UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 8

Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. **(Ejercicio guiado por el/la ayudante)** Considere la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, definida por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el vector columna $b = (2, 4, \ldots, 2\,n)^T$. Se pide realizar lo siguiente:

   a) Reserve memoria necesaria para la matriz A y el vector b, usando el comando `zeros`;

   b) Defina la matriz A y el vector b usando ciclos `for`;

   c) Ejecute la factorizacion `[L,U] = lu(A)`;

   d) Implemente una rutina `x = sustitucion(L,U,b)` que resuelva el sistema $L\,(U\,x) = b$ utilizando sustitución progresiva y sustitución regresiva cuando corresponda;

   e) Resuelva el sistema $A\,x = b$ utilizando lo anterior para $n = 3, 11, 37$.

2. **(Ejercicio guiado por el/la ayudante)** En muchas aplicaciones es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones $Ax_i = b_i$, con la misma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y distintas partes derechas $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$.

   Para hacer esto en Matlab resulta conveniente generar la matriz de partes derechas

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} b_1 & \cdots & b_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

   y resolver el sistema matricial $AX = B$, cuya solución

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c} x_1 & \cdots & x_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

   es la matriz de vectores solución x_i, $i = 1, \ldots, m$, de los sistemas anteriores.

   a) Escriba una función Matlab con los comandos que aparecen en el siguiente cuadro. Guárdela en `variossiste mas.m`.

```
function[t1,t2,t3,normadiferencia1,normadiferencia2] = variossistemas
% funcion para observar importancia de re-uso de descomposición LU

A=rand(50,50);
B=rand(50,100);

tic
```

```
X=A\B;
t1=toc;

Y = zeros(50,100);
tic
for i=1:100
    Y(:,i)=A\B(:,i);
end
t2=toc;

W = zeros(50,100);

tic
[L,U,P] = lu(A);
for i=1:100
    y = L\(P*B(:,i));
    W(:,i)=U\y;
end
t3=toc;

normadiferencia1=norm(X-Y,inf);
normadiferencia2=norm(X-W,inf);
```

b) Describa qué se hace en la función anterior, para ello busque para qué sirven los comandos `tic` y `toc`.

c) Escriba un rutero que llame a `variossistemas` 20 veces y determine el promedio de los valores de t_1, t_2 y t_3 retornados. ¿Qué valores obtiene? ¿Qué representan? ¿Cuál es la forma más eficiente de resolver varios sistemas de ecuaciones con misma matriz y distintas partes derechas? ¿Por qué cree que ocurre esto?

3. **(Ejercicio para trabajo autónomo)** La Figura 1 muestra los n estadíos de un reactor de extracción química. Agua, conteniendo una fracción de masa x_{in} de un cierto químico entra por la parte superior del reactor mientras que un solvente, conteniendo una fracción de masa y_{in} del mismo componente químico entra por la parte inferior del mismo. A medida que las corrientes de agua y solvente se mueven dentro del reactor, el químico es extraído del agua y transferido al solvente.

   La ecuación de balance del material químico en cada estadío del reactor establece que, si x_i e y_i representan las fracciones de masa del componente químico en agua y solvente respectivamente y se supone que $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $y_i = mx_i$, entonces en el primer y último estadíos se tiene

$$-(W + Sm)x_1 + Smx_2 = -Wx_{in}, \tag{1a}$$
$$Wx_{n-1} - (W + Sm)x_n = -Sy_{in}, \tag{1b}$$

   mientras que para los estadíos intermedios se cumple

$$Wx_{i-1} - (W + Sm)x_i + Smx_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{2}$$

   donde W, S, m son constantes.

   Ecuaciones (1)-(2) forman un sistema de ecuaciones lineales para las fracciones de masa del compuesto químico en el agua en cada uno de los estadíos del reactor. Nuestro interés es, dados valores para W, S, n, m, x_{in} e y_{in}, determinar las fracciones finales de químico en agua y solvente.

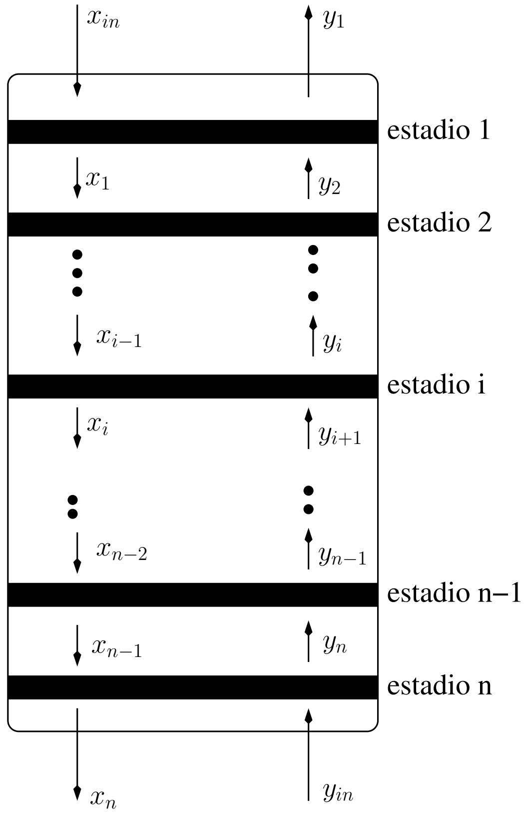

Figura 1: Reactor de extracción química con n estadíos

a) Escriba una función MATLAB que, dados valores $W, S, n, m, x_{in}, y_{in}$, retorne la matriz y la parte derecha del sistema de ecuaciones en (1)-(2).

b) Calcule, para $W = 200 Kg/hr$, $S = 50 Kg/hr$, $x_{in} = 0.075$, $y_{in} = 0$, $n = 6$ y $m = 7$, las fracciones finales de masa del químico en agua y solvente.