h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbi
FACHBEREICH INFORMATIK

# Informática visual

## Objetos gráficos y su programación

Universidad de Darmstadt

Prof. Dr. Elke
Hergenröther Björn
Frömmer
Prof. Dr. Benjamin Meyer

# CAPÍTULO 5

## Transformaciones

# Fundamentos matemáticos: Transformaciones

## Puntos:

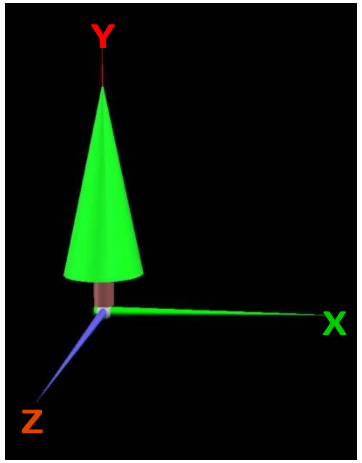
- Los puntos (o vértices) del plano se definen por sus coordenadas x e y. set.
  - En el espacio tridimensional correspondiente a sus coordenadas x, y y z

- Escribimos los puntos como vectores columna:

$$pḫ = \begin{bmatrix} ? \\ y \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad pḫ = \begin{bmatrix} ? \\ y \\ ? \end{bmatrix}$$

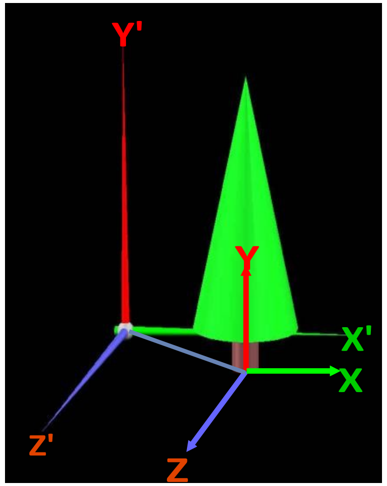
# Disposición de los objetos en la sala

1.




cuerpo)

2.

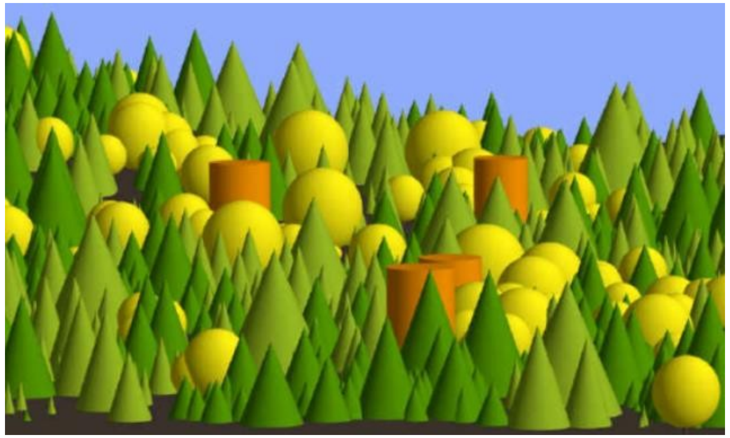



Modelización del objeto en el sistema de coordenadas local

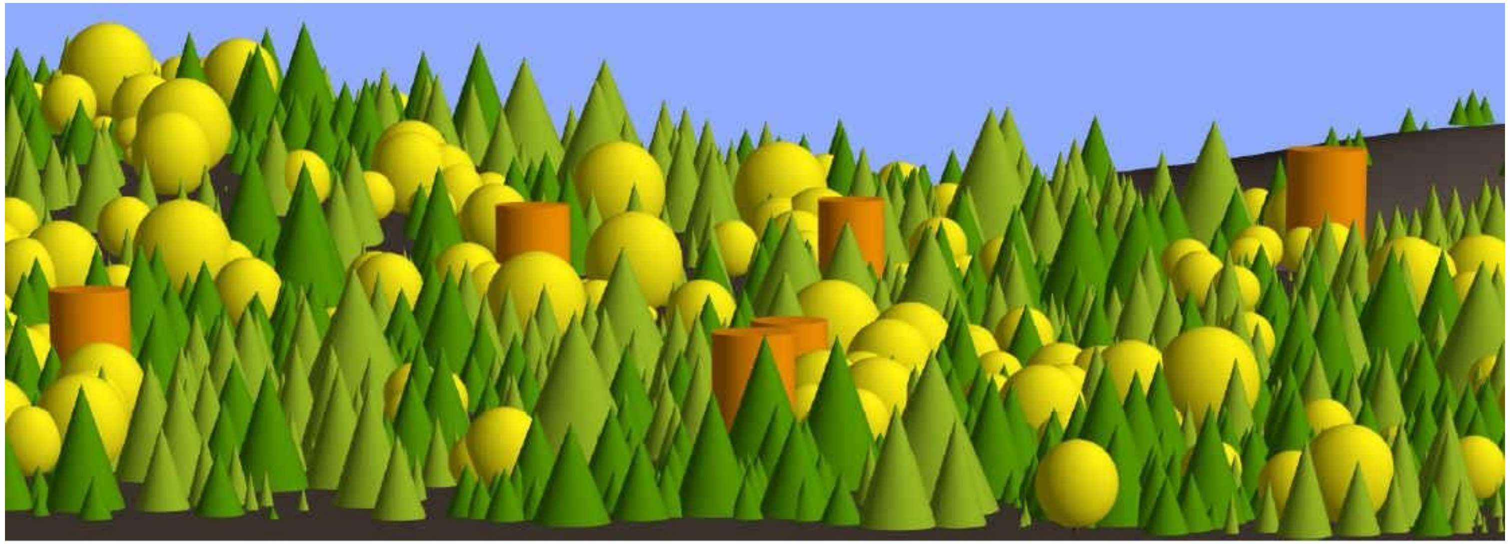
(sistema de coordenadas de modelización o sistema de coordenadas del

