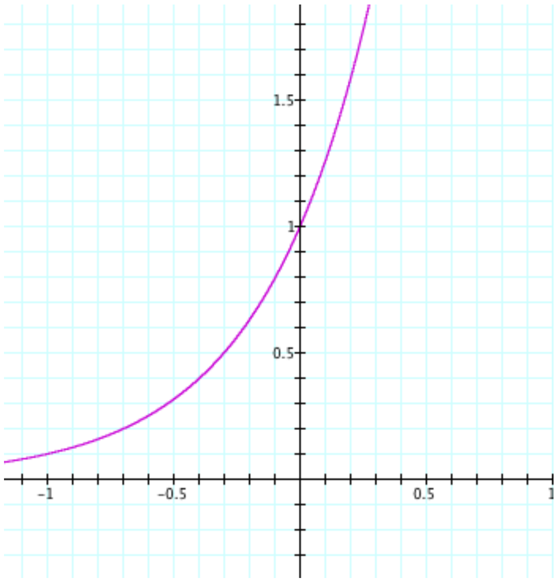
O(n lg n)

Ing. Juan Ignacio Zamora M. MS.c
Facultad de Ingenierías
Licenciatura en Ingeniería Informática con Énfasis en Desarrollo de Software
Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología

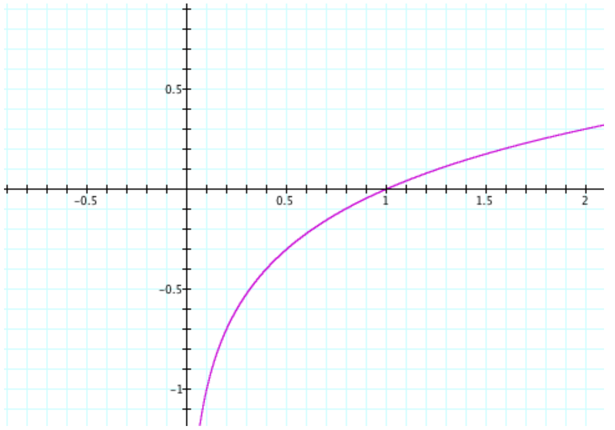
Funciones Exponenciales

- Una función exponencial es la que tiene por criterio $f(x) = b^x$
- Tal que b > 0 y b <> 1. "b" se llama base y su exponente es la variable independiente
- Características
  - Biyectiva y continua
  - Asintótica al eje x (NO corta el eje x)
  - Si b > 1, es estrictamente creciente
  - Si 0 < b < , es estrictamente decreciente



Funciones Logarítmicas

- La función logarítmica es la inversa de la exponencial y viceversa.
- Se denota por $f(x) = \log_b \Leftrightarrow b^x = y$
- El logaritmo de un numero negativo no esta definido asi tampoco como el logaritmo de cero, dado que el dominio esta contenido en R^+
- Características
  - Asintótica al eje Y (NO Corta el eje Y)
  - Si b > 1, la función es estrictamente creciente
  - Si 0 < b < 1, entonces es decreciente



Propiedades de los Logaritmos

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

$$\log_b f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x^n = n \log_b x$$

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{2} \log_b x = \frac{\log_b x}{n}$$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Solución de Recurrencias

Método de Substitución e Inducción Matemática

Arboles de Recursión

"Master Method"

Featuring → Merge Sort

- Por Ejemplo Merge-Sort tiene un tiempo asintótico de
- T(n) = aT(n/b) + D(n) + C(n)
  - aT(n/b) : representa el tamaño de cada sub problema (conquistar)
  - D(n) : representa el tiempo que toma dividir
  - C(n) : representa el tiempo que toma combinar
  - Dado que en Merge Sort D(n) = O(1), no se incluye y C(n) = O(n) por tanto

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & n > 1 \end{cases}$$

El Método de Substitución

- Paso 1: Adivine cual puede ser la forma de la solución*
- Paso 2: Utilizar inducción matemática para probar que nuestra teoría era correcta (prueba).
- Dada una recurrencia T(n) = 2T(n/2) + n
  - Establecemos que T(n) = O(n lg n)
  - c > 0, c = 1
  - m = n/2

