UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°4: Problemas de Valores Iniciales
Parte I
Cálculo Numérico 521230, 2022-2

Los problemas a resolver con ayuda del computador han sido marcados con (C).

1. **(C)** Considere las ecuaciones
   a) $y'(x) = 2x, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0,1],$ cuya solución exacta es $y(x) = x^2$,
   b) $y'(x) = -\sin(x), \quad y(0) = 1, \quad x \in [0,\pi],$ cuya solución exacta es $y(x) = \cos(x)$,
   c) $y'(t) = 1 + \frac{y(t)}{t}, \quad y(1) = 1, \quad t \in [1,6],$ cuya solución exacta es $y(t) = t(1 + \ln(t))$.

   Para cada una de ellas realice lo siguiente:
   - Calcule, "a mano" o con calculadora, las aproximaciones que se obtengan de aplicar el método de Euler explícito con dos subintervalos.
   - Baje el programa de MATLAB *euler.m* y utilícelo para obtener las aproximaciones de considerando 100 subintervalos. Grafique la aproximación y la solución exacta para comparar.
   - Diseñe, y ejecute, un experimento que permita verificar el orden de convergencia del método de Euler.

2. **(C)** La altura h (en metros) de líquido en el acumulador de un sistema de bombeado satisface el modelo

$$h'(t) + 0.002\left(52.1\,h(t) + \frac{10.3}{10.3 + h(t)}\right) - 1.17\,(1 + \sin(3t)) = 0.0308, \qquad h(0) = 5,$$

   siendo t el tiempo, medido en minutos. Resuelva el P.V.I. para $t \in [0,100]$ y responda:
   - ¿Cómo varía la altura del líquido con el tiempo?
   - Estime a partir de qué valor de t tiene la altura del líquido en el acumulador un comportamiento periódico. Estime amplitud y período de las oscilaciones de $h(t)$ a partir de ese momento.

3. **(C)** En el siguiente modelo

$$x'(t) = r\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{(x(t))^2}{1 + (x(t))^2}$$

   $x(t)$ describe el tamaño de una población en un instante de tiempo t. El modelo supone:
   - para poblaciones de tamaño pequeño, el tamaño de la población crece de forma proporcional a la cantidad de habitantes. Para problaciones de gran tamaño la ausencia de recursos para su sustento ocasiona que el radio de crecimiento de la población disminuya.
   - El segundo término en la parte derecha de la ecuación diferencial representa que la población puede disminuir por la acción de un predador.

   Las constantes reales r y k representan el radio de crecimiento y la capacidad del medio ambiente de proporcionar recursos para sustentar a la población respectivamente.
   - Considere $r = 0.4$, $k = 20$ y $x(0) = 2.44$. ¿Cómo varía el tamaño de la población con el tiempo? ¿A partir de qué valor de t es el tamaño de la población casi constante?
   - Repita el experimento con $x(0) = 2.4$. ¿Es el comportamiento de la población similar al del item anterior? Justifique.