Notação Assintótica

Projeto e Análise de Algoritmo — QXD0041

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Fabio Dias
fabiodias@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2023

Crescimento assintótico de funções

Notação Assintótica

- Embora, às vezes, seja possível determinar o tempo aproximadamente exato de execução de um algoritmo, como fizemos até agora, o que ganhamos em precisão em geral não vale o esforço do cálculo.

Seja um vetor v de tamanho n.

```
int soma_maluca(int *v, int n){
  int soma = 0;
  for (int i = 0; i < n - 1; i++)
    for (int j = i + 1; j < n; j++)
      soma += (v[i] + v[j]);
  return soma;
}
```

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Embora, às vezes, seja possível determinar o tempo aproximadamente exato de execução de um algoritmo, como fizemos até agora, o que ganhamos em precisão em geral não vale o esforço do cálculo.
- Aqui, consideramos que cada linha de execução tem um tempo constante de execução.
- Mesmo que considerarmos a quantidade de operações básicas realizadas, teríamos uma função de mesmo tipo, diferenciando apenas as contantes multiplicativas e os termos de ordem mais baixas.
- Para entradas suficientemente grandes, as constantes multiplicativas e os termos de ordem mais baixa de um tempo de execução exato são dominados pelos efeitos do próprio tamanho da entrada.

Notação Assintótica

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20
3	9 (30%)	18 (58%)	31

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20
3	9 (30%)	18 (58%)	31
10	100 (61%)	60 (36%)	164

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20
3	9 (30%)	18 (58%)	31
10	100 (61%)	60 (36%)	164
100	10000 (95%)	600 (5%)	10604

Notação Assintótica

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20
3	9 (30%)	18 (58%)	31
10	100 (61%)	60 (36%)	164
100	10000 (95%)	600 (5%)	10604
1000	1000000 (99,4%)	6000 (0,6%)	1006004

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20
3	9 (30%)	18 (58%)	31
10	100 (61%)	60 (36%)	164
100	10000 (95%)	600 (5%)	10604
1000	1000000 (99,4%)	6000 (0,6%)	1006004
10000	100000000 (99,94%)	60000 (0,06%)	100060004

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja $T(n) = n^2 + 6n + 4$ a complexidade de um algoritmo.
- Qual dos três fatores dessa função mais contribui para o seu aumento??

n	n^2	$6n$	$n^2 + 6n + 4$
1	1 (9%)	6 (54%)	11
2	4 (20%)	12 (60%)	20
3	9 (30%)	18 (58%)	31
10	100 (61%)	60 (36%)	164
100	10000 (95%)	600 (5%)	10604
1000	1000000 (99,4%)	6000 (0,6%)	1006004
10000	100000000 (99,94%)	60000 (0,06%)	100060004
100000	10000000000 (99,994%)	600000 (0,006%)	10000600004

Notação Assintótica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Denomina-se notação assintótica a forma matemática de representação simplificada de uma função $T(n)$ levando em conta as componentes de T que crescem mais rapidamente quando o valor de n *tende ao infinito*.

- Veremos a seguinte notação assintótica:
  - Notação O
  - Notação Ω (Ômega)
  - Notação Θ (Teta)

Notação O

Notação Assintótica — Notação O

Dadas funções $f(n)$ e $g(n)$, dizemos que a função $g(n)$ **domina assintoticamente** a função $f(n)$ se:

- existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

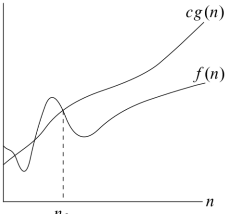
Notação Assintótica — Notação O

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Dadas funções $f(n)$ e $g(n)$, dizemos que a função $g(n)$ **domina assintoticamente** a função $f(n)$ se:

- existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



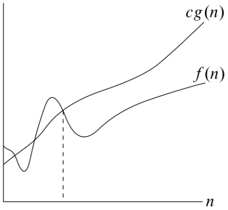
$f(n) = O(g(n))$

Notação Assintótica — Notação O

Dadas funções $f(n)$ e $g(n)$, dizemos que a função $g(n)$ **domina assintoticamente** a função $f(n)$ se:

- existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



$f(n) = O(g(n))$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.
Escrevemos $f(n) = O(g(n))$ quando $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4, \forall n \geq 0$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4, \forall n \geq 0$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4n^2, \forall n \geq 1$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4, \forall n \geq 0$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4n^2, \forall n \geq 1$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq 11n^2, \forall n \geq 1$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4, \forall n \geq 0.$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4n^2, \forall n \geq 1.$
- $n^2 + 6n + 4 \leq 11n^2, \forall n \geq 1.$
- Logo, $c = 11$ e $n_0 = 1$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4, \forall n \geq 0$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4n^2, \forall n \geq 1$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq 11n^2, \forall n \geq 1$.
- Logo, $c = 11$ e $n_0 = 1$

Estamos interessados nos limites assintoticamente justos.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Neste exemplo, uma forma simples de fazer:

- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4, \forall n \geq 0$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4 \leq n^2 + 6n^2 + 4n^2, \forall n \geq 1$.
- $n^2 + 6n + 4 \leq 11n^2, \forall n \geq 1$.
- Logo, $c = 11$ e $n_0 = 1$

Estamos interessados nos limites assintoticamente justos.
Limites assintoticamente justos é utilizado em caso como: $2n = O(n^2)$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} \leq c, \forall n \geq n_0$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} \leq c, \forall n \geq n_0$
- Se escolhermos $n_0 = 1$, teremos $c = 11$, o caso anterior.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} \leq c, \forall n \geq n_0$
- Se escolhermos $n_0 = 1$, teremos $c = 11$, o caso anterior.
- Definirmos o valor de n_0 e depois o valor de c. Um influência o outro.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} \leq c, \forall n \geq n_0$
- Se escolhermos $n_0 = 1$, teremos $c = 11$, o caso anterior.
- Definirmos o valor de n_0 e depois o valor de c. Um influência o outro.
- Seja $n_0 = 10$, logo $1 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} = 1,64$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = O(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $n^2 + 6n + 4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} \leq c, \forall n \geq n_0$
- Se escolhermos $n_0 = 1$, teremos $c = 11$, o caso anterior.
- Definirmos o valor de n_0 e depois o valor de c. Um influência o outro.
- Seja $n_0 = 10$, logo $1 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} = 1,64$
- Logo, $c = 1,64$ e $n_0 = 10$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2$ $(\div n^2)$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2$ $(\div n^2)$
- $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2 \ (\div n^2)$
- $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c$
- Logo, $c = \frac{1}{2}$ e $n_0 = 6$

Notação Ω

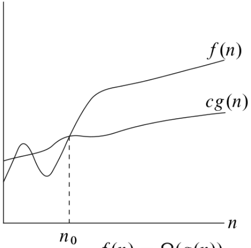
Notação Assintótica – Notação Ω

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dada uma função $f(n)$, dizemos $f(n) = \Omega(g(n))$ se

- existem constantes positivas c e n_0, tais que:

$$0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



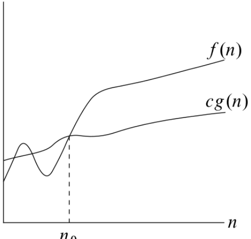
$f(n) = \Omega(g(n))$

Notação Assintótica – Notação Ω

Dada uma função $f(n)$, dizemos $f(n) = \Omega(g(n))$ se

- existem constantes positivas c e n_0, tais que:

$$0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



$f(n) = \Omega(g(n))$

$f(n) = \Omega(g(n))$ se, para todo n suficientemente grande, $f(n)$ é maior ou igual a um múltiplo de $g(n)$
Dizemos que $f(n)$ cresce no minimo tão rápido quanto $g(n)$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0$
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0$
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0$
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0$
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $c \leq 1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2}, \forall n \geq n_0$

