NP Completude

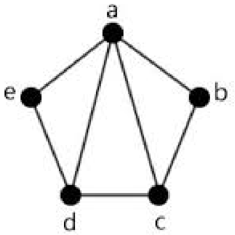
Prof. Fábio Dias

18 de fevereiro de 2025

Sumário

Problema da Clique Máxima

1. Seja um grafo não direcionado $G = (V, E)$.
2. Uma clique em G é um subconjunto dos vértices, no qual cada par está ligado por uma aresta.
3. O tamanho de uma clique é o número de vértices.
4. O problema do clique é o problema de otimização de encontrar um clique de tamanho máximo em um grafo.
5. Problema de Decisão: CLIQUE $= \{<G, k> : G$ é um grafo com um clique de tamanho $k\}$



G

Problema da Clique Máxima

Theorem

CLIQUE é NP-Completo.

1. Primeiro devemos mostrar que $CLIQUE \in NP$;
2. Dado um certificado de solução, um conjunto de vértices $C \subseteq V$, podemos em tempo polinomial verificar se $\forall u, w \in C$, aresta $(u, w) \in E$, usando uma matriz de adjacência. Como $|C| \leq k$, o tempo computacional será de $O(k^2)$.
3. O próximo passo é escolher um problema NP-Completo e fazer a redução polinomial ao problema da CLIQUE.
4. Logo, mostramos que o problema de clique máxima é NP-Difícil.

Problema da Clique Máxima

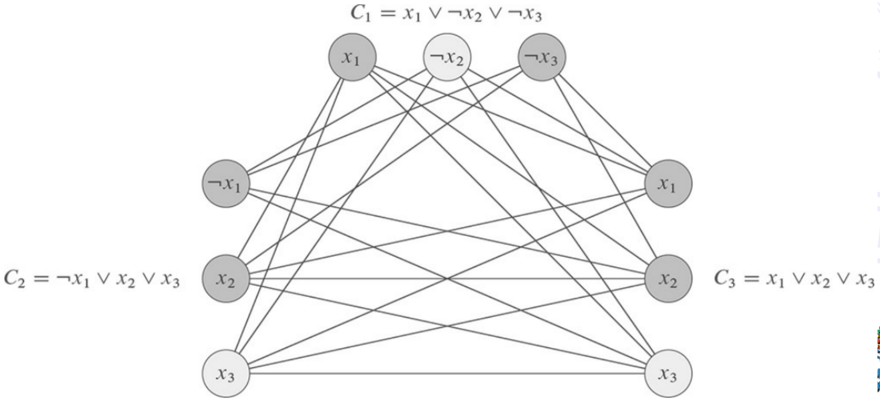
Theorem

CLIQUE é NP-Completo.

1. Iremos usar o problema da 3-CNF-SAT: Seja $f = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$ uma fórmula booleana em 3-CNF com k cláusulas. Para $r = 1, 2, ..., k$, cada cláusula $C_r = x_{r,1} \wedge x_{r,2} \wedge x_{r,3}$ tem exatamente três literais distintos. O distinto aqui pode ser a negação.
2. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.
3. 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.

3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE

1. Para cada cláusula $C_r = x_{r,1} \vee x_{r,2} \vee x_{r,3}$ iremos criar três vértices em G representando os três literais da clausula.
2. As arestas serão criadas seguindo a regra: Se os dois vértices representam literais em clausulas distintas e uma não é a negação da outra;
3. $f = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

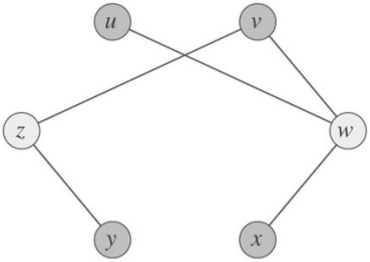


3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE

1. Devemos mostrar que essa redução, ou seja, a resposta SIM para 3-CNF-SAT SSE uma resposta SIM para CLIQUE;
2. Suponha f tenha uma atribuição de valores que satisfaz; Cada clausula possui um literal que valor 1, que corresponde a um vértices em G; Ao escolhermos esses k literais (vértices) teremos uma clique de tamanho k em G;
3. Suponha que G tenha uma clique C de tamanho k; Nenhuma aresta em G liga vértices na mesma clausula e, portanto, C contém exatamente um vértice por clausula; Podemos atribuir 1 a cada vértice (literal) em C, sem receio de atribuir 1 a um literal e a seu complemento. Cada cláusula é satisfeita, e portanto f é satisfeita.

