



Análisis numérico de patrones de cambio de temperatura global y modelos de dinámica poblacional

Tobio Santiago¹, Wasinger Pablo²

Departamento de Ingeniería, Universidad de San Andrés, Victoria, Buenos Aires, Argentina.

E-mails: ¹stobio@udesa.edu.ar, ²pwasinger@udesa.edu.ar

Abstract: Este trabajo presenta un estudio numérico exhaustivo que abarca dos áreas principales: el análisis de patrones de cambio de temperatura global y la modelización de dinámicas poblacionales. En la primera parte, utilizamos métodos de diferenciación numérica para analizar series temporales de temperatura de ciudades alrededor del mundo. Implementamos y comparamos métodos de diferenciación de tres y cinco puntos, y desarrollamos una medida de similaridad que combina correlación, consistencia y patrones estacionales. Este enfoque nos permitió cuantificar similitudes entre patrones de cambio de temperatura en diferentes regiones geográficas y a lo largo del tiempo, independientemente de las temperaturas absolutas. En la segunda parte, nos enfocamos en modelos de dinámica poblacional, específicamente el modelo logístico clásico y su variante con efecto Allee. Utilizamos y comparamos diversos métodos numéricos, incluyendo Euler, Taylor de segundo orden y Runge-Kutta de cuarto orden, para resolver las ecuaciones diferenciales que describen estos modelos. Realizamos un análisis detallado de la estabilidad, convergencia y precisión de estos métodos, así como un estudio de la dinámica poblacional bajo diferentes condiciones iniciales y parámetros. Los resultados del análisis de series temporales revelan patrones interesantes de similaridad y diferencia en los cambios de temperatura entre ciudades y a lo largo de los años. En cuanto a los modelos poblacionales, observamos la superioridad del método de Runge-Kutta de cuarto orden en términos de precisión y estabilidad, y revelamos diferencias significativas en la dinámica poblacional entre el modelo logístico y el modelo con efecto Allee, especialmente para poblaciones pequeñas. El análisis de diagramas de fase proporciona insights valiosos sobre los puntos de equilibrio y la estabilidad de ambos modelos. Este trabajo demuestra la importancia de la elección adecuada de métodos numéricos tanto en el análisis climático como en la modelización de sistemas ecológicos, y subraya las implicaciones del efecto Allee para la conservación de especies en riesgo.

Keywords: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Métodos numéricos, Modelo logístico, Efecto Allee, Dinámica poblacional, Interpolación, Estabilidad numérica, Diagramas de fase

1 Introducción

La modelización matemática de sistemas biológicos y físicos es una herramienta fundamental en la ciencia moderna, permitiendo comprender y predecir el comportamiento de fenómenos complejos. En este trabajo práctico, nos enfocamos en dos aspectos cruciales de la modelización: el análisis de series temporales y el estudio de modelos de dinámica poblacional.

En la primera parte del trabajo, abordamos el desafío de cuantificar la similaridad entre series temporales de temperatura en diferentes regiones del planeta. Este análisis es crucial para comprender patrones climáticos globales y sus variaciones, utilizando métodos numéricos para calcular y comparar tasas de cambio de temperatura.

La segunda parte se centra en los modelos de dinámica poblacional. Estos modelos, representados por ecuaciones diferenciales, son esenciales en ecología y biología para describir cómo cambian las poblaciones de especies a lo largo del tiempo. Nos enfocamos específicamente en dos modelos: el modelo logístico clásico y una variante que incorpora el efecto Allee.

Nuestro objetivo es estudiar la estabilidad y convergencia de diferentes métodos numéricos aplicados a estos modelos, analizando cómo las condiciones iniciales y los parámetros afectan la dinámica poblacional. Utilizaremos métodos como Euler y Runge-Kutta de cuarto orden para resolver numéricamente estas ecuaciones diferenciales, comparando sus resultados y eficacia.

A través de este análisis, buscamos no solo comprender mejor la dinámica de poblaciones bajo diferentes condiciones, sino también evaluar la precisión y aplicabilidad de distintos métodos numéricos en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales. Este trabajo nos permitirá profundizar en la intersección entre la biología teórica y los métodos computacionales, proporcionando insights valiosos sobre la modelización de sistemas ecológicos complejos.

2 Marco Teórico

2.1 Diferenciación numérica

La diferenciación numérica es una técnica utilizada para aproximar la derivada de una función cuando solo se dispone de un conjunto discreto de puntos. En este marco teórico, nos centraremos en dos métodos de diferenciación numérica: el método de tres puntos y el método de cinco puntos.

2.1.1 Método de diferenciación de tres puntos

El método de diferenciación de tres puntos, también conocido como diferencia finita centrada, utiliza los valores de la función en tres puntos consecutivos para aproximar la derivada en el punto central. La fórmula es:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} \quad (1)$$

donde $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$ es el paso entre puntos consecutivos. Este método tiene un error de truncamiento de orden $O(h^2)$, lo que generalmente proporciona una buena aproximación para funciones suaves.

2.1.2 Método de diferenciación de cinco puntos

El método de diferenciación de cinco puntos es una extensión del método de tres puntos que utiliza cinco puntos consecutivos para aproximar la derivada en el punto central. La fórmula general es:

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} \quad (2)$$

donde h es el paso entre puntos consecutivos. Este método tiene un error de truncamiento de orden $O(h^4)$, lo que proporciona una aproximación más precisa que el método de tres puntos, especialmente para funciones con variaciones más complejas. Ambos métodos son ejemplos de diferencias finitas centradas y se derivan de la expansión de Taylor de la función alrededor del punto de interés. La elección entre estos métodos depende del equilibrio deseado entre precisión y costo computacional, así como de la disponibilidad de puntos en los extremos del conjunto de datos.

2.2 Métodos de similaridad

Para comparar las series temporales de tasas de cambio de temperatura, se utilizaron varios métodos de similaridad. Estos métodos se combinaron para obtener una medida de similaridad global entre las series temporales.

2.2.1 Correlación de tasa

La correlación de tasa utiliza el coeficiente de correlación de Pearson para medir la relación lineal entre dos series de tasas de cambio. El coeficiente de correlación de Pearson se define como:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3)$$

donde x_i e y_i son los valores de las dos series, y \bar{x} y \bar{y} son sus respectivas medias.

2.2.2 Consistencia de tasa

La consistencia de tasa mide la frecuencia con la que dos series cambian en la misma dirección, independientemente de la magnitud del cambio. Se calcula como:

$$\text{consistencia} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(\text{sign}(x_i) = \text{sign}(y_i)) \quad (4)$$

donde $\mathbb{1}()$ es la función indicadora y $\text{sign}()$ es la función signo.

2.2.3 Similaridad estacional

La similaridad estacional compara la correlación de las tasas de cambio para cada mes del año entre dos series temporales. Se calcula como:

$$\text{similaridad estacional} = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} r_m \quad (5)$$

donde r_m es el coeficiente de correlación de Pearson para el mes m entre las dos series.

2.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) son ecuaciones que relacionan una función desconocida con sus derivadas. En el contexto de este trabajo, nos centraremos en EDOs de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (6)$$

donde y es una función desconocida de t , y f es una función dada que depende de t y y . El objetivo es encontrar la función $y(t)$ que satisface esta ecuación.

2.4 Problema de Valor Inicial

Un problema de valor inicial (PVI) es una EDO junto con una condición inicial. En general, se expresa como:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad (7)$$

donde α es el valor inicial de y en $t = a$.

2.5 Condición de Lipschitz

Una función $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz sobre la variable y sobre un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

siempre que (t, y_1) y (t, y_2) se encuentren en D y L se denomina constante de Lipschitz para la función f . Bajo la hipótesis de que $f(t, y)$ está definida sobre un conjunto convexo. Entonces si existe una constante $L > 0$ que cumpla con

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)| \leq L \quad (8)$$

Implica que f es Lipschitz sobre D sobre la variable y constante L

2.6 Teorema de Existencia y Unicidad

El teorema de existencia y unicidad es fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para un problema de valor inicial de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (9)$$

El teorema establece que si $f(t, y)$ es continua en un D tal que $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ y satisface la condición de Lipschitz en la variable y , entonces existe una única solución $y(t)$ al problema de valor inicial en algún intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$, donde $h > 0$.

