

# Tema 2: Autómatas Finitos y Expresiones Regulares

Serafín Moral

Universidad de Granada

Octubre, 2020

- Autómata Finito Determinista
- Autómata Finito No-Determinista
- Autómata Finito con Transiciones Nulas
- Expresiones Regulares
- Gramáticas Regulares

Son importantes en las siguientes tareas:

- Software para el diseño y verificación de circuitos digitales.
- Construcción de analizadores léxicos de compiladores.
- Software para analizar grandes conjuntos de textos para buscar palabras, estructuras u otros patrones (p.e. páginas web).
- Software para comprobar la corrección de cualquier tipo de sistemas que tengan un número finito de estados diferentes (p.e. protocolos de comunicación).

## Ejemplo Introductorio

Supongamos que queramos reconocer palabras que son direcciones de correo electrónico del tipo **nombre@dominio.exten**, donde **nombre** es una palabra formada por dígitos y caracteres alfabéticos, y **dominio** y **extensión** son palabras formadas por símbolos alfabéticos (la realidad es más compleja).

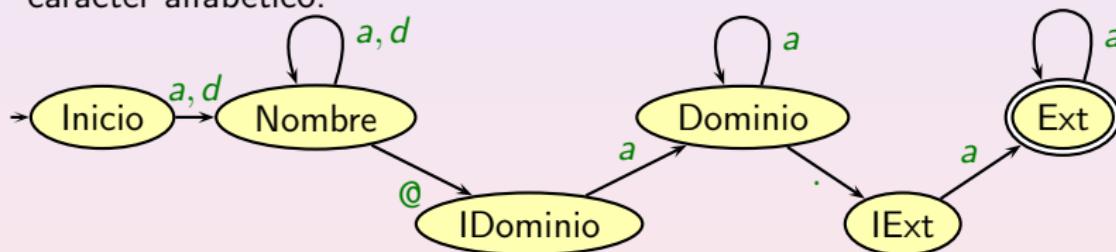
¿Cómo podemos especificar un algoritmo que identifique las palabras que corresponden a este patrón?

# Ejemplo Introductorio

Supongamos que queramos reconocer palabras que son direcciones de correo electrónico del tipo **nombre@dominio.exten**, donde **nombre** es una palabra formada por dígitos y caracteres alfabéticos, y **dominio** y **extensión** son palabras formadas por símbolos alfabéticos (la realidad es más compleja).

¿Cómo podemos especificar un algoritmo que identifique las palabras que corresponden a este patrón?

Una idea es usar el siguiente diagrama en el que **d** es un dígito y **a** un carácter alfabético.

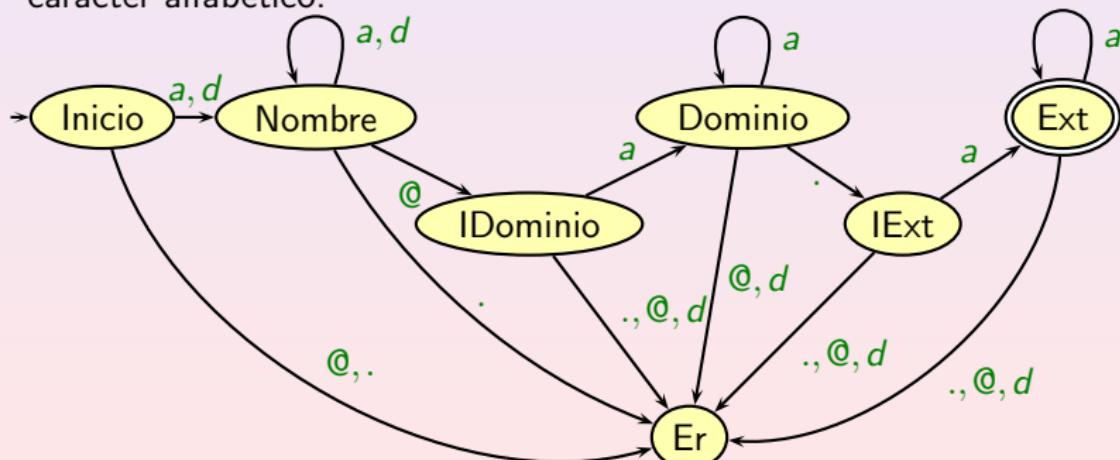


# Ejemplo Introductorio

Supongamos que queramos reconocer palabras que son direcciones de correo electrónico del tipo **nombre@dominio.exten**, donde **nombre** es una palabra formada por dígitos y caracteres alfabéticos, y **dominio** y **extensión** son palabras formadas por símbolos alfabéticos (la realidad es más compleja).

¿Cómo podemos especificar un algoritmo que identifique las palabras que corresponden a este patrón?

Una idea es usar el siguiente diagrama en el que **d** es un dígito y **a** un carácter alfabético.



# AUTOMATA FINITO DETERMINISTA

Un **autómata finito** es una quintupla  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  donde

- $Q$  es un conjunto finito llamado **conjunto de estados**
- $A$  es un alfabeto llamado **alfabeto de entrada**
- $\delta$  es una aplicación llamada **función de transición**

$$\delta : Q \times A \rightarrow Q$$

- $q_0$  es un elemento de  $Q$ , llamado **estado inicial**
- $F$  es un subconjunto de  $Q$ , llamado **conjunto de estados finales**.

# Ejemplo

Sea el autómata  $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$ , donde

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $A = \{a, b\}$
- La función de transición viene dada por:

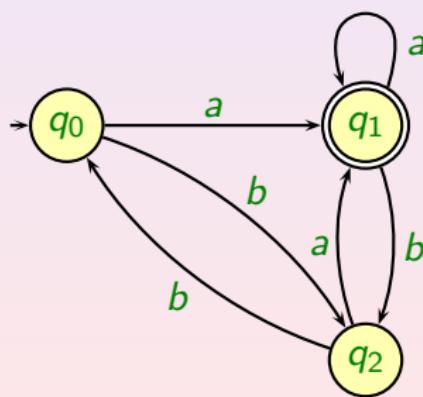
$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= q_1, & \delta(q_0, b) &= q_2, \\ \delta(q_1, a) &= q_1, & \delta(q_1, b) &= q_2, \\ \delta(q_2, a) &= q_1, & \delta(q_2, b) &= q_0\end{aligned}$$

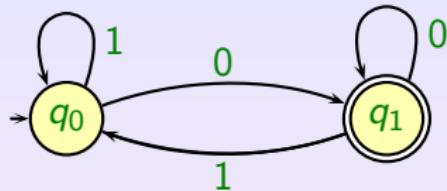
- $F = \{q_1\}$

# Diagrama de Transición

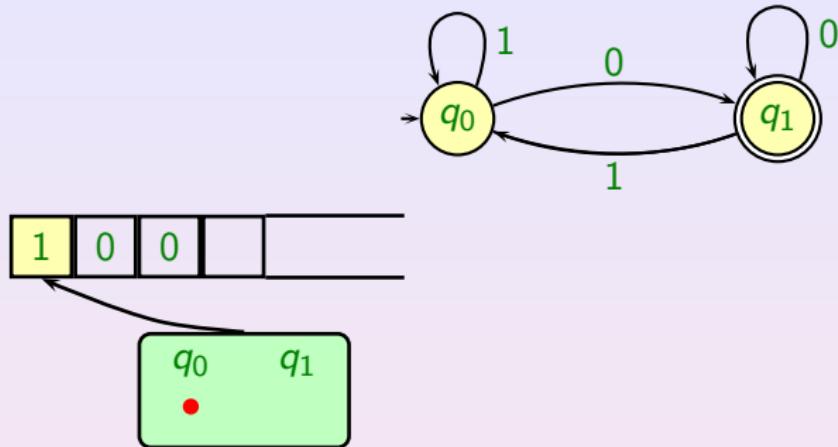
Es un grafo en el que:

- Hay un nodo por cada estado
- Por cada transición  $\delta(q, a) = p$  hay un arco de  $q$  a  $p$  con la etiqueta  $a$ .
- El estado inicial está indicado con un ángulo entrante. Los estados finales están indicados con una doble circunferencia.

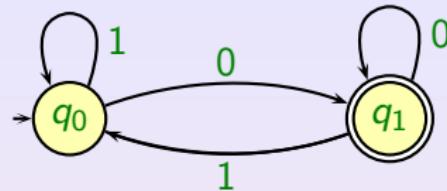




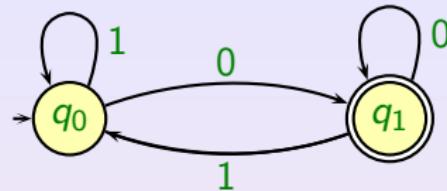
# Cálculo Asociado. Traza



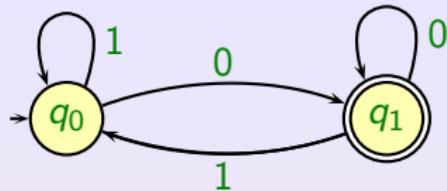
# Cálculo Asociado. Traza



# Cálculo Asociado. Traza



# Cálculo Asociado. Traza



Estado final  
SI

# PROCESO DE CALCULO

Autómata  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$

- **Descripción Instantánea o Configuración:**  
Un elemento de  $Q \times A^*$ :  $(q, u)$ .
- **Configuración Inicial para**  $u \in A^*$ :  $(q_0, u)$
- **Relación paso de cálculo entre dos configuraciones:**

$$((q, au) \vdash (p, u)) \Leftrightarrow \delta(q, a) = p$$

De una configuración sólo se puede pasar a lo máximo a una configuración en un paso de cálculo.

- Relación de cálculo entre dos configuraciones:

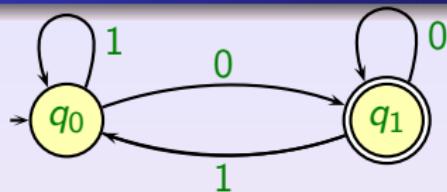
$((q, u) \xrightarrow{*} (p, v))$  si y solo si existe una sucesión de configuraciones  $C_0, \dots, C_n$  tales que  $C_0 = (q, u)$ ,  $C_n = (p, v)$  y  $\forall i \leq n - 1, C_i \vdash C_{i+1}$ .

## Lenguaje Aceptado por un Autómata Finito

$$L(M) = \{u \in A^* : (q_0, u) \xrightarrow{*} (q, \varepsilon), q \in F\}$$

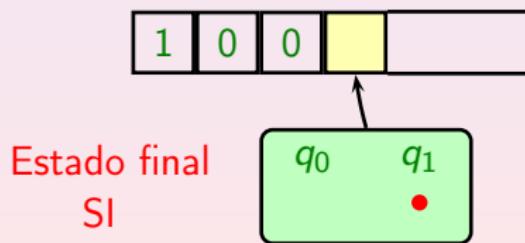
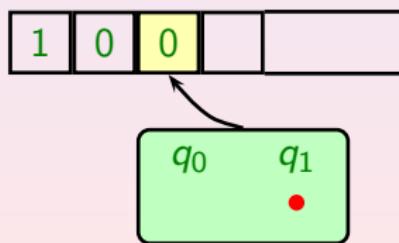
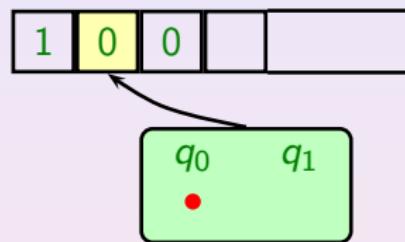
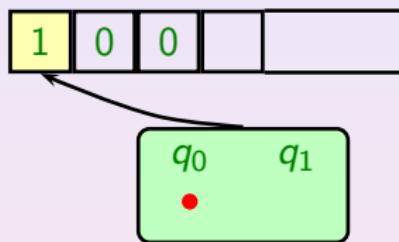
Las palabras de  $L(M)$  se dicen aceptadas por el autómata.

# Ejemplo. Cálculo Asociado



$(q_0, 100) \vdash (q_0, 00) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_1, \varepsilon)$

$(q_0, 100) \stackrel{*}{\vdash} (q_1, \varepsilon)$ , 100 aceptada



# Definición Alternativa del Lenguaje Aceptado por un Autómata Finito: Función de estado

Dado  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , definimos  $\delta^* : Q \times A^* \rightarrow Q$ , como:

- Si  $q \in Q$ ,
  - $\delta^*(q, \varepsilon) = q$
  - $\delta^*(q, au) = \delta^*(\delta(q, a), u)$

$\delta^*(q, u)$  es el estado al que llegaría el autómata si parte del estado  $q$  y lee la palabra  $u$ .

# Definición Alternativa del Lenguaje Aceptado por un Autómata Finito: Función de estado

Dado  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , definimos  $\delta^* : Q \times A^* \rightarrow Q$ , como:

- Si  $q \in Q$ ,
  - $\delta^*(q, \varepsilon) = q$
  - $\delta^*(q, au) = \delta^*(\delta(q, a), u)$

$\delta^*(q, u)$  es el estado al que llegaría el autómata si parte del estado  $q$  y lee la palabra  $u$ .

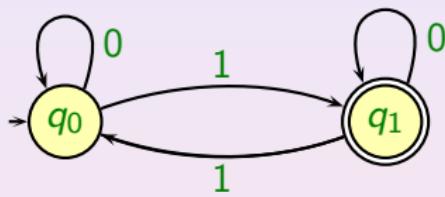
## Propiedad

Es inmediato probar que el lenguaje aceptado por un autómata finito se puede expresar como:

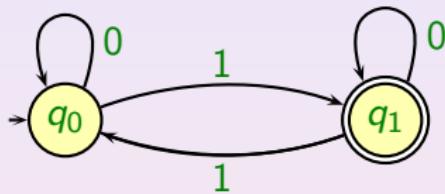
$$L(M) = \{u \in A^* : \delta^*(q_0, u) \in F\}$$

También podremos aplicar  $\delta^*$  a conjuntos de estados,  $\delta^* : Q \times A^* \rightarrow Q$ :  
 $\delta^*(P, u) = \{\delta^*(q, u) : q \in P\}$ .

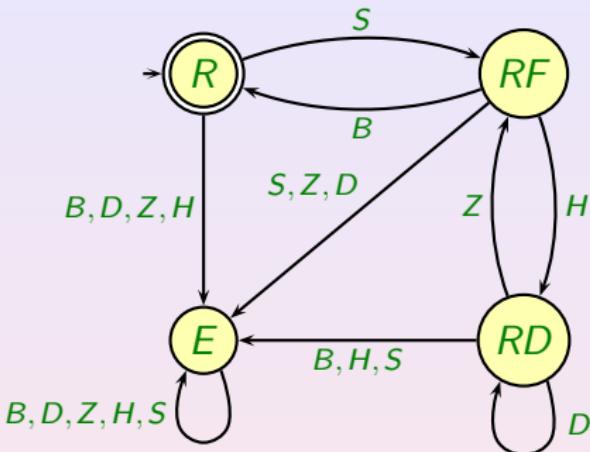
# Ejemplo



# Ejemplo



Acepta el conjunto de palabras con un número impar de 1.



**R:** Estado de espera

**RD:** Recepción de datos

**S:** Comienza recepción

**H:** Cabecera de fichero

**D:** Datos

**RF:** Estado de recepción de ficheros

**E:** Error

**B:** Fin de recepción

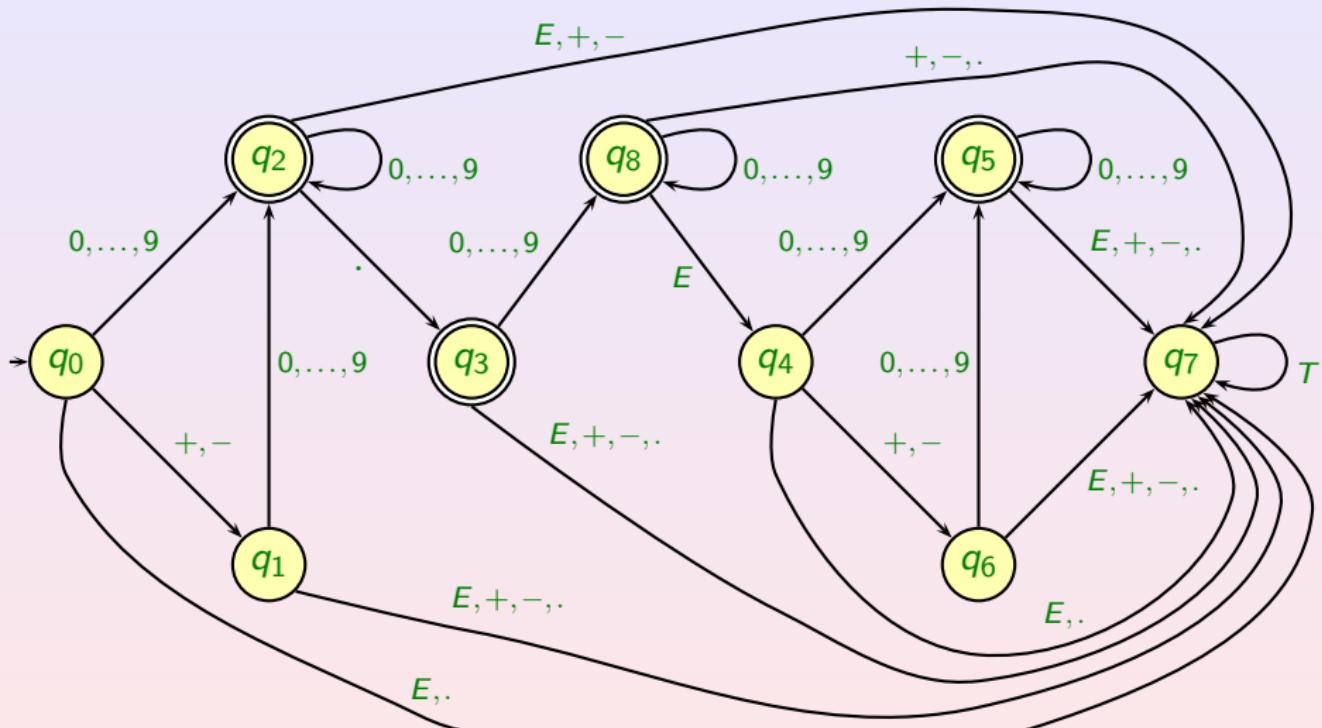
**Z:** Fin de fichero

Gramática  $G = (V, T, P, S)$ , donde

- $T = \{+, -, E, 0, 1, \dots, 9, .\}$
- $V = \{\langle \text{Signo} \rangle, \langle \text{Digito} \rangle, \langle \text{Natural} \rangle, \langle \text{Entero} \rangle, \langle \text{Real} \rangle\}$
- $S = \langle \text{Real} \rangle$
- $P$  contiene las siguientes producciones
  - $\langle \text{Signo} \rangle \rightarrow + | -$
  - $\langle \text{Digito} \rangle \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$
  - $\langle \text{Natural} \rangle \rightarrow \langle \text{Digito} \rangle | \langle \text{Digito} \rangle \langle \text{Natural} \rangle$
  - $\langle \text{Entero} \rangle \rightarrow \langle \text{Natural} \rangle | \langle \text{Signo} \rangle \langle \text{Natural} \rangle$
  - $\langle \text{Real} \rangle \rightarrow \langle \text{Entero} \rangle | \langle \text{Entero} \rangle .$
  - $\langle \text{Real} \rangle \rightarrow \langle \text{Entero} \rangle . \langle \text{Natural} \rangle$
  - $\langle \text{Real} \rangle \rightarrow \langle \text{Entero} \rangle . \langle \text{Natural} \rangle E \langle \text{Entero} \rangle$

# Autómata Finito

$T$  es el conjunto de los símbolos terminales.



Un autómata finito no determinista es una quintupla

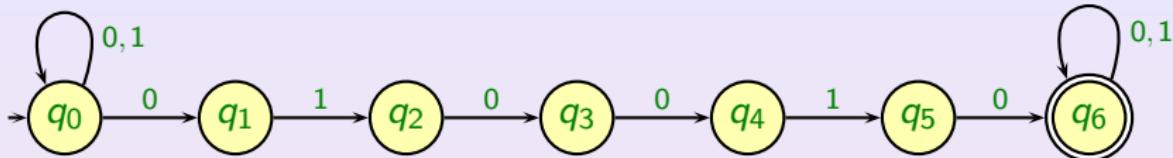
$M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  en la que

- $Q$  es un conjunto finito llamado **conjunto de estados**
- $A$  es un alfabeto llamado **alfabeto de entrada**
- $\delta$  es una aplicación llamada **función de transición**

$$\delta : Q \times A \rightarrow \wp(Q)$$

- $q_0$  es un elemento de  $Q$ , llamado **estado inicial**
- $F$  es un subconjunto de  $Q$ , llamado **conjunto de estados finales**.

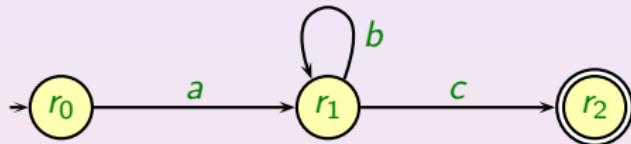
# Ejemplo



- Se pueden usar también diagramas de transición.
- Puede haber estados que para una entrada tenga dos transiciones. Por ejemplo,  $q_0$  cuando lee 0 puede quedarse en  $q_0$  o pasar a  $q_1$ .
- También puede haber estados que para una entrada no tengan ninguna transición: desde  $q_1$  no se puede leer el 0.
- Acepta el conjunto de las palabras que tienen a 010010 como subcadena: palabras que se **pueden** leer pasando de  $q_0$  a un estado final.

# Ejemplos

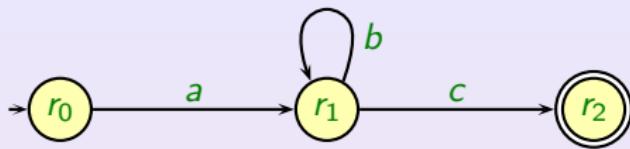
También es no-determinista:



Acepta cadenas formadas por una **a**, una sucesión de **b** y una **c**.

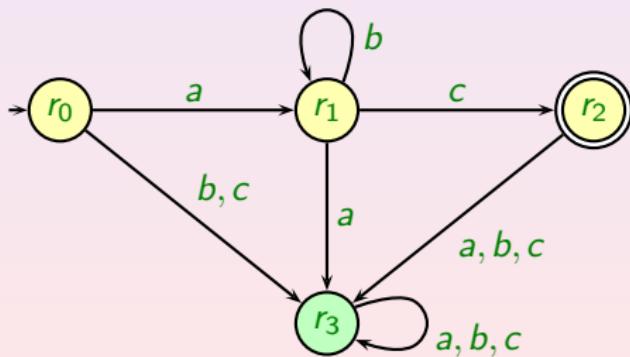
# Ejemplos

También es no-determinista:



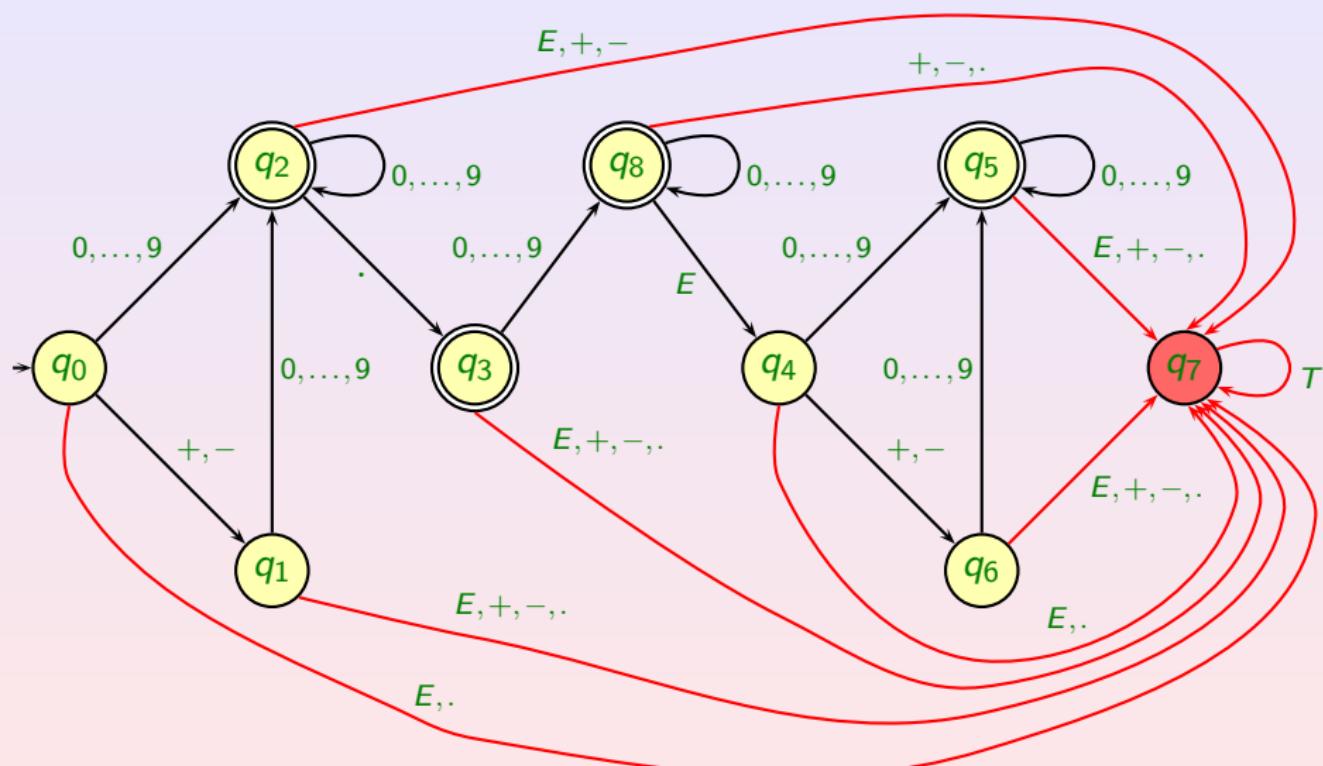
Acepta cadenas formadas por una **a**, una sucesión de **b** y una **c**.

