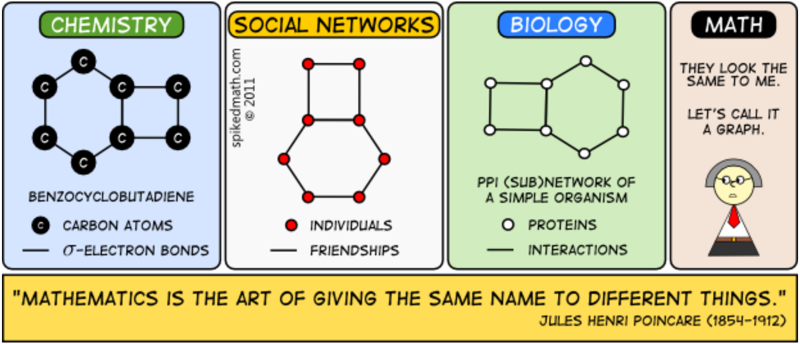
AULA 1

Algoritmos para Grafos



http://spikedmath.com/250.html

Administração

Página da disciplina: aulas, dúvias, anúncios, . . .

`sistema`

Livro:

- PF = Paulo Feofiloff,
  Algoritmos para Grafos em C via Sedgewick
  `www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/`
- S = Robert Sedgewick,
  Algorithms in C (part 5: Graph Algorithms)
- CLRS = Cormen-Leiserson-Rivest-Stein,
  Introductions to Algorithms

Algoritmos para Grafos

Algoritmos para grafos é:

- uma disciplina que trabalha com um TAD
- um laboratório de algoritmos sobre grafos

MAC0328

Algoritmos para grafos combina técnicas de

- programação
- estruturas de dados
- teoria dos grafos

para resolver problemas sobre grafos.

Pré-requisitos

O pré-requisito oficial de Algoritmos para Grafos é

- Matemática Discreta
- Estrutura de Dados

Principais tópicos

- grafos dirigidos
- estruturas de dados para grafos
- construção de grafos aleatórios
- florestas e árvores
- caminhos e ciclos
- **busca em largura**
- caminhos mínimos
- grafos bipartidos
- **busca em profundidade**
- grafos dirigidos acíclicos
- ordenação topológica
- pontes e ciclos
- grafos conexos e componentes
- grafos biconexos
- árvores geradoras mínimas
- fluxo em redes

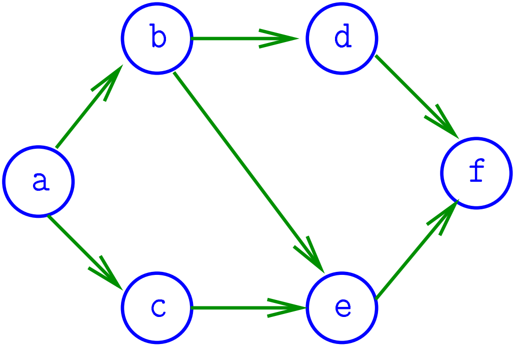
Digrafos

S 17.0, 17.1

Digrafos

Um **digrafo** (*directed graph*) consiste de um conjunto de vértices (bolas) e um conjunto de arcos (flechas)

