Programação Dinâmica

Programação Dinâmica: Conceitos Básicos

- Tipicamente o paradigma de programação dinâmica aplica-se a problemas de **otimização**.
- Podemos utilizar programação dinâmica em problemas onde há:
  - **Subestrutura Ótima:** As soluções ótimas do problema incluem soluções ótimas de subproblemas.
  - **Sobreposição de Subproblemas:** O cálculo da solução através de recursão implica no recálculo de subproblemas.

Programação Dinâmica: Conceitos Básicos (Cont.)

- A técnica de programação dinâmica visa evitar o recálculo desnecessário das soluções dos subproblemas.
- Para isso, soluções de subproblemas são armazenadas em tabelas.
- Logo, para que o algoritmo de programação dinâmica seja eficiente, é preciso que o número total de subproblemas que devem ser resolvidos seja pequeno (polinomial no tamanho da entrada).

Multiplicação de Cadeias de Matrizes

Problema: Multiplicação de Matrizes

Calcular o número mínimo de operações de multiplicação (escalar) necessários para computar a matriz M dada por:

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots M_i \ldots \times M_n$$

onde M_i é uma matriz de b_{i-1} linhas e b_i colunas, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Matrizes são multiplicadas aos pares sempre. Então, é preciso encontrar uma parentização (agrupamento) ótimo para a cadeia de matrizes.
- Para calcular a matriz M' dada por $M_i \times M_{i+1}$ são necessárias $b_{i-1} * b_i * b_{i+1}$ multiplicações entre os elementos de M_i e M_{i+1}.

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- **Exemplo:** Qual é o mínimo de multiplicações escalares necessárias para computar $M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ com $b = \{200, 2, 30, 20, 5\}$?
- As possibilidades de parentização são:

$$
\begin{array}{lcl}
M = (M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))) & \rightarrow & 5.300 \text{ multiplicações} \\
M = (M_1 \times ((M_2 \times M_3) \times M_4)) & \rightarrow & 3.400 \text{ multiplicações} \\
M = ((M_1 \times M_2) \times (M_3 \times M_4)) & \rightarrow & 4.500 \text{ multiplicações} \\
M = ((M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4) & \rightarrow & 29.200 \text{ multiplicações} \\
M = (((M_1 \times M_2) \times M_3) \times M_4) & \rightarrow & 152.000 \text{ multiplicações}
\end{array}
$$

- A ordem das multiplicações faz **muita** diferença !

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- Poderíamos calcular o número de multiplicações para todas as possíveis parentizações.
- O número de possíveis parentizações é dado pela recorrência:

$$P(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k) \cdot P(n-k) & n > 1, \end{cases}$$

- Mas $P(n) \in \Omega(4^n / n^{\frac{3}{2}})$, a estratégia de força bruta é impraticável !

Sequência de números de Catalan.

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- Inicialmente, para todo (i, j) tal que $1 \leq i \leq j \leq n$, vamos definir as seguintes matrizes:

$$M_{i,j} = M_i \times M_{i+1} \times \ldots \times M_j.$$

- Agora, dada uma parentização ótima, existem dois pares de parênteses que identificam o último par de matrizes que serão multiplicadas.
  Ou seja, existe k tal que $M = M_{1,k} \times M_{k+1,n}$.
- Como a parentização de M é ótima, as parentizações no cálculo de $M_{i,k}$ e $M_{k+1,n}$ devem ser ótimas também, caso contrário, seria possível obter uma parentização de M ainda melhor !
- Eis a subestrututra ótima do problema: a parentização ótima de M inclui a parentização ótima de $M_{i,k}$ e $M_{k+1,n}$.

- De forma geral, se $m[i, j]$ é número mínimo de multiplicações que deve ser efetuado para computar $M_i \times M_{i+1} \times \ldots \times M_j$, então $m[i, j]$ é dado por:

$$m[i, j] := \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + b_{i-1} * b_k * b_j\}.$$

- Podemos então projetar um algoritmo recursivo (indutivo) para resolver o problema.