2.7 Puntos de Equilibrio en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), un punto de equilibrio, también conocido como punto fijo o punto estacionario, es un valor para el cual la derivada de la función se hace cero. En otras palabras, para una EDO de la forma:

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \quad (10)$$

Un punto de equilibrio N^* es aquel que satisface:

$$f(N^*) = 0 \quad (11)$$

Los puntos de equilibrio son importantes porque representan estados en los que el sistema no cambia con el tiempo. En el contexto de modelos poblacionales, estos puntos representan tamaños de población que se mantienen constantes.

2.7.1 Clasificación de Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio se pueden clasificar según su estabilidad:

Punto de Equilibrio Estable: Si el sistema, cuando es perturbado ligeramente de este punto, tiende a volver a él. Matemáticamente, esto ocurre cuando:

$$\frac{df}{dN}(N^*) < 0 \quad (12)$$

Punto de Equilibrio Inestable: Si el sistema, cuando es perturbado ligeramente de este punto, tiende a alejarse de él. Matemáticamente, esto ocurre cuando:

$$\frac{df}{dN}(N^*) > 0 \quad (13)$$

Punto de Equilibrio Neutral o Centro: Si el sistema, cuando es perturbado, ni se acerca ni se aleja significativamente del punto.

Matemáticamente, esto ocurre cuando:

$$\frac{df}{dN}(N^*) = 0 \quad (14)$$

En este caso, se requiere un análisis adicional para determinar el comportamiento del sistema cerca de este punto.

2.8 Diagramas de Fase

Un diagrama de fase es una representación gráfica del comportamiento de un sistema dinámico en el espacio de fases. Para ecuaciones diferenciales de primer orden, como las que estudiamos en este trabajo, el diagrama de fase muestra la tasa de cambio de la variable dependiente ($\frac{dN}{dt}$) en función de su valor actual (N). Los elementos clave de un diagrama de fase incluyen:

- **Puntos de equilibrio:** Donde $\frac{dN}{dt} = 0$, representando estados estacionarios del sistema.
- **Dirección del flujo:** Indica cómo cambia la variable con el tiempo.
- **Estabilidad:** La pendiente de la curva en los puntos de equilibrio indica su estabilidad.

Los diagramas de fase son herramientas valiosas para analizar el comportamiento cualitativo de sistemas dinámicos sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales.

2.9 Métodos Numéricos para Resolver Ecuaciones Diferenciales

La mayoría de las EDOs no lineales, como las que se usan en dinámica poblacional, no tienen soluciones analíticas cerradas. Por lo tanto, se utilizan métodos numéricos para aproximar sus soluciones.

2.9.1 Método de Euler

El método de Euler es uno de los métodos numéricos más simples para resolver EDOs. Se basa en la aproximación lineal de la solución en cada paso. Para un PVI de la forma (2), el método de Euler se define como:

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (15)$$

donde $h = (b - a)/N$ es el tamaño del paso y $t_i = a + ih$.

2.9.2 Error en el Método de Euler

El error en el método de Euler se puede analizar de dos formas:

1. Error de truncamiento local: Es el error introducido en un solo paso del método. Para el método de Euler, este error es de orden $O(h^2)$.

2. Error global: Es el error acumulado después de todos los pasos. Para el método de Euler, este error es de orden $O(h)$.

El error de truncamiento local se puede expresar como:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) \quad (16)$$

donde y_i es el valor exacto de la solución en t_i .

2.9.3 Cota Teórica del Error Global para el Método de Euler

Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones de continuidad y la condición de Lipschitz para $f(t, y)$, el error global del método de Euler está acotado por:

$$|y(t_n) - w_n| \leq \frac{hM}{2L}(e^{L(t_n-a)} - 1) \quad (17)$$

donde M es una cota superior para $|y''(t)|$ en el intervalo $[a, b]$, L es la constante de Lipschitz de f , y h es el tamaño del paso. Esta cota confirma que el error global del método de Euler es de orden $O(h)$.

2.9.4 Método de Taylor de Orden 2

El método de Taylor de orden 2 es una extensión del método de Euler que incluye el término de segundo orden en la expansión de Taylor. Para un PVI de la forma (2), el método de Taylor de orden 2 se define como:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, w_i) f(t_i, w_i) \quad (18)$$

Este método tiene un error de truncamiento local de orden $O(h^3)$ y un error global de orden $O(h^2)$, lo que lo hace más preciso que el método de Euler estándar.

2.9.5 Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)

El método RK4 es más preciso que el método de Euler. Utiliza un promedio ponderado de cuatro evaluaciones de la pendiente:

$$k_1 = hf(t_n, \omega_n) \quad (19)$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, \omega_n + \frac{k_1}{2}) \quad (20)$$

$$k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, \omega_n + \frac{k_2}{2}) \quad (21)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, \omega_n + k_3) \quad (22)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (23)$$

Donde ω_n es la aproximación numérica de $y(t_n)$, y $y(t_n)$ es el valor real de la solución en t_n .

2.10 Convergencia y Estabilidad

Un método numérico se dice convergente si la solución numérica se aproxima a la solución exacta cuando el tamaño del paso tiende a cero. La estabilidad, por otro lado, se refiere a cómo los errores en la solución numérica se propagan a medida que avanza el cálculo.

3 Desarrollo Experimental

3.1 Cálculo de similaridad de series temporales

El objetivo de este experimento se centró en el análisis de patrones de cambio de temperatura global, utilizando datos diarios de temperatura de ciudades importantes alrededor del mundo. Estos datos, obtenidos del conjunto "Daily Temperature of Major Cities" de Kaggle [?], incluyen información sobre la región, país, ciudad, fecha y temperatura promedio diaria para un período de varios años. El objetivo principal fue desarrollar una metodología que permitiera comparar patrones de cambio de temperatura entre diferentes regiones geográficas y períodos de tiempo, independientemente de las diferencias en los valores absolutos de temperatura.

3.1.1 Procesamiento de datos

El procesamiento de datos incluyó la lectura y estructuración de la información, el manejo de valores faltantes y la clasificación de las ciudades por hemisferio. Para abordar el problema de los datos faltantes, empleamos la técnica de interpolación lineal, estimando los

valores de temperatura faltantes basándonos en los valores conocidos más cercanos.

La clasificación de las ciudades por hemisferio se realizó utilizando la información geográfica disponible. En el caso de países que se extienden a ambos hemisferios, se realizó una asignación basada en la ubicación específica de la ciudad o, en casos ambiguos, se consideró la estacionalidad de los datos de temperatura.

Para manejar la gran cantidad de datos disponibles y optimizar nuestro análisis, implementamos un proceso de selección de países. De la totalidad de países en nuestro conjunto de datos, elegimos aleatoriamente una muestra de 30 países para el cálculo de similaridad entre ciudades. Esta selección nos permitió mantener una diversidad geográfica significativa mientras se reducía la complejidad computacional del análisis. Adicionalmente, para el análisis anual detallado de patrones de temperatura, nos enfocamos en un solo país. Esta estrategia de muestreo nos permitió realizar un análisis profundo y manejable, al tiempo que manteníamos una representación global en nuestro estudio.

3.1.2 Cálculo de tasas de cambio

Para calcular las tasas de cambio de temperatura, aplicamos los métodos de diferenciación numérica de tres puntos y cinco puntos, descritos en el marco teórico. Estas técnicas nos permitieron estimar la velocidad de cambio de la temperatura a lo largo del tiempo para cada ciudad, centrándonos en cómo cambia la temperatura en lugar de en los valores absolutos.

