Lògica en la Informàtica

Definició de la Lògica de Primer Ordre (LPO)

José Miguel Rivero   Robert Nieuwenhuis

Dept. Ciències de la Computació
Facultat de Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Tardor 2022

Temari:

1. Introducció i motivació
2. Definició de Lògica Proposicional (LProp)
3. **Deducció en Lògica Proposicional (LProp)**
4. Definició de Lògica de Primer Ordre (LPO)
5. Deducció en Lògica de Primer Ordre (LPO)
6. Programació Lògica (Prolog)

Col·lecció d'apunts bàsics de lògica. ☞ Fitxer `p3.pdf`

1. Formes normals i clàusules
   - Fórmules com a conjunts
   - Literals
   - CNF i DNF
   - Clàusula
   - Conjunt de clàusules
   - Clàusula buida
   - Clàusula de Horn

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

7b) Quantes d'aquestes clàusules són insatisfactibles?

7c) Quantes clàusules diferents i que no són tautologias hi ha?

7d) Quantes clàusules diferents que contenen exactament un literal per cada símbol proposicional hi ha?

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

Donat un conjunt S de k elements, quants subconjunts diferents té?

$S = \{e_1\ e_2\ \ldots\ e_k\}$

$0\ 0\ \ldots\ 0$	denota el subconjunt buit
$0\ 0\ \ldots\ 1$	denota el subconjunt $\{e_k\}$
$\ldots$	
$1\ 1\ \ldots\ 1$	denota el subconjunt $S = \{e_1\ e_2\ \ldots\ e_k\}$

Això explica que hi ha 2^k subconjunts diferents.

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

Si tenim n símbols, quants literals hi ha? $2n$
Per tant, hi ha $2^{(2n)}$ clàusules (subconjunts dels $2n$ literals) $= 4^n$

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7a) Quantes clàusules diferents (com a conjunts de literals) hi ha?

Una altra manera de veure el mateix: per cadascun dels n símbols p, en una clàusula passarà una de les següents 4 situacions:

a) estan p i $\neg p$ en la clàusula
b) està només p en la clàusula
c) està només $\neg p$ en la clàusula
d) no està ni p ni $\neg p$ en la clàusula

és a dir, hi ha 4^n possibilitats de clàusules.

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7b) Quantes d'aquestes clàusules són insatisfactibles?

Només 1, la clàusula buida.

En una clàusula $p_1 \vee \cdots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ si $m+n > 0$, llavors sí és satisfactible.

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7c) Quantes clàusules diferents i que no són tautologıas hi ha?

3^n: per l'altra manera de resoldre el 7a): per cada p, desapareix el cas "a) estan p i $\neg p$ en la clàusula."

7. (dificultat 1) Donats n símbols proposicionals:

7d) Quantes clàusules diferents que contenen exactament un literal per cada símbol proposicional hi ha?

2^n: per l'altra manera de resoldre el 7a): per cada p, desapareixen el cas a) i el cas d).

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és <u>equisatisfactible</u> a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

Ajuda: és possible introduir algun símbol de predicat p nou, que signifiqui: "$l \lor l'$ és cert" per a algun parell de literals l i l'.

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

Si tinc una clàusula massa llarga (més de 3 lits), puc escriure-la com a $l \vee l' \vee C$ on C és la resta de la clàusula.

Llavors S és de la forma $\{l \vee l' \vee C\} \cup S1$.

Com podem expressar que $p \leftrightarrow l \vee l'$ mitjançant clàusules de màxim 3 literals? Recordem: $a \to b \equiv \neg a \vee b$

$$p \to l \vee l' \equiv \neg p \vee l \vee l'$$

$$p \leftarrow l \vee l' \equiv \{\, l \to p, l' \to p \,\} \equiv \{\, \neg l \vee p, \neg l' \vee p \,\}$$

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

Sigui S' el conjunt $\{\, p \vee C, \neg l \vee p, \neg l' \vee p, \neg p \vee l \vee l' \,\} \cup S1$,
NOTA: aqui p és un símbol nou!!

Hem escurçat en 1 literal 1 clàusula.
Però puc repetir això tantes vegades com faci falta.

- Falta veure que S és satisfactible ssi S' és satisfactible.

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

A) $\Longrightarrow$: S és satisfactible $\Longrightarrow$ S' és satisfactible.

B) $\Longleftarrow$: S' és satisfactible $\Longrightarrow$ S és satisfactible.

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

A) $\Longrightarrow$: S és satisfactible $\Longrightarrow$ S' és satisfactible.

S és satisfactible ssi
$\exists I$ tq I és model de S ssi
$\exists I$ tq $I \models S$

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

A) $\Longrightarrow$: S és satisfactible $\Longrightarrow$ S' és satisfactible.