T
r
a
n

sformación del
objeto en el
sistema de
coordenadas
mundial



# Disposición de los objetos en la sala II

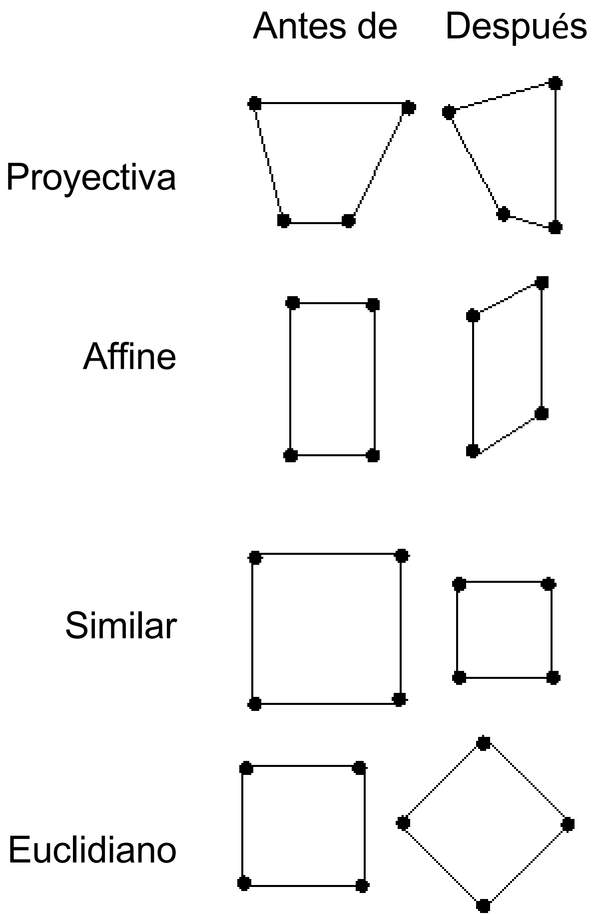


# Transformaciones afines

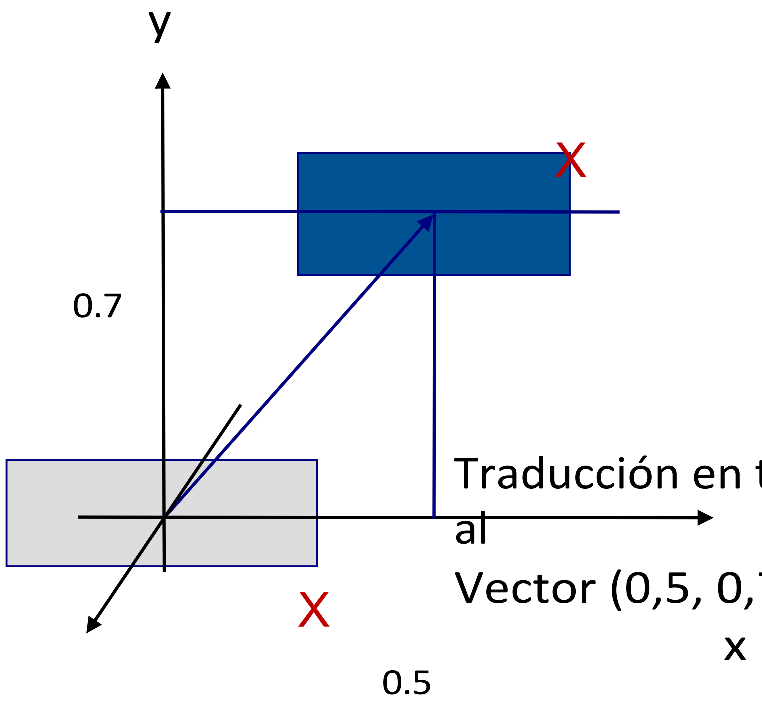
- Las transformaciones utilizadas aquí
  - Traducción
  - Rotación (Rotation)
  - Escala (redimensionamiento)
- ... también se llaman **transformaciones afines**

## Affin:

- Lo que es paralelo sigue siendo paralelo
- La relación entre longitud, área y volumen permanece constante.



# Ejemplo de traducción




Traducción en torno al
Vector $(0{,}5,\ 0{,}7,\ 0)^t$

- Recordatorio: ¡sólo se desplazan los puntos angulares de la geometría!

- Matemáticamente, se trata de una adición de un Vector de traslación $\vec{t}$ al punto original $\vec{p}$ :

$$\vec{p}' = \vec{t} + \vec{p}$$

- Ejemplo para la esquina superior derecha en las coordenadas $(0{,}3,\ 0{,}1,\ 0)^t$ :

## 5. transformaciones

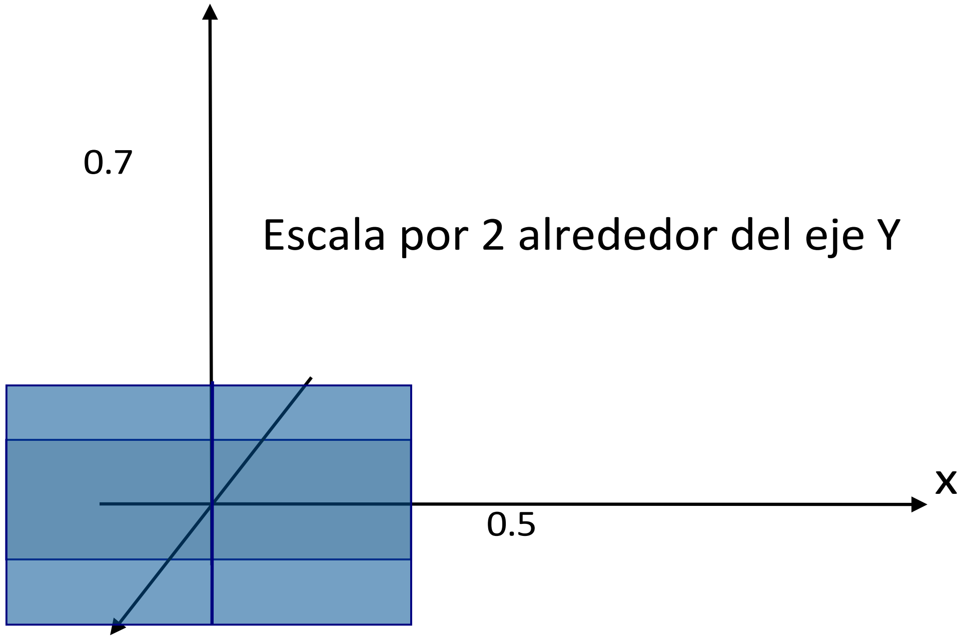
$$\vec{t} + \vec{p} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{p'}$$

**Elemento neutro de la traducción**

# Ejemplo de escalado

y

lo largo de la




- Se aplica para cada punto $p_h$ a una escala para mover $_{sx}$ a lo largo de la X-, $_{sy}$ a lo largo de la Y- y $_{sz}$ a

  del eje Z:

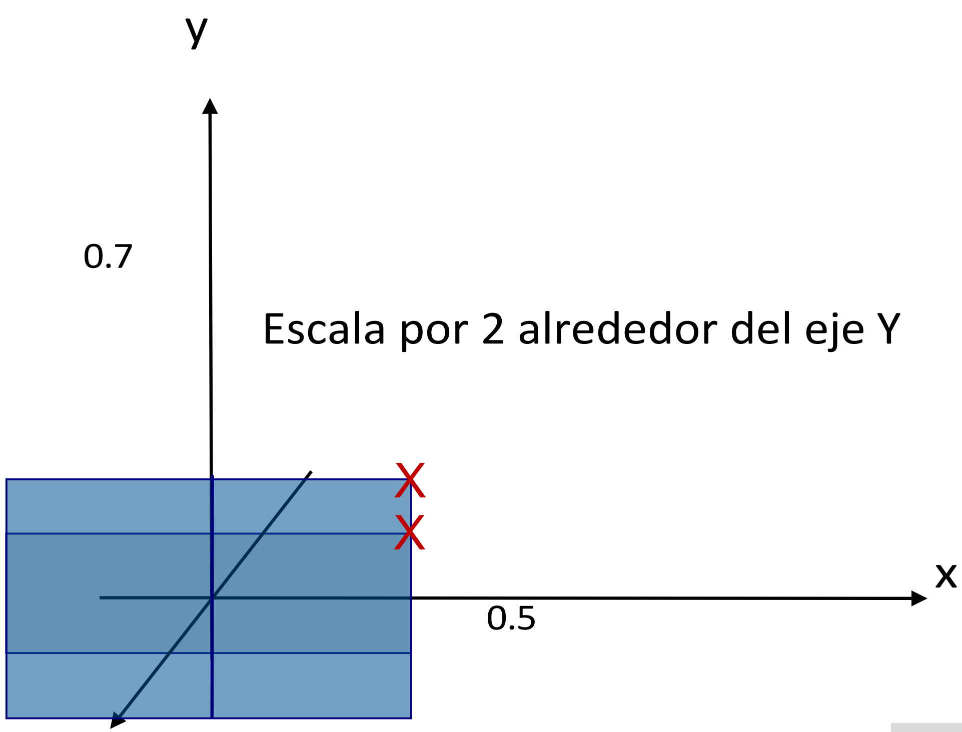
  $p'_x = s_x * p_x$ , $p'_y = s_y * p_y$ y $p'_z = s_z * p_z$

- Estas ecuaciones pueden calcularse mediante un Resumir la multiplicación de matrices

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & sz \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \end{bmatrix}$$

