

# solucionesexamenextraordinario.pdf



**Alexmaths**



**Topología I**



**2º Grado en Matemáticas**



**Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada**



## Webinar Data Engineer, el motor del Big Data

Te enseñamos la realidad laboral de un ingeniero de datos, la relación con el resto de perfiles profesionales, las herramientas más habituales.

**Ignacio Charfolé**

Gerente de Desarrollo, Gobierno y Arquitectura BigData en Telefónica de España.

**DÓNDE Y CUANDO**

Online

Martes, Enero 30, 2024  
De 19:00 A 20:00



Asistir gratis

Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

WUOLAH

## Topología I. Convocatoria extraordinaria

Grado en matemáticas, doble grado en física y matemáticas  
y doble grado en ingeniería informática y matemáticas

7 de febrero de 2020

1.- (4 puntos). Sea  $X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$  donde  $\alpha \notin \mathbb{R}$ . En  $X$  se considera la topología  $T$  de la que conocemos una base  $\mathcal{B}$  dada por:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon) / \varepsilon > 0\}.$$

- Decidir si  $(X, T)$  es un espacio de Hausdorff.
- Probar que  $T|_{X-\{\alpha\}} = T_u$  y que  $(X - \{0\}, T_{X-\{0\}})$  es homeomorfo a  $(\mathbb{R}, T_u)$ .
- Estudiar la conexión en  $(X, T)$  del conjunto  $A = (a, b) \cup \{\alpha\}$ .
- ¿Es el conjunto  $C = [-1, 1]$  cerrado en  $(X, T)$ ? ¿Es  $C$  compacto en  $(X, T)$ ?

2.- (2 puntos). Sean  $(X, T)$  e  $(Y, T')$  espacios topológicos. Probar que el espacio producto  $(X \times Y, T \times T')$  es conexo si y sólo si  $(X, T)$  e  $(Y, T')$  son conexos.

3.- (4 puntos). Resolver de forma razonada los siguientes apartados:

- Se considera  $f : ([0, 1], T_{u|[0,1]}) \rightarrow (\{0, 1\}, T)$ , donde  $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$  y  $f$  se define como  $f = 1$  en  $[0, 1/2)$  y  $f = 0$  en  $[1/2, 1]$ . Probar que  $f$  es una identificación pero no es abierta ni cerrada.
- Sea  $(X, T)$  un espacio compacto y  $A \subseteq X$  infinito. Demostrar que  $A' \neq \emptyset$ , donde  $A'$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $A$  en  $(X, T)$ .

Duración del examen: 3 horas

WUOLAH

## Ejercicio 1

$X = \mathbb{R} \cup \{x\}$  con  $x \notin \mathbb{R}$ .  $T = \text{top. en } X$  tal que:

$\mathcal{B} = \{ (a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a < b \} \cup \{ (-\varepsilon, 0) \cup 2x \} \cup \{ (0, \varepsilon) / \varepsilon > 0 \}$   
 es una base de  $(X, T)$ .

es una base de  $(X, T)$ . Lo sech si se cumple:

a)  $\exists (X, T)$  es Hausdorff? Lo sech si se cumple:  
 $x \in \mathcal{U}$  y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

$\forall x, y \in X$  con  $x \neq y$   $\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in T$  con  $x \in \mathcal{U}$  y  $y \in \mathcal{V}$  y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

No es difícil probar que si  $x, y \in X - 2x$  y  $x \neq y$   
 entonces  $\exists B, B' \in \mathcal{B}$  tales que  $x \in B, y \in B', B \cap B' = \emptyset$ .

Veamos sin embargo que  $x = 0$  e  $y = x$  no se pueden separar  
 Veamos sin embargo que  $x = 0$  e  $y = x$  no se pueden separar  
 por abiertos disjuntos. Así  $(X, T)$  NO es de Hausdorff.

Sean  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in T$  tales que  $0 \in \mathcal{U}$  y  $x \in \mathcal{V}$ . Vamos a probar

que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ .

