UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°1: Interpolación - Parte I
Cálculo Numérico 521230, 2022-2

Nota: El comando `polyfit` de MATLAB permite encontrar los coeficientes, en la base canónica del espacio correspondiente, del polinomio que interpola un conjunto de datos dado.
Por otro lado, el comando `polyval` es útil para evaluar dicho polinomio.
Para mayor información sobre ambos, escriba `help polyfit` o `help polyval` en el terminal de MATLAB.

1. Determine, si es posible, el polinomio que interpola a los siguientes pares ordenados. Represéntelo como combinación lineal de los polinomios en la base canónica del espacio correspondiente.

   a) $(0,1)$, $(2,3)$, $(3,0)$,
   b) $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$,
   c) $(-1,0)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,2)$,
   d) $(0,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$.

   Compruebe los resultados obtenidos utilizando el comando `polyfit` de MATLAB. Grafique los puntos y el polinomio obtenido.

2. Considere los mismos puntos del ejercicio anterior. Escriba, en cada caso en que fue posible encontrar el polinomio de interpolación, escriba al polinomio de interpolación utilizando los polinomios de Lagrange.

3. El Cuadro 1 muestra datos de temperatura de una sala a partir de las 6:00 hrs y cada 20 minutos.

Minutos después de 6:00 hrs	temperatura (^{0}C).
0	10
20	20
40	30

CUADRO 1. Datos para ejercicio 3

   a) Encuentre el polinomio que interpola a los datos de la tabla.
   b) Deduzca la temperatura de la sala a las 6:05 y 6:35 hrs.

4. Determine el polinomio que interpola a la función $\sin|_{[0,\pi]}$ en los siguientes puntos:
   a) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ y $x_2 = \pi$.
   b) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$ y $x_3 = \pi$.
   c) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 3\pi/4$ y $x_4 = \pi$.
   Compruebe los resultados obtenidos en cada caso utilizando el comando `polyfit` de MATLAB, grafique la función, el polinomio obtenido y los puntos de interpolación.

5. Obtenga una cota para el error de interpolación en cada uno de los casos anteriores.

6. Considere la función $f = \ln(x)$, $x \in [1,3]$.
   a) Escriba, como combinación lineal de polinomios en una base de Lagrange, el polinomio p que interpola a ln en los puntos $(1, \ln 1)$, $(2, \ln 2)$ y $(3, \ln 3)$.
   b) Grafique f, p y los puntos de interpolación.
   c) Utilice el polinomio calculado para aproximar los valores de ln(1,5) y ln(2,4).
   d) Determine una cota para el error de interpolación cometido en cada caso.

7. Considere los siguientes pares ordenados $(-1,5), (0,1), (1,1), (2,11)$.
   a) Muestre que los polinomios $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $q(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + 1$ los interpolan.
   b) Explique por qué esto no contradice el teorema visto en clases sobre unicidad del polinomio de interpolación.

8. Suponga se quiere determinar un polinomio de grado menor o igual que 1 que interpole a la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. La manera en que se escojan los puntos $x_0, x_1 \in [-1, 1]$ en los que el polinomio interpola a f influyen en el error de interpolación
$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi_x).$$
Suponga que $\max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| = 1$.
   a) Determine una cota para $|f(x) - p(x)|$ en el caso en que $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$.
   b) Determine una cota para $|f(x) - p(x)|$ en el caso en que $x_0 = -\sqrt{2}/2$ y $x_1 = \sqrt{2}/2$.
   c) Determine una cota para $|f(x) - p(x)|$ en el caso en que $x_0 = -\frac{1}{2}$ y $x_1 = \frac{1}{2}$.
¿En cuál de los casos obtiene la menor cota para el error de interpolación?
Observación: Dado que en este ejemplo $\max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| = 1$
$$|f(x) - p(x)| = \frac{1}{2} |(x - x_0)(x - x_1)||f''(\xi_x)| \Rightarrow |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$
Una cota para $|f(x) - p(x)|$ con $x \in [-1, 1]$ es $\frac{1}{2} \max_{x \in [-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1)|$.