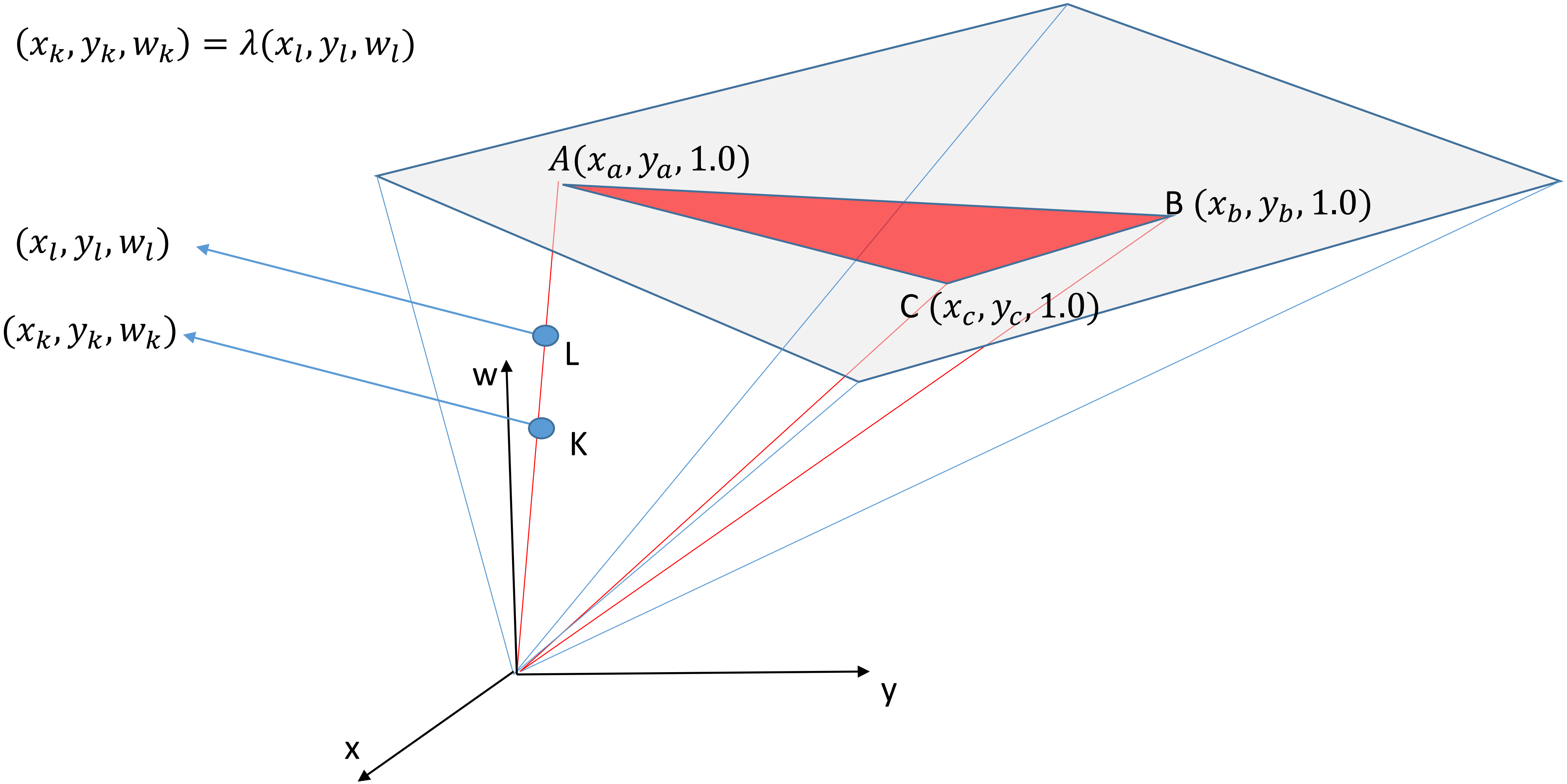


Plano Projetivo Real

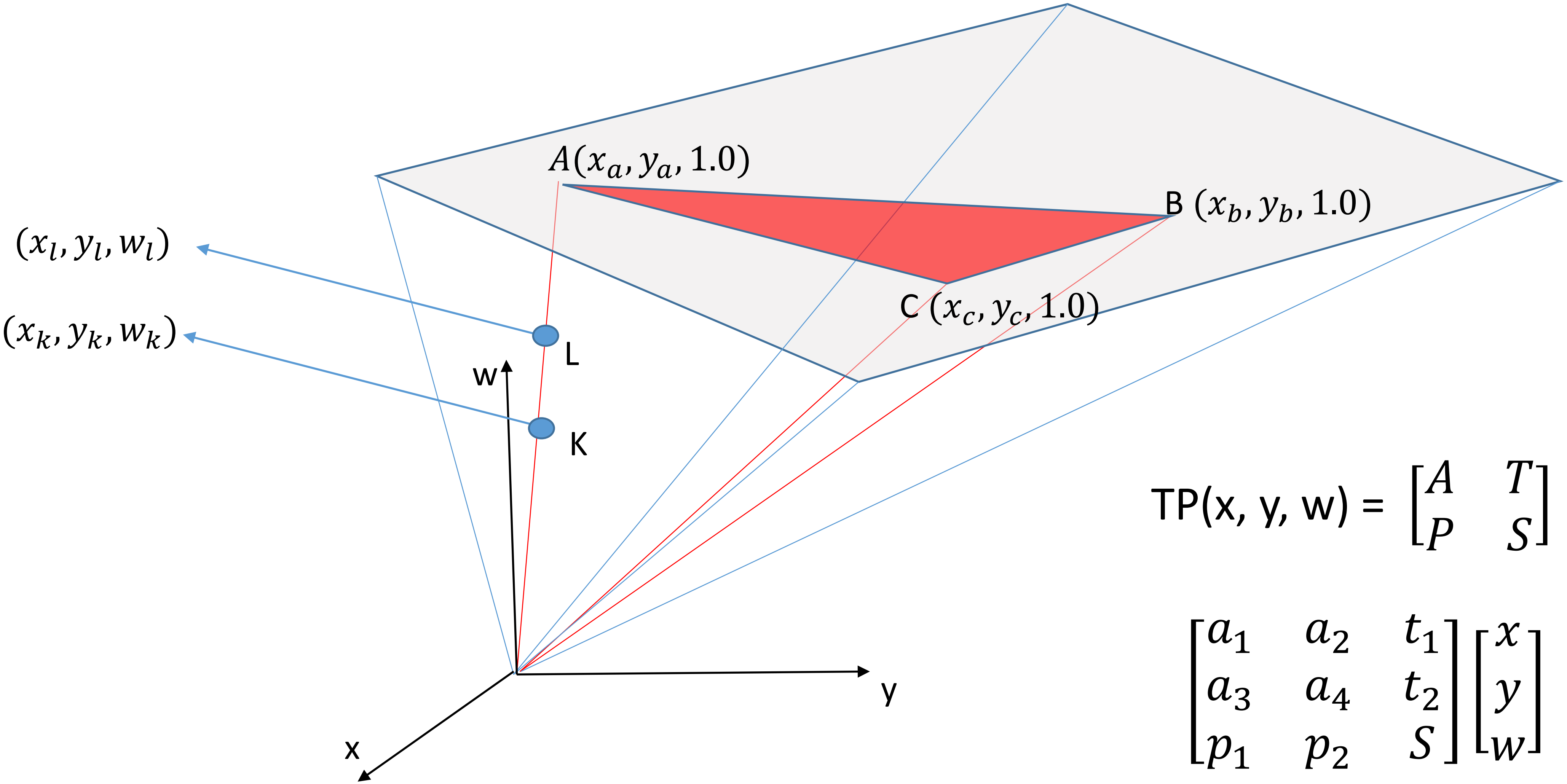


Plano Projetivo Real

