# Lògica en la Informàtica

## Definició de la Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero  Robert Nieuwenhuis

Dept. Ciències de la Computació
Facultat de Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Tardor 2022

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació $I$ tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n,m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a $f$ i $c$ que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x,c),x) \wedge p(x, f(x,c))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x,y), f(y,x)) \wedge p(f(y,x), f(x,y)))$$

$\forall x\, (p(f(x,c),x) \wedge p(x, f(x,c))$

$\forall x\, (f(x,c) \leq x \ \wedge\ x \leq f(x,c))$ això implica que: $\forall x\ f(x,c) = x$

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació $I$ tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a $f$ i $c$ que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

1a $I$: $f_I$ és la suma, i $c_I$ és 0

2a $I$: $f_I$ és el producte, i $c_I$ és 1

3a $I$: $f_I(n, m) = n$, i $c_I$ és qualsevol natural, per exemple el 7

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació $I$ tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a $f$ i $c$ que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

Nota: això implica que $\forall x\, \forall y\ f(x, y) = f(y, x)$, ja que $n \leq m$ i $m \leq n \rightarrow n = m$. És a dir, $f_I$ ha de ser commutativa.

7. (dificultat 3) Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt $\{f^2, c^0\}$ i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt $\{p^2\}$. Considerem una interpretació $I$ tal que $D_I = \mathbb{N}$ i $p_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$.
Troba tres interpretacions diferents per a $f$ i $c$ que satisfacin la fórmula

$$\forall x\, (p(f(x, c), x) \wedge p(x, f(x, c))$$

i que només dues d'elles satisfacin la fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (p(f(x, y), f(y, x)) \wedge p(f(y, x), f(x, y)))$$

En la 1a $I$, $f_I(n, m) = n + m$ (la suma) és commutativa
En la 2a $I$, $f_I(n, m) = n \cdot m$ (el producte) és commutativa
En la 3a $I$, $f_I(n, m) = n$ NO és commutativa. ok.

Una altra opció amb $f_I$ no commutativa: $f_I(n, m) = n^m$ i $c_I = 1$.

8. (dificultat 2) Sigui $F$ la fórmula $\forall x\, \exists y\; p(x,y) \;\wedge\; \forall x\, \exists y\; \neg p(x,y)$. $F$ és satisfactible? Demostra-ho.

Sigui $I$ la interpretació tal que:

$D_I = \mathbb{Z}$ (els enters)

$p_I(n,m) = n < m$.

Aquesta $I$ és un model.

8. (dificultat 2) Sigui $F$ la fórmula
$\forall x\, \exists y\; p(x,y) \;\wedge\; \forall x\, \exists y\; \neg p(x,y)$. $F$ és satisfactible? Demostra-ho.

Un altre model:

$D_I = \{a, b\}$
$p_I(a,a) = 1$
$p_I(a,b) = 0$
$p_I(b,a) = 0$
$p_I(b,b) = 1$

8. (dificultat 2) Sigui $F$ la fórmula
$\forall x \, \exists y \; p(x,y) \;\wedge\; \forall x \, \exists y \; \neg p(x,y)$. $F$ és satisfactible? Demostra-ho.

Si $I$ és una interpretació, diem que el nombre d'elements d'$I$ és $|D_I|$, el nombre d'elements de $D_I$. Així mateix, diem que $I$ és un model finit quan $D_I$ és finit, i parlem de la cardinalitat d'$I$ per a referir-nos a la cardinalitat de $D_I$.

Quin és el mínim nombre d'elements que ha de tenir un model de $F$?

$D_I = \{a\}$
tant si definim $p_I(a,a) = 1$ com si definim $p_I(a,a) = 0$, la fórmula no es compleix! Per tant, no és possible amb 1 sol element en el domini, però sí amb 2.