Multiplicação de Matrizes - Algoritmo Recursivo

MinimoMultiplicacoesRecursivo(b, i, j)

$\triangleright$ **Entrada:** Vetor b com as dimensões das matrizes e os índices i e j que delimitam o início e término da subcadeia.
$\triangleright$ **Saída:** O número mínimo de multiplicações escalares necessário para computar a multiplicação da subcadeia. Esse valor é registrado em uma tabela ($m[i, j]$), bem como o índice da divisão em subcadeias ótimas ($s[i, j]$).

1. **se** $i = j$ **então devolva** 0
2. $m[i, j] := \infty$
3. **para** $k := i$ **até** $j - 1$ **faça**
4. $\quad q := MinimoMultiplicacoesRecursivo(b, i, k)+$
   $\quad\quad MinimoMultiplicacoesRecursivo(b, k + 1, j)+$
   $\quad\quad b[i - 1] * b[k] * b[j]$
5. $\quad$ **se** $m[i, j] > q$ **então**
6. $\quad\quad m[i, j] := q$; $s[i, j] := k$
7. **devolva** $m[i, j]$.

Efetuando a Multiplicação Ótima

- É muito fácil efetuar a multiplicação da cadeia de matrizes com o número mínimo de multiplicações escalares usando a tabela s, que registra os índices ótimos de divisão em subcadeias.

MultiplicaMatrizes(M, s, i, j)

$\triangleright$ **Entrada:** Cadeia de matrizes M, a tabela s e os índices i e j que delimitam a subcadeia a ser multiplicada.
$\triangleright$ **Saída:** A matriz resultante da multiplicação da subcadeia entre i e j, efetuando o mínimo de multiplicações escalares.

1. **se** $i < j$ **então**
2. $\quad X := MultiplicaMatrizes(M, s, i, s[i, j])$
3. $\quad Y := MultiplicaMatrizes(M, s, s[i, j] + 1, j)$
4. $\quad$ **devolva** $Multiplica(X, Y, b[i-1], b[s[i, j]], b[j])$
5. **senão devolva** M_i;

Algoritmo Recursivo - Complexidade

- O número mínimo de operações feita pelo algoritmo recursivo é dada pela recorrência:

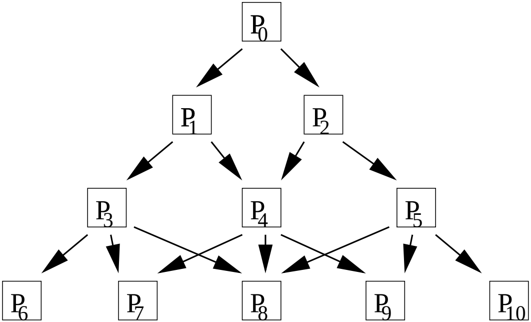
$$T(n) \geq \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1}[T(k) + T(n-k) + 1] & n > 1, \end{cases}$$

- Portanto, $T(n) \geq 2\sum_{k=1}^{n-1} T(i) + n$, para $n > 1$.
- É possível provar (por substituição) que $T(n) \geq 2^{n-1}$, ou seja, o algoritmo recursivo tem complexidade $\Omega(2^n)$, ainda impraticável !

Algoritmo Recursivo - Complexidade

- A ineficiência do algoritmo recursivo deve-se à sobreposição de subproblemas: o cálculo do mesmo $m[i,j]$ pode ser requerido em vários subproblemas.
- Por exemplo, para $n = 4$, $m[1,2]$, $m[2,3]$ e $m[3,4]$ são computados duas vezes.
- O número total de $m[i,j]$'s calculados é $O(n^2)$ apenas !
- Portanto, podemos obter um algoritmo mais eficiente se evitarmos recálculos de subproblemas.

Um subproblema pode aparecer várias vezes



Divisão e Conquista com Recursão simples:
P_4 resolvido 2 vezes (uma por P_1 e uma por P_2);
P_7 resolvido 3 vezes (uma por P_3 e duas por P_4);
P_8 resolvido 4 vezes (uma por P_3, duas por P_4 e uma por P_5);
P_9 resolvido 3 vezes (uma por P_3 e duas por P_4);

Memorização x Programação Dinâmica

- Existem duas técnicas para evitar o recálculo de subproblemas:
  - **Memorização:** Consiste em manter a estrutura recursiva do algoritmo, registrando em uma tabela o valor ótimo para subproblemas já computados e verificando, antes de cada chamada recursiva, se o subproblema a ser resolvido já foi computado.
  - **Programação Dinâmica:** Consiste em preencher uma tabela que registra o valor ótimo para cada subproblema de forma apropriada, isto é, a computação do valor ótimo de cada subproblema depende somente de subproblemas já previamente computados. Elimina completamente a recursão.

