CuestionarioT4T52.pdf

Esfacilverque21

Inferencia Estadística

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

① Sea $(X_1,\dots,X_n)$ m.a.s de X con $f_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$, $x>0$ y $\theta\in\mathbb{R}$. Sabiendo que la fam. de dist. de X es regular y que $E_\theta[X] = \frac{2}{\theta}$ y $Var_\theta[X] = \frac{2}{\theta^2}$. Entonces, la cota de FCR para la varianza de estim reg insesg en θ^2 es:

a) $\frac{\theta^4}{2n}$ y no es alcanzable.

b) $\frac{\theta^4}{2n}$ y es alcanzable.

c) $\frac{2\theta^4}{n}$ y no es alcanzable.

d) $\frac{2\theta^4}{n}$ y es alcanzable.

*) Considero $g(\theta)=\theta^2$. Calculo $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$:

•) $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = n I_X(\theta) = n\, Var_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial\theta}\right] = n\, Var_\theta\left[\frac{\partial(2\ln\theta + \ln X - \theta X)}{\partial\theta}\right] = n\, Var_\theta\left[\frac{2}{\theta} - X\right] =$

$= n\, Var_\theta[X] = \frac{2n}{\theta^2}$

*) Dado T estim insesg regular de 2º orden para $g(\theta)$, entonces:

• $Var_\theta(T) \leq \frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)} = \frac{4\theta^2}{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{2\theta^4}{n} \Rightarrow \boxed{\text{a) y b) Falsas}}$

*) Para ver si la cota es, o no, alcanzable, compruebo que T estim regular insesg de 2º orden en $g(\theta)$ sea eficiente o no. Uso el Teorema de caract. de estim. efic:

* Como T es regular $\Rightarrow I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta)g'(\theta)$. Calculo $a(\theta)$:

• $\frac{2n}{\theta^2} = a(\theta)2\theta \Rightarrow a(\theta) = \frac{n}{\theta^3}$

* Impongo i) del Teorema para hallar T:

• $f_\theta^n(x) = \theta^{2n} e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i \Rightarrow \ln(f_\theta^n(x)) = 2n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i \Rightarrow \frac{\partial \ln f_\theta^n(X)}{\partial\theta} = \underline{\frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i}$

• $a(\theta)[T - g(\theta)] = \frac{n}{\theta^3}(T-\theta^2) = \underline{\frac{n}{\theta^3}T - \frac{n}{\theta}}$

$\xrightarrow{\text{i)}}$

$\Rightarrow \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i = \frac{n}{\theta^3}T - \frac{n}{\theta} \Rightarrow$ Al despejar T me va a quedar dependiendo de θ !!

- Luego, T no es efic, y como es insesg regular de 2º orden $\overset{\text{def de efic}}{\Rightarrow} Var_\theta[T] \neq \frac{g'(\theta)^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)} \Rightarrow$ No se alcanza la cota

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{c) Verdad}}$

2 Se lanza un dado cargado hasta que sale uno y se repite el experimento seis veces de forma independiente. Decir cuál es falsa:

a) Si la estimación máximo verosímil de la probabilidad de que el 1 salga en la segunda tirada es 0,16, el número total de lanzamientos ha sido 30

b) Si en dos repeticiones ha salido el uno a la primera, en dos a la segunda y en las otras dos a la tercera, la estimación máximo verosímil es 0,25

c) Si los lanzamientos necesarios para obtener el i en las seis repeticiones han sido 5,4,6,6,4 y 5, la estimación máximo verosímil de no salir uno es 0,8

d) Si los lanzamientos han sido 6,5,7,7,5 y 6, la estimación máximo verosímil de que el uno salga en la segunda tirada es 1/6.

X = "Nº de lanzamientos hasta salir 1 (incluyendo el último)"

$X \rightarrow \{G(p),\ p \in (0,1)\}$, $P(X=x) = p(1-p)^x$, $x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $(X_1, \dots, X_6)$ m.a.s

$X-1$ = "Nº de lanzamientos hasta salir 1"

$P(X-1 = x-1) = p(1-p)^{x-1}$, $x \in \mathbb{N}$

*) Calculo el em.v de p:

- $L_{x_1,\dots,x_n}(p) = p^6 (1-p)^{\sum_{i=1}^{6} x_i - 6} \Rightarrow L'_{x_1,\dots,x_n}(p) = 0 \Rightarrow 6p^5 (1-p)^{\sum x_i - 6} - (\sum x_i - 6)(1-p)^{\sum x_i - 7} p^6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(1-p) - (\sum x_i - 6)p = 0 \Rightarrow \hat{p}(X_1,\dots,X_6) = \frac{1}{\bar{X}}$

*) Si supongo d), entonces:

- $p = \dfrac{1}{\frac{6+5+7+7+5+6}{6}} = \frac{1}{6}$

- $P(X=2) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-1} = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\text{d) Falsa}}$

3) Sea $f_\alpha(x) = \frac{3x^2}{(\alpha+1)^3}$, $0 < x < \alpha+1$ y $\alpha > -1$. Selecciona la correcta:

a) No existe el UMVUE de α.

b) Si los datos observados son 5, 4'8, 1'2, 3, 2'5, 6'4, el e.m.v de α^2 vale 39'96.

c) El e.m.v de α es $\max X_i$

d) El e.m.v de α por el método de los momentos es $\frac{4}{3}\bar{X} - 1$.

