Integración en Variedades. Teorema de Stokes

Integration on Manifolds. Stokes' Theorem

Trabajo Fin de Grado en Matemáticas
Universidad de Málaga

Autor: Arturo Aguilera González

Área de conocimiento y/o departamento: Álgebra, Geometría y Topología

Fecha de presentación: Junio 2024

Tema: Integración en Variedades. Teorema de Stokes

Tipo: Trabajo de revisión bibliográfica

Modalidad: Individual

Número de páginas (sin incluir introducción, bibliografía ni anexos): 53

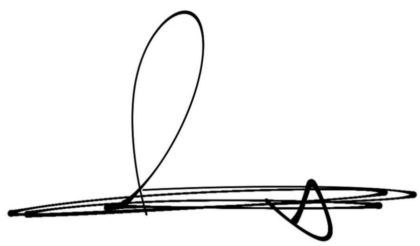
DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL TFG

D./Dña. *Arturo Aguilera González*, con DNI (NIE o pasaporte) *44668545S*, estudiante del Grado en *Matemáticas* de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga,
DECLARO:

Que he realizado el Trabajo Fin de Grado titulado "*Integración en Variedades. Teorema de Stokes*" y que lo presento para su evaluación. Dicho trabajo es original y todas las fuentes bibliográficas utilizadas para su realización han sido debidamente citadas en el mismo.

De no cumplir con este compromiso, soy consciente de que, de acuerdo con la normativa reguladora de los procesos de evaluación de los aprendizajes del estudiantado de la Universidad de Málaga de 23 de julio de 2019, esto podrá conllevar la calificación de suspenso en la asignatura, sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudiera incurrir en caso de plagio.

Para que así conste, firmo la presente en Málaga, el *9 de junio de 2024*



Fdo:..

Índice general

Integración en Variedades. Teorema de Stokes

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado estudia las formas diferenciales y cómo se integran a lo largo de variedades diferenciables, teniendo como objetivo final la comprensión y demostración del Teorema de Stokes. Al inicio de esta memoria, se introducen las variedades diferenciables, comenzando con las topológicas y extendiéndose a las diferenciables con o sin borde. Luego, se exploran los fibrados vectoriales, como el fibrado tangente, y se analiza en profundidad el fibrado cotangente y su importancia. Además, se abordan los tensores y las formas diferenciales, definiendo, sobre estos, operaciones como el producto exterior e interior y la derivada exterior. Finalmente, se discute la integración en variedades, destacando el Teorema de Stokes y su relevancia en la geometría diferencial, resaltando varias de sus aplicaciones.

Palabras clave:

Variedades diferenciables, Formas diferenciales, Integración en variedades, Teorema de Stokes, Fibrado tangente, Fibrado cotangente, Derivada exterior, Producto tensorial, Producto exterior, Covectores, Orientación en variedades, Geometría diferencial

Integration on Manifolds. Stokes' Theorem

Abstract

This Bachelor's thesis studies differential forms and their integration over smooth manifolds, with the ultimate goal of understanding and analyzing Stokes' Theorem. At the beginning of this paper, manifolds are introduced, starting with topological manifolds and extending to smooth ones, with or without boundaries. Subsequently, vector bundles are explored, focusing on the tangent bundle and providing an in-depth analysis of the cotangent bundle and its significance. Additionally, tensors and differential forms are discussed, with a focus on defining operations such as the wedge product, the interior product, and exterior derivative. Finally, the paper discusses integration on manifolds, highlighting Stokes' Theorem and its relevance in differential geometry, emphasizing several of its applications.

key words:

Smooth Manifolds, Differential Forms, Integration on Manifolds, Stokes' Theorem, Tangent Bundle, Cotangent Bundle, Exterior Derivative, Interior Product, Wedge Product, Covectors, Orientation in manifolds, Differential geometry

Introducción

Las variedades diferenciables son estructuras matemáticas fundamentales en la geometría moderna, proporcionando un marco esencial para el estudio avanzado de la geometría y el análisis. La historia de las variedades diferenciables se entrelaza con el desarrollo de la matemática a lo largo de los siglos XIX y XX, reflejando cómo las ideas abstractas pueden encontrar aplicaciones profundas en múltiples disciplinas científicas.

El concepto de variedad, como lo conocemos hoy, tiene sus raíces en el trabajo del matemático alemán Bernhard Riemann. El 10 de junio de 1854, Bernhard Riemann presentó una conferencia influyente en la Universidad de Gotinga, que, según los historiadores, solo Gauss logró comprender completamente en ese momento. Esta charla, titulada *"Sobre las hipótesis que son cimientos de la geometría"*, fue parte de los requisitos académicos que Riemann necesitaba cumplir para poder enseñar en esa universidad, los cuales incluían también una tesis doctoral y un artículo inaugural [13].

En su conferencia, Riemann introdujo conceptos revolucionarios como la métrica riemanniana, el tensor de curvatura o la curvatura seccional, y exploró la relación entre la métrica y la curvatura. En su búsqueda por entender la naturaleza del espacio, se apartó de las restricciones del espacio euclídeo tridimensional y exploró estructuras en dimensiones superiores, denominándolas como *"Mannigfaltigkeiten"* (variedades en alemán). Aun sin llegar a definir nada de manera precisa, estas estructuras establecieron las bases para lo que más tarde se conocería como *Geometría de Riemann*.

Los resultados presentados por el alemán en 1854 no fueron formalmente definidos ni demostrados hasta sesenta años después por matemáticos como Élie Cartan y Hermann Weyl, subrayando la profundidad y la avanzada naturaleza del pensamiento matemático de Riemann para su tiempo. Este último contribuyó al estudio de variedades con su introducción formal de la noción de variedades diferenciables independizando la idea de variedad ambientada en un espacio euclidídeo mayor [9]. Estas definiciones se verán a lo largo de la memoria donde, en los primeros capítulos, nos aislaremos de la métrica y finalmente, en el último capítulo, dotaremos a una variedad de una estructura algo más compleja, consistiendo, esta, en un par (M, g), donde g es una métrica que define la geometría intrínseca de la variedad.

El trabajo en variedades diferenciables se expandió considerablemente con la introducción los conceptos de fibrados y de espacios tangentes y cotangentes, lo cual facilitó la aplicación de estas ideas en la física teórica, especialmente en la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica. Sobre estas estructuras se redefinieron teorías matemáticas de gran envergadura, como puede ser el *Teorema de Stokes*, que generaliza varios teoremas del cálculo vectorial en un marco más amplio y abstracto. La demostración original realizada por George Stokes fue notoriamente compleja y enrevesada, reflejando la profundidad y la dificultad de conectar los conceptos de cálculo integral sobre superficies con la teoría de variedades. En este trabajo, abordaremos la demostración y las aplicaciones del Teorema de Stokes utilizando conceptos matemáticos desarrollados posteriormente, como son los *tensores* que se verán en el *Capítulo 3*, que proporcionan herramientas más robustas y flexibles para manejar las complejidades inherentes a estas teorías avanzadas.

El termino "tensor" origina del latín "tensus", que significa estirado o extendido, reflejando su uso inicial en la teoría de la elasticidad, una de las primeras áreas en aplicar estos conceptos de manera práctica. William Rowan Hamilton fue pionero en el uso de este término en 1846, aunque en un contexto diferente al actual. Sin embargo, el empleo en su acepción moderna no se consolidó hasta 1899, cuando Woldemar Voigt lo adoptó y Jan Arnoldus Schouten introdujo la notación y el formalismo contemporáneo para este marco teórico. Schouten también hizo aportes significativos a esta teoría mediante su uso en la relatividad general y la geometría diferencial [7].

Previo a esto, en la época victoriana, con Inglaterra embarcada en la revolución industrial, el matemático y físico irlandés llamado George Stokes, exploraba los misteriosos terrenos de la hidrodinámica y elasticidad [3]. En el año 1854, Stokes aportó una ley fundamental que llevaría su nombre: el Teorema de Stokes. Esta contribución reveló que la suma de los cambios pequeños en un campo a lo largo de un área cerrada es igual a la suma de los efectos a lo largo del borde de ese área, proporcionando un marco matemático para entender cómo se comportan los fluidos en movimiento.

Las investigaciones de Stokes no solo proporcionaron respuestas, sino que también abrieron nuevas preguntas en campos tan variados como la óptica y la física matemática, haciendo que su trabajo fuera esencial para los científicos e ingenieros de su tiempo y de futuras generaciones.

Así, en una era definida por el cambio y la innovación, George Stokes se destacó no solo por sus contribuciones teóricas sinos, también, por su capacidad para conectar estas con problemas prácticos del mundo real, mostrando cómo la matemática puede ser una herramienta poderosa para descifrar los enigmas del universo natural. Su legado, arraigado en las fundaciones de las variedades diferenciables, continúa inspirando y desafiando a quienes buscan entender la complejidad de nuestro mundo. La demostración e importancia de este gran teorema se discutirá a lo largo del último capítulo de esta memoria.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo definiremos algunos de los fundamentos esenciales que constituyen la base para nuestro estudio, aunque la mayoría hayan sido estudiados en la asignatura de *Geometría Diferencial*. Esto es debido a que, para esta memoria, la construcción de estos términos es ligeramente distinta (pero equivalenye) y que, además, en la doble titulación con Ingeniería Informática, estos conceptos no se han podido abordar en el currículo formal. Por lo tanto, se incluyen aquí para asegurar que todos los lectores tengan una base sólida y común. Para ello nos apoyaremos, levemente, en los apuntes de dicha asignatura [12], y en [5, 6, 11].

1. Variedades diferenciables

1.1. Variedades topológicas

Definición 1.1. *Supongamos que (M, τ) (o simplemente M si se sobreentiende la topología) es un espacio topológico. Entonces llamamos a M como una **variedad topológica de dimensión n** o como una **n-variedad topológica** si cumple las propiedades siguientes:*

- *M es un **espacio de Hausdorff**, es decir, dados dos puntos cualesquiera distintos p, q de M, entonces existen subconjuntos abiertos $U \ni p, V \ni q \subseteq M$ tales que $U \cap V = \emptyset$.*
- *M es **ANII** (verifica el **Segundo axioma de numerabilidad**), es decir, para la topología de M existe una base que es contable.*
- *M es **localmente euclídeo de dimensión n**, es decir, cada punto de M tiene un entorno que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Es importante remarcar que por definición **toda variedad topológica** tiene una dimensión específica y bien definida. Así, no consideraremos como variedades espacios de dimensión mixta (como la unión disjunta de un plano y una recta).

Definición 1.2. *Dados una n-variedad topológica M, un subconjunto abierto U de M, y $\varphi : U \to \widetilde{U}$ un homeomorfismo desde U a un abierto $\widetilde{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces una **carta coordenada** o **una carta** es el par (U, φ). Si $\varphi(p) = 0$ decimos que la carta **está centrada en p**.*

Definición 1.3. *Sea (U, φ) una carta, diremos que U es un* ***dominio de coordenadas*** *o un* ***entorno coordenado*** *de cada uno de sus puntos. Las funciones componentes $x^1, \ldots, x^n$ definidas por $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, se denominan* ***coordenadas locales*** *o* ***funciones coordenadas*** *en U.*

A veces escribimos cosas como "(U, φ) es una carta que contiene a p" como una forma abreviada de decir "(U, φ) es una carta cuyo dominio U contiene a p". Si deseamos enfatizar que se utilizan las coordenadas locales $x^1, \ldots, x^n$ en lugar de la función de coordenadas φ, a veces denominamos la carta por $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ o $(U, (x^i))$ y le llamamos **sistema coordenado**.

Todas las variedades comparten ciertas características fundamentales que nos ayudarán a entender mejor su estructura y comportamiento general.

Recordemos (previamente a enunciar ciertas propiedades sobre las variedades topológicas) que un espacio topológico X es:

- ***conexo*** si no existen dos subconjuntos abiertos no vacíos de X cuya intersección es vacía y cuya unión es X.
- ***arcoconexo*** si cada par de puntos en X existe un camino en X que los une.

La siguiente proposición muestra que la conectividad y la arcoconexión coinciden para las variedades.

Proposición 1.1. *Sea M una variedad topológica. Entonces M es conexo si y solo si es arcoconexo.*

Demostración. Sea M una variedad topológica conexa. Si fijamos un $p_0 \in M$ y consideramos el conjunto

$$A = \{p \in M \mid \text{existe una curva continua que une } p \text{ y } p_0\}.$$

que por definición es arcoconexo. Es claro que A es abierto, cerrado y no vacío, por tanto A tiene que ser M, es decir, M es una variedad topológica arcoconexa. La otra implicación es inmediata. □

1.2. Variedades diferenciables (sin borde)

Para dar sentido a las derivadas de funciones reales o aplicaciones entre variedades, introduciremos un nuevo tipo de variedad denominada variedad diferenciable. Recordemos primero una noción básica sobre diferenciabilidad en el espacio euclídeo:

Definición 1.4. *Dados $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos. Una aplicación continua $F : U \to V$ se dice que es* ***diferenciable*** *si todas sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Si, además, F es biyectiva y tiene inversa diferenciable, se llama* ***difeomorfismo****.*

Restringiendonos ahora a variedades topológicas, una definición intuitiva de una función diferenciable definida en una variedad M podría ser que una función real $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si la función compuesta $f \circ \varphi_1^{-1} : U_1 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido del cálculo ordinario. Sin embargo, esta condición podría no ser consistente si realizamos un cambio de carta. De hecho, si observamos su expresión en otra carta:

$$f \circ \varphi_2^{-1} = f \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) = (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}),$$

Necesitaríamos que el útimo cambio de cartas sea diferenciable. Para asegurar que esta propiedad sea independiente de la elección de la carta coordenada, construiremos un cojunto de cartas ”especiales” que denominaremos ***atlas maximal*** o ***estructura diferenciable***.

Definición 1.5. *Sea M una n-variedad topológica. Si (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas con dominios no disjuntos, la aplicación compuesta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ la llamamos* ***aplicación de transición de φ a ψ***.

Definición 1.6. *Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) se dicen* ***compatibles diferenciablemente*** *si tienen dominios de coordenadas disjuntos o si la aplicación de transición de φ a ψ es un difeomorfismo. Dado que $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, la diferenciabilidad de esta función debe interpretarse en el sentido ordinario de tener derivadas parciales continuas de todos los órdenes.*

Definición 1.7. *Definimos un* ***atlas*** *para M como una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ cuyos dominios cubren M, es decir $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Si, además, cualquier par de cartas en el atlas son compatibles diferenciablemente entre sí se llama* ***atlas diferenciable***.

Definición 1.8. *Consideremos una n-variedad topológica M. Un atlas $\mathcal{A}$ es* ***maximal*** *si es un atlas diferenciable y no está contenido en ningún atlas mayor, es decir, cualquier carta que sea compatible diferencialmente con todas las cartas de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$. Un atlas diferenciable maximal, es conocido como una* ***estructura diferenciable*** *sobre M. Cada carta (U, φ) que pertenezca a una estructura diferenciable se denomina* ***carta diferenciable*** *y la función coordenada φ,* ***función coordenada diferenciable***.

Definición 1.9. *Dados una n-variedad topológica M y un atlas maximal $\mathcal{A}$ sobre M. Decimos entonces que el par $(M, \mathcal{A})$ es una* ***n-variedad diferenciable*** *o una* ***variedad diferenciable*** *de dimensión n.*

Cuando la estructura diferenciable es conocida, la omitiremos diciendo que “M es una variedad diferenciable” o “M es una n-variedad”. Podemos proceder ahora a definir lo que es una aplicación diferenciable definida entre variedades diferenciables:

Definición 1.10. *Dadas M y N dos variedades diferenciables, y sea $F : M \to N$ cualquier aplicación continua. Decimos que F es una* ***aplicación diferenciable*** *si para cada $p \in M$, existen dos cartas diferenciables, (U, φ) y (V, ψ) con $p \in U$ y $F(p) \in V$ tal que $F(U) \subseteq V$ y la función compuesta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable. A esta última función compuesta la llamamos la* ***representación coordenada de F***.

Definición 1.11. *Si M y N son variedades diferenciables, un* ***difeomorfismo de M a N*** *es una aplicación biyectiva diferenciable $F : M \to N$ que posee una inversa diferenciable. Decimos que M y N son* ***difeomorfas*** *si existe un difeomorfismo entre ellas. Se simboliza por $M \cong N$.*

Lema 1.1. *Considérese un conjunto M para el cual tenemos una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M y funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Cada φ_α establece una correspondencia uno-a-uno entre U_α y un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ (su imagen).*

2. *Las funciones φ_α y φ_β transforman la intersección de sus respectivos dominios en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

3. *Si $U_\alpha \cap U_\beta$ es no vacío, entonces la composición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, aplicada a $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, resulta en una aplicación diferenciable hacia $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.*

4. *Existe una cantidad numerable de conjuntos U_α que recubren completamente a M.*

5. *Para cualquier par de puntos distintos p y q en M, o bien ambos pertenecen a un mismo U_α, o existen dos conjuntos disjuntos U_α y U_β tales que p pertenece a U_α y q a U_β.*

Bajo estas condiciones, M tiene una única estructura de variedad diferenciable donde cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ actúa como una carta difrenciable.

Demostración. Una demostración puede verse en [6]. □

1.3. Variedades diferenciables con borde

Ahora abordaremos un caso particular de variedades que resultará esencial para definir posteriormente ciertas aplicaciones avanzadas, como la integración en variedades. Aunque no se hayan explorado durante el grado, introduciremos en los preeliminares las *variedades diferenciales con borde*, ya que estas se apoyan en todas las definiciones de las variedades diferenciales que acabamos de dar.

Definición 1.12. *Una* ***n-variedad topológica con borde*** *(o con frontera) es un espacio Hausdorff, que verifica el segundo axioma de numerabilidad en el cual cada punto tiene un entorno homeomorfo ya sea a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o a un subconjunto abierto (relativamente) de $\mathbb{H}^n$, donde $\mathbb{H}^n$ es el* ***semiespacio superior cerrado n-dimensional*** *$\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir*

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Se usará Int $\mathbb{H}^n$ para denotar el interior ($x^n > 0$) y $\partial\mathbb{H}^n$ para denotar el borde (o la frontera) de $\mathbb{H}^n$ como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ($x^n = 0$).