Algoritmo de Memorização

MinimoMultiplicacoesMemorizado(b, n)

1. **para** $i := 1$ **até** n **faça**
2.   **para** $j := 1$ **até** n **faça**
3. $m[i, j] := \infty$
4. **devolva** $Memorizacao(b, 1, n)$

Memorizacao(b, i, j)

1. **se** $m[i, j] < \infty$ **então devolva** $m[i, j]$
2. **se** $i = j$ **então** $m[i, j] := 0$
3. **senão**
4.   **para** $k := i$ **até** $j - 1$ **faça**
5. $q := Memorizacao(b, i, k) +$
            $Memorizacao(b, k + 1, j) + b[i - 1] * b[k] * b[j];$
6.   **se** $m[i, j] > q$ **então** $m[i, j] := q;\ s[i, j] := k$
7. **devolva** $m[i, j]$

Algoritmo de Programação Dinâmica

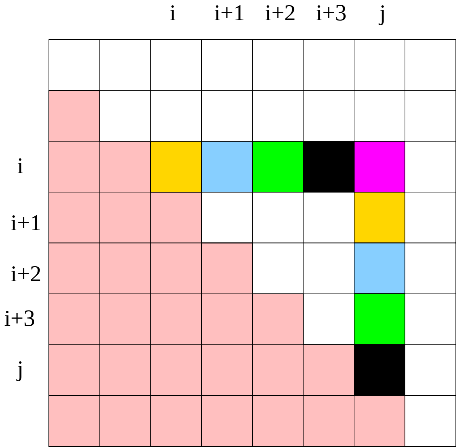
- O uso de programação dinâmica é preferível pois elimina completamente o uso de recursão.
- O algoritmo de programação dinâmica para o problema da multiplicação de matrizes torna-se trivial se computarmos, para valores crescentes de u, o valor ótimo de todas as subcadeias de tamanho u.

MinimoMultiplicacoes(b)

$\triangleright$ **Entrada:** Vetor b com as dimensões das matrizes.
$\triangleright$ **Saída:** As tabelas m e s preenchidas.

1. **para** $i = 1$ **até** n **faça** $m[i, i] := 0$
   $\triangleright$ calcula o mínimo de todas sub-cadeias de tamanho $u + 1$
2. **para** $u = 1$ **até** $n - 1$ **faça**
3.   **para** $i = 1$ **até** $n - u$ **faça**
4. $j := i + u$; $m[i, j] := \infty$
5.   **para** $k = i$ **até** $j - 1$ **faça**
6. $q := m[i, k] + m[k + 1, j] + b[i - 1] * b[k] * b[j]$
7.   **se** $q < m[i, j]$ **então**
8. $m[i, j] := q$; $s[i, j] := k$
9. **devolva** (m, s)

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

	1	2	3	4
1	0			
2		0		
3			0	
4				0

m

	1	2	3	4
1	_			
2		_		
3			_	
4				_

s

	1	2	3	4
1	0	12000		
2		0	1200	
3			0	3000
4				0

m

	1	2	3	4
1	_	1		
2		_	2	
3			_	3
4				_

s

{ 200, 2, 30, 20, 5 }

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

	1	2	3	4
1	0	12000	9200	
2		0	1200	
3			0	3000
4				0

m

	1	2	3	4
1	_	1	1	
2		_	2	
3			_	3
4				_

s

{ 200, 2, 30, 20, 5 }

b0*b1*b3=200*2*20=8000

b0*b2*b3=200*30*20=120000

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

	1	2	3	4
1	0	12000	9200	
2		0	1200	1400
3			0	3000
4				0

m

	1	2	3	4
1	_	1	1	
2		_	2	3
3			_	3
4				_

s

{ 200, 2, 30, 20, 5 }

b1*b2*b4=2*30*5=300

b1*b3*b4=2*20*5=200

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

	1	2	3	4
1	0	12000	9200	3400
2		0	1200	1400
3			0	3400
4				0

m

	1	2	3	4
1	_	1	1	1
2		_	2	3
3			_	3
4				_

s

b0*b1*b4=200*2*5=2000

b0*b2*b4=200*30*5=30000

b0*b3*b4=200*20*5=20000

{ 200, 2, 30, 20, 5 }

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

	1	2	3	4
1	0	12000	9200	3400
2		0	1200	1400
3			0	3000
4				0

m

	1	2	3	4
1	_	1	1	1
2		_	2	3
3			_	3
4				_

s

M1 ((M2 . M3) . M4)