$0 \in \mathcal{U}$  y  $\mathcal{B}$  base  $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} / 0 \in B \subseteq \mathcal{U}$ .

$0 \in \mathcal{U}$  y  $\mathcal{B}$  base  $\Rightarrow \exists B' \in \mathcal{B} / x \in B' \subseteq \mathcal{V}$ .

$x \in \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B}$  base de  $\mathcal{B}$  tenemos que:



Por la descripción de  $\mathcal{B}$  tenemos que:

$B = (a,b)$  con  $a < 0 < b$  para cierto  $\varepsilon > 0$ .

$B' = (-\varepsilon, 0) \cup 2x \cup (0, \varepsilon)$  para cierto  $\varepsilon > 0$ .

Como  $((a,b) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)) - 2x \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq B \cap B' \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ .

b)  $\exists T|_{X-2x} = T_{\mathbb{R}}$ ? Como  $X - 2x = \mathbb{R}$ , nos estandar

preguntando si  $T|_{\mathbb{R}} = T_{\mathbb{R}}$ .

Como  $\mathcal{B}$  es, por definición, una base de  $(X, T)$ , entonces:

$\mathcal{B}|_{\mathbb{R}} = \{ B \cap \mathbb{R} / B \in \mathcal{B} \}$  es una base de  $(\mathbb{R}, T|_{\mathbb{R}})$ .

















Por la descripción de  $\mathcal{B}$  tenemos que:

(1)

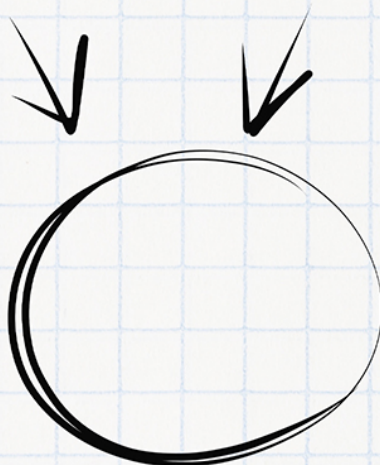


# Imagínate aprobando el examen

## Necesitas tiempo y concentración

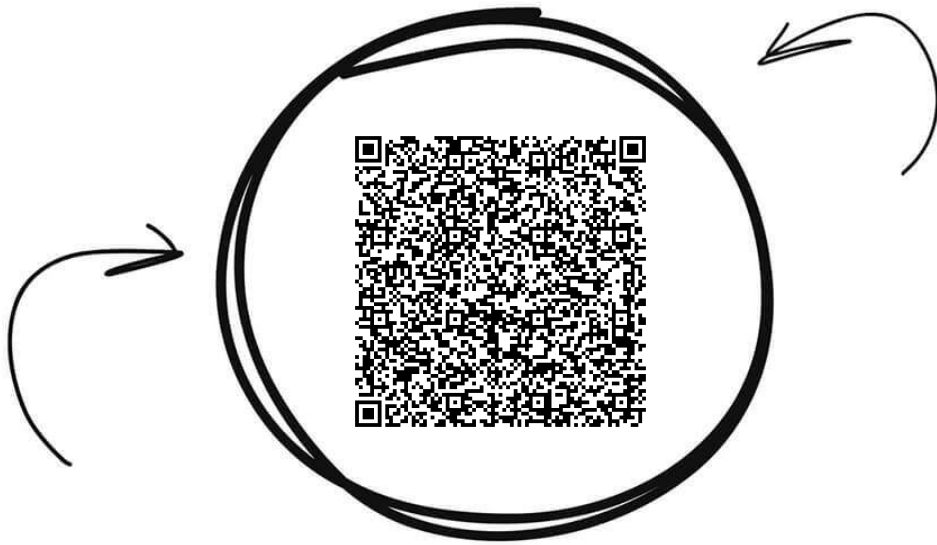
Planes	 PLAN TURBO	 PLAN PRO	 PLAN PRO+
 Descargas sin publi al mes	10 	40 	80 
 Elimina el video entre descargas			
 Descarga carpetas			
 Descarga archivos grandes			
 Visualiza apuntes online sin publi			
 Elimina toda la publi web			
 Precios <span>Anual <input type="checkbox"/></span>	0,99 € / mes	3,99 € / mes	7,99 € / mes

Ahora que puedes conseguirlo,  
¿Qué nota vas a sacar?