3.1.3 Análisis de similaridad

Con las tasas de cambio calculadas, implementamos tres métodos principales de similaridad: la correlación de tasas, la consistencia de tasas y la similaridad estacional. La correlación de tasas mide la relación lineal entre las tasas de cambio de temperatura de dos ciudades. La consistencia de tasas evalúa cuán frecuentemente las temperaturas de dos ciudades cambian en la misma dirección, independientemente de la magnitud del cambio. La similaridad estacional captura patrones que se repiten anualmente.

Para obtener una medida integral de similaridad, combinamos estos tres métodos en una ecuación de similaridad global:

$$S = 0.4 \cdot C + 0.3 \cdot T + 0.3 \cdot E \quad (24)$$

donde S es la similaridad combinada, C es la correlación de tasas general, T es la consistencia de tasas, y E es la similaridad estacional. En esta ecuación, asignamos un peso ligeramente mayor a la correlación general (0.4), mientras que la consistencia y la similaridad estacional tienen pesos iguales (0.3 cada una). Esta ecuación devuelve un valor entre -1 y 1, donde 1 indica una similaridad perfecta, -1 una relación perfectamente inversa, y 0 la ausencia de relación. Valores positivos altos sugieren que las ciudades comparadas tienen patrones de cambio de temperatura similares, mientras que valores negativos indican patrones opuestos.

La inclusión de la consistencia de tasas en nuestro cálculo final nos permite capturar no solo la fuerza de la relación entre las series de tiempo (a través de la correlación), sino también la dirección general de los cambios. Esto proporciona una visión más completa de cómo los patrones de temperatura se asemejan o difieren entre las ciudades analizadas.

Con esta medida de similaridad establecida, procedimos a aplicarla en diversos contextos para obtener una comprensión global de los patrones de cambio de temperatura. Específicamente, realizamos tres tipos principales de análisis:

1. Comparación entre ciudades del mismo hemisferio
2. Comparación entre ciudades de hemisferios diferentes
3. Análisis de patrones anuales para ciudades individuales

Estos análisis nos permitieron explorar cómo los patrones de cambio de temperatura varían geográfica y temporalmente, buscando similitudes y diferencias significativas entre diferentes regiones del mundo.

3.1.4 Comparación de Métodos de Diferenciación Numérica

Para evaluar la sensibilidad de nuestros resultados a la elección del método de diferenciación numérica, realizamos una comparación entre los métodos de tres y cinco puntos. Este análisis se llevó a cabo en varias ciudades seleccionadas aleatoriamente, calculando la tasa de cambio de temperatura a lo largo de los años utilizando ambos métodos. El procedimiento fue el siguiente:

1. Seleccionamos aleatoriamente un conjunto de ciudades de nuestra base de datos.
2. Para cada ciudad, calculamos la tasa de cambio de temperatura utilizando el método de diferenciación de tres puntos.
3. Repetimos el cálculo utilizando el método de diferenciación de cinco puntos.
4. Calculamos la diferencia entre los resultados obtenidos por ambos métodos para cada punto temporal.

Este análisis nos permitió cuantificar las discrepancias entre los dos métodos y evaluar si estas diferencias son significativas para nuestro estudio de patrones de cambio de temperatura.

Los resultados de esta comparación nos proporcionaron información valiosa sobre:

- La magnitud típica de las diferencias entre los métodos de tres y cinco puntos.
- La variabilidad de estas diferencias a lo largo del tiempo y entre diferentes ciudades.
- El impacto potencial de la elección del método en nuestros análisis de similaridad.

Esta comparación nos ayudó a comprender mejor la robustez de nuestro enfoque metodológico y las implicaciones de la elección del método de diferenciación en el análisis de patrones de cambio de temperatura. Los resultados específicos de esta comparación se discutirán en detalle en la sección de discusión.

Estos análisis nos permitieron explorar cómo los patrones de cambio de temperatura varían geográfica y temporalmente, buscando similitudes y diferencias significativas entre diferentes regiones del mundo. Este enfoque es particularmente valioso para identificar patrones globales de cambio climático que podrían no ser evidentes al examinar solo las temperaturas absolutas.

3.2 Modelo Logístico

El modelo logístico es un modelo de crecimiento poblacional que incorpora el concepto de capacidad de carga. La ecuación que lo describe es:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (25)$$

donde:

- $N = N(t)$ es el tamaño de la población en función del tiempo
- r es la tasa de crecimiento intrínseca (hiperparámetro)
- K es la capacidad de carga (hiperparámetro)

La capacidad de carga K representa el máximo tamaño de población que el ambiente puede sostener indefinidamente, dados los recursos disponibles. Cuando N se acerca a K , el crecimiento de la población se desacelera debido a la competencia por recursos limitados.

3.2.1 Verificación de la Condición de Lipschitz

Para el modelo logístico, tenemos la función:

$$f(t, N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (26)$$

Para verificar la condición de Lipschitz, calculamos la derivada parcial respecto a N :

$$\frac{\partial f}{\partial N} = r \left(1 - \frac{2N}{K} \right) \quad (27)$$

Para que f sea Lipschitz, necesitamos encontrar una constante L tal que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right| \leq L \quad (28)$$

para todo N en el intervalo de interés. En el contexto del modelo logístico, es importante considerar el significado biológico de la variable N y el parámetro K :

Biológicamente, esperamos que $N \leq K$ en el largo plazo, ya que poblaciones que exceden la capacidad de carga tienden a decrecer debido a la escasez de recursos. Por lo tanto, al analizar la condición de Lipschitz, es razonable considerar un intervalo $[0, M]$ donde $M \leq K$.

Matemáticamente, introducimos M como un límite superior para N por las siguientes razones:

1. Permite una acotación más precisa de la constante de Lipschitz L .
2. Proporciona flexibilidad para analizar el comportamiento del modelo en diferentes rangos de población.
3. Garantiza que la condición de Lipschitz se cumpla en todo el rango biológicamente relevante.

Analizando la derivada parcial observamos que:

- Cuando $N = 0$, $\frac{\partial f}{\partial N} = r$
- Cuando $N = K/2$, $\frac{\partial f}{\partial N} = 0$
- Cuando $N = K$, $\frac{\partial f}{\partial N} = -r$

Por lo tanto, podemos acotar $\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right|$ en el intervalo $[0, M]$ como sigue:

$$L = \max\{r, r(2M/K - 1)\} \quad (29)$$

Esta elección de L asegura que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right| \leq L \quad \text{para todo } N \in [0, M] \quad (30)$$

Al permitir que $M \leq K$, cubrimos todo el rango biológicamente significativo del modelo, asegurando que la condición de Lipschitz se cumpla para cualquier tamaño de población realista, incluso en casos donde la población pudiera temporalmente exceder la capacidad de carga.

3.2.2 Aplicación del Teorema de Existencia y Unicidad

El teorema de existencia y unicidad establece que si $f(t, N)$ es continua y satisface la condición de Lipschitz en un rectángulo que contiene el punto inicial (t_0, N_0) , entonces existe una única solución al problema de valor inicial en algún intervalo alrededor de t_0 . En nuestro caso:

$f(t, N)$ es continua para todo t y $N \geq 0$. Hemos demostrado que $f(t, N)$ satisface la condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado $[0, M]$ con $M \leq K$.

Por lo tanto, para cualquier condición inicial $N_0 \in [0, K]$, el teorema de existencia y unicidad garantiza que existe una única solución al problema de valor inicial en algún intervalo alrededor de t_0 .