- A complexidade de tempo do algoritmo é dada por:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} \sum_{k=i}^{i+u-1} \Theta(1) \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} u \, \Theta(1) \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} u(n-u) \, \Theta(1) \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} (nu - u^2) \, \Theta(1).
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Programação Dinâmica - Complexidade

- Como
$$\sum_{u=1}^{n-1} nu = n^3/2 - n^2/2$$
e
$$\sum_{u=1}^{n-1} u^2 = n^3/3 - n^2/2 + n/6.$$
Então,
$$T(n) = (n^3/6 - n/6)\,\Theta(1).$$
- A complexidade de tempo do algoritmo é $\Theta(n^3)$.
- A complexidade de espaço é $\Theta(n^2)$, já que é necessário armazenar a matriz com os valores ótimos dos subproblemas.

O Problema da Mochila

Dada uma mochila de capacidade W (inteiro) e um conjunto de n itens com tamanho w_i (inteiro) e valor c_i associado a cada item i, queremos determinar quais itens devem ser colocados na mochila de modo a **maximizar** o valor total transportado, respeitando sua capacidade.

- Podemos fazer as seguintes suposições:
  - $\sum_{i=1}^{n} w_i > W$;
  - $0 < w_i \leq W$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

- Podemos formular o problema da mochila com Programação Linear Inteira:
  - Criamos uma variável x_i para cada item: $x_i = 1$ se o item i estiver na solução ótima e $x_i = 0$ caso contrário.
  - A modelagem do problema é simples:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \tag{2}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \tag{3}$$

- (1) é a função objetivo e (2-3) o conjunto de restrições.

O Problema Binário da Mochila

- Como podemos projetar um algoritmo para resolver o problema?
- Existem 2^n possíveis subconjuntos de itens: um algoritmo de força bruta é impraticável!
- É um problema de otimização. Será que tem subestrutura ótima?
- Se o item n estiver na solução ótima, o valor desta solução será c_n mais o valor da melhor solução do problema da mochila com capacidade $W - w_n$ considerando-se só os $n - 1$ primeiros itens.
- Se o item n não estiver na solução ótima, o valor ótimo será dado pelo valor da melhor solução do problema da mochila com capacidade W considerando-se só os $n - 1$ primeiros itens.

- Seja $z[k,d]$ o valor ótimo do problema da mochila considerando-se uma capacidade d para a mochila que contém um subconjunto dos k primeiros itens da instância original.
- A fórmula de recorrência para computar $z[k,d]$ para todo valor de d e k é:

$$
\begin{aligned}
z[0,d] &= 0 \\
z[k,0] &= 0 \\
z[k,d] &= \begin{cases} z[k-1,d], & \text{se } w_k > d \\ \max\{z[k-1,d], z[k-1,d-w_k]+c_k\}, & \text{se } w_k \le d \end{cases}
\end{aligned}
$$

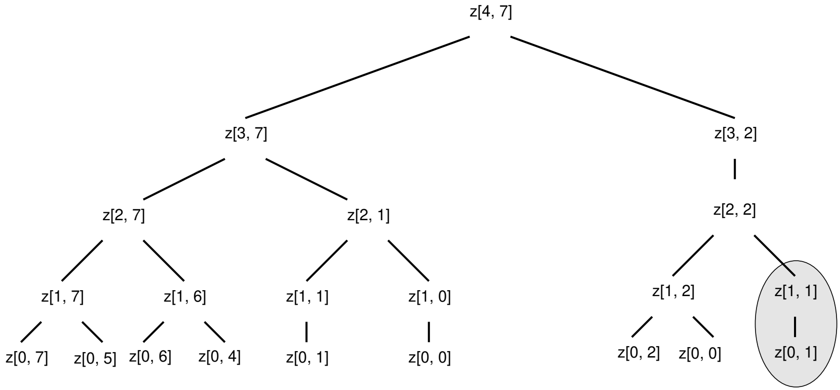
- A complexidade do algoritmo recursivo para este problema no pior caso é dada pela recorrência:

$$T(k,d) = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ ou } d = 0 \\ T(k-1,d) + T(k-1,d-w_k) + 1 & k > 0 \text{ e } d > 0. \end{cases}$$

