Prova da Otimalidade do Kruskal e Prim

Prof. Fábio Dias

18 de janeiro de 2025

Sumário

Prova da Corretude do Kruskal

- Entrada: um grafo não direcionado $G = (V, E)$ conexo e para cada aresta $(u, v) \in E$ temos um valor associado $w(u, v)$;
- Saída: Uma AGM (árvore geradora mínima) T;
- É claro que o algoritmo produz uma árvore geradora. Agora precisamos provar que ela é mínima (ótima);
- Vamos provar por indução a seguinte afirmação: no início de cada iteração, T é um subgrafo de alguma AGM;

Prova da Corretude do Kruskal

- Caso Base: Ela é claramente verdadeira para a primeira iteração, quando T não tem arestas;
- Hipótese: Suponha que seja verdadeiro no início da $k - esima$ iteração, onde T é um subgrafo de uma AGM H.
- Passo Indutivo: Seja (v, u) a aresta que o Kruskal seleciona na iteração k. Precisamos provar que $T + (v, u)$ faz parte de alguma AGM.
- Se $(v, u) \in H$ não precisamos fazer nada. Suponha que $(v, u) \notin H$ e seja p o único caminho que conecta u e v em H. Pelo menos uma das arestas desse caminho não estão em T no início da iteração k, pois senão, a adição de (v, u) em T geraria um ciclo.
- Seja (x, y) essa aresta.

Prova da Corretude do Kruskal

- Como (v, u) foi escolhida primeiro pelo Kruskal, temos que $w(v, u) \leq w(x, y)$.
- Observe que a $H' = H + (v, w) - (x, y)$ é uma outra árvore geradora de G, de custo $w(H') = w(H) + w(v, w) - w(x, y) \leq w(H)$;
- Ou seja $w(H') \leq w(H)$, mas como H é uma AGM, temos que $w(H') = w(H)$ e logo H' é uma AGM.

Prova da Corretude do Prim

- Entrada: um grafo não direcionado $G = (V, E)$ conexo e para cada aresta $(u, v) \in E$ temos um valor associado $w(u, v)$;
- Saída: Uma AGM (árvore geradora mínima) T;
- É claro que o algoritmo produz uma árvore geradora. Agora precisamos provar que ela é mínima (ótima);
- Vamos provar por indução a seguinte afirmação: no início de cada iteração, T é um subgrafo de alguma AGM;

Prova da Corretude do Prim

- Caso base: O Prim começa adicionando um vértice qualquer em T. Claramente T é subgrafo de alguma AGM;
- Hipótese: Suponha que seja verdadeiro até o inicio da iteração k, onde T é um subgrafo de uma AGM H.
- Durante esta iteração, um vértice e aresta, será adicionada em T, aresta leve do corte $(T, V - T)$. Digamos (v, u), onde $v \in T$ e $u \notin T$.
- Se a aresta (v, u) já está em H, então $T + (v, u)$ é subgrafo de H, como queríamos provar.

Prova da Corretude do Prim

- Suponha agora que (v, u) não está em H.
- A árvore H tem um único caminho, digamos p, de v a u.
- Algum aresta (x, y) de p está no corte $(T, V - T)$ e como (v, u) foi selecionada, temos que $w(v, u) \leq w(x, y)$.
- $H' = H + (v, u) - (x, y)$ é uma árvore geradora de G com peso $w(H') = w(H) + w(v, u) - w(x, y)$. Logo, $w(H') \leq w(H)$.
- Portanto, H' também é uma AGM.