3.2.3 Solución Analítica del Modelo Logístico

Ahora procederemos a resolver la ecuación diferencial paso a paso:

Partimos de la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (31)$$

Separamos variables:

$$\frac{dN}{N(1 - N/K)} = r dt \quad (32)$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{dN}{N(1 - N/K)} = \int r dt \quad (33)$$

Resolvemos la integral del lado izquierdo:

$$\int \frac{dN}{N(1 - N/K)} \quad (34)$$

$$= \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1/K}{1 - N/K} \right) dN = \ln |N| - \ln |K - N| + C_1 \quad (35)$$

El lado derecho se integra a:

$$\int r dt = rt + C_2 \quad (36)$$

Igualamos ambos lados:

$$\ln |N| - \ln |K - N| = rt + C \quad (37)$$

donde $C = C_2 - C_1$

Aplicamos la función exponencial a ambos lados:

$$\frac{N}{K - N} = Ae^{rt} \quad (38)$$

donde $A = e^C$

Resolvemos para N :

$$N = \frac{KAe^{rt}}{1 + Ae^{rt}} \quad (39)$$

Aplicamos la condición inicial $N(0) = N_0$ para determinar A :

$$N_0 = \frac{KA}{1 + A} \Rightarrow A = \frac{N_0}{K - N_0} \quad (40)$$

Sustituimos este valor de A en la solución general para obtener la solución particular:

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \quad (41)$$

Esta es la solución analítica del modelo logístico, donde N_0 es la población inicial.

3.3 Modelo con Efecto Allee

El modelo que incorpora el efecto Allee es una extensión del modelo logístico:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \quad (42)$$

donde A es el umbral de Allee (otro hiperparámetro), por debajo del cual la población tiende a extinguirse. Este modelo captura el fenómeno donde poblaciones muy pequeñas tienen dificultades para crecer o sobrevivir. A diferencia del modelo logístico, el modelo con efecto Allee no tiene una solución analítica cerrada debido a su mayor complejidad matemática. Esta característica hace que el uso de métodos numéricos sea especialmente relevante para estudiar este modelo.

3.3.1 Verificación de la condición de Lipschitz

Calculamos la derivada parcial respecto a N :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial N} &= r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right) + r \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A}\right) \\ &= r \left(\frac{N^2}{AK} - \frac{2N^2}{AK} - \frac{N}{A} + 1 - \frac{2N}{K} + \frac{N^2}{AK} + \frac{N}{A} - \frac{N^2}{AK}\right) \\ &= r \left(1 - \frac{2N}{K} - \frac{N^2}{AK}\right)\end{aligned}\quad (43)$$

Analizamos el comportamiento de esta derivada:

- Cuando $N = 0$, $\frac{\partial f}{\partial N} = r$
- Cuando $N = K$, $\frac{\partial f}{\partial N} = -r \left(1 + \frac{K}{A}\right)$
- Cuando $N = A$, $\frac{\partial f}{\partial N} = r \left(1 - \frac{2A}{K} - \frac{A}{K}\right) = r \left(1 - \frac{3A}{K}\right)$

Para encontrar una constante de Lipschitz L , necesitamos acotar el valor absoluto de esta derivada en el intervalo de interés $[0, M]$, donde $M \leq K$. Observamos que la derivada es una función cuadrática en N , lo que nos permite encontrar su valor máximo en el intervalo. El valor máximo de $|\frac{\partial f}{\partial N}|$ ocurrirá en uno de los extremos del intervalo o en el punto donde su derivada se anula. La derivada de $\frac{\partial f}{\partial N}$ respecto a N es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial N^2} = r \left(-\frac{2}{K} - \frac{2N}{AK}\right) \quad (44)$$

Esta expresión es siempre negativa para $N \geq 0$, lo que significa que $\frac{\partial f}{\partial N}$ es una función decreciente en N . Por lo tanto, el valor máximo de $|\frac{\partial f}{\partial N}|$ ocurrirá en $N = 0$ o $N = M$. Así, podemos establecer L como:

$$L = \max \left(r, \left| r \left(1 - \frac{2M}{K} - \frac{M^2}{AK}\right) \right| \right) \quad (45)$$

Esta elección de L asegura que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right| \leq L \text{ para todo } N \in [0, M] \quad (46)$$

Al igual que en el modelo logístico, esta condición de Lipschitz garantiza la existencia y unicidad de soluciones para el problema de valor inicial en algún intervalo alrededor de t_0 , para cualquier condición inicial $N_0 \in [0, M]$.

3.4 Análisis Analítico de Puntos de Equilibrio

Puntos de equilibrio en el Modelo Logístico:

Los puntos de equilibrio se encuentran cuando $\frac{dN}{dt} = 0$:

$$rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \quad (47)$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos dos puntos de equilibrio:

$$N_1^* = 0 \quad \text{y} \quad N_2^* = K \quad (48)$$

Para determinar la estabilidad, calculamos la derivada respecto a N :

$$\frac{\partial f}{\partial N} = r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) \quad (49)$$

Evaluando esta derivada en los puntos de equilibrio:

En $N_1^* = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{N=0} = r > 0 \quad (50)$$

por lo tanto, es un punto de equilibrio inestable.

En $N_2^* = K$:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{N=K} = -r < 0 \quad (51)$$

por lo tanto, es un punto de equilibrio estable.

Puntos de equilibrio en el Modelo con efecto Allee:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right) \quad (52)$$

Los puntos de equilibrio se encuentran cuando $\frac{dN}{dt} = 0$:

$$rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right) = 0 \quad (53)$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos tres puntos de equilibrio:

$$N_1^* = 0, \quad N_2^* = A, \quad N_3^* = K \quad (54)$$

Para determinar la estabilidad, utilizamos la derivada respecto a N que nos proporcionaste:

$$\frac{\partial f}{\partial N} = r \left(1 - \frac{2N}{K} - \frac{N^2}{AK}\right) \quad (55)$$

Evaluando esta derivada en los puntos de equilibrio:

En $N_1^* = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{N=0} = r > 0 \quad (56)$$

por lo tanto, es un punto de equilibrio inestable.

En $N_2^* = A$:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{N=A} = r \left(1 - \frac{2A}{K} - \frac{A^2}{AK}\right) = r \left(1 - \frac{3A}{K}\right) \quad (57)$$

La estabilidad depende de la relación entre A y K . Si $A < \frac{K}{3}$, este punto es inestable. Si $A > \frac{K}{3}$, es estable.

En $N_3^* = K$:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{N=K} = r \left(1 - \frac{2K}{K} - \frac{K^2}{AK}\right) = r \left(-1 - \frac{K}{A}\right) < 0 \quad (58)$$

por lo tanto, es un punto de equilibrio estable.

3.4.1 Experimentos Numéricos

Dado que hemos verificado que ambos modelos, el logístico y el de efecto Allee, satisfacen la condición de Lipschitz y el teorema de existencia y unicidad, podemos anticipar ciertas características en nuestros experimentos numéricos:

- **Existencia y unicidad de soluciones:** Para cada conjunto de parámetros y condiciones iniciales, esperamos obtener una única solución numérica que aproxime la verdadera solución de la ecuación diferencial.
- **Convergencia:** A medida que reducimos el tamaño de paso h , las soluciones numéricas deberían converger hacia la solución real del problema. En el caso del modelo logístico, podremos verificar esto comparando con la solución analítica.

Para nuestro estudio numérico, consideraremos los siguientes conjuntos de hiperparámetros:

- **Modelo Logístico:**

- Crecimiento Moderado: $r = 0.5$, $K = 100$, $N_0 = 10$
- Crecimiento Rápido: $r = 1.5$, $K = 50$, $N_0 = 5$
- Población Cercana a Capacidad: $r = 0.1$, $K = 200$, $N_0 = 150$

Estos conjuntos nos permitirán estudiar diferentes escenarios de crecimiento poblacional, desde un crecimiento moderado hasta un crecimiento rápido, así como el comportamiento cuando la población inicial está cerca de la capacidad de carga.