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0$
- Primeiramente, claramente $0 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq 0$
- $cn^2 \leq n^2 + 6n + 4, \forall n \geq n_0 (\div n^2)$
- $c \leq 1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2}, \forall n \geq n_0$
- Logo, $c = 1$ e $n_0 = 1$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$
- $cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \ (\div n^2)$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$
- $cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \; (\div n^2)$
- $c \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Precisamos encontrar constantes c e n_0, tal que $0 \leq cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n, \forall n \geq n_0$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq 0 \implies n^2 - 6n \geq 0 \implies n \geq 6$
- $cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n$ $(\div n^2)$
- $c \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$
- Logo, $c = 0,2$ e $n_0 = 10$

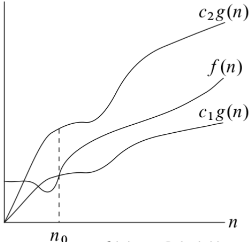
Notação Θ

Notação Assintótica – Notação Θ

Dada uma função $f(n)$, dizemos que $f(n) = \Theta(g(n))$ se

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que:

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



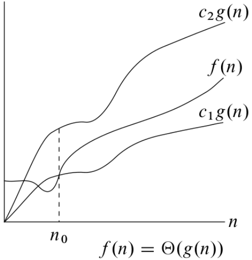
$f(n) = \Theta(g(n))$

Notação Assintótica – Notação Θ

Dada uma função $f(n)$, dizemos que $f(n) = \Theta(g(n))$ se

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que:

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.

Exemplo: $n^2 + 6n + 4 = \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = n^2 + 6n + 4$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1,7 \quad \text{e} \quad n_0 = 10.$$
- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que
$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = 0.2, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 10.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Propriedades das classes

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico
  - $\lg$ indica $\log_2$
  - quando n dobra, o tempo aumenta em uma constante
  - Ex: Busca binária
  - Outros exemplos durante o curso

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

Nomenclatura e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

- $O(n^3)$: cúbico
  - quando n dobra, o tempo octuplica
  - Ex: multiplicação de matrizes $n \times n$

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.

- $f(n) = O(n!)$: complexidade exponencial
  - Pior que $O(c^n)$
  - Não são úteis do pronto de vista prático.
  - Quando n é 20, $O(n!)$ é maior que 2 quintilhões.

Comparação de funções de complexidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Ordem	Nome
c	Constante
log n	Logarítmica Independente da base: $\log_2{}^n$ cresce tão rápido quanto $\log_{10}{}^n$
n	Linear
n log n	Linear – Logarítmica
n^2	Quadrática
n^k	**Polinomial**
2^n	Exponencial
n!	Fatorial Fatorial domina exponencial: $n!$ domina 3^n

Comparação de funções de complexidade

Tamanho	Função de custo					
n	$\lg_2 n$	n	$n \lg_2 n$	n^2	n^3	2^n
10	3	10	30	100	1000	1000
100	6	100	664	10^4	10^6	10^{30}
1000	9	1000	9965	10^6	10^9	10^{300}
10^4	13	10^4	10^5	10^8	10^{12}	10^{3000}
10^5	16	10^5	10^6	10^{10}	10^{15}	10^{30000}
10^6	19	10^6	10^7	10^{12}	10^{18}	10^{300000}

1 semana $\approx 1,21 \cdot 10^6$ segundos
1 ano $\approx 3 \cdot 10^7$ segundos
1 século $\approx 3 \cdot 10^9$ segundos
1 milênio $\approx 3 \cdot 10^{10}$ segundos

Comparação de funções de complexidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Quando comparamos algoritmos, em geral, consideramos um algoritmo mais eficiente que outro se o tempo de execução do seu pior caso apresenta uma ordem de crescimento mais baixa.
- Convencionou-se que um algoritmo é eficiente quando seu tempo de execução é limitado por um polinômio, ou seja, pertence a $O(n^k)$ para algum $k > 0$.

Conclusão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A análise de algoritmos é útil para definir o algoritmo mais eficiente em determinados problemas.
- O objetivo final não é apenas fazer códigos que funcionem, mas que sejam também eficientes.

> "Um bom algoritmo, mesmo rodando em uma máquina lenta, sempre acaba derrotando (para instâncias grandes do problema) um algoritmo pior rodando em uma máquina rápida. Sempre."
>
> — S. S. Skiena, The Algorithm Design Manual