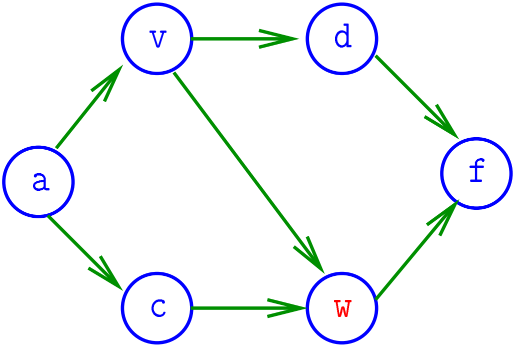
Exemplo: representação de um grafo



Arcos

Um **arco** é um par ordenado de vértices

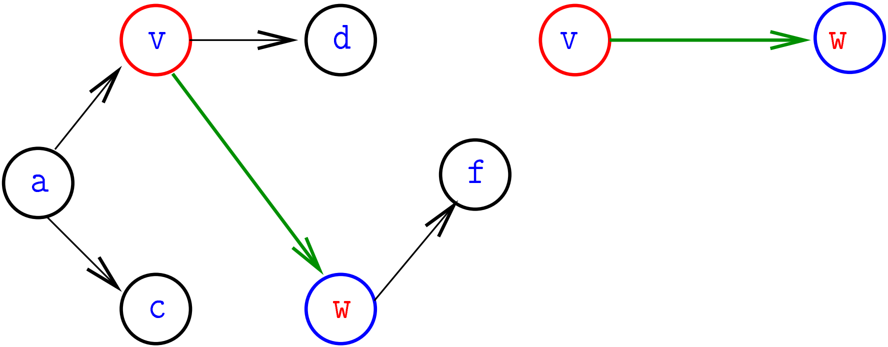
Exemplo: `v` e `w` são vértices e `v-w` é um arco



Ponta inicial e final

Para cada arco v-w, o vértice v é a **ponta inicial** e w é a **ponta final**

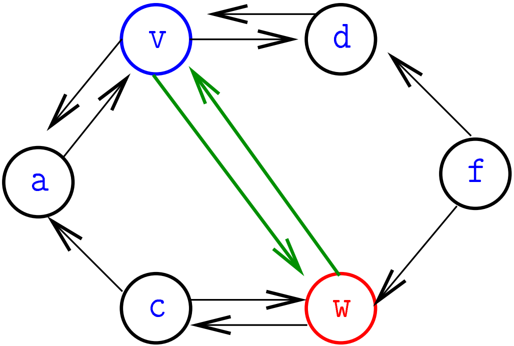
Exemplo: v é ponta inicial e w é ponta final de v-w



Arcos anti-paralelos

Dois arcos são **anti-paralelos** se a ponta inicial de um é ponta final do outro

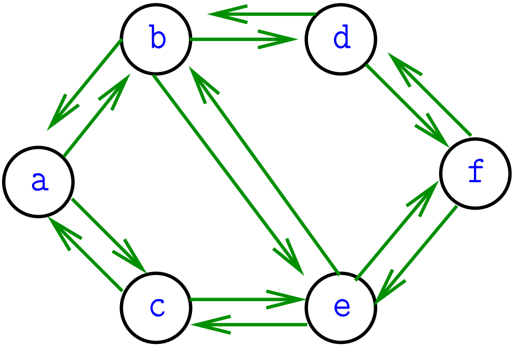
Exemplo: v-w e w-v são anti-paralelos



Digrafos simétricos

Um digrafo é **simétrico** se cada um de seus arcos é anti-paralelo a outro

Exemplo: digrafo simétrico

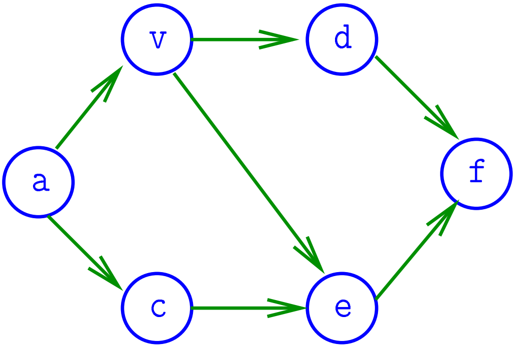


Graus de entrada e saída

grau de entrada de $\mathtt{v}$= no. arcos com ponta final $\mathtt{v}$

grau de saída de $\mathtt{v}$ = no. arcos com ponta inicial $\mathtt{v}$

Exemplo: $\mathtt{v}$ tem grau de entrada 1 e de saída 2



Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com V vértices?

Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com V vértices?