Los términos de carta, dominio coordenado... son idénticos a los definidos en las variedades, incluyendo, cuando sea necesaria su distinción, las definiciones siguientes:

Definición 1.13. *Dado una carta (U, φ), se denomina* ***carta interior*** *si $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ (que incluye el caso de un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$ que no interseca a la frontera).*

Definición 1.14. *Dado una carta (U, φ), se denomina* ***carta frontera*** *si $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$ con $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$.*

Además, una carta frontera (U, φ) que cumple $\varphi(U) = B_r(x) \cap \mathbb{H}^n$ con $r > 0$ y $x \in \partial\mathbb{H}^n$, se llama una **media bola de coordenadas**. Un punto $p \in M$ se llama un **punto interior** de M si está en el dominio de alguna carta interior. Se llama un **punto de frontera** de M si está en el dominio de una carta frontera (U, φ) y $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. El conjunto de todos sus puntos de frontera se llama **borde** (o frontera) de M y se denota por ∂M. Similarmente definimos su **interior** como el conjunto de todos sus puntos interiores y se denota por *Int* M.

Teorema 1.1 (Invariancia topológica de la frontera). *Si M es una variedad topológica con borde, cada punto de M es o un punto de frontera o un punto interior, pero no ambos. Así, ∂M y $Int\ M$ son disjuntos y su unión es M.*

Demostración. Ver [6]. □

Enunciaremos una proposición muy interesante que nos servirá para la integración en variedades en el último capítulo.

Proposición 1.2. *Sea M una n-variedad topológica con borde.*

(i) El interior de M es una n-variedad topológica sin borde y un abierto de M.

(ii) ∂M es una $(n-1)$-variedad topológica sin borde y un cerrado de M.

Demostración. (i) Por definición, cada punto en $Int\ M$ está en el dominio de una carta interior (U, φ), esto es, una carta con $\varphi(U)$ abierto de $\mathbb{R}^n$. Como, por definición de carta, φ es un homeomorfismo, entonces $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U$ es un abierto, por lo que todo punto de $Int\ M$ está contenido en un entorno abierto, haciendo así a $Int\ M$ abierto. El conjunto de todas estas cartas además forman una estructura diferenciable lo que convierte a $Int\ M$ en una n-variedad diferenciable sin borde.

(ii) Por el Teorema 1.1, ∂M y Int$M$ son disjuntos y su unión es M y como hemos demostrado que $Int\ M$ es un abierto de M, entonces, $\partial M = M \setminus Int\ M$ es un cerrado. Si tomamos ahora $p \in \partial M$, sabemos entonces que existe una carta frontera (U, φ) de M que contiene a p donde $\varphi(U \cap \partial M)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Al eliminar la última coordenada, obtenemos que para cada $p \in \partial M$, existe una carta $(U \cap \partial M, \varphi_{U \cap \partial M})$ que transforma entornos abiertos de la frontera en entornos abiertos de $\mathbb{R}^{n-1}$, por lo que es una (n-1)-variedad topológica sin borde.

□

Así, considerando a la frontera como un operador, tenemos que $\partial\partial M = \emptyset$.

Para definir una estructura diferenciable en una variedad con borde, recordamos que una función definida en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$ se considera diferenciable si en un entorno de cada punto de A esta función se puede extender a otra funcion diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Particularmente, si dado un abierto $U \subseteq \mathbb{H}^n$, una función $F : U \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable si para cada $x \in U$ existe $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto con una función diferenciable $\tilde{F} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$ tal que que con $\tilde{F}|_{\tilde{U} \cap \mathbb{H}^n} = F|_{\tilde{U} \cap \mathbb{H}^n}$. La diferenciabilidad de F no depende de la extensión elegida.

Por tanto, para la definición de variedad diferenciable con borde, simplemente procedemos igual que las variedades diferenciables, es decir, definimos una **estructura diferenciable** (para una variedad topológica con borde M) como un atlas maximal diferenciable, es decir, una colección de cartas cuyo dominio cubre M con aplicaciones de transición diferenciables en el sentido anteriormente explicado. De este modo, M es denominada como una **variedad diferenciable con borde**.

Habiendo establecido entonces las bases de las variedades diferenciables, nos encontramos en posición de abordar estructuras más sofisticadas que surgen naturalmente al estudiar variedades desde una perspectiva más amplia, como son los fibrados vectoriales.

2. Fibrados vectoriales

La geometría diferencial extiende las técnicas del cálculo tradicional en variedades, fundamentándose en la aproximación lineal de estructuras por medio de espacios tangentes y derivaciones. Los fibrados vectoriales constituyen estructuras geométricas donde se asigna un espacio vectorial a cada punto de un espacio topológico o de una variedad, incluyendo variedades algebraicas. Esta asignación resulta en que la colección de todos estos espacios vectoriales forme un nuevo espacio topológico o incluso una variedad que es diferenciable.

Definición 1.15. *Un* ***fibrado vectorial (real) de rango*** k *sobre un espacio topológico* M *consiste en un espacio topológico* E *junto a una aplicación continua y sobreyectiva* $\pi : E \to M$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. ***Fibra sobre cada punto:*** *Para cada punto* $p \in M$*, la preimagen* $\pi^{-1}(p)$*, denominada la fibra en* p*, tiene la estructura de un espacio vectorial real* V *con* $\dim \pi^{-1}(p) = k$*.*

2. ***Trivialización local:*** *Para cada punto* $p \in M$*, existe un entorno abierto* $U \ni p$ *de* M *y un homeomorfismo* $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ *tal que:*
   - $\pi = pr_1 \circ \phi$ *donde* $pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ *es la proyección sobre el primer factor.*
   - *Si* $q \in U$*, la restricción de* ϕ *a la fibra* $E_q = \pi^{-1}(q)$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales desde* E_q *a* $\mathbb{R}^k$*.*

Esta estructura asegura que, localmente, el fibrado vectorial se comporta como el producto cartesiano del espacio base con un espacio vectorial estándar, aunque globalmente puede tener propiedades topológicas más complejas.

Si M y E son variedades diferenciables, con o sin borde, y $\pi : E \to M$ es una aplicación diferenciable, entonces E se denomina un **fibrado vectorial diferenciable**. En este contexto, cualquier trivialización local que sea un difeomorfismo se conoce como una **trivialización local diferenciable**.

El espacio E se denomina **espacio total** del fibrado, el espacio topológico M es la **base** del fibrado y la aplicación π es llamada la **proyección** del fibrado. Hay veces que omitiremos parte de la notación diciendo simplemente que "E es un fibrado vectorial sobre M" o que "$\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial".

Si existe una trivialización local de E sobre todo M (llamada **trivialización global del fibrado**), entonces E se considera un **fibrado trivial**. En este caso, E es homeomorfo al espacio producto $M \times \mathbb{R}^k$. Si $E \to M$ es un fibrado vectorial diferenciable que admite una trivialización global diferenciable, entonces se dice que E es **diferenciablemente trivial**.

Secciones de fibrados vectoriales

Definición 1.16. *Dado un fibrado vectorial* $\pi : E \to M$*. Una* ***sección*** *de* E *es una función continua* $\sigma : M \to E$ *que satisface* $\pi(\sigma(p)) = p$ *para todo* p *en* M*, significando* *que σ es una función que "levanta" cada punto de M a su fibra en E de manera continua cumpliendo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "id_M"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Más generalmente, una **sección local** de E es una función continua $\sigma : U \to E$ definida en algún subconjunto abierto U de M y que satisface $\pi(\sigma(p)) = p$ para todo p en U. A veces, a una sección definida en toda la M a veces se denomina **sección global**.

Si, además, estas últimas funciones son diferenciables desde su dominio hasta E, entonces las denominamos **secciones diferenciables (locales o globales)**.

Después de explorar los conceptos fundamentales de los fibrados vectoriales, estamos listos para hablar del fibrado tangente.

3. Fibrado tangente

El concepto de *fibrado tangente* surge naturalmente al examinar las propiedades de las variedades diferenciables. Cada punto en una variedad tiene asociado un conjunto de vectores tangentes, que juntos forman lo que conocemos como el espacio tangente en ese punto. Al considerar todos estos espacios tangentes para cada punto de la variedad, construimos lo que se denomina el fibrado tangente.

El fibrado tangente no solo agrupa todos los espacios tangentes, sino que también se configura como una variedad diferenciable en sí misma. Además veremos que para cualquier variedad, la dimensión de su fibrado tangente es exactamente el doble de la dimensión de la variedad original.

Vamos a explorar estos temas con mayor detalle, para entender mejor su importancia y aplicaciones.

3.1. Espacio Tangente

Definición 1.17. *Sea M una variedad diferenciable con o sin borde, y sea p un punto de M. Una función lineal $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se llama una **derivación en p** si cumple que*

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \quad \text{para todas } f, g \in C^\infty(M).$$

Definición 1.18. *El conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(M)$ en p, denotado por T_pM, es un espacio vectorial llamado el **espacio tangente a M en p**. Un elemento de T_pM se llama un **vector tangente en** p.*

Lema 1.2. *Sea M una variedad diferenciable con o sin borde, $p \in M$, $v \in T_pM$, y $f, g \in C^\infty(M)$.*

(a) Si f es una función constante, entonces $vf = 0$.

(b) Si $f(p) = g(p) = 0$, entonces $v(fg) = 0$.

Demostración. Para demostrar (a) basta con demostrar que se cumple para la función constante $f_1(x) = 1$ ya que, si esto es cierto, entonces con $f(x) = c$ implicaría $wf = w(cf_1) = cwf_1 = 0$ por linealidad. Vamos a demostrarlo entonces para f_1.

Por la regla del producto tenemos

$$wf_1 = w(f_1 f_1) = f_1(a)wf_1 + f_1(a)wf_1 = 2wf_1,$$

lo cual implica que

$$wf_1 - 2wf_1 = 0 \iff -wf_1 = 0 \iff wf_1 = 0$$

.

Del mismo modo, (b) se sigue de la regla del producto:

$$w(fg) = f(a)wg + g(a)wf = 0 + 0 = 0.$$

□

Si $M = \mathbb{R}^n$ podemos dar una base para este espacio vectorial

Lema 1.3. *Sea $a \in \mathbb{R}^n$, las derivaciones*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_a,$$

dadas por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

forman una base para el espacio $T_a\mathbb{R}^n$, teniendo dimensión n

Demostración. Véase [6]. □

3.2. Diferencial de una aplicación diferenciable

Definición 1.19. *Sea $F : M \to N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables. Si $p \in M$, podemos definir el* ***diferencial de F en p*** *como*

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N.$$

Para cada $v \in T_pM$ actúa en $f \in C^\infty(N)$ de acuerdo con la regla

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F).$$

Si $f \in C^\infty(N)$, entonces $f \circ F \in C^\infty(M)$, así que $v(f \circ F)$ tiene sentido. El operador $dF_p(v)$ es lineal porque v lo es haciendo de $F(p)$ una derivación ya que dados $f_1, f_2 \in C^\infty(N)$:

$$\begin{aligned} dF_p(v)(f_1 f_2) &= v((f_1 f_2) \circ F) = v((f_1 \circ F)(f_2 \circ F)) = \\ &= f_1(F(p))v(f_2 \circ F) + f_2(F(p))v(f_1 \circ F) \\ &= f_1(F(p))dF_p(v)(f_2) + f_2(F(p))dF_p(v)(f_1). \end{aligned}$$

Proposición 1.3. *Dadas M, N, y O variedades diferenciables, con $F : M \to N$ y $G : N \to O$ funciones diferenciables. Sea $p \in M$:*

(i) $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *es lineal.*

(ii) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{G(F(p))}O$.

(iii) $d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.

(iv) Si, además, F *es un difeomorfismo, entonces* $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *es un isomorfismo, y* $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Demostración. Ver [6]. □

Ahora enunciaremos una proposición que no demostraremos pero nos servirá para averiguar la dimensión del Espacio Tangente en un punto de una n-variedad diferenciable.

Proposición 1.4. *Sea* U *un subconjunto abierto de una variedad diferenciable* M*, y sea* $\iota : U \to M$ *la inclusión. El diferencial* $d\iota_p : T_pU \to T_pM$ *es un isomorfismo definido para cada* $p \in U$.

Veamos ahora que la dimensión del espacio tangente en un punto de una n-variedad diferenciable es justamente n.

Proposición 1.5 (Dimensión del Espacio Tangente)**.** *Si* M *es una variedad diferenciable sin borde de dimensión* n*, entonces para cada* $p \in M$*, el espacio tangente* T_pM *es un espacio vectorial de dimensión* n.

Demostración. Dado $p \in M$, sea (U, ϕ) una carta de coordenadas diferenciable que contiene a p. Debido a que ϕ es un difeomorfismo de U a un subconjunto abierto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, se sigue de la Proposición 1.3*(iv)* que $d\phi_p$ es un isomorfismo de T_pU a $T_{\phi(p)}\tilde{U}$. Dado que la Proposición 1.4 garantiza que $T_pM \cong T_pU$ y $T_{\phi(p)}\tilde{U} \cong T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$, se sigue que $\dim T_pM = \dim T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n = n$. □

Aunque este teorema solo demuestre la dimensión del espacio tangente en variedades sin borde, el resultado es idéntico en las variedades con borde (se puede encontrar una demostración en [6]). Dado entonces M una variedad diferenciable con o sin borde y $p \in M$, vamos a definir una base para T_pM. Sea (U, φ) con $U \ni p$, φ es un difeomorfismo, por tanto obtenemos una base para T_pM dada por el isomorfismo $d\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p}\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (d\varphi_p)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) = d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right),$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Actuando para cada $f \in C^\infty(U)$ de la siguiente forma

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) = \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

Si no queremos especificar la carta sobre la que se calcula, pondremos simplemente $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

3.3. El fibrado tangente

Procedemos ahora a definir el concepto principal de esta sección considerando el conjunto de todos los vectores tangentes en todos los puntos de una variedad .

Definición 1.20. *Dada una variedad diferenciable M con o sin borde, definimos* ***el fibrado tangente de M****, denotado por TM, como la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M, es decir*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

Usualmente escribimos un elemento de esta unión disjunta como un par ordenado (p, v), con $p \in M$ y $v \in T_pM$. El fibrado tangente viene equipado con una **función de proyección natural** $\pi : TM \to M$, que envía cada vector en T_pM al punto p en el cual es tangente: $\pi(p, v) = p$. Una sección de este fibrado la denominamos **campo vectorial**, además si la función asociada a la sección es diferenciable entonces es un **campo vectorial diferenciable**. El conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en M lo denotaremos como $\mathfrak{X}(M)$.

Veamos ahora que esta estructura es tanto un fibrado vectorial como una nueva variedad de dimensión $2n$ donde n es la dimensión de la variedad sobre la que se construye.

Teorema 1.2 (Dimensión del fibrado tangente)**.** *Para cualquier n-variedad diferenciable diferenciable M, su fibrado tangente TM tiene una topología natural y una estructura diferenciable que lo convierten en una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Además, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.*

Demostración. Comenzamos definiendo las funciones que se convertirán en nuestros atlas diferenciables. Dado cualquier carta diferenciable (U, ϕ) para M, notamos que $\pi^{-1}(U) \subset TM$ es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en todos los puntos de U. Sea $(x^1, \ldots, x^n)$ las funciones coordenadas de ϕ, y definimos una función $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\tilde{\phi}\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Su imagen es $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, que es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. Es una biyección si nos restringimos a su imagen, porque su inversa se puede escribir explícitamente como

$$\tilde{\phi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\phi^{-1}(x^1,\ldots,x^n)}$$

Si suponemos que tenemos un par cartas diferenciables (U, ϕ) y (V, ψ) para M, y sean $(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi})$ y $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ las correspondientes cartas en TM. Los conjuntos

$$\tilde{\phi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

y

$$\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

son abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$, y la aplicación de transición $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ se puede escribir explícitamente como

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = \left(\tilde{x}^1(\mathbf{x}), \ldots, \tilde{x}^n(\mathbf{x}), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(\mathbf{x}) v^j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(\mathbf{x}) v^j \right).$$

Esta es claramente una función diferenciable.

Al elegir un recubrimiento contable $\{U_i\}$ de M por dominios coordenados diferenciables, obtenemos un recubrimiento contable de TM por dominios coordenados $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ satisfaciendo así las condiciones 1-4 del Lema 1.1. Para verificar la condición de Hausdorff (condición num.5), basta con notar que cualquier par de puntos en la misma fibra de π se encuentran en una carta, mientras que si (p, v) y (q, w) se encuentran en fibras diferentes, existen dominios coordenados diferenciables disjuntos U, V para M tales que $p \in U$ y $q \in V$, y entonces $\pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(V)$ son entornos coordenados disjuntos que contienen a (p, v) y (q, w), respectivamente. Por tanto tenemos que se cumplen las condiciones del Lema 1.1 dotando, así a TM de una 2n-variedad diferenciable.

Para ver que π es diferenciable, notamos que respecto a las cartas (U, φ) para M y $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ para TM, su representación de coordenadas es $\pi(x, v) = x$.

□

Habiendo establecido que el fibrado tangente es, efectivamente, una variedad diferenciable, el próximo paso es demostrar que también constituye un fibrado vectorial.

Teorema 1.3 (El Fibrado Tangente como Fibrado Vectorial)**.** *Sea M una n-variedad diferenciable con o sin borde, y sea TM su fibrado tangente dotado de su función de proyección estándar, su estructura natural de espacio vectorial en cada fibra, y la topología y estructura diferenciable. Entonces TM es un fibrado vectorial diferenciable de rango n sobre M.*

Demostración. Consideremos una carta local (U, φ) alrededor de p en M con funciones coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Definimos una trivialización $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\Phi(v) = (p, (v^1, \ldots, v^n))$$

donde $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ en T_pM y $\frac{\partial}{\partial x^i}$ son las bases del espacio tangente asociadas a las funciones coordenadas x^i.