# WUOLAH

# Topología I



Banco de apuntes de la

**WUOLAH**



**Comparte estos flyers en tu clase y  
consigue más dinero y recompensas**

- 1** Imprime esta hoja
- 2** Recorta por la mitad
- 3** Coloca en un lugar visible para que tus compis puedan escanar y acceder a apuntes
- 4** Llévate dinero por cada descarga de los documentos descargados a través de tu QR



$$B_{\Pi} = \{ (a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a < b \} \cup \{ (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) / \varepsilon > 0 \}.$$

Cómo  $B_U \subseteq B_{\Pi} \Rightarrow T_U \leq T_{\Pi}$ .

Por otro lado, es claro que  $B_{\Pi} \subseteq T_U$ , de donde deducimos que  $T_{\Pi} \leq T_U$ .

$$\cdot \quad \mathcal{I}(\mathbb{R} - 2\mathbb{Q}, T_{|\mathbb{R} - 2\mathbb{Q}|}) \cong (\Pi, T_U)?$$

$$\mathbb{R}_* = \mathbb{R} - 2\mathbb{Q} = (\mathbb{R} - 2\mathbb{Q}) \cup 2\mathbb{Q} = \Pi_* \cup 2\mathbb{Q}.$$

Vamos a encontrar un homeo. bastante simple.



Definimos  $f = (\mathbb{R}_*, T_{|\mathbb{R}_*|}) \rightarrow (\Pi, T_U)$  como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_+, \\ 0 & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

Es muy sencillo comprobar que  $f$  es biyectiva, es decir, (ejercicio).

$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}_*$  tal que  $f(x) = y$ .

$\mathcal{I}$  Es  $f$  continua? Tono  $B_U = \{ (a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a < b \}$  Es suficiente con demostrar  $\forall (a,b) \in B_U$ . Por la definición

basta usual de  $(\Pi, T_U)$  que  $f^{-1}((a,b)) \in T_{|\mathbb{R}_*|}$

de  $f$  llegamos a:

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (a,b) \in B & \text{si } 0 \notin (a,b) \\ (a,0) \cup 2\mathbb{Q} \cup (0,b) & \text{si } 0 \in (a,b). \end{cases}$$

$\mathcal{I}((a,0) \cup 2\mathbb{Q} \cup (0,b)) \in T$ ? Vamos que todos sus puntos son interiores en  $(\mathbb{R}_*, T_{|\mathbb{R}_*|})$ . Basta comprobarlo con  $x = \alpha$

(2)

WUOLAH



Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

perdo espacio



Como  $0 \in (a,b)$  y  $(a,b) \in T_u$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq (a,b)$

Entonces  $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon) \in T$

y  $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}_+$ .

Concluimos que  $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon) \in T|_{\mathbb{R}_+}$ , contiene a  $a$ ,  
y  $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon) \subseteq (a, 0) \cup \{a\} \cup (0, b)$ .

¿Es  $f$  abierta? Basta comprobar que  $f(B) \in T_u \forall B \in \mathcal{B}|_{\mathbb{R}_+}$ .

Por un lado tenemos:

$f((a,b)) = (a,b) \quad \forall (a,b) \in \mathcal{B}|_{\mathbb{R}_+} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a < b, 0 \notin (a,b)\} \cup \{(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon) / \varepsilon > 0\}$

y por otro:

$f((-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon)) = f((-\varepsilon, 0)) \cup \{f(a)\} \cup f((0, \varepsilon))$   
 $= (-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \in T_u$ .

c) Estudiar la conexión en  $(\mathbb{R}, T)$  de  $A = (a,b) \cup \{a\}$ .

