

**Guía N°3: Integración Numérica**

Cálculo Numérico 521230, 2022-2

**Nota:** Esta guía complementa la Guía de Laboratorio sobre Integración Numérica.

**Los problemas a resolver con ayuda del computador han sido marcados con (C).**

1. Aproxime el valor de las siguientes integrales utilizando las reglas elementales del punto medio, de los trapecios y Simpson. ¿En qué casos puede asegurar que el valor que se obtenga con alguna de las reglas anteriores es igual al valor exacto de la integral?

a)  $\int_1^3 x \, dx,$

c)  $\int_{-4}^{-1} (x^3 + 2x^2 + 1) \, dx,$

e)  $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx,$

b)  $\int_1^3 (x^2 + 1) \, dx,$

d)  $\int_{-1}^1 x^4 \, dx,$

f)  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx.$

2. (C) Sea  $I := \int_0^1 \sin(x) \, dx$ . Para  $n \in \{2, 4, 8\}$ :

- divida el intervalo de integración  $[0, 1]$  en  $n$  subintervalos del mismo tamaño  $h = 1/n$ ,
- aproxime el valor de  $I$  por las reglas compuestas de punto medio y trapecios con  $n$  subintervalos.

Sean  $R_M(n)$  el valor absoluto de la diferencia entre  $I$  y su aproximación con la regla compuesta del punto medio con  $n$  subintervalos y  $R_T(n)$ , el valor absoluto de la diferencia entre  $I$  y su aproximación con la regla compuesta de los trapecios con  $n$  subintervalos. Complete la siguiente tabla:

| $n$ | $h$ | $R_M$ | $R_T$ |
|-----|-----|-------|-------|
| 2   |     |       |       |
| 4   |     |       |       |
| 8   |     |       |       |

¿Es el comportamiento del error acorde con resultado visto en clases? Justifique su respuesta.

3. (C) Sea  $I := \int_0^1 \sin(x) \, dx$ . Para  $n \in \{2, 3, 4\}$ :

- divida el intervalo de integración  $[0, 1]$  en  $2n$  subintervalos del mismo tamaño  $h = \frac{1}{2n}$ ,
- aproxime el valor de  $I$  por la regla compuesta de Simpson con  $2n$  subintervalos.

Sea  $R_S(n)$  el valor absoluto de la diferencia entre  $I$  y su aproximación con la regla compuesta de Simpson con  $2n$  subintervalos. Complete la siguiente tabla:

| $n$ | $h$ | $R_S$ |
|-----|-----|-------|
| 2   |     |       |
| 3   |     |       |
| 4   |     |       |

¿Es el comportamiento del error como el visto en clases? Justifique su respuesta.

4. (C) Repita el Ejercicio 3, pero considerando  $I := \int_{-1}^1 \sin(|x - 1/5|) \, dx$ .
5. (C) Repita el Ejercicio 3, pero considerando  $I := \int_{-1}^1 \sin(|x - 1/5|) \, dx$  y una partición que incluya el  $1/5$ . Por ejemplo, puede considerar  $n \in \{5, 10, 15\}$ . ¿Es el comportamiento del error en este caso igual al del problema anterior? ¿Por qué? Justifique su respuesta.
6. Considere la siguiente regla de cuadratura  $\int_0^1 f(x) \, dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1/2) + \omega_3 f(1)$ . Determine los pesos  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  de modo que la regla sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

7. Si  $\int_0^1 f(x)dx$  se aproxima por  $\int_0^1 p(x)dx$ , siendo  $p$  el polinomio de interpolación de  $f$  en  $0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$  y  $1$ , se obtiene la siguiente regla de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{18}f(0) + \frac{4}{9}\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{1}{18}f(1).$$

Esta regla satisface que

$$\int_0^1 x^4 dx \neq \frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^4\right) + \frac{1}{18}.$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique su respuesta sin calcular ninguna integral adicional.

- la regla es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 2,
  - la regla es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 3,
  - la regla es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 4.
8. Consideremos el problema de calcular

$$\int_0^1 (x^5 - Cx^4) dx,$$

donde  $C$  es un número real arbitrario, pero fijo.

- Muestre que si  $C = \frac{10}{9}$ , el valor exacto de esta integral coincide con la aproximación que se obtiene al aplicar la regla (simple) de los trapecios para su aproximación. ¿Contradice esto el resultado visto en clases sobre grado de los polinomios para los cuales la regla de los trapecios entrega el valor exacto de la integral?
  - Muestre que si  $C = \frac{5}{2}$ , el valor exacto de esta integral coincide con la aproximación que se obtiene al aplicar la regla (simple) de Simpson para su aproximación. ¿Contradice esto el resultado visto en clases sobre grado de los polinomios para los cuales la regla de Simpson entrega el valor exacto de la integral?
9. (C) Utilice la regla de Gauss-Legendre de 2 nodos para aproximar el valor de cada una de las integrales del Ejercicio 1.
10. Considere la integral doble  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ . Escriba las reglas de cuadratura que resultan de
- aplicar la regla del punto medio tanto en  $x$  como en  $y$ ,
  - aplicar la regla del punto medio en  $x$  y la de trapecios en  $y$ ,
  - aplicar la regla de trapecios en  $x$  y la del punto medio en  $y$ .
11. (C) Considere las siguientes integrales dobles

$$a) \int_0^\pi \int_1^3 x \sin(y) dx dy, \quad b) \int_0^\pi \int_1^3 \sin(xy) dx dy, \quad c) \int_0^1 \int_{-4}^{-1} (yx^3 + 2x^2 + y) dx dy.$$

Aproxime su valor utilizando las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura:

- Regla del punto medio en la variable  $x$  y regla de los trapecios en la variable  $y$ .
- Regla del punto medio en la variable  $x$  y regla Simpson en la variable  $y$ .
- Regla de Gauss-Legendre de 1 nodo en la variable  $x$  y regla de los trapecios en la variable  $y$ .

12. (C) Considere las siguientes integrales triples,

$$a) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^3 \sin(xyz) dx dy dz, \quad b) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (yx^3 + z) dx dy dz.$$

Aproxime su valor utilizando las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura:

- Regla del punto medio en las variables  $x$  e  $y$  y regla de los trapecios en la variable  $z$ .
- Regla de Gauss-Legendre con 2 nodos en las tres variables.

13. (C) Sabemos que el volumen  $V$  de un objeto  $S$  está dado por  $V = \iiint_S d(x, y, z)$ . Calcule una aproximación del volumen de una esfera de radio 2 utilizando reglas de cuadratura.

**Indicación:** Utilice coordenadas esféricas.