Se puede transformar en uno determinista que acepte el mismo lenguaje añadiéndole un **estado de error** donde vayan todas las transiciones no definidas en el autómata anterior:



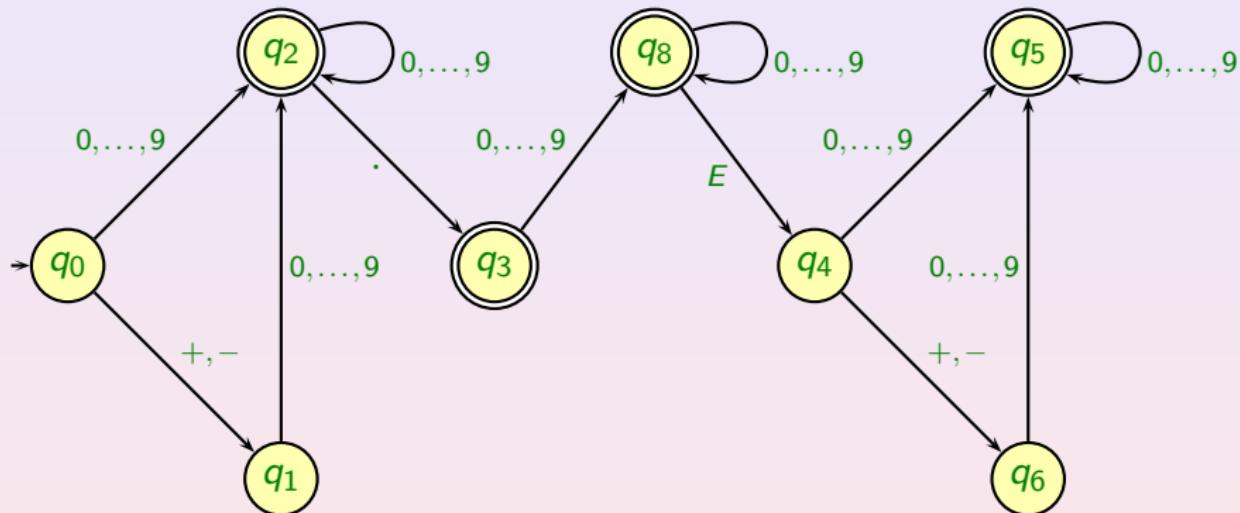
# Ejemplo: Constantes reales

Autómata determinista:



# Ejemplo: Constantes reales

Autómata no determinista:



Autómata no determinista  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$

- **Descripción Instantánea o Configuración:**  
Un elemento de  $Q \times A^*$ :  $(q, u)$ .
- **Configuración Inicial para**  $u \in A^*$ :  $(q_0, u)$
- **Relación paso de cálculo entre dos configuraciones:**

$$((q, au) \vdash (p, u)) \Leftrightarrow p \in \delta(q, a)$$

De una configuración se puede pasar a varias configuraciones distintas en un paso de cálculo, e incluso a ninguna.

- Relación de cálculo entre dos configuraciones:

$((q, u) \stackrel{*}{\vdash} (p, v))$  si y solo si existe una sucesión de configuraciones  $C_0, \dots, C_n$  tales que  $C_0 = (q, u)$ ,  $C_n = (p, v)$  y  $\forall i \leq n-1, C_i \vdash C_{i+1}$ .

Lenguaje Aceptado por un AF no-determinista

$$L(M) = \{u \in A^* : \exists q \in F, (q_0, u) \stackrel{*}{\vdash} (q, \varepsilon)\}$$

Las palabras de  $L(M)$  se dicen aceptadas por el autómata.

# Función de Estado: lenguaje aceptado

Dado un autómata  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , definimos la función  $\delta^*$  de la siguiente forma:

- Si  $B \subseteq Q$ ,

$$\delta^*(B, a) = \bigcup_{q \in B} \delta(q, a)$$

- Si  $B \subseteq Q$ ,

- $\delta^*(B, \varepsilon) = B$
- $\delta^*(B, au) = \delta^*(\delta^*(B, a), u)$

- $\delta^*(q, u) = \delta^*(\{q\}, u)$

$\delta^*(B, u)$  es igual a todos los estados a los que se puede llegar desde cualquiera de los estados de  $B$  después de leer la palabra  $u$ .

# Función de Estado: lenguaje aceptado

Dado un autómata  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , definimos la función  $\delta^*$  de la siguiente forma:

- Si  $B \subseteq Q$ ,

$$\delta^*(B, a) = \bigcup_{q \in B} \delta(q, a)$$

- Si  $B \subseteq Q$ ,

- $\delta^*(B, \varepsilon) = B$
- $\delta^*(B, au) = \delta^*(\delta^*(B, a), u)$

- $\delta^*(q, u) = \delta^*(\{q\}, u)$

$\delta^*(B, u)$  es igual a todos los estados a los que se puede llegar desde cualquiera de los estados de  $B$  después de leer la palabra  $u$ .

## Propiedad

Es inmediato probar que el lenguaje aceptado por un autómata finito no-determinista se puede expresar como:

$$L(M) = \{u \in A^* : \delta^*(q_0, u) \cap F \neq \emptyset\}$$



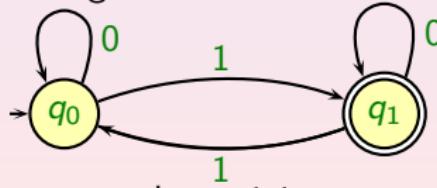
## Equivalencia

Un lenguaje  $L$  puede ser aceptado por un autómata finito determinista si y solo si  $L$  puede ser aceptado por un autómata finito no determinista.

### Propiedad 1: Aut. Deterministas $\rightarrow$ No-Deterministas

Todo lenguaje  $L$  aceptado por un autómata determinista es aceptado también por un autómata no-determinista

Esto se comprueba considerando que todos los autómatas deterministas son también autómatas no-deterministas, en los que  $\delta(q, a)$  tiene siempre un y sólo un estado. Ambos autómatas tienen el mismo cálculo asociado y aceptan el mismo lenguaje. El diagrama de transición es el mismo:



Así, si  $L$  es aceptado por un autómata determinista es aceptado también por un autómata no-determinista: aquel que tiene el mismo diagrama.

## Propiedad 2: Aut. No-Deterministas → Deterministas

Todo lenguaje  $L$  aceptado por un autómata no determinista es aceptado también por un autómata determinista

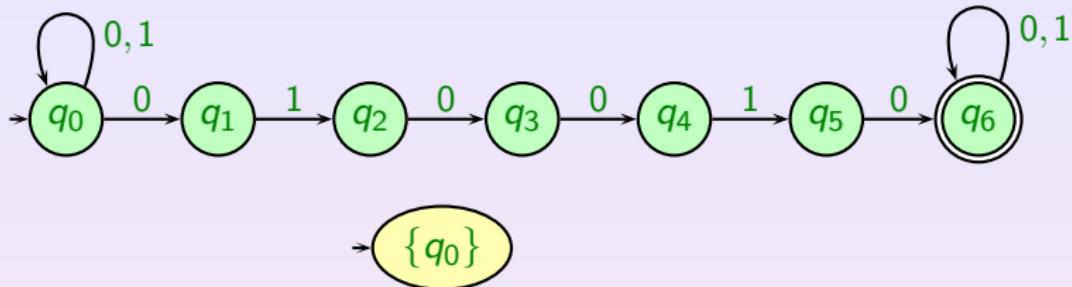
Dado un AFND  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  se llama **autómata determinista asociado** a  $M$ , al autómata  $\bar{M} = (\bar{Q}, A, \bar{\delta}, \bar{q}_0, \bar{F})$  dado por

- $\bar{Q} = \wp(Q)$
- $\bar{q}_0 = \{q_0\}$
- $\bar{\delta}(B, a) = \delta^*(B, a) = \bigcup_{q \in B} \delta(q, a)$
- $\bar{F} = \{B \in \wp(Q) \mid B \cap F \neq \emptyset\}$

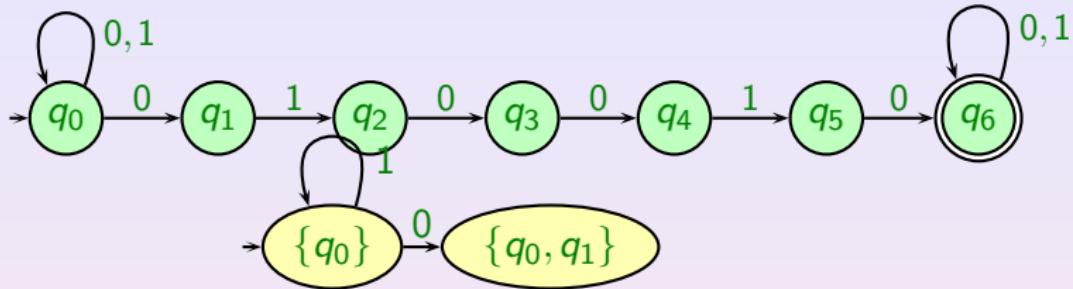
**Idea básica:** Dado un autómata no determinista se le hace corresponder uno determinista que recorre todos los caminos al mismo tiempo.

