

CALCULO DE FLUJO

Vamos a calcular el flujo a partir de una malla de puntos (x, y) . Partimos de los datos de $x_c, y_c, \alpha, U, a(=R)$ y hemos calculado ademas β, b . Las formulas para calcular el flujo en variable compleja son las siguientes:

$$\Gamma = 4\pi U a \sin(\alpha + \beta)$$

$$t_o = x_c + y_c j$$

$$t = x + y j$$

$$f(t) = U \left((t - t_o) e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{(t - t_o)} e^{i\alpha} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(t - t_o)$$

El numero deseado es la parte imaginaria de la función $f(t)$. En WxMaxima se utiliza el comando `imagpart`.

La funciones despejadas por Rafa para utilizar coordenadas cartesianas x, y a través de ρ, θ (y por lo tanto $g(\rho, \theta)$ depende de $\rho(x, y)$ y $\theta(x, y)$ y estas a su vez de (x, y))

$$g(\rho, \theta) = U \left(\rho \sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho} \sin(\alpha - \theta) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho)$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$$

$$\theta(x, y) = \text{atan}\left(\frac{y - y_c}{x - x_c}\right)$$

Si unimos todo en una ecuación $g(x, y)$, queda una ecuación muy larga, por lo que será mejor hacerlo por partes.

$$g(x, y) = U \left(\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \sin\left(\text{atan}\left(\frac{y - y_c}{x - x_c}\right) - \alpha\right) + \frac{a^2}{\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}} \sin\left(\alpha - \text{atan}\left(\frac{y - y_c}{x - x_c}\right)\right) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2})$$

Vamos a analizar los lugares en los cuales esta ecuacion no funciona:

- Puntos del eje x - de la forma (x_c, y) :

En los puntos del eje x no funciona la ecuación ya que queda un denominador cero, por lo que no se puede calcular el ángulo θ :

$$\theta(x, y) = \text{atan}\left(\frac{y - y_c}{x - x_c}\right) \longrightarrow \theta(x_c, y) = \text{atan}\left(\frac{y - y_c}{x_c - x_c}\right) = \text{atan}\left(\frac{y - y_c}{0}\right)$$

- El centro - punto (x_c, y_c) :

El centro ademas de ser un punto de la forma (x_c, y) y ocurre lo mismo que antes con el ángulo θ :

$$\theta(x, y) = \text{atan}\left(\frac{y - y_c}{x - x_c}\right) \longrightarrow \theta(x_c, y_c) = \text{atan}\left(\frac{y_c - y_c}{x_c - x_c}\right) = \text{atan}\left(\frac{0}{0}\right)$$

Tambien ρ es cero:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \longrightarrow \rho(x_c, y_c) = \sqrt{(x_c - x_c)^2 + (y_c - y_c)^2} = \sqrt{0} = 0$$

- Parte negativa de x:

Si sustituimos en la función $g(x, y)$ con valores $x < x_c$, se obtiene otro valor que con la función $f(t)$. Separando la funciones por partes:

$$f(t) = U(t - t_o) e^{-i\alpha} + U \left(\frac{a^2}{(t - t_o)} e^{i\alpha} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(t - t_o)$$

$$g(\rho, \theta) = U \rho \sin(\theta - \alpha) + \frac{U a^2}{\rho} \sin(\alpha - \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho)$$

Y sustituyendo en ambas funciones se obtiene que:

$$U(t - t_o) e^{-i\alpha} = -U \rho \sin(\theta - \alpha)$$

$$U \left(\frac{a^2}{(t - t_o)} e^{i\alpha} \right) = -\frac{U a^2}{\rho} \sin(\alpha - \theta)$$

$$i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(t - t_o) = \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho)$$

Entonces para que funcione en dichos puntos hay que invertir los ángulos en la función que se valore en dichos puntos:

$$g_{\text{neg}}(\rho, \theta) = U \left(\rho \sin(\alpha - \theta) + \frac{a^2}{\rho} \sin(\theta - \alpha) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho)$$

O lo que es lo mismo, cambiar el signo de U y dejar fijos los ángulos:

$$g_{\text{neg}}(\rho, \theta) = -U \left(\rho \sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho} \sin(\alpha - \theta) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho)$$

CONCLUSIONES:

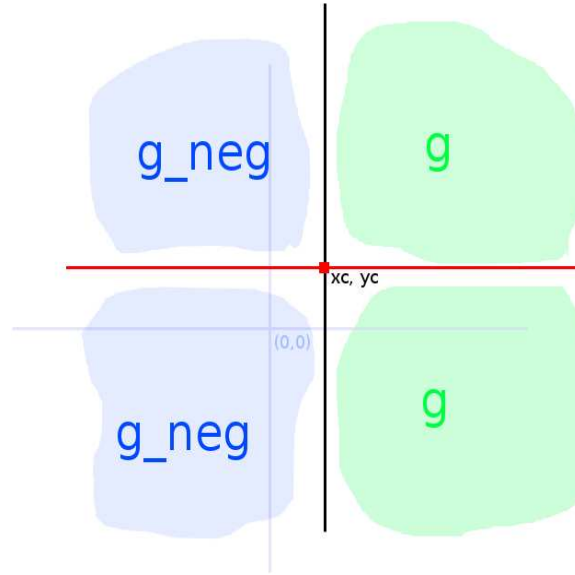


Figura 1.

Las conclusiones de lo expuesto arriba, se obtiene esta función:

$$F(\rho, \theta) \begin{cases} x < x_c \longrightarrow g(\rho, \theta) = U \left(\rho \sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho} \sin(\alpha - \theta) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho) \\ x > x_c \longrightarrow g_{\text{neg}}(\rho, \theta) = -U \left(\rho \sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho} \sin(\alpha - \theta) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\rho) \\ x_c = x_c \longrightarrow \text{no funcionan} \end{cases}$$