- Portanto, no pior caso, o algoritmo recursivo tem complexidade $\Omega(2^n)$. É impraticável!
- Mas há sobreposição de subproblemas: o recálculo de subproblemas pode ser evitado!

Mochila - Sobreposição de Subproblemas

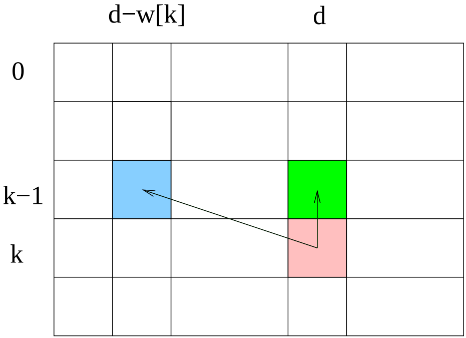
- Considere vetor de tamanhos $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e capacidade da mochila $W = 7$. A árvore de recursão seria:



- O subproblema $z[1, 1]$ é computado duas vezes.

Mochila - Programação Dinâmica

- O número total máximo de subproblemas a serem computados é nW.
- Isso porque tanto o tamanho dos itens quanto a capacidade da mochila são inteiros!
- Podemos então usar programação dinâmica para evitar o recálculo de subproblemas.
- Como o cálculo de $z[k, d]$ depende de $z[k-1, d]$ e $z[k-1, d-w_k]$, preenchemos a tabela linha a linha.



$$z[k,d] = \max\{\, z[k-1,d] \,,\; z[k-1,d-w[k]] + c[k] \,\}$$

Mochila(c, w, W, n)

▷ **Entrada:** Vetores c e w com valor e tamanho de cada item, capacidade W da mochila e número de itens n.
▷ **Saída:** O valor máximo do total de itens colocados na mochila.

1. **para** $d := 0$ **até** W **faça** $z[0, d] := 0$
2. **para** $k := 1$ **até** n **faça** $z[k, 0] := 0$
3. **para** $k := 1$ **até** n **faça**
4.   **para** $d := 1$ **até** W **faça**
5. $z[k, d] := z[k-1, d]$
6.   **se** $w_k \leq d$ **e** $c_k + z[k-1, d-w_k] > z[k, d]$ **então**
7. $z[k, d] := c_k + z[k-1, d-w_k]$
8. **devolva** $(z[n, W])$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0							
3	0							
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0							
3	0							
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0							
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Complexidade

- Claramente, a complexidade do algoritmo de programação dinâmica para o problema da mochila é $O(nW)$.
- É um algoritmo pseudo-polinomial: sua complexidade depende do valor de W, parte da entrada do problema.
- O algoritmo não devolve o subconjunto de valor total máximo, apenas o valor máximo.
- É fácil recuperar o subconjunto a partir da tabela z preenchida.

Mochila - Recuperação da Solução

MochilaSolucao(z, n, W)

▷ **Entrada:** Tabela z preenchida, capacidade W da mochila e número de itens n.
▷ **Saída:** O vetor x que indica os itens colocados na mochila.

para $i := 1$ **até** n **faça** $x[i] := 0$
MochilaSolucaoAux(x, z, n, W)
devolva (x)

MochilaSolucaoAux(x, z, k, d)

se $k \neq 0$ **então**
  se $z[k, d] = z[k-1, d]$ **então**
    $x[k] := 0$; *MochilaSolucaoAux*$(x, z, k-1, d)$
  senão
    $x[k] := 1$; *MochilaSolucaoAux*$(x, z, k-1, d-w_k)$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

x[1] = x[4] = 1 , x[2] = x[3] = 0

Mochila - Complexidade

- O algoritmo de recuperação da solução tem complexidade $O(n)$.
- Portanto, a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo de programação dinâmica para o problema da mochila é $O(nW)$.
- É possível economizar memória, registrando duas linhas: a que está sendo preenchida e a anterior. Mas isso inviabiliza a recuperação da solução.