## ¡Atención! ¡Observa el orden de la multiplicación!

# Ejemplo de escalado 12



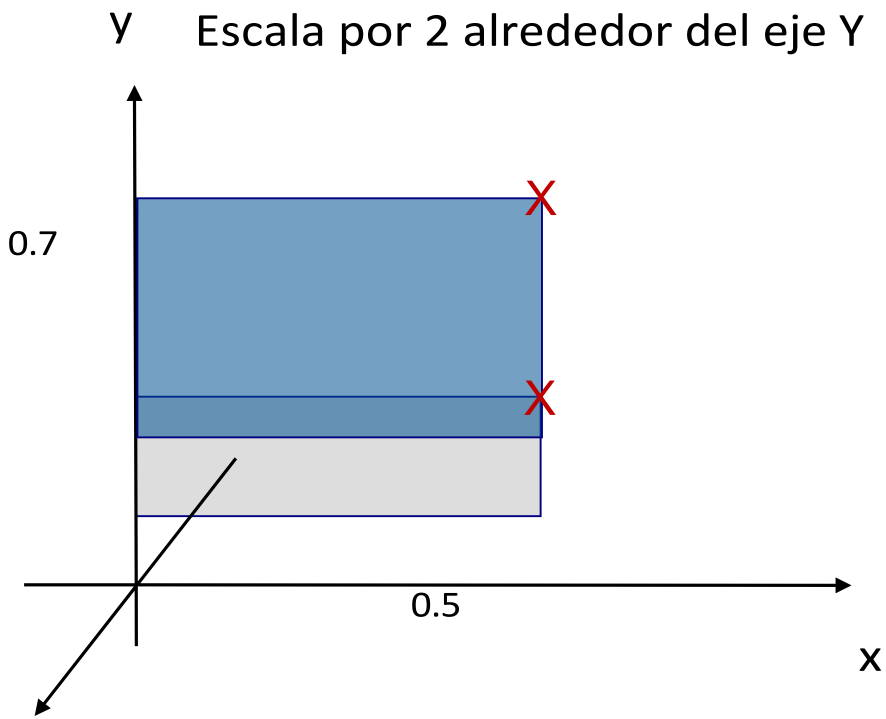

- Ejemplo para las coordenadas (0,3, 0,1, 0)$^t$ :

$$s_h * p_h = \begin{bmatrix} \text{?} & 0 & 0 \\ 0 & \text{?} & 0 \\ 0 & 0 & \text{?} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{?} \\ py \\ \text{?} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{p'}$$

**elemento neutro de la balanza**

# Ejemplo de escalado III




- De nuevo para la esquina superior derecha, ahora en $(0.6, 0.4, 0)^t$

$$s_h * p_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{p'}$$

- **Observación:** El objeto no sólo se desplaza en la

  dirección Y.
  escala, sino que también cambia la posición
  → ¡la distancia al punto cero también se escala!

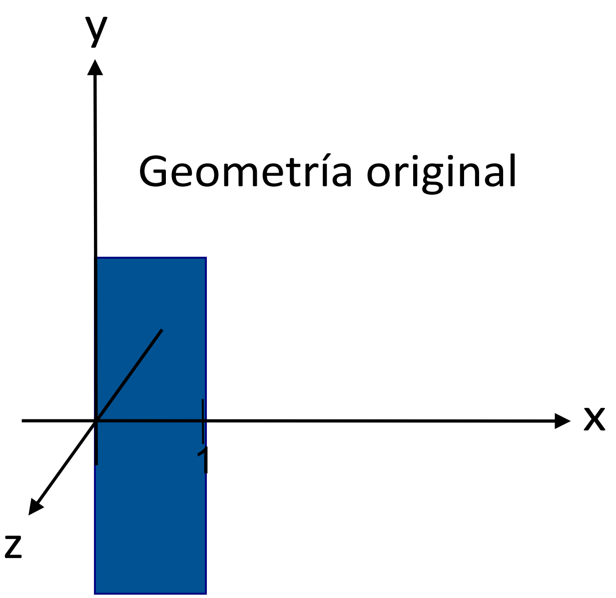
- **Por lo tanto:** el escalado sólo es válido en relación con

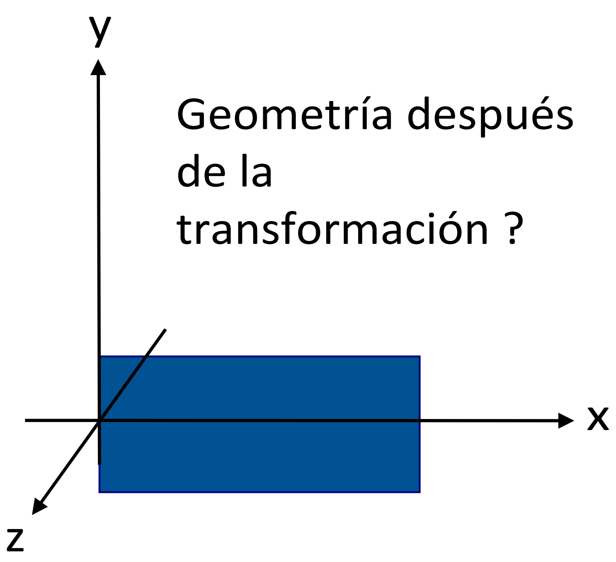
  el

# Ejemplo de escalado III

¡Invariante de punto cero!

# Ejemplo de escalado III

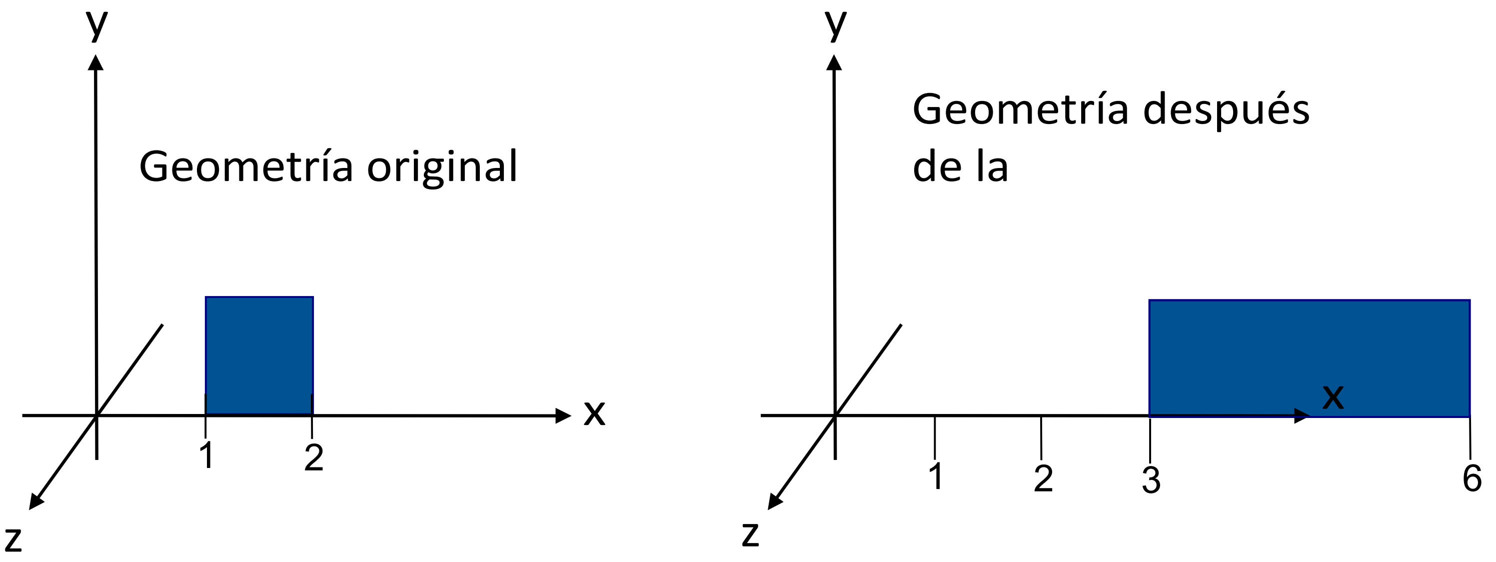



¿Qué aspecto tiene la geometría después de escalarla con estos factores?