**Un autómata no-determinista y su determinista asociado aceptan el mismo lenguaje**

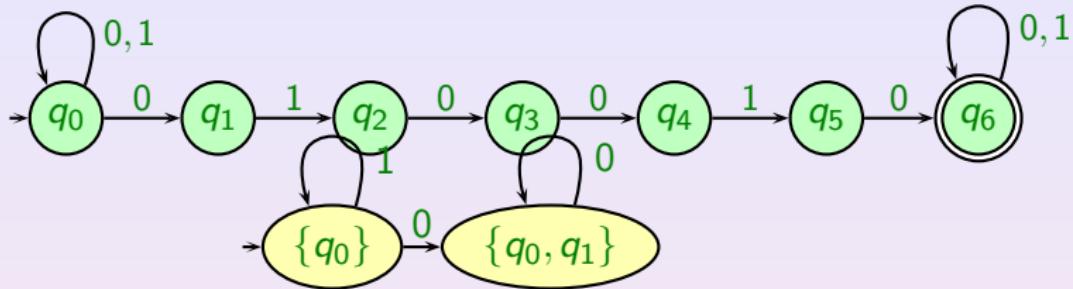
# Ejemplo



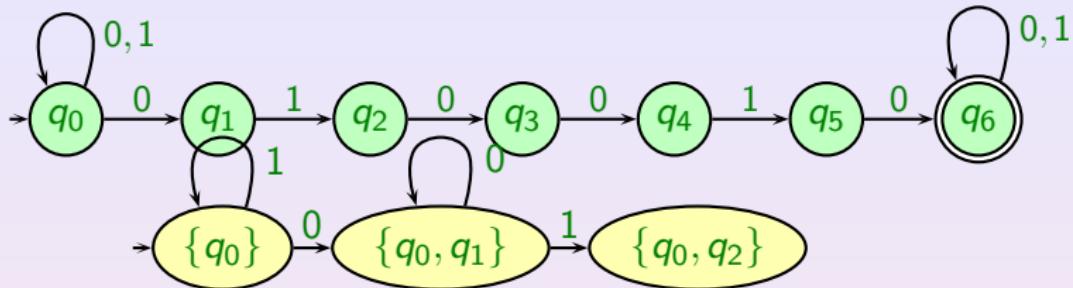
# Ejemplo



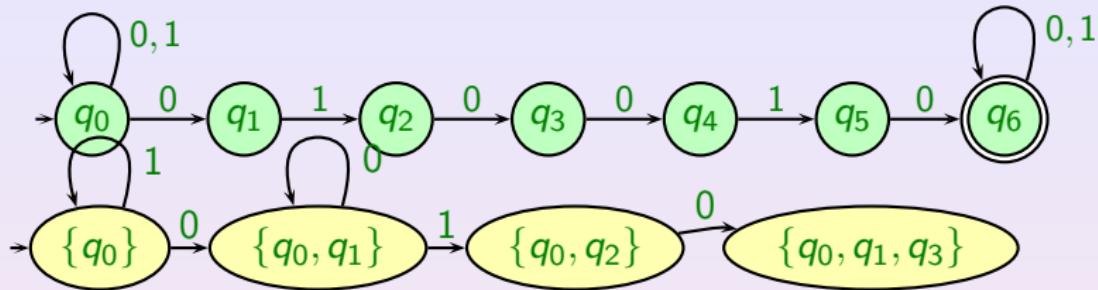
# Ejemplo



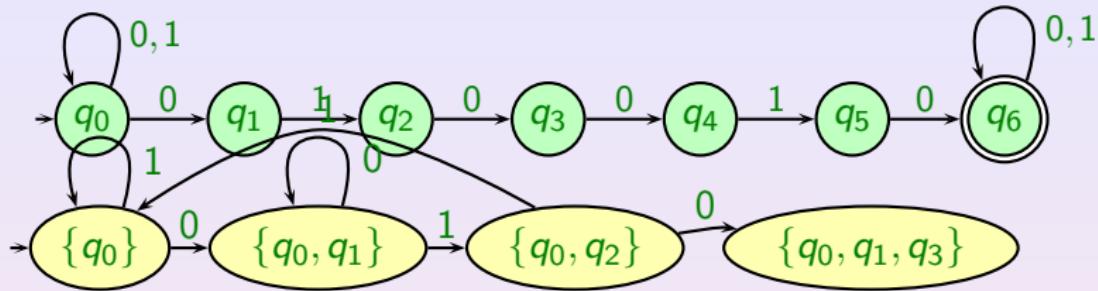
# Ejemplo



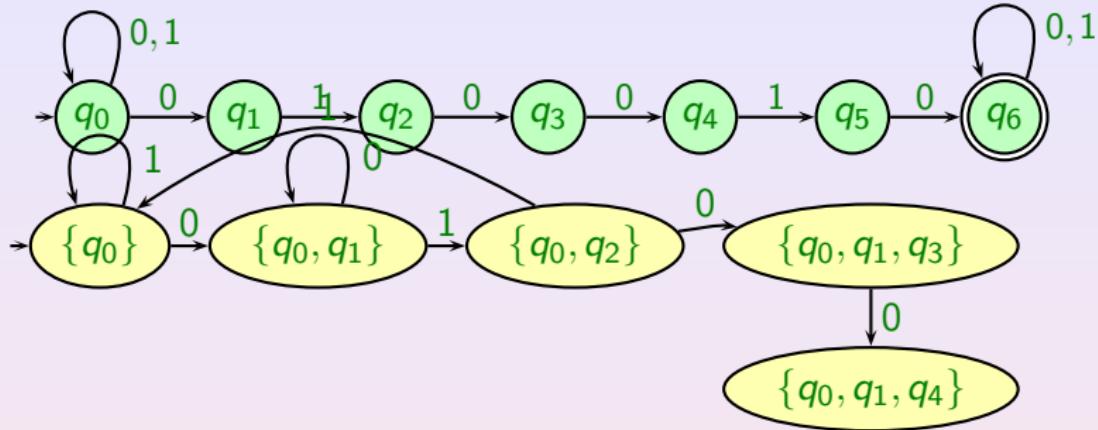
# Ejemplo



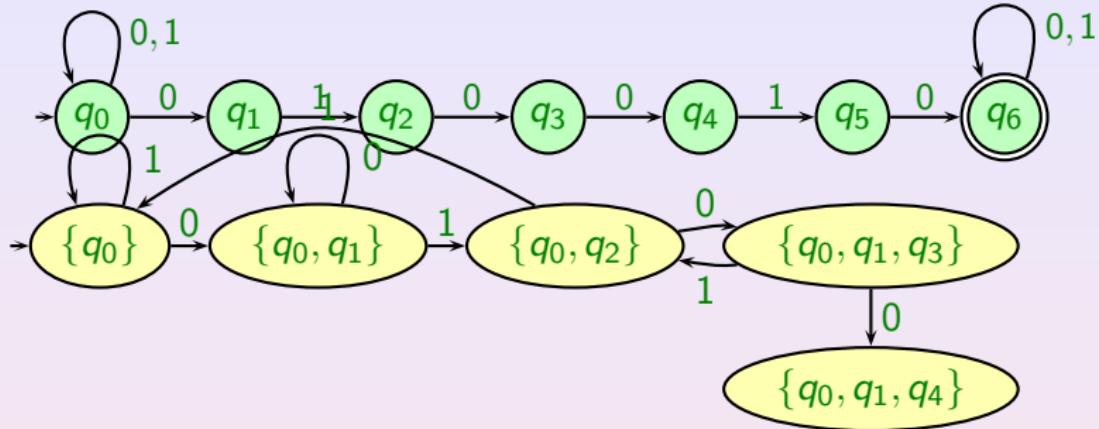
# Ejemplo



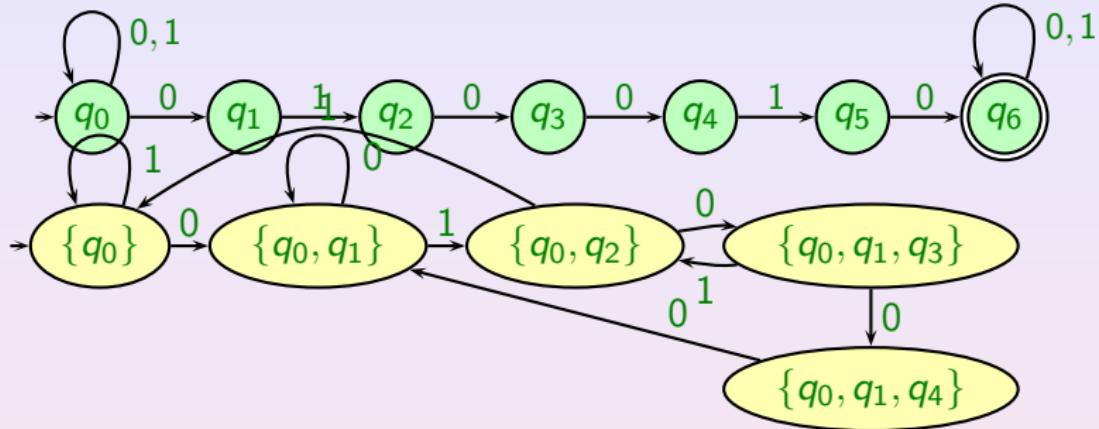
# Ejemplo



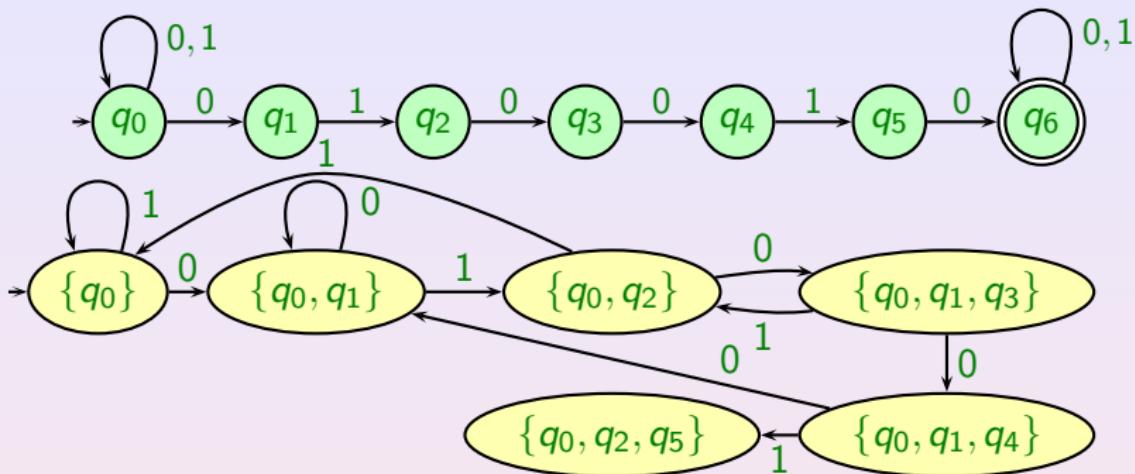
# Ejemplo



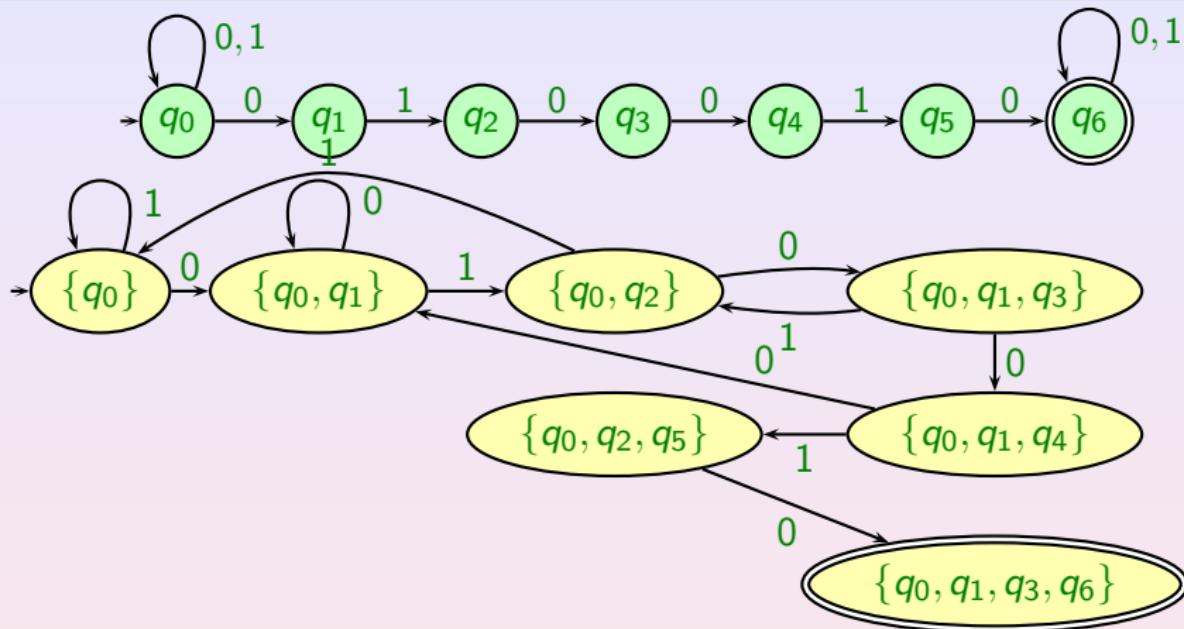
# Ejemplo



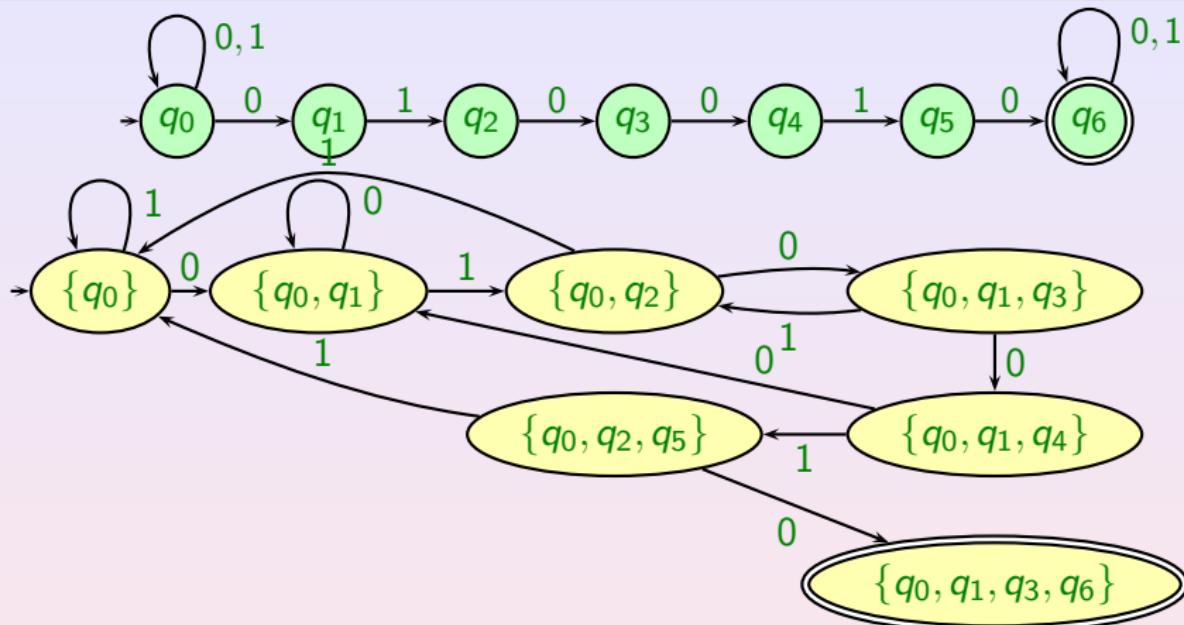
# Ejemplo



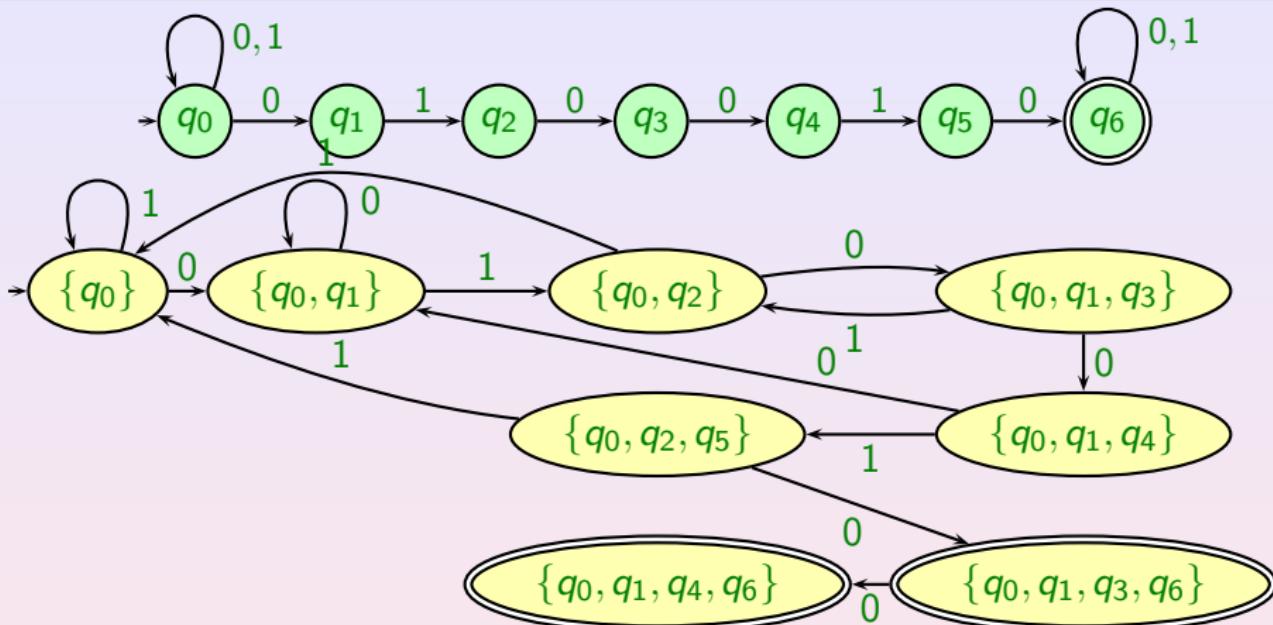
# Ejemplo



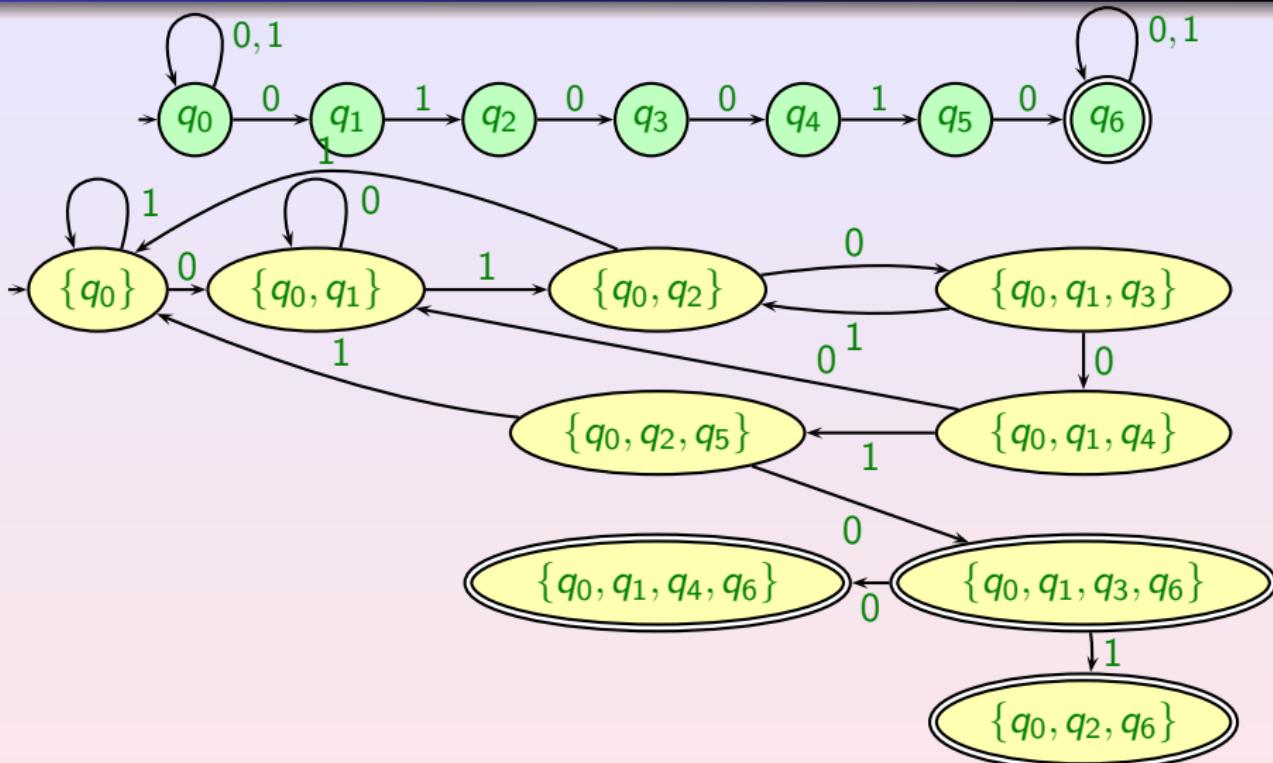
# Ejemplo



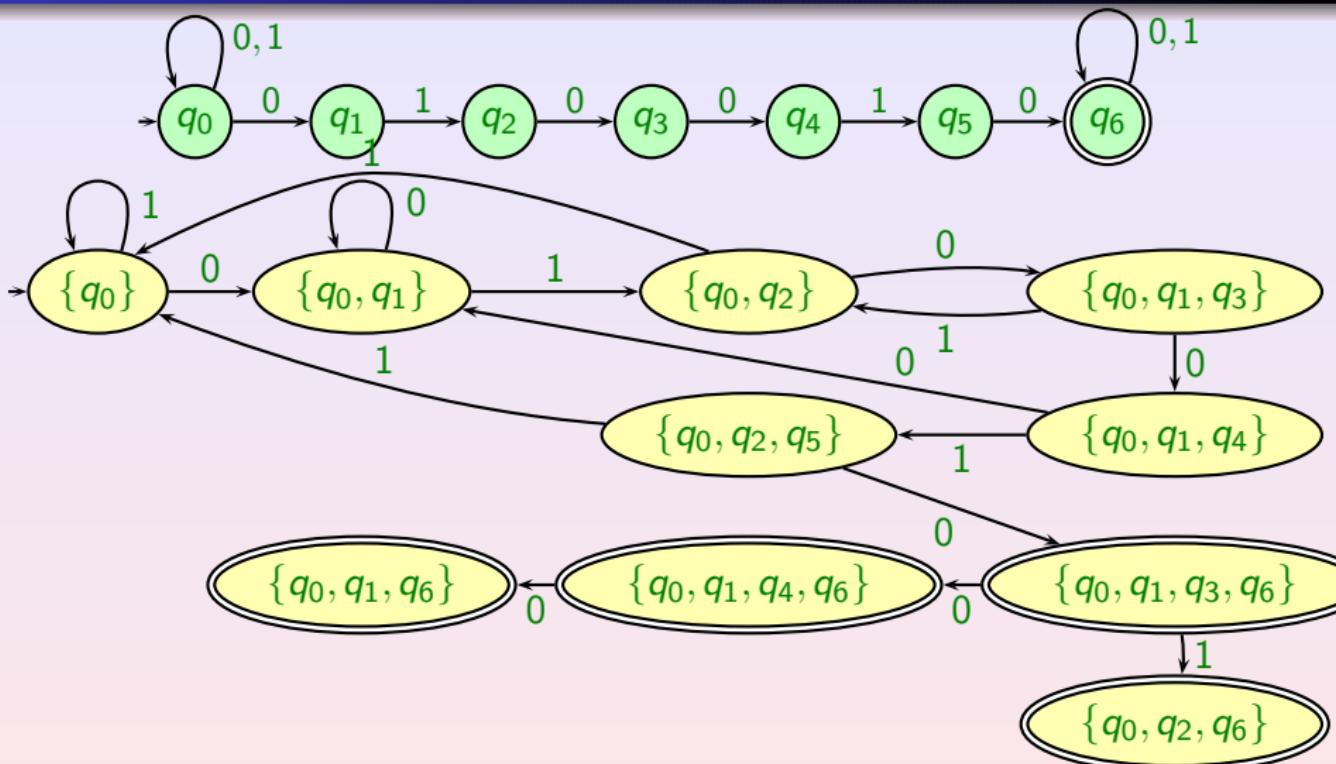
# Ejemplo



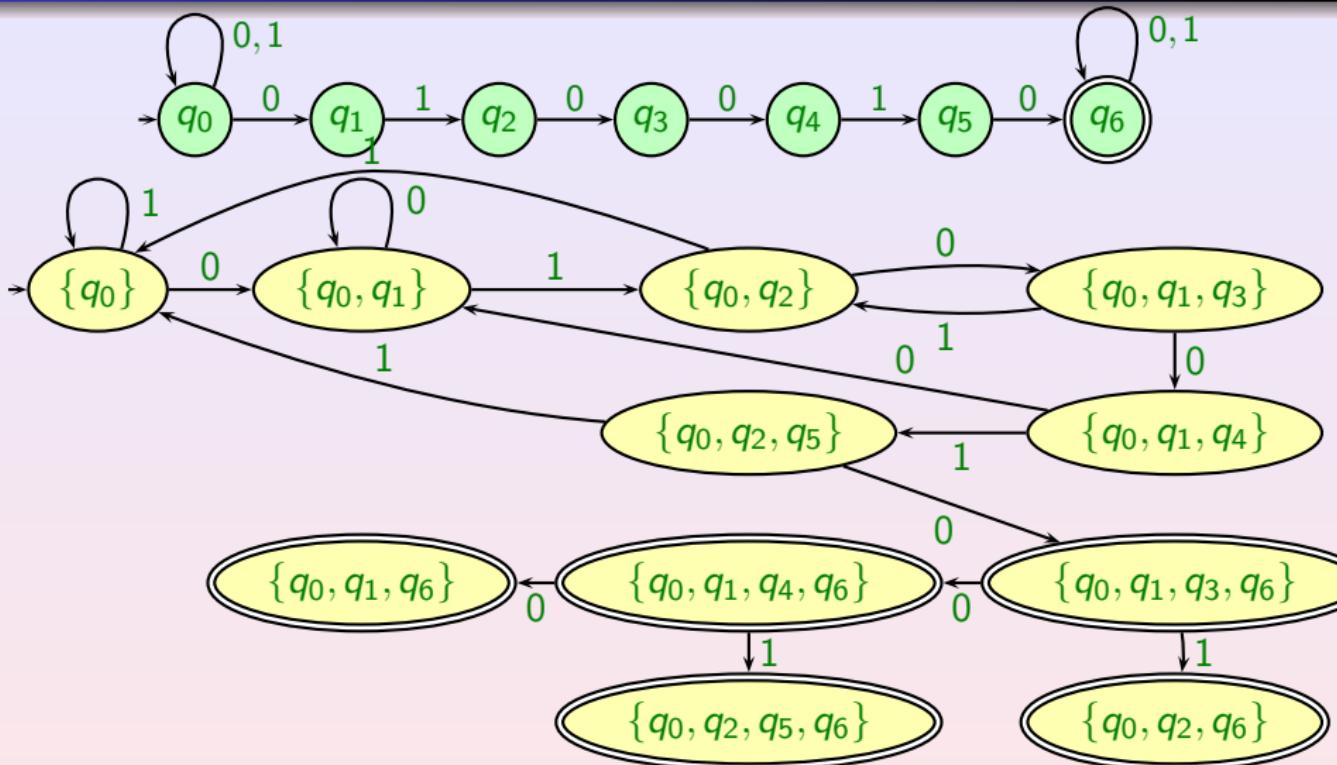
# Ejemplo



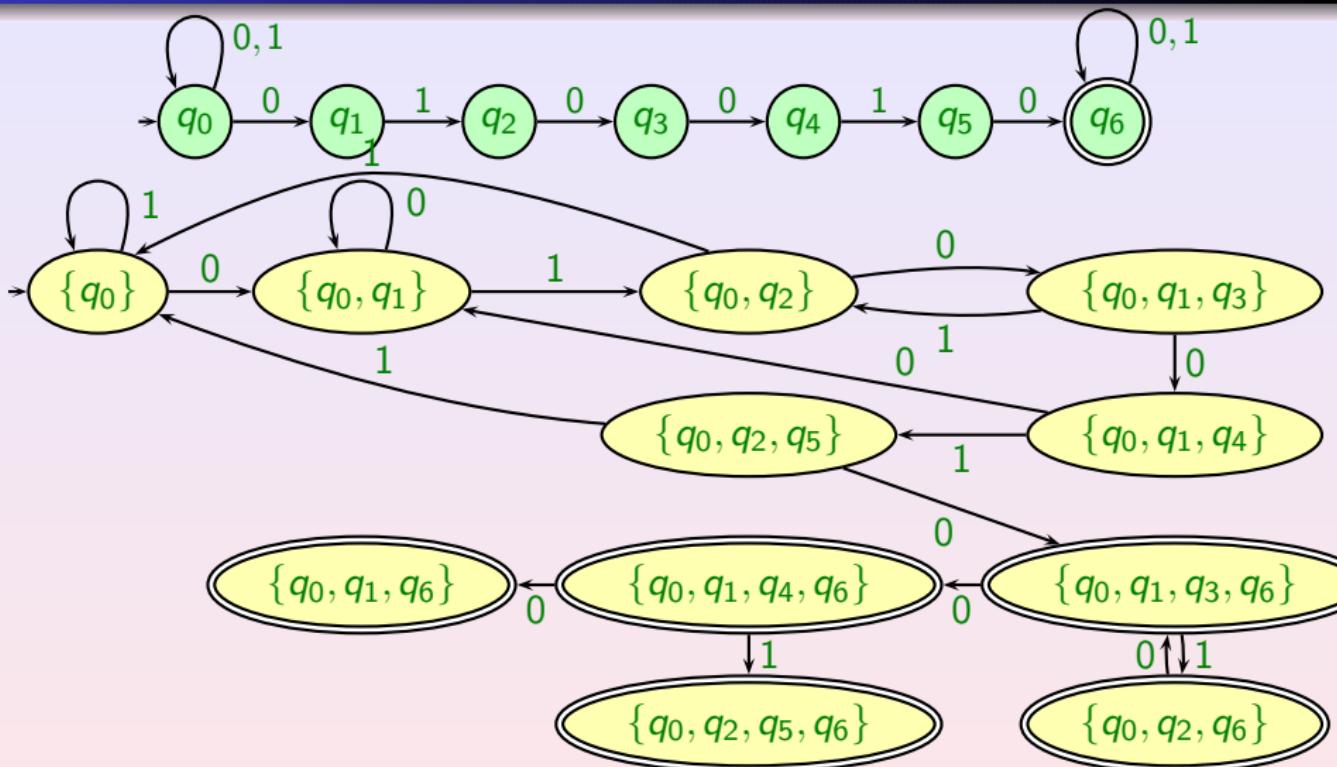
# Ejemplo



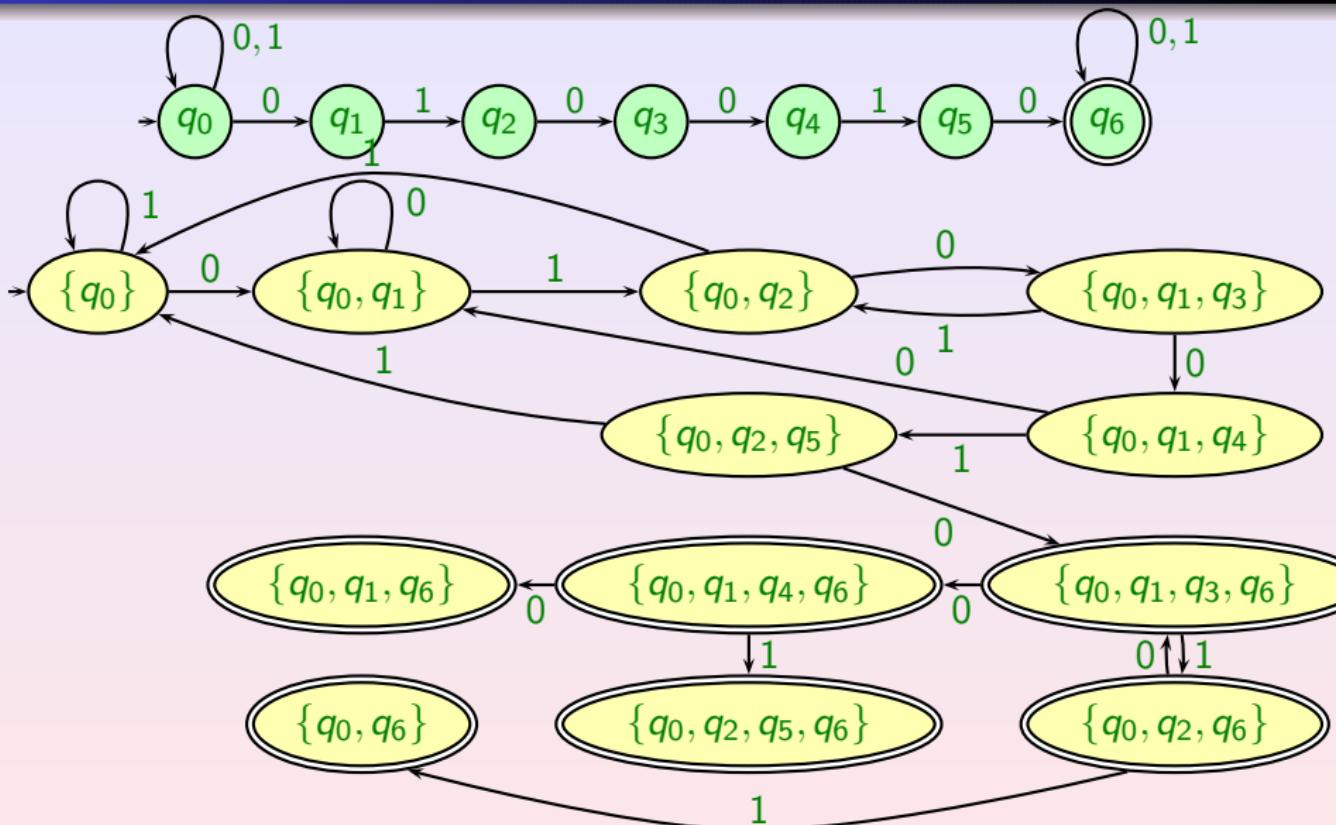
# Ejemplo



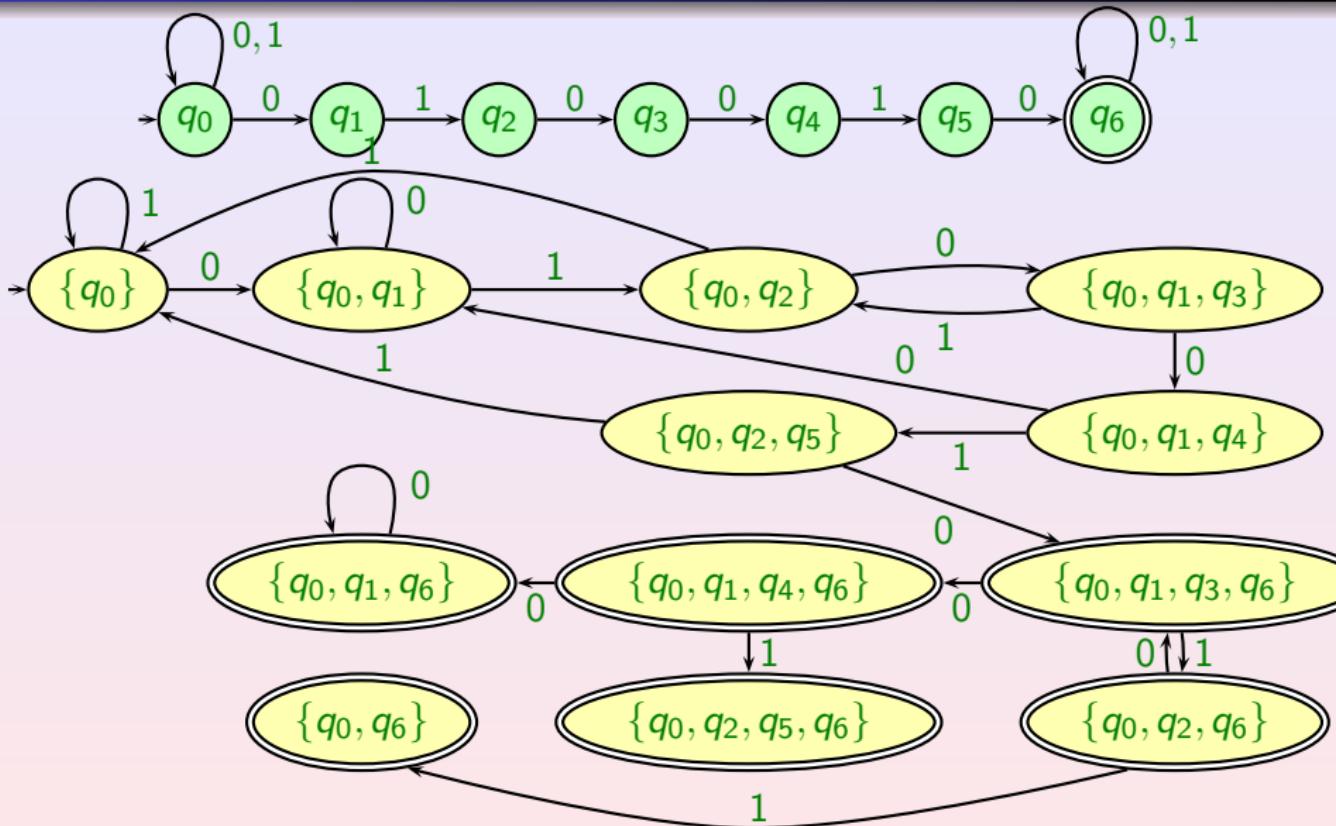
# Ejemplo



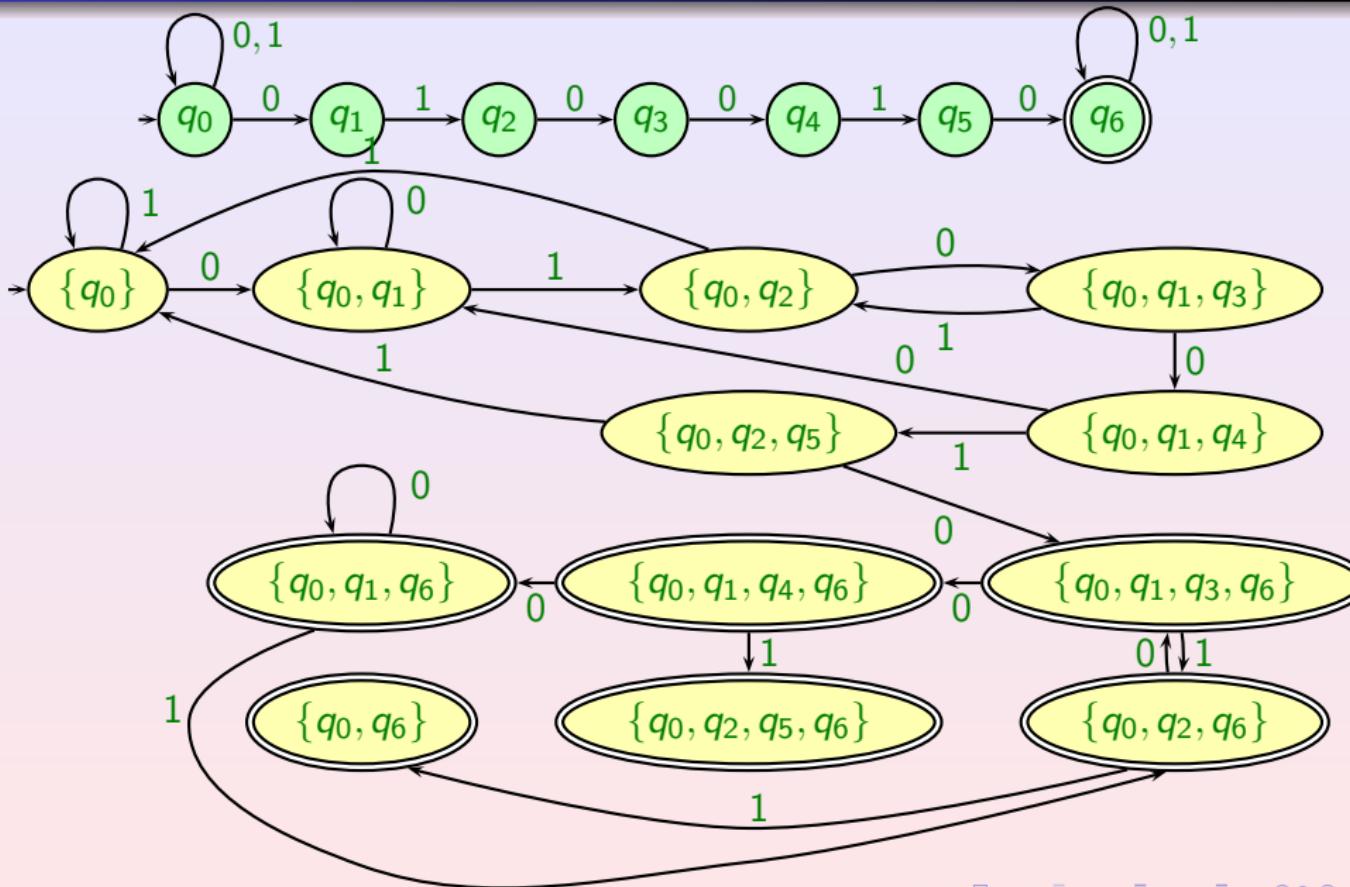
# Ejemplo



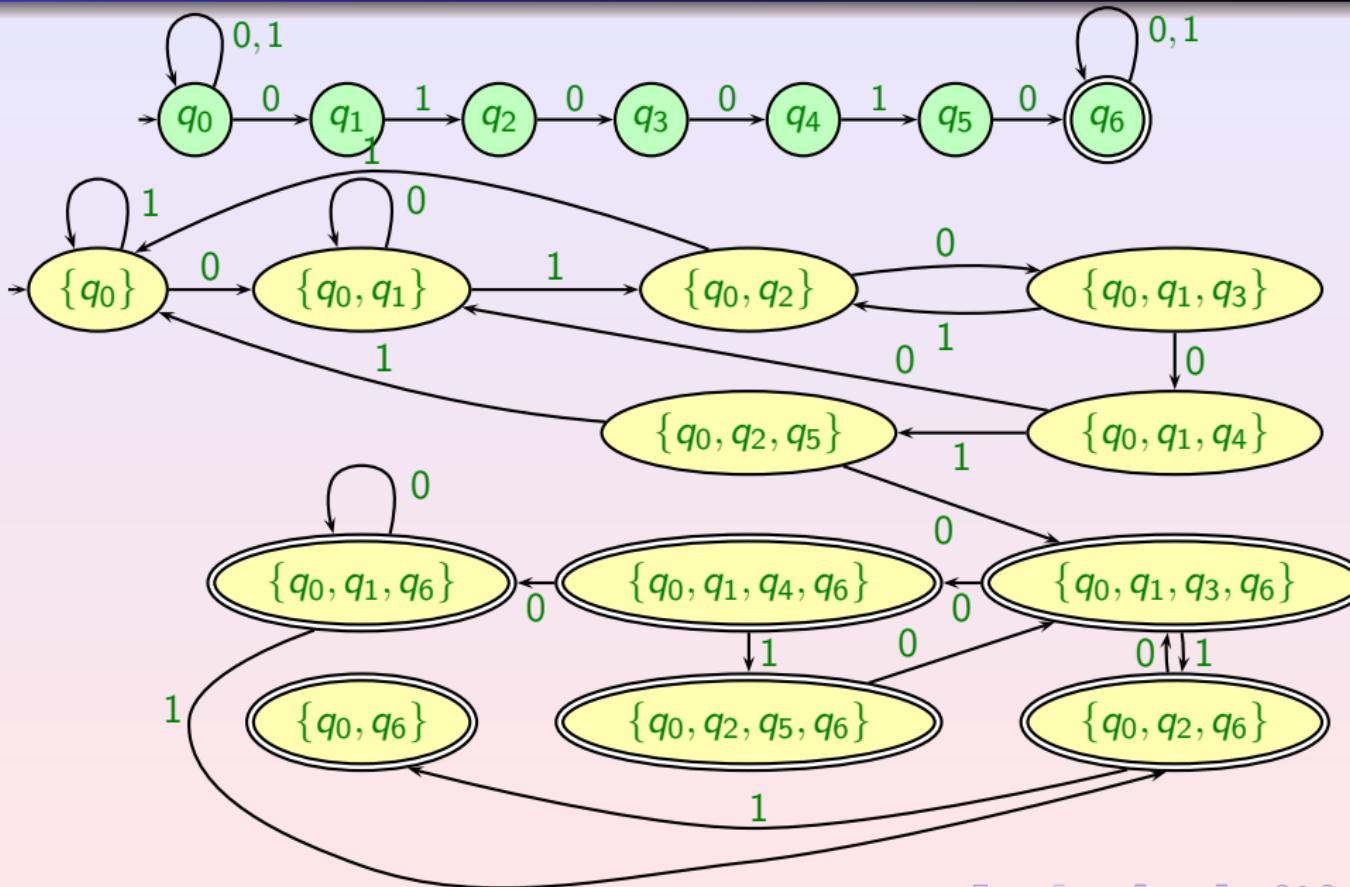
# Ejemplo



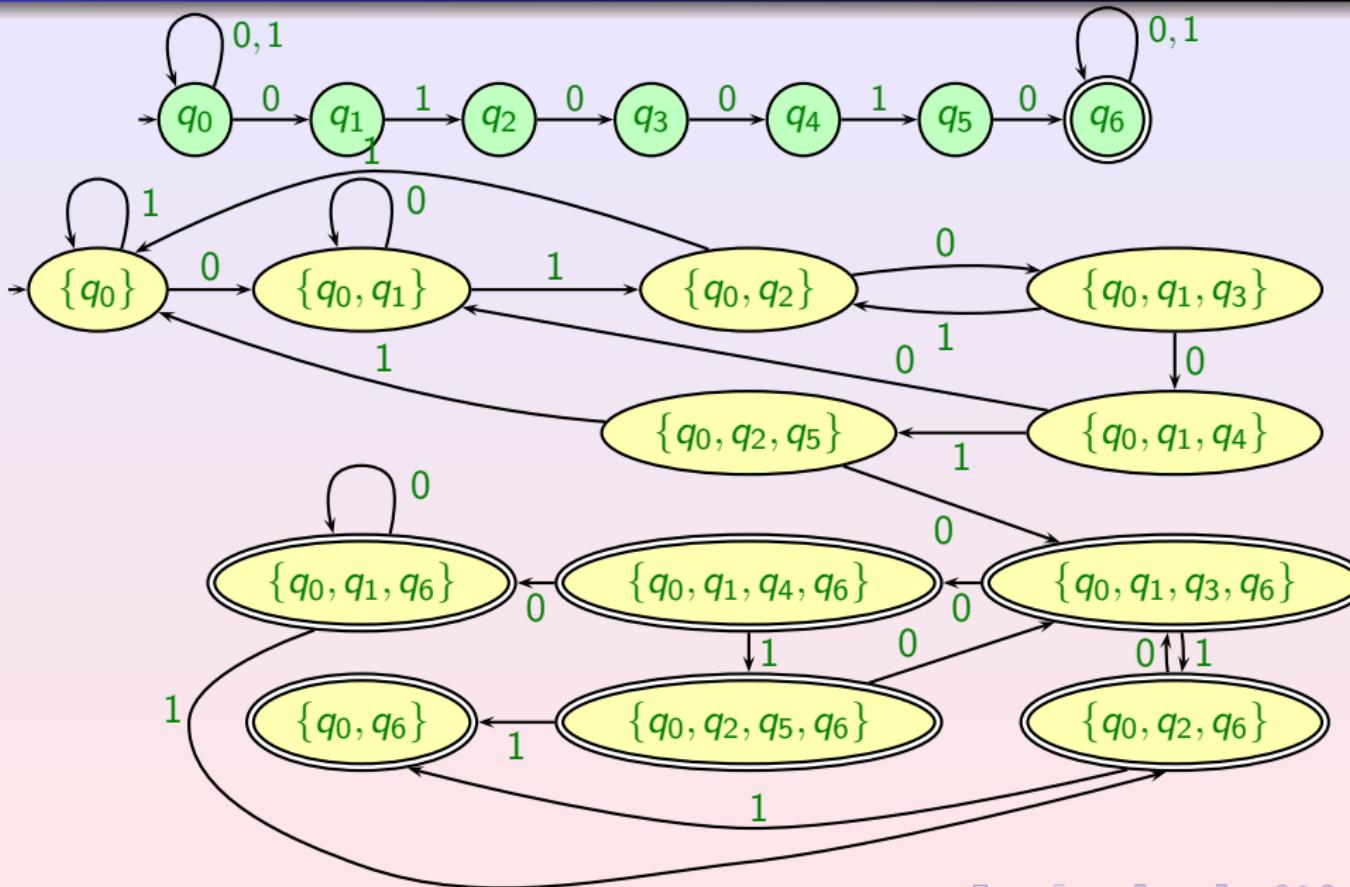
# Ejemplo



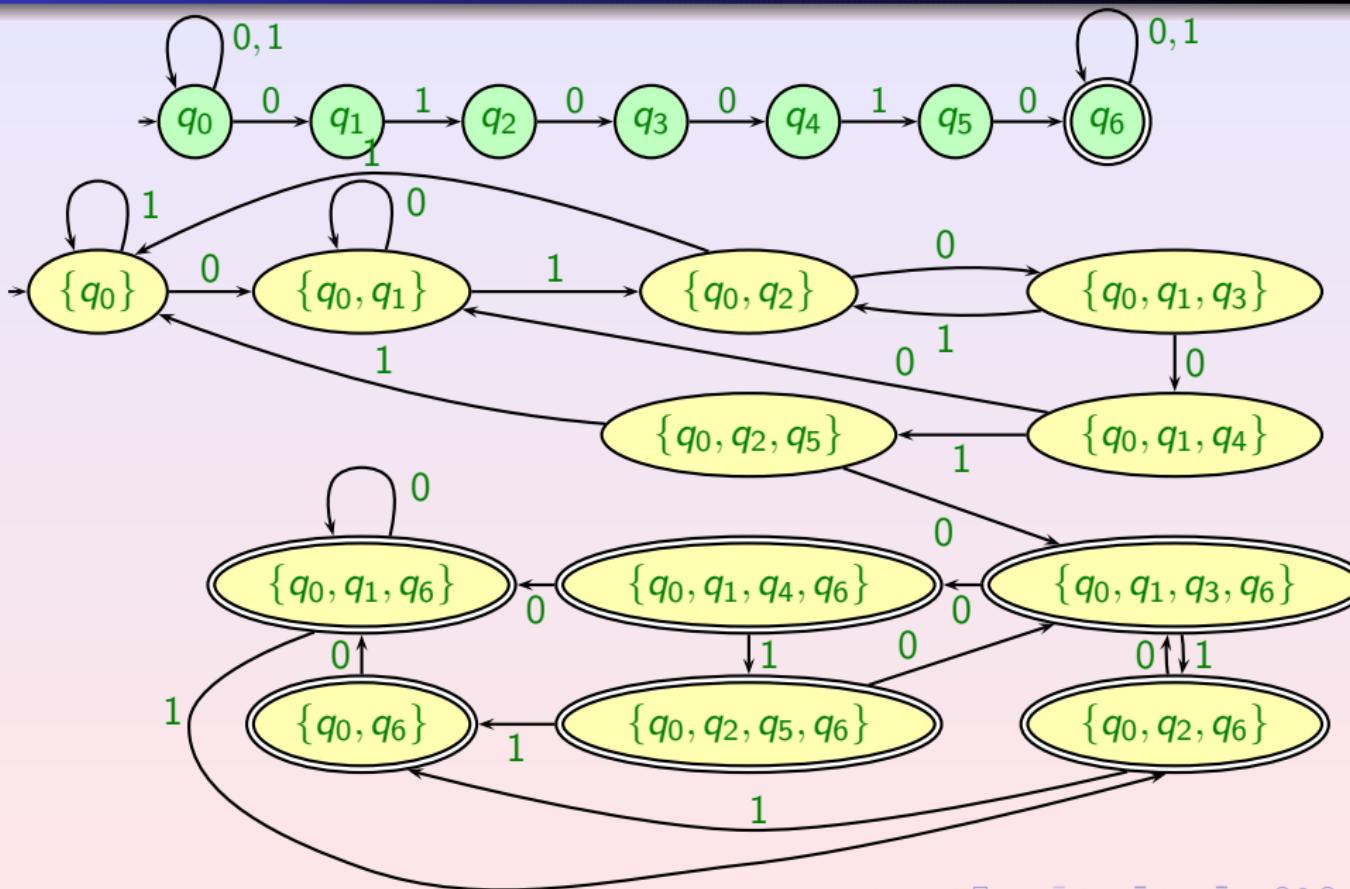
# Ejemplo



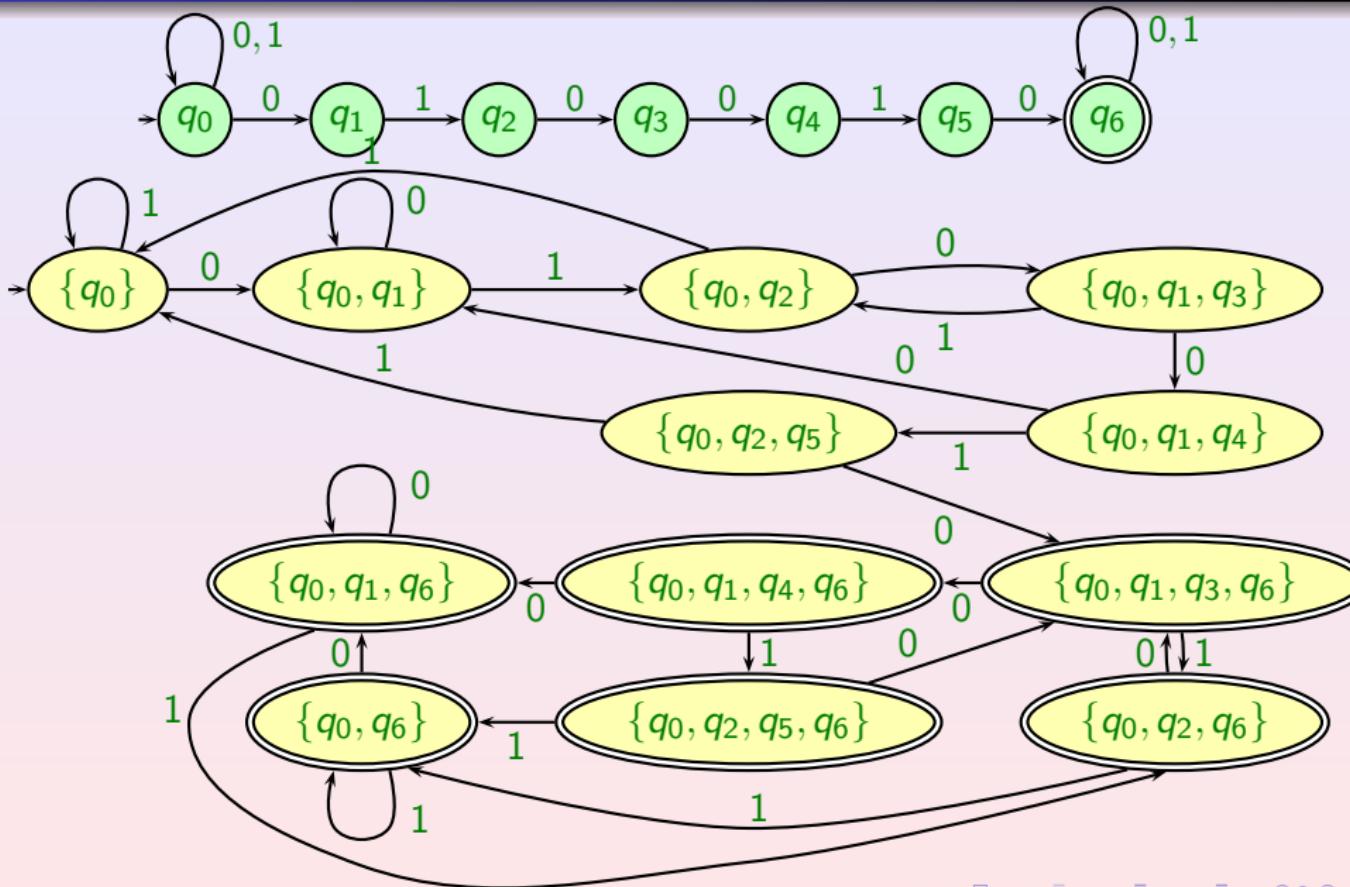
# Ejemplo



# Ejemplo



# Ejemplo

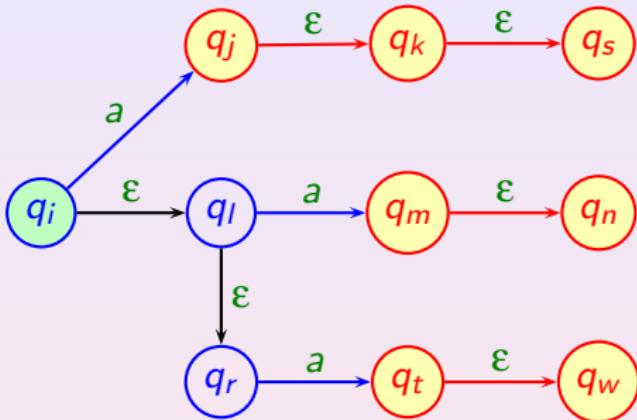


Un **autómata finito no determinista con transiciones nulas** es una quintupla  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  en la que

- $Q$  es un conjunto finito llamado **conjunto de estados**
- $A$  es un alfabeto llamado **alfabeto de entrada**
- $\delta$  es una aplicación llamada **función de transición**

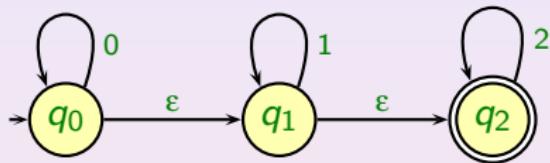
$$\delta : Q \times (A \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \wp(Q)$$

- $q_0$  es un elemento de  $Q$ , llamado **estado inicial**
- $F$  es un subconjunto de  $Q$ , llamado **conjunto de estados finales**.

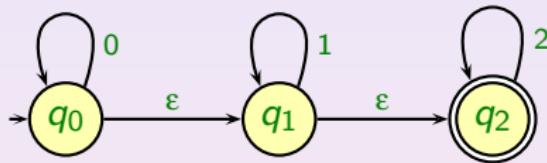


Desde el estado  $q_i$  se puede llegar a los estados:  
 $q_j, q_k, q_s, q_m, q_n, q_t, q_w$  después de leer una  $a$ .

# Ejemplo

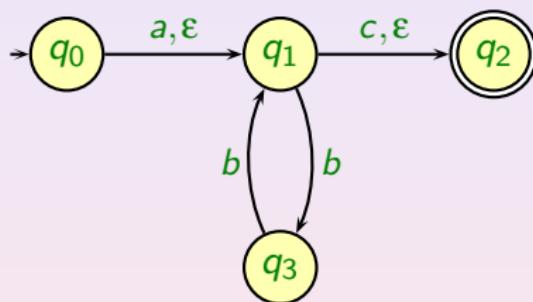


# Ejemplo

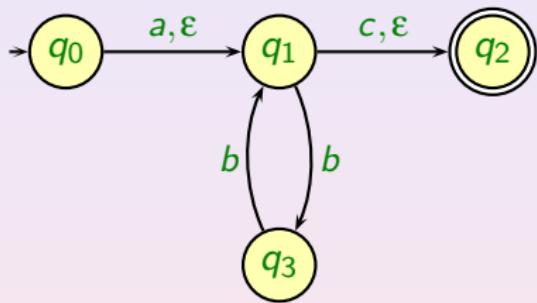


El lenguaje aceptado es  $L = \{0^i 1^j 2^k : i, j, k \geq 0\}$ .

# Ejemplo

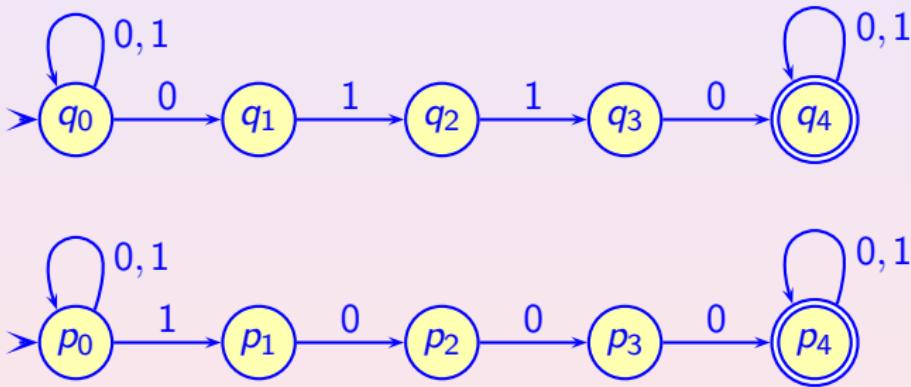