Si componemos

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

entonces nos damos cuenta que es la función definida en el Teorema 1.2. Dado que esa función es un difeomorfismo y como $\phi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ también lo es, entonces la trivialización Φ lo es. Por lo tanto, Φ satisface todas las condiciones para ser una trivialización local diferenciable.

□

Al juntar los diferenciales de F en todos los puntos de M, obtenemos una aplicación globalmente definida entre los fibrados tangentes, denominada **diferencial global** o **aplicación tangente global**, y denotada por $dF : TM \to TN$. Esta es simplemente la aplicación cuya restricción a cada espacio tangente $T_pM \subseteq TM$ es dF_p. Una característica importante de la estructura diferenciable que hemos definido en TM es que convierte el diferencial de una aplicación diferenciable en una aplicación diferenciable entre fibrados tangentes.

Proposición 1.6. *Si $F : M \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces su diferencial global $dF : TM \to TN$ es una aplicación diferenciable.*

Demostración. Por la linealidad del diferencial y la definición, podemos expresar localmente dF_p en coordenadas de la siguiente forma

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}.$$

Deducimos entonces que dF tiene la siguiente representación en coordenadas en términos de coordenadas naturales para TM y TN:

$$dF(x^1,\ldots,x^n,v^1,\ldots,v^n)=\left(F^1(x),\ldots,F^n(x),\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x)v^i,\ldots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x)v^i\right)$$

que es diferenciable por serlo F. □

Definición 1.21. *Dadas M una m-variedad diferenciable y N una n-variedad diferenciable. Si $F: M \to N$ es una aplicación diferenciable con rango m (se considera entonces que $m \leq n$)en un punto $p \in M$, entonces decimos que F* ***es una inmersión en*** *p. Si F es una inmersión e p para todo $p \in M$, entonces decimos simplemente que F* ***es una inmersión****.*

Definición 1.22. *Dada una n-variedad diferenciable M. Si existe un subconjunto $S \subset M$ que es una variedad diferenciable y la inclusión $\iota: S \hookrightarrow M$ es una inmersión inyectiva entonces a S se le denomina* ***subvariedad diferenciable****. Si además S tiene como topología la inducida por M entonces se dice que S es una* ***subvariedad regular de*** *M. A la variedad M se le llama variedad ambiente.*

La diferencia de dimensiones entre una variedad diferenciable M y una subvariedad diferenciable S de M se denomina **codimensión de S en M**. Las subvariedades diferenciables que tienen codimension 1 se denominan **hipersuperficies diferenciables**.

En el estudio de las variedades, a menudo surge la necesidad de describir cómo ciertas características se mantienen consistentes a lo largo de la misma. Para demostrar esto, es esencial verificar que estas características se sostienen en cualquier punto arbitrario de la variedad. Este análisis implica hablar sobre una base para el espacio tangente en dicho punto, lo que nos lleva a definir el concepto de **referencia**. Una referencia se compone de una n-tupla ordenada de campos vectoriales $(E_1,\cdots,E_n)$ que son linealmente independientes y que juntos generan el espacio tangente. Si esta n-tupla está definida únicamente en un subconjunto abierto $U \subset M$, entonces se la denomina **referencia local**. En cambio, si se define en toda la variedad M, se le conoce como **referencia global**. Si cada campo vectorial es diferenciable, entonces se denomina **referencia diferenciable**.

Definición 1.23. *Si M es una variedad diferenciable, definimos una* ***partición diferenciable de la unidad*** *como una familia $\{\varphi_i : M \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ de funciones diferenciables, que cumplen*

1. $0 \leq \varphi_i \leq 1 \forall i \in I$,
2. *la familia $\{supp\ \varphi_i\}_{i\in I}$ es localmente finita, y*
3. *la función $\sum_{i\in I}\varphi_i$, que localmente es una suma finita por la condición anterior, es constante e igual a 1.*

Si además existe U_i tal que $supp\ \varphi_i \subset U_i$ para todo $i \in I$ decimos que está ***subordinada a un recubrimiento abierto*** *$\{U_i\}_{i\in I}$* ***de*** *M .*

Capítulo 2

Fibrado cotangente

En este breve capítulo, nos centramos, únicamente, en el estudio del fibrado cotangente, una estructura crucial que surge al considerar los espacios cotangentes en cada punto de una variedad diferenciable. Exploraremos cómo los covectores tangentes, que son funciones lineales sobre los espacios tangentes, forman estos espacios cotangentes y cómo su unión constituye un fibrado vectorial, el fibrado cotangente. Una vez terminado este capítulo, adquiriremos una comprensión fundamental de las 1-formas diferenciales, esencial para abordar los fibrados tensoriales y explorar formas diferenciales de grados superiores. El desarrollo de este capítulo se basará en [6].

1. Covectores y espacio dual

Definición 2.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita (se considera un espacio vectorial real). Un* ***covector en*** V *es una función lineal de valor real sobre V, es decir, una aplicación lineal $\omega : V \to \mathbb{R}$.*

Definición 2.2. *Denotamos al espacio de todos los covectores en V, como V^*. Este nuevo espacio es un espacio vectorial real bajo las operaciones obvias de adición punto a punto y multiplicación por escalares. A este espacio vectorial se le denomina como* ***espacio dual de*** V.

Proposición 2.1. *Dada cualquier base $(E_1, \dots, E_n)$ para un espacio vectorial (de dimensión finita) V y sean $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ los covectores definidos por*

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j,$$

donde δ^i_j es el símbolo de Kronecker, definido como:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Entonces, $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ es una base para V^*, denominada la base dual a (E_j), y por lo tanto, $\dim V^* = \dim V$.

Demostración. Véase [10]. □

Por ejemplo, podemos aplicar esto a la base canónica estándar $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La base dual es denotada por $(e^1, \ldots, e^n)$ (con superíndices), y se llama la **base dual canónica estándar**. Estos covectores base son las funciones lineales en $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$e^i(v) = e^i(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i) = v^i.$$

En otras palabras, e^i es la función lineal que selecciona el i-ésimo componente de un vector. En notación matricial, una función lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ está representada por una matriz de 1 por n, llamada **matriz fila**. Por lo tanto, los covectores base también pueden considerarse como los funcionales lineales representados por las matrices fila

$$e^1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e^n = (0, \ldots, 0, 1).$$

En general, si (E_j) es una base para V y (ε^i) es su base dual, entonces para cualquier vector $v = \sum_{i=1}^{n} v^j E_j \in V$, tenemos

$$\varepsilon^i(v) = \sum_{i=1}^{n} v^j \varepsilon^i(E_j) = \sum_{i=1}^{n} v^j \delta^i_j = v^i.$$

Así, como en el caso de $\mathbb{R}^n$, el i-ésimo covector base ε^i selecciona el i-ésimo componente de un vector respecto a la base (E_j). Más generalmente, la proposición anterior muestra que podemos expresar cualquier covector $\omega \in V^*$ en términos de la base dual como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varepsilon^i,$$

donde los componentes son determinados por $\omega_i = \omega(E_i)$. La acción de ω sobre un vector $v = \sum_{j=1}^{n} v^j E_j$ es

$$\omega(v) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i v^i.$$

1.1. Covectores tangentes en variedades

Vamos a recordar el concepto de aplicación dual que nos ayudará a trabajar con lo que conocemos como espacio cotangente.

Definición 2.3. *Supongamos ahora que V y W son dos espacios vectoriales y $A : V \to W$ es una aplicación lineal. Recordamos que la **aplicación dual o transpuesta** de A era definida como $A^* : W^* \to V^*$ donde*

$$(A^*\omega)(v) = \omega(A(v))$$

para $\omega \in W^*$ y $v \in V$. Además esta aplicación dual cumplía las siguientes propiedades:

(i) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

(ii) $(\mathrm{Id}_V)^* : V^* \to V^*$ *es la función identidad de V^*.*

Definición 2.4. *Ahora consideremos M como una variedad diferenciable con o sin borde. Dado $p \in M$, definimos el **espacio cotangente en** p como el espacio dual a T_pM. Lo denotamos de la siguiente forma:*

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

*Los elementos de T_p^*M se llaman **vectores cotangentes, covectores tangentes en** p, o simplemente **covectores en** p.*

Definición 2.5. *Para cualquier variedad diferenciable M con o sin borde, la unión disjunta*

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

*se llama el **fibrado cotangente de** M. Posee una proyección natural $\pi : T^*M \to M$ que envía $\omega \in T_p^*M$ a $p \in M$.*

Una sección (local o global) de T^*M se denomina como **campo covectorial** o una **1-forma** (el sentido de la última terminología se va a ver en el próximo capítulo). Al igual que para campos vectoriales, cuando hablamos de secciones asumimos que son continuas, por lo que si queremos enfatizar que un campo covectorial no lo es, se especificará. La definición de **campo covectorial diferenciable** se hace con el significado obvio.

Definición 2.6. *Sea M una variedad diferenciable con o sin borde y sea $f : M \to \mathbb{R}$ un función diferenciable. Definimos un campo covectorial df, llamado el **diferencial de** f, como*

$$df_p(v) = vf$$

con $v \in T_pM$.

Dadas unas coordenadas locales diferenciables (x^i) en un subconjunto abierto U de M y dado $p \in U$, sabemos entonces que la base de coordenadas $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)$ de T_pM proporciona una base dual para T_p^*M. Es fácil comprobar que esta base dual es realmente la formada por la evaluación de cada campo covectorial dx^i en p, ya que por definición de diferencial, dados i, j, podemos escribir

$$dx_p^j\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j$$

por lo que cumple la definición de ser base dual de $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)$.

Por lo tanto, para cualesquiera coordenadas locales diferenciables (x^i) en un subconjunto abierto $U \subseteq M$, para cada $p \in U$ tenemos la base para T_p^*M dual a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)$ dada por $(dx^i|_p)$, definiendo n funciones $dx^1, \ldots, dx^n : U \to T^*M$, llamados **campos covectoriales coordenados**. Así, todo covector $\omega \in T_p^*M$ puede escribirse únicamente como $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i|_p$, donde

$$\omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right).$$

Supongamos ahora que $(\tilde{x}^j)$ es otro conjunto de coordenadas diferenciables cuyo dominio contiene p, y dejemos que $(d\tilde{x}^j|_p)$ denote la base dual a $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\big|_p\right)$ para T_p^*M . Podemos calcular los componentes del mismo covector ω con respecto al nuevo sistema de coordenadas de la siguiente manera. Sabemos que los campos vectoriales coordenados se transforman de la siguiente forma:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_p .$$

(Esta notación usa p para denotar tanto un punto en M como su representación de coordenadas según corresponda). Al escribir ω en ambos sistemas como $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i|_p = \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_j d\tilde{x}^j|_p$, podemos usar la ecuación anterior para calcular los componentes ω_i en términos de $\tilde{\omega}_j$:

$$\omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \omega\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\tilde{\omega}_j. \tag{2.1}$$

Por tanto, si generalizamos a ω como un campo covectorial (donde actua como covector en cada punto como ω_p), este puede escribirse en términos de los campos covectoriales coordenados (dx^i) de la forma $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ para n funciones $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ llamadas **funciones componentes de** ω que se caracterizan por

$$\omega_i(p) = \omega_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right).$$

Proposición 2.2. *Sea M una variedad diferenciable con o sin borde, y sea $\omega : M \to T^*M$ un campo covectorial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) ω es diferenciable.

(b) En cada carta coordenadas diferenciable, las funciones componentes de ω son diferenciables.

(c) Cada punto de M está contenido en alguna carta coordenada donde ω tiene funciones componentes diferenciables.

(d) Para cada campo vectorial diferenciable X en $\mathfrak{X}(M)$, la función $\omega(X)$ es diferenciable en M.

(e) Para cada subconjunto abierto $U \subset M$ y cada campo vectorial diferenciable X en U, la función $\omega(X) : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en U.

Este resultado, aunque solo se ha enunciado para el fibrado cotangente, es cierto para cualquier sección de un fibrado vectorial real.

Proposición 2.3. *El diferencial de una función diferenciable es un campo covectorial diferenciable.*

Demostración. Es casi inmediato, ya que para cada campo vectorial diferenciable X en M tenemos que $df(X)$ es diferenciable ya que $df(X) = Xf$ y f lo es. Por tanto, por la Proposición 2.2(d), tenemos que esto es equivalente a que df sea diferenciable. $\square$

Proposición 2.4 (Propiedades del Diferencial)**.** *Dado M una variedad diferenciable con o sin borde, y sean $f, g \in C^\infty(M)$.*

(a) Si a y b son constantes, entonces $d(af + bg) = a\,df + b\,dg$.

(b) $d(fg) = f\,dg + g\,df$.

(c) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$ en el conjunto donde $g \neq 0$.

(d) Si $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo que cumple $Im\, f \subseteq J$, y $h : J \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces se cumple que $d(h \circ f) = (h' \circ f)\,df$.

(e) Para toda función f constante, entonces $df = 0$.

Demostración. Ver [6]. □

Al igual que con el fibrado tangente, vamos a ver que el fibrado cotangente es también un fibrado vectorial, para ello, vamos a enunciar previamente un lema que, aunque no demostraremos en este documento, nos servirá de apoyo en la demostración de esta afirmación:

Lema 2.1 (Lema de carta de fibrado vectorial)**.** *Si M una variedad diferenciable con o sin borde. Supongamos que para cada $p \in M$ se nos da un espacio vectorial real de dimensión fija k denotado como E_p. Sea $E = \bigsqcup_{p \in M} E_p$ y sea $\pi : E \to M$ la función que asigna cada elemento de E_p al punto p. Supongamos que tenemos los siguientes datos:*

(i) Una colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de cubren M.

(ii) Aplicaciones biyectivas $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ que forman un isomorfismo de espacios vecctoriales de E_p a $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ cuando nos restringimos a cada E_p.

(iii) Dados $\alpha, \beta \in A$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una funcion diferenciable $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ (donde $GL(k, \mathbb{R})$ representa el grupo lineal general) tal que la función $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ de $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ a sí mismo sea

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v).$$

Entonces E tiene una topología y una estructura diferenciable que la convierte en una variedad diferenciable con o sin borde y en un fibrado vectorial diferenciable de rango k sobre M, con π como proyección y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ como trivializaciones locales diferenciables.

Demostración. Ver [6]. □

Proposición 2.5 (El Fibrado Cotangente como Fibrado Vectorial)**.** *Si M es una variedad diferenciable de dimensión n con o sin borde, entonces el fibrado cotangente T^*M, con la estructura definida anteriormente posee una topología y una estructura diferenciable que lo convierten en un fibrado vectorial de rango n sobre M.*

Demostración. Procederemos igual que en el fibrado tangente. Dado una carta diferenciable (U, ϕ) de M, con funciones coordenadas (x^i), definimos $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi(\sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i|_p) = (p, (\xi_1, \ldots, \xi_n)),$$

donde dx^i es el i-ésimo campo covectorial coordenado asociado a (x^i). Supongamos $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ es otra carta diferenciable con funciones coordenadas $(\tilde{x}^j)$, y sea $\tilde{\Phi} : \pi^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ definida de manera análoga a Φ. Sobre $\pi^{-1}(U \cap \tilde{U})$, se sigue de (2.1) que

$$\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}(p, (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)) = \left(p, \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^1}(p)\tilde{\xi}_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^n}(p)\tilde{\xi}_j \right) \right).$$

La función $(\partial \tilde{x}^j / \partial x^i)$ es diferenciable por lo que se sigue del Lema 2.1 que T^*M tiene una estructura diferenciable que lo convierte en un fibrado vectorial diferenciable para el cual los mapas Φ son trivializaciones locales diferenciables.

□

Pullback de campos covectoriales

Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables con o sin borde. Para cada $p \in M$ la derivada $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ produce una aplicación lineal dual

$$dF_p^* : T_{F(p)}^*N \to T_p^*M,$$

denominada el **pullback puntual por F en p**. Con la definición conocida de aplicación dual vemos que dF_p^* se caracteriza por

$$dF_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_p(v)),$$

para $\omega \in T_{F(p)}^*N$ y $v \in T_pM$.

Definición 2.7. *Dada una aplicación diferenciable $F : M \to N$ y un campo covectorial ω en N, definimos un campo covectorial $F^*\omega$ en M, llamado el **pullback de ω por F**, por*

$$(F^*\omega)_p = dF_p^*(\omega_{F(p)}).$$

Actúa sobre un vector v en T_pM mediante

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}(dF_p(v)).$$

Por definición, no sabemos si $F^*\omega$ es un campo covectorial continuo, aunque demostraremos a continuación que es continuo y, además, es diferenciable cuando ω es diferenciable. Antes de hacerlo, vamos a probar lo siguiente:

Proposición 2.6. *Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables con o sin borde. Supongamos $g : N \to \mathbb{R}$ continua, y ω un campo covectorial en N. Entonces*

$$F^*(n\omega) = (g \circ F)F^*\omega. \tag{2.2}$$

Si además g es diferenciable, entonces

$$F^*dg = d(g \circ F). \tag{2.3}$$

Demostración. Para probar (2.2) vemos que

$$\begin{aligned}
(F^*(g\omega))_p &= dF_p^*\left((u\omega)_{F(p)}\right) \\
&= dF_p^*\left(g(F(p))\omega_{F(p)}\right) \\
&= g(F(p))dF_p^*\left(\omega_{F(p)}\right) \\
&= g(F(p))\left(F^*\omega\right)_p \\
&= ((g\circ F)F^*\omega)_p
\end{aligned}$$

Para (2.3), tomamos cualquier $v \in T_pM$ y vemos que

$$\begin{aligned}
(F^*dg)_p\,(v) &= \left(dF_p^*\left(dg_{F(p)}\right)\right)(v) \\
&= dg_{F(p)}\left(dF_p(v)\right) \\
&= dF_p(v)g \\
&= v(g\circ F) \\
&= d(g\circ F)_p(v)
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.7. *Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables (con o sin borde) y sea ω un campo covectorial en N. Entonces $F^*\omega$ es un campo covectorial continuo en M. Si ω es diferenciable, entonces $F^*\omega$ también es diferenciable.*

Demostración. Sea $p \in M$ arbitrario, y sean (y^j) coordenadas diferenciables para N en un entorno V de $F(p)$. Sea $U = F^{-1}(V)$, que es un entorno de p. Escribiendo ω en coordenadas como $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j\, dy^j$ para funciones continuas ω_j en V y utilizando la proposición anterior dos veces (aplicada a $F|_U$), tenemos el siguiente cálculo en U:

$$F^*\omega = F^*(\sum_{j=1}^n \omega_j\, dy^j) = \sum_{j=1}^n(\omega_j\circ F)F^*dy^j = \sum_{j=1}^n(\omega_j\circ F)d(y^j\circ F).$$

Esta expresión es continua, y es diferenciable si ω es diferenciable.