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions $I_1$ i $I_2$ següents. Per a cada cas, dona una fórmula $F$ que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
$I_1$ té com a domini els naturals i el predicat s'interpreta com l'ordre (és a dir $r_I(n,m) = 1$ si i només si $n \leq m$);
$I_2$ té com a domini els enters i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

$D_{I_1} = \mathbb{N} \qquad r_{I_1}(n,m) = (n \leq m)$
$D_{I_2} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_2}(n,m) = (n \leq m)$
per a tot enter existeix un altre menor estricte
però: per a tot natural NO existeix un altre menor estricte
(perquè és fals per al zero)

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions $I_1$ i $I_2$ següents. Per a cada cas, dona una fórmula $F$ que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

a) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
$I_1$ té com a domini els naturals i el predicat s'interpreta com l'ordre (és a dir $r_I(n, m) = 1$ si i només si $n \leq m$);
$I_2$ té com a domini els enters i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

Sigui $F$ la fórmula $\forall x \, \exists y \, \neg r(x, y)$. $[\neg r(x, y) = \neg(x \leq y) = x > y]$
Tenim que $I_1$ no és model de $F$ i $I_2$ sí que és model de $F$.
$I_1$ no és model perquè si $x$ és 0, llavors no existeix cap $y$ tal que $\neg(0 \leq y)$, és a dir, tal que $0 > y$.
En canvi, en $I_2$, els enters, per a tota $x$ sí que existeix una $y$ tal que $x > y$.

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions $I_1$ i $I_2$ següents. Per a cada cas, dona una fórmula $F$ que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
$I_1$ té com a domini els enters i el predicat s'interpreta com l'ordre;
$I_2$ té com a domini els racionals i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

$D_{I_1} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \leq m)$
$D_{I_2} = \mathbb{Q} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \leq m)$
per a tot parell d'elements $x$ i $y$ tals que $x > y$, existeix un $z$ tal que $x > z \wedge z > y$ (es diu que els racionals són "densos")

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions $I_1$ i $I_2$ següents. Per a cada cas, dona una fórmula $F$ que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

b) $\mathcal{P} = \{r^2\}$,
$I_1$ té com a domini els enters i el predicat s'interpreta com l'ordre;
$I_2$ té com a domini els racionals i el predicat s'interpreta també com l'ordre.

Si $F$ és la fórmula:

$$\forall x\, \forall y\, (\underbrace{\neg r(x,y)}_{x>y} \rightarrow \exists z\, (\underbrace{\neg r(x,z)}_{x>z} \wedge \underbrace{\neg r(z,y)}_{z>y}))$$

llavors $I_2 \models F$, però $I_1 \not\models F$. $I_2$ és model de $F$ però $I_1$ no ho és.

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions $I_1$ i $I_2$ següents. Per a cada cas, dona una fórmula $F$ que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

c) $\mathcal{P} = r^2$. El domini tant de $I_1$ com de $I_2$ són els números enters, per a
$I_1$ el predicat $r$ s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 2", i per
$I_2$ el predicat $r$ s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 3".

$$D_{I_1} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_1}(n, m) = (n \bmod 2 = m \bmod 2)$$

"tenir la mateixa paritat"

$$D_{I_2} = \mathbb{Z} \qquad r_{I_2}(n, m) = (n \bmod 3 = m \bmod 3)$$

"tenir la mateixa "triaritat"???"

9. (dificultat 3) Considera els conjunts de símbols i parells d'interpretacions $I_1$ i $I_2$ següents. Per a cada cas, dona una fórmula $F$ que és una certa en una d'elles i falsa en l'altra, i raona informalment per què és així.

c) $\mathcal{P} = r^2$. El domini tant de $I_1$ com de $I_2$ són els números enters, per a
$I_1$ el predicat $r$ s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 2", i per
$I_2$ el predicat $r$ s'interpreta com "tenir el mateix resto módul 3".

$F$ expressa que hi ha tres elements amb diferent paritat:
Si $F$ és la fórmula: $\exists x\, \exists y\, \exists z\, (\neg r(x,y) \wedge \neg r(x,z) \wedge \neg r(y,z))$
llavors $I_2 \models F$, però $I_1 \not\models F$. $I_2$ és model de $F$
però $I_1$ no ho és.

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Si només hi ha símbols de predicat de aritat zero ($p$,$q$,$r$,$\ldots$) quines fórmules hi ha?
Sintaxi:
Els àtoms seran $p$,$q$,$r$,$\ldots$ sense termes, i, per tant, sense variables, i, per tant, les fórmules seran sense quantificadors.
Les fórmules seran combinacions de $p$,$q$,$r$, $\ldots$ amb connectives $\wedge$ , $\vee$ , $\neg$.
SÓN les fórmules de la lògica proposicional.