x = 3 , y = 0,3 y z = 1

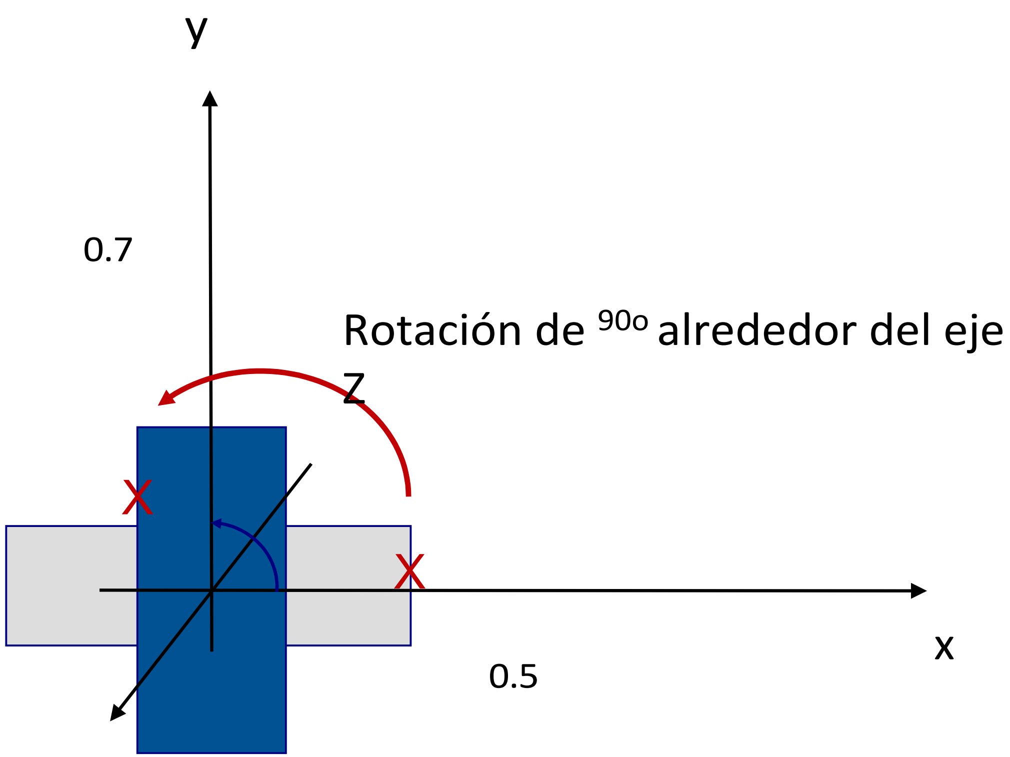
# Ejemplo de escalado III




¿Qué aspecto tiene la geometría después de escalarla con estos factores?

x = 3 , y = 1 y z = 1

# Ejemplo de rotación




- La rotación también puede formularse como una multiplicación matricial de los puntos de esquina individuales

- Rotación alrededor del eje Z por el ángulo α:

$$r_h * p_h = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ?? \\ py \\ ?? \end{bmatrix} = \overrightarrow{p'}$$

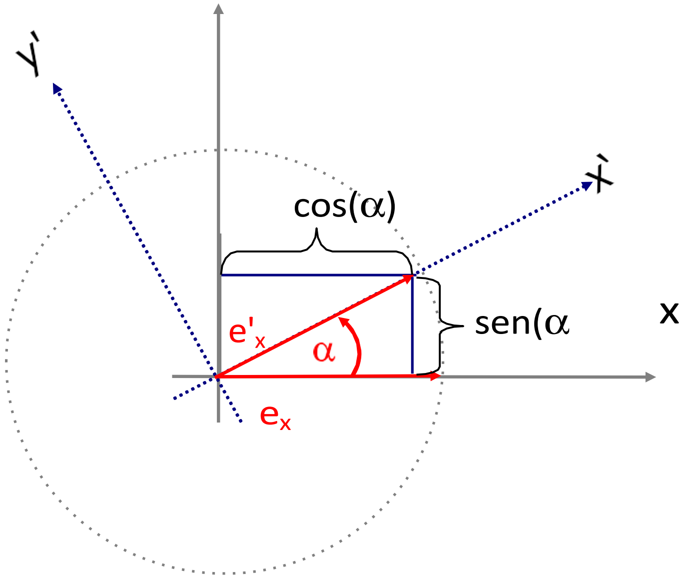
- Ejemplo para las coordenadas $(0,3,\ 0,1,\ 0)^t$ y 90°:

$$r_h * p_h = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 5. transformaciones

# Derivación de la matriz de rotación (en 2D)

No se rota el objeto, sino el sistema de coordenadas:



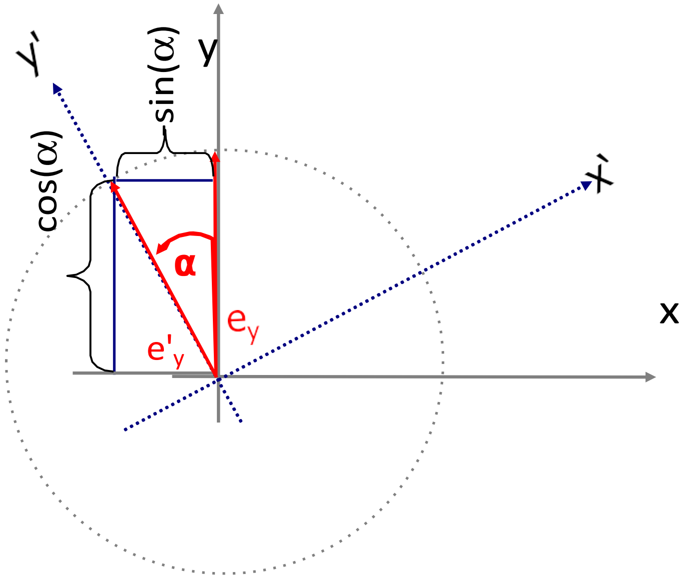

Al rotar con el ángulo α, los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas $_{ex}$ y $_{ey}$ $_{se}$ mapean en los vectores base de $e'_x$ y $e'_y$ del sistema de coordenadas afín:

$$' e = T * e$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & ?.\ ?. \\ \mathrm{sen}(\alpha & ?.\ ?. \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Derivación de la matriz de rotación (en 2D)

No se rota el objeto, sino el sistema de coordenadas:



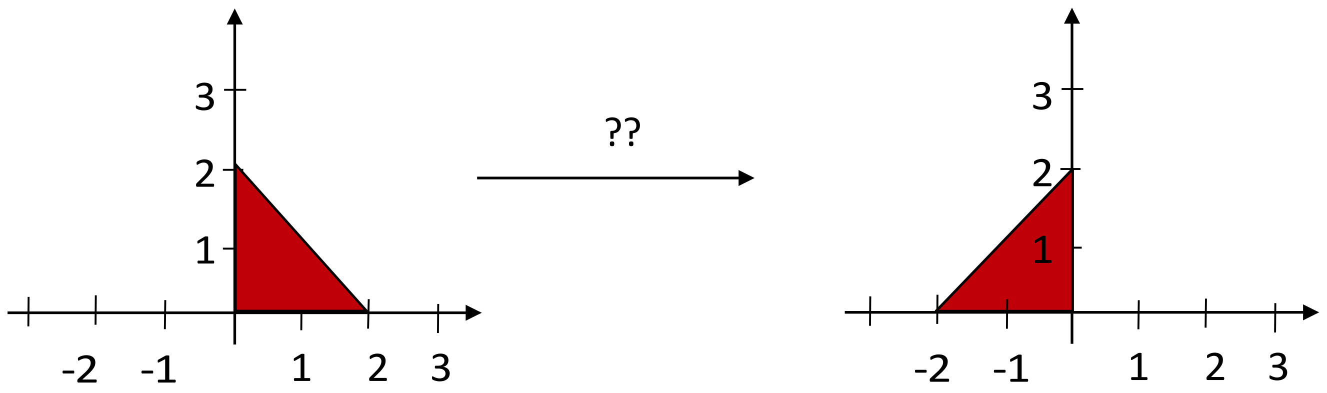

Al rotar con el ángulo α, los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas $_{ex}$ y $_{ey}$ $_{se}$ mapean en los vectores base de $e'_x$ y $e'_y$ del sistema de coordenadas afín:

$$e' = T * e$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha & \cos(\alpha) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Ejemplo en