□

Tras establecer una comprensión sólida del concepto de covector y del fibrado cotangente T^*M de una variedad diferenciable M, estamos ahora en una posición ideal para introducir el concepto de tensor y forma diferencial, explorarando operaciones sobre ellas como el producto exterior, la derivada exterior...

Capítulo 3

Tensores y formas diferenciales

En este capítulo vamos a introducir los conceptos de tensores y formas diferenciales, herramientas matemáticas que nos permitirán desarrollar en el próximo capítulo la teoría de integración sobre variedades. Para este capítulo nos vamos a basar principalmente en [8] y [6].

1. Producto tensorial

Definición 3.1. *Supongamos que $V_1, \dots, V_k$, y W son espacios vectoriales. Una aplicación $F : V_1 \times \dots \times V_k \to W$ se dice que es* ***multilineal*** *si es lineal como función de cada variable por separado cuando las otras se mantienen fijas, es decir, para cada i,*

$$F(v_1, \dots, av_i + a'v_i', \dots, v_k) = aF(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + a'F(v_1, \dots, v_i', \dots, v_k).$$

(Una función multilineal de una variable es simplemente una función lineal, y una función multilineal de dos variables se llama generalmente ***bilineal****.)*

Denotaremos $L(V_1, \dots, V_k; W)$ como el conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $V_1 \times \dots \times V_k$ a W. Es un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de adición puntual y multiplicación escalar:

$$(F + F')(v_1, \dots, v_k) = F(v_1, \dots, v_k) + F'(v_1, \dots, v_k),$$

$$(aF)(v_1, \dots, v_k) = a(F(v_1, \dots, v_k)).$$

Consideremos ahora V_i con $i \in \{1, \cdots, k\}$ y W_j con $j \in \{1, \cdots, l\}$ espacios vectoriales reales, y supongamos que $F_1 \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ y $F_2 \in L(W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$. Definimos una función

$$F_1 \otimes F_2 : V_1 \times \dots \times V_k \times W_1 \times \dots \times W_l \to \mathbb{R}$$

por

$$F_1 \otimes F_2(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = F_1(v_1, \dots, v_k)F_2(w_1, \dots, w_l). \tag{3.1}$$

Entonces $F_1 \otimes F_2(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$ depende linealmente de cada argumento v_i o w_j por separado (por la multilinealidad de F_1 y F_2), por lo tanto $F_1 \otimes F_2 \in L(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$, y lo llamamos el **producto tensorial** de F_1 y F_2. Este producto es bilineal y asociativo (por serlo la multiplicación ordinaria), por tanto podremos escribir el producto tensorial de 3 o más funciones multilineales sin paréntesis, es decir, si $\omega^j \in V_j^*$ para $j = 1, \dots, k$, entonces $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k$ pertenece a $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ y es la función multilineal dada por

$$\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \omega^1(v_1) \dots \omega^k(v_k). \tag{3.2}$$

Proposición 3.1 (Una base para el espacio de funciones multilineales)**.** *Sean k espacios vectoriales reales V_i ($i \in \{1, \cdots, k\}$) de dimensiones n_i. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea $(E_1^{(j)}, \ldots, E_{n_j}^{(j)})$ una base para V_j, y sea $(\varepsilon^1_{(j)}, \ldots, \varepsilon^{n_j}_{(j)})$ la base dual correspondiente para V_j^*. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{B} = \{\varepsilon^{i_1}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}_{(k)} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq n_k\}$$

forma una base para $L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$, y así dim $L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R}) = n_1 \cdots n_k$.

Una función $f : S \to \mathbb{R}$ definida en cualquier conjunto S que cumple $f(s) = 0$ para todos excepto un número finito de $s \in S$ se denomina una **combinación lineal formal de elementos de** S. Al conjunto de todas estas funciones S le llamamos el **espacio vectorial libre (real) sobre** S y lo denotamos por $\mathcal{F}(S)$. Bajo la adición puntual y la multiplicación escalar, $\mathcal{F}(S)$ se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además una propiedad característica de este espacio, es que cualquier aplicación definida en un espacio S se extiende de manera única a una aplicación lineal definida en $\mathcal{F}(S)$ (una demostración de esto, aun formando parte de un documento no publicado formalmente, puede verse en [4]).

Ahora consideremos $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales reales. Si $v_i \in V_i$ para $i = 1, \ldots, k$ entonces $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales formales finitas de k-tuplas $(v_1, \ldots, v_k)$. LLamemos ahora $\mathcal{R}$ al subespacio de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k)$ generado por aquellos elementos de las siguientes formas:

$$\begin{gathered}(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) - a\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)\\ (v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) - (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) - (v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k)\end{gathered} \tag{3.3}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, k\}$ y $v_j, v_j' \in V_j$.

Definición 3.2. *Denotamos por $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ como el siguiente espacio vectorial cociente:*

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k = \mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k)/\mathcal{R}.$$

Este espacio vectorial lo definimos como ***producto tensorial de los espacios*** *$V_1, \ldots, V_k$. Si tomamos la proyección natural $\Pi : \mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, entonces la clase de equivalencia de un elemento $(v_1, \ldots, v_k)$ en $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ se denota por*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = \Pi(v_1, \ldots, v_k), \tag{3.4}$$

y se llama el ***producto tensorial (abstracto)*** *de $v_1, \ldots, v_k$.*

Proposición 3.2 (Propiedad Característica del Producto Tensorial de Espacios)**.** *Sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales reales de dimensión finita. Si $A : V_1 \times \cdots \times V_k \to X$ es cualquier aplicación multilineal en un espacio vectorial X, entonces existe una única aplicación lineal $\widetilde{A} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \arrow[ur, dashed, "\widetilde{A}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

donde π es la aplicación $\pi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$.

Demostración. Primero vemos que cualquier aplicación $A : V_1 \times \cdots \times V_k \to X$ se extiende de manera única a una aplicación lineal $\overline{A} : \mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) \to X$ por la propiedad característica del espacio vectorial libre. Esta aplicación está caracterizada por el hecho de que $\overline{A}(v_1, \ldots, v_k) = A(v_1, \ldots, v_k)$ siempre que $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k \subseteq \mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k)$. El hecho de que A sea multilineal implica precisamente que el subespacio $\mathcal{R}$ está contenido en el núcleo de $\overline{A}$, porque

$$\overline{A}(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) = A(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) = aA(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = a\overline{A}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k),$$

con un cálculo similar para la otra expresión en (3.3). Por lo tanto, $\overline{A}$ desciende a una aplicación lineal $\widetilde{A} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k = \mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k)/\mathcal{R} \to X$ satisfaciendo $\widetilde{A} \circ \pi = \overline{A}$. Dado que π es igual a la inclusión $V_1 \times \cdots \times V_k \hookrightarrow \mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k)$ seguido por Π, esto implica $\widetilde{A} \circ \pi = A$, que es (3.5). La unicidad proviene del hecho de que cualquier elemento de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ puede ser escrito como una combinación lineal de elementos de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, y $\widetilde{A}$ está únicamente determinada en tales elementos por

$$\widetilde{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \overline{A}(v_1, \ldots, v_k) = A(v_1, \ldots, v_k).$$

□

Proposición 3.3 (Una Base para el Producto Tensorial de Espacios)**.** *Supongamos que $V_1, \ldots, V_k$ son espacios vectoriales reales de dimensiones $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente. Para cada $j = 1, \ldots, k$, supongamos que $\{E_1^{(j)}, \ldots, E_{n_j}^{(j)}\}$ es una base para V_j. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{E} = \{E_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}^{(k)} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq n_k\}$$

es una base para $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, que por lo tanto tiene dimensión igual a $n_1 \cdots n_k$.

Demostración. Los elementos de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ generan el espacio del producto tensorial por definición, por lo tanto si representamos cada v_i en términos de la base del espacio V_i, entonces vemos que $\mathcal{E}$ genera $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$.

Para probar que $\mathcal{E}$ es linealmente independiente, supongamos que alguna combinación lineal de elementos de $\mathcal{E}$ es igual a cero:

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq n_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq n_k} a^{i_1 \cdots i_k} E_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}^{(k)} = 0.$$

Para cada k-tupla ordenada de índices $(m_1, \ldots, m_k)$, defina una función multilineal $t^{m_1 \cdots m_k} : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R}$ por

$$t^{m_1 \cdots m_k}(v_1, \ldots, v_k) = \varepsilon_{(1)}^{m_1}(v_1) \cdots \varepsilon_{(k)}^{m_k}(v_k),$$

donde $\{\varepsilon_i^{(j)}\}$ es la base para V_j^* dual a $\{E_i^{(j)}\}$. Debido a que $t^{m_1 \cdots m_k}$ es multilineal, se reduce a una función lineal $\hat{t}^{m_1 \cdots m_k} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to \mathbb{R}$ por la propiedad característica del producto tensorial. Entonces sigue que

$$0 = \hat{t}^{m_1 \cdots m_k}(a^{i_1 \cdots i_k} E_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}^{(k)}) = a^{i_1 \cdots i_k} t^{m_1 \cdots m_k}(E_{i_1}^{(1)}, \ldots, E_{i_k}^{(k)}) = a^{m_1 \cdots m_k},$$

lo que muestra que $\mathcal{E}$ es linealmente independiente. □

Proposición 3.4 (Asociatividad de los Espacios de Producto Tensorial)**.** *Supongamos que V_1, V_2, V_3 son espacios vectoriales reales de dimensión finita. Entonces, existen isomorfismos únicos*

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

bajo los cuales los elementos de las formas $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$, $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$, y $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ corresponden a los mismos.

Demostración. Vamos a construir el isomorfismo $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$; el otro se construye de manera similar. La aplicación $\alpha : V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ definida por

$$\alpha(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

es obviamente multilineal y, por la propiedad característica del producto tensorial, se reduce de manera única a una aplicación lineal $\alpha' : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ satisfaciendo

$$\alpha'(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

para todos $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, y $v_3 \in V_3$. Debido a que $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ está generado por elementos de la forma $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$, α' es sobreyectivo, y por lo tanto es un isomorfismo por razones dimensionales. Es claramente el único isomorfismo, porque cualquier otro tendría que coincidir con α' en el conjunto de todos los elementos de la forma $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$, que genera $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. □

Proposición 3.5 (Producto Tensorial Abstracto vs. Concreto)**.** *Si $V_1, \ldots, V_k$ son espacios vectoriales de dimensión finita, existe un isomorfismo canónico*

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \cong L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R}),$$

bajo el cual el producto tensorial abstracto definido por (3.4) es el producto de covectores definido por (3.2).

Demostración. Primero, definimos una aplicación $\Phi : V_1^* \times \cdots \times V_k^* \to L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ por

$$\Phi(\omega^1, \ldots, \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k).$$

(No hay sumatoria implícita en esta fórmula). La expresión en el lado derecho depende linealmente en cada v_i, así que $\Phi(\omega^1, \ldots, \omega^k)$ es realmente un elemento del espacio $L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$. Es fácil verificar que Φ es multilineal como función de $\omega^1, \ldots, \omega^k$, así que por la propiedad característica desciende de manera única a una aplicación lineal $\widetilde{\Phi} : V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \to L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$, que satisface

$$\widetilde{\Phi}(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k).$$

Sigue inmediatamente de la definición que $\widetilde{\Phi}$ lleva productos tensoriales abstractos de covectores. También toma la base de $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ dada por la Proposición (3.3) para la base de $L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ de la Proposición 3.1, por lo tanto es un isomorfismo. (Aunque usamos bases para probar que $\widetilde{\Phi}$ es un isomorfismo, $\widetilde{\Phi}$ mismo está definido canónicamente sin referencia a ninguna base.) □

□

Definición 3.3. *Dado V un espacio vectorial real de dimensión finita. Si $k \in \mathbb{Z}^+$, definimos un* ***k-tensor covariante en*** *V como un elemento del k-veces producto tensorial $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$, que normalmente consideramos como un funcional multilineal de valor real sobre k elementos de V:*

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \to \mathbb{R}.$$

Al entero k lo denominamos como **rango de** α. Un 0-tensor, es una función de valor real que no depende multilinealmente de ningún vector, o lo que es lo mismo, un número real. El espacio vectorial formado por todos los k-tensores covariantes en V se denota como

$$T^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k \text{ copias}}.$$

Toda función lineal $\omega : V \to \mathbb{R}$ es claramente multilineal, entonces la definición de un 1-tensor covariante coincide con la de covector dada en el *Capítulo 2* haciendo $T^1(V^*) = V^*$. Además, para cualquier espacio vectorial real de dimensión finita V, definimos el espacio de **tensores contravariantes en** V **de rango** k como el espacio vectorial

$$T^k(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ copias}}.$$

Más generalmente, para cualesquiera enteros no negativos k, l, definimos el espacio de **tensores mixtos en** V **de tipo** (k, l) como

$$T^{(k,l)}(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ copias}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ copias}}$$

también denotado como $T^k_l(V)$.

Estas dos últimas definiciones son únicamente ilustrativas, ya que en este estudio nos centraremos exclusivamente en tensores covariantes.

2. Tensores antisimétricos

Continuamos asumiendo que V es un espacio vectorial real de dimensión finita. Decimos que un k-tensor covariante en V es **alternante** o **antisimétrico** si su signo cambia cada vez que dos de sus argumentos se intercambian. Esto significa que para todos los vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$ y cada par distinto i, j cumple que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

Los k**-tensores covariantes antisimétricos** también se conocen como k**-covectores**, **formas exteriores multicovectores**. Esta propiedad hace que los tensores antisimétricos se puedan caracterizar de las siguientes fomas:

Lema 3.1. *Sea α un k-tensor covariante en un espacio vectorial de dimensión finita V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) α es antisimétrico.

(b) $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$ *para cualquier k-tupla* $(v_1, \ldots, v_k)$ *linealmente dependiente.*

(c) α *da el valor cero siempre que dos de sus argumentos sean iguales.*

Demostración. Las implicaciones $(a) \Rightarrow (c)$ y $(b) \Rightarrow (c)$ son inmediatas. Completamos la prueba mostrando que (c) implica tanto (a) como (b).

Supongamos (c). Para cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_k$:

$$0 = \alpha(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k)$$

$$= \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k)$$
$$+\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_k)$$
$$= \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

Por tanto $\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$ para cualesquiera vectores lo que implica que α es antisimétrico.

Sigamos suponiendo que se cumple (b). Si $v_1, \ldots, v_k$ es una k-tupla linealmente dependiente, entonces uno de los v_i puede expresarse como una combinación lineal de los otros. Por simplicidad supongamos que es el último término v_k. Podemos entonces expresar $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} a_j v_j$. Entonces, la multilinealidad de α implica:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j=1}^{k-1} a_j \alpha(v_1, \ldots, v_k - 1, v_j).$$

En cada uno de estos términos, α tiene dos argumentos idénticos, por lo que cada término es cero.

□

El subespacio de todos los k-tensores covariantes antisimétricos en V se denota por $\Lambda^k(V^*) \subset T^k(V^*)$. Además podemos construir una proyección de $T^k(V^*)$ a $\Lambda^k(V^*)$ de la siguiente forma.

Primero recordemos que llamamos S_k al grupo de permutaciones del conjunto de elementos $\{1, \cdots, k\}$. Sea α un k-tensor y σ una permutación entonces el k-tensor ${}^\sigma\alpha$ viene definido como:

$${}^\sigma\alpha(v_1, \cdots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

Definimos ahora Alt : $T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ como:

$$\text{Alt } \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)({}^\sigma\alpha), \tag{3.6}$$

donde (sgn σ) es la función signo que es igual a +1 si la permutacion es par y -1 si la permutación es impar. A la función Alt α se le conoce como la **función alternación**, donde transforma cada k-tensor en uno antisimétrico o lo deja igual si ya lo es. Demostremos esta última afirmación.

Proposición 3.6 (Propiedades de la Alternación)**.** *Sea* α *un tensor covariante en un espacio vectorial de dimensión finita.*

(a) Alt α *es alternante, es decir, antisimétrico.*

(b) Alt $\alpha = \alpha$ si y solo si α es antisimétrico.

Demostración. (a) Supongamos que $\alpha \in T^k(V^*)$. Si $\tau \in S_k$ es cualquier permutación, entonces

$$(\text{Alt } \alpha)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(k))}).$$

Podemos reordenar $\sigma\tau$ como η, que también es una permutación en S_k, manteniendo la propiedad de signatura de la siguiente forma:

$$(\text{sgn } \eta) = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \tau).$$

Entonces,

$$(\text{Alt } \alpha)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} \frac{(\text{sgn } \eta)}{(\text{sgn } \tau)} \alpha(v_{\eta(1)}, \ldots, v_{\eta(k)}) = \frac{(\text{Alt } \alpha)(v_1, \ldots, v_k)}{(\text{sgn } \tau)},$$

y como $(\text{sgn } \tau) \in \{-1, 1\}$, cambiando el signo si permutan dos de sus elementos, entonces (Alt α) cumple con la definición de antisimétrico.

(b) $\Rightarrow$ Si Alt $\alpha = \alpha$, entonces α es alternante por el apartado *(a)*.

$\Leftarrow$ Si α es alternante, entonces sabemos por definición que ${}^{\sigma}\alpha = (\text{sgn } \alpha)\alpha$ por tanto

$$\text{Alt } \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)({}^{\sigma}\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \alpha)\alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \alpha,$$

y como en el grupo de permutaciones S_k hay $k!$ permutaciones, entonces

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \alpha = \frac{k!\alpha}{k!} = \alpha$$

y así Alt $\alpha = \alpha$.