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Semàntica:
Encara que hi hagués símbols de funció, aquests no sortiran en les fórmules, per la qual cosa la seva interpretació és irrellevant.
De la mateixa manera, $D_I$ també és irrellevant, perquè no hi ha variables ni quantificadors en les fórmules.
Queda definir en $I$ com s'interpreten els símbols de predicat (que són tots de aritat zero):

$p_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
$q_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
$r_I : \ \rightarrow \{0,1\}$
etc.

En què es diferencia això d'una $I$ en lògica proposicional, que era: $I : \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$ ? En Res.

10. (dificultat 2) Suposa que en $\mathcal{P}$ només hi ha símbols de predicat de aritat zero. Llavors, la sintaxi de les fórmules, en què es diferencia de la de la lògica proposicional? I la semàntica?

Conclusió: la LProp és un cas (molt, molt) particular de la LPO.

16. (dificultat 2) Demostra alguna de les següents equivalències:

$$\neg \forall x\, F \equiv \exists x\, \neg F$$
$$\neg \exists x\, F \equiv \forall x\, \neg F$$
$$\forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$$
$$\exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$$

$$\forall x\, F \wedge \forall x\, G \equiv \forall x\, (F \wedge G)$$
$$\exists x\, F \vee \exists x\, G \equiv \exists x\, (F \vee G)$$

$$\forall x\, F \rightarrow \exists x\, G \equiv \exists x\, (F \rightarrow G)$$

$\forall x\, F \vee G \equiv \forall x\, (F \vee G)$, si $x$ no es lliure en $G$

$\forall x\, F \wedge G \equiv \forall x\, (F \wedge G)$, si $x$ no es lliure en $G$

$\exists x\, F \vee G \equiv \exists x\, (F \vee G)$, si $x$ no es lliure en $G$

$\exists x\, F \wedge G \equiv \exists x\, (F \wedge G)$, si $x$ no es lliure en $G$

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules $F$, $G$):

$$\begin{array}{lcl} \forall x\, F \,\vee\, \forall x\, G & \equiv & \forall x\,(F \vee G) \\ \exists x\, F \,\wedge\, \exists x\, G & \equiv & \exists x\,(F \wedge G) \end{array}$$

17a) $\forall x\, F \,\vee\, \forall x\, G \;\not\equiv\; \forall x\,(F \vee G)$

Sigui $F$ la fórmula $p(x)$
Sigui $G$ la fórmula $\neg p(x)$.

Sigui $I$ la interpretació on:

$$D_I = \{a, b\}$$
$$p_I(a) = 0$$
$$p_I(b) = 1$$

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules $F$, $G$):

$$\forall x\, F \vee \forall x\, G \quad \equiv \quad \forall x\,(F \vee G)$$
$$\exists x\, F \wedge \exists x\, G \quad \equiv \quad \exists x\,(F \wedge G)$$

17a) $\forall x\, F \vee \forall x\, G \quad \not\equiv \quad \forall x\,(F \vee G)$

Sigui $F$ la fórmula $p(x)$
Sigui $G$ la fórmula $\neg p(x)$ .

$D_I = \mathbb{N}$ (els naturals)
$p_I(n) = (n \text{ és parell}) \quad (n \bmod 2 = 0)$

Llavors tenim que $I$ és model de $\forall x\,(F \vee G)$ , però no és model de $\forall x\, F \vee \forall x\, G$ .
Nota: de fet $\forall x\,(p(x) \vee \neg p(x))$ és una tautologia.

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules $F$, $G$):

$$\forall x\, F \vee \forall x\, G \quad \equiv \quad \forall x\, (F \vee G)$$
$$\exists x\, F \wedge \exists x\, G \quad \equiv \quad \exists x\, (F \wedge G)$$

17b) $\exists x\, F \wedge \exists x\, G \quad \not\equiv \quad \exists x\, (F \wedge G)$

Les mateixes $F, G$ i la mateixa interpretació $I$ ens serveixen:

Sigui $F$ la fórmula $p(x)$
Sigui $G$ la fórmula $\neg p(x)$.