• Modelo con Efecto Allee:

- Población Inicial Bajo Umbral: $r = 0.5$, $K = 100$, $A = 20$, $N_0 = 10$
- Población Inicial Sobre Umbral: $r = 0.5$, $K = 100$, $A = 20$, $N_0 = 30$
- Umbral Allee Bajo: $r = 1.5$, $K = 50$, $A = 10$, $N_0 = 5$

Estos conjuntos nos permitirán examinar cómo el efecto Allee influye en la dinámica poblacional, especialmente cuando la población inicial está por debajo o por encima del umbral Allee, y cómo un umbral Allee más bajo afecta el crecimiento de la población.

Para estos conjuntos de hiperparámetros realizaremos los siguientes experimentos:

1. Comparación de métodos numéricos:

En este estudio, aplicaremos los métodos de Euler, Taylor de orden 2 y Runge-Kutta 4 a ambos modelos poblacionales. Nuestro experimento se centrará en comparar la precisión de estos métodos utilizando diferentes tamaños de paso h . Este enfoque nos permitirá evaluar la eficacia de cada método bajo diversas condiciones. Además, para el modelo logístico, tenemos la oportunidad de contrastar los resultados numéricos con la solución analítica conocida, lo que proporcionará una validación adicional de la precisión de nuestros métodos numéricos.

2. Análisis de estabilidad y convergencia:

También estudiaremos como el tamaño de paso h afecta la estabilidad de las soluciones obtenidas. Examinaremos cómo la variación de h influye en la fiabilidad y precisión de los resultados para cada método. Paralelamente, analizaremos la tasa de convergencia de cada método numérico. Este análisis nos permitirá determinar qué métodos convergen más rápidamente a la solución real y bajo qué condiciones, proporcionando insights valiosos sobre la eficiencia computacional de cada enfoque.

3. Estudio del comportamiento poblacional:

También vamos a extendernos al análisis de cómo diferentes conjuntos de parámetros afectan la dinámica poblacional en ambos modelos. Este estudio nos permitirá comprender mejor las condiciones que influyen en el crecimiento o declive de las poblaciones. En particular, para el modelo con efecto Allee, pondremos especial atención en examinar cómo el valor de A (el umbral de Allee) influye en el crecimiento o la extinción de la población. Este análisis será fundamental para entender las implicaciones ecológicas del efecto Allee en la dinámica poblacional.

4. Estudio del comportamiento poblacional y análisis de diagramas de fase:

Extenderemos nuestro análisis para examinar cómo diferentes conjuntos de parámetros afectan la dinámica poblacional en ambos modelos. Este estudio nos permitirá comprender mejor las condiciones que influyen en el crecimiento o declive de las poblaciones. En particular, para el modelo con efecto Allee, pondremos especial atención en examinar cómo el valor de A (el umbral de Allee) influye en el crecimiento o la extinción de la población. Además, construiremos y analizaremos diagramas de fase para ambos modelos. Estos diagramas nos permitirán visualizar la tasa de cambio de la población en función de su tamaño actual, proporcionando una representación gráfica de la dinámica del sistema. A través de estos diagramas, identificaremos

y caracterizaremos los puntos de equilibrio de cada modelo.

5. Análisis de estabilidad de puntos de equilibrio:

Utilizando los diagramas de fase y técnicas analíticas, determinaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio en ambos modelos. Este análisis nos ayudará a comprender el comportamiento a largo plazo del sistema cerca de estos puntos y cómo pequeñas perturbaciones pueden afectar la dinámica poblacional.

6. Análisis de sensibilidad:

Finalmente, llevaremos a cabo un análisis de sensibilidad para evaluar cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales afectan la solución a largo plazo en ambos modelos. Este estudio nos permitirá determinar la robustez de cada modelo frente a perturbaciones iniciales. Este análisis comparativo nos proporcionará información valiosa sobre la estabilidad relativa de ambos modelos y sus implicaciones para la modelización de poblaciones reales.

4 Resultados

En esta sección, presentamos los resultados de nuestros experimentos numéricos para los modelos logístico y de efecto Allee.

4.1 Resultados del cálculo de similaridad de series temporales

4.1.1 Análisis de similaridad entre ciudades del mismo hemisferio

Para el análisis de similaridad entre ciudades del mismo hemisferio, se seleccionaron aleatoriamente varias ciudades. El análisis reveló una similaridad promedio de 0.0364, con una mediana de 0.0045 y una desviación estándar de 0.1568. Estos valores indican una baja similaridad general, pero con una variabilidad considerable.

El par de ciudades más similar se encontró entre Grand Rapids y South Bend, ambas en Estados Unidos, con un índice de similaridad de 0.9219. La Figura 1 muestra las tasas de cambio de temperatura para estas ciudades.

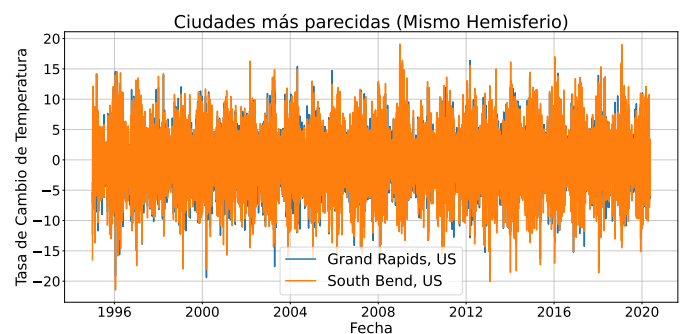


Fig. 1: Tasas de cambio de temperatura para las ciudades más similares del mismo hemisferio: Grand Rapids y South Bend, Estados Unidos

Como se puede observar, las tasas de cambio de temperatura de ambas ciudades siguen patrones muy similares a lo largo del tiempo, con fluctuaciones sincronizadas y magnitudes comparables.

Por otro lado, las ciudades más disímiles dentro del mismo hemisferio fueron Great Falls y Fort Smith, también en Estados Unidos, con un índice de similaridad de -0.2960. La Figura 2 muestra sus tasas de cambio de temperatura.

En este caso, se pueden observar diferencias significativas en los patrones de cambio de temperatura, con fluctuaciones más pronunciadas en Great Falls comparadas con Fort Smith.

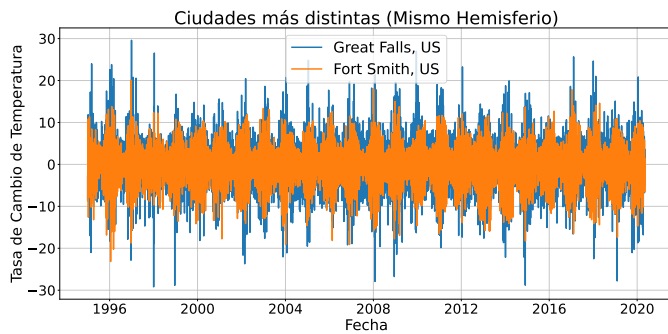


Fig. 2: Tasas de cambio de temperatura para las ciudades más distintas del mismo hemisferio: Great Falls y Fort Smith, Estados Unidos

4.1.2 Análisis de similitud entre ciudades de diferentes hemisferios

El análisis de ciudades en diferentes hemisferios mostró, en general, una menor similitud comparada con las ciudades del mismo hemisferio. La similitud promedio fue de 0.0012, con una mediana de 0.0014 y una desviación estándar de 0.0152.

Las ciudades más similares de diferentes hemisferios fueron Argel, Argelia y Brasilia, Brasil, con un índice de similitud de 0.0499. La Figura 3 muestra sus tasas de cambio de temperatura.

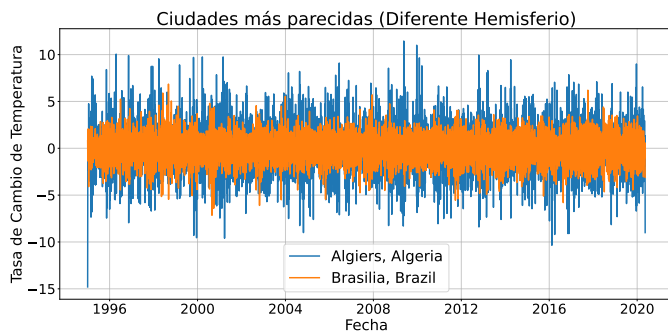


Fig. 3: Tasas de cambio de temperatura para las ciudades más similares de diferentes hemisferios: Argel, Argelia y Brasilia, Brasil

Aunque estas ciudades están en diferentes hemisferios, sus patrones de cambio de temperatura muestran cierta similitud, posiblemente debido a factores climáticos compartidos.