$(x_k, y_k, w_k) = \lambda(x_l, y_l, w_l)$



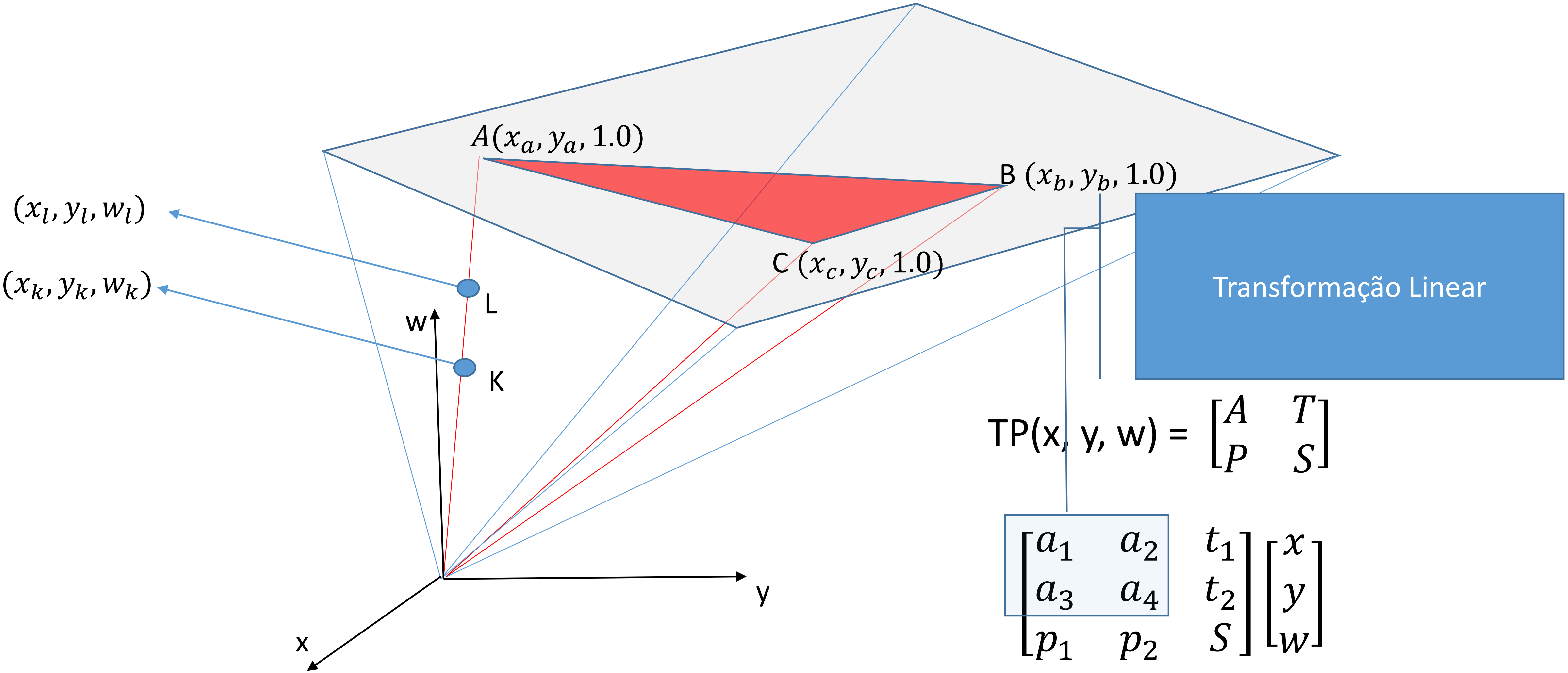
Plano Projetivo Real: Transformação Projetiva