A resposta é $V \times (V-1) = \Theta(V^2)$

digrafo **completo** = todo par ordenado de vértices distintos é arco

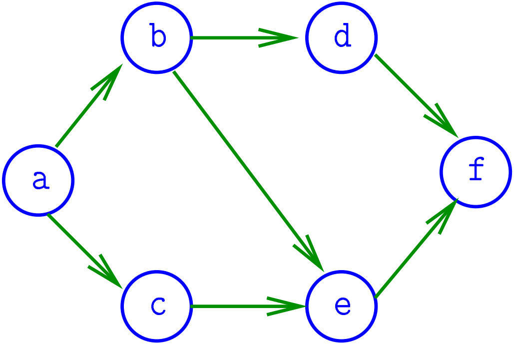
digrafo **denso** = tem "muitos" muitos arcos

digrafo **esparso** = tem "poucos" arcos

Especificação

Digrafos podem ser especificados através de sua lista de arcos

Exemplo:




```
d-f
b-d
a-c
b-e
e-f
a-b
```

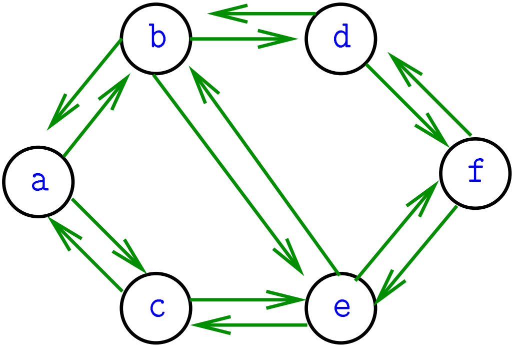
Grafos

S 17.0, 17.1

Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

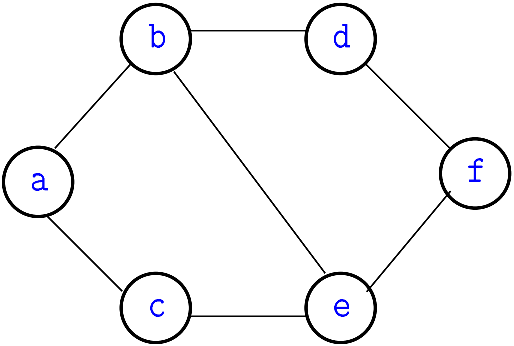
Exemplo: um grafo



Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

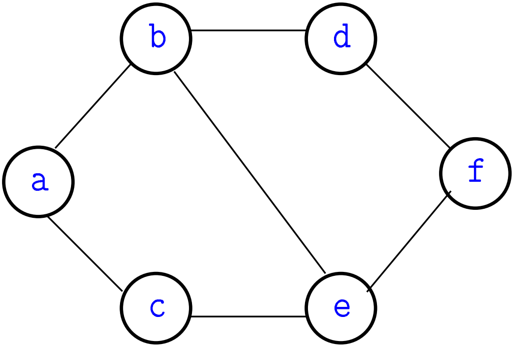
Exemplo: representação usual



Arestas

Uma **aresta** é um par de arcos anti-paralelos.

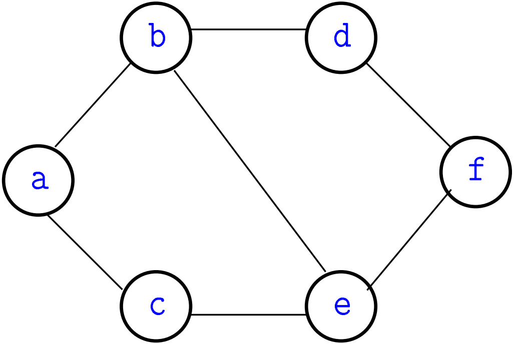
Exemplo: `b-a` e `a-b` são a **mesma** aresta



Especificação

Grafos podem ser especificados através de sua lista de arestas

Exemplo:



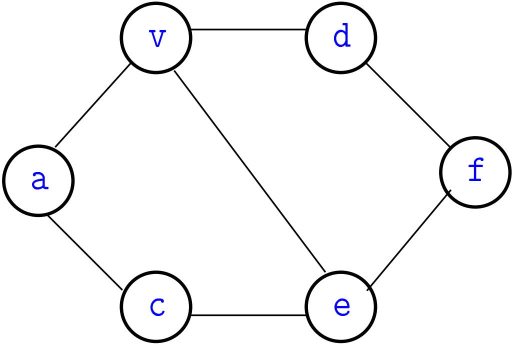

```
f-d
b-d
c-a
e-b
e-f
a-b
```

Graus de vértices

Em um grafo

grau de $\mathtt{v}$ = número de arestas com ponta em $\mathtt{v}$

Exemplo: $\mathtt{v}$ tem grau 3



Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com `V` vértices?

Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com $\mathtt{V}$ vértices?

A resposta é $\mathtt{V} \times (\mathtt{V} - 1)/2 = \Theta(\mathtt{V}^2)$

grafo **completo** = todo par **não**-ordenado de vértices distintos é aresta

Estruturas de dados

S 17.2

Vértices

Vértices são representados por objetos do tipo `Vertex`.

Os vértices de um digrafo são `0,1,...,V-1`.

```
#define Vertex int
```

Arcos

Um objeto do tipo `Arc` representa um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
} Arc;
```

ARC

A função `ARC` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

ARC

A função ARC recebe dois vértices v e w e devolve um arco com ponta inicial v e ponta final w.

```
Arc ARC (Vertex v, Vertex w) {
        Arc e;
        e.v= v;
        e.w= w;
        return e;
}
```

Arestas

Um objeto do tipo `Edge` representa uma aresta com pontas `v` e `w`.

Arestas

Um objeto do tipo `Edge` representa uma aresta com pontas `v` e `w`.

#define Edge Arc

Arestas

A função `EDGE` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve uma aresta com pontas `v` e `w`.

Arestas

A função `EDGE` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve uma aresta com pontas `v` e `w`.

#define EDGE ARC

Grafos no computador

Usaremos duas representações clássicas:

- matriz de adjacência (**agora**)
- vetor de listas de adjacência (**próximas aulas**)

Há várias outras maneiras, como, por exemplo

- matriz de incidência

que é apropriada para Programação Linear.

Matrizes de adjacência

S 17.3

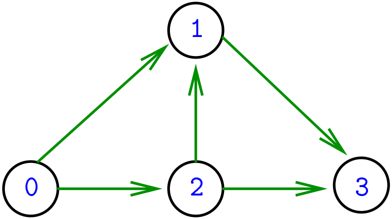
Matriz de adjacência de digrafos

Matriz de adjacência de um digrafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

adj[v][w] = 1 se v-w é um arco

adj[v][w] = 0 em caso contrário

Exemplo:



	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	0	0

Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

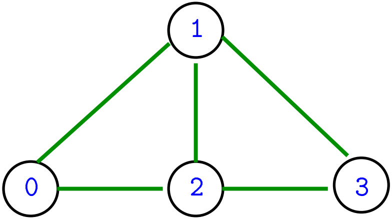
Matriz de adjacência de grafos

Matriz de adjacência de um grafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v-w` é um aresta

`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:



	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	0	1	1	0

Consumo de espaço: $\Theta(\mathtt{V}^2)$ fácil de implementar

Estrutura `digraph`

A estrutura **digraph** representa um digrafo

- `V` contém o número de vértices
- `A` contém o número de arcos do digrafo
- `adj` é um ponteiro para a matriz de adjacência

Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo

- V contém o número de vértices
- A contém o número de arcos do digrafo
- adj é um ponteiro para a matriz de adjacência

