Lògica en la Informàtica

Deducció en Lògica de Primer Ordre

José Miguel Rivero   Robert Nieuwenhuis

Dept. Ciències de la Computació
Facultat de Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Tardor 2022

Continguts:

- Unificació. Algorisme d'unificació
- Exemple de recapitulació
- Regla deductiva de Factorització
- Completitud refutacional en LPO
- Exercici 7 del tema 5

Unificació

- una "substitució" σ és un conjunt de parells variable-terme: $\{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$
- "aplicar una substitució": si σ és $\{x = f(a), y = b\}$ i t és el terme (o àtom) $g(f(x), y))$ llavors $t\sigma$ és $g(f(f(a)), b)$
- dos termes s i t són "unificables" si existeix una σ tal que $s\sigma = t\sigma$
- σ és l'"unificador més general" (*most general unifier, mgu*) de dos termes s i t si:
  - $s\sigma = t\sigma$ (σ és unificador)
  - i a més és l'unificador més general: per a tot σ', si tenim que $s\sigma' = t\sigma'$ llavors hi ha un σ'' tal que σ' és $\sigma\sigma''$

Unificació

Per exemple: unificar $f(x, y)$ amb $f(a, z)$
el *mgu* $\sigma = \{x = a, y = z\}$
Un altre unificador σ' pot ser $\sigma' = \{x = a, y = a, z = a\}$
però no és el més general. És un cas particular del *mgu* σ.
Existeix $\sigma'' = \{y = a, z = a\}$
i tinc que $\sigma' = \sigma\sigma''$.

Algorisme d'unificació:

Jo vull unificar dos termes s i t (o dos àtoms s i t, a l'efecte d'unificació és el mateix).

Escriurem el problema d'unificació com a conjunts d'igualtats $\{s = t\}$:

0.	$E \cup \{t = t\}$	$\Longrightarrow$	E
1.	$E \cup \{f(\ldots) = g(\ldots)\}$	$\Longrightarrow$	fallo si $f \neq g$ (no són unificables!)
2.	$E \cup \{f(s_1 \ldots s_n) = f(t_1 \ldots t_n)\}$	$\Longrightarrow$	$E \cup \{s_1 = t_1 \ldots s_n = t_n\}$
3.	$E \cup \{x = t\}$	$\Longrightarrow$	fallo si x apareix en t, i x no ÉS t (per ex. $x = f(x)$)
4.	$E \cup \{x = t\}$	$\Longrightarrow$	$E\{x = t\} \cup \{x = t\}$ si x NO apareix en t, i a més x SI apareix en E

Algorisme d'unificació:

Exemple:

$$\{f(x, g(x, a)) = f(h(b), z)\} \stackrel{2}{\Longrightarrow}$$
$$\{\underbrace{x = h(b)}_{x=t},\ \underbrace{z = g(x, a)}_{E}\} \stackrel{4}{\Longrightarrow} \{x = h(b),\ z = g(h(b), a)\}$$

això és el *mgu*!

podria tornar a aplicar la regla 4, però no faria res (per això exigim que x SÍ QUE aparegui en E).

El que hem de pensar:

- aquestes regles acaben? (o necessitem alguna cosa més perquè acabin?)
- donen lloc al *mgu* del problema inicial?

Petit exemple de recapitulació

Exemple:

Vull saber si $F \models G$ en LPO. Aqui F i G són fórmules qualssevol. Què faig?

$F \models G$	ssi
la fórmula $F \wedge \neg G$ és insat	ssi
$S = forma\_clausal(F \wedge \neg G)$ és insat	ssi (*gairebé*)
la clàusula buida $\square$ està en $Res(S)$	(puc obtenir $\square$ mitjançant resolució a partir del conjunt de clàusules S)

Petit exemple de recapitulació

Exemple:

Vull saber si $F \models G$ en LPO. Aqui F i G són fórmules qualssevol. Què faig?

$S_0 = S$
$S_1 = S_0 \cup Res_1(S_0)$
$\ldots$
$Res(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$

Un detall important!! $Res(S)$ NO és exactament la clausura sota **només resolució**!!
Cal una regla deductiva addicional: la **factorització**.
Veurem per què:

Un exemple. Un conjunt S de dues clàusules:
$$\{\, p(x) \vee p(y),\ \ \neg p(z) \vee \neg p(z')\,\}$$

S és SAT o INSAT? Suposem que S és SAT.