TP(x, y, w) = $\begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & t_1 \\ a_3 & a_4 & t_2 \\ p_1 & p_2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

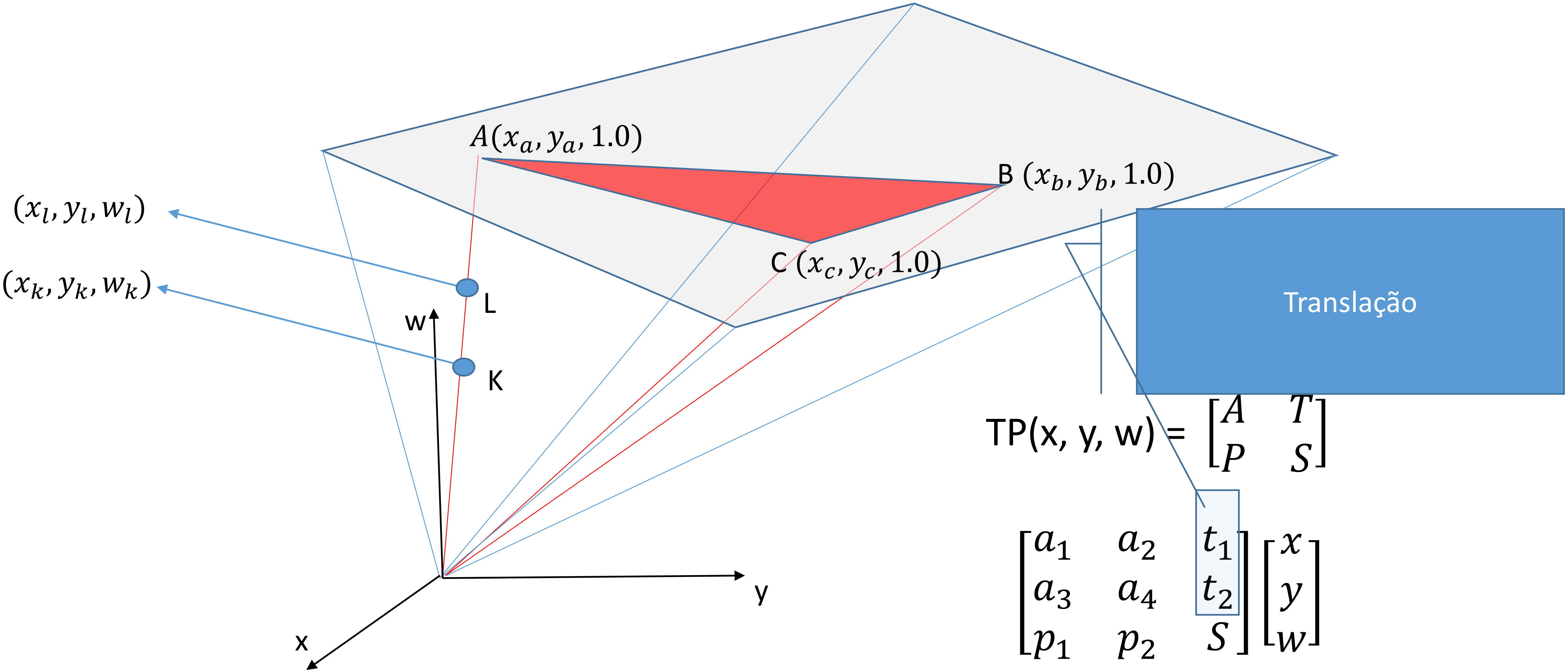
Plano Projetivo Real: Transformação Projetiva



$$TP(x, y, w) = \begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & t_1 \\ a_3 & a_4 & t_2 \\ p_1 & p_2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