# Ejemplo

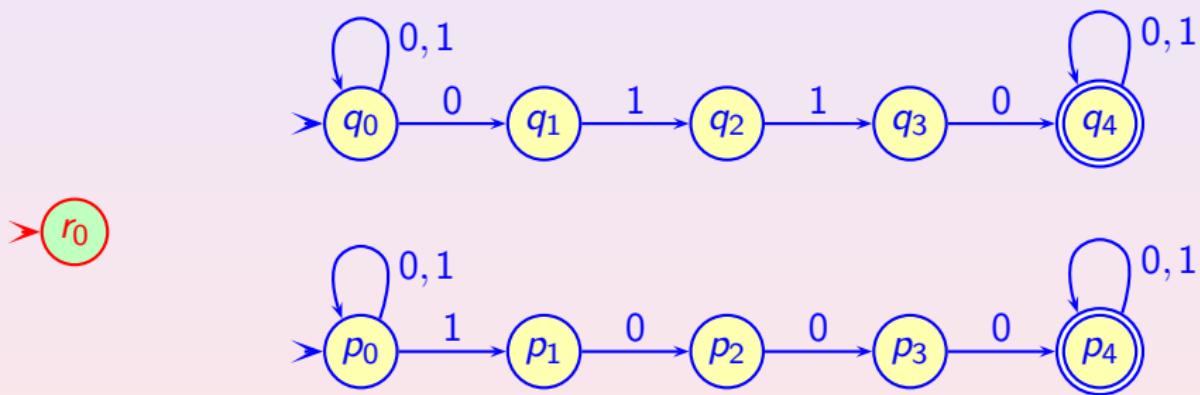


El lenguaje generado es  $L = \{a^i b^{2j} c^k : i, k = 0, 1 \text{ y } j \geq 0\}$ .

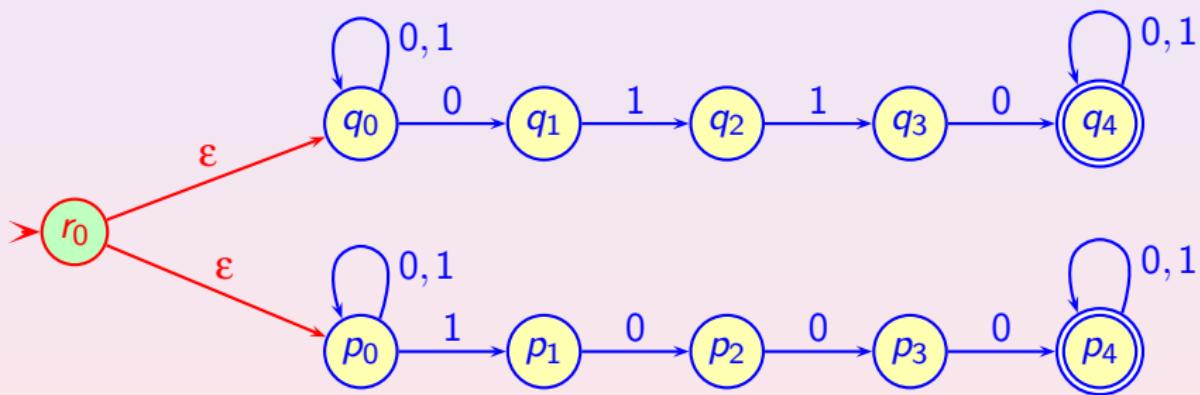
Conjunto de palabras que tienen a 0110 o a 1000 como subcadena.



Conjunto de palabras que tienen a 0110 o a 1000 como subcadena.



Conjunto de palabras que tienen a 0110 o a 1000 como subcadena.



# PROCESO DE CALCULO

Para un Autómata Finito con Transiciones Nulas

$$M = (Q, A, \delta, q_0, F)$$

- **Descripción Instantánea o Configuración:**

Un elemento de  $Q \times A^*$ :  $(q, u)$ .

- **Configuración Inicial para  $u \in A^*$ :**  $(q_0, u)$

- **Relación paso de cálculo entre dos configuraciones:**

$((q, u) \vdash (p, v))$  si y solo si se da una de las condiciones

- $((u = av) \wedge p \in \delta(q, a))$  (caso:  $((q, av) \vdash (p, v))$ )
- $((u = v) \wedge p \in \delta(q, \varepsilon))$  (caso:  $((q, v) \vdash (p, v))$ )

De una configuración se puede pasar a varias configuraciones distintas en un paso de cálculo, e incluso a ninguna.

- Relación de cálculo entre dos configuraciones:

$((q, u) \stackrel{*}{\vdash} (p, v))$  si y solo si existe una sucesión de configuraciones  $C_0, \dots, C_n$  tales que  $C_0 = (q, u)$ ,  $C_n = (p, v)$  y  $\forall i \leq n-1, C_i \vdash C_{i+1}$ .

Lenguaje Aceptado por un  $\varepsilon$ -AF no-determinista

$$L(M) = \{u \in A^* : \exists q \in F, (q_0, u) \stackrel{*}{\vdash} (q, \varepsilon)\}$$

Las palabras de  $L(M)$  se dicen aceptadas por el autómata.

# Función de estados

## Definición: Clausura

Dado un autómata no determinista con transiciones nulas

$M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , definimos:

Clasura de un estado  $q$ :

$$CI(q) = \{p : \exists p_1, \dots, p_n, p_1 = q, p_n = p, \quad p_i \in \delta(p_{i-1}, \varepsilon) \quad (i = 2, \dots, n)\}$$

Clasura de un conjunto de estados  $P$ :  $CI(P) = \bigcup_{q \in P} CI(q)$

## Función de estados: $\delta^*$

Si  $B \subseteq Q$ , se define la función  $\delta^*$ :

$$\delta^*(B, a) = CI(\bigcup_{q \in B} \delta(q, a))$$

Si  $B \subseteq Q$  y  $u \in A^*$ ,  $\delta^*(B, u)$  se define de forma recursiva:

$$\begin{aligned}\delta^*(B, \varepsilon) &= CI(B) \\ \delta^*(B, au) &= \delta^*(\delta^*(B, a), u)\end{aligned}$$

Finalmente,  $\delta^*(p, u) = \delta^*(CI(\{p\}), u)$ .



