CALCULO DE FLUJO

Vamos a calcular el flujo a partir de una malla de puntos $(x,\ y)$. Partimos de los datos de x_c, y_c, α, U, $a(=R)$ y hemos calculado ademas β, b. Las formulas para calcular el flujo en variable compleja son las siguientes:

$$\Gamma = 4\,\pi\,U\,a\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

$$t_o = x_c + y_c\,j$$

$$t = x + y\,j$$

$$f(t) = U\left(\left(t-t_o\right)e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\left(t-t_o\right)}\,e^{i\alpha}\right) + i\,\frac{\Gamma}{2\,\pi}\log\left(t-t_o\right)$$

El numero deseado es la parte imaginaria de la función $f(t)$. En WxMaxima se utiliza el comando `imagpart`.

La funciones despejadas por Rafa para utilizar coordenadas cartesianas x, y a través de ρ, θ (y por lo tanto $g(\rho,\theta)$ depende de $\rho(x,y)$ y $\theta(x,y)$ y estas a su vez de (x,y))

$$g(\rho,\theta) = U\left(\rho\sin(\theta-\alpha) + \frac{a^2}{\rho}\sin(\alpha-\theta)\right) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\log(\rho)$$

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}$$

$$\theta(x,y) = \mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{x-x_c}\right)$$

Si unimos todo en una ecuación $g(x,\ y)$, queda una ecuación muy larga, por lo que será mejor hacerlo por partes.

$$g(x,\ y) = U\left(\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}\ \sin\left(\mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{x-x_c}\right)-\alpha\right) + \frac{a^2}{\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}}\ \sin\left(\alpha - \mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{x-x_c}\right)\right)\right) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}\right)$$

Vamos a analizar los lugares en los cuales esta ecuacion no funciona:

- Puntos del eje x - de la forma (x_c, y):

  En los puntos del eje x no funciona la ecuación ya que queda un denominador cero, por lo que no se puede calcular el ángulo θ:

  $$\theta(x,y) = \mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{x-x_c}\right) \longrightarrow \theta(x_c,y) = \mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{x_c-x_c}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{0}\right)$$

- El centro - punto (x_c, y_c):

  El centro ademas de ser un punto de la forma $(x_c,\ y)$ y ocurre lo mismo que antes con el ángulo θ:

  $$\theta(x,y) = \mathrm{atan}\left(\frac{y-y_c}{x-x_c}\right) \longrightarrow \theta(x_c,y_c) = \mathrm{atan}\left(\frac{y_c-y_c}{x_c-x_c}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{0}{0}\right)$$

  Tambien ρ es cero:

  $$\rho(x,y) = \sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2} \longrightarrow \rho(x_c,y_c) = \sqrt{(x_c-x_c)^2+(y_c-y_c)^2} = \sqrt{0} = 0$$

- Parte negativa de x:

  Si sustituimos en la función $g(x, y)$ con valores $x < x_c$, se obtiene otro valor que con la funcion $f(t)$. Separando la funciones por partes:

$$f(t) = U\,(t - t_o)\,e^{-i\alpha} + U\left(\frac{a^2}{(t - t_o)}\,e^{i\alpha}\right) + i\,\frac{\Gamma}{2\,\pi}\log\,(t - t_o)$$

$$g(\rho, \theta) = U\,\rho\,\sin(\theta - \alpha) + \frac{U\,a^2}{\rho}\,\sin(\alpha - \theta) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\log(\rho)$$

  Y sustituyendo en ambas funciones se obtiene que:

$$U\,(t - t_o)\,e^{-i\alpha} = -U\,\rho\,\sin(\theta - \alpha)$$

$$U\left(\frac{a^2}{(t - t_o)}\,e^{i\alpha}\right) = -\frac{U\,a^2}{\rho}\,\sin(\alpha - \theta)$$

$$i\,\frac{\Gamma}{2\,\pi}\log\,(t - t_o) = \frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\log(\rho)$$

  Entonces para que funcione en dichos puntos hay que invertir los ángulos en la función que se valore en dichos puntos:

$$g_{\text{neg}}(\rho, \theta) = U\left(\rho\,\sin(\alpha - \theta) + \frac{a^2}{\rho}\,\sin(\theta - \alpha)\right) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\log(\rho)$$

  O lo que es lo mismo, cambiar el signo de U y dejar fijos los ángulos:

$$g_{\text{neg}}(\rho, \theta) = -U\left(\rho\,\sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho}\,\sin(\alpha - \theta)\right) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\log(\rho)$$

CONCLUSIONES:

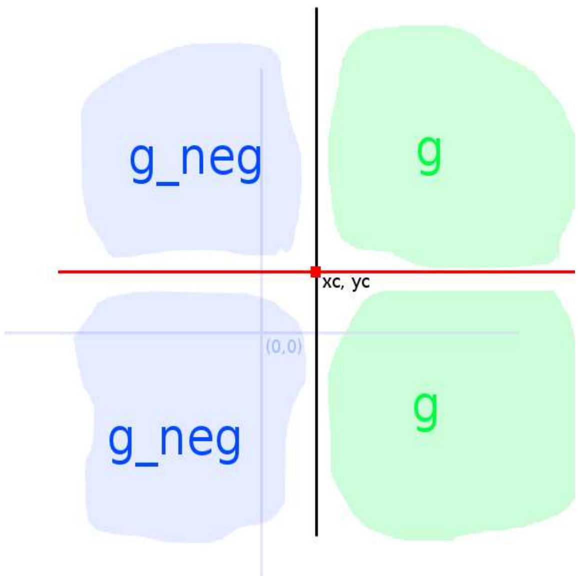

Figura 1.

Las conclusiones de lo expuesto arriba, se obtiene esta función:

$$F(\rho, \theta)\begin{cases} x > x_c \;\longrightarrow\; g(\rho, \theta) = U\left(\rho\,\sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho}\,\sin(\alpha - \theta)\right) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\log(\rho) \\ x < x_c \;\longrightarrow\; g_{\text{neg}}(\rho, \theta) = -U\left(\rho\,\sin(\theta - \alpha) + \frac{a^2}{\rho}\,\sin(\alpha - \theta)\right) + \frac{\Gamma}{2\,\pi}\,\log(\rho) \\ x_c = x_c \;\longrightarrow\; \text{no funcionan} \end{cases}$$