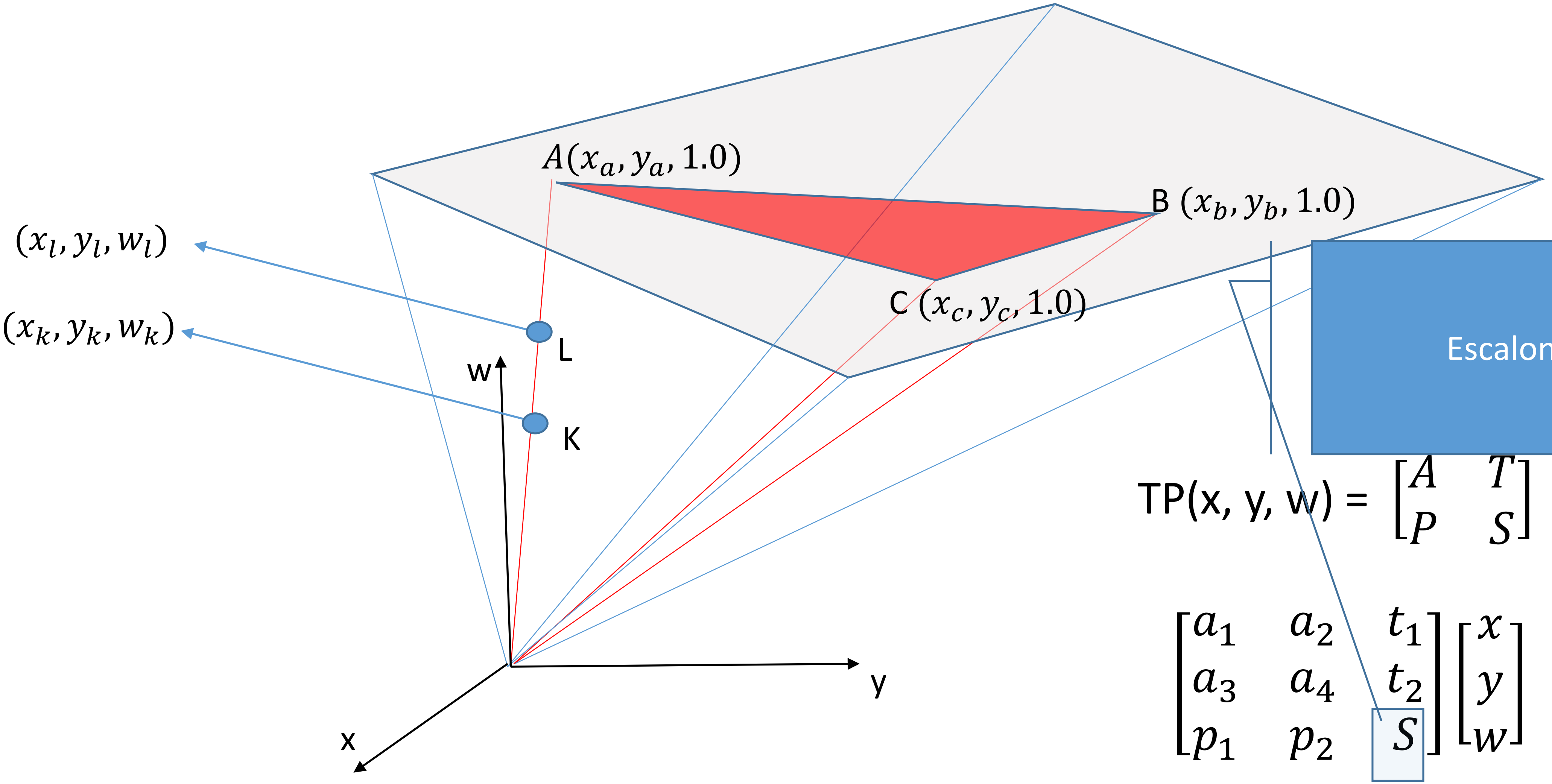
Plano Projetivo Real: Transformação Projetiva



$$\text{TP}(x, y, w) = \begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & t_1 \\ a_3 & a_4 & t_2 \\ p_1 & p_2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Plano Projetivo Real: Transformação Projetiva