## Propiedad

Es inmediato probar que el lenguaje aceptado por un autómata finito no-determinista con transiciones nulas se puede expresar como:

$$L(M) = \{u \in A^* : \delta^*(q_0, u) \cap F \neq \emptyset\}$$

## Propiedad

$L$  es aceptado por un autómata finito determinista si y solo si es aceptado por un autómata no-determinista con transiciones nulas.

Propiedad 1: Autómata determinista  $\rightarrow$  Autómata No-Determinista con transiciones nulas

Dado un autómata finito determinista  $M$  existe un autómata no determinista con transiciones nulas  $\overline{M}$  que acepta el mismo lenguaje:  $L(M) = L(\overline{M})$

Es inmediato: sería un autómata en el que para cada símbolo del alfabeto de entrada hay siempre una opción y para cada estado  $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$ .

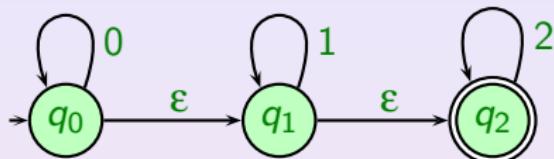
Propiedad 2: Autómata no determinista con transiciones nulas  $\rightarrow$  Autómata Determinista

Dado un autómata finito no determinista con transiciones nulas  $M$  existe un autómata finito determinista  $\overline{M}$  que acepta el mismo lenguaje:  $L(M) = L(\overline{M})$

La idea intuitiva de la demostración es construir  $\overline{M}$  como en el caso de la construcción de una autómata determinista a partir de uno no-determinista: los estados de  $\overline{M}$  son subconjuntos del conjunto  $Q$  de estados de  $M$  y un estado  $P \subset Q$  de  $\overline{M}$  representa todos los estados en los que puede estar el autómata no determinista con transiciones nulas  $M$ .

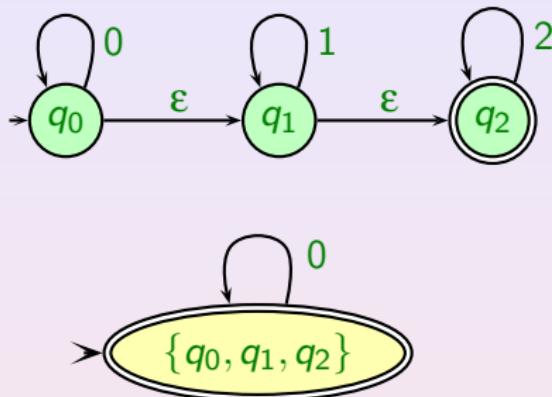
Primero, veremos un ejemplo.

# Ejemplo

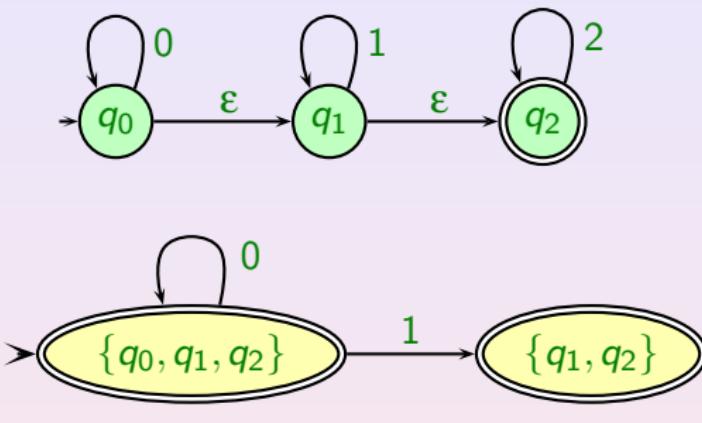


➤  $\{q_0, q_1, q_2\}$

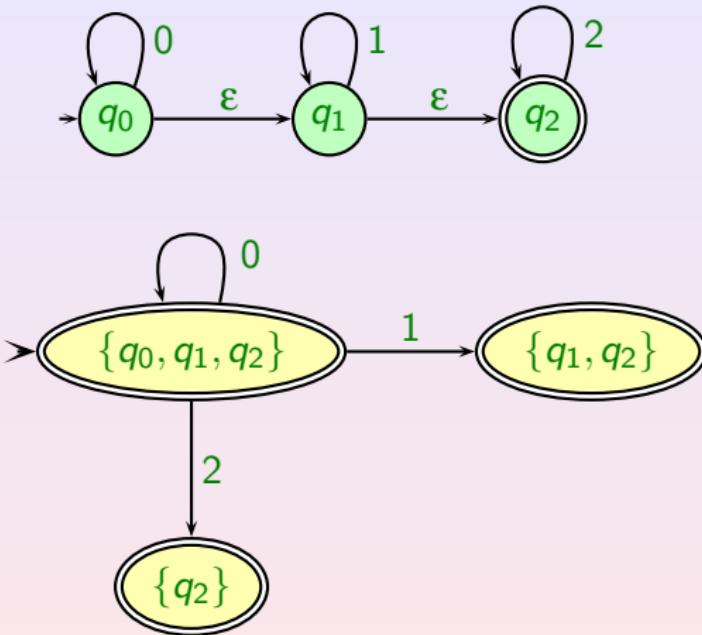
# Ejemplo



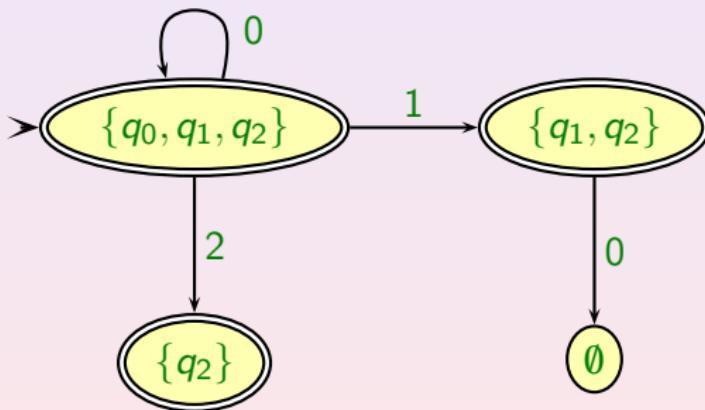
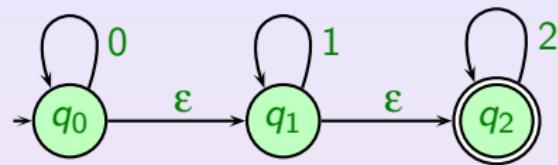
# Ejemplo



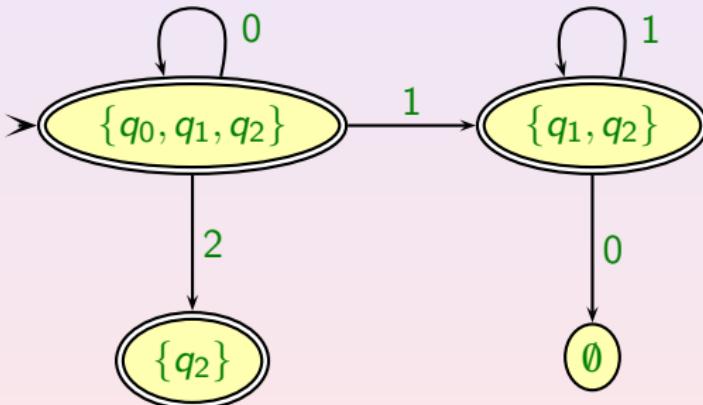
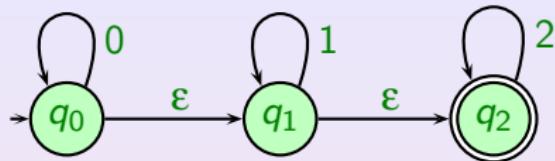
# Ejemplo



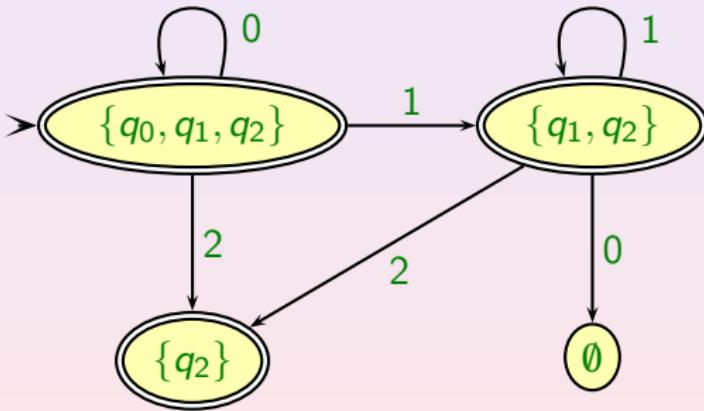
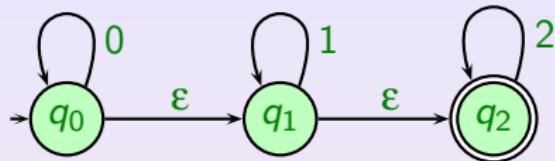
# Ejemplo



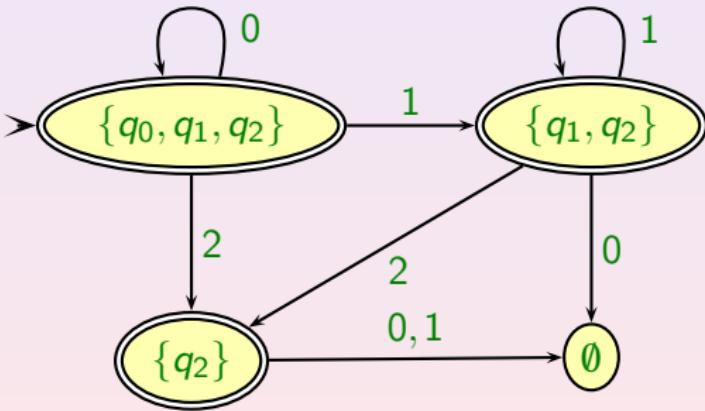
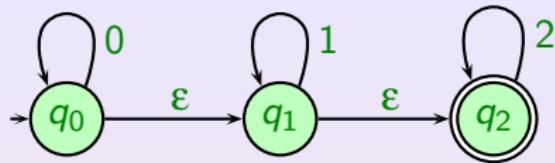
# Ejemplo



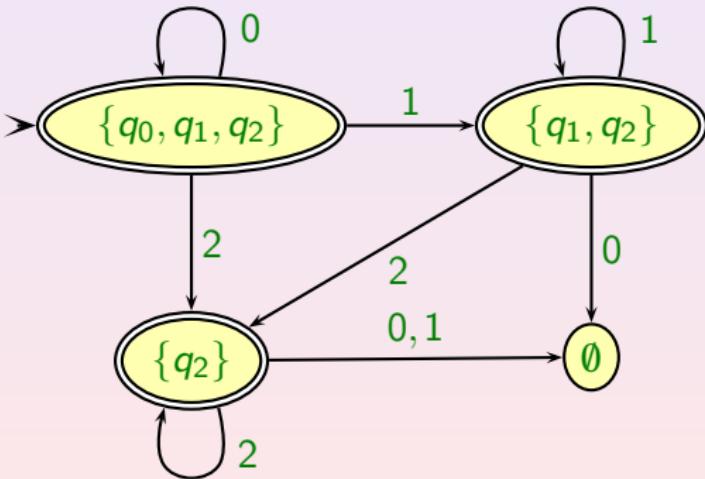
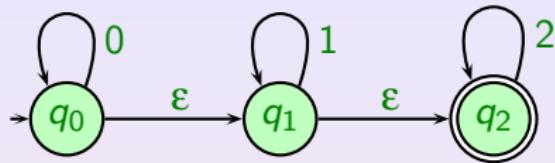
# Ejemplo



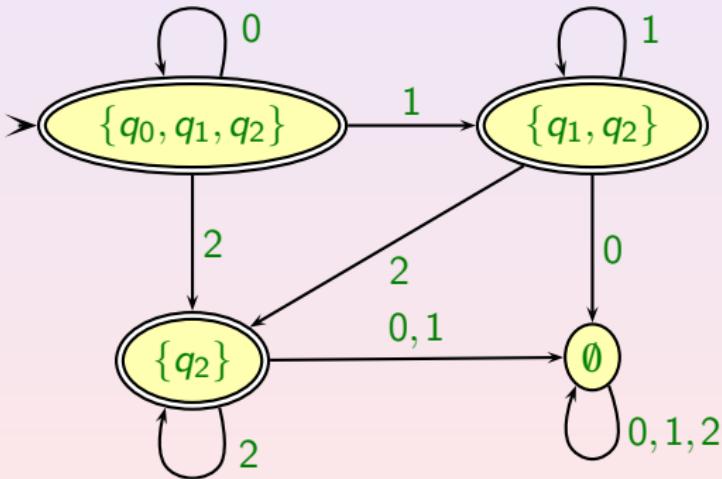
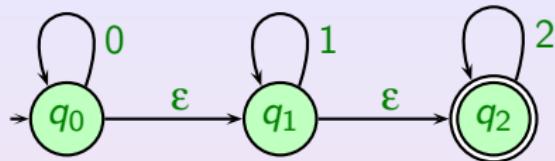
# Ejemplo



# Ejemplo



# Ejemplo



# Definiciones Previas

## Definición: Clausura

Dado un autómata no determinista con transiciones nulas

$M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , definimos:

**Clasura de un estado  $q$ :**

$$CI(q) = \{p : \exists p_1, \dots, p_n, p_1 = q, p_n = p, \quad p_i \in \delta(p_{i-1}, \varepsilon) \quad (i = 2, \dots, n)\}$$

**Clasura de un conjunto de estados  $P$ :**  $CI(P) = \bigcup_{q \in P} CI(q)$

## Función $\delta^*$

Si  $B \subseteq Q$ , se define la función  $\delta^*$ :

$$\delta^*(B, a) = CI(\bigcup_{q \in B} \delta(q, a))$$

Si  $B \subseteq Q$  y  $u \in A^*$ ,  $\delta^*(B, u)$  se define de forma recursiva:

$$\begin{aligned}\delta^*(B, \varepsilon) &= CI(B) \\ \delta^*(B, au) &= \delta^*(\delta^*(B, a), u)\end{aligned}$$

Finalmente,  $\delta^*(p, u) = \delta^*(\{p\}, u)$ .



## Construcción formal de un autómata determinista

Dado un autómata no determinista con transiciones nulas

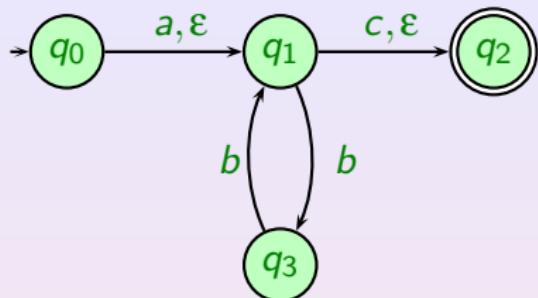
$M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , el **Autómata Finito Determinista**

$\bar{M} = (\bar{Q}, A, \bar{\delta}, \bar{q}_0, \bar{F})$  dado por

- $\bar{Q} = \wp(Q)$
- $\bar{\delta}(P, a) = \delta^*(P, a) = CI(\bigcup_{q \in P} \delta(q, a))$
- $\bar{q}_0 = CI(q_0)$
- $\bar{F} = \{P : P \cap F \neq \emptyset\}$

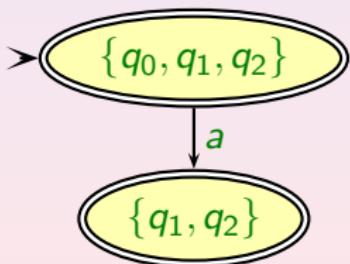
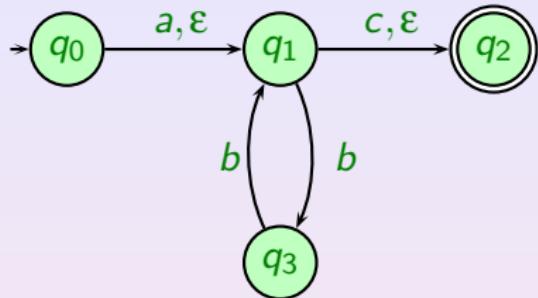
acepta el mismo lenguaje que  $M$ .

# Ejemplo

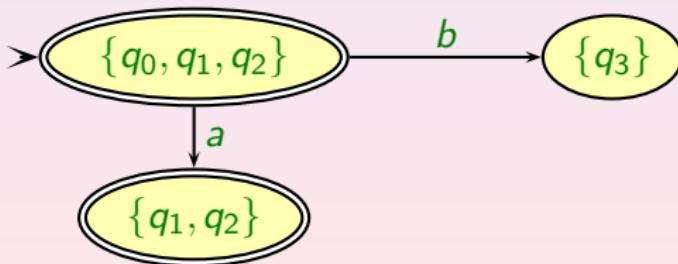
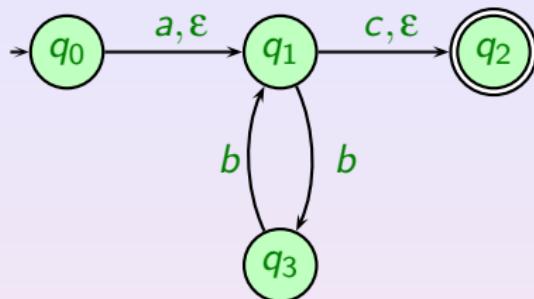


➤  $\{q_0, q_1, q_2\}$

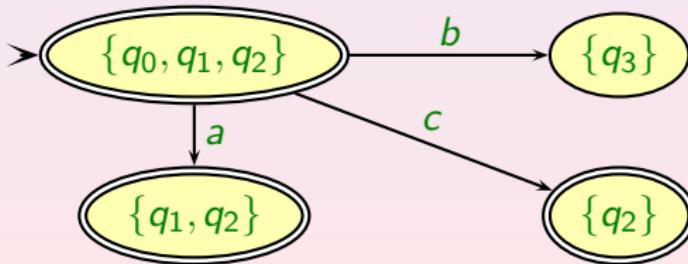
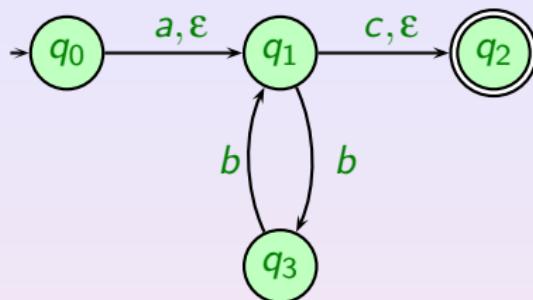
# Ejemplo



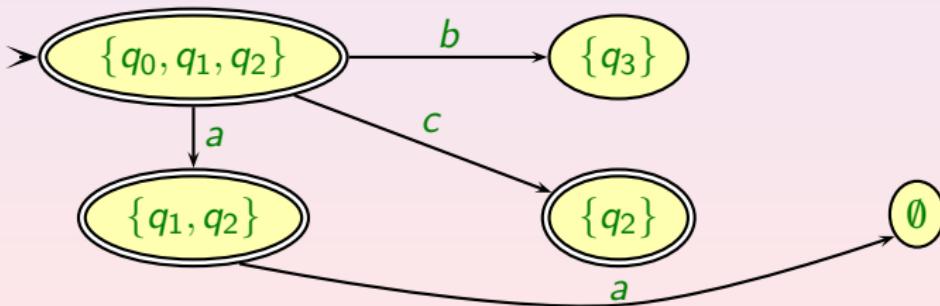
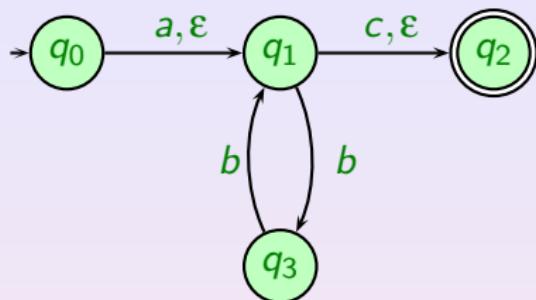
# Ejemplo



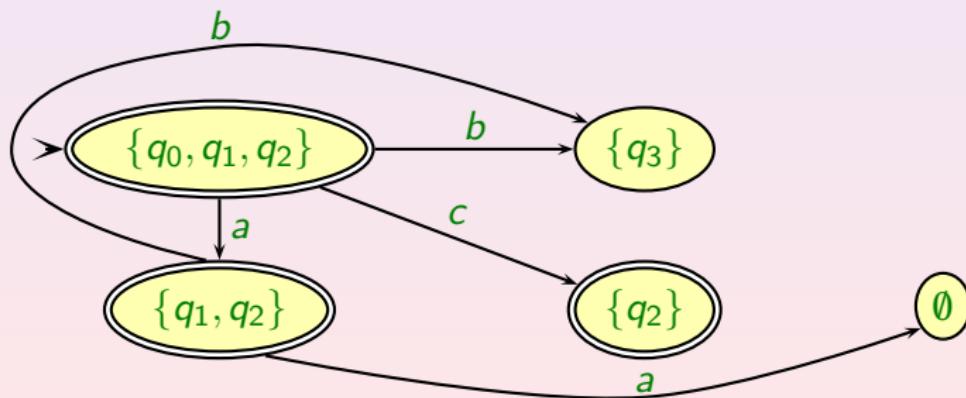
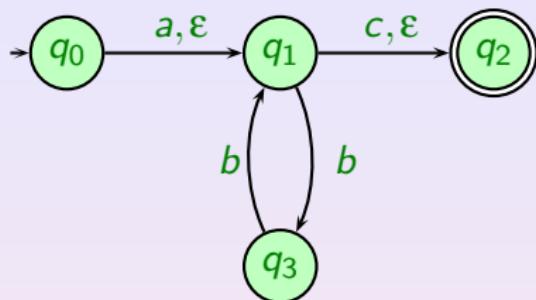
# Ejemplo



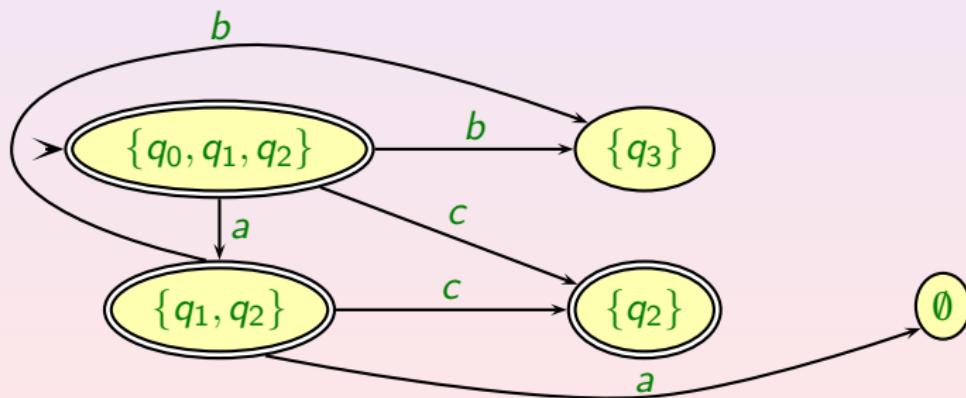
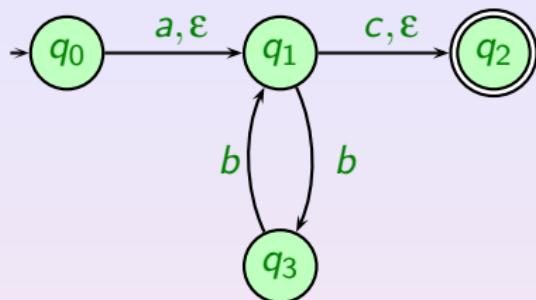
# Ejemplo



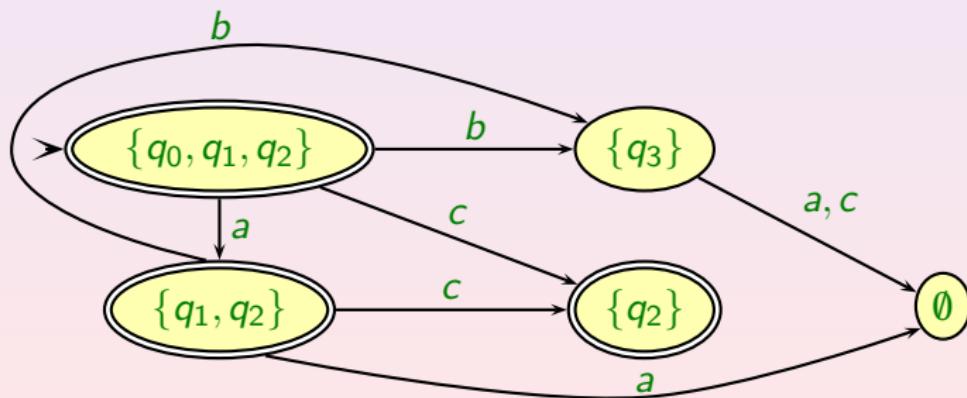
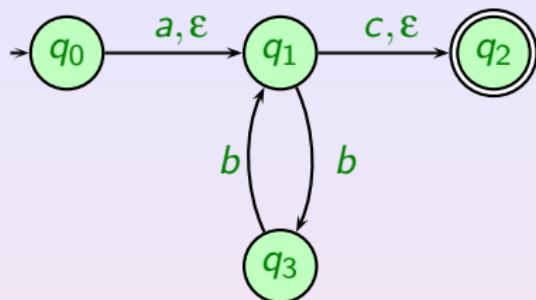
# Ejemplo