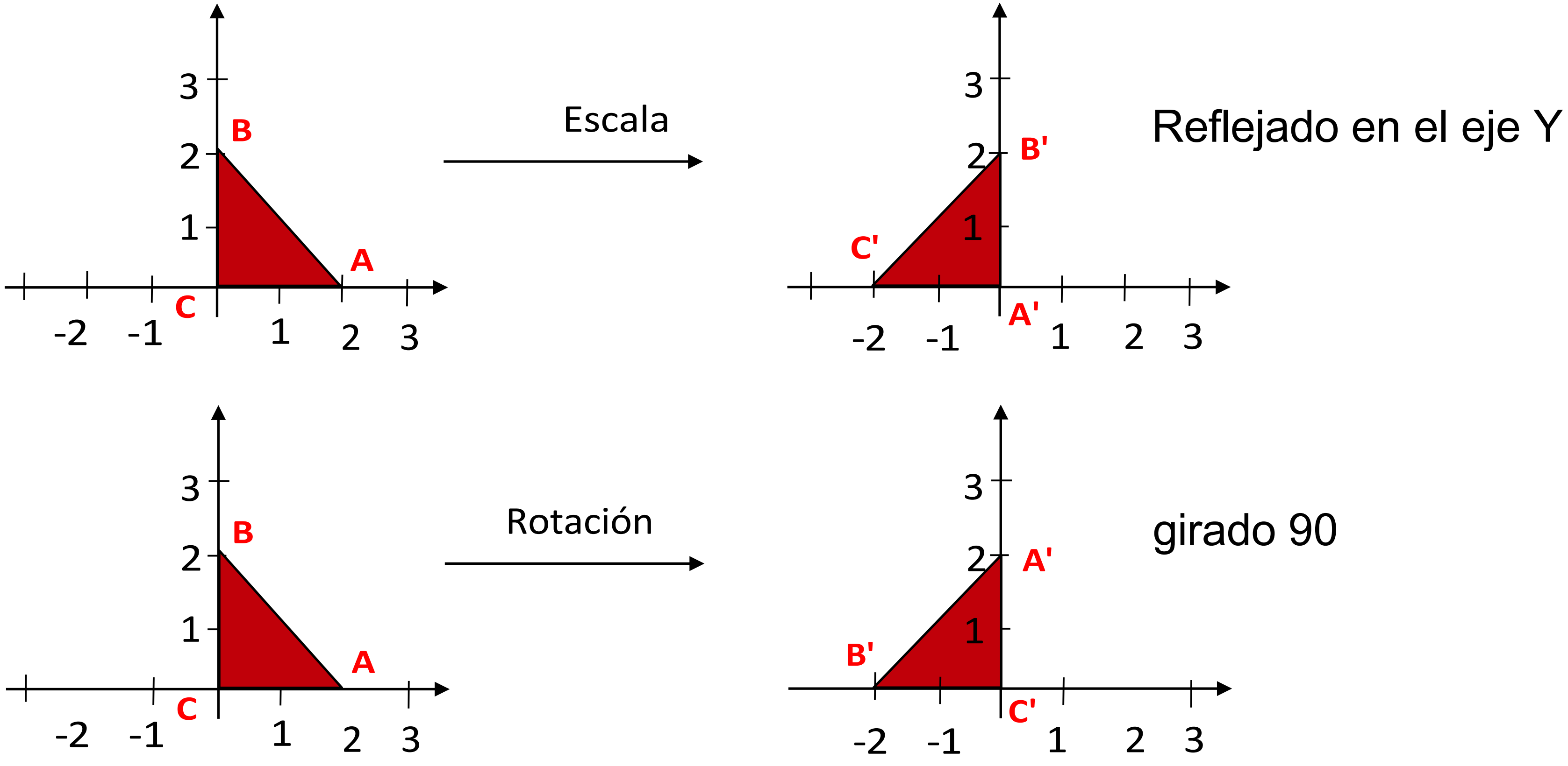
¿Qué transformación se busca?




Sin etiquetar los puntos de esquina, ¡hay varias soluciones!

¿Cuál?

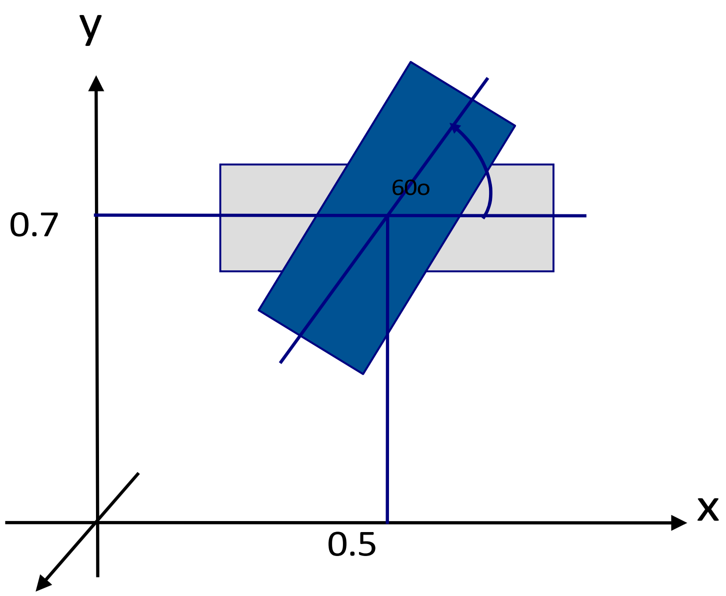
# Ejemplo en



Escala
Reflejado en el eje Y
Rotación
girado 90
A
B
C
A'
B'
C'
-2 -1 1 2 3
1 2 3

# Transformaciones complejas

- ¿Qué transformaciones son necesarias para girar el rectángulo dado?




3. transformación a la posición original

2. rotación alrededor del eje Z

1. Transformación en el origen

- → □□□ **orden en que se aplican las transformaciones es importante!**

# Resumen hasta aquí...

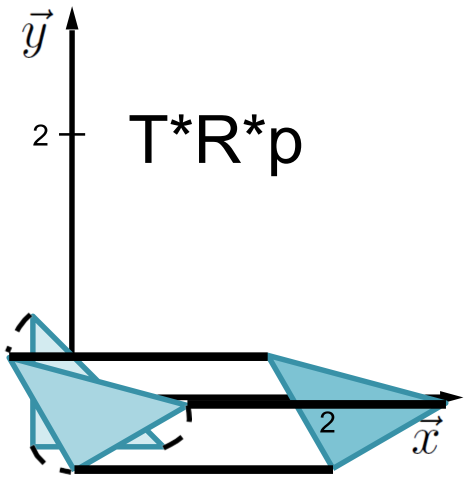
- La rotación y el escalado son **siempre relativos al origen.**
- Rotar/Escalar con Punto de Referencia es un algoritmo de tres pasos:
  - Desplazamiento del punto de referencia al origen
  - Aplicar transformación
  - Mover el punto de referencia a la posición original
- Encadenamiento de transformaciones necesario......
- pero aplicar una transformación tras otra a cada vértice **lleva largo** y **da lugar a errores de redondeo**
- Mejor concepto: **Resumir las transformaciones** y centrarse en el original

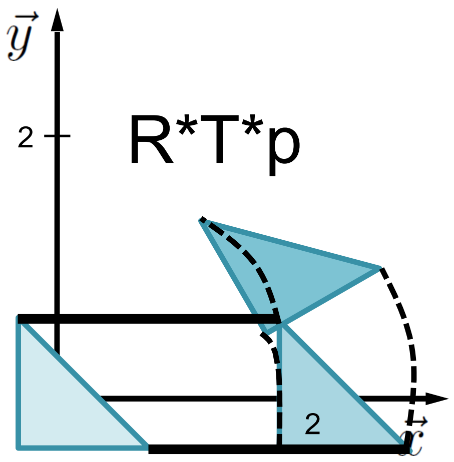
  Aplicar puntos de esquina → **matriz de transformación acumulada.**

# Secuencia de transformaciones

```
Matrix4f m = new Matrix4f();
m.translate(2, 0, 0);
m.rotate(30, 0, 0, 1);
```

```
Matrix4f m = new Matrix4f();
m.rotate(30, 0, 0, 1);
m.translate(2, 0, 0);
```




"La geometría retrocede por el programa y recoge las transformaciones".