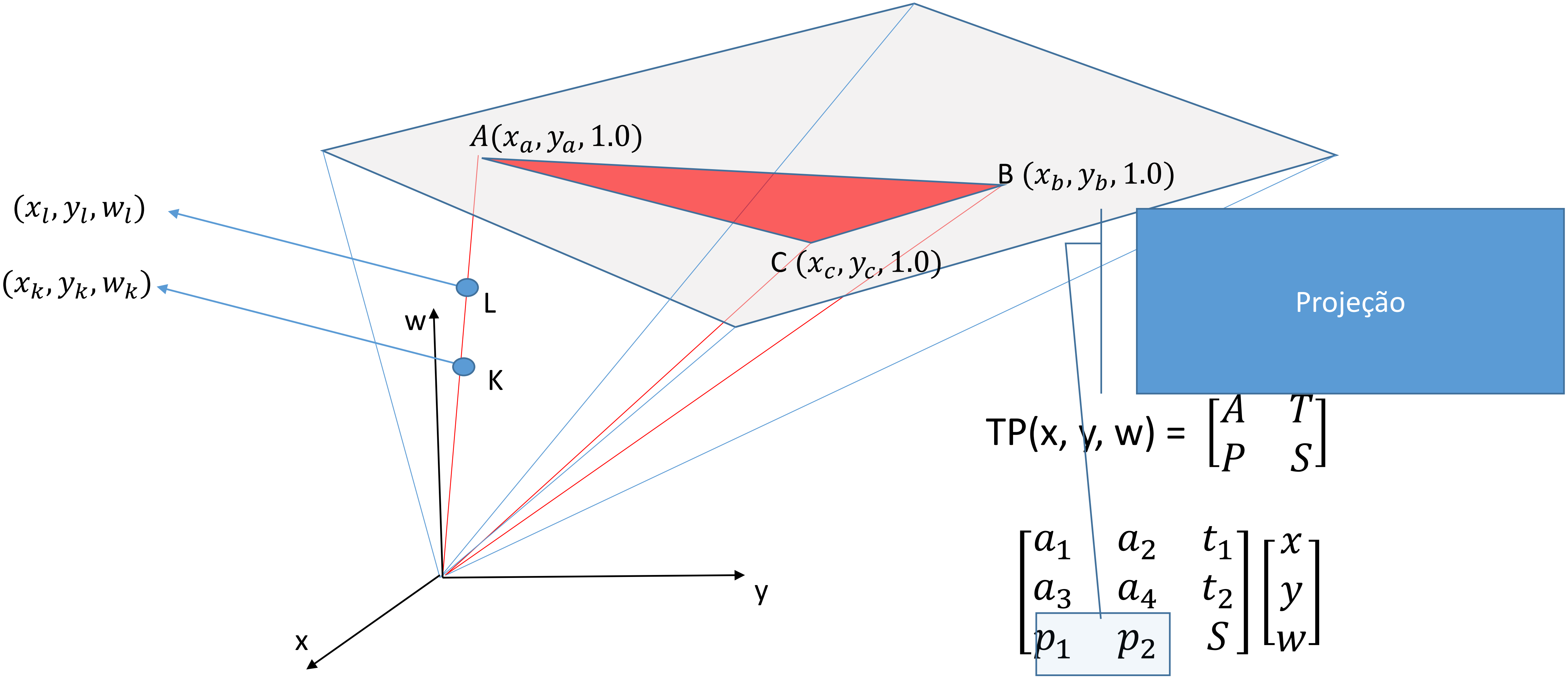


Escalonamento

TP(x, y, w) = $\begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & t_1 \\ a_3 & a_4 & t_2 \\ p_1 & p_2 & \boxed{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Plano Projetivo Real: Transformação Projetiva



$$TP(x, y, w) = \begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & t_1 \\ a_3 & a_4 & t_2 \\ p_1 & p_2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Uma transformação no plano é representada por meio de uma transformação projetiva.
- Primeiro, define-se os pontos do plano projetivo:

$$[x, y] \Rightarrow [\mathrm{x}, y, \mathrm{w}]$$

- Geralmente, adotamos w = 1.0

Coordenadas Homogêneas

- Uma transformação no plano é representada por meio de uma transformação projetiva.
- A transformação que permite representar translação no plano agora pode ser feita assim:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & t_1 \\ a_3 & a_4 & t_2 \\ p_1 & p_2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 10 \\ y \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- $R(\theta)$ = rotação em um ângulo igual a θ

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysen(\theta) \\ xsen(\theta) + ycos(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- S(s_x, s_y) = escalonamento de s_x e s_y