Si $I \models l \vee l'$ llavors sigui I' la interpretació que ESTÉN la I amb $I'(p) = 1$, (I' és com I, excepte que a més a més $I'(p) = 1$) si no, sigui I' la interpretació que ESTÉN la I amb $I'(p) = 0$.

Tenim que $I' \models S1$, perquè $I \models S1$.
A més a més $I' \models \{ p \vee C, \neg l \vee p, \neg l' \vee p, \neg p \vee l \vee l' \}$ perquè (entre altres raons) $I \models l \vee l' \vee C$.
Per això $I' \models S'$ i per tant S' és sat.

8. (dificultat 4) Proposa un algorisme eficient que, donat un conjunt de clàusules S, retorna un conjunt de clàusules S' (no necessàriament definit sobre els mateixos símbols de predicado que S) amb com a molt 3 literals per clàusula, que és equisatisfactible a S (és a dir, que és satisfactible si i només si S ho és).

B) $\Longleftarrow$: S' és satisfactible $\Longrightarrow$ S és satisfactible.

Sigui I' model de S'.
Sigui I la RESTRICCIÓ de I' "oblidant-nos" de la p.
I veiem que $I \models S$.

9. (dificultat 2) Sigui S un conjunt de clàusules de Horn on la clàusula buida no està en S ($\Box \notin S$). Demostra que S és satisfactible (donant un model per a S) si no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positivo.

Totes les clàusules de S són de Horn i no-buides, és a dir, de la forma $p_1 \vee \cdots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m$ on $k+m>0$, i $k \leq 1$. Com poden ser?

De la forma:

a) p

b) $p \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ amb $n > 0$

c) $\neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ amb $n > 0$

9. (dificultat 2) Sigui S un conjunt de clàusules de Horn on la clàusula buida no està en S ($\Box \notin S$). Demostra que S és satisfactible (donant un model per a S) si no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positivo.

Ara diu que tampoc hi ha de tipus a): no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positiu.

a) $\cancel{p}$

b) $p \vee \neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ amb $n > 0$

c) $\neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_n$ amb $n > 0$

Llavors és satisfactible: un model és la I on per a tot símbol p tenim $I(p) = 0$.

10. (dificultat 2) Demostra que l'enunciat de l'exercici previ és fals quan S no és de Horn.

Donem un contraexemple d'un conjunt de clàusules S on:

- la clàusula buida no està en S, i
- no hi ha cap clàusula que només consti d'un únic literal positiu,
- i en canvi, S és insatisfactible.

Perquè no sigui de Horn, se'ns ocorre posar la clàusula més senzilla que no és de Horn:

$$p \vee q$$
$$\neg p$$
$$\neg q$$

10. (dificultat 2) Demostra que l'enunciat de l'exercici previ és fals quan S no és de Horn.

Un altre exemple:

$$\begin{array}{r}
p \lor q \\
p \lor \neg q \\
\neg p \lor q \\
\neg p \lor \neg q.
\end{array}$$

Això és insatisfactible, perquè cadascuna de les quatre interpretacions que hi ha és falsificada per una de les clàusules. És a dir, per a tota I, hi ha una clàusula C en S tal que I no satisfà C.

12. (dificultat 3) Per a una fórmula en DNF, quin és el millor algorisme possible per a decidir si és satisfactible? Quin cost té?

Una DNF (disjunctive normal form) és una disjunció (OR) de "cubs", on cada cub és $p_1 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge \neg q_1 \wedge \cdots \wedge \neg q_m$.
Una DNF $= \{ C_1 \vee \cdots \vee C_n \}$ és satisfactible ssi algun cub C_i és satisfactible.

Una cub $p_1 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge \neg q_1 \wedge \cdots \wedge \neg q_m$ és satisfactible ssi no hi ha cap símbol que aparegui en un literal positiu del cub i també en un negatiu.

Per tant, el cost pot ser **lineal**.

Col·lecció d'apunts bàsics de lògica. ☞ Fitxer `p3.pdf`

5. Resolució. Correcció i completitud
   - Resolució
   - Clausura sota resolució
   - Clausura sota una regla deductiva qualsevol
   - Correcció i completitud d'una regla deductiva
   - Completitud refutacional de la resolució

5. Resolució. Correcció i completitud

Resolució per a lògica proposicional:

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D}$$

per algun símbol p

Premisses: $p \vee C$, $\neg p \vee D$

Conclusió: $C \vee D$

La resolució és CORRECTA?

És a dir, siguin com siguin C, D i p, tenim que
$(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$?

15. (dificultad 2) Demostra que la resolució és correcta.

Es CORRECTA si siguin com siguin C, D i p, tenim que $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.