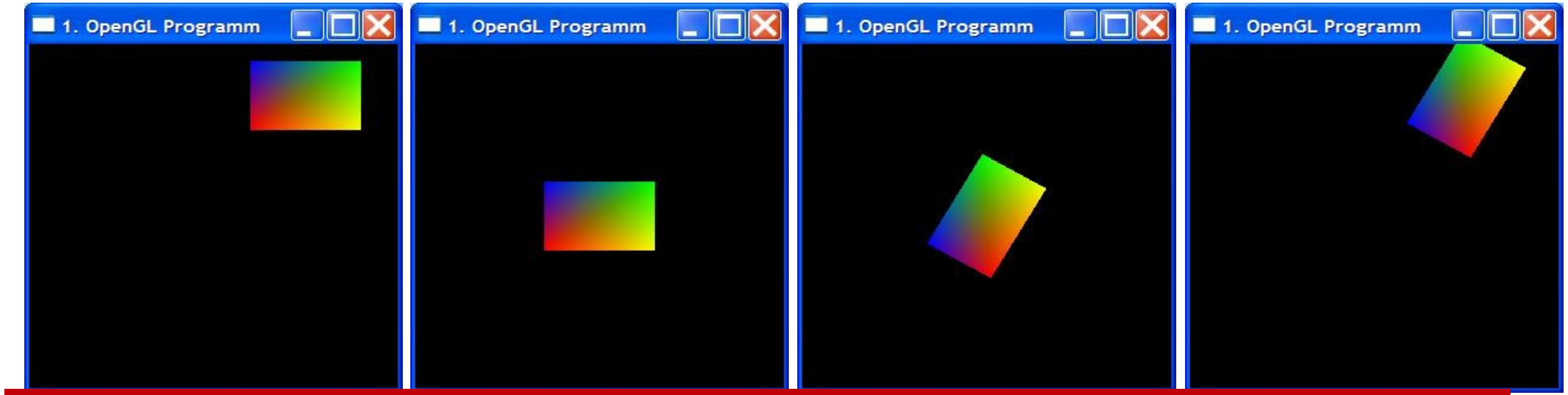
# Secuencia de transformaciones 26

**Ejemplo:** Girar un cuadrado 60°.

- Las transformaciones se dan en orden **inverso**:

**Orden en que, el se aplican transformaciones al cuadrado:** ↑

```
Matrix4f m = nueva Matrix4f(); // crear nueva Mattix
m.translate( 0.5, 0.7, 0.);    // Transformación posterior
m.rotate( 60., 0., 0., 1.);    // Rotación
m.translate( -0.5, -0.7, 0.); // Al origen
```



# Secuencia de transformaciones 27

# Secuencia de transformaciones 28

¿Por qué se dan las transformaciones en orden inverso?

- Las multiplicaciones de matrices no son conmutativas (es decir, no están en su secuencia intercambiables)
- Ejemplo: a) no da el mismo resultado que b)

a) $$\begin{bmatrix}3\\2\\3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix}5\\-3\\3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}$$

# Secuencia de transformaciones 29

¿Por qué se dan las transformaciones en orden inverso?

# Secuencia de transformaciones 30

¿Por qué se dan las transformaciones en orden inverso?

- Las multiplicaciones de matrices no son conmutativas (es decir, no están en su secuencia intercambiables)
- Cálculos equivalentes de P':

$$\boxed{P' = M_2 \cdot (M_1 \cdot P)} \Leftrightarrow \boxed{P' = (M_2 \cdot M_1) \cdot P}$$

Enfoque intuitivo cuando transformado "a mano":
P se multiplica primero por $M_1$ y luego el vector resultante se multiplica por $M_2$

Procedimiento de OpenGL: Crear una matriz acumulada ($M_2$ se multiplica por $M_1$).

# Secuencia de transformaciones 31

¿Por qué se dan las transformaciones en orden inverso?

# Secuencia de transformaciones V

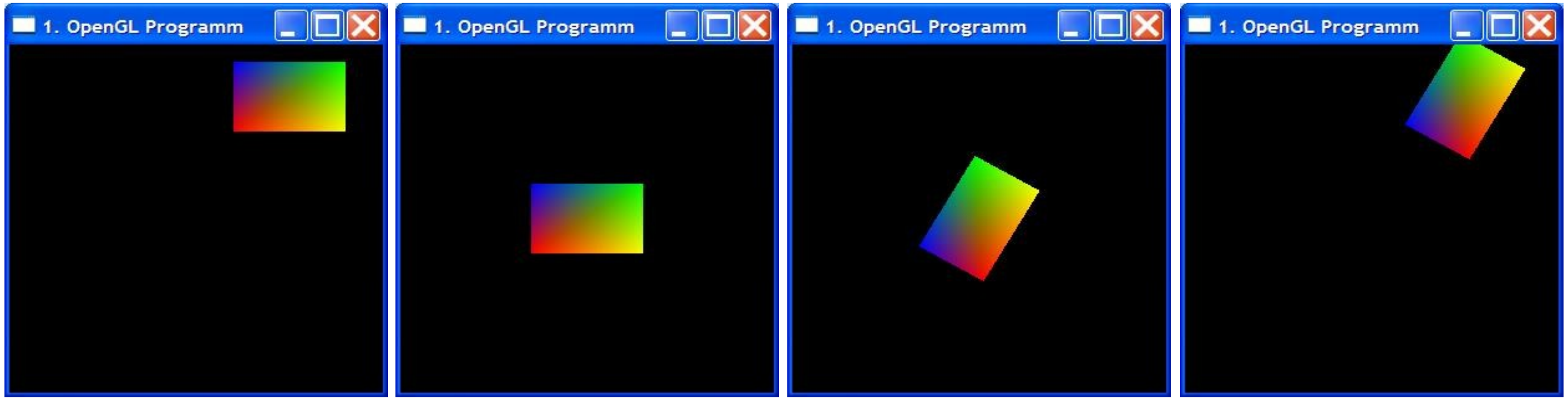
**Ejemplo:** Girar un cuadrado 60°.

- Las transformaciones se dan en orden **inverso**:

**Orden en que, el se multiplican en la matriz M acumulada:**

$M = M_{T2} * M_R * M_{T1}$

```
Matrix4f m = nueva Matrix4f(); // crear nueva Mattix
m.translate( 0.5, 0.7, 0.);    // Retransformación
m.rotate( 60., 0., 0., 1.);    // Rotación
m.translate( -0.5, -0.7, 0.);  // En el origen
```



# Coordenadas

## Problema:

Traslación = suma de vectores

Escala y rotación = Multiplicación de matrices

Dado que tiene sentido "calcular" las distintas transformaciones entre sí en una matriz acumulada y luego aplicarla a todos los vértices (véase OpenGL), debe haber una forma de vincular la parte aditiva (traslación) y la parte multiplicativa (rotación, escalado) entre sí.

# Coordenadas

## Problema:

- **La rotación** y el **escalado** pueden expresarse mediante **la multiplicación de matrices**
- Para crear la matriz acumulada necesitamos una Representación de la **traslación** (es decir, una **suma de vectores**)
- Así es como tendría que ser una matriz de este tipo, para que se aplique lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ p_z + t_z \end{pmatrix}$$

- Desgraciadamente, tal matriz 3x3 no existe.
- Solución: **Coordenadas homogéneas**

# Coordenadas homogéneas II

- Truco matemático: ¡añadir una 4ª coordenada!

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3 \, ,$$

- Homogeneización (vuelta al espacio euclidiano)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/W \\ Y/W \\ Z/W \end{pmatrix} \, , \forall W \neq 0$$

- Dividir por la 4ª coordenada

# Coordenadas homogéneas en

- Los vectores $\overrightarrow{x'}$, $\overrightarrow{y'}$ y $\vec{t}$ se convierten en una matriz T (matriz de transformación) resumidos.

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & t_1 \\ x'_2 & y'_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas homogéneas

# Coordenadas homogéneas en

# Coordenadas homogéneas en

- Los vectores $\vec{x'}$, $\vec{y'}$ y $\vec{t}$ se convierten en una matriz T (matriz de transformación) resumidos.