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

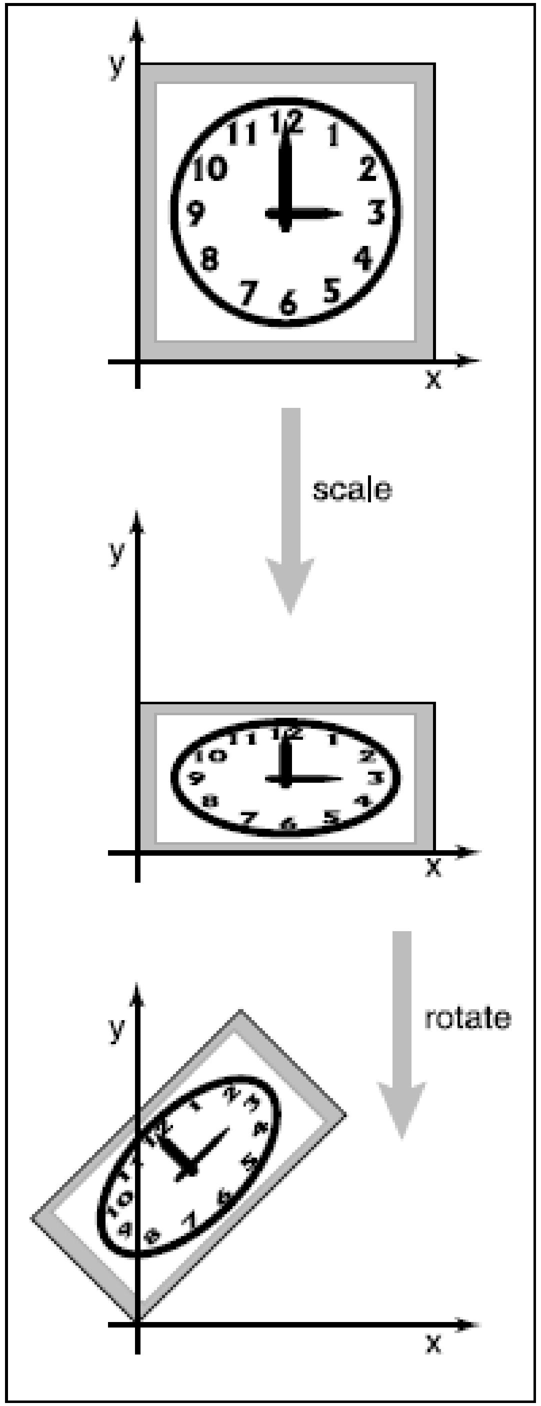
Coordenadas Homogêneas

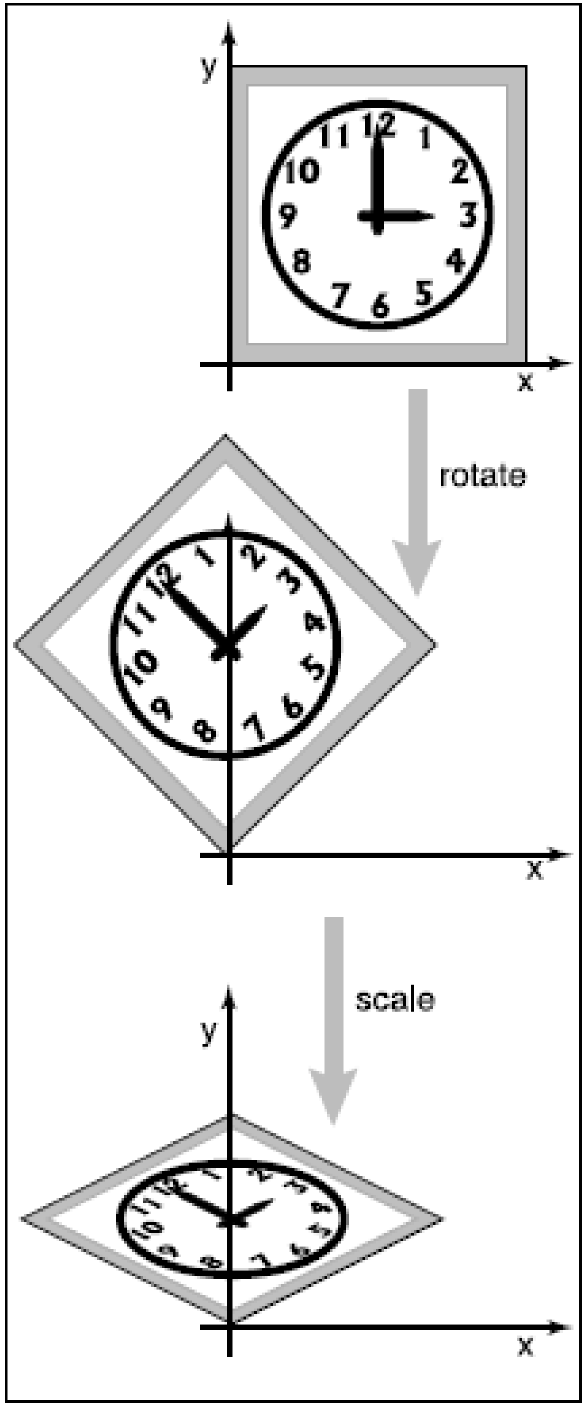
- T$\left(t_x, t_y\right)$ = translação de t_x e de t_y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + tx \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinando Transformações