Las ciudades más disímiles entre hemisferios fueron Yakarta, Indonesia y Paramaribo, Surinam, con un índice de similitud de -0.0437. La Figura 4 ilustra sus tasas de temperatura.

En este caso, se observan diferencias significativas en los patrones y magnitudes de las tasas de cambio de temperatura, lo que podría atribuirse a sus distintas ubicaciones geográficas y climas locales.

4.1.3 Análisis de patrones anuales para Dakar, Senegal

Para el análisis detallado de patrones anuales, nos enfocamos en Dakar, Senegal. La Figura 5 muestra los patrones de temperatura anual para esta ciudad desde 1995 hasta 2020.

El análisis de similitud entre años para Dakar reveló una similitud promedio de 0.0103, con una mediana de 0.0074 y una desviación estándar de 0.0745. Los años más similares fueron 2002 y 2020, con un índice de similitud de 0.2398, mientras que los años más disímiles fueron 1996 y 2020, con un índice de -0.2115.

Como se puede observar en la figura, hay una variabilidad significativa en los patrones de temperatura a lo largo del año. Es notable que la variación es mucho mayor al principio del año,

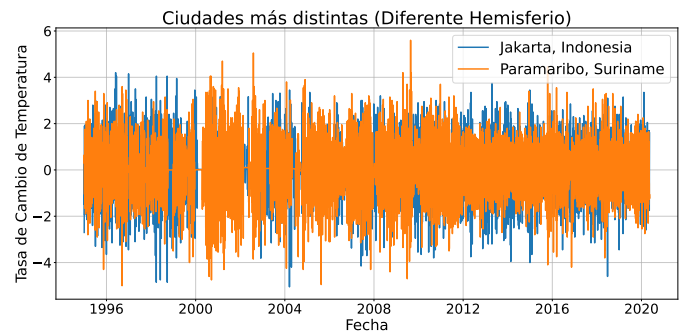


Fig. 4: Tasas de cambio de temperatura para las ciudades más distintas de diferentes hemisferios: Yakarta, Indonesia y Paramaribo, Surinam

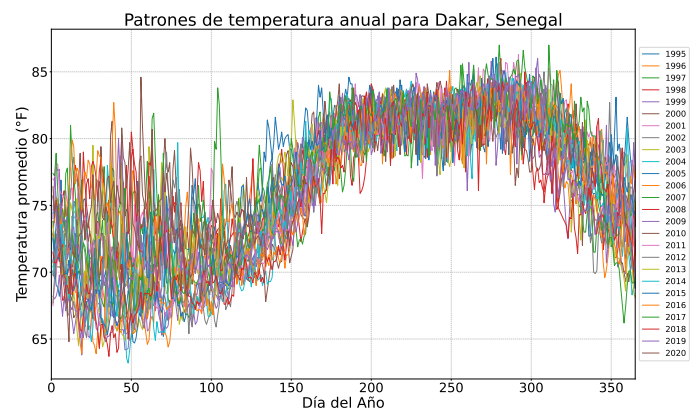


Fig. 5: Patrones de temperatura anual para Dakar, Senegal (1995-2020)

aproximadamente en los primeros 100 días, donde se observan fluctuaciones más pronunciadas en la temperatura. A medida que avanza el año, los patrones tienden a estabilizarse, mostrando menos variabilidad entre los diferentes años.

Estos resultados sugieren que Dakar experimenta una estacionalidad marcada, con un período de mayor inestabilidad climática al inicio del año, seguido por una temporada más estable. Esta tendencia se mantiene relativamente constante a lo largo de los años analizados, aunque con algunas variaciones interanuales notables.

4.1.4 Comparación entre métodos de diferenciación numérica

Los resultados de esta comparación revelaron diferencias notables entre los dos métodos. En promedio, se observó una diferencia de hasta 5 unidades en la tasa de cambio de temperatura entre los métodos de tres y cinco puntos. Esta discrepancia se mantuvo consistente en las distintas ciudades analizadas.

La Figura 6 muestra la diferencia entre los métodos de cinco y tres puntos para la ciudad de Almaty, Kazajistán, a lo largo del período de estudio.

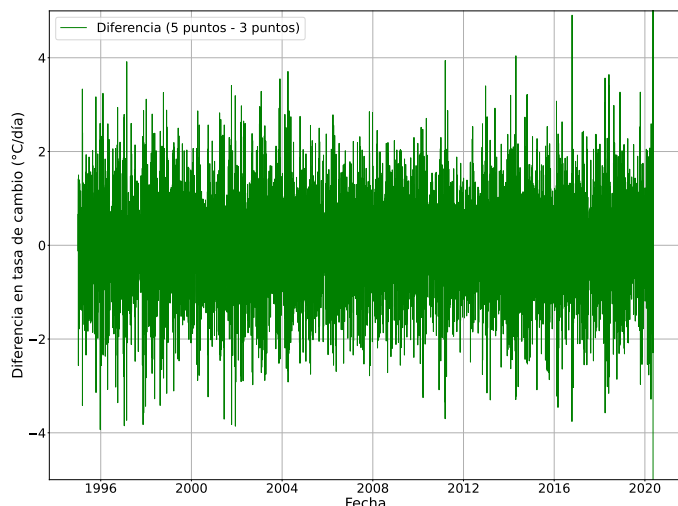


Fig. 6: Diferencia en la tasa de cambio de temperatura entre los métodos de 5 y 3 puntos para Almaty, Kazajistán

Como se puede observar en la figura, las diferencias fluctúan considerablemente a lo largo del tiempo, con valores que oscilan entre aproximadamente -4 y 4 unidades. Esto representa una variación significativa en las estimaciones de la tasa de cambio de temperatura dependiendo del método utilizado.

Es importante notar que, a pesar de estas diferencias, los patrones generales de cambio de temperatura y las tendencias a largo plazo identificadas en nuestro estudio se mantienen consistentes independientemente del método utilizado.

4.2 Comparación de Métodos Numéricos

Comenzamos comparando la precisión de los métodos de Euler, Taylor de segundo orden y Runge-Kutta de cuarto orden para el modelo logístico. Tomamos para todos los métodos $h = 3$ con hiperparámetros de crecimiento moderado

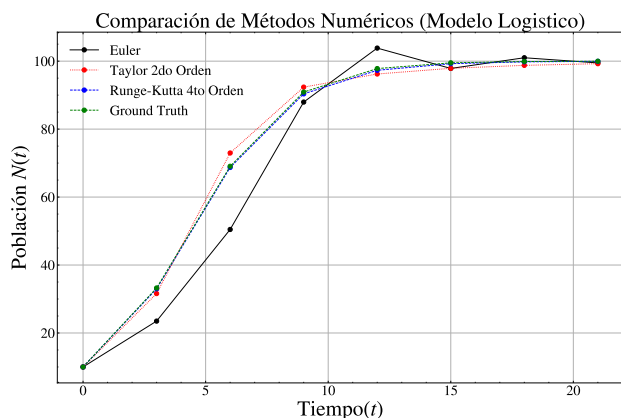


Fig. 7: Comparación de métodos numéricos para el modelo logístico

Como se observa en la Figura 7, el método de Runge-Kutta de cuarto orden proporciona la aproximación más precisa a la solución analítica (Ground Truth). El método de Taylor de segundo orden también muestra una buena precisión, mientras que el método de Euler presenta desviaciones más significativas, especialmente a medida que avanza el tiempo.