□

Ahora consideremos como siempre M una variedad diferenciable con o sin borde. Se define el **fibrado de k-tensores covariantes en M** por

$$T^k T^* M = \bigcup_{p \in M} T^k(T_p^* M).$$

Análogamente, definimos el **fibrado de k-tensores contravariantes** por

$$T^k TM = \bigcup_{p \in M} T^k(T_p M),$$

y el **fibrado de tensores mixtos de tipo (k, l)** por

$$T^{(k,l)} TM = \bigcup_{p \in M} T^{(k,l)}(T_p M).$$

este último también es denotado como $T_s^r TM$. Cualquiera de estos tres fibrados son conocidos como **fibrados tensoriales** sobre M y, procediendo exactamente igual que en el fibrado cotangente, podemos demostrar que, efectivamente, los fibrados tensoriales son fibrados vectoriales. Una sección de un fibrado tensorial se denomina **campo tensorial (covariante, contravariante, o mixto)** en M. Un **campo tensorial diferenciable** es una sección que es diferenciable en el sentido usual de secciones diferenciables de fibrados vectoriales.

Un **campo tensorial antisimétricos** en una variedad con o sin borde es un campo tensorial covariante donde el valor en cada punto es un tensor antisimétrico. A estos campos tensoriales se le denominan **formas diferenciales**.

Pullbacks de campos tensoriales covariantes

Definición 3.4. *Supongamos $F : M \to N$ es una funcion diferenciable. Para cualquier punto $p \in M$ y cualquier k-tensor $\alpha \in T^k(T_p^*N)$, podemos definir un tensor $dF_p^*(\alpha) \in T^k(T_p^*M)$, llamado el **pullback puntual de** α **por** F **en** p, definido como*

$$dF_p^*(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k))$$

*para cualquier $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Si X es un campo k-tensorial covariante en N, definimos un campo de k-tensores rugoso F^*X en M, llamado el **pullback (o aplicación regrediente) de** X **por** F, definido como*

$$(F^*X)_p = dF_p^*(X_{F(p)}).$$

Este campo tensorial actúa sobre vectores $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ por

$$(F^*X)_p(v_1, \ldots, v_k) = X_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)).$$

Proposición 3.7 (Propiedades de los pullbacks de tensores)**.** *Supongamos que $F : M \to N$ y $G : N \to P$ son funciones diferenciables, X e Y son campos tensoriales covariantes en N, y f es una función de valor real en N.*

(a) $F^*(fY) = (f \circ F)F^*Y$.

(b) $F^*(X \otimes Y) = F^*X \otimes F^*Y$.

(c) $F^*(X + Y) = F^*X + F^*Y$.

(d) *F^*Y es un campo tensorial (continuo) y es diferenciable si B es diferenciable.*

(e) $(G \circ F)^*Y = F^*(G^*Y)$.

(f) $(\mathrm{Id}_N)^*Y = Y$.

Demostración. Estas demostraciones son inmediatas aplicando la definición de pullback. □

2.1. k-Covectores elementales

Vamos a dar una nueva notación ahora para poder trabajar más comodamente con los k-covectores:

Definición 3.5. *Dado $k \in \mathbb{Z}^+$. Una k-tupla $I = (i_1, \cdots, i_k)$ de enteros positivos se llama* ***multi-índice de longitud k*** *o un* ***k-multi-índice****. Además dado una permutación $\sigma \in S_k$ y un multi-índice I, escribimos I_σ como el k-multi-índice*

$$I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \cdots, i_{\sigma(k)})$$

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y supongamos que $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ es una base para V^*. Ahora definimos una colección de k-covectores en V que generalizan la función determinante en $\mathbb{R}^n$. Cada multi-índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de longitud k que cumple $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, define un nuevo k-tensor covariante $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1 \cdots i_k}$ que actua de la siguiente manera

$$\varepsilon^I(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \ldots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \ldots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}$$

En otras palabras, si $\mathbb{V}$ denota la matriz $n \times k$ cuyas columnas son las componentes de los vectores $v_1, \ldots, v_k$ con respecto a la base (E_i) dual a (ε^i), entonces $\varepsilon^I(v_1, \ldots, v_k)$ es el determinante de la submatriz $k \times k$ que consiste en las filas $i_1, \ldots, i_k$ de $\mathbb{V}$. Debido a que el determinante cambia de signo cuando dos columnas son intercambiadas, está claro que ε^I es un tensor antisimétrico. A este k-covector lo llamamos un **tensor antisimétrico elemental** o un **k-covector elemental**.

Definición 3.6. *Dados I, J dos k-multi-índices definimos* ***la delta de Kronecker para I y J*** *como sigue*

$$\delta^I_J = \det \begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.8. *Sea δ^I_J la delta de Kronecker para los dos k-multi-índices I, J, entonces*

$$\delta^I_J = \begin{cases} sgn\ \sigma & \text{si ni } I \text{ ni } J \text{ tienen un índice repetido y } J = I_\sigma \text{ para algún } \sigma \in S_k, \\ 0 & \text{si } I \text{ o } J \text{ tiene un índice repetido o } J \text{ no es una permutación de } I. \end{cases}$$

Demostración. Veamos los distintos casos:

$\delta^I_J = (\text{sgn } \sigma)$: Si $I = J$ y no tienen índices repetidos, entonces la matriz delta de Kronecker es la identidad y así δ^I_J es igual a 1. Si J se tiene intercambiando sólamente dos índices de I (una trasposición), supongamos que $I = (l_1, \cdots, l_i, \cdots, l_j, \cdots l_k)$ y $J = (l_1, \cdots, l_j, \cdots, l_i, \cdots l_k)$ entonces la matriz resultante será la matriz diagonal exeptuando que las filas i-ésima y j-ésima, estan intercambiadas haciendo así que el determinante cambie de signo. Como cualquier permutación se puede expresar como producto de trasposiciones, entonces se sigue que si $J = I_\sigma$ entonces $\delta^I_J = (\text{sgn } \sigma)$.

$\delta^I_J = 0$: Si I (o J) tiene un índice repetido, entonces existirán dos filas (o dos columnas) iguales por lo que el determinante será 0. Si ahora, consideramos que no existe permutación que transforme I en J entonces esto significa que existe un número en I que no esta en J (y viceversa), por lo que existirá una fila (y una columna) que tenga todos sus coeficientes a cero, haciendo así el determinante nulo.

□

Lema 3.2. *Sea (E_i) una base para V, y sea (ε^i) la base dual para V^*, y sea ε^I definido como se mencionó anteriormente.*

(a) Si I tiene un índice repetido, entonces $\varepsilon^I = 0$.

(b) Si $J = I_\sigma$ para algún $\sigma \in S_k$, entonces $\varepsilon^I = (sgn\,\sigma)\varepsilon^J$.

(c) El resultado de evaluar ε^I en una secuencia de vectores base es

$$\varepsilon^I(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}) = \delta^I_J.$$

Demostración. Para probar (a), si I tiene un índice repetido entonces, por definición, el determinante tendrá dos filas iguales y así $\varepsilon^I = 0$. Si J se tiene intercambiando dos índices de I (una trasposición), entonces dos filas del determinante permutarán haciendo que cambie el signo. Como toda permutación se puede expresar como un número finito de trasposiciónes, esto prueba (b). El apartado (c) es trivial usando la definición. □

Dado un k-multi-índice I, si $i_1 < \cdots < i_k$ se dice que es **creciente**. Denotemos ahora el **conjunto de los k-multi-índices crecientes** como $IC_k = \{I : I \text{ es un k-multi-índice creciente}\}$. Así, a partir de ahora, cuando querramos expresar un k-covector como combinaciones de k-covectores elementales (vamos a demostrar a continuación que siempre se puede ya que forman una base), lo haremos usando el siguiente sumatorio:

$$\sum_{I \in IC_k} \alpha_I e^I = \sum_{\{I : i_1 < \cdots < i_k\}} \alpha_I e^I.$$

Proposición 3.9 (Una Base para $\Lambda^k(V^*)$)**.** *Dado V un espacio vectorial n-dimensional y (ε^i) es cualquier base para V^*, entonces para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ que cumple $k \leq n$, el conjunto de k-covectores*

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon^I : I \in IC_k\}$$

forma una base para $\Lambda^k(V^*)$. Por lo tanto,

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si, por el contrario, $k > n$, entonces la dimensión de $\Lambda^k(V^*)$ es 0.

Demostración. Sea $k \leq n$, necesitamos demostrar que el conjunto $\mathcal{E}$ genera $\Lambda^k(V^*)$ y es linealmente independiente. Consideremos (E_i) como la base de V y (ε^i) como su dual.

Para demostrar que $\mathcal{E}$ genera $\Lambda^k(V^*)$, tomemos $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ arbitrario. Para cada multi-índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ (no necesariamente creciente), definimos el número real α_I como

$$\alpha_I = \alpha(E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}).$$

El hecho de que α sea antisimétrico implica que $\alpha_I = 0$ si I contiene un índice repetido, y $\alpha_J = (\text{sgn}\ \sigma)\alpha_I$ si $J = \sigma(I)$ para cualquier $\sigma \in S_k$. Por lo tanto, para cualquier multi-índice J, por el Lema 3.2(c) tenemos

$$\sum_{I \in IC_k} \alpha_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}) = \sum_{I \in IC_k} \alpha_I \delta^I_J = \alpha_J = \alpha(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{I \in IC_k} \alpha_I \varepsilon^I = \alpha,$$

así $\mathcal{E}$ genera $\Lambda^k(V^*)$.

Para demostrar que $\mathcal{E}$ es un conjunto linealmente independiente, supongamos que la combinación lineal

$$\sum_{I \in IC_k} \alpha_I \varepsilon^I = 0$$

se cumple para algunos coeficientes α_I. Sea J cualquier multi-índice creciente. Aplicando ambos lados de la identidad a los vectores $(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k})$ y usando el Lema 3.2, obtenemos

$$0 = \sum_{I \in IC_k} \alpha'_I \varepsilon^I (E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}) = \alpha_J.$$

Por lo tanto, cada coeficiente α_J es cero, es decir los vectores son linealmente independientes ya que una combinación lineal de estos se anula solo si todos los coeficientes son cero. La dimensión se obtiene de saber el número de formas (combinaciones) en que puedes seleccionar k números de un conjunto de n números de manera que no se repitan y esten ordenados. Esto es $C(n, k)$.

Tomando ahora $k > n$, como cualquier k-tupla de vectores es linealmente dependiente se sigue inmediatamente del Lema 3.1(b) que $\Lambda^k(V^*)$ tiene dimensión nula. □

Debido a la última afirmación, como $\dim \Lambda^k(V^*) = 0$ para $k > n$, denominamos al espacio vectorial $\Lambda(V^*)$ como

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*).$$

2.2. Producto exterior

Definición 3.7. *Si V es un espacio vectorial real con dimensión finita. Dados $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, definimos su* ***producto exterior*** *(en inglés* ***producto wedge****) como el siguiente covector:*

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

que claramente es de rango $(k + l)$.

La operación del producto exterior tiene varias propiedades clave, para poder demostrarlas enunciaremos previamente un lema:

Lema 3.3. *Si V es un espacio vectorial de n-dimensional y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ es una base para V^*. Entonces, para cualesquiera multi-índices $I = (i_1, \ldots, i_k)$ y $J = (j_1, \ldots, j_l)$,*

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

con $IJ = (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$.

Demostración. Por la multilinealidad, nos bastará con demostrar que

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J (E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ} (E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) \tag{3.7}$$

para cualquier secuencia $(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}})$ de vectores base. Consideramos varios casos.

Si $P = (p_1, \ldots, p_{k+l})$ tiene un índice repetido. En este caso, ambos lados de (3.7) son cero por el apartado (c) de Lema 3.1.

Si P contiene un índice que no aparece ni en I ni en J. En este caso, el lado derecho es cero por el Lema 3.2(c). Además, como cada término en la expansión del lado izquierdo involucra ε^I o ε^J evaluados en una secuencia de vectores base que no es una permutación de I o J, respectivamente, entonces el lado izquierdo también es cero.

Si ahora $P = IJ$ y P no tiene índices repetidos. En este caso, el lado derecho de (3.7) es igual a 1 por el 3.2, así que necesitamos demostrar que el lado izquierdo también es igual a 1. Por definición,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J)(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}})$$

$$= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\ \sigma)\varepsilon^I(E_{p_{\sigma(1)}}, \ldots, E_{p_{\sigma(k)}})\varepsilon^J(E_{p_{\sigma(k+1)}}, \ldots, E_{p_{\sigma(k+l)}}).$$

Por el 3.2 nuevamente, los únicos términos en la suma anterior que dan valores no nulos son aquellos en los cuales σ permuta los primeros k índices y los últimos l índices de P por separado, es decir, los σ que "sobreviven" son aquellos de la forma $\sigma = \tau\eta$, donde $\tau \in S_k$ actúa permutando $\{1, \ldots, k\}$ y $\eta \in S_l$ actúa permutando $\{k+1, \ldots, k+l\}$. Dado que $\mathrm{sgn}(\tau\eta) = (\mathrm{sgn}\ \tau)(\mathrm{sgn}\ \eta)$, entonces

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\tau\in S_k}\sum_{\eta\in S_l}(\mathrm{sgn}\ \tau)(\mathrm{sgn}\eta)\varepsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, \ldots, E_{p_{\tau(k)}})\varepsilon^J(E_{p_{\eta(k+1)}}, \ldots, E_{p_{\eta(k+l)}})$$

$$= \left(\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k}(\mathrm{sgn}\ \tau)\varepsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, \ldots, E_{p_{\tau(k)}})\right)\left(\frac{1}{l!}\sum_{\eta\in S_l}(\mathrm{sgn}\ \eta)\varepsilon^J(E_{p_{\eta(k+1)}}, \ldots, E_{p_{\eta(k+l)}})\right)$$

$$= (\mathrm{Alt}\ \varepsilon^I)(E_{p_1}, \ldots, E_{p_k})(\mathrm{Alt}\ \varepsilon^J)(E_{p_{k+1}}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = \varepsilon^I(E_{p_1}, \ldots, E_{p_k})\varepsilon^J(E_{p_{k+1}}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = 1.$$

Considerando ahora que P es una permutación de IJ y no tiene índices repetidos. En este caso, aplicar una permutación a P nos lleva de vuelta al último caso. Dado que el efecto de la permutación es multiplicar ambos lados de (3.7) por el mismo signo, el resultado se mantiene en este caso también.

□

Proposición 3.10 (Propiedades del producto exterior). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean $\omega, \omega', \eta, \eta', \zeta \in \Lambda(V^*)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) ***Bilinealidad:*** *Para $a, a' \in \mathbb{R}$,*

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

(b) ***Asociatividad:***

$$\omega \wedge (\eta \wedge \zeta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \zeta.$$

(c) ***Anticonmutatividad:*** *Para $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega. \tag{3.8}$$

(d) *Si $\{\varepsilon^i\}$ es una base para V^* e $I = (i_1, \ldots, i_k)$ es cualquier multi-índice, entonces*

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I. \tag{3.9}$$

(e) *Para cualquier conjunto de covectores $\omega^1, \ldots, \omega^k$ y vectores $v_1, \ldots, v_k$,*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega^1(v_1) & \cdots & \omega^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^k(v_1) & \cdots & \omega^k(v_k) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Demostración. (a) Se sigue inmediatamente de la definición ya que el producto tensorial es bilineal y la función alternación es lineal.

(b) Para demostrar la asociatividad, vemos que por el Lema 3.3 tenemos

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K).$$

y como los covectores elementales forman una base, por la bilinealidad demostrada en el apartado (a) tenemos el caso general para cualesquiera covectores.

(c) Utilizando el Lema 3.3 nuevamente, tenemos

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\operatorname{sgn} \tau)\varepsilon^{JI} = (\operatorname{sgn} \tau)\varepsilon^J \wedge \varepsilon^I,$$

donde τ es la permutación que envía IJ a JI. Es fácil ver que $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^{kl}$, ya que τ puede verse como una composición de kl transposiciones, ya que cada índice de I (empezando desde i_k hacia atrás) se mueve pasando cada uno de los índices de J (esto son l trasposiciones).

(d) Por definición si $I = (i_k)$ es un 1-multi-índice, entonces $\varepsilon^I(v_k) = \det(\varepsilon^{i_k}(v^1)) = \varepsilon^{i_k}(v^1)$. Luego $\varepsilon^{\{i_k\}} = \varepsilon^{i_k}$. Por tanto por inducción y por el Lema 3.3, se tiene.

(e) Si consideramos el caso en el que cada ω^j es uno de los covectores básicos ε^{i_j}, entonces la expresión se reduce a (3.9). Dado que ambos lados de (3.10) son multilineales en $(\omega^1, \ldots, \omega^k)$, entonces la ecuación se cumple.

□

Estas propiedades del producto exterior hacen del $\Lambda(V^*)$ un ágebra asociativa llamada **álgebra exterior** de V. Este algebra no es conmutativa. Debido a la parte (d) de este lema, de aquí en adelante usaremos las notaciones ε^I y $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$ intercambiablemente.

Se dice que un k-covector η es **descomponible** si puede expresarse en la forma

$$\eta = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k,$$

donde $\omega^1, \ldots, \omega^k$ son covectores. Es importante tener en cuenta que no todos los k-covectores son descomponibles cuando $k > 1$ pero podemos seguir de las Proposiciones 3.9 y 3.10(d) que **cada k-covector puede escribirse como una combinación lineal de covectores descomponibles**.

2.3. Producto interior

Existe una operación importante que relaciona vectores con tensores antisimétricos. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Para cada $v \in V$, definimos una aplicación lineal

$$i_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*),$$

llamado **producto (o derivada) interior por** v, de la siguiente manera:

$$i_v\omega(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1}).$$

En otras palabras, $i_v\omega$ se obtiene al insertar v en la primera posición de ω. Por convención, interpretamos $i_v\omega$ como cero cuando ω es un 0-covector (es decir, un número). Esto a menudo se lee como "v dentro de ω".