```
struct digraph {
    int V;
    int A;
    int **adj;
};
```

Estrutura `Digraph`

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

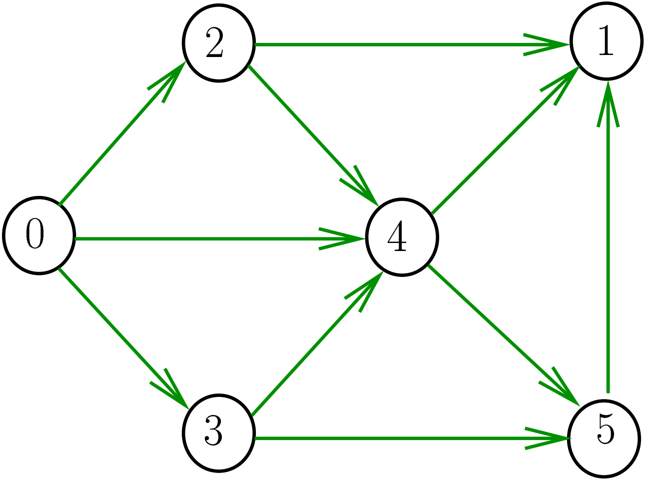
Estrutura `Digraph`

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

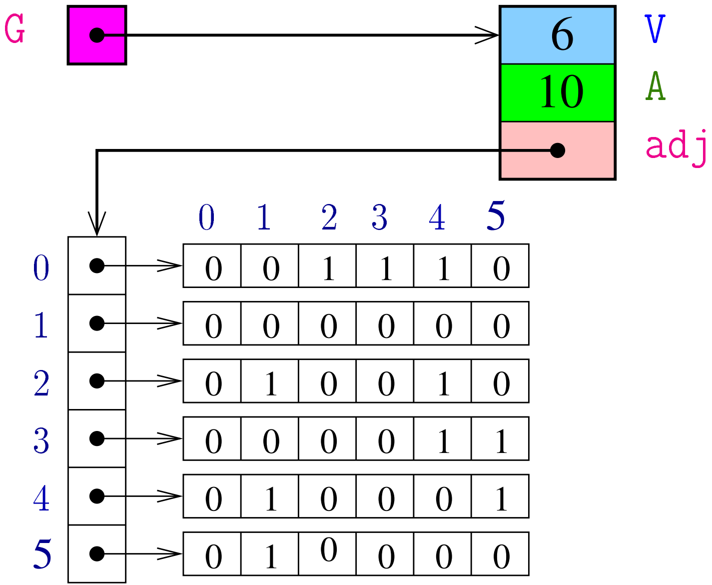
```
typedef struct digraph *Digraph;
```

Digrafo

`Digraph G`



Estruturas de dados



Estruturas `graph` e `Graph`

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

Estruturas `graph` e `Graph`

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo `G` é

Estruturas `graph` e `Graph`

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo `G` é

$$(\texttt{G->A})/2$$

Funções básicas

S 17.3

MATRIXint

Aloca uma matriz com linhas 0..r-1 e colunas 0..c-1, cada elemento da matriz recebe valor val

```
int **MATRIXint (int r, int c, int val) {
```

MATRIXint

Aloca uma matriz com linhas 0..r-1 e colunas 0..c-1, cada elemento da matriz recebe valor val

```
int **MATRIXint (int r, int c, int val) {
        Vertex i, j;
        int **m = malloc(r * sizeof(int *));
        for (i = 0; i < r; i++)
            m[i] = malloc(c * sizeof(int));
        for (i = 0; i < r; i++)
            for (j = 0; j < c; j++)
                m[i][j] = val;
        return m;
}
```

Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha	
1	$= 1$	$= \Theta(1)$
2	$= r + 1$	$= \Theta(r)$
3	$= r$	$= \Theta(r)$
4	$= r + 1$	$= \Theta(r)$
5	$= r \times (c + 1)$	$= \Theta(r\,c)$
6	$= r \times c$	$= \Theta(r\,c)$

total $\Theta(1) + 3\,\Theta(r) + 2\,\Theta(r\,c)$

$$= \Theta(r\,c)$$

Conclusão

Supondo que o consumo de tempo da função `malloc` é constante

O consumo de tempo da função `MATRIXint` é $\Theta(\mathtt{r}\ \mathtt{c})$.

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices `0,..,V-1` e nenhum arco.

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices 0,...,V-1 e nenhum arco.

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {
    Digraph G = malloc(sizeof *G);
    G->V = V;
    G->A = 0;
    G->adj = MATRIXint(V,V,0);
    return G;
}
```