4.3 Análisis de Convergencia

Para evaluar la tasa de convergencia de cada método, realizamos un análisis variando el tamaño del paso.

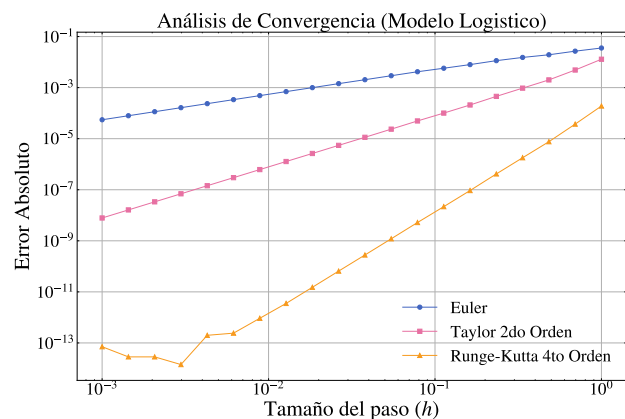


Fig. 8: Análisis de convergencia para los diferentes métodos numéricos

La Figura 8 muestra que el método de Runge-Kutta de cuarto orden converge más rápidamente que los otros métodos a medida que se reduce el tamaño del paso. El método de Taylor de segundo orden muestra una tasa de convergencia intermedia, mientras que el método de Euler exhibe la convergencia más lenta. También podemos ver que a diferencia del método de Euler y el de Taylor, el Runge-Kutta no alcanza su grado máximo de precisión en el h mínimo. Esto puede deberse a que para h demasiado chicos, los errores de redondeo y cancelación empiezan a ser significativos. En métodos de orden superior como Runge-Kutta, estos errores pueden acumularse más rápidamente debido a la mayor cantidad de operaciones realizadas en cada paso, lo que resulta en una pérdida de precisión para pasos extremadamente pequeños.

4.4 Comportamiento Poblacional

Investigamos el comportamiento poblacional bajo diferentes escenarios para el modelo logístico.

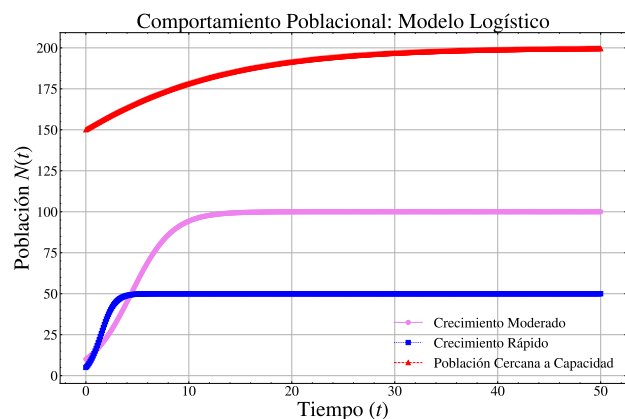


Fig. 9: Comportamiento poblacional para diferentes escenarios del modelo logístico

La Figura 9 ilustra tres escenarios distintos: crecimiento moderado, crecimiento rápido y población cercana a la capacidad. Observamos que en el caso de crecimiento rápido, la población alcanza su capacidad de carga más rápidamente, mientras que en el escenario de crecimiento moderado, el crecimiento es más gradual. Por otro lado, observamos que para el crecimiento rápido y moderado las curvas eventualmente se estancan. Efectivamente, esto indica que las poblaciones han alcanzado puntos de equilibrio. En el modelo logístico, estos puntos de equilibrio representan la capacidad de carga del entorno, donde la tasa de crecimiento de la población se iguala a la tasa de mortalidad. Una vez alcanzado este punto, la población deja de variar significativamente en ausencia de perturbaciones externas.

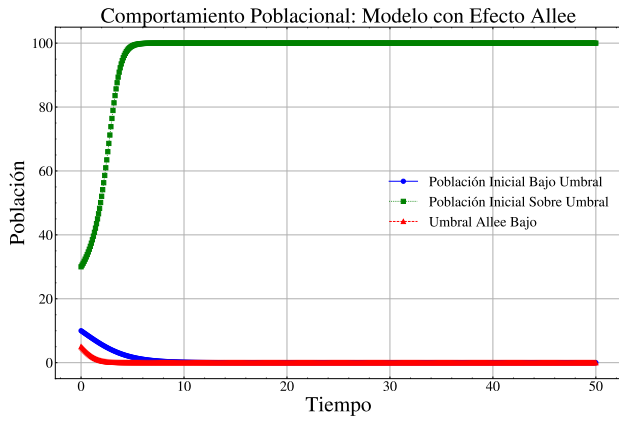


Fig. 10: Comportamiento poblacional para diferentes escenarios del modelo con efecto Allee

La figura 10 muestra 3 escenarios distintos, cada uno es un conjunto de hiperparámetros distintos. Podemos claramente evidenciar el efecto Allee donde las poblaciones cerca del umbral de extinción tienden a extinguirse.

4.5 Análisis Comparativo de Diagramas de Fase

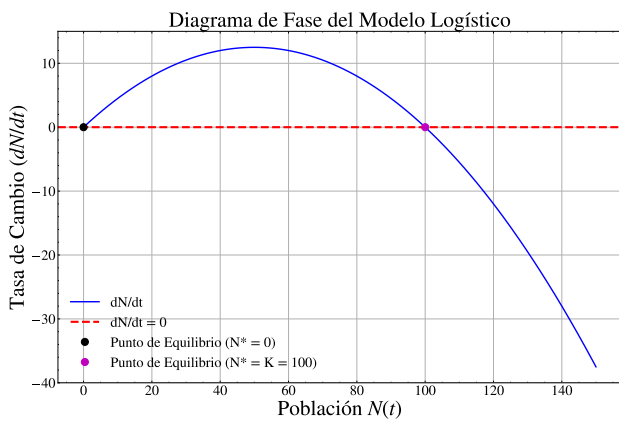


Fig. 11: Diagrama de fase del Modelo Logístico

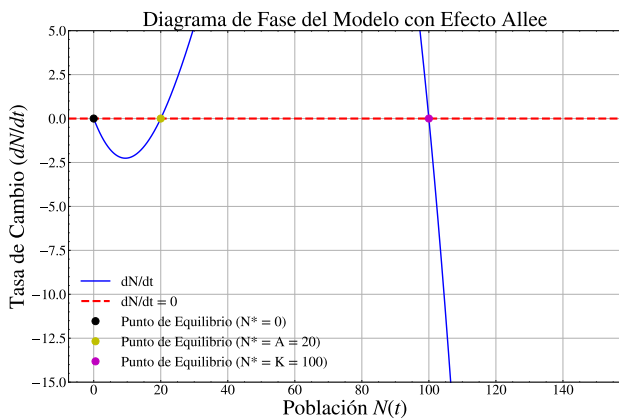


Fig. 12: Diagrama de fase del Modelo con Efecto Allee

Los diagramas de fase del modelo logístico (11) y del modelo con efecto Allee (12) proporcionan una visualización clara de la dinámica poblacional y sus puntos de equilibrio, revelando

diferencias significativas entre ambos modelos.

Puntos de Equilibrio:

Modelo Logístico:

- $N^* = 0$ (punto negro): extinción de la población.
- $N^* = K = 100$ (punto magenta): capacidad de carga del entorno.

Modelo con Efecto Allee:

- $N^* = 0$ (punto negro): extinción de la población.
- $N^* = A = 20$ (punto amarillo): umbral de Allee.
- $N^* = K = 100$ (punto magenta): capacidad de carga del entorno.

Estabilidad y Comportamiento:

Modelo Logístico:

- $N^* = 0$ es un punto de equilibrio inestable. La pendiente positiva indica que cualquier perturbación alejará la población de este punto.
- $N^* = K$ es un punto de equilibrio estable. La pendiente negativa indica que la población tiende a volver a este valor cuando se perturba.