*) Calculo e.m.v de α:

- $L_{x_1,\dots,x_n}(\alpha) = f_\alpha^n(\alpha) = \frac{3^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2}{(\alpha+1)^{3n}}$ si $\min X_i > 0$ y $\max X_i < \alpha+1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow L_{x_1,\dots,x_n}'(\alpha) = 3^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2 (-3n)\frac{1}{(\alpha+1)^{3n+1}} < 0 \Rightarrow L_{x_1,\dots,x_n}(\alpha)$ estric. decrec en $(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\hat{\alpha}(X_1,\dots,X_n) = \max X_i - 1}$ es el e.m.v de α $\Rightarrow$ $\boxed{\text{a) y c) falsas}}$

$\max X_i < \alpha + 1$

*) Además, b) es falsa ya que:

- $\hat{\alpha} = \max X_i - 1$ es e.m.v de α $\Rightarrow (\max X_i - 1)^2$ es e.m.v de $\alpha^2 \overset{b)}{\Longrightarrow} (6.4-1)^2 = 29,16 \neq 39,16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\text{b) falsa}}$

*) Compruebo d):

- $E_\alpha[X] = \int_0^{\alpha+1} x f_\alpha(x)\,dx = \int_0^{\alpha+1} \frac{3x^3}{(\alpha+1)^3}\,dx = \frac{3}{(\alpha+1)^3}\frac{1}{4}(\alpha+1)^4 = \frac{3}{4}(\alpha+1) \overset{\text{met de los momentos}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \bar{X} = \frac{3}{4}(\hat{\alpha}+1) \Rightarrow \underline{\hat{\alpha} = \frac{4}{3}\bar{X} - 1} \Rightarrow \boxed{\text{d) verdad}}$

4) Sea $(X_1, \dots, X_n)$ m.a.s de una var. al. X con función $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ y $\theta > 0$. Sabiendo que la fam. de distrib de X es regular, con $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Elija la opción correcta:

a) $\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ es efic para $\frac{-n}{\theta}$.

b) El UMVUE de $\ln\theta$, si existe, es eficiente.

c) Toda función lineal de θ admite estim efic.

d) Sea $n=1$ y $U(X)$ insesgado en $\frac{1}{\theta}$. Si $E[U(X)\ln(X)] = \frac{-1}{\theta^2} \Rightarrow U(X)$ es regular.

b) F

- No tiene porqué, ya que UMVUE $\nRightarrow$ eficiente

c) F

- Esto solo será cierto si θ admite estim efic.

d) F

⊛ Compruebo la regularidad de $U(X)$ por definición:

*) Como $U(X)$ es insesgado en $\frac{1}{\theta}$, entonces:

- $E_\theta[U(X)] = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \frac{\partial E_\theta[U(X)]}{\partial\theta} = \frac{-1}{\theta^2}$

* Sin embargo:

- $E_\theta\left[U(X)\frac{\partial \ln(f_\theta(x))}{\partial\theta}\right] = E_\theta\left[U(X)\frac{\partial(\ln\theta + (\theta-1)\ln X)}{\partial\theta}\right] = E_\theta\left[U(X)\frac{1}{\theta} + U(X)\ln(X)\right] = \frac{1}{\theta}E_\theta[U(X)] + E_\theta[U(X)\ln(X)] =$

$$= \frac{-1}{\theta^3} - \frac{1}{\theta^2} \neq \frac{-1}{\theta^2} = \frac{\partial E_\theta[U(X)]}{\partial\theta}$$

- Luego, $U(X)$ no es regular

a) V

⊛ Lo compruebo con el Tª de caract de estim efic

*) Supongo i) cierto para obtener $a(\theta)$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_\theta^n(x) = \theta^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} \Rightarrow \ln(f_\theta^n(x)) = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \Rightarrow \frac{\partial \ln(f_\theta^n(x))}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \\ \bullet\ a(\theta)\left[\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{-n}{\theta}\right] \end{array}\right\} \xRightarrow{i)} a(\theta) = 1$$

*) Compruebo que se verifica ii)

- $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = n I_X(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$
- $a(\theta)g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$

$\Rightarrow$ Se cumple ii)

Luego, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$ es efic para $\frac{-n}{\theta}$.

④ Selecciona la falsa:

a) El UMVUE de una func. param es el estim de 2º orden que minimiza unif la varianza.

b) Si T es sufic. y completo, $E_\theta[S] = g(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$ y $E_\theta[S^2] < +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$ $\Rightarrow E[S/T]$ es el UMVUE de $g(\theta)$.

c) El UMVUE de una func. param es el estim insesg. de 2º orden que minimiza unif el ECM.

d) Si T es suf, completo y de 2º orden $\Rightarrow T$ es el UMVUE para $E_\theta[T]$.

a) F

- Es necesaria la insesgadez.

b) V

- Cierto, es el Tª de Lehmann - Sheffé.

c) V

- Cierto, es el Tª de Rao - Blackwell.

d) V

*) Es claro que T es insesgado en $E_\theta[T]$

- Luego, tomando $S = T$ en Tª de Lehmann - Sheffé $\Rightarrow T$ es el UMVUE para $E_\theta[T]$