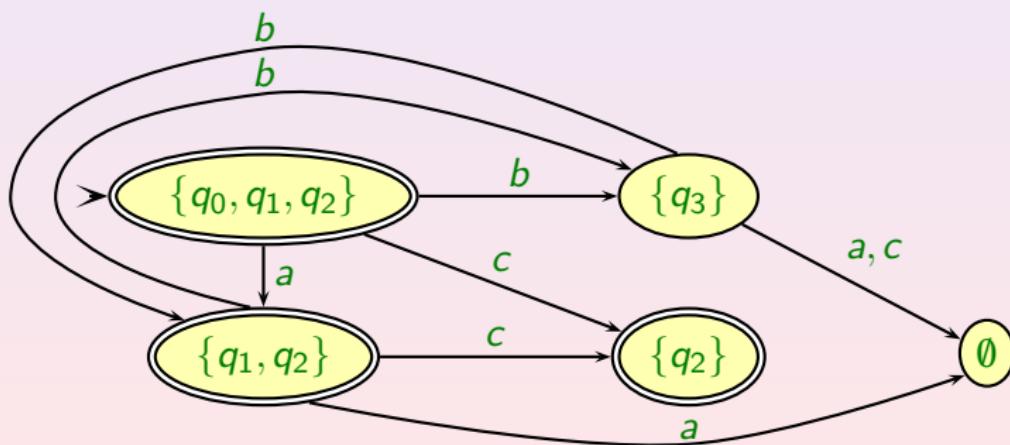
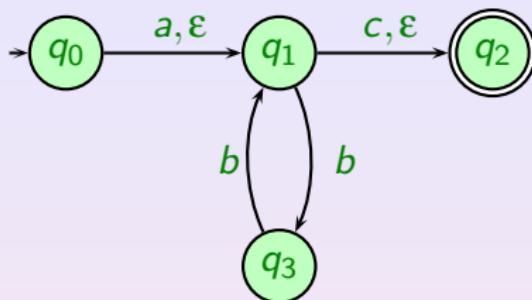
# Ejemplo



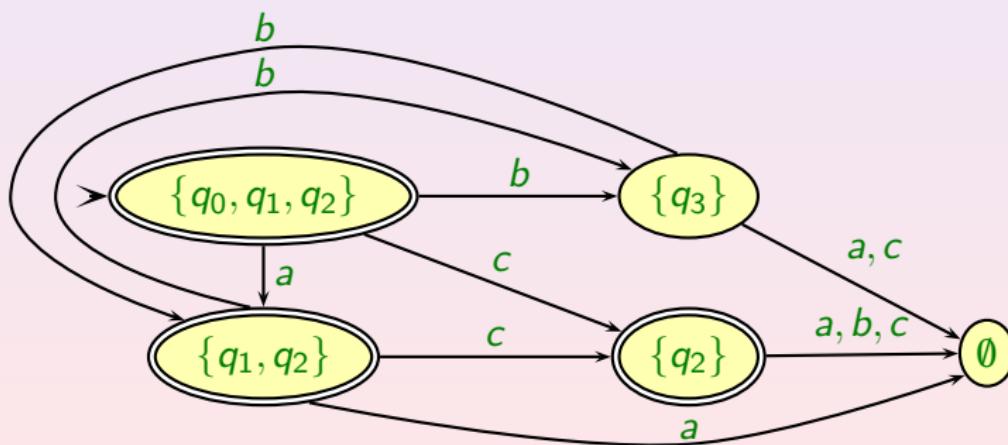
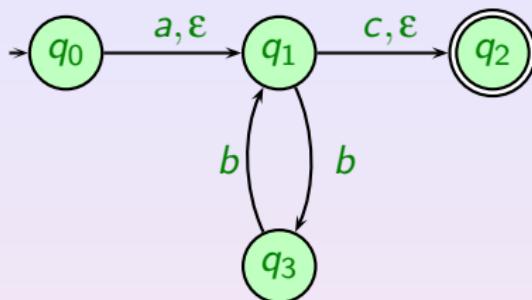
# Ejemplo



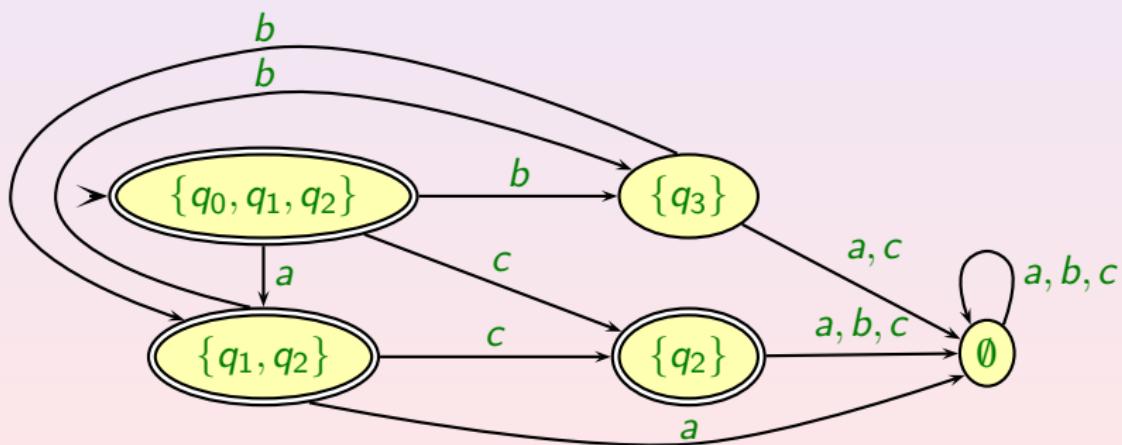
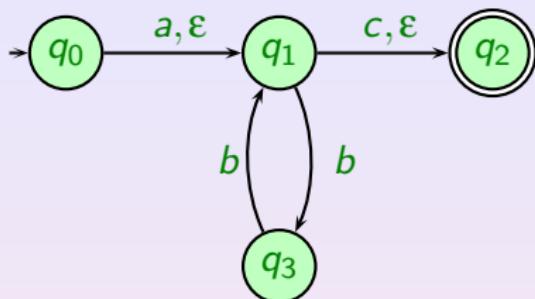
# Ejemplo



# Ejemplo



# Ejemplo



# EXPRESIONES REGULARES

Si  $A$  es un alfabeto, una **expresión regular** sobre este alfabeto se define de la siguiente forma:

- $\emptyset$  es una expresión regular que denota el lenguaje vacío.
- $\epsilon$  es una expresión regular que denota el lenguaje  $\{\epsilon\}$ .
- Si  $a \in A$ ,  $a$  es una expresión regular que denota el lenguaje  $\{a\}$
- Si  $r$  y  $s$  son expresiones regulares denotando los lenguajes  $R$  y  $S$  entonces definimos las siguientes operaciones:
  - **Unión**:  $(r+s)$  es una expresión regular que denota el lenguaje  $R \cup S$ .
  - **Concatenación**:  $(rs)$  es una expresión regular que denota el lenguaje  $RS$ .
  - **Clausura**:  $r^*$  es una expresión regular que denota el lenguaje  $R^*$ .

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$
  
$$\bullet \quad 00$$

# Ejemplos

$A = \{0, 1\}$        $00$    *El conjunto*    $\{00\}$

# Ejemplos

- $$A = \{0, 1\}$$
- $00$       *El conjunto*    $\{00\}$
  - $01^* + 0$

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$



*El conjunto {00}*

- $01^* + 0$  *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- $00$       *El conjunto  $\{00\}$*

- $01^* + 0$       *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- $(1+10)^*$

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- $00$       *El conjunto  $\{00\}$*

- $01^* + 0$       *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- $(1+10)^*$       *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- $00$  El conjunto  $\{00\}$

- $01^* + 0$  Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.

- $(1 + 10)^*$  Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos

- $(0 + 1)^*011$

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- $00$       *El conjunto  $\{00\}$*

- $01^* + 0$       *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*

- $(1 + 10)^*$       *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*

- $(0 + 1)^*011$       *Conjunto de palabras que terminan en 011*

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- $00$       *El conjunto  $\{00\}$*

- $01^* + 0$       *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*

- $(1+10)^*$       *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*

- $(0+1)^*011$       *Conjunto de palabras que terminan en 011*

- $0^*1^*$

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

•  $\begin{matrix} 0 \\ 00 \end{matrix}$

*El conjunto {00}*

- $01^* + 0$       *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- $(1 + 10)^*$     *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- $(0 + 1)^*011$     *Conjunto de palabras que terminan en 011*
- $0^*1^*$         *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías*

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

• 00

*El conjunto {00}*

- $01^* + 0$       *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- $(1+0)^*$       Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos
- $(0+1)^*011$       *Conjunto de palabras que terminan en 011*
- $0^*1^*$       Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías
- $00^*11^*$

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

•  $00$  El conjunto  $\{00\}$

- $01^* + 0$  Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.
- $(1 + 10)^*$  Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos
- $(0 + 1)^*011$  Conjunto de palabras que terminan en 011
- $0^*1^*$  Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías
- $00^*11^*$  Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Niguna de las sucesiones puede ser vacía

# Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

•  $00$

*El conjunto {00}*

- $01^* + 0$  *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*

- $(1 + 10)^*$  *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*

- $(0 + 1)^*011$  *Conjunto de palabras que terminan en 011*

- $0^*1^*$  *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías*

- $00^*11^*$  *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Niguna de las sucesiones puede ser vacía*

A  $r^*r$  se le denota como  $r^+$ . La última expresión regular quedaría  $0^+1^+$

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

## Ejemplos - Alfabeto {0, 1}

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

$$(000)(1 + 10 + 100)^*$$

## Ejemplos - Alfabeto {0, 1}

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

$$(000)(1 + 10 + 100)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que tienen a 000 o a 101 como subcadena

## Ejemplos - Alfabeto {0, 1}

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

$$(000)(1 + 10 + 100)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que tienen a 000 o a 101 como subcadena

$$(0 + 1)^*(000 + 101)(0 + 1)^*$$

# Propiedades de las Expresiones Regulares

1  $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$

2  $r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$

3  $r_1(r_2r_3) = (r_1r_2)r_3$

4  $r\varepsilon = r$

5  $r\emptyset = \emptyset$

6  $r + \emptyset = r$

7  $\varepsilon^* = \varepsilon$

8  $r_1(r_2 + r_3) = r_1r_2 + r_1r_3$

9  $(r_1 + r_2)r_3 = r_1r_3 + r_2r_3$

10  $r^+ + \varepsilon = r^*$

11  $r^* + \varepsilon = r^*$

12  $(r + \varepsilon)^* = r^*$

13  $(r + \varepsilon)^+ = r^*$

14  $(r_1^* + r_2^*)^* = (r_1 + r_2)^*$

# Preguntas sobre Expresiones Regulares

¿Verdadero o falso?

- 1 Si  $r$  y  $s$  son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que  $(rs)^* = r^*s^*$
- 2 Si  $r$  y  $s$  son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que  $(r+s)^* = r^* + s^*$
- 3 Si  $r_1$  y  $r_2$  son expresiones regulares, tales que su lenguaje asociado contiene la palabra vacía, entonces  $(r_1r_2)^* = (r_2r_1)^*$ .
- 4 Si  $r$  y  $s$  son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que  $(r+\epsilon)^+ = r^*$
- 5 Si  $r$  y  $s$  son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que  $r(r+s)^* = (r+s)^*r$
- 6 Si  $r_1$  y  $r_2$  son expresiones regulares, entonces  $r_1^*r_2^* \subseteq (r_1r_2)^*$ , en el sentido de que los lenguajes asociados están incluidos.
- 7 Si  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son expresiones regulares, entonces  $(r_1+r_2)^*r_3 = r_1^*r_3 + r_2^*r_3$ .
- 8 Si  $r_1$  y  $r_2$  son expresiones regulares entonces:  $(r_1^*r_2^*)^* = (r_1+r_2)^*$

# Preguntas sobre Expresiones Regulares

¿Verdadero o falso?

- 1 Si  $r_1$  y  $r_2$  son expresiones regulares, entonces  $(r_1.r_2)^* = (r_1 + r_2)^*$ .
- 2 Si  $r$  es una expresión regular, entonces  $r^*r^* = r^*$ .
- 3 Si  $r$  es una expresión regular, entonces  $r\emptyset = r + \emptyset$ .
- 4 Si  $r$  es una expresión regular, entonces se verifica que  $r^*\epsilon = r^+\epsilon$
- 5 Si  $r_1$  y  $r_2$  son expresiones regulares, entonces siempre  $r_1(r_2r_1)^* = (r_1r_2)^*r_1$
- 6 Si  $r$  y  $s$  son expresiones regulares, entonces  $(r^*s^*)^* = (r+s)^*$ .
- 7 Si  $r$  es una expresión regular, entonces  $(rr)^* \subseteq r^*$ .
- 8 Si  $r_1$  y  $r_2$  son expresiones regulares, tales que su lenguaje asociado contiene la palabra vacía, entonces  $(r_1r_2)^* = (r_1 + r_2)^*$ .
- 9 Si  $r_1, r_2, r_3$  son expresiones regulares, entonces  $r_1(r_2^* + r_3^*) = r_1r_2^* + r_1r_3^*$ .

- La familia de los lenguajes aceptados por los autómatas finitos coincide con la familia de lenguajes que pueden representarse mediante expresiones regulares. Es decir se verifica la siguiente propiedad

## Propiedad

Un lenguaje es aceptado por un autómata finito determinista si y solo si puede representarse mediante una expresión regular.

- Esto se demostrará comprobando:
  - Dada una expresión regular, existe un autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por la expresión regular.
  - Dado un autómata finito existe siempre una expresión regular que representa el lenguaje aceptado por el autómata.
- La primera transformación es más útil, ya que inicialmente los lenguajes se representan mediante expresiones regulares y después necesitamos algoritmos (autómatas) que reconozcan estos lenguajes.

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

**Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.**

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

- $\emptyset$

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

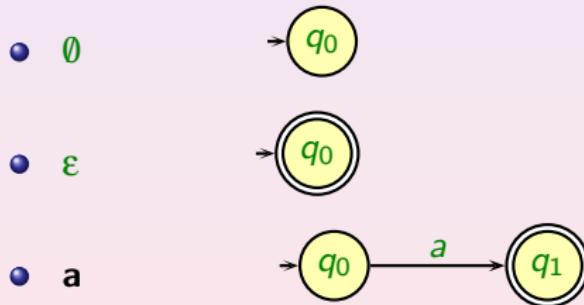
- $\emptyset \rightarrow q_0$
- $\epsilon \rightarrow q_0$
- $a \rightarrow q_0$

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

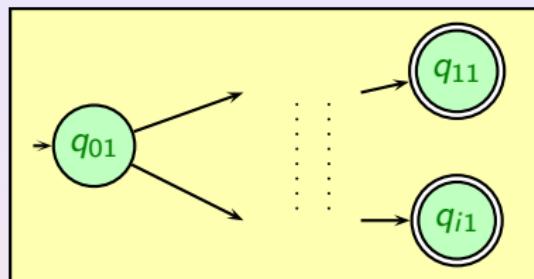
Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



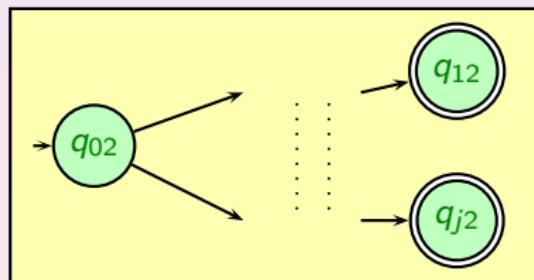
# Autómatas Compuestos: Unión

Si  $M_1$  es el autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por  $r_1$  y  $M_2$  el que acepta el mismo lenguaje que el de  $r_2$ , entonces

- **Unión** ( $r_1 + r_2$ )



$M_1$

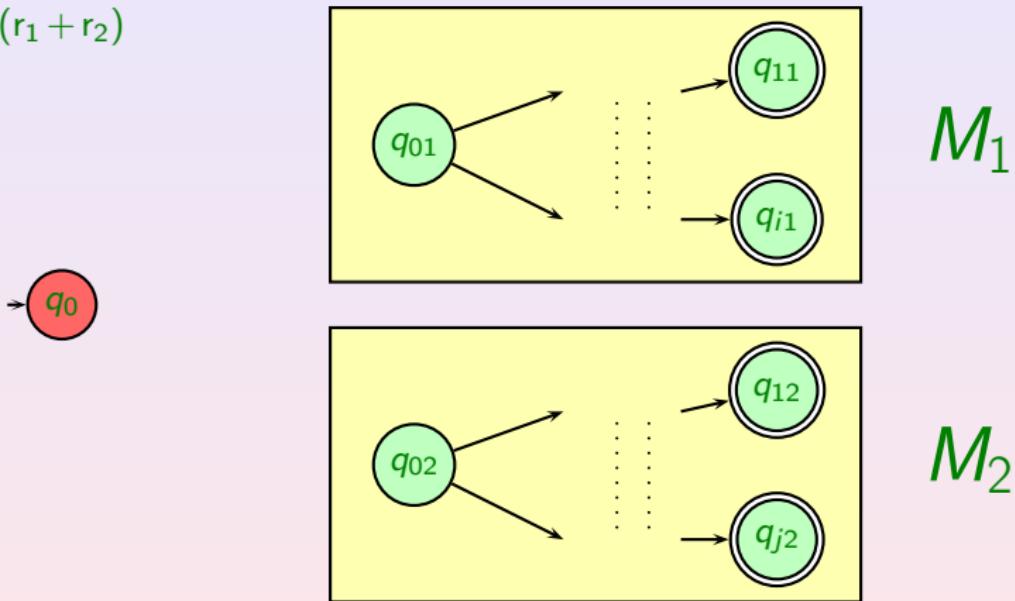


$M_2$

# Autómatas Compuestos: Unión

Si  $M_1$  es el autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por  $r_1$  y  $M_2$  el que acepta el mismo lenguaje que el de  $r_2$ , entonces

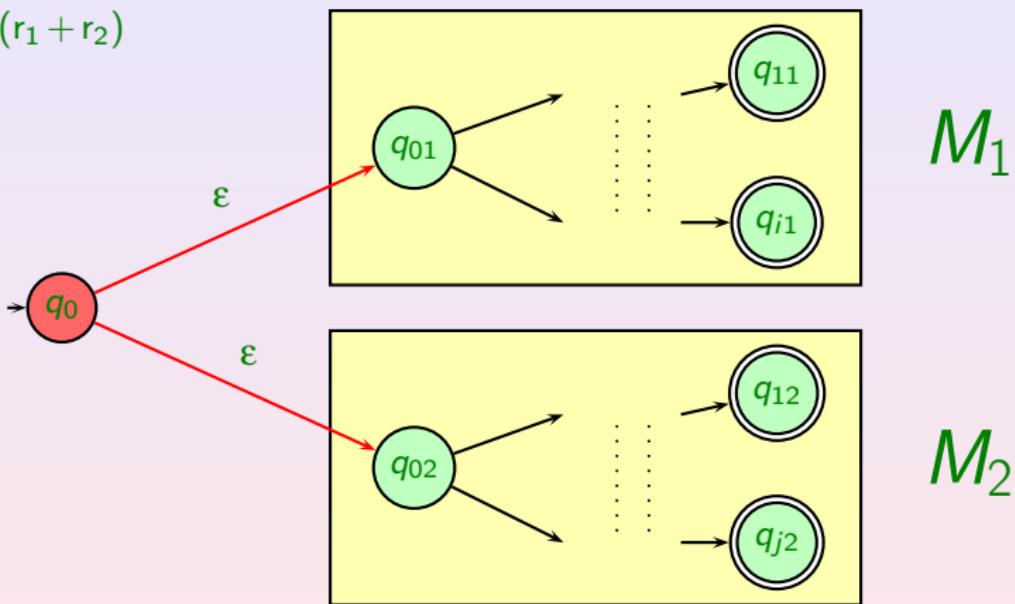
- **Unión** ( $r_1 + r_2$ )



# Autómatas Compuestos: Unión

Si  $M_1$  es el autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por  $r_1$  y  $M_2$  el que acepta el mismo lenguaje que el de  $r_2$ , entonces

- **Unión** ( $r_1 + r_2$ )



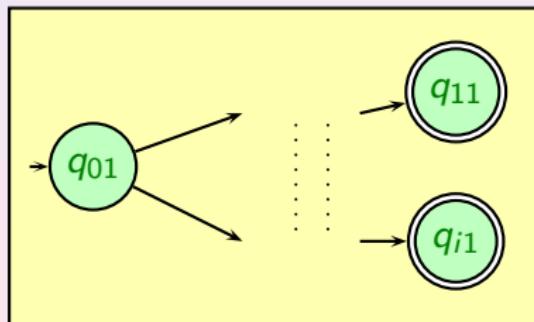
En lenguaje matemático, la unión se puede expresar de la siguiente forma. Si  $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$  y  $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$  con  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ , entonces el autómata que acepta la **unión** es  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  donde

En lenguaje matemático, la unión se puede expresar de la siguiente forma. Si  $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$  y  $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$  con  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ , entonces el autómata que acepta la **unión** es  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  donde

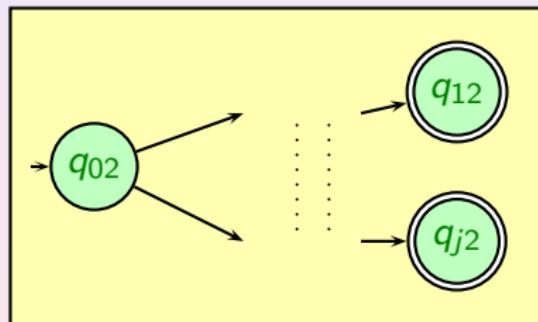
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$  donde  $q_0 \notin (Q_1 \cup Q_2)$  es un nuevo estado.
- $\delta$  viene definida por
  - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$  si  $q \in Q_1, a \in A$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon)$  si  $q \in Q_1$
  - $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$  si  $q \in Q_2, a \in A$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_2(q, \varepsilon)$  si  $q \in Q_2$
  - $\delta(q_0, a) = \emptyset$  si  $a \in A$
  - $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_0^1, q_0^2\}$
- $F = F_1 \cup F_2$

# Autómatas Compuestos: Concatenación

- **Concatenación:** El autómata para la expresión  $(r_1 r_2)$  es



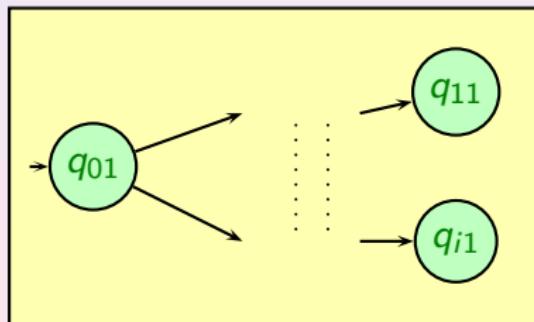
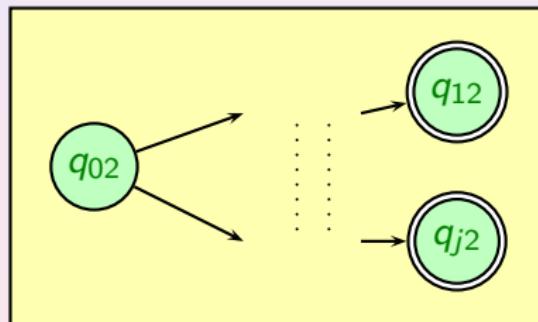
$M_1$



$M_2$

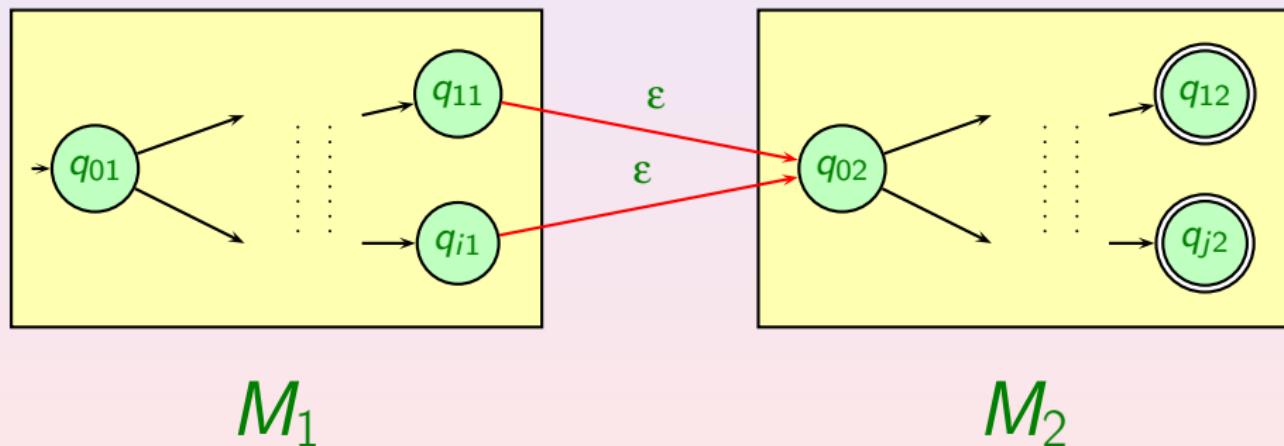
# Autómatas Compuestos: Concatenación

- **Concatenación:** El autómata para la expresión  $(r_1 r_2)$  es


$$M_1$$

$$M_2$$

# Autómatas Compuestos: Concatenación

- **Concatenación:** El autómata para la expresión  $(r_1 r_2)$  es



## Concatenación: Expresión Matemática

En lenguaje matemático, la concatenación se puede expresar de la siguiente forma. Si  $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$  y  $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$  con  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ , entonces el autómata que acepta la concatenación es  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  donde:

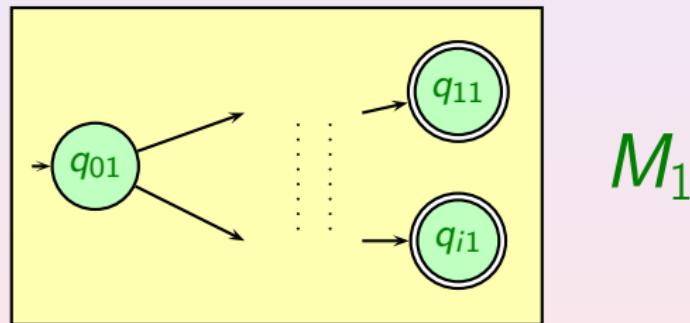
# Concatenación: Expresión Matemática

En lenguaje matemático, la concatenación se puede expresar de la siguiente forma. Si  $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$  y  $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$  con  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ , entonces el autómata que acepta la concatenación es  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  donde:

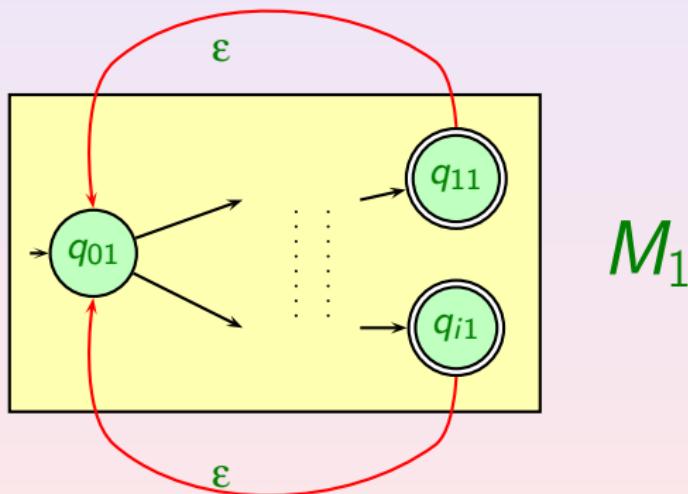
- $Q = Q_1 \cup Q_2$ .
- $\delta$  viene definida por
  - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$  si  $q \in Q_1 \setminus F_1$ ,  $a \in A$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon)$  si  $q \in Q_1 \setminus F_1$
  - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$  si  $q \in F_1, a \in A$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon) \cup \{q_0^2\}$  si  $q \in F_1$
  - $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$  si  $q \in Q_2$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_2(q, \varepsilon)$  si  $q \in Q_2$
- $q_0 = q_0^1$
- $F = F_2$

# Autómatas Compuestos: Clausura

- **Clausura:** El autómata para  $r_1^*$  es

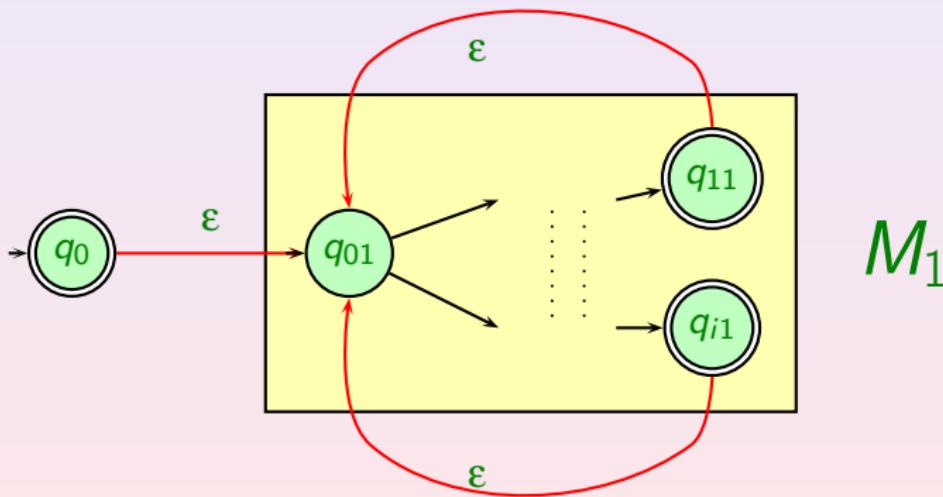


- **Clausura:** El autómata para  $r_1^*$  es



# Autómatas Compuestos: Clausura

- **Clausura:** El autómata para  $r_1^*$  es



En lenguaje matemático: si  $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$ , entonces el autómata que acepta la clausura es  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  donde:

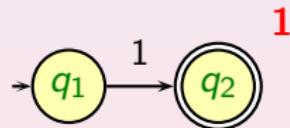
- $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$ , donde  $q_0 \notin Q_1$ .
- $\delta$  viene definida por
  - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$  si  $q \in Q_1 \setminus F_1, a \in A$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon)$  si  $q \in Q_1 \setminus F_1$
  - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$  si  $q \in F_1, a \in A$
  - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon) \cup \{q_0\}$  si  $q \in F_1$
  - $\delta(q_0, a) = \emptyset$  si  $a \in A$
  - $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_0^1\}$
- $q_0$
- $F = F_1 \cup \{q_0\}$

## Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$

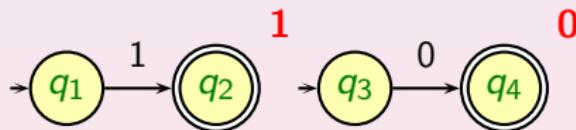
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



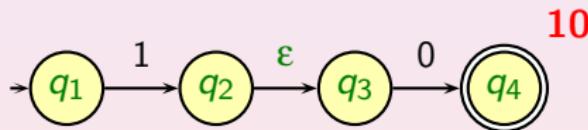
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



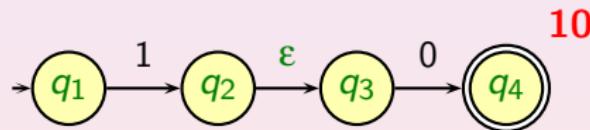
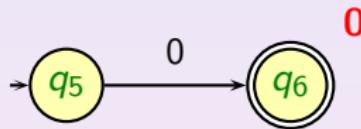
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



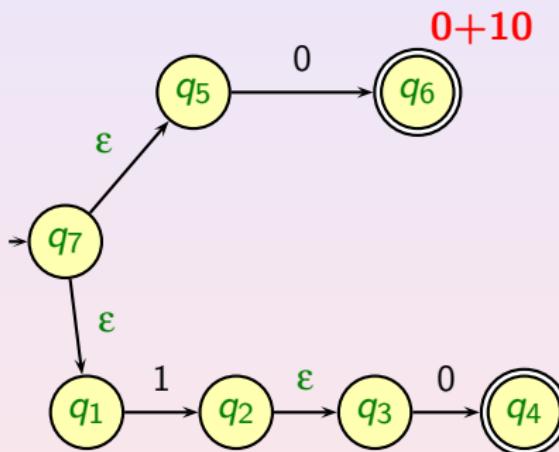
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



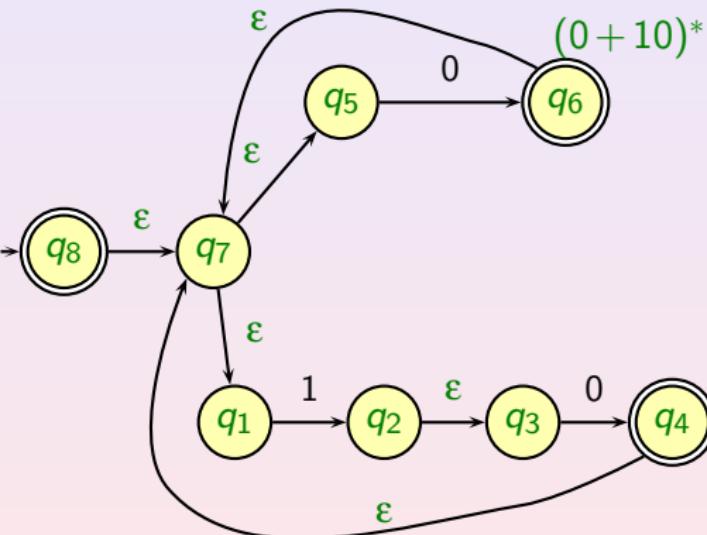
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0+10)^*011$



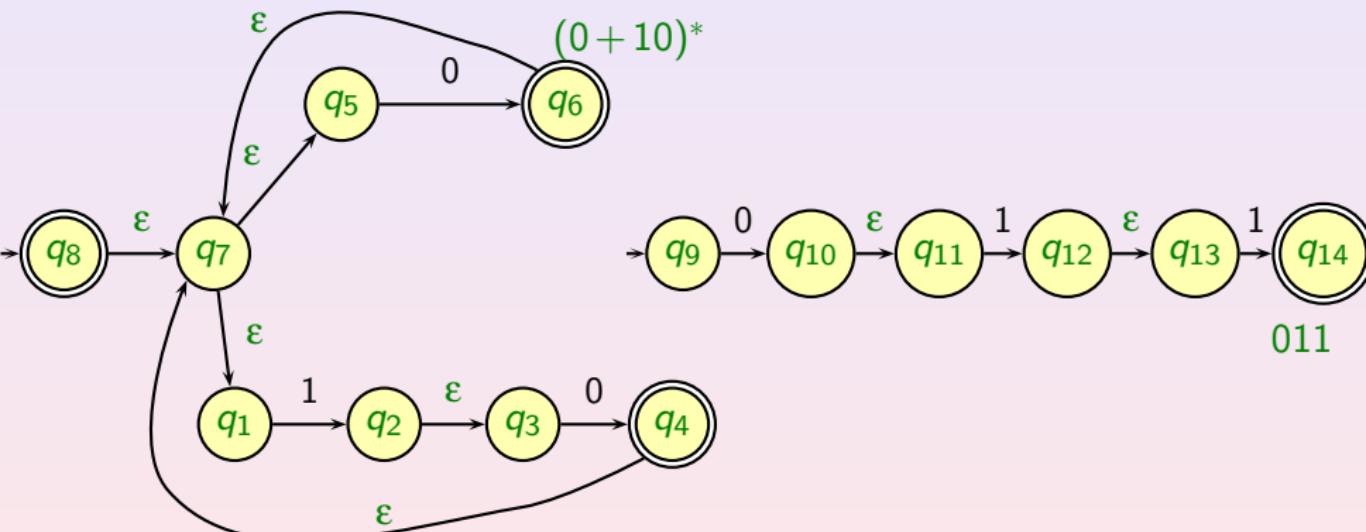
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



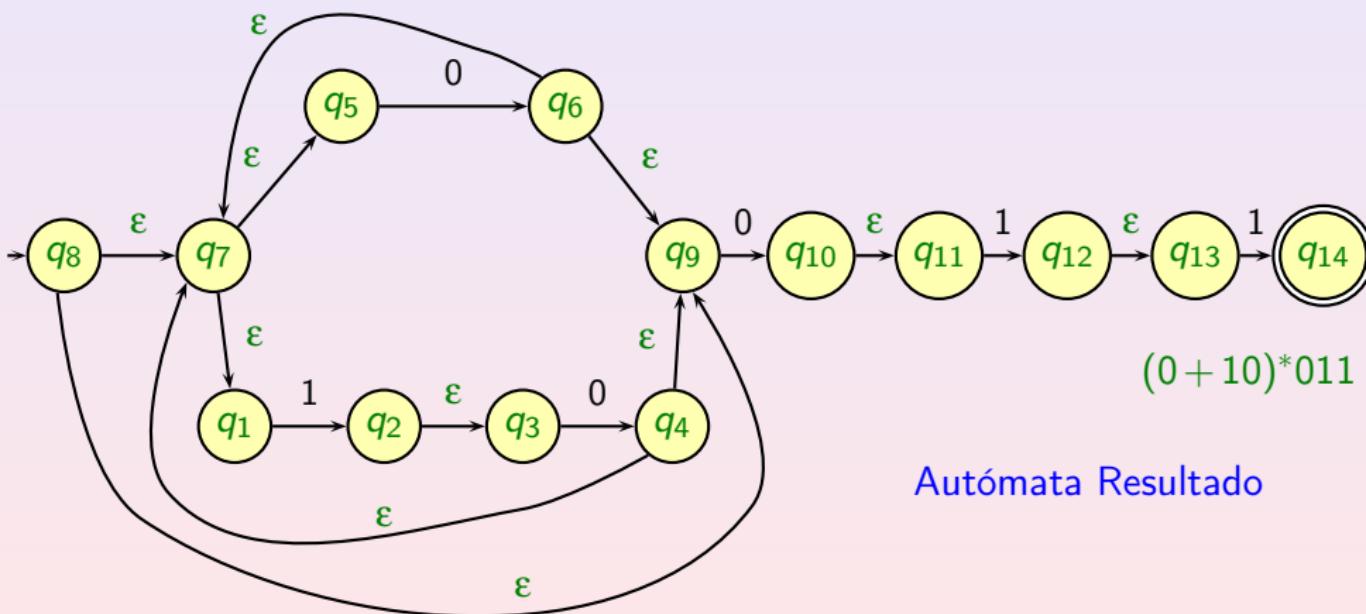
# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



# Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular  $(0 + 10)^*011$



Autómata Resultado

Si  $L$  es aceptado por un autómata finito determinista, entonces puede venir expresado mediante una expresión regular.

---

Sea el autómata  $M = (Q, A, \delta, q_1, F)$  finito determinista.

$Q = \{q_1, \dots, q_n\}$  y  $q_1$  es el estado inicial.

Sea  $R_{ij}^k$  el conjunto de las palabras  $u \in A^*$  tales que  $\delta^*(q_i, u) = q_j$  y para cualquier prefijo propio  $u'$  de  $u$  se cumple que si  $\delta^*(q_i, u') = q_l$ , entonces  $l \leq k$ .

- Permiten pasar al autómata de  $q_i$  a  $q_j$
- Todos los estados intermedios por los que pasan tienen una numeración menor o igual a  $k$ , donde estado intermedio es cualquier estado por el que se pasa al leer un prefijo de  $u$  que no sea ni la palabra vacía ni toda la palabra).

Por lo tanto la restricción de ser de numeración menor o igual a  $k$  no se aplica al estado de salida o al de llegada, a no ser que por ellos también se pase de forma intermedia.

$R_{ij}^k$  se puede calcular de forma recursiva en el superíndice  $k$ :

- Para  $k = 0$

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a : \delta(q_i, a) = q_j\} & \text{si } i \neq j \\ \{a : \delta(q_i, a) = q_i\} \cup \{\epsilon\} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Para  $k \geq 1$ , tenemos que  $R_{ij}^k$  está compuesto de dos tipos de palabras:

- Palabras que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  no pasan por  $q_k$  como estado intermedio: pertenecen a  $R_{ij}^{k-1}$
- Palabras que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$ .  
Vamos a calcular este conjunto.

Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:

Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



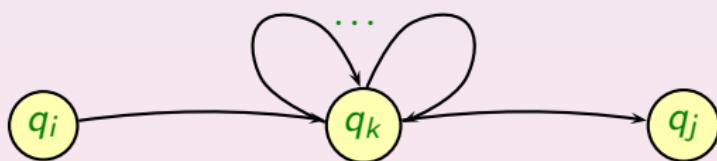
Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

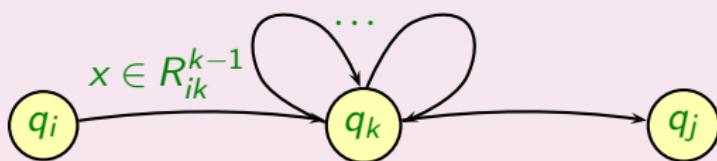
Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



# Cálculo de $R_{ij}^k$

Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

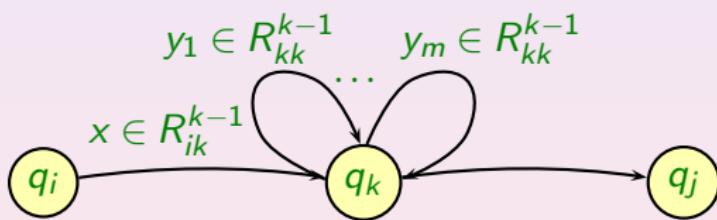
Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



# Cálculo de $R_{ij}^k$

Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

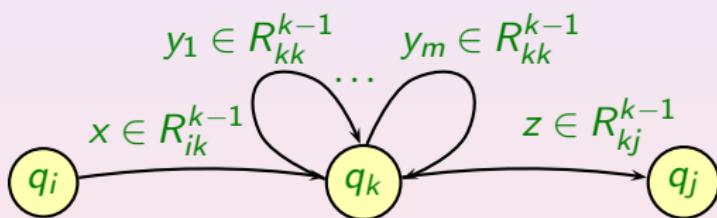
Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



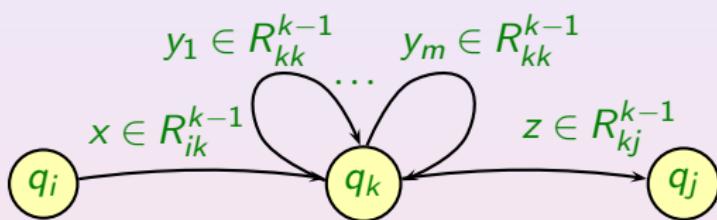
# Cálculo de $R_{ij}^k$

Palabras de  $R_{ij}^k$  que para ir de  $q_i$  a  $q_j$  pasan por  $q_k$  como estado intermedio:

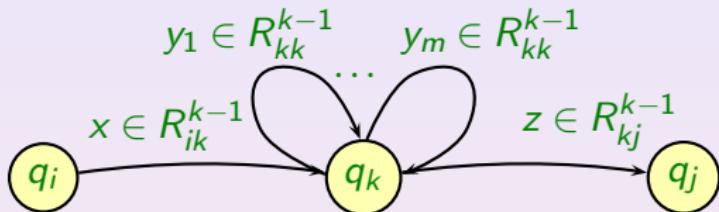
Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



# Cálculo de $R_{ij}^k$



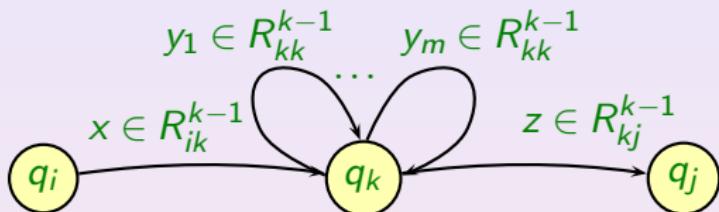
# Cálculo de $R_{ij}^k$



Como la palabra  $y_1 \dots y_m \in (R_{kk}^{k-1})^*$ , entonces la palabra completa está en

$$R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1}$$

# Cálculo de $R_{ij}^k$



Uniendo las dos partes, obtenemos:

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} \left( R_{kk}^{k-1} \right)^* R_{kj}^{k-1}$$

# Asociando expresión regular $r_{ij}^k$ a $R_{ij}^k$

Expresión regular asociada a  $R_{ij}^k \rightarrow r_{ij}^k$

Para  $k = 0$  es inmediato.

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} a_1 + \dots + a_l & \text{si } i \neq j \\ a_1 + \dots + a_l + \epsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$

donde  $\{a_1, \dots, a_l\}$  es el conjunto  $\{a : \delta(q_i, a) = q_j\}$ .

Si este conjunto es vacío la expresión regular sería:

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \\ \epsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$

Cálculo de las expresiones  $r_{ij}^k$ , calculadas las  $r_{ij}^{k-1}$

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \rightarrow r_{ij}^k = r_{ij}^{k-1} + r_{ik}^{k-1} (r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1}$$

$R_{ij}^n$  donde  $n$  es el número de estados es:

El conjunto de palabras que pasan al autómata del estado  $q_i$  al estado  $q_j$  y tal que todos los estados intermedios por los que se pasa tienen numeración menor o igual a  $n$ .

$R_{ij}^n$  donde  $n$  es el número de estados es:

El conjunto de palabras que pasan al autómata del estado  $q_i$  al estado  $q_j$  y tal que todos los estados intermedios por los que se pasa tienen numeración menor o igual a  $n$ .

Como todos los estados del autómata tienen numeración menor o igual a  $n$ , entonces la segunda condición siempre se cumple y

$R_{ij}^n$  donde  $n$  es el número de estados es:

El conjunto de palabras que pasan al autómata del estado  $q_i$  al estado  $q_j$  y tal que todos los estados intermedios por los que se pasa tienen numeración menor o igual a  $n$ .

Como todos los estados del autómata tienen numeración menor o igual a  $n$ , entonces la segunda condición siempre se cumple y

$R_{ij}^n$  es el conjunto de palabras que pasan al autómata del estado  $q_i$  al estado  $q_j$

## Expresión Regular del lenguaje aceptado por el autómata

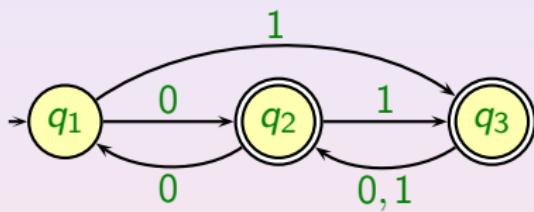
---

$$L(M) = \bigcup_{q_j \in F} R_{1j}^n$$

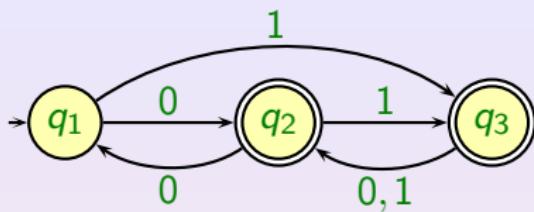
Por tanto, si  $F = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_k}\}$  y  $q_1$  es el estado inicial.  $L(M)$  viene denotado por la expresión regular

$$r_{1j_1}^n + \dots + r_{1j_k}^n$$

# Ejemplo



# Ejemplo



$$r_{11}^0 = \varepsilon$$

$$r_{12}^0 = 0$$

$$r_{13}^0 = 1$$

$$r_{21}^0 = 0$$

$$r_{22}^0 = \varepsilon$$

$$r_{23}^0 = 1$$

$$r_{31}^0 = \emptyset$$

$$r_{32}^0 = 0 + 1$$

$$r_{33}^0 = \varepsilon$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right\}$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 = 0 + 1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = r_{33}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = \varepsilon + \emptyset(\varepsilon)^*1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = r_{33}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = \varepsilon + \emptyset(\varepsilon)^*1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \epsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \epsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \epsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \epsilon + 0(\epsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\epsilon + 00)^*(\epsilon + 00) \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) \end{array} \right\}$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (0 + 1)(00)^* \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (0 + 1)(00)^* \\ r_{33}^2 = r_{33}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= \varepsilon + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (0 + 1)(00)^* \\ r_{33}^2 = r_{33}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= \varepsilon + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = \varepsilon + (0 + 1)0^*1 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$r_{12}^3 + r_{13}^3 =$$

# Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$r_{12}^3 + r_{13}^3 = r_{12}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{13}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 =$$

# Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$\begin{aligned}r_{12}^3 + r_{13}^3 &= r_{12}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{13}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 = \\0(00)^* + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1 + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(\varepsilon + (0+1)0^*1) &= \end{aligned}$$

# Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$\begin{aligned}r_{12}^3 + r_{13}^3 &= r_{12}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{13}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 = \\0(00)^* + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1 + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(\varepsilon + (0+1)0^*1) &= \\0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1 + 0^*1((0+1)0^*1)^* &\end{aligned}$$

## Ecuación de Expresiones Regulares

Si  $r_1, \dots, r_n$  son variables representando expresiones regulares, una ecuación para la expresión regular  $r_i$  es una expresión de la forma:

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1}r_1 + \dots + \beta_{in}r_n$$

donde  $\alpha_i, \beta_{i1}, \dots, \beta_{in}$  son expresiones regulares concretas.

## Solución

Si  $r_1, \dots, r_n$  son variables representando expresiones regulares y tenemos una ecuación para cada expresión regular, una solución es una asignación de una e.r. concreta a cada variable  $r_i$  que satisfaga todas las ecuaciones.

- Si tenemos la ecuación

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1}r_1 + \cdots + \beta_{in}r_n$$

y  $r_i$  no aparece en la parte derecha entonces se sustituye cada aparición de  $r_i$  en las otras ecuaciones por  $\alpha_i + \beta_{i1}r_1 + \cdots + \beta_{in}r_n$  y se aplican las reglas de cálculo con e.r. para dejarla como una nueva ecuación donde ha desaparecido la variable  $r_i$ .

- Si en la parte derecha aparece  $r_i$ :

$$r_i = \alpha + \beta r_i$$

donde en  $\alpha$  pueden aparecer otras variables, pero no en  $\beta$ , se aplica el **lema de Arden** para despejar  $r_i$ .

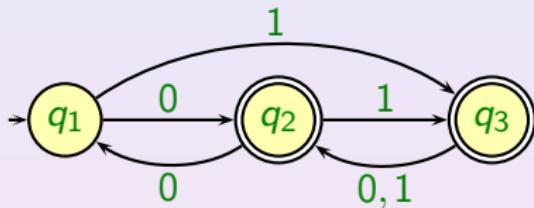
Si  $\beta$  no incluye la palabra vacía, entonces la única solución de la anterior e.r. es  $r_i = \beta^* \alpha$ .

Ahora ya se puede sustituir  $r_i$  en el resto de las ecuaciones.

- Así se continúa hasta encontrar el valor de una de las variables. Sustituyendo en las ecuaciones usadas, podemos encontrar el valor de las otras variables.