Problema da Cobertura de Vértice

1. Seja um grafo não direcionado $G = (V, E)$. Uma cobertura de vértices em G é um subconjunto $C \subseteq V$ dos vértices, tal que, para toda aresta $(u.v) \in E$, $u \in C$ ou $v \in C$, ou ambos; Ou seja, a cobertura cobre todas as arestas do grafo.
2. O tamanho da cobertura é o número de vértices.
3. O problema da cobertura é o problema de otimização que deseja encontrar a cobertura de tamanho mínimo em um grafo.
4. Problema de Decisão: VERTEX-COVER $= \{<G, k> :$ grafo G tem uma cobertura de vértices de tamanho $k\}$



Problema da Cobertura de Vértice

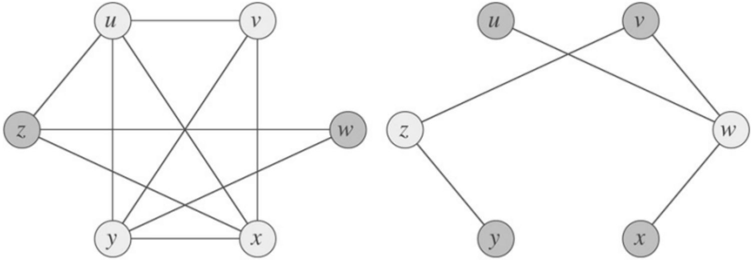
Theorem

VERTEX-COVER é NP-Completo.

1. Primeiro devemos mostrar que $VERTEX - COVER \in NP$;
2. Dado um certificado de solução, um conjunto de vértices $C \subseteq V$, podemos em tempo polinomial verificar se $\forall(u, w) \in E$, se $u \in C$, ou $w \in C$, ou ambos, usando uma matriz de adjacência. Como $|C| = k$, o tempo computacional será de $O(|E|k)$.
3. O próximo passo é escolher um problema NP-Completo e fazer a redução polinomial ao problema da VERTEX-COVER.
4. Logo, mostramos que o problema da cobertura é NP-Difícil.
5. CLIQUE $\leq_p$ VERTEX-COVER.

CLIQUE $\leq_p$ VERTEX-COVER

1. Complemento de um Grafo: Complemento de um grafo não dirigido $G = (V, E)$ é um outro grafo $G' = (V, E')$, com $E' = \{(u, v) : (u, v) \notin E\}$, ou seja, contendo os mesmo vértices e as arestas que não estão em G.



CLIQUE $\leq_p$ VERTEX-COVER

1. A redução basicamente é calcular o grafo complemento de $<G, k>$, entrada do problema da CLIQUE; A saída será o grafo $<G', |V| - k>$ do problema da cobertura de vértices;
2. O grafo G tem um clique de tamanho k SSE o grafo G' tem uma cobertura de vértices de tamanho $|V| - k$;
3. Suponha que G tenha um clique C com $|C| = k$. Vamos mostrar que $V - C$ é uma cobertura de vértices em G';
4. Seja (u, v) qualquer aresta em E'. Então $(u, v) \notin E$, o que implica que pelo menos um dos vértices não pertence a C. Logo, pelo menos um estará contido em $V - C$, o que garante que a aresta (u, v) é coberta por $V - C$;
5. Consequentemente, $V - C$ é uma cobertura de vértice de G' de tamanho $|V - C|$.

CLIQUE $\leq_p$ VERTEX-COVER

1. Suponha que G' tenha uma cobertura de vértice $C' \in V$, onde $|C'| = |V| - k$;
2. Então, para todo $u \notin C'$ e $v \notin C'$, logo, $(u, v) \notin E'$, caso contrário, C' não seria uma cobertura;
3. Como $(u, v) \notin E'$, então $(u, v) \in E$. Portanto, $\forall u, v \in V - C'$, temos que existe a aresta $(u, v) \in E$;
4. Logo $V - C'$ é uma clique de tamanho k em G.

Perguntas?!