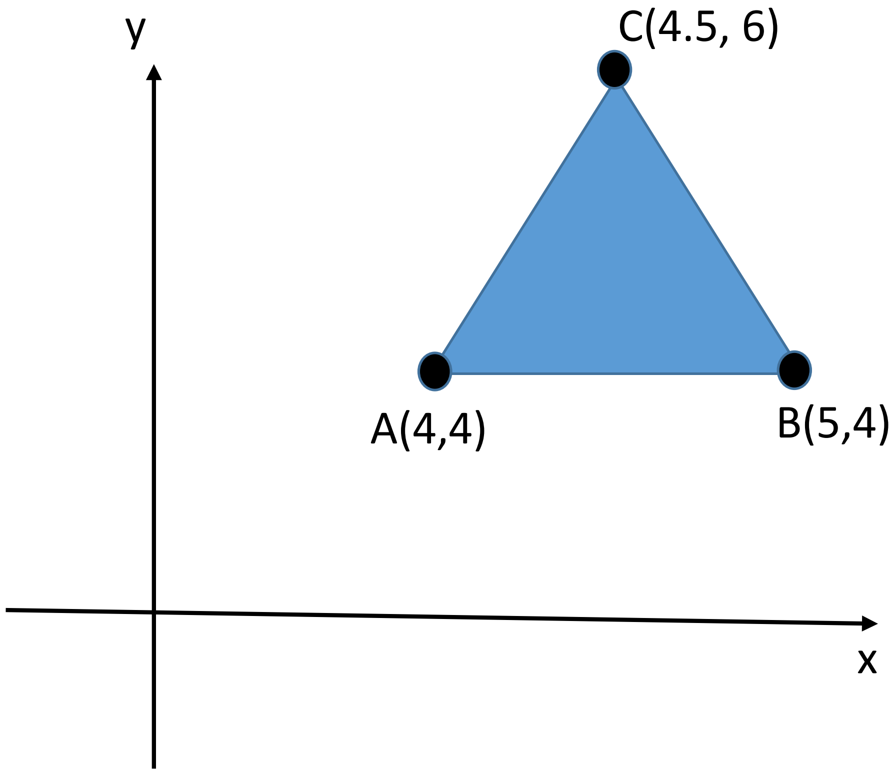
- Combina-se transformações simplesmente multiplicando-se matrizes.
- Cuidado: multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa!


y
x
scale
y
x
rotate
y
x


y
x
rotate
x
scale
y
x

Composição de Transformações

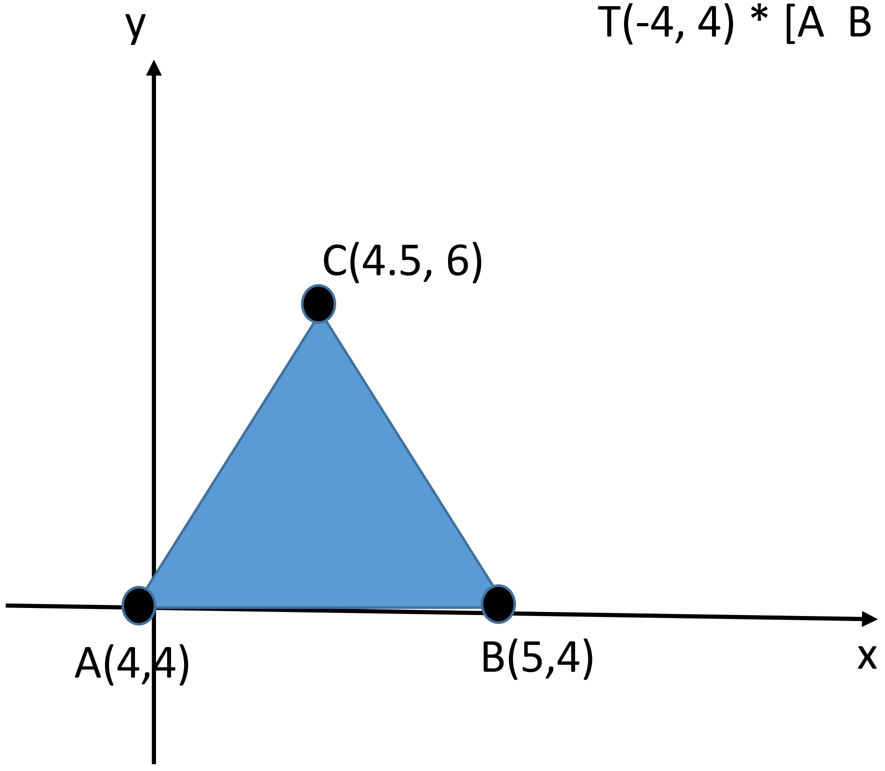
- Exemplo: transladar triângulo para ter o vértice A na origem e, em seguida, gira-lo 45 graus.



Composição de Transformações

- Exemplo: transladar triângulo para ter o vértice A na origem e, em seguida, gira-lo 45 graus.