Llavors hi hauria un model I amb almenys un element en el seu domini D_I (els dominis sempre són no-buits).

Diguem-li "e" a aquest element: $D_I = \{e, \ldots\}$

Com pot ser $p_I(e)$? cert o fals?

- per la primera clàusula $\forall x \forall y\ (p(x) \vee p(y))$ en el cas on $x = y = e$, necessito que $p_I(e) = 1$
- per la segona clàusula (cas on $z = z' = e$) necessito que $p_I(e) = 0$

Contradicció! No existeix cap model!! Per tant, S és INSAT.

Com que S és INSAT, mitjançant resolució hauríem de poder obtenir $\Box$ a partir de S.

$\{ p(x) \vee p(y),\ \neg p(z) \vee \neg p(z') \}$

Però no és possible obtenir $\Box$!!
Puc fer, per exemple, aquesta resolució:

$$\frac{p(x) \vee p(y) \qquad \neg p(z) \vee \neg p(z')}{p(y) \vee \neg p(z')} \quad mgu(p(x), p(z)) = \{x = z\}$$

En les clàusules de S, els literals no comparteixen variables.

L'única cosa que puc obtenir mitjançant resolució són altres clàusules on els literals tampoc comparteixen variables.

I per això, en aquest exemple, sempre continuaré obtenint clàusules de dos literals!

I mai sortirà la clàusula buida $\Box$!!

Aquest exemple demostra que la resolució per si sola NO és refutacionalment completa!!

Si només considerem resolució, NO és veritat que
S insat SSI $\Box \in Res(S)$.

Què és el que falta?
Fem el mateix "tipus" d'exemple en L.proposicional:

$p \vee q$
$p \vee \neg q$
$\neg p \vee q$
$\neg p \vee \neg q$

INSAT. Per resolució:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{p \vee q \qquad p \vee \neg q}{p \vee p}}{p} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \qquad \neg p \vee \neg q}{\neg p \vee \neg p}}{\neg p}}{\Box} \quad \longleftarrow (*)$$

(*) aquest pas d'eliminar literals repetits l'hem de simular (estendre) en LPO!!

Factorització

La Regla deductiva de Factorització en LPO és la que fa això. És la següent:

$$\frac{A \vee B \vee C}{(A \vee C)\,\sigma}$$

on A i B àtoms (literals POSITIUS),
i C és la resta de la clàusula
$\sigma = mgu(A, B)$

Per exemple:

$$\frac{\overbrace{p(a,x)}^{A} \vee \overbrace{p(y,b)}^{B} \vee \overbrace{q(x,y) \vee \cdots}^{C}}{(\,p(a,x) \vee q(x,y) \vee \cdots)\,\sigma} \qquad \begin{aligned}\sigma &= mgu(p(a,x), p(y,b)) \\ &= \{x{=}b, y{=}a\}\end{aligned}$$

$p(a,b) \vee q(b,a) \vee \cdots$

En què es basa això?

Si tinc: $\forall x \forall y \quad p(a,x) \vee p(y,b) \vee q(x,y)$
en particular, tinc: $p(a,b) \vee p(a,b) \vee q(b,a)$
(és a dir, el mateix on $x{=}b$, $y{=}a$)

i sobre això puc eliminar literals repetits com en L.Prop:
$p(a,b) \vee q(b,a)$

Tornem a l'exemple del conjunt S de dues clàusules:

1. $\{ p(x) \vee p(y),$
2. $\neg p(z) \vee \neg p(z') \}$

Puc aplicar factorització a la clàusula 1.! :

$\dfrac{p(x) \vee p(y)}{}$
3. $p(x)$ — $\sigma = mgu(p(x), p(y)) = \{y{=}x\}$ (aqui la part C és buida)
4. $\neg p(z')$ — per resolució entre 2. i 3.: $\sigma = mgu(p(z), p(x)) = \{x{=}z\}$
5. $\Box$ — per resolució entre 3. i 4.: $\sigma = mgu(p(z'), p(x)) = \{x{=}z'\}$

El teorema que SÍ QUE és veritat en LPO:

S insat SSI $\Box \in ResFact(S)$

Calculem $ResFact(S)$ per nivells:

$S_0 = S$
$S_{i+1} = S_i \cup Res_1(S_i) \cup Fact_1(S_i)$

$ResFact(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$

Última observació: Què passa si S és (un conjunt de clàusules de) Horn?

