UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°6: Problemas de Valores Iniciales

Parte III

Cálculo Numérico 521230, 2022-2

Los problemas a resolver con ayuda del computador han sido marcados con (C).

1. **(C)** Considere las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior.

   a)

   $$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) - y(x) &= 2 + 4x - x^2, \quad x \in [0,1] \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{cases} \qquad \text{cuya solución exacta es } y(x) = x^2.$$

   b)

   $$\begin{cases} y'''(t) - 2y''(t) + ty(t) &= te^{2t}, \quad t \in [0,1] \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 2, \\ y''(0) &= 4, \end{cases} \qquad \text{cuya solución exacta es } y(t) = e^{2t}.$$

   Para cada ecuación realice lo siguiente:
   - Redúzcala a un sistema de ecuaciones de primer orden.
   - Aproxime la solución del sistema obtenido utilizando el método de **Euler Explícito** con distintos tamaños de paso. ¿Con cuál de ellos es el error en 1 menor o igual a 10^{-4}?.
   - Aproxime la solución del sistema obtenido utilizando el método de **Euler Implícito** con distintos tamaños de paso. ¿Con cuál de ellos es el error en 1 menor o igual a 10^{-4}?.

2. **(C)** Programe el método de Runge-Kutta RK_{44} :

   Algoritmo (RK4)

   Para $i = 0, \ldots, N-1$

   $x_i = a + ih$

   $k_1 = hf(x_i, y_i)$

   $k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$

   $k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2)$

   $k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$

   $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$

   fin i.

   FIGURA 1. Algoritmo de Runge-Kutta RK_{44}.

   Utilice el método de Runge-Kutta RK_{44} programado para resolver los siguientes PVIs del. Graficar la solución exacta y la aproximación obtenida.

   a) $y'(x) = 2x, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0,1]$, cuya solución exacta es $y(x) = x^2$,

   b) $y'(x) = -\sin(x), \quad y(0) = 1, \quad x \in [0,\pi]$, cuya solución exacta es $y(x) = \cos(x)$,

   c) $y'(t) = 1 + \frac{y}{t}, \quad y(1) = 1, \quad t \in [1,6]$, cuya solución exacta es $y(t) = t(1 + \ln(t))$.

Concepción, 25 de septiembre de 2022