Modelo con Efecto Allee:

- $N^* = 0$ es un punto de equilibrio estable. Poblaciones muy pequeñas tenderán a la extinción.
- $N^* = A$ es un punto de equilibrio inestable, actuando como umbral crítico.
- $N^* = K$ es un punto de equilibrio estable, similar al modelo logístico.

Dinámica Poblacional:

Modelo Logístico:

$$\begin{cases} \text{Para } 0 < N < K, \frac{dN}{dt} > 0 & (\text{crecimiento}) \\ \text{Para } N > K, \frac{dN}{dt} < 0 & (\text{decrecimiento}) \end{cases} \quad (59)$$

Modelo con Efecto Allee:

$$\begin{cases} \text{Para } 0 < N < A, \frac{dN}{dt} < 0 & (\text{decrecimiento hacia extinción}) \\ \text{Para } A < N < K, \frac{dN}{dt} > 0 & (\text{crecimiento}) \\ \text{Para } N > K, \frac{dN}{dt} < 0 & (\text{decrecimiento hacia } K) \end{cases} \quad (60)$$

Efecto Allee y Diferencias Clave: El modelo con efecto Allee introduce una dinámica más compleja:

- La región $0 < N < A$ muestra tasas de crecimiento negativas, conduciendo a la extinción para poblaciones pequeñas.
- Existe una "población mínima viable" (umbral Allee) necesaria para la supervivencia a largo plazo.
- Presenta múltiples equilibrios estables (0 y K), indicando posibles estados alternativos en el ecosistema.

En contraste, el modelo logístico siempre muestra crecimiento para cualquier población positiva, por pequeña que sea.

Comportamiento a Largo Plazo:

Modelo Logístico: Cualquier población inicial positiva ($N > 0$) convergerá hacia K.

Modelo con Efecto Allee: El comportamiento depende del tamaño inicial de la población en relación con A y K.

Implicaciones Ecológicas: El modelo con efecto Allee sugiere escenarios más complejos y potencialmente frágiles para poblaciones pequeñas, mientras que el modelo logístico presenta una visión más optimista del crecimiento poblacional. Estos diagramas de fase

proporcionan una comprensión intuitiva de la dinámica poblacional en diferentes regiones y destacan la importancia de considerar efectos como el de Allee en la modelización ecológica.

4.6 Análisis de Sensibilidad

Realizamos un análisis de sensibilidad para evaluar cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales afectan la dinámica poblacional a largo plazo.

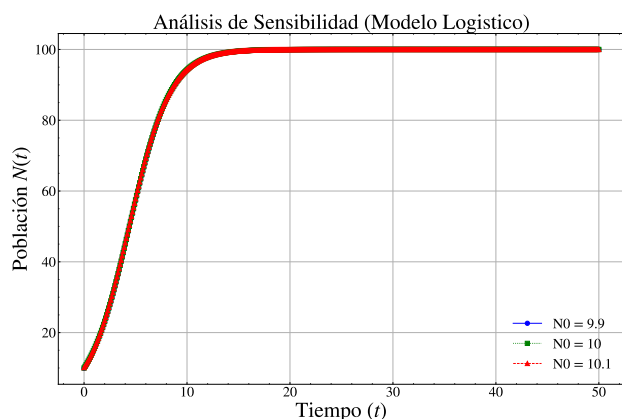


Fig. 13: Análisis de sensibilidad para el modelo logístico

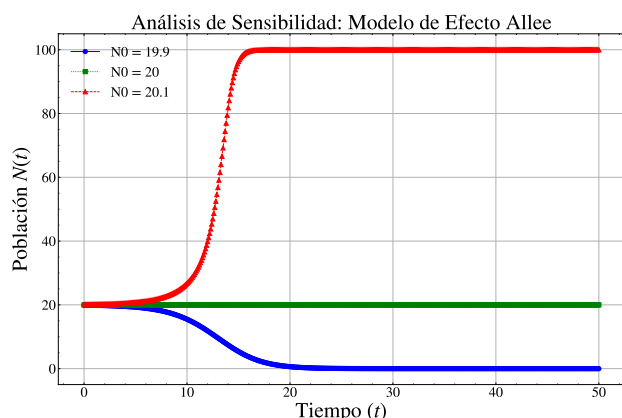


Fig. 14: Análisis de sensibilidad para el modelo de efecto Allee

Las Figuras 13 y 14 muestran los resultados del análisis de sensibilidad para los modelos logístico y de efecto Allee, respectivamente. En el modelo logístico, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales tienen un impacto mínimo en el comportamiento a largo plazo. Sin embargo, en el modelo de efecto Allee, observamos una bifurcación crítica: pequeñas variaciones alrededor del umbral Allee pueden llevar a la extinción o al crecimiento de la población.

5 Conclusión

Nuestro estudio abarcó dos áreas de investigación independientes: el análisis de patrones de cambio de temperatura global y la modelización de dinámicas poblacionales. Ambas partes del trabajo han proporcionado insights valiosos en sus respectivos campos:

Análisis de similitud de series temporales de temperatura:

- El uso de métodos de diferenciación numérica para calcular las tasas de cambio de temperatura demostró ser una herramienta valiosa

para analizar patrones climáticos, permitiendo comparaciones independientes de los valores absolutos de temperatura.

- La comparación entre los métodos de diferenciación de tres y cinco puntos reveló diferencias significativas, subrayando la importancia de la elección metodológica en este tipo de análisis y su impacto en la interpretación de los resultados.
- La implementación de una medida de similitud combinada, que incorpora correlación, consistencia y patrones estacionales, proporcionó una perspectiva multifacética de las similitudes y diferencias en los patrones de cambio de temperatura.
- El análisis de patrones anuales demostró la capacidad de nuestro enfoque para identificar estacionalidades y variaciones a largo plazo en los datos climáticos.
- Este método de análisis ofrece un enfoque novedoso para estudiar el cambio climático, centrándose en las tasas de cambio en lugar de en valores absolutos, lo que puede revelar patrones que de otro modo podrían pasar desapercibidos.

Modelos de dinámica poblacional:

- La comparación de diferentes métodos numéricos (Euler, Taylor de segundo orden, Runge-Kutta de cuarto orden) para resolver ecuaciones diferenciales reveló diferencias significativas en precisión y estabilidad, con RK4 demostrando ser superior.
- El análisis de convergencia proporcionó insights valiosos sobre la relación entre el tamaño del paso y la precisión de los métodos numéricos, destacando la importancia de elegir cuidadosamente los parámetros de simulación.
- La comparación entre el modelo logístico y el modelo con efecto Allee demostró cómo diferentes suposiciones sobre la dinámica poblacional pueden llevar a predicciones radicalmente diferentes, especialmente para poblaciones pequeñas.
- Los diagramas de fase se revelaron como una herramienta poderosa para visualizar y comprender las diferencias fundamentales entre modelos poblacionales, proporcionando una representación clara de los puntos de equilibrio y las trayectorias poblacionales.
- Este estudio subraya la importancia de seleccionar cuidadosamente los modelos matemáticos en ecología, considerando fenómenos como el efecto Allee que pueden tener implicaciones críticas para la conservación de especies.

En conclusión, ambas partes del estudio demuestran la importancia crucial de los métodos numéricos y el análisis matemático en la comprensión de sistemas complejos. En el análisis climático, nuestro enfoque en las tasas de cambio ofrece una nueva perspectiva para estudiar patrones globales de temperatura. En la modelización poblacional, el uso de ecuaciones diferenciales y la comparación de métodos numéricos y modelos ecológicos proporciona una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones en conservación.

Estos resultados subrayan la necesidad de un enfoque riguroso y crítico en la selección de métodos analíticos y modelos matemáticos en ciencias ambientales y ecología. Futuros estudios podrían beneficiarse de la aplicación de estos métodos en conjuntos de datos más amplios y en la exploración de otros fenómenos complejos en estos campos.