1. La regla de factorització no s'aplica a clàusules de Horn.
2. Si S és de Horn, fent resolució només obtinc clàusules de Horn.

Si S és Horn, llavors:

S insat SSI $\Box \in Res(S)$

(Si S és Horn no necessito factorització!!!, perquè mai tindré ocasió d'aplicar-la!)

Comentaris sobre el tema 6

- Programació lògica
  Llegeix els apunts del tema 6. ☞ `p6.pdf`
  - un programa Prolog és un conjunt de clausulas de Horn de LPO
  - executar un programa Prolog és fer resolució (amb una estratègia determinada, no és exactament per nivells $S_0, S_1, S_2, \ldots$)
- Mira els exercicis d'examen on es fa això. Per exemple, l'exercici 6 de l'examen final de 2017 tardor.

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:
   (a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"
   (b) "Els dracs verds poden volar"
   (c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

Demostra per resolució que la conjunció de (a), (b) i (c) implica que:
   (d) "Tots els dracs verds són feliços"

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"
(b) "Els dracs verds poden volar"
(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

Demostra per resolució que la conjunció de (a), (b) i (c) implica que:

(d) "Tots els dracs verds són feliços"

$\textit{esfeliç}(x) \equiv$ "x és feliç"
$\textit{fillde}(x,y) \equiv$ "un fill de x és y"
$\textit{esverd}(x) \equiv$ "x és verd"
$\textit{vola}(x) \equiv$ "x pot volar"

➤ Necessitem un predicat unari $\textit{esdragon}(x)$???
Funcionaria, però NO cal, podem assumir que tots l'elements del domini són dracs.

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

$\textit{esfeliç}(x) \equiv$ "x és feliç"
$\textit{fillde}(x,y) \equiv$ "un fill de x és y"
$\textit{esverd}(x) \equiv$ "x és verd"
$\textit{vola}(x) \equiv$ "x pot volar"

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"
(a) $\forall x\ (\quad \ldots \quad \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\ )$
on $\ldots$ ha de dir que tots els fills de x poden volar:
$\forall y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\ )$
I ens queda:
(a) $\forall x\ (\ \forall y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\ ) \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(b) "Els dracs verds poden volar"

$\textit{esfeliç}(x) \equiv$ "x és feliç"
$\textit{fillde}(x,y) \equiv$ "un fill de x és y"
$\textit{esverd}(x) \equiv$ "x és verd"
$\textit{vola}(x) \equiv$ "x pot volar"

(b) "Els dracs verds poden volar"
(b) $\forall x\ (\textit{esverd}(x) \rightarrow \textit{vola}(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

$\textit{esfeliç}(x) \equiv$ "x és feliç"
$\textit{fillde}(x,y) \equiv$ "un fill de x és y"
$\textit{esverd}(x) \equiv$ "x és verd"
$\textit{vola}(x) \equiv$ "x pot volar"

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"
(c) $\forall x\ (\quad \ldots \quad \rightarrow \textit{esverd}(x)\ )$
on $\ldots$ ha de dir que x és fill de almenys un drac verd:
$\exists y\ (\ \textit{fillde}(y,x) \wedge \textit{esverd}(y)\ )$
I ens queda:
(c) $\forall x\ (\ \exists y\ (\ \textit{fillde}(y,x) \wedge \textit{esverd}(y)\ ) \rightarrow \textit{esverd}(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

La conjunció de (a), (b) i (c) implica (d) SSI
$(a) \wedge (b) \wedge (c) \models (d)$ SSI
$(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge \neg(d)$ INSAT SSI
$S = \texttt{formaclausal}(\ (a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge \neg(d)\ )$ INSAT SSI
$\Box \in \textit{ResFact}(S)$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(d) "Tots els dracs verds són feliços"
$(\neg d)$ "No tots els dracs verds són feliços"