$D_I = \{a, b\}$
$p_I(a) = 0$
$p_I(b) = 1$

$I$ és model de $\exists x\, F \wedge \exists x\, G$, però no és model de $\exists x\, (F \wedge G)$.
Nota: de fet $\exists x\, (p(x) \wedge \neg p(x))$ és insatisfactible.

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules $F$, $G$):

$$\begin{array}{lcl} \forall x\, F \vee \forall x\, G & \equiv & \forall x\, (F \vee G) \\ \exists x\, F \wedge \exists x\, G & \equiv & \exists x\, (F \wedge G) \end{array}$$

En tots dos casos, hi ha alguna de la dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

17a) Sí, per a qualssevol $F$ i $G$ tenim que
$\forall x\, F \vee \forall x\, G \models \forall x\, (F \vee G)$ (intuïtivament):

en qualsevol $I$, si tens $I \models \forall x\, F \vee \forall x\, G$ això és perque:
$I \models \forall x\, F$ o $I \models \forall x\, G$ i llavors,
$I \models \forall x\, F \vee \forall x\, G$. (“demostració” **NO** formal!)

17. (dificultat 2) Demostra que les equivalències següents **no** són certes en general (és a dir, per a qualsevol parell de fórmules $F$, $G$):

$$\forall x\, F \,\vee\, \forall x\, G \quad \equiv \quad \forall x\,(F \vee G)$$
$$\exists x\, F \,\wedge\, \exists x\, G \quad \equiv \quad \exists x\,(F \wedge G)$$

En tots dos casos, hi ha alguna de la dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

17b) Sí, per qualssevol $F$ i $G$ tenim que
$\exists x\,(F \wedge G) \models \exists x\, F \wedge \exists x\, G$ (intuïtivament)

18. (dificultat 2) Demostra que les fórmules $\forall x\, \exists y\, F$ i $\exists y\, \forall x\, F$ no són lògicament equivalents en general. Hi ha alguna de les dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Sigui $F$ la fórmula $p(x, y)$, tenim:

$\forall x\, \exists y\, p(x, y)$ i $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$

18. (dificultat 2) Demostra que les fórmules $\forall x \, \exists y \, F$ i $\exists y \, \forall x \, F$ no són lògicament equivalents en general. Hi ha alguna de les dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Sigui $F$ la fórmula $p(x,y)$, tenim:
$\forall x \, \exists y \, p(x,y)$ i $\exists y \, \forall x \, p(x,y)$

| Sigui $I$ la interpretació on: | Un altre I: | Un altre I: |
|---|---|---|
| $D_I = \mathbb{N}$ (els naturals) | $D_I = \{a,b\}$ | $D_I = \{a,b\}$ |
| $p_I(n,m) = (n{=}m)$ | $p(a,a) = 1$ | $p(a,a) = 0$ |
| | $p(a,b) = 0$ | $p(a,b) = 1$ |
| | $p(b,a) = 0$ | $p(b,a) = 1$ |
| | $p(b,b) = 1$ | $p(b,b) = 0$ |

Tenim $I \models \forall x \, \exists y \, p(x,y)$ però $I$ no és model de $\exists y \, \forall x \, p(x,y)$.

18. (dificultat 2) Demostra que les fórmules $\forall x\, \exists y\, F$ i $\exists y\, \forall x\, F$ no són lògicament equivalents en general. Hi ha alguna de les dues fórmules que sigui conseqüència lògica de l'altra? (no cal que demostris això últim, ja ho farem quan tinguem un càlcul deductiu).

Sigui $F$ la fórmula $p(x,y)$, tenim:
$\forall x\, \exists y\, p(x,y)$ i $\exists y\, \forall x\, p(x,y)$

Sí. Tenim que $\exists y\, \forall x\, p(x,y) \models \forall x\, \exists y\, p(x,y)$
(intuïtivament; ja ho demostrarem per resolució).
A l'inrevés no, com ja hem demostrat amb els contraexemples.

**Exercicis del capítol `p4.pdf` per al proper dia de classe:**

☞ 21, 22, 23.