UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico(521230/525240)
Laboratorio 5

Problemas de Valores Iniciales: Parte I

Ejercicios Laboratorio

Actividad 1: (Desarrollar en laboratorio por el/la ayudante)

1.1 Descarga el archivo `euler.m` del módulo *Capítulo 3: Ecuaciones diferenciales ordinarias* de la página Canvas del curso y realiza en él las siguientes modificaciones:

a) Cambia las líneas `x = []; y = [];` para, en lugar de inicializar `x` e `y` con vectores vacíos, crear `x` como el vector con los valores a, $a+h$, $\ldots$, $a+nh$ y crear `y` como un vector con $n+1$ ceros.

b) Como ya `x` tiene los valores correctos, borra de `euler.m` las líneas donde se completaba el vector `x`.

1.2 Escribe un rutero en el que

a) utilices la función `euler` para resolver los siguientes problemas de valores iniciales, dividiendo en cada caso el intervalo de integración en 4 subintervalos:

$$x'(t) = e^t/x(t),\ t \in [0,\,2],\ x(0) = 1,$$
$$y'(t) = t - y(t),\ t \in [0,\,4],\ y(0) = 1,$$
$$z'(t) = 4t\sqrt{z(t)^2+1}/z(t),\ t \in [0,\,5],\ z(0) = 1.$$

Las soluciones exactas de estos problemas son $x(t) = \sqrt{2e^t - 1}$, $y(t) = 2e^{-t} + t - 1$, $z(t) = \sqrt{(2t^2 + \sqrt{2})^2 - 1}$.

b) realices dos gráficos por cada uno de los problemas anteriores: en el primero debes graficar la solución exacta del problema de valores iniciales, evaluada en 1000 puntos equidistantes en el intervalo de integración y los pares ordenados (t_i, x_i) $i = 0, 1, \ldots, 4$ (o (t_i, y_i), $0, 1, \ldots, 4$ o (t_i, z_i), $i = 0, 1, \ldots, 4$) calculados con el método de Euler explícito. El segundo debe ser un gráfico de los pares (i, e_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, 4$, siendo e_i el error en t_i. Agrega títulos y etiquetas a los ejes de los gráficos.

c) calcules, por cada uno de los problemas anteriores, el error global del método de Euler aplicado a su solución.

Actividad 2: (Desarrollar en laboratorio como trabajo individual guiado por el/la ayudante)

Repita el problema anterior, pero utilice el método de Euler explícito con 16 y 64 subintervalos. ¿Ocurre para cada uno de los problemas anteriores que, al cuadruplicar la cantidad de subintervalos, el nuevo error global es un cuarto del anterior? Dado que el método de Euler explícito es un método de orden 1, éste es el tipo de comportamiento que se espera tenga el error global.

Actividad 3: (Desarrollar en laboratorio por el/la ayudante)

Un *interruptor genético* es un mecanismo que regula si una proteína particular es sintetizada o no por una célula. Este mecanismo puede ser modelado por el siguiente problema de valores iniciales

$$g'(t) = s - 1.51\, g(t) + 3.03 \frac{g(t)^2}{1 + g(t)^2}, \qquad g(0) = 0, \qquad t \in [0,\, 100], \tag{1}$$

donde g denota la concentración de la proteína y s es una constante que determina la concentración del químico que activa la producción de la proteína.

El objetivo de este problema es determinar si este modelo permite modelar la existencia de un valor umbral para s: si llamamos $\tilde{s}$ al valor umbral para s, debe ocurrir que para $s < \tilde{s}$ la concentración de la proteína debe variar desde 0 (valor inicial) a un valor cercano a cero y debe permanecer casi constante a partir de ese momento. Si $s > \tilde{s}$, debe ocurrir algo similar, pero el valor en que permanece g (valor en equilibrio de g) debe ser "significativamente" mayor al anterior.

Determinemos si existe $\tilde{s}$. Para ello escriba el rutero `interruptor_fen1.m` en el que:

1. Resuelva (1) con el esquema `ode45` de MATLAB, tomando s igual a cada uno de los siguientes valores: 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.
2. Grafique, en un mismo gráfico, las aproximaciones a g obtenidas con `ode45` y cada uno de los valores de s. Observe que la solución numérica tiene el comportamiento esperado. Para los dos primeros valores de s, los valores de g se mantienen cercanos a cero, pero para los dos últimos el valor de g en equilibrio es un número entre 1.5 y 2. Esto indica que $\tilde{s}$ es un número entre 0.2 y 0.3.
3. Resuelva nuevamente (1) con el esquema `ode45`, pero tomando ahora s igual a 0.201, 0.202, 0.203 y 0.204. ¿Entre cuáles de los valores anteriores usted presumiría que se encuentra el valor de $\tilde{s}$?

Para resolver el problema de valores iniciales $y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [a, b]$, $y(a) = y_a$, siendo $y : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, con el comando `ode45` debe procederse de la manera siguiente:

1. escribir una función para evaluar $f(t, y(t))$. Esta función debe, dados números reales t e y, retornar el valor de $f(t, y)$. Esta función tiene la misma sintaxis que las que escribimos para resolver los problemas en las actividades 1 y 2.

2. llamar a `ode45` dando como parámetros de entrada: función para evaluar $f(t, y(t))$, vector con dos componentes de la forma `[a,b]`, valor inicial y_a. A diferencia del llamado a Euler explícito, ahora entregamos los valores de a y b agrupados en un vector y n (cantidad de subintervalos en los que dividir $[a, b]$) no es un parámetro de entrada.

   Si el llamado es de la forma `[tv,yv] = ode45(mif,[a,b],ya)`, `tv` e `yv` son vectores con estas propiedades: en $tv = [t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n]$ se almacenan los valores, entre a y b, en los que `ode45` retorna una aproximación a $y(t_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$. El vector $yv = [y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n]$ contiene las aproximaciones y_i a $y(t_i)$.