Definição: Subcadeia

Dada uma cadeia $S = a_1 \ldots a_n$, dizemos que $S' = b_1 \ldots b_p$ é uma *subcadeia* de S se existem p índices $i(j)$ satisfazendo:

(a) $i(j) \in \{1, \ldots, n\}$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$;

(b) $i(j) < i(j+1)$ para todo $j \in \{1, \ldots, p-1\}$;

(c) $b_j = a_{i(j)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.

- **Exemplo:** $S = ABCDEFG$ e $S' = ADFG$.

Problema da Subcadeia Comum Máxima

Dadas duas cadeias de caracteres X e Y de um alfabeto Σ, determinar a maior subcadeia comum de X e Y

Subcadeia comum máxima (cont.)

- É um problema de otimização. Será que tem subestrutura ótima?
- **Notação:** Seja S uma cadeia de tamanho n. Para todo $i = 1, \ldots, n$, o prefixo de tamanho i de S será denotado por S_i.
- **Exemplo:** Para $S = ABCDEFG$, $S_2 = AB$ e $S_4 = ABCD$.
- **Definição:** $c[i, j]$ é o tamanho da subcadeia comum máxima dos prefixos X_i e Y_j. Logo, se $|X| = m$ e $|Y| = n$, $c[m, n]$ é o valor ótimo.

Subcadeia comum máxima (cont.)

- **Teorema (subestrutura ótima):** Seja $Z = z_1 \ldots z_k$ a subcadeia comum máxima de $X = x_1 \ldots x_m$ e $Y = y_1 \ldots y_n$, denotado por $Z = \texttt{SCM}(X, Y)$.
  1. Se $x_m = y_n$ então $z_k = x_m = y_n$ e $Z_{k-1} = \texttt{SCM}(X_{m-1}, Y_{n-1})$.
  2. Se $x_m \neq y_n$ então $z_k \neq x_m$ implica que $Z = \texttt{SCM}(X_{m-1}, Y)$.
  3. Se $x_m \neq y_n$ então $z_k \neq y_n$ implica que $Z = \texttt{SCM}(X, Y_{n-1})$.

- **Fórmula de Recorrência:**

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max\{c[i-1, j], c[i, j-1]\} & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Subcadeia comum máxima (cont.)

SCM(X, m, Y, n, c, b)

para $i = 0$ **até** m **faça** $c[i, 0] := 0$
para $j = 1$ **até** n **faça** $c[0, j] := 0$
para $i = 1$ **até** m **faça**
    para $j = 1$ **até** n **faça**
        se $x_i = y_j$ **então**
            $c[i, j] := c[i-1, j-1] + 1$; $b[i, j] :=$ "$\nwarrow$"
        senão
            se $c[i, j-1] > c[i-1, j]$ **então**
                $c[i, j] := c[i, j-1]$; $b[i, j] :=$ "$\leftarrow$"
            senão
                $c[i, j] := c[i-1, j]$; $b[i, j] :=$ "$\uparrow$";
devolva ($c[m, n], b$).

- **Exemplo:** $X = abcb$ e $Y = bdcab$, $m = 4$ e $n = 5$.

X	Y		b	d	c	a	b
		0	1	2	3	4	5
	0	0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	1	1	1	1	2
c	3	0	1	1	2	2	2
b	4	0	1	1	2	2	3

X	Y		b	d	c	a	b
		0	1	2	3	4	5
	0						
a	1		↑	↑	↑	↖	←
b	2		↖	←	←	↑	↖
c	3		↑	↑	↖	←	↑
b	4		↖	↑	↑	↑	↖

Subcadeia comum máxima - Complexidade

- Claramente, a complexidade do algoritmo é $O(mn)$.
- O algoritmo não encontra a subcadeia comum de tamanho máximo, apenas seu tamanho.
- Com a tabela b preenchida, é fácil encontrar a subcadeia comum máxima.

Subcadeia comum máxima (cont.)