Parte multiplicativa

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & t_1 \\ x'_2 & y'_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \cdot p_1 + y'_1 \cdot p_2 + t_1 \cdot 1 \\ x'_2 \cdot p_1 + y'_2 \cdot p_2 + t_2 \cdot 1 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas homogéneas

# Coordenadas homogéneas en

te aditiva

# Resumen de todas las transformaciones (en 4D)

- Rotación:

$$R_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & 0 & \mathrm{sen}(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(a) & 0 & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

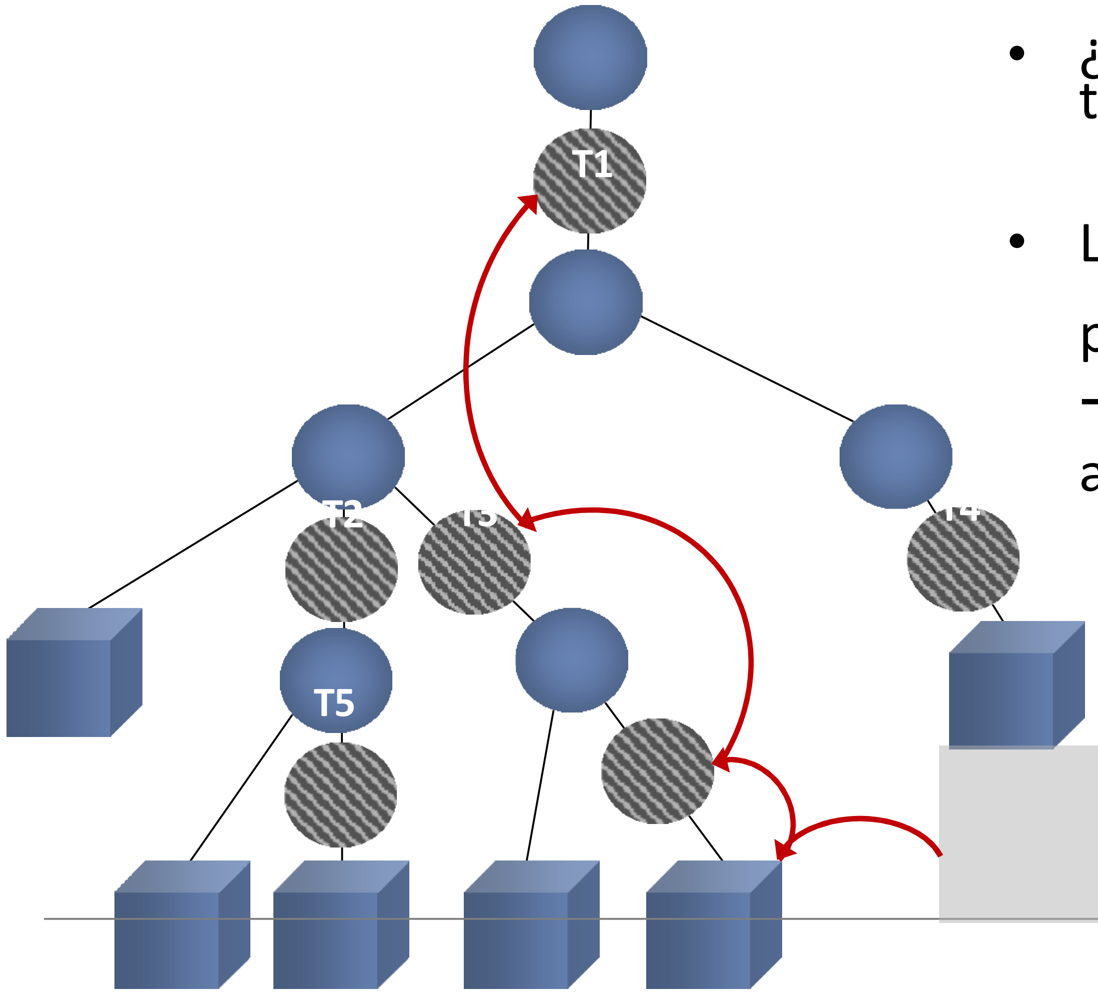
- Escala:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Traducción:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Implementación del gráfico de escena




- ¿En qué orden deben considerarse las transformaciones del grafo de la escena?
- Los objetos hijos heredan las transformaciones de sus padres
  → ¡□□ gráfico de la escena se desplaza de abajo a arriba!