Lema 3.4. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $v \in V$.*

(a) $i_v \circ i_v = 0$.

(b) Si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^k\omega \wedge (i_v\eta). \tag{3.11}$$

Demostración. (a) Si ω es un 0-covector, o un 1-covector, entonces como hemos definido $i_v\omega = 0$ para 0-covectores, es inmediato. Por otro lado si ω es un k-covector con $k \geq 2$ entonces $(i_v \circ i_v)\omega(w_1, \cdots, w_k) = i_v(i_v\omega(w_1, \cdots, w_k) = \omega(v, v, \cdots, w_{k-2}) = 0$ ya que cualquier tensor antisimétrico da 0 si tiene dos argumentos iguales.

(b) Como hemos mencionado anteriormente, cualquier k-covector puede escribirse como una combinación lineal de k-covectores descomponibles, por lo que solo tendremos que demostrarlo para este tipo. Si nos fijamos, para vectores descomponibles, la ecuación del apartado es un caso particular de

$$i_v\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\omega^i(v)\omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}^i \wedge \cdots \wedge \omega^k, \tag{3.12}$$

donde el gorro indica que ese término no está. Si denotamos $v_1 = v$ y le introducimos a ambas partes de la igualdad los k-1 vectores $(v_2, \cdots, v_k)$ entonces simplemente no vale con demostrar que

$$\begin{aligned}&\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right)(v_1, \dots, v_k)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\omega^i(v_1)\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k\right)(v_2, \dots, v_k)\end{aligned} \tag{3.13}$$

se cumple. El primer término no deja de ser el determinante

$$\det\begin{pmatrix}\omega^1(v_1) & \dots & \omega^1(v_k)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega^k(v_1) & \dots & \omega^k(v_k)\end{pmatrix}$$

Si desarrollamos ahora por la primera columna, tenemos:

$$\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega^1(v_1) & \ldots & \omega^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^k(v_1) & \ldots & \omega^k(v_k) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \det \mathbb{V}_1^i$$

Donde $\mathbb{V}_1^i$ es la matriz resultante de suprimir la primera columna y la fila i-ésima. Pero esto no deja de ser la parte de la derecha de 3.13, por lo que esta igualdad se cumple.

□

3. Formas diferenciales en variedades

Ahora dirigimos nuestra atención a una variedad diferenciable M de dimensión n (con o sin borde). Recordemos que T^kT^*M denota al fibrado de k-tensores covariantes en la variedad M. El subconjunto de T^kT^*M que consiste en tensores alternantes se denota por Λ^kT^*M:

$$\Lambda^kT^*M = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

Una sección de Λ^kT^*M se llama una **k-forma diferencial**, o simplemente una **k-forma**. Se trata de un campo tensorial (continuo) cuyo valor en cada punto es un tensor antisimétrico. El entero k se llama el **grado** de la forma. El espacio vectorial de las k-formas diferenciales definidas en la variedad M lo denotamos como $\Omega^k(M)$. Por ser un campo tensorial antisimétricos, se sigue igualmente que si $k > n$ entonces dim $\Omega^k(M) = 0$, por lo que llamamos a las n-formas diferenciales, **formas de grado máximo**. Además definimos

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M),$$

El producto exterior de dos formas diferenciales se define punto a punto: $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$. Así, el resultado del producto exterior de una k-forma con una l-forma es una $(k + l)$-forma.

Dado una carta diferenciable, una k-forma ω puede escribirse localmente como

$$\omega = \sum_{I \in IC_k} \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{I \in IC_k} \omega_I \, dx^I,$$

donde los coeficientes ω_I son funciones continuas definidas en el dominio de coordenadas, y usamos dx^I como abreviatura para $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ (no confundir con el diferencial de una función real x^I). En términos de formas diferenciales, el resultado del Lema 3.2(c) se traduce en

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \delta^I_J.$$

Por lo tanto, las funciones de componentes ω_I de ω están determinadas por

$$\omega_I = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Si $F : M \to N$ es una aplicación diferenciable y ω es una forma diferencial en N, el pullback $F^*\omega$ es una forma diferencial en M, definida como para cualquier campo tensorial covariante:

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

Además cumple que:

Lema 3.5. *Supongamos que $F : M \to N$ es diferenciable.*

(a) $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ es lineal sobre $\mathbb{R}$.

(b) $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$.

(c) En cualquier carta diferenciable,

$$F^*\left(\sum_{I \in IC_k} \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_{I \in IC_k} (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

Demostración. Esto no deja de ser una extensión natural del concepto de pullback sobre campos de tensores covariantes a formas diferenciales. □

Proposición 3.11 (Fórmula del Pullback para las formas de grado máximo)**.** *Dado $F : M \to N$ una aplicación diferenciable entre n-variedades con o sin borde. Si (x^i) y (y^j) son coordenadas diferenciables en subconjuntos abiertos $U \subseteq M$ y $V \subseteq N$, respectivamente, y u es una función de valor real continua en V, entonces en $U \cap F^{-1}(V)$ tenemos:*

$$F^*(u\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = (u \circ F)\, (\det DF)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{3.14}$$

donde DF representa la matriz jacobiana de F en estas coordenadas.

Demostración. Dado que la fibra de $\Lambda^n T^*M$ es generada por $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ en cada punto, basta con mostrar que ambos lados de la ecuación proporcionan el mismo resultado cuando se evalúan en $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$. Desde el Lema 3.5, tenemos que:

$$F^*(u\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = (u \circ F)\, dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^n.$$

La Proposición 3.10(e) muestra que:

$$dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \det \begin{pmatrix} dF^1 \frac{\partial}{\partial x^1} & \cdots & dF^1 \frac{\partial}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dF^n \frac{\partial}{\partial x^1} & \cdots & dF^n \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación proporciona $(u \circ F)\, \det DF$ cuando se aplica a $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$. Por otro lado, el lado derecho da el mismo resultado, ya que $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) = 1$. □

El producto interior también se extiende de manera natural a campos de vectores y formas diferenciales, actuando punto a punto: si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$. Definimos entonces una $(k-1)$-forma $i_X\omega$ por

$$(i_X\omega)_p = i_{X_p}\omega_p$$

3.1. Derivada exterior

Vamos a definir en esta sección un operador diferencial para formas diferenciables, llamada derivada exterior. La definición de d en el espacio euclídeo es directa: si $\omega = \sum_{J\in IC_k} \omega_J dx^J$ es una k-forma diferenciable en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, definimos su **derivada exterior** $d\omega$ como la siguiente $(k+1)$-forma:

$$d\left(\sum_{J\in IC_k} \omega_J dx^J\right) = \sum_{J\in IC_k} d\omega_J \wedge dx^J, \tag{3.15}$$

donde $d\omega_J$ es el diferencial de la función ω_J. En más detalle, esto es

$$d\left(\sum_{J\in IC_k} \omega_J dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}\right) = \sum_{J\in IC_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}.$$

Proposición 3.12 (Propiedades de la Derivada Exterior en $\mathbb{R}^n$). *Dado la definición anterior de derivada exterior, entonces:*

(a) d es lineal en $\mathbb{R}$.

(b) Si ω es una k-forma y η es una l-forma en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, entonces
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(c) $d \circ d = 0$.

(d) d conmuta con los pullbacks: si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{H}^m$, $F : U \to V$ es una función diferenciable, y $\omega \in \Omega^k(V)$, entonces
$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega). \tag{3.16}$$

Demostración. La linealidad de d es una consecuencia inmediata de la definición. Para demostrar (b), por linealidad basta considerar términos de la forma $\omega = udx^I \in \Omega^k(U)$ y $\eta = vdx^J \in \Omega^l(U)$ para u y v funciones diferenciables de valor real. Primero, sin embargo, necesitamos saber que d satisface $d(udx^I) = du \wedge dx^I$ para cualquier multi-índice I (no solo para los crecientes). Si I tiene índices repetidos, entonces claramente $d(udx^I) = 0 = du \wedge dx^I$. Si no, sea σ la permutación que envía I a un multi-índice creciente J. Entonces

$$d(udx^I) = (\mathrm{sgn}\sigma) d(udx^J) = (\mathrm{sgn}\sigma) du \wedge dx^J = du \wedge dx^I.$$

Usando esto, calculamos

$$d(\omega \wedge \eta) = d((udx^I) \wedge (vdx^J)) = d(uvdx^I \wedge dx^J) = (vdu + udv) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

$$= (du \wedge dx^I) \wedge (vdx^J) + (-1)^k (udx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta,$$

donde el $(-1)^k$ proviene del hecho de que $dv \wedge dx^I = (-1)^k dx^I \wedge dv$ porque dv es una 1-forma y dx^I es una k-forma.

Para probar (c), lo haremos primero considerando el caso especial de una 0-forma, que es solo una función de valor real. En este caso,

$$d(du) = d\left(\sum_{j}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

Para el caso general, usamos el caso $k = 0$ junto con (b) para calcular:

$$d(d(\omega)) = d\left(\sum_{J \in IC_k} \omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right)$$

$$= \sum_{J \in IC_k} d(\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + \sum_{J \in IC_k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} = 0.$$

Finalmente, para demostrar (d), basta considerar $\omega = u dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Para la forma en el lado izquierdo de (3.16) tenemos:

$$F^*(d(u dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) = F^*(du \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})$$

$$= d(u \circ F) \wedge (dx^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k} \circ F),$$

y el lado derecho es:

$$d(F^*(u dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) = d((u \circ F) d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F))$$

$$= d(u \circ F) \wedge (dx^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k} \circ F),$$

así que son iguales. □

Estas propiedades nos van a permitir demostrar la existencia de un operador idéntico definido en variedades:

Teorema 3.1 (Existencia y Unicidad de la Derivada Exterior)**.** *Supongamos que M es una variedad diferenciable con o sin borde. Existe una correspondencia única $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ para todo k, denominada **derivada exterior**, que satisface las siguientes cuatro propiedades:*

(i) d es lineal sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(iii) $d \circ d = 0$.

(iv) Para $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df es el diferencial de f, dado por $df(X) = Xf$.

En cualquier carta de coordenadas diferenciables, d viene dado por (3.15).

Demostración. Primero, demostramos la existencia. Supongamos que $\omega \in \Omega^k(M)$. Deseamos definir $d\omega$ mediante la fórmula de coordenadas (3.15) en cada carta; más precisamente, esto significa que para cada carta suave (U, φ) para M, deseamos establecer

$$d\omega = \varphi^*(d(\varphi^{-1*}\omega)). \tag{3.17}$$

Para ver que esto está bien definido, simplemente notamos que para cualquier otra carta suave (V, ψ), el mapa $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo entre subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, así que la Proposición 3.12(d) implica

$$(\varphi \circ \psi^{-1})^* d(\varphi^{-1*}\omega) = d((\varphi \circ \psi^{-1})^* \varphi^{-1*}\omega).$$

Junto con el hecho de que $(\varphi \circ \psi^{-1})^* = \psi^{-1*} \circ \varphi^*$, esto implica que $\varphi^* d(\psi^{-1*}\omega) = \psi^* d(\psi^{-1*}\omega)$, así que $d\omega$ está bien definido y es claro que cumple todas las propiedades.

Para probar la unicidad, supongamos que d es cualquier operador que satisface todas las propiedades. Primero necesitamos demostrar que $d\omega$ es único localmente, es decir, si ω_1 y ω_2 son k-formas que coinciden en un subconjunto abierto $U \subseteq M$, entonces $d\omega_1 = d\omega_2$ en U. Para ver esto, sea $p \in U$ arbitrario, y sea $\eta = \omega_1 - \omega_2$, y sea $\chi \in C^\infty(M)$ una función meseta que es idénticamente 1 en algún entorno de p y con soporte contenido en U. Entonces $\chi\eta$ es idénticamente cero, así que, por las propiedades del operador, esto implica $0 = d(\chi\eta)(p) = d\chi(p) \wedge \eta + \chi d\eta$, y por lo tanto, sabiendo que $\chi(p) = 1$ y $d\chi_p = 0$, entonces $d\omega_1|_p - d\omega_2|_p = d\eta_p = 0$.

Ahora, tomemos una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ arbitraria, y sea (U, φ) cualquier carta diferenciable en M. Podemos escribir esta forma en coordenadas como $\omega = \sum_{I \in IC_k} \omega_I dx^I$. Para cualquier $p \in U$, por medio de una función meseta podemos construir funciones diferenciables globales $\tilde{\omega}_I$ y $\tilde{x}^i$ en M que coinciden con ω_I y x^i en un entorno de p. Debido a las propiedades del operador diferencial exterior junto con la observación en el párrafo anterior, se sigue que la fórmula (3.15) es válida en p. Como el punto p escogido, ha sido arbitrario, este d tiene que ser igual al que definimos anteriormente.

□

Definición 3.8. *Dada una k-forma diferencial $w \in \Omega^k(M)$ decimos que es* ***cerrada*** *si $dw = 0$ y* ***exacta*** *si existe $\eta \in \Omega^{(k-1)}(M)$ tal que $w = d\eta$.*

Proposición 3.13 (Naturalidad de la Derivada Exterior)**.** *Si $F : M \to N$ es una función diferenciable, entonces para cada k el pullback $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ conmuta con d: para todo $\omega \in \Omega^k(N)$, es decir,*

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Demostración. Si (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son cartas diferenciables para M y N, respectivamente, podemos aplicar la Proposición 3.12(d) a la representación de coordenadas $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$. Usando (3.17) dos veces, calculamos como sigue en $U_1 \cap F^{-1}(U_2)$:

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^* \varphi_2^* d(\varphi_2^{-1*}\omega) \\ &= \varphi_1^* \circ (\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^* d(\varphi_2^{-1*}\omega) \\ &= \varphi_1^* d((\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^* \varphi_2^{-1*}\omega) \\ &= \varphi_1^* d(\varphi_1^{-1*} F^*\omega) \\ &= d(F^*\omega). \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Integración en Variedades

Nos basaremos en [8, 6] para comprender el sentido de la orientación sobre una variedad y la integración sobre estas.

1. Orientación

En el estudio de superficies en el espacio tridimensional, la orientación se podía comprender fácilmente observando si es posible asignar un vector normal a la superficie de manera que varíe continuamente a lo largo de toda la superficie, determinando así si una superficie tenía dos lados (orientable) o solo uno (no orientable) como la *banda de Möbius*. Esto era factible gracias a la presencia de un espacio ambiente, como el espacio euclídeo, que nos proporcionaba una manera de"mirar desde afuera" la superficie. Sin embargo, en el contexto de variedades, no siempre disponemos de este espacio ambiente o no queremos depender de él para definir conceptos geométricos por lo que necesitaremos generalizar la idea de orientación sin referirnos directamente a vectores normales, utilizando para ello, formas diferenciales de grado máximo.

Sabemos por la Proposición 3.9 que para cualquier espacio vectorial V, $\Lambda^n(V)$ tiene dimensión 1 por lo que $\Lambda^n(V) - \{0\}$ tiene dos componentes conexas, así que denotaremos *orientación* como una elección de cada componente en cada punto. Veamoslo más detenidamente:

Definición 4.1. *Sea M una n-variedad diferenciable conexa y dado O como la sección cero siguiente*

$$O = \bigcup_{p \in M} \{0 \in \Lambda^n(T_p^*M)\} \tag{4.1}$$

*Entonces como $\Lambda^n(M^*) - \{0\}$ tiene exactamente dos componentes, $\Lambda^n T^*M - O$ tiene como mucho dos componentes. Decimos, por tanto, que M es **orientable** si $\Lambda^k T^*M - O$ tiene exactamente 2 componentes, siendo una **orientación** la componente elegida. Para variedades diferenciables no conexas decimos que es orientable si cada componente conexa es orientable y una orientación es una elección de orientación en cada componente.*

Definición 4.2. *Si (E_i) es una referencia local para TM, decimos que (Ei) esta **orientada positivamente** si para cada $p \in U$, la base del TpM dada por $(E_1|_p, \cdots, E_n|_p)$ está orientada positivamente (en el sentido conocido para espacios vectoriales).*

Definición 4.3. *Sean M y N n-variedades diferenciables orientables. Decimos que una aplicación diferenciable $F : M \to N$ **preserva la orientación** si para cada $p \in M$ el diferencial dF_p transforma bases orientadas de T_pM en bases orientadas de $T_{F(p)}N$.*

Proposición 4.1. *Sea M una n-variedad diferenciable. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) M es orientable.

(b) Existe una colección $\Phi = \{(V, \psi)\}$ de sistemas de coordenadas en M tal que para cada $(U, x_1, \ldots, x_n)$ y $(V, y_1, \ldots, y_n)$ pertenecientes a Φ:

$$M = \bigcup_{(V,\psi)\in\Phi} V \quad y \quad \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_i}\right) > 0 \text{ en } U \cap V$$

(c) Existe una n-forma diferenciable en M que no se anula en ningún punto.

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que M es conexa. Demostraremos que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$. Dado (a), que M es orientable, elegimos una orientación en M; es decir, escogemos una de las dos componentes, llamémosla Λ, de $\Lambda^n T^*M - O$. Observamos que para cada $p \in M$, $\Lambda \cap \Lambda^n(T_p^*M)$ es precisamente una de las dos componentes de $\Lambda^n(T_p^*M) - \{0\}$. Ahora dejamos que Φ consista de todos esos sistemas de coordenadas $(V, y_1, \ldots, y_n)$ en M tal que la aplicación que va de V a $\Lambda^n T^*M$ definido por

$$p \mapsto (dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n)(p)$$

tiene rango en Λ. Ahora, si $(U, x_1, \ldots, x_n)$ y $(V, y_1, \ldots, y_n)$ son cualquier sistema de coordenadas en M, entonces para $p \in U \cap V$,

$$(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(p) = \det\left(\left.\frac{\partial x_i}{\partial y_i}\right|_p\right)(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n)(p).$$

Y como estos sistemas de coordenadas pertenecen a Φ, entonces necesariamente

$$\det\left(\left.\frac{\partial x_i}{\partial y_i}\right|_p\right) > 0$$

para cada $m \in U \cap V$. Tenemos por tanto que $(a) \Rightarrow (b)$.