Sigui I un model de $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D)$.
Hi han dos casos:

$I(p) = 1$ Llavors
$$I \models (p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \implies I \models \neg p \vee D \implies I \models D \implies I \models C \vee D$$

$I(p) = 0$ Llavors
$$I \models (p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \implies I \models p \vee C \implies I \models C \implies I \models C \vee D$$

5. Resolució. Clausura

$$\frac{p \lor C \qquad\qquad \neg p \lor D}{C \lor D}$$ per algun símbol p

Exemple: Sigui S el conjunt de clàusules:

$$\left\{ \begin{array}{r} p \lor q \\ p \lor \neg q \\ \neg p \lor q \\ \neg p \lor \neg q \end{array} \right\}.$$

➤ Puc obtenir mitjançant resolució a partir de $p \lor q$ i $p \lor \neg q$ (sobre la q) i obtinc $p \lor p$ que és el mateix que p.

➤ Puc obtenir mitjançant resolució a partir de $\neg p \lor q$ i $\neg p \lor \neg q$ (sobre la q) i obtinc $\neg p \lor \neg p$ que és el mateix que $\neg p$.

5. Resolució. Clausura

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

Exemple: Sigui S el conjunt de clàusules:

$$\begin{array}{rl} \{ & p \vee q \\ & p \vee \neg q \\ & \neg p \vee q \\ & \neg p \vee \neg q \ \}. \end{array}$$

A partir de les dues clàusules noves p i $\neg p$, en un altre pas puc obtenir **la clàusula buida** $\Box$.

5. Resolució. Clausura

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

Exemple: Sigui S el conjunt de clàusules:

$$\begin{array}{lll} \{\ p \vee q & \qquad & S_0 = S \\ \quad p \vee \neg q & & S_1 = S_0 \cup \{\, p,\ \neg p,\ q, \neg q,\ p \vee \neg p,\ q \vee \neg q,\ \ldots \} \\ \quad \neg p \vee q & & S_2 = S_1 \cup \{\, \square\,,\ \ldots \} \\ \quad \neg p \vee \neg q\ \}. & & S_3 = S_2 \cup ??? \end{array}$$

$$Res(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

5. Resolució. Correcció i completitud

$$\frac{p \vee C \qquad\qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \qquad \text{per algun símbol } p$$

Hi ha un teorema que diu:

S és insatisfactible **SSI** mitjançant resolució puc arribar a obtenir la clàusula buida (formalment, SSI $\Box \in Res(S)$).

16. (dificultat 2) Demostra que, per a tot conjunt finit de clàusules S, tenim que $Res(S)$ és un conjunto finit de clàusules, si es consideren les clàusules com a conjunts de literals (per exemple, $C \vee p$ és la mateixa clàusula que $C \vee p \vee p$).

Si el conjunt inicial S té n símbols diferents, llavors EXISTEIXEN $2^{(2n)}$ clàusules diferents (que és un número gran, però **finit**).

Per tant, la resolució arribarà un moment, una S_i, tal que $S_i = S_{i+1}$, és a dir, que a partir d'aquesta S_i ja no afegim res nou, i totes les S_j a partir d'aquí seran iguals.

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

a) $I \models Res(S) \implies I \models S$

b) $I \models S \implies I \models Res(S)$

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

a) $I \models Res(S) \implies I \models S$

Trivialment, perquè S és un subconjunt de $Res(S)$ (per def. de $Res(S)$ que és la unió de totes les S_i's).

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

b) $I \models S \implies I \models Res(S)$

Hem obtingut $Res(S)$ a partir de S, a força d'afegir, un nombre finit de vegades k, una conclusió per resolució a partir de clàusules que ja teníem.
Demostrarem que per a tota I, $I \models S \implies I \models Res(S)$ per **inducció** sobre k.

17. (dificultat 3) Sigui S un conjunt de clàusules. Demostra que $Res(S)$ es lògicamente equivalent a S.

Sigui I una interpretació qualsevol.
Hem de demostrar que $I \models S$ ssi $I \models Res(S)$.

b) $I \models S \implies I \models Res(S)$

- Si $k = 0$, trivial perquè llavors $S = Res(S)$.
- Si $k > 0$, suposa que el primer pas és de S a un S', afegint 1 clàusula per resolució a partir de S.

  Per correcció de la resolució $S \models S'$, per la qual cosa $I \models S \implies I \models S'$.
  A més a més, com $S \subseteq S'$, tenim també que $S' \models S$.
  Per tant, $S \equiv S'$.
  Per Hipòtesi d'Inducció, com el nombre de passos des de S' a $Res(S)$ és $k-1$, tenim que $I \models Res(S)$. ■

18. (dificultat 2) La resolució és completa? Demostra-ho.

Exercicis del capítol `p3.pdf` per al proper dia:

- exercici 18 pendent
- exercicis fins al 27, i també
- ☞ el sudoku (pàg. 8)