$(\neg d)\quad \neg\forall x\ (\ \textit{verd}(x) \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\ )$
$\neg\forall x\ (\ \neg\,\textit{verd}(x) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$
$\exists x\ (\ \textit{verd}(x) \wedge \neg\,\textit{esfeliç}(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(a) $\forall x\ (\ \forall y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\ ) \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\ )$

$\forall x\ (\ \forall y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\ ) \rightarrow \textit{esfeliç}(x)\ )$
➤ eliminem les $\rightarrow$
$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \rightarrow \textit{vola}(y)\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$
$\forall x\ (\ \neg\forall y\ (\ \neg\,\textit{fillde}(x,y) \vee \textit{vola}(y)\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$
➤ moure les $\neg$
$\forall x\ (\ \exists y\ \neg(\ \neg\,\textit{fillde}(x,y) \vee \textit{vola}(y)\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$
➤ moure les $\neg$ (de Morgan)
$\forall x\ (\ \exists y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \wedge \neg\,\textit{vola}(y)\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(a) "Tot drac està feliç si tots els seus fills poden volar"

(a) [$\textit{cont.}$] $\forall x\ (\ \exists y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \wedge \neg\,\textit{vola}(y)\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$

$\forall x\ (\ \exists y\ (\ \textit{fillde}(x,y) \wedge \neg\,\textit{vola}(y)\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$
➤ Skolemizar (eliminar el $\exists$)
$\forall x\ (\ (\ \textit{fillde}(x,f_y(x)) \wedge \neg\,\textit{vola}(f_y(x))\ ) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )$
➤ distributivitat $(F \wedge G) \vee H) \Rightarrow (F \vee H) \wedge (G \vee H)$
$\forall x\ (\ (\ \textit{fillde}(x,f_y(x)) \vee \textit{esfeliç}(x)\ ) \wedge$
$(\ \neg\,\textit{vola}(f_y(x)) \vee \textit{esfeliç}(x)\ )\ )$

Això ens done dues clàusules:
$(a1)$ $\textit{fillde}(x,f_y(x)) \vee \textit{esfeliç}(x)$
$(a2)$ $\neg\,\textit{vola}(f_y(x)) \vee \textit{esfeliç}(x)$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(b) "Els dracs verds poden volar"

(b) $\forall x\ (\textit{esverd}(x) \rightarrow \textit{vola}(x)\ )$

$\forall x\ (\ \textit{esverd}(x) \rightarrow \textit{vola}(y)\ )$
➤ eliminem les $\rightarrow$
$\forall x\ (\ \neg\,\textit{esverd}(x) \vee \textit{vola}(y)\ )$

Això ens done una clàusula:
(b) $\neg\,\textit{esverd}(x) \vee \textit{vola}(x)$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

(c) $\forall x\ (\ \exists y\ (\ fillde(y,x) \land esverd(y)\ )\ \rightarrow\ esverd(x)\ )$

$\forall x\ (\ \exists y\ (\ fillde(y,x) \land esverd(y)\ ) \rightarrow esverd(x)\ )$

➤ eliminem les $\rightarrow$

$\forall x\ (\ \neg\exists y\ (\ fillde(y,x) \land esverd(y)\ ) \lor esverd(x)\ )$

➤ moure les $\neg$

$\forall x\ (\ \forall y\ \neg(\ fillde(y,x) \land esverd(y)\ ) \lor esverd(x)\ )$

➤ moure les $\neg$ amb de Morgan

$\forall x\ (\ \forall y\ (\ \neg fillde(y,x) \lor \neg\ esverd(y)\ ) \lor esverd(x)\ )$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

(c) "Un drac és verd si és fill d'almenys un drac verd"

(c) [cont.] $\forall x\ (\ \forall y\ (\ \neg fillde(y,x) \lor \neg\ esverd(y)\ )\ \lor esverd(x)\ )$

$\forall x\ (\ \forall y\ (\ \neg fillde(y,x) \lor \neg\ esverd(y)\ ) \lor esverd(x)\ )$