$$T(\lfloor n/2 \rfloor) \le c\lfloor n/2 \rfloor \lg \lfloor n/2 \rfloor$$

$$T(n) \le 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)) + n$$

$$T(n) \le cn\lg(n/2) + n$$

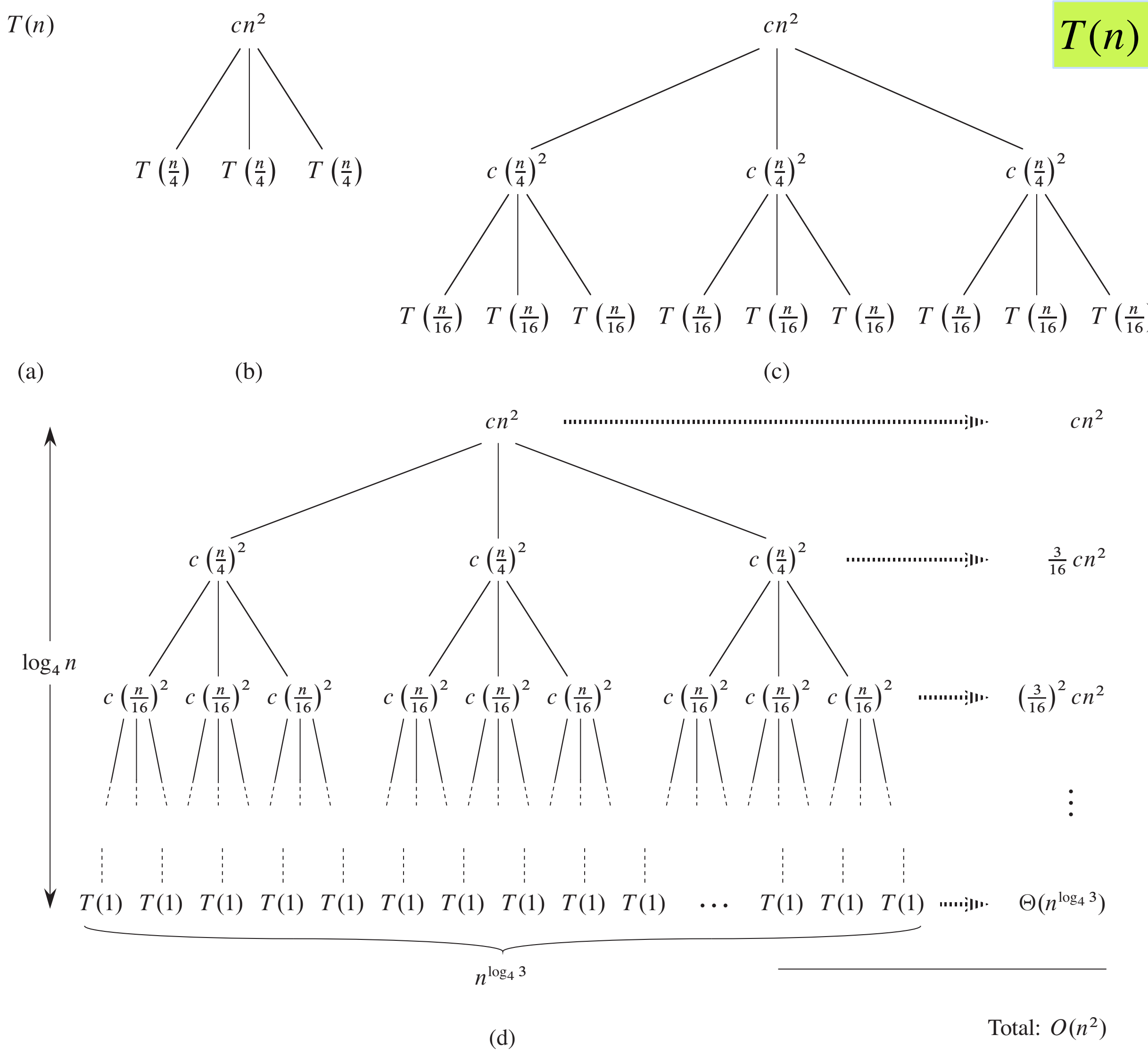
$$T(n) = cn\lg n - cn\lg 2 + n$$

$$T(n) = cn\lg n - cn + n$$

$$T(n) \le cn\lg n$$

Árbol de Recurrencias

$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$$



"Master Method"

- Es una receta de cocina para para resolver recurrencias que concuerden con la forma T(n) = aT(n/b) + f(n) donde a y b > 1.
- El "Master Method" se basa en 3 casos:

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \in}) \quad \in > 0 \quad T(n) = O(n^{\log_b a})$$

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \quad T(n) = O(n^{\log_b a} \lg n)$$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \in}) \quad e > 0 \quad af(n/b) \leq cf(n) \quad T(n) = \Theta(f(n))$$

Uso de "Master Method"

- Consideremos un tiempo T(n) = 9T(n/3) + n
- Decimos que:
  - a = 9, b = 3, f(n) = n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$$

$$O(n^{\log_3 9-\varepsilon}) \quad \varepsilon = 1 \quad T(n) = \Theta(n^2)$$

- Otro ejemplo: T(n) = T(2n/3) + 1
  - a = 1, b = 3/2, f(n) = 1

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(\lg n)$$