- Para recuperar a solução, basta chamar $Recupera\_MSC(b, X, m, n)$.

Recupera_SCM(b, X, i, j)

1. **se** $i = 0$ e $j = 0$ **então devolva**
2. **se** $b[i, j] =$ "$\nwarrow$" **então**
3. $\quad Recupera\_MSC(b, X, i-1, j-1)$; **imprima** x_i
4. **senão**
5. $\quad$ **se** $b[i, j] =$ "$\uparrow$" **então**
6. $\quad\quad Recupera\_MSC(b, X, i-1, j)$
7. $\quad$ **senão**
8. $\quad\quad Recupera\_MSC(b, X, i, j-1)$

Subcadeia comum máxima - Complexidade

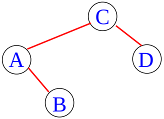
- A determinação da subcadeia comum máxima é feita em tempo $O(m+n)$ no pior caso.
- Portanto, a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo de programação dinâmica para o problema da subcadeia comum máxima é $O(mn)$.
- Note que a tabela b é dispensável, podemos economizar memória recuperando a solução a partir da tabela c. Ainda assim, o gasto de memória seria $O(mn)$.
- Caso não haja interesse em determinar a subcadeia comum máxima, mas apenas seu tamanho, é possível reduzir o gasto de memória para $O(\min\{n, m\})$: basta registrar apenas a linha da tabela sendo preenchida e a anterior.

Problema da Árvore de Busca Ótima

Problema ÁRVORE DE BUSCA: Dados elementos $(e_1 < e_2 < \ldots < e_n)$, onde cada item e_i é consultado $f(e_i)$ vezes, construir uma árvore de busca binária, tal que o total de nós consultados é mínimo.

Aplicações: Construção de dicionários estáticos, processadores de texto, verificadores de ortografia.

Exemplo: Considere quatro chaves: $A \leq B \leq C \leq D$ e freqüências $f(A) = 45$, $f(B) = 25$, $f(C) = 18$ e $f(D) = 12$.

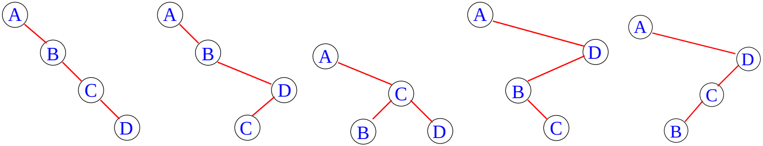


90+75+18+24=207

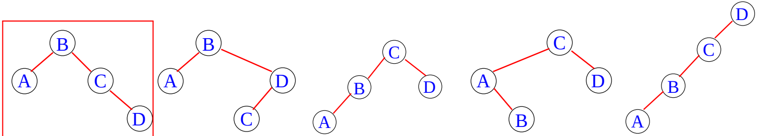
Total de nós acessados nesta árvore = 207

Podemos construir todas as árvores de busca e escolher a melhor ?

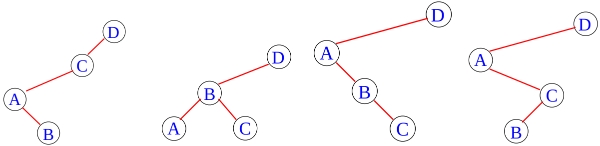
Não! Número de árvores de busca pode ser muito grande!!



45+50+54+48=197 45+50+72+36=203 45+75+36+36=192 45+75+72+24=216 45+100+54+24=223



90+25+36+36=187 90+25+54+24=193 135+50+18+24=227 90+75+18+24=207 180+75+36+12=303



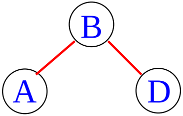
135+100+36+12=283 135+50+54+12=251 90+75+72+12=249 90+100+54+12=256

Exercício: Calcule o número de árvores distintas com n nós.

Propriedades da árvore de busca ótima

Definicao Se T é uma árvore binária de busca e v é um vértice, denotamos por $T(v)$ a subárvore enraizada em v contendo todos os vértices abaixo de v.