Vamos a distinguir 2 casos:

c1)  $0 \in [a,b]$ .

crece de  $(a,b)$  en  $(\mathbb{R}, T)$   
Veamos que  $a \in (a,b)$ . Por definición de crecer, basta  
ver que  $B \cap (a,b) \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B}$  con  $a \in B$ .

Dado  $B \in \mathcal{B}$  con  $a \in B \Rightarrow B = (-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon)$  con  $\varepsilon > 0$ ,  
y claramente  $B \cap (a,b) \neq \emptyset$  porque  $0 \in [a,b]$ .

Por otro lado notare que  $(a,b)$  es conexo en  $(\mathbb{R}, T)$ .

En efecto; como  $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$  y  $T|_{\mathbb{R}} = T_u$ , entonces:  
 $(a,b)$  es conexo en  $(\mathbb{R}, T) \Leftrightarrow (a,b)$  es conexo en  $(\mathbb{R}, T_u)$ ,  
lo que se cumple porque  $(a,b)$  es un intervalo.

Finalmente, como  $x \in \overline{(a,b)}$  tenemos  $\overline{(a,b)} = A \subseteq \overline{(a,b)}$ ,

$$\overline{(a,b)} \subseteq (a,b) \cup \{x\} = A \subseteq \overline{(a,b)},$$

conexo

y por un resultado de clase se sigue que  $\overline{A}$  es conexo.

$$c2) 0 \notin [a,b].$$

En este caso  $\overline{A}$  no es conexo en  $(\mathbb{R}, T) = \text{encuentramos}$  abiertos inducidos  $\mathcal{U}_A, \mathcal{V}_A \in \mathcal{T}_A$  tales que  $A = \mathcal{U}_A \cup \mathcal{V}_A$ ,  
abiertos inducidos  $\mathcal{U}_A, \mathcal{V}_A \neq \emptyset$ .

$$\mathcal{U}_A \cap \mathcal{V}_A = \emptyset \quad y \quad \mathcal{U}_A, \mathcal{V}_A \neq \emptyset.$$

Como  $0 \notin [a,b]$ , podemos encontrar  $\varepsilon > 0$  tal que se cumple

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap [a,b] = \emptyset$$

se verifica que

$$\text{Así } (-\varepsilon, 0) \cup \{x\} \cup (0, \varepsilon) \in \mathcal{B} \subseteq T \quad y \quad se verifica que$$

$$(-\varepsilon, 0) \cup \{x\} \cup (0, \varepsilon) \cap A = \{x\} \quad \text{Como } (a,b) \in \mathcal{B} \subseteq T$$

esto prueba que  $\{x\} \in \mathcal{T}_A$ . Así, la separación no

$$y \quad (a,b) \subseteq A \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{T}_A. \quad \text{Así, } \mathcal{U}_A = (a,b) \quad y \quad \mathcal{V}_A = \{x\}.$$

Final buscada para  $A$  es

$$\overline{A} = \overline{(a,b) \cup \{x\}} = (a,b) \cup \{x\}.$$

$$d) \text{ Sea } G = [-1,1]. \quad \text{¿ } G \in \mathcal{C}_T? \quad \text{Nótese que}$$

$$C^c = \mathbb{R} - G = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{x\}. \quad \text{Nótese que } x \text{ no es un punto interior:}$$

$$C^c \text{ no es abierto, puesto que } x \text{ no es un punto interior:}$$

$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ pequeño } (-\varepsilon, 0) \cup \{x\} \cup (0, \varepsilon) \not\subseteq C^c.$$

$$\text{¿ } C \text{ compacto en } (\mathbb{R}, T)? \quad \text{Como } G \subseteq \mathbb{R} \quad \mathcal{T}_{\text{fin}} = \mathcal{T}_u,$$

$$\text{¿ } C \text{ compacto en } (\mathbb{R}, T) \Leftrightarrow \text{lo es en } (\mathcal{T}_{\text{fin}}, \mathcal{T}_u).$$

Y esto último se cumple por el lema de Heine-Borel

ya que  $G \in \mathcal{G}_u$  y  $G$  es acotado.