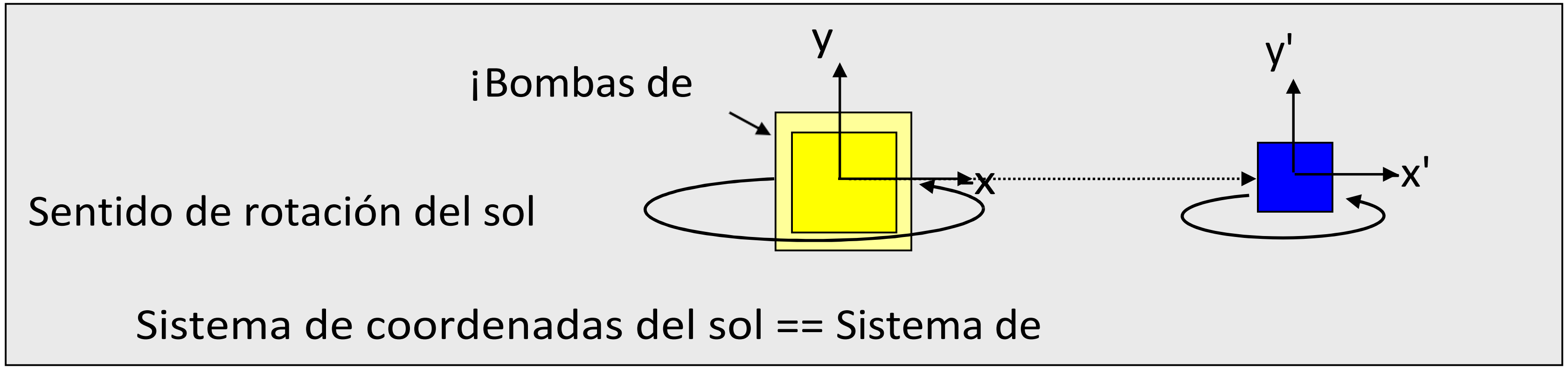
**Transformaciones aplicadas:**

**T1 * T3 * T6 * P**

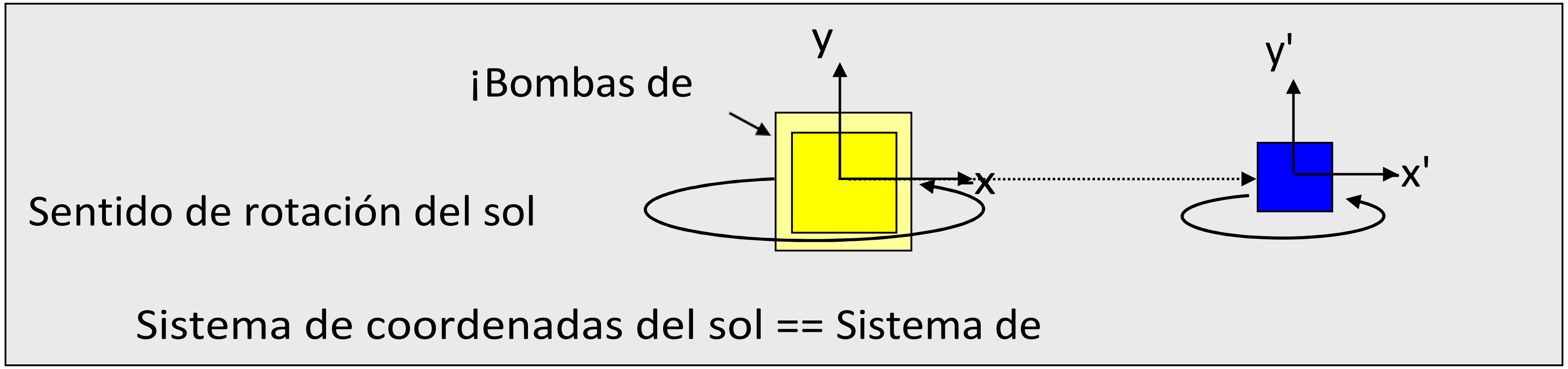
# Gráfico de escenas -

## Tarea: Sistema solar en miniatura

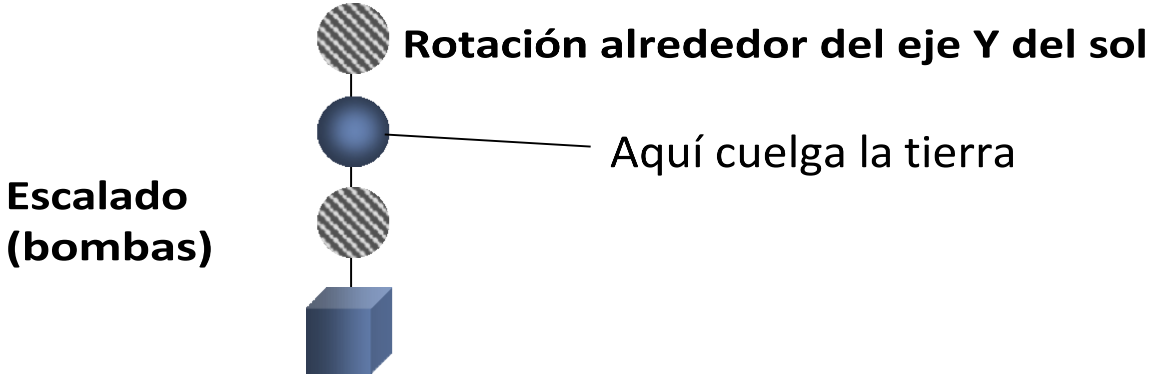
- El Sol gira alrededor de su eje Y.
- Al girar, se infla y se vuelve a colapsar.
- La Tierra gira a cierta distancia con la misma velocidad angular (es decir, barrida ángulo por unidad de tiempo es igual) alrededor del eje Y del sol.
- Además, la Tierra gira alrededor de su propio eje Y.
- La Tierra y el Sol son angulares ;-)



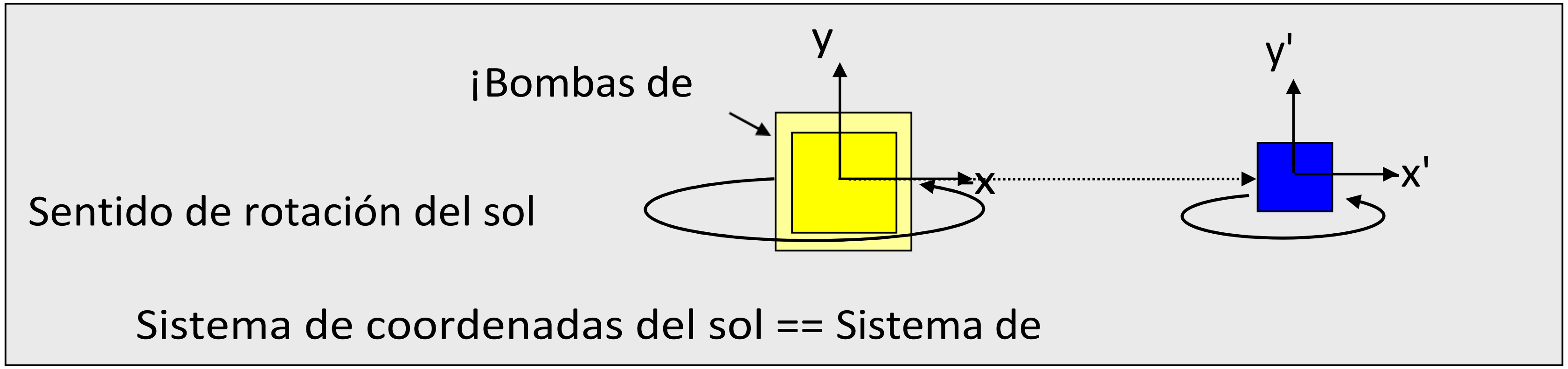
# Gráfico de escenas -



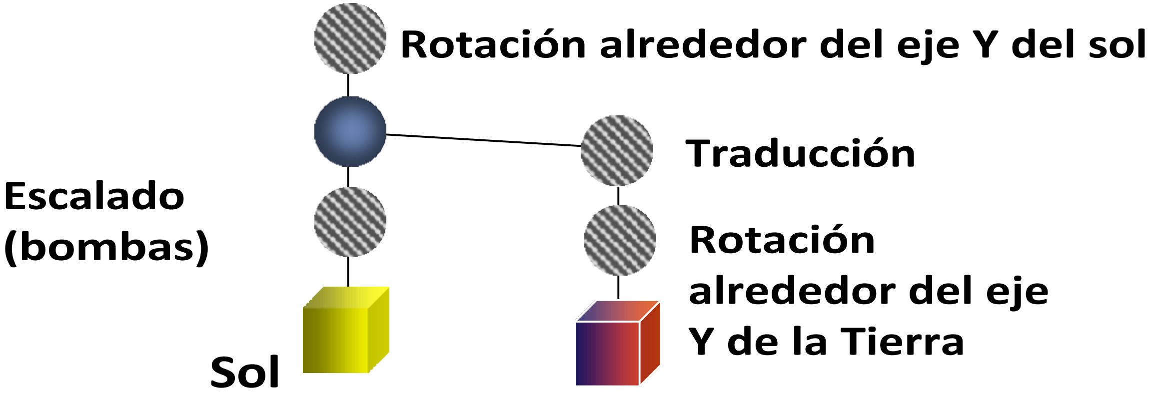

- El sol y la tierra giran a la misma velocidad angular alrededor del eje Y del sol
- Pero sólo el sol bombea y se derrumba



# Gráfico de escenas -




- La Tierra gira además alrededor de su propio eje Y



Tierra

# Gráfico de escenas -

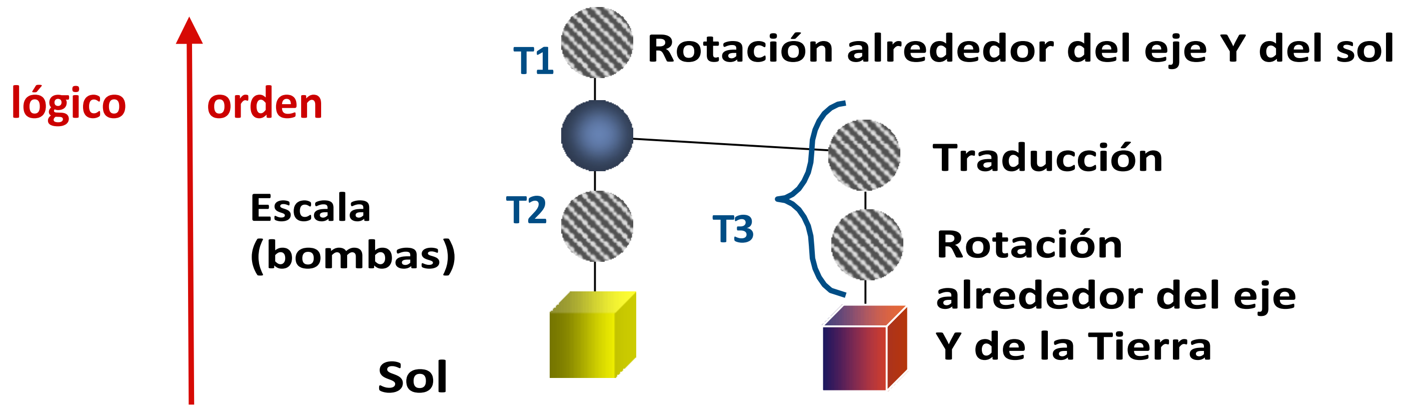
# Gráfico de escenas - ejemplo de

## Pseudocódigo:

```
Matrix4f T1 =      Matrix4f();              // Crear nueva matriz T1
nuevo
T1.rotate( alpha, 0.0, 1.0, 0.0);         // Rotación con ángulo alfa alrededor del vector
                                             (0,1,0)t

Matrix4f T2 =      Matrix4f();              // Crear nueva matriz T2
nuevo
T2.scale( s, s, s);                         // escala uniforme por el factor s

Matrix4f T3 = nueva Matrix4f();             // Crear nueva matriz T3
```



Tierra

# Gráfico de escenas - ejemplo de

**Matriz acumulada para.**

**la tierra:** $_{ME}$ = `T1* T3;`

**el sol:** $_{MS}$ = `T1* T2;`