- Se puede aplicar a autómatas no deterministas, pero no con transiciones nulas (puede dar lugar a ecuaciones en las que no existe una única solución).
- Hay una variable e.r.  $q_i$  por cada estado  $q_i$ : indica el conjunto de palabras tales que leyéndose desde el estado  $q_i$  permiten llegar a un estado final.
- Por cada estado  $q_i$  se añade una ecuación con  $q_i$  en la parte izquierda y en la que la derecha es una suma que se calcula añadiendo los siguientes términos:
  - Si  $q_i$  es final se suma  $\epsilon$
  - Si  $q_j \in \delta(q_i, a)$ , entonces se suma  $aq_j$
- Una vez resuelto el sistema, la expresión regular del lenguaje asociado al autómata es  $q_0$ , donde  $q_0$  es el estado inicial.

# Ejemplo



Ecuaciones:

$$q_1 = 0q_2 + 1q_3$$

$$q_2 = \varepsilon + 0q_1 + 1q_3$$

$$q_3 = \varepsilon + 0q_2 + 1q_2 = \varepsilon + (0 + 1)q_2$$

# Resolución

$$q_1 = 0q_2 + 1q_3$$

$$q_2 = \varepsilon + 0q_1 + 1q_3$$

$$q_3 = \varepsilon + (0 + 1)q_2$$

# Resolución

$$q_1 = 0q_2 + 1q_3$$

$$q_2 = \varepsilon + 0q_1 + 1q_3$$

$$q_3 = \varepsilon + (0+1)q_2$$

Sustituímos  $q_3$  en la primera y segunda ecuaciones y nos queda:

$$q_1 = 0q_2 + 1(\varepsilon + (0+1)q_2)$$

$$q_2 = \varepsilon + 0q_1 + 1(\varepsilon + (0+1)q_2)$$

Reorganizando,

# Resolución

$$q_1 = 0q_2 + 1q_3$$

$$q_2 = \varepsilon + 0q_1 + 1q_3$$

$$q_3 = \varepsilon + (0+1)q_2$$

Sustituímos  $q_3$  en la primera y segunda ecuaciones y nos queda:

$$q_1 = 0q_2 + 1(\varepsilon + (0+1)q_2)$$

$$q_2 = \varepsilon + 0q_1 + 1(\varepsilon + (0+1)q_2)$$

Reorganizando,

$$q_1 = 1 + (0+1)(0+1)q_2$$

$$q_2 = \varepsilon + 1 + 0q_1 + 1(0+1)q_2$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= \underbrace{\varepsilon + 1 + 0q_1}_{\alpha} + \underbrace{1(0 + 1)}_{\beta}q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= \underbrace{\varepsilon + 1 + 0q_1}_{\alpha} + \underbrace{1(0 + 1)}_{\beta}q_2 \end{aligned}$$

En la ecuación segunda se aplica el lema de Arden:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= (1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1 + 0q_1) \end{aligned}$$

# Resolución

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ \textcolor{red}{q_2} &= (1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1 + 0q_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= (1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1 + 0q_1) \end{aligned}$$

Reorganizamos:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= (1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1) + (1(0 + 1))^*0q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= (1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1 + 0q_1) \end{aligned}$$

Reorganizamos:

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 + (0 + 1(0 + 1))q_2 \\ q_2 &= (1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1) + (1(0 + 1))^*0q_1 \end{aligned}$$

Sustituimos  $q_2$  en la primera ecuación y tenemos:

$$q_1 = 1 + (0 + 1(0 + 1))((1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1) + (1(0 + 1))^*0q_1)$$

Partimos de:

$$q_1 = 1 + (0 + 1(0 + 1))((1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1) + (1(0 + 1))^*0q_1)$$

Partimos de:

$$q_1 = 1 + (0 + 1(0+1))((1(0+1))^*(\varepsilon + 1) + (1(0+1))^*0q_1)$$

Reorganizando:

$$q_1 = 1 + (0 + 1(0+1))(1(0+1))^*(\varepsilon + 1) + (0 + 1(0+1))(1(0+1))^*0q_1$$

# Resolución

Partimos de:

$$q_1 = 1 + (0 + 1(0 + 1))((1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1) + (1(0 + 1))^*0q_1)$$

Reorganizando:

$$q_1 = 1 + (0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1) + (0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*0q_1$$

Aplicando el lema de Arden:

$$q_1 = ((0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*0)^*((1 + (0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*(\varepsilon + 1)))$$

que es una e.r. del lenguaje aceptado por el autómata (ya que  $q_1$  es el estado inicial).

Expresión Regular	Significado
Caracteres Normales	
+,*	Ellos mismos
	Superíndices +,*
[...]	La unión de los lenguajes
[a – b]	Cualquier símbolo entre corchetes
[^...]	todos los caracteres entre <i>a</i> y <i>b</i>
?	El complementario de [...]
{nombre}	0 ó 1 repetición de lo anterior
{n}	Se substituye la e.r. <i>nombre</i>
{n,m}	<i>n</i> repeticiones de la anterior e.r.
\*	entre <i>n</i> y <i>m</i> repeticiones de la anterior e.r.
"..."	El carácter *
^,\$	Los caracteres entre comillas literalmente
.	Principio, fin de línea
\n	Cualquier carácter excepto el salto de línea
	salto de línea

# Estructura de un fichero lex

```
nombre1      er1
nombre2      er2
nombrei      eri
              declaglobal1
              declaglobal2
```

```
%%                      declalocal1
                      declalocal2
```

```
er1          accion1;
er2          accion2;
er3          accion3;
```

```
%%
```

definiciones de funciones en C

- `yylex()` – Programa que reconoce las expresiones regulares y ejecuta las acciones.
- `main()` – Programa principal. Por defecto sólo llama a `yylex()`. Se puede redefinir después de los últimos % %
- `yywrap()` – Función que se ejecuta cuando `yylex()` encuentra un fin de fichero. Si devuelve 1 (lo único que hace la versión por defecto) `yylex()` termina. Si devuelve un 0, `yylex()` sigue leyendo de la entrada.
- `yyin` – Fichero de entrada (stdin por defecto)
- `yyout` – Fichero de salida (stdout por defecto)
- `yytext` – Variable que contiene la cadena reconocida por `yylex()`
- `yylen` – Longitud de la cadena reconocida

# Ejemplo

```
car          [a-zA-Z]
digito       [0-9]
signo        (\-|\\+)
suc          ({digito}+)
enter        ({signo}?{suc})
real1        ({enter}\\.{digito}*)
real2        ({signo}?\\.{suc})

int    ent=0, real=0, ident=0, sumaent=0;
%%
int    i;
{enter}
({real1}|{real2})
{car}({car}|{digito})*
.|\n
%%
yywrap()
{printf("Numero de Enteros%d, reales%d, ident%d,
         Suma de Enteros%d",ent,real,ident,sumaent); return 1;}
```

- ① Crear fichero ejemplo con el contenido anterior
- ② Ejecutar lex con el fichero creado:  
`lex ejemplo`
- ③ Compilar el programa que crea lex:  
`gcc lex.yy.c -o prog -ll`
- ④ ejecutar el programa prog

- Para búsqueda de patrones (buscar direcciones, enlaces o números de teléfono en páginas web).
- Fueron centrales en el desarrollo de Unix:  
K. Thompson (1968) Regular expressions search algorithms.  
*Comm. ACM.* 11, 419–422.  
Existen instrucciones como **grep**: '*Global (Search for) Regular Expressions and Print*'

- *Common Applications of Regular Expressions* By Richard Lowe en  
<http://www.4guysfromrolla.com/webtech/120400-1.shtml>  
contiene 4 aplicaciones de expresiones regulares, desde verificación de direcciones de correo electrónico a dividir un documento en secciones para incorporarlo en una base de datos.
- En <http://www.webreference.com/js/column5/> podeis ver el uso de expresiones regulares en navegadores.

# Gramáticas Regulares ó tipo 3

- *Lineales por la derecha.*- Cuando todas las producciones tienen la forma

$$A \rightarrow uB$$

$$A \rightarrow u$$

# Gramáticas Regulares ó tipo 3

- *Lineales por la derecha.*- Cuando todas las producciones tienen la forma

$$A \rightarrow uB$$

$$A \rightarrow u$$

- *Lineales por la izquierda.*- Cuando todas las producciones tienen la forma

$$A \rightarrow Bu$$

$$A \rightarrow u$$

# Ejemplo

Gramática Lineal por la Derecha:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

---

# Ejemplo

Gramática Lineal por la Derecha:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

---

Expresión Regular

$$0(10)^*$$

# Ejemplo

Gramática Lineal por la Derecha:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

---

Expresión Regular

$$0(10)^*$$

Gramática Lineal por la Izquierda:

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

Si  $L$  es un lenguaje generado por una gramática regular, entonces existe un autómata finito determinista que lo reconoce.

$L$  es un lenguaje generado por la gramática  $G = (V, T, P, S)$  lineal por la derecha. AFND con movimientos nulos que acepta  $L$ :  $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$  donde

- $Q = \{[\alpha] : (\alpha = S) \vee (\exists A \in V, u \in T^*, \text{ tales que } A \rightarrow u\alpha \in P)\}$
- $q_0 = [S]$
- $F = \{[\varepsilon]\}$
- $\delta$  viene definida por
  - Si  $A$  es una variable:  $\delta([A], \varepsilon) = \{[\alpha] : (A \rightarrow \alpha) \in P\}$
  - Si  $a \in T$  y  $\alpha \in (T^*V \cup T^*)$ , entonces

$$\delta([a\alpha], a) = [\alpha]$$

# Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

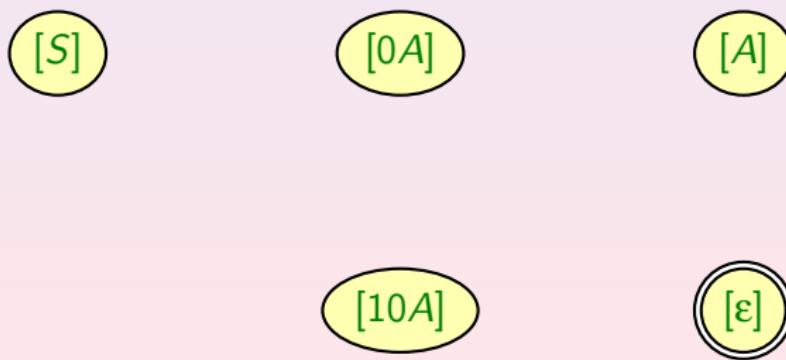
El autómata que se obtiene es el siguiente:

# Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

El autómata que se obtiene es el siguiente:

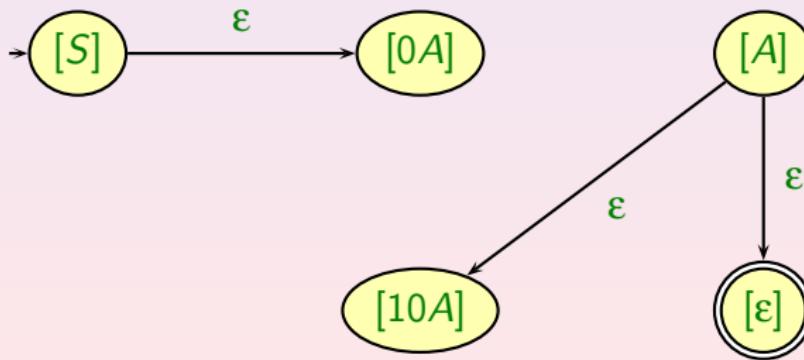


# Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

El autómata que se obtiene es el siguiente:

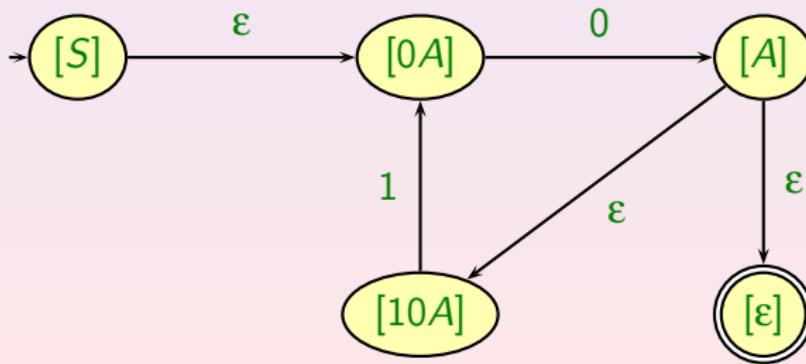


# Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

El autómata que se obtiene es el siguiente:



# Gramáticas Lineales por la Izquierda

Gramática lineal por la izquierda,  $G = (V, T, P, S)$

1. Consideraremos la gramática  $G' = (V, T, P', S)$  donde

$$P' = \{A \rightarrow \alpha : A \rightarrow \alpha^{-1} \in P\}$$

Es inmediato que  $L(G') = L(G)^{-1}$ .

2. Sea  $M'$  el autómata finito no-determinista que acepta el lenguaje  $L(G')$ .

3. Calcular  $M$  a partir de  $M'$  invirtiendo el autómata:

- Dejar sólo un estado final (ocurre siempre en nuestro caso).
- Invertir las transiciones
- Intercambiar el estado inicial y el final.

El lenguaje aceptado por  $M$  es:  $L(M')^{-1} = L(G')^{-1} = (L(G)^{-1})^{-1} = L(G)$

# Ejemplo

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

Para construir un AFND con transiciones nulas que acepte este lenguaje se dan los siguientes pasos:

# Ejemplo

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

Para construir un AFND con transiciones nulas que acepte este lenguaje se dan los siguientes pasos:

- Invertir la parte derecha de las producciones:

$$S \rightarrow 01S$$

$$S \rightarrow 0$$

# Ejemplo

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

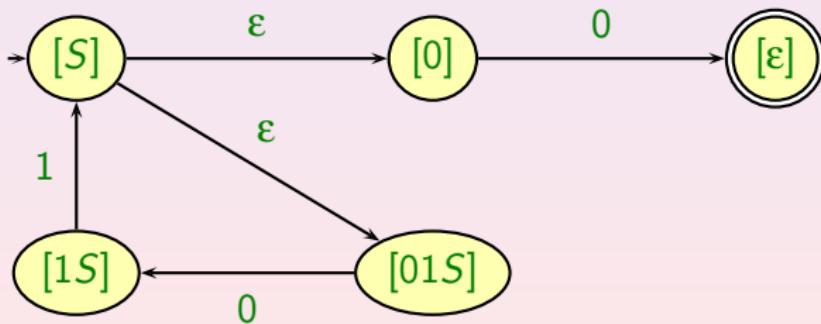
Para construir un AFND con transiciones nulas que acepte este lenguaje se dan los siguientes pasos:

- Invertir la parte derecha de las producciones:

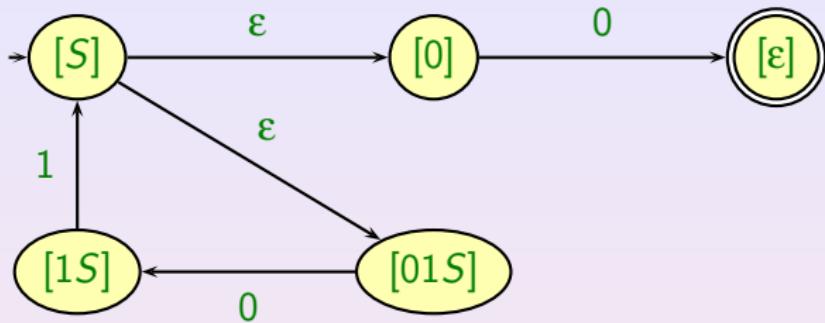
$$S \rightarrow 01S$$

$$S \rightarrow 0$$

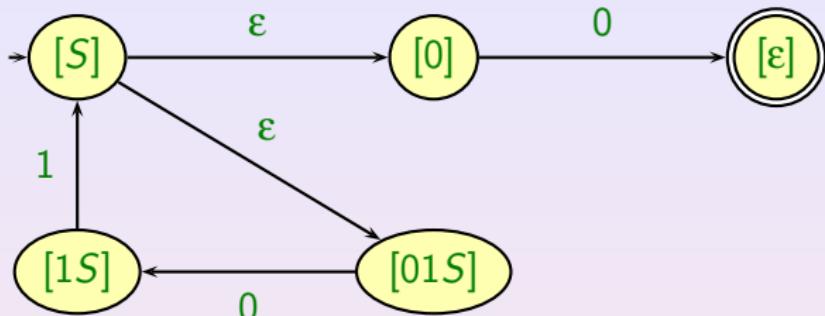
- Construir el AFND con transiciones nulas asociado



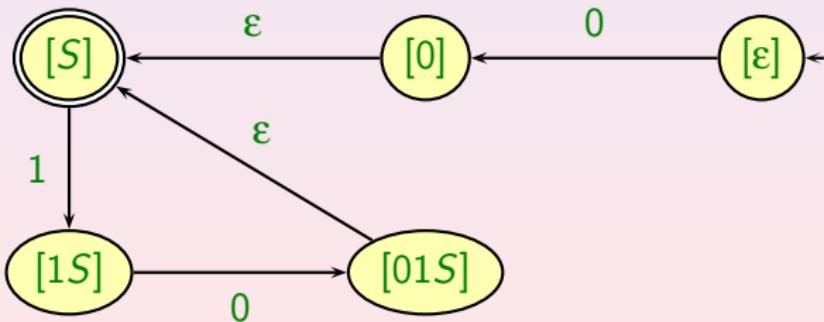
## Ejemplo Cont.



## Ejemplo Cont.



- Invertimos el autómata



Si  $L$  es aceptado por un Autómata Finito Determinístico entonces  $L$  puede generarse mediante una gramática lineal por la derecha y por una lineal por la izquierda.

Si  $L$  es aceptado por un Autómata Finito Determinístico entonces  $L$  puede generarse mediante una gramática lineal por la derecha y por una lineal por la izquierda.

Sea  $L = L(M)$  donde  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  es un autómata finito determinista.

La **gramática lineal por la derecha** es  $G = (Q, A, P, q_0)$  donde las variables son los estados, la variable inicial es  $q_0$  y  $P$  contiene las producciones,

$$p \rightarrow aq, \quad \text{si } \delta(p, a) = q$$

$$p \rightarrow \varepsilon, \quad \text{si } p \in F$$

# Autómata → Gramática lineal

Si  $L$  es aceptado por un Autómata Finito Determinístico entonces  $L$  puede generarse mediante una gramática lineal por la derecha y por una lineal por la izquierda.

Sea  $L = L(M)$  donde  $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$  es un autómata finito determinista.

La **gramática lineal por la derecha** es  $G = (Q, A, P, q_0)$  donde las variables son los estados, la variable inicial es  $q_0$  y  $P$  contiene las producciones,

$$p \rightarrow aq, \quad \text{si } \delta(p, a) = q$$

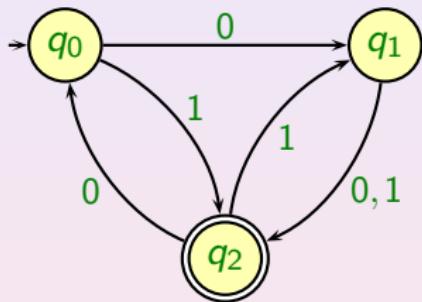
$$p \rightarrow \epsilon, \quad \text{si } p \in F$$

---

Para el caso de una **gramática lineal por la izquierda**, invertimos el autómata, construimos la gramática lineal por la derecha asociada e invertimos la parte derecha de las producciones.

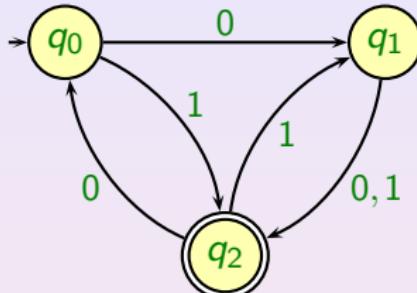
# Ejemplo: Gramática Lineal por la Derecha

Consideremos el autómata:



# Ejemplo: Gramática Lineal por la Derecha

Consideremos el autómata:



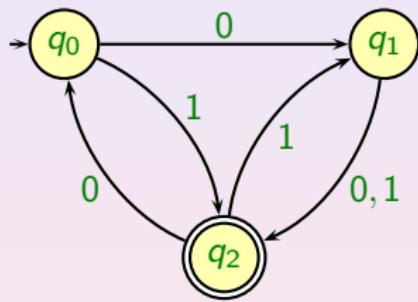
La gramática es (variable inicial  $q_0$ ):

$$q_0 \rightarrow 0q_1, \quad q_0 \rightarrow 1q_2, \quad q_1 \rightarrow 0q_2, \quad q_1 \rightarrow 1q_2$$

$$q_2 \rightarrow 0q_0, \quad q_2 \rightarrow 1q_1, \quad q_2 \rightarrow \epsilon$$

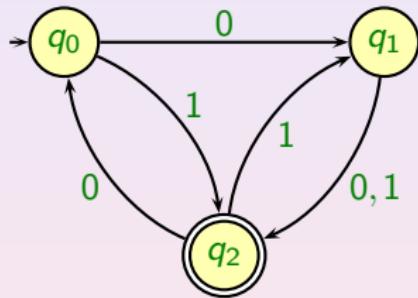
# Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:

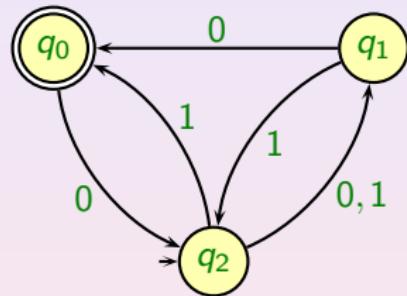


# Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:

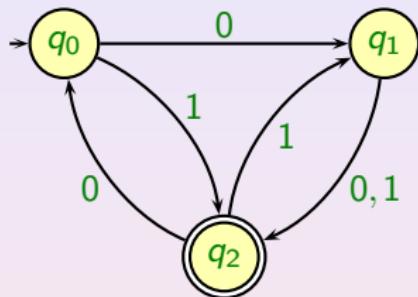


Invertimos el autómata:

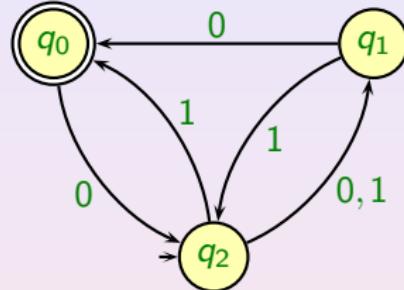


# Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:



Invertimos el autómata:



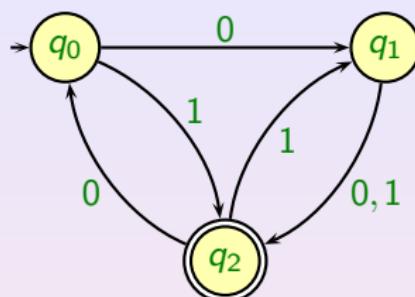
La gramática asociada a este autómata es (variable inicial  $q_2$ ):

$$q_1 \rightarrow 0q_0, \quad q_2 \rightarrow 1q_0, \quad q_2 \rightarrow 0q_1, \quad q_2 \rightarrow 1q_1$$

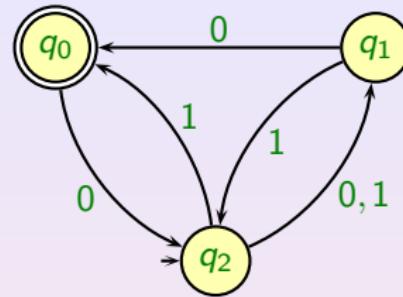
$$q_0 \rightarrow 0q_2, \quad q_1 \rightarrow 1q_2, \quad q_0 \rightarrow \epsilon$$

# Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:



Invertimos el autómata:



La gramática asociada a este autómata es (variable inicial  $q_2$ ):

$$q_1 \rightarrow 0q_0, \quad q_2 \rightarrow 1q_0, \quad q_2 \rightarrow 0q_1, \quad q_2 \rightarrow 1q_1$$

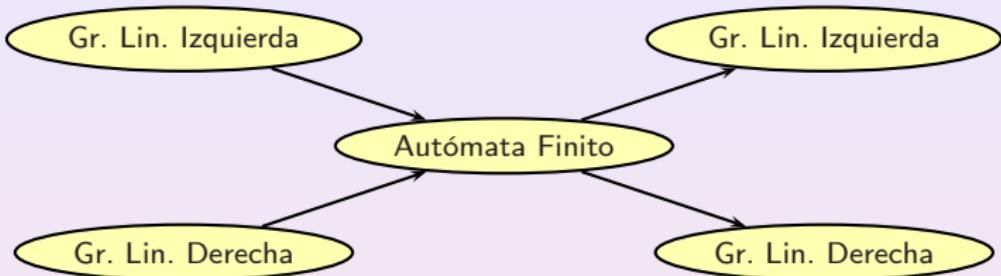
$$q_0 \rightarrow 0q_2, \quad q_1 \rightarrow 1q_2, \quad q_0 \rightarrow \epsilon$$

Invertimos la parte derecha de las producciones:

$$q_1 \rightarrow q_00, \quad q_2 \rightarrow q_01, \quad q_2 \rightarrow q_10, \quad q_2 \rightarrow q_11 \\ q_0 \rightarrow q_20, \quad q_1 \rightarrow q_21, \quad q_0 \rightarrow \epsilon$$

# Equivalencia Gramáticas Lineales por la Derecha y Lineales por la izquierda

Hemos demostrado:



Componiendo dos de estas transformaciones se puede conseguir pasar de una gramática lineal por la izquierda a una lineal por la derecha que genere el mismo lenguaje y, de la misma forma, pasar de una gramática lineal por la derecha a una lineal por la izquierda que genere el mismo lenguaje.

## Resultado

Dada una gramática lineal por la izquierda existe una gramática lineal por la derecha que genere el mismo lenguaje.

Dada una gramática lineal por la derecha existe una gramática lineal por la izquierda que genere el mismo lenguaje.