(4)



## Ejercicio 2

Resultado de teoría demostrado en los apuntes de clase.

### Ejercicio 3

a) Se define  $f: ([0,1], \mathcal{T}_{[0,1]}) \rightarrow (20,4,T)$  donde  $T = 20, 21, 20,14$  y  $f$  viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Vemos que  $f$  es una identificación.

$\mathcal{C} f$  sobreyectiva? Evidente.  $f^{-1}(u) \in \mathcal{T}_{[0,1]}$   $\forall u \in T$ .  
 $\mathcal{C} f$  continua? Vemos que  $T$  hay 3 abiertos.

Esto es fácil de comprobar ya que en  $\mathcal{T}_{[0,1]}$   $f^{-1}(20,14) = [0,1] \in \mathcal{T}_{[0,1]}$ .

$f^{-1}(0) = \emptyset \in \mathcal{T}_{[0,1]}$ ,  $f^{-1}(20,14) = [0,1] \cap [0,1] \in \mathcal{T}_{[0,1]}$ .

$f^{-1}(21) = [0, 1/2) \in \mathcal{T}_{[0,1]}$  sabemos que  $T \leq T_f$ .

$\mathcal{C} T_f = T$ ? Como  $f$  es continua sabemos que  $T_f = 2u \leq 20,14 / f^{-1}(u) \in \mathcal{T}_{[0,1]}$ .

$\mathcal{C} T_f \leq T$ ? Recordemos que  $T_f = 2u \leq 20,14 / 20,14$ .

$\mathcal{P}(20,14) = 20, 20, 21, 20,14 \Rightarrow T_f \leq T$ .

Como  $f^{-1}(20) = [1/2, 1] \notin \mathcal{T}_{[0,1]}$   $\Rightarrow T_f \leq T$ .

Vemos que  $f$  no es abierta ni cerrada.

$u = (1/2, 1) = [1/2, 1) \cap [0,1] \in \mathcal{T}_{[0,1]}$  y  $f(u) = 20 \notin T$ .

Así,  $f$  no es abierta.

$F = [0, 1/4] = [0, 1/4) \cap [0,1] \in \mathcal{C}u[0,1]$  y  $f(F) = 21 \notin C_T$ .

porque  $21 \in C = 20 \notin \mathcal{C} T$ .

$$C_T = 20, 20, 20, 14$$

(5)

WUOLAH

Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

pierdo espacio



b)  $(X, T)$  compacto  $\stackrel{?}{\implies} A' \neq \emptyset$ .  
 $A \subseteq X$  infinito

Recuerda:  $x \in A' \iff \forall U \in T, x \in U \implies U \cap A \neq \emptyset$

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos  $A' = \emptyset$ .  
Entonces,  $\forall x \in X$  se cumple que  $x \notin A'$ .

Así,  $\forall x \in X \exists U_x \in T$  con  $x \in U_x$  tal que  $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$ .

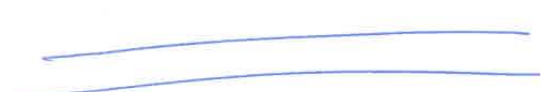
Claramente  $\{U_x \mid x \in X\} \subseteq T$  y  $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$ . Así,

la compacidad de  $(X, T)$  implica la existencia de  $J \subseteq X$  finito tal que  $X \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$ . Y como  $A \subseteq X$ ,

entonces  $A \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$ . Finalmente, el hecho de que

$(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset \quad \forall x \in X$  implica que

$A \subseteq \bigcup_{x \in J} \{x\}$ , lo que contradice que  $A$  es infinito.



ali ali ooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

WUOLAH

WUOLAH

6