Ahora asumimos (b). Sea $\{\phi_i\}$ una partición de unidad subordinada al recubrimiento de M dado por los entornos de coordenadas en la colección Φ con ϕ_i subordinado a $(V_i, x_1^i, \ldots, x_n^i)$. Entonces

$$\omega = \sum_i \phi_i dx_1^i \wedge \ldots \wedge dx_n^i$$

es una n-forma definida en todo M, donde $\phi_i dx_1^i \wedge \ldots \wedge dx_n^i$ se considera como una 0-forma fuera de V_i. Que ω no se anule en ningún punto sigue del hecho de que para cada $m \in M$, $\omega(m)$ es una suma finita con coeficientes no negativos de elementos (y alguno estrictamente positivo) de una componente de $\Lambda^n(T_p^*M) - \{0\}$. Por lo tanto, $(b) \Rightarrow (c)$.

Finalmente, dejemos que ω sea una n-forma en M que no se anula, y definimos

$$\Lambda^+ = \bigcup_{m\in M} \{a\omega(m) : a \in \mathbb{R}, a > 0\},$$

$$\Lambda^- = \bigcup_{m\in M} \{a\omega(m) : a \in \mathbb{R}, a < 0\}.$$

Entonces $\Lambda^n T^*M - O$ es la unión disjunta de los dos subconjuntos abiertos Λ^+ y Λ^-, por lo que $\Lambda^n T^*M - O$ está formado por exactamente dos componentes conexas y M es orientable.

□

A esta forma de grado máximo que no se anula se le conoce como **forma de volumen** (o forma de orientación) y si ω envia sus elementos a la elección de orientación, entonces decimos que ω está **orientada positivamente**. Si además existe otra forma de volumen $\tilde{\omega}$ que también esta orientada positivamente entonces debe de existir una función diferenciable estrictamente positiva tal que $\omega = f\tilde{\omega}$. Una forma de volumen está **orientada negativamente** si cumple lo contrario.

Sobre una variedad diferenciable orientada, una carta coordenada diferenciable esta **orientada positivamente** si la referencia $(\partial/\partial x^i)$ esta orientada positivamente (análogo para **negativamente orientada**).

Si M es una variedad diferenciable orientada, con o sin borde, y S es una subvariedad diferenciable de M con o sin borde, S no tiene por qué heredar la orientación de M. Un ejemplo claro es la banda de Möbius, que aunque se puede ambientar en $\mathbb{R}^3$, no es orientable. Un campo vectorial a lo largo de S es una sección del fibrado tangente ambiente $TM|_S$, es decir, una aplicación continua $N : S \to TM$ con la propiedad de que $N_p \in T_pM$ para cada $p \in S$. Por ejemplo, cualquier campo vectorial en M se restringe a un campo vectorial a lo largo de S, pero en general, no todos los campos vectoriales a lo largo de S son de esta forma.

Proposición 4.2. *Supongamos que M es una variedad diferenciable orientada con o sin borde, S es una hipersuperficie con o sin borde en M, y N es un campo vectorial a lo largo de S que no es en ningún punto tangente a S. Entonces S posee una orientación única tal que para cada $p \in S$, $(E_1, \dots, E_{n-1})$ es una base orientada para T_pS si y solo si $(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ es una base orientada para T_pM. Si ω es una forma de volumen para M, entonces $\iota_S^*(i_N(\omega))$ es una forma de volumen para S con respecto a esta orientación, donde $\iota_S : S \to M$ es la inclusión.*

Demostración. Sea ω una forma de volumen para M. Entonces $\sigma = \iota_S^*(i_N(\omega))$ es una forma $(n-1)$-dimensional en S. Entonces σ será una forma de volumen para S si demostramos que nunca se anula. Dado cualquier base $(E_1, \dots, E_{n-1})$ para T_pS, el hecho de que N no sea tangente a S implica que $(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ es una base para T_pM. Dado que ω es no nula, tenemos que $\omega_p(N_p, E_1, \dots, E_{n-1}) \neq 0$. Así, $\sigma_p(E_1, \dots, E_{n-1}) > 0$ si y solo si $\omega_p(N_p, E_1, \dots, E_{n-1}) > 0$, determinando la orientación inducida por σ. □

Corolario 4.1 (La Orientación Inducida en un Borde)**.** *Sea M una n-variedad diferenciable con borde orientada, con $n \geq 1$. Entonces ∂M es orientable.*

A la orientación definida en ∂M se le denomina **orientacion inducida** o **orientación de Stokes**.

2. Integración de formas diferenciales

Un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ cuyo borde tiene medida cero decíamos que era un **dominio de integración**. Dado D un dominio de integración de $\mathbb{R}^n$, y dado ω una n-forma continua en D, entones cualquier forma así puede escribirse como $\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge$

dx^n para alguna función continua $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Definimos la **integral de ω sobre D** como:

$$\int_D \omega = \int_D f\, dV.$$

Donde $\int_D f\, dV$ denota la integral de Riemann usual. También lo podemos expresar como:

$$\int_D f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_D f\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{H}^n$, y supongamos que ω es una n-forma con soporte compacto en U. Podemos definir

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

donde $D \subseteq (\mathbb{R}^n \text{ o } \mathbb{H}^n)$ es cualquier dominio de integración (como un rectángulo) que contenga el soporte de ω, y ω se extiende a cero en el complemento de su soporte. Es fácil ver que el valor de la integral no depende del dominio que se elija.

Proposición 4.3. *Supongamos que D y E son dominios de integración abiertos en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y $F : \bar{D} \to \bar{E}$ es una función diferenciable que se restringe a un difeomorfismo que preserva o invierte la orientación de D a E. Si ω es una n-forma en $\bar{E}$, entonces*

$$\int_D F^*\omega = \begin{cases} \int_E \omega & \textit{si } F \textit{ mantiene la orientación,} \\ -\int_E \omega & \textit{si } F \textit{ no mantiene la orientación.} \end{cases}$$

Demostración. Utilicemos $(y^1, \ldots, y^n)$ para denotar coordenadas estándar en E, y $(x^1, \ldots, x^n)$ para aquellas en D. Supongamos primero que F preserva la orientación. Con $\omega = f\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$, por el *Teorema de Cambio de Variable* para las integrales de Riemann junto con la fórmula 3.14 para el pullback de formas de grado máximo

$$\int_E \omega = \int_E f\, dV = \int_D (f \circ F)\ |\det DF|\ dV = \int_D (f \circ F)\, (\det DF)\, dV$$

$$= \int_D (f \circ F)\, (\det DF)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_D F^*\omega.$$

Si F invierte la orientación, el proceso es el mismo introduciendo un signo negativo cuando se elimina el valor absoluto. □

Lema 4.1. *Supongamos que U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{H}^n$, y un compacto $K \subset U$. Entonces existe un dominio abierto de integración D tal que $K \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq U$.*

Demostración. Dado que K es compacto (cerrado y acotado) y U es un subconjunto abierto que contiene a K, cada punto en K tiene un entorno abierto en U. Para cada punto x en K, existe una bola abierta $B(x, \epsilon_x) \subseteq U$. Como K es compacto, podemos seleccionar un recubrimiento finito de K a partir de estas bolas abiertas, digamos $\{B(x_i, \epsilon_{x_i})\}$ para $i = 1, \ldots, m$. Definimos D como la unión de las bolas en el recubrimiento finito, $D = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \epsilon_{x_i})$. D es abierto porque es una unión de conjuntos abiertos, contiene a K porque cada punto de K está en al menos una de las bolas $B(x_i, \epsilon_{x_i})$, y está contenido en U ya que cada bola fue seleccionada para estar completamente contenida en U. Así, D es un dominio de integración abierto que cumple $K \subseteq D \subseteq U$.

□

Proposición 4.4. *Supongamos que U, V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y $F : U \to V$ es un difeomorfismo que preserva la orientación o la invierte. Si ω es una forma n-dimensional con soporte compacto en V, entonces*

$$\int_V \omega = \pm \int_U F^* \omega,$$

con el signo positivo si F preserva la orientación, y el signo negativo si la invierte.

Demostración. Sea E un dominio de integración abierto tal que $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq E \subseteq \overline{E} \subseteq V$. Dado que los difeomorfismos llevan interiores a interiores, fronteras a fronteras, y conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero, $D = F^{-1}(E)$ es un dominio abierto de integración que contiene $\mathrm{supp}(F^*\omega)$. El resultado se sigue de la Proposición (4.3). □

Utilizando estos resultados, vamos a entender el cálculo de la integral de una forma diferencial sobre una variedad orientada.

Definición 4.4. *Sea M una variedad diferenciable orientada con o sin borde de dimensión n, y supongamos que ω es una n-forma en M cuyo soporte es compacto en el dominio de una carta (U, φ) diferenciable que está orientada positiva o negativamente. Se define la **integral de** ω **sobre** M como*

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega, \tag{4.2}$$

con el signo positivo para una carta positivamente orientada y el signo negativo en caso contrario.

Esta definición tiene sentido ya que como $(\varphi^{-1})^*\omega$ es una n-forma con soporte compacto en el subconjunto abierto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, su integral se define como hemos construido anteriormente.

Proposición 4.5. *Con ω como arriba, $\int_M \omega$ no depende de la elección de la carta diferenciable cuyo dominio contenga el soporte de ω.*

Demostración. Supongamos que (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son dos cartas diferenciables tales que $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U_1 \cap U_2$. Si ambas cartas están orientadas positivamente o ambas negativamente, entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es un difeomorfismo que preserva la orientación de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ a $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$, así por la Proposición 4.4

$$\int_{\varphi_2(U_2)} (\varphi_2^{-1})^*\omega = \int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} (\varphi_2^{-1})^*\omega = \int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^*(\varphi_2^{-1})^*\omega =$$

$$= \int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} (\varphi_1^{-1})^*(\varphi_1^*)(\varphi_2^{-1})^*\omega = \int_{\varphi_1(U_1)} (\varphi_1^{-1})^*\omega.$$

Si las cartas están orientadas de forma opuesta, entonces las dos definiciones dadas por (4.2) tienen signos opuestos, pero esto es compensado por el hecho de que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ invierte la orientación, así que la Proposición 4.4 introduce un signo negativo extra en el cálculo anterior. En cualquier caso, las dos definiciones de $\int_M \omega$ coinciden.

□

Para integrar sobre toda una variedad, combinamos esta definición con una partición de la unidad. Supongamos que M es una variedad suave n-dimensional con o sin borde, y que ω es una forma n-dimensional con soporte compacto en M. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto finito de $\operatorname{supp}\omega$ por dominios de cartas diferenciables orientadas positiva o negativamente, y sea $\{\psi_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada diferenciable. Se define la **integral de ω sobre M** por

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \psi_i \omega. \tag{4.3}$$

Proposición 4.6. *La definición de $\int_M \omega$ dada no depende de la elección del recubrimiento abierto ni de la de la partición de la unidad.*

Demostración. Supongamos que $\{\tilde{U}_i\}$ es otro recubrimiento finito abierto del soporte de ω por dominios de cartas diferenciables positiva o negativamente orientadas, y $\{\tilde{\psi}_j\}$ es una partición de la unidad subordinada diferenciable. Para cada i

$$\int_M \psi_i \omega = \int_M \left(\sum_j \tilde{\psi}_j \right) \psi_i \omega = \sum_j \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Sumando sobre i, obtenemos

$$\sum_i \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Observe que cada término en esta última suma es la integral de una forma que está compactamente soportada en una única carta suave (por ejemplo, en U_i), así que por la Proposición 4.5 cada término está bien definido, independientemente de qué función coordenada usemos para calcularlo. El mismo argumento, comenzando con $\int_M \tilde{\psi}_j \omega$, muestra que

$$\sum_j \int_M \tilde{\psi}_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Así, ambas definiciones proporcionan el mismo valor para $\int_M \omega$. □

Proposición 4.7 (Propiedades de las Integrales definidas en formas diferenciables)**.** *Supongamos M, N variedades diferenciables de dimensión n orientadas, con o sin borde, y ω, η formas con soporte compacto en M.*

(a) ***Linealidad:*** *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

(b) ***Inversión de Orientación:*** *Si $-M$ denota M con la orientación opuesta, entonces*

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

(c) ***Positividad:*** *Si ω es una forma de volumen positiva, entonces $\int_M \omega > 0$.*

(d) ***Invariancia por Difeomorfismos:*** *Dado un difeomorfismo $F : N \to M$ (manteniendo o invirtiendo la orientación), entonces*

$$\int_M \omega = \begin{cases} \int_N F^*\omega & \textit{si } F \textit{ mantiene la orientación,} \\ -\int_N F^*\omega & \textit{si } F \textit{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

Demostración. (a) La linealidad es directa por la definición de esta integral junto a la linealidad de los sumatorios y de la integral de Riemann.

(b) Sea una forma de volumen auxiliar Ω, entonces existe f tal que $\omega = f\Omega$, por lo que si cambiamos la orientación, entonces

$$\int_{-M} \omega = \int_{-M} f\Omega = \int_M -f\Omega = -\int_M f\Omega = -\int_M \omega.$$

(c) Supongamos que ω es una forma con orientación positiva para M. Esto significa que si (U, φ) es una carta diferenciable orientada positivamente para M, entonces $(\varphi^{-1})^*\omega$ es una función positiva multiplicada por $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, y para una carta negativamente orientada, es una función negativa multiplicada por la misma forma. Por lo tanto, cada término en la suma (4.3) definiendo $\int_M \omega$ es no negativo, con al menos un término estrictamente positivo, lo que prueba la afirmación.

(d) Supongamos ahora que ω tiene soporte compacto en una única carta diferenciable orientada positiva o negativamente en M (es posible ya que cualquier forma con soporte compacto puede ser escrita como una suma finita de tales formas mediante una partición de la unidad). Suponga que (U, φ) es una carta diferenciable orientada positivamente en M cuyo dominio contiene el soporte de ω. Cuando F preserva la orientación, es fácil verificar que $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ es una carta diferenciable orientada en N cuyo dominio contiene el soporte de $F^*\omega$, y el resultado se sigue inmediatamente de la Proposición 4.4. Los casos en los que la carta es negativamente orientada o F invierte la orientación siguen de este resultado junto con la parte (b).

□

Capítulo 5

El Teorema de Stokes

Las referencias usadas para demostrar el Teorema de Stokes y sus aplicaciones son [6, 1].

Teorema 5.1 (Teorema de Stokes)**.** *Sea M una n-variedad diferenciable con borde orientada, y sea ω una $(n-1)$-forma diferencial en M con soporte compacto. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{5.1}$$

Observación. *∂M se entiende que tiene la orientación (Stokes) inducida, y el ω en el lado derecho debe interpretarse como $i^*_{\partial M}\omega$ (es decir el pullback de ω por la inclusión en la frontera). Si $\partial M = \emptyset$, entonces el lado derecho se interpreta como cero. Cuando M es de dimensión 1, la integral de la derecha es realmente solo una suma finita.*

Con estos entendimientos, procedemos con la demostración del teorema.

Demostración. Comenzaremos primero, con un caso particular en el que suponemos que M es el semiespacio superior $\mathbb{H}^n$. Dado que ω tiene soporte compacto, hay un número $K > 0$ tal que el soporte de ω está contenido en el rectángulo $A = [-K, K] \times \cdots \times [-K, K] \times [0, K]$. Podemos escribir ω en coordenadas estándar como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde el sombrero indica que dx^i está omitido. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \, dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Así, calculamos

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_0^K \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\, dx^1 \cdots dx^n.$$

Podemos cambiar el orden de integración en cada término para realizar primero la integración sobre x^i. Por el teorema fundamental del cálculo, los términos para los cuales $i \neq n$ se reducen a

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^K \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\, dx^1 \cdots dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^K \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\, dx^i dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^K \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K [\omega_i(x)]_{x_i=-K}^{x_i=K}\, dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n = 0,$$

ya que hemos elegido K suficientemente grande para que $\omega = 0$ cuando $x^i = \pm K$, el único término que podría no ser cero es aquel para el cual $i = n$. Para este término tenemos:

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \int_0^K \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x)\, dx^n dx^1 \cdots dx^{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K [\omega_n(x)]_{x^n=0}^{x^n=K}\, dx^1 \cdots dx^{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{n-1}, \tag{5.2}$$

ya que $\omega_n = 0$ cuando $x^n = K$.

Para comparar esto con el otro lado de la ecuación (5.1), calculamos de la siguiente manera:

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \sum_i \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_i(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

porque x^n se anula en $\partial \mathbb{H}^n$ y el pullback de dx^n al borde es idénticamente cero. Así, el único término no nulo es el correspondiente a $i = n$ que se convierte

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

Teniendo en cuenta que las coordenadas $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ son positivamente orientadas para $\partial \mathbb{H}^n$ si n es par y negativamente orientadas si n es impar, encontramos que esto es igual a la ecuación (5.2).

Ahora consideremos otro caso especial donde $M = \mathbb{R}^n$. Existe un $K > 0$ tal que podemos contener entonces el soporte de ω en un cubo de la forma $[-K, K]^n$. Aplicamos exactamente lo mismo aquí y en este caso todos los términos de se anulan (incluido cuando $i = n$), por lo que el lado izquierdo de (5.1) es cero. Dado que M no tiene borde en este caso, el lado derecho también es cero.

Ahora dejemos que M sea una variedad diferenciable arbitraria con borde, pero consideremos una $(n-1)$-forma diferencial ω, tal que existe una carta diferenciable orientada positiva o negativamente (U, φ), con $(\operatorname{supp} \omega) \subset U$ compacto. Asumiendo que φ es una carta frontera orientada positivamente, la definición se simplifica a:

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^n} d((\varphi^{-1})^* \omega).$$

Por lo anterior, esto es

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* \omega, \tag{5.3}$$

donde $\partial\mathbb{H}^n$ tiene la orientación de Stokes inducida. Dado que $d\varphi$ lleva vectores salientes en ∂M a vectores salientes en $\mathbb{H}^n$ (una demostración se puede ver en [6]), se sigue que $\varphi|_{U\cap\partial M}$ es un difeomorfismo que preserva la orientación sobre $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$, y por lo tanto (5.3) es igual a $\int_{\partial M} \omega$.