$\forall x\ \ \forall y\ (\ \neg fillde(y,x) \lor \neg\ esverd(y) \lor esverd(x)\ )$

Això ens done una clàusula:

(c) $\neg\ fillde(y,x) \lor \neg\ esverd(y) \lor esverd(x)$

és com:

```
esverd(x) :- fillde(y,x), esverd(y).
esverd(x) ← fillde(y,x) ∧ esverd(y)
```


7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Passem tot a forma clausal:

($\neg d$) "No tots els dracs verds són feliços"

($\neg d$) $\exists\, x\ (\ esverd(x)\ \land\ \neg\ esfeli\c{c}(x)\ )$

$\exists\, x\ (\ esverd(x)\ \land\ \neg\ esfeli\c{c}(x)\ )$

➤ Skolem

$esverd(c_x)\ \land\ \neg\ esfeli\c{c}(c_x)$

Això ens done dues clàusules:

($\neg d1$) $esverd(c_x)$

($\neg d2$) $\neg\ esfeli\c{c}(c_x)$

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

Juntem totes les clàusules:

($a1$) $fillde(x, f_y(x)) \lor esfeli\c{c}(x)$

($a2$) $\neg\ vola(f_y(x)) \lor esfeli\c{c}(x)$

(b) $\neg\ esverd(x) \lor vola(x)$

(c) $\neg\ fillde(y,x) \lor \neg\ esverd(y) \lor esverd(x)$

($\neg d1$) $esverd(c_x)$

($\neg d2$) $\neg\ esfeli\c{c}(c_x)$

Hem de fer resolució (i factorització, degut a que no és de Horn), i intentar obtenir $\Box$:

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

$a1.$ $fillde(x, f_y(x)) \lor esfeli\c{c}(x)$
$a2.$ $\neg vola(f_y(x)) \lor esfeli\c{c}(x)$
$b.$ $\neg esverd(x) \lor vola(x)$
$c.$ $\neg fillde(y,x) \lor \neg esverd(y) \lor esverd(x)$
$\neg d1.$ $esverd(c_x)$
$\neg d2.$ $\neg esfeli\c{c}(c_x)$

		amb:	*mgu*:	
1.	$vuela(c_x)$	res $d1$. amb b.	$\{x = c_x\}$	$\leftarrow (*)$
2.	$fillde(c_x, f_y(c_x))$	res $d2$. amb $a1$.	$\{x = c_x\}$	
3.	$\neg esverd(c_x) \lor esverd(\ f_y(c_x)\ )$	res 2. amb c.	$\{y = c_x, x = f_y(c_x)\}$	
4.	$esverd(\ f_y(c_x)\ )$	res 3. amb $d1$.	$\{\ \}$	
5.	$\neg vola(\ f_y(c_x)\ )$	res $a2$. amb $d2$.	$\{x = c_x\}$	
6.	$\neg esverd(\ f_y(c_x)\ )$	res 5. amb b.	$\{x = f_y(c_x)\}$	
7.	$\Box$	res 4. amb 6.	$\{\ \}$	

$(*)$: Al final aquesta clàusula 1. no la fem servir per res!

7. (Dificultat 3) (Schöning, Exercise 85) Formalitza els següents fets:

$a1.$ $fillde(x, f_y(x)) \lor esfeli\c{c}(x)$
$a2.$ $\neg vola(f_y(x)) \lor esfeli\c{c}(x)$
$b.$ $\neg esverd(x) \lor vola(x)$
$c.$ $\neg fillde(y,x) \lor \neg esverd(y) \lor esverd(x)$
$\neg d1.$ $esverd(c_x)$
$\neg d2.$ $\neg esfeli\c{c}(c_x)$

Nota:

Hi ha altres formes d'obtenir $\Box$.

Per al proper dia de classe:

- Recorda la lliçó de l'examen parcial.
  Per a estudiar teoria de LI:
  - repassa els materials del que hem estudiat, i
  - FÉS ELS EXÀMENS PENJATS, començant pels últims, cap als anteriors, treballant sempre primer l'enunciat SENSE resoldre, i després l'examen resolt.
- Continueu fent els exercicis del tema 5. Pròxima classe els farem, i també els d'examen que em proposeu!!!