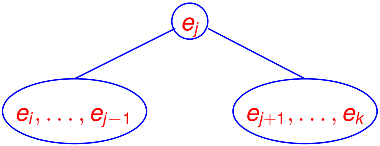
No exemplo anterior temos $A \leq B \leq C \leq D$.
Pergunta: Em uma árvore de busca T, podemos ter $T(B)$ nesta forma ?



Não: Pois C deveria estar em $T(B)$.
Conclusão: Se T é uma árvore de busca, e v é um vértice de T, então $T(v)$ contém apenas elementos consecutivos.

Seja T uma árvore de busca, e_j um vértice de T e $T(e_j) = \{e_i, \ldots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \ldots, e_k\}$. Então

- no ramo esquerdo devem haver os elementos $e_i, \ldots, e_{j-1}$.
- no ramo direito devem haver os elementos $e_{j+1}, \ldots, e_k$.
- Sub-árvores de $\{e_i, \ldots, e_{j-1}\}$ e $\{e_{j+1}, \ldots, e_k\}$ devem ser ótimas.



- Freqüência de acessos à raiz em uma árvore de busca é a soma das freqüências dos elementos na árvore
- Qualquer elemento de $\{e_i, \ldots, e_k\}$ é candidato a ser raiz

Definição recursiva da solução ótima

Idéia: Gerar árvores de busca a partir de árvores de busca de tamanhos menores

Estratégia: Bottom-Up

Seja
$A(e_i, \ldots, e_k)$:=número de nós acessados em árvore ótima contendo $\{e_i, \ldots, e_k\}$.

Então

- $A(\emptyset) = 0$
- $A(e_i, \ldots, e_k) =$
$$\min_{i \leq j \leq k} \left\{ A(e_i, \ldots, e_{j-1}) + A(e_{j+1}, \ldots, e_k) + \sum_{t=i}^{k} f(e_t) \right\}$$

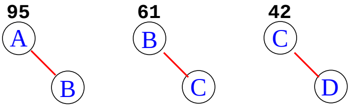
Item \ Tam.Seq.	0	1	...	t	...	n
e_1	0	$f(e_1)$	...		...	$M(1,n)$
e_2	0	$f(e_2)$	...		...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...		...	
e_i	0	$f(e_i)$	...	$M(i,t) := A(e_i,\ldots,e_k)$	...	
$\vdots$	0	$\vdots$	...		...	
$(k{=}i{+}t{-}1)$ e_k	0	$f(e_k)$	...			
$\vdots$	0	$\vdots$	...		...	
e_n	0	$f(e_n)$	...		...	

$A(\emptyset) = 0$
$A(e_i) = f(e_i)$
$A(e_i,\ldots,e_k) =$

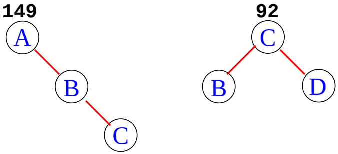
$$\min_{i \leq j \leq k} \left\{ A(e_i,\ldots,e_{j-1}) + A(e_{j+1},\ldots,e_k) + \sum_{t=i}^{k} f(e_t) \right\}$$

Árvores ótimas de tamanho 1

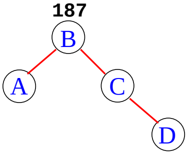
Árvores ótimas de tamanho 2



Árvores ótimas de tamanho 3



Árvores ótimas de tamanho 4



ALGORITMO ÁRVORE-BUSCA$(e_1, \ldots, e_n, f)$

para $i \leftarrow 0$ até $n+1$ faça $M(i,0) \leftarrow 0$
para $t \leftarrow 1$ até n faça
    para $i \leftarrow 1$ até $n-t+1$ faça
        $S \leftarrow f(e_i) + f(e_{i+1}) + \cdots + f(e_{i+t-1})$
        $M(i,t) \leftarrow \min\limits_{0 \leq t' \leq t-1} \left\{ M(i,t') + M(i+t'+1, t-t'-1) + S \right\}$

Solução em: $A(1, n)$

Teorema

O algoritmo ÁRVORE-BUSCA *encontra o valor da árvore de busca ótima em tempo* $O(n^3)$.

Exercícios:

- O algoritmo apresentado para resolver o problema da árvore ótima apenas apresenta o valor esperado de consultas de nós para todos os itens. Faça uma implementação do algoritmo de maneira que ele apresente a árvore de busca ótima.