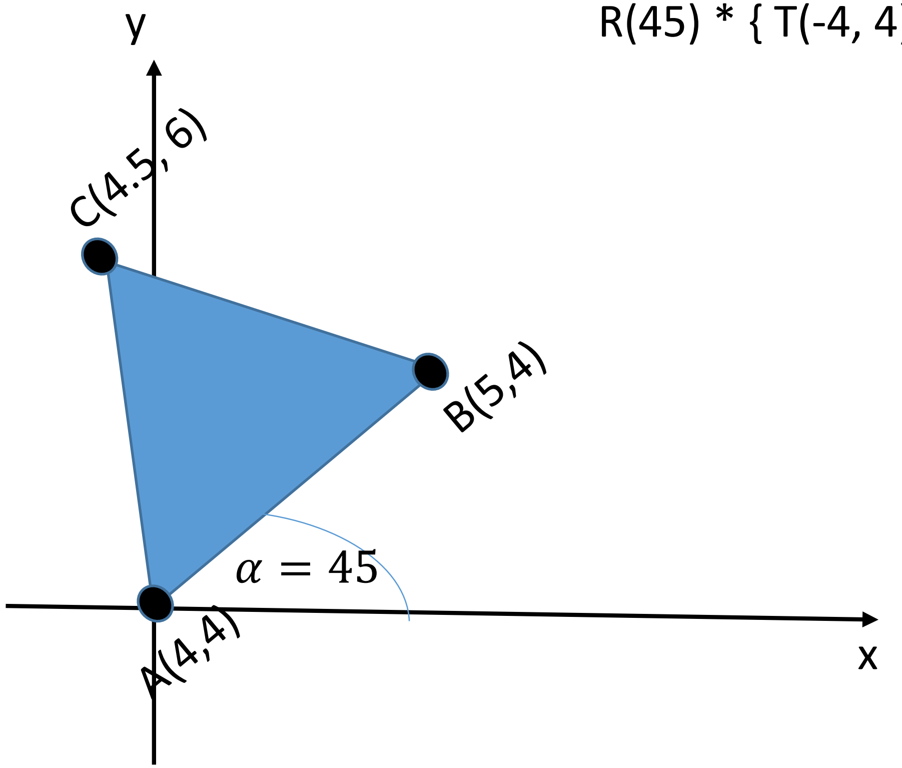
T(-4, 4) * [A B   C]



Composição de Transformações

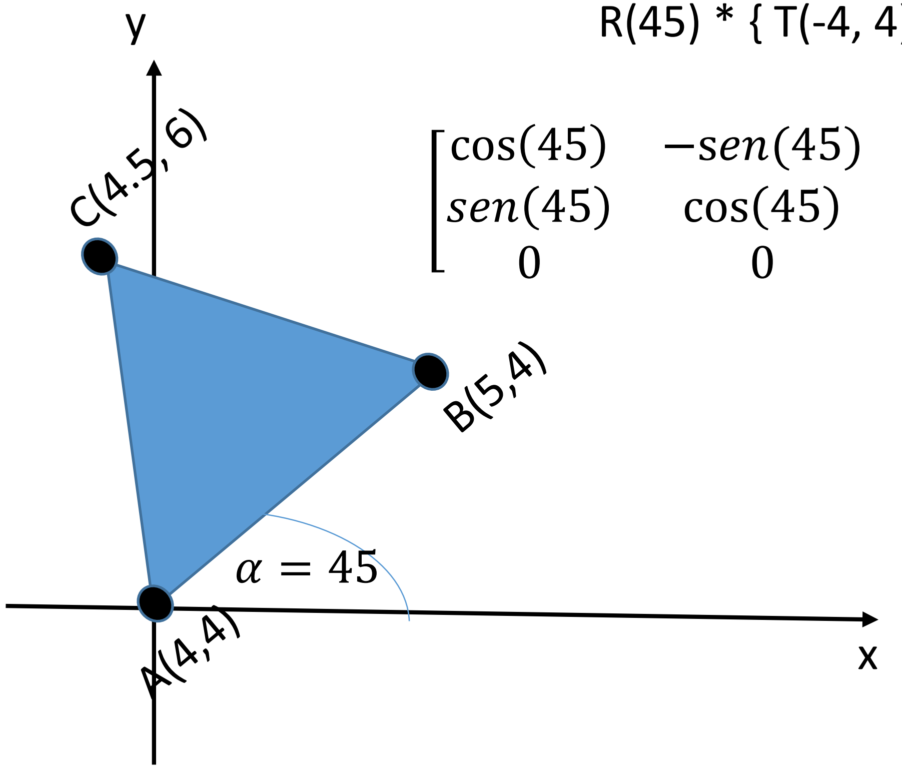
- Exemplo: transladar triângulo para ter o vértice A na origem e, em seguida, gira-lo 45 graus.

R(45) * { T(-4, 4) * [A B C] }



Composição de Transformações

- Exemplo: transladar triângulo para ter o vértice A na origem e, em seguida, gira-lo 45 graus.



R(45) * { T(-4, 4) * [A B   C] }

$$\begin{bmatrix} \cos(45) & -sen(45) & 0 \\ sen(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

FIM

- Leia o capítulo seis do livro de referência