Para una carta diferenciable en el borde orientada negativamente, el mismo argumento se aplica pero con un signo negativo adicional en cada lado de la ecuación. Para una carta interior, tenemos los mismos cálculos con $\mathbb{H}^n$ reemplazado por $\mathbb{R}^n$. Esto prueba el teorema en este caso.

Finalmente, dejemos que ω sea una (n-1)-forma diferenciable con soporte arbitrario compacto. Seleccionando un recubrimiento de $\operatorname{supp}(\omega)$ por dominios finitos de cartas diferenciables orientadas positiva o negativamente y eligiendo una partición de la unidad suave subordinada $\{\psi_i\}$, podemos aplicar el argumento precedente a $\psi_i \omega$ para cada i y obtener:

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \psi_i \omega = \sum_i \int_M d(\psi_i \omega) = \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega$$

$$= \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega + \int_M \left(\sum_i \psi_i\right) d\omega = 0 + \int_M d\omega,$$

porque $\sum_i \psi_i = 1$. □

1. Aplicaciónes del Teorema de Stokes

Tras haber demostrado el Teorema de Stokes, nuestro estudio avanza ahora hacia la exploración de sus aplicaciones y las conexiones que establece con otros principios de las matemáticas y la física. Entre estas aplicaciones destacan el Teorema de Green y el Teorema de la Divergencia. Comenzaremos este segmento del trabajo examinando algunas consecuencias inmediatas del teorema y posteriormente demostraremos estos teoremas:

Corolario 5.1 (Integrales de Formas Exactas)**.** *Si M es una variedad diferenciable orientada y compacta sin borde, entonces la integral de **toda forma exacta** sobre M es cero:*

$$\int_M d\omega = 0 \quad \text{si } \partial M = \emptyset.$$

Corolario 5.2 (Integrales de Formas Cerradas sobre Fronteras)**.** *Supongamos que M es una variedad diferenciable, orientada y compacta con borde. Si ω es una forma **cerrada** en M, entonces la integral de ω sobre ∂M es cero:*

$$\int_{\partial M} \omega = 0 \quad \text{si } d\omega = 0 \text{ en } M.$$

Corolario 5.3 (Aplicaciones a Subvariedades). *Suponga que M es una variedad suave, con o sin frontera, y que $S \subseteq M$ es una k-subvariedad diferenciable compacta, orientada (sin borde), y ω es una k-forma cerrada en M. Si $\int_S \omega \neq 0$, entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(a) ω no es exacta en M.

(b) S no es el borde de ninguna subvariedad dierenciable orientada y compacta con frontera en M.

1.1. Teorema de Green

El Teorema de Green es una herramienta fundamental en el campo del cálculo vectorial que relaciona la integral de línea alrededor de una curva cerrada simple y plana con la integral doble sobre la región que dicha curva encierra. Este teorema afirma que la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva cerrada simple es igual a la integral doble del rotacional de ese campo sobre la región que ecierra la curva. En este documento no hemos formalizado las definiciones anteriores, ni las propiedades que cumplen, pero sabemos que el interior de una curva cerrada simple (no tiene intersecciones) es un dominio regular de $\mathbb{R}^2$ y la propia curva es su frontera, así que podemos demostrar lo siguiente:

Teorema 5.2 (Teorema de Green). *Supongamos que D es un dominio regular compacto en $\mathbb{R}^2$, y $(P, Q) : D \to \mathbb{R}^2$ funciones diferenciables. Entonces*

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Demostración. Esto es simplemente el Teorema de Stokes aplicado a la 1-forma $P\, dx + Q\, dy$. □

1.2. Teorema de la divergencia

El Teorema de la Divergencia, también se conoce como el teorema de Gauss y establece un resultado fundamental en el cálculo vectorial y la geometría diferencial. Este teorema establece una relación entre el flujo de un campo vectorial a través de la superficie cerrada que delimita una región y la divergencia de ese campo vectorial dentro de la región. Para poder abordar adecuadamente la demostración del Teorema de la Divergencia en este marco más general, es esencial primero definir y entender algunos conceptos clave que quizás no se han explorado antes, como lo son las variedades de Riemannian. Vamos a proceder a definir estos conceptos previamente para asegurar una comprensión sólida y completa de la demostración que se seguirá.

Variedades de Riemann

Definición 5.1. *Usando la misma definición que para los antisimétricos, un k-tensor covariante α se dice que es* ***simétrico*** *si no varía cada vez que dos de sus elementos se intercambian, es decir:*

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

Un ***k-campo tensorial covariante simétrico*** *es por tanto un campo tensorial donde cada tensor es un k-tensor covariante simétrico.*

Definición 5.2. *Una* ***métrica de Riemann en*** *M es un campo 2-tensorial covariante simétrico diferenciable el cual en cada punto el 2-tensor simétrico definido positivo. Una* ***n-variedad de Riemann*** *(con o sin borde) es un par (M, g) donde M es una n-variedad diferenciable (con o sin borde) y g es una métrica de Riemann en M.*

Para cada variedad diferenciable con o sin borde podemos siempre encontrar una métrica Riemanniana (citar). Para mantener la notación que conocemos, usaremos la notación $\langle v, w\rangle_g$ para referirnos al número real $g_p(v, w)$ dado por dos vectores del tangente de p. Sobre una variedad de riemann usaremos de forma idéntica al producto escalar usual las definiciones de **norma**, **ángulo** y **ortogonalidad**. Por tanto ahora dado una referencia local orientada decimos que es **ortonormal** si $\langle E_i, E_j\rangle_g = \delta^i_j$.

Definición 5.3. *Si $n \geq 1$, (M, g) es una n-variedad de Riemann orientada con o sin borde. Entonces una forma de volumen $\omega_g \in \Omega^n(M)$ que cumple:*

$$\omega_g(E_1, \cdots, E_n) = 1 \tag{5.4}$$

para toda referencia local orientada ortonormal (E_i) de M se le denomina ***forma de volumen Riemanniana****.*

Proposición 5.1. *Sea (M, g) una variedad de riemann orientada, con o sin borde, y sea $S \subseteq M$ una hipersuperficie regular, con o sin frontera. Supongamos que $\tilde{g}$ denota la métrica inducida en S y que N es un campo vectorial normal unitario diferenciable a lo largo de S. Con respecto a la orientación de S determinada por N, la forma de volumen de $(S, \tilde{g})$ se da por:*

$$\omega_{\tilde{g}} = \iota_S^*(i_N(\omega_g)).$$

Demostración. Por la Proposición 4.2, la $(n-1)-$forma $\iota_S^*(i_N(\omega_g))$ es una forma de volumen para S. Para probar que es la forma de volumen Riemanniana para la métrica riemanniana inducida, sólo necesitamos demostrar que da el valor 1 cuando se aplica a una referencia ortonormal orientada para S. Así, sea $(E_1, \ldots, E_{n-1})$ de este tipo. En cada punto $p \in S$, la base $(N_p, E_1, \ldots, E_{n-1})$ es ortonormal y está orientada para T_pM (esta es la definición de la orientación determinada por N). Por lo tanto:

$$\iota_S^*(i_N(\omega_g))(E_1, \ldots, E_{n-1}) = \omega_g(N, E_1, \ldots, E_{n-1}) = 1,$$

lo cual prueba el resultado. □

Sea ahora (M, g) una n-variedad de Riemann orientada (con o sin frontera). Podemos generalizar el operador de divergencia clásico a este contexto de la siguiente manera. La multiplicación por la forma de volumen Riemanniana define un difeomorfismo de fibrados:

$$* : C^\infty(M) \to \Omega^n(M)$$
$$*f = f\, dV_g \tag{5.5}$$

Además definimos otro difeomorfismo de fibrados:

$$\beta : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^{n-1}(M)$$
$$\beta(X) = i_X(dV_g) \tag{5.6}$$

Donde recordamos que i_X denota el producto interior (no confundir con la inclusión ι). Necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 5.1. *Sea (M, g) una variedad de Riemann orientada con o sin borde. Supongamos que S es una hipersuperficie inmersa con orientación determinada por un campo vectorial unitario normal N, y $\tilde{g}$ es la métrica inducida en S. Si X es cualquier campo vectorial a lo largo de S, entonces:*

$$\iota_S^*(\beta(X)) = \langle X, N\rangle_g dV_{\tilde{g}} \tag{5.7}$$

Demostración. Definamos dos campos vectoriales $X^\top$ y $X^\perp$ a lo largo de S:

$$X^\perp = \langle X, N\rangle_g N, \quad X^\top = X - X^\perp$$

Entonces $X = X^\perp + X^T$, donde $X^\perp$ es normal a S y $X^\top$ es tangente a ella. Utilizando esta descomposición,

$$\beta(X) = i_{X^\perp}(dV_g) + i_{X^\top}(dV_g)$$

Ahora hagamos el pullback a S. La Proposición 5.1 muestra que el primer término se simplifica a:

$$\iota_S^*(i_{X^\perp}(dV_g)) = \langle X, N\rangle_g \iota_S^*(i_N(dV_g)) = \langle X, N\rangle_g dV_{\tilde{g}}$$

Así, (5.7) se probará si podemos mostrar que $\iota_S^*(i_{X^\top}(dV_g)) = 0$. Si $X_1, \ldots, X_{n-1}$ son vectores tangentes a S, entonces:

$$(i_{X^\top}(dV_g))(X_1, \ldots, X_{n-1}) = dV_g(X^\top, X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0$$

porque cualquier n-tupla de vectores en un espacio vectorial de dimensión $(n-1)$ es linealmente dependiente. □

Definimos el **operador de divergencia** div : $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ por:

$$\text{div } X = *^{-1} d(\beta(X)), \tag{5.8}$$

o equivalentemente,

$$d(i_X(dV_g)) = (\text{div } X) dV_g. \tag{5.9}$$

El siguiente teorema es un resultado fundamental sobre campos vectoriales en variedades de Riemann. En el caso especial de un dominio compacto regular en $\mathbb{R}^3$, a menudo se le denomina como el **teorema de Gauss**. Veamoslo:

Teorema 5.3 (El Teorema de la Divergencia)**.** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada con frontera. Para cualquier campo vectorial suave y de soporte compacto X en M,*

$$\int_M (\text{div } X) dV_g = \int_{\partial M} (X, N)_g dV_{\tilde{g}}, \tag{5.10}$$

donde N es el campo vectorial normal unitario hacia afuera a lo largo de ∂M y $\tilde{g}$ es la métrica Riemanniana inducida en ∂M.

Demostración. Por el teorema de Stokes,

$$\int_M (\text{div } X) dV_g = \int_M d(\beta(X)) = \int_{\partial M} \iota_S^*(\beta(X)). \tag{5.11}$$

Donde esta última igualdad sale del Lema 5.1. □

1.3. Teorema clásico de Stokes

El teorema original que lleva el nombre de Stokes trata sobre "integrales de superficie" de campos vectoriales sobre superficies en $\mathbb{R}^3$. Utilizando la versión del teorema de Stokes que hemos demostrado, podemos generalizar esto a superficies en variedades Riemannianas tridimensionales. Al igual que para el teorema de la divergencia, necesitamos formalizar varias definiciones que nos van a ayudar a demostrar este teorema.

Dada una variedad de Riemann (M, g) con o sin borde, se define un isomorfismo natural entre el fibrado tangente TM y el fibrado cotangente T^*M a través de la métrica riemanniana g. Para cada punto $p \in M$ y cada vector $v \in T_pM$, definimos el covector $\hat{g}(v) \in T_p^*M$ por

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w) \quad \text{para todo } w \in T_pM.$$

Esto es un difeomorfismo de fibrados, ya que actua sobre campos vectoriales diferenciables de la siguiente forma:

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y) \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Por tanto $\hat{g}(X)$ es un campo covectorial, que solemos denotar como $X^\flat$ (X bemol). Podemos considerar también la inversa $\hat{g}^{-1} : T_p^*M \to T_pM$ y hacer que actue sobre campos covectoriales $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Al igual que para $\hat{g}$, para esta función existe una notación musical que es $\omega^\sharp$ (ω sostenido). Estos isomorfismos son conocidos como **isomorfismos musicales**.

La aplicación principal del operador sostenido es definir el concepto de **gradiente** como un campo vectorial en una variedad de Riemann, haciendo que coincida con la definición de gradiente en $\mathbb{R}^n$ si consideramos la métrica euclídea. La definición es la siguiente:

$$\text{grad } f = (df)^\sharp = \hat{g}^{-1}(df).$$

Asumamos ahora que (M, g) es una variedad Riemanniana orientada de dimensión 3. Definimos el **operador rotacional** como:

$$\text{rot} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

$$\text{rot } X = \beta^{-1}(d(X^\flat)), \tag{5.12}$$

donde β es como se define en la ecuación (5.6). Desenredando las definiciones, vemos que esto es equivalente a:

$$i_{(\text{rot}X)}(dV_g) = d(X^\flat). \tag{5.13}$$

Los operadores div, grad, y rot en una 3-variedad de Riemann orientada (M, g) están relacionados por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "\text{grad}"] \arrow[d, "\text{Id}"] & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, "\flat"] & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, "\beta"] & C^\infty(M) \arrow[d, "*"] \\
\Omega^0(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(M)
\end{tikzcd}$$

Las identidades $\text{rot} \circ \text{grad} \equiv 0$ y $\text{div} \circ \text{rot} \equiv 0$ se siguen de $d \circ d \equiv 0$, coincidiendo con el caso euclídeo. El operador rotacional solo se define en dimensión 3 porque es el único caso en el que $\Lambda^2 T^*M$ es isomorfo a TM (mediante la aplicación $\beta : X \mapsto i_X(dV_g)$).

Supongamos ahora que $S \subseteq M$ es una subvariedad compacta bidimensional, con o sin borde, y que N es un campo vectorial normal unitario diferenciable a lo largo de S.

Sea dA la forma de volumen riemanniana en S con respecto a la métrica inducida ι_S^* y la orientación determinada por N, de modo que $dA = \iota_S^*(i_N(dV_g))$ por la Proposición 4.2. Para cualquier campo vectorial diferenciable X definido en M, la **integral de superficie de X sobre S** (respecto a la elección dada del campo normal unitario) se define como:

$$\int_S \langle X, N \rangle_g \, dA.$$

Teorema 5.4 (Teorema de Stokes para Integrales de Superficie)**.** *Sea M una 3-variedad de Riemann orientada, con o sin borde, y S es una 2-subvariedad compacta orientada con borde en M. Para cualquier campo vectorial diferenciable X en M,*

$$\int_S \langle \text{rot } X, N \rangle_g \; dA = \int_{\partial S} \langle X, T \rangle_g \; ds, \tag{5.14}$$

donde N es el campo vectorial normal unitario diferenciable a lo largo de S que determina su orientación, ds es la forma de volumen Riemanniana inducida en ∂S, y T es el campo tangente único orientado positivamente en ∂S.

Demostración. La versión general del teorema de Stokes aplicada a la forma de grado 1 $X^\flat$ produce:

$$\int_S d(X^\flat) = \int_{\partial S} X^\flat. \tag{5.15}$$

Así, el teorema sigue de las siguientes dos identidades:

$$\iota_S^* \, d(X^\flat) = \langle \text{rot } X, N \rangle_g \, dA, \tag{5.16}$$

$$\iota_{\partial S}^* \, X^\flat = \langle X, T \rangle_g ds. \tag{5.17}$$

Esto prueba (5.14) y, por lo tanto, el teorema. □

Si tomamos $M = \mathbb{R}^3$, tenemos que este es el conocido teorema de Stokes clásico que se ve en los textos de cálculo de multivariable.

Otras aplicaciones

Tras explorar y demostrar el teorema de Stokes y relacionarlo con fundamentos clásicos como el teorema de Green, el teorema de la divergencia y el teorema clásico de Stokes, queda patente la vasta utilidad y aplicabilidad de este teorema en diversas áreas del conocimiento. Las aplicaciones del teorema de Stokes se extienden más allá de los límites matemáticos para infiltrarse en campos como la física y la ingeniería. Un ejemplo destacado es la ley de Faraday en electromagnetismo, que describe cómo un campo eléctrico se induce por un cambio en el flujo magnético. Asimismo, el teorema tiene aplicaciones cruciales en física cuántica, especialmente en la descripción de propiedades magnéticas y el cálculo del flujo magnético, además de formar la base de las fundamentales ecuaciones de Maxwell. Una comprensión del origen de estas ecuaciones puede verse en [2]. Esta versatilidad del teorema de Stokes no solo subraya su importancia teórica sino también su profundo impacto práctico en la ciencia y tecnología modernas.

Bibliografía

[1] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume No. 63 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[2] Daniel Fleisch. *A Student's Guide to Maxwell's Equations*. Cambridge Press, 2008.

[3] Victor J. Katz. *A history of mathematics : an introduction*. New York : HarperCollins, 1993.

[4] Dongryul Kim. *A rough guide to linear algebra*. [Propio autor], 2020.

[5] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2011.

[6] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[7] A. Nijenhuis. *J.A. Schouten: a master at tensors (28 August 1883 - 20 January 1971)*, pages 9–15. CWI, January 1994.

[8] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman & Co., Glenview, Ill.-London, 1971.

[9] Hermann Weyl. *The Concept Of A Riemann Surface*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co, 3 edition, 1964.

[10] Luis Miguel Merino González y Evangelina Santos Aláez. *Álgebra Lineal con métodos elementales*. 2018.

[11] J.Manuel Gamboa y Jesús M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*. Universidad Complutense de Madrid, June 2022.

[12] M. Nieves Álamo Antúnez. *Apuntes de la asignatura Geometría Diferencial*. [Propio autor], 2022.

[13] Óscar M. Perdomo. *Sobre el nacimento de la Geometría Riemanniana*, volume 3, pages 157–173. Revista Tumbaga, 2008.