Parcial-Mates-B-2022-23.pdf

antooniojrr

Topología I

2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Topología I (grupo B)
Grado en Matemáticas. Curso 2022-2023
Ejercicio de evaluación del tema 1

Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología dada por:

$$T = \{U \subseteq \mathbb{R} \,/\, \text{si } x \in U \text{ entonces } x+1 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Encontrar un conjunto $A \in T \cap C_T$ con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}, T)$ un espacio T_1?
2. Probar que $(\mathbb{R}, T)$ cumple el IAN (describir en cada $x \in \mathbb{R}$ una base de entornos numerable).
3. Calcular $\overline{\{0\}}$ (clausura) en $(\mathbb{R}, T)$. ¿Es $\mathbb{Q}$ denso en $(\mathbb{R}, T)$?
4. Para cada $A \subset \mathbb{R}$ no vacío definimos $\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) \,/\, x, y \in A\}$. Probar que, si $\text{diám}(A) < 1$, entonces A es discreto en $(\mathbb{R}, T)$ ¿Es cierto el recíproco?
5. (complementario y opcional). ¿Cumple $(\mathbb{R}, T)$ el IIAN?

Todos los apartados obligatorios tienen igual puntuación

Granada, 7 de noviembre de 2022

$\mathcal{T} = \{ \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \mid \text{si } x \in \mathcal{U} \Rightarrow x+1 \in \mathcal{U} \} \cup \{\emptyset\}$

1.- $A \in \mathcal{T} \cap C_{\mathcal{T}}$ $\quad \emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$ $\quad$ ¿$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ es T_1?

$A \in \mathcal{T} \wedge A \in C_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{T}$

Con $A = \mathbb{Z}$, vemos que se cumple ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ $n+1 \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\quad x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbb{Z} \in C_{\mathcal{T}}$

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es $T_1 \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \overset{x \neq y}{\downarrow} \exists V_x \in \mathcal{N}_x, V_y \in \mathcal{N}_y \mid y \notin V_x \wedge x \notin V_y$

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es T_1 ya que tomando $x \in \mathbb{R}$ arbitrario e $y = x+1 \in \mathbb{R}$, es claro que $x \neq y$. Sin embargo, $\forall V \in \mathcal{N}_x$ debe cumplir que $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid x \in \mathcal{U} \subset V$ y $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid x \in \mathcal{T}$ $x+1 = y \in \mathcal{U}$, luego $\forall V \in \mathcal{N}_x$ $y \in V \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es T_1.

2.- Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ cumple AN-I

$\forall x \in \mathbb{R}$, podemos definir $\mathcal{B}_x = \{ \{ x+n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \} \}$

Como $\# \mathcal{B}_x = 1$, será numerable

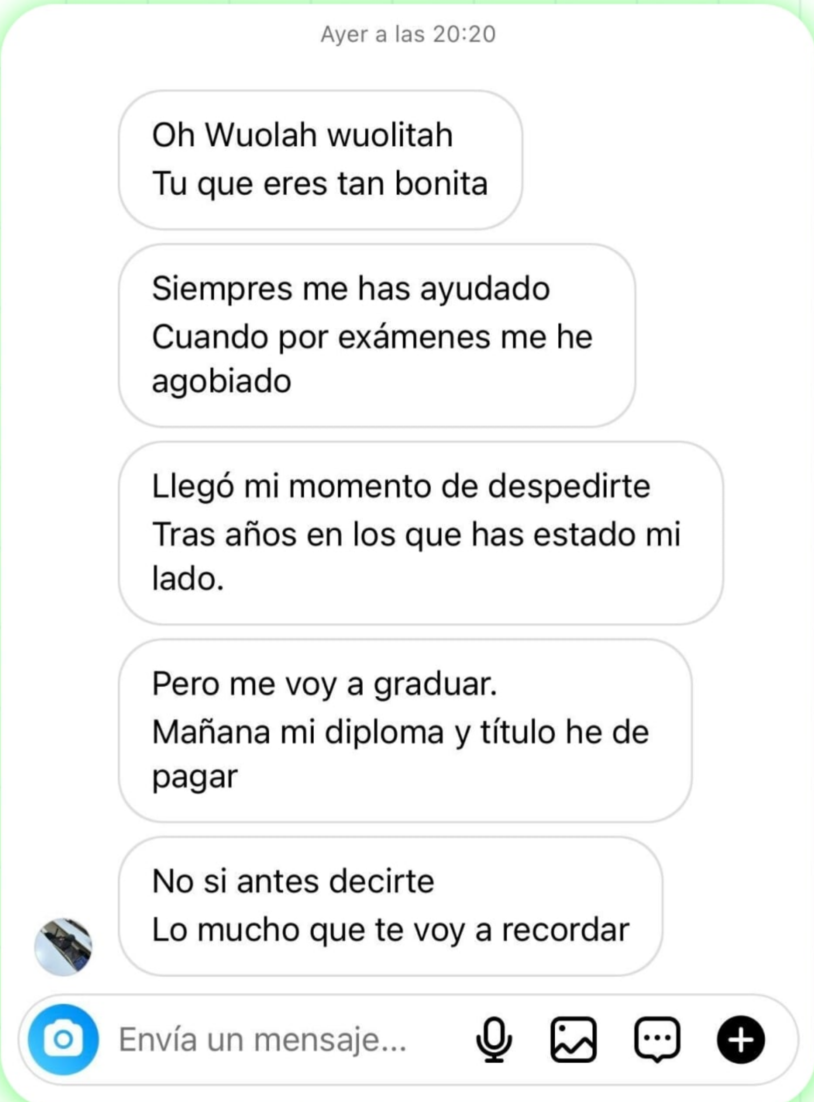
Además, es base de entornos ya que:

- $\forall B \in \mathcal{B}_x$ $\forall y \in B$ $\quad y = x + n_0$ $\quad y+1 = x+n_0+1 \in B$ ya que $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, con lo que $B \in \mathcal{T}$ y, como $x = x+0 \in B$, entonces $B \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$
- $\forall V \in \mathcal{N}_x$, $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid x \in \mathcal{U} \subset V$. Como $x \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ $x+1 \in \mathcal{U}$ y, por recursividad vemos que $x+n \in \mathcal{U}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con lo que $B = \{ x+n : \forall n \in \mathbb{N} \} \subset \mathcal{U}$, con lo que $x \in B \subset \mathcal{U} \subset V \Rightarrow x \in B \subset V$.

Como $\mathcal{B}_x$ base de entornos numerable $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ cumplirá AN-I

Que no te escriban poemas de amor cuando terminen la carrera 🚩🚩🚩🚩🚩🚩

(a nosotros por suerte nos pasa)



WUOLAH

3.- Calcular $\overline{\{0\}}$ $= A$ en $(\mathbb{R},\tau)$ ¿$\mathbb{Q}$ denso en $(\mathbb{R},\tau)$?

Es trivial que $0\in\overline{A}$. Estudiando $x\neq 0$.

Sea $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, si $x\in\overline{\{0\}} \iff \forall V\in N_x \quad V\cap\{0\}\neq\emptyset \iff \forall V\in N_x \quad 0\in V$

Si $x>0 \implies V=\{x+n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\in N_x$ $\wedge$ $V\cap\{0\}=\emptyset$. luego $x\notin\overline{\{0\}}$

Si $x<0$ $\wedge$ $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, definiendo V como en el caso anterior, obtenemos también $\forall y\in V \quad y\notin\mathbb{Z}\implies y\neq 0$

$V\cap\{0\}=\emptyset \implies x\notin\overline{\{0\}}$

Si $x<0$ $\wedge$ $x\in\mathbb{Z}$, como hemos demostrado antes $B\in\mathcal{B}_x$ $B=\{x+n : \forall n\in\mathbb{N}\}\subset V \quad \forall V\in N_x$.

Por hipót., $x<0$ $\wedge$ $x\in\mathbb{Z}$, luego definiendo $n_0=-x\in\mathbb{N}$

$x+n_0=0\in B \implies \forall V\in N_x \quad 0\in B\subset V\implies 0\in U$

Con lo que, $\forall V\in N_x \quad U\cap\{0\}\neq\emptyset\implies x\in\overline{\{0\}}$

Conclusión: $\overline{\{0\}}=\mathbb{Z}^-\cup\{0\}$

$\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}\iff\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

Es claro que $\mathbb{Q}\subset\overline{\mathbb{Q}}$. Sin embargo $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$x+1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\implies$ Por recursividad, $x+n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Con lo que, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad \exists V\in N_x \quad V=\{x+n : \forall n\in\mathbb{N}\}$

tq $V\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\implies V\cap\mathbb{Q}=\emptyset\implies x\notin\overline{\mathbb{Q}}$

Como $\exists x\in\mathbb{R} \,/\, x\notin\overline{\mathbb{Q}}\implies\overline{\mathbb{Q}}\neq\mathbb{R}\iff\mathbb{Q}$ no es denso en $\mathbb{R}$

4.- $\forall A \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ def. $\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) / x,y \in A\}$
$\text{diám}(A) < 1 \Longrightarrow A$ discreto en $(\mathbb{R}, \tau)$
¿Recíproco cierto?

Sea $A \subset \mathbb{R}$ fijo arbitrario. Supongamos $\text{diam}(A) < 1$.
$\tau_A = \{U \cap A / U \in \tau\}$. $\forall O \in \tau_A$ $O = U \cap A$ con $U \in \tau$
$\forall x \in O$ $x \in A$ $\therefore$ $x \in U$. $x+n \in U$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pero como
$\text{diám}(A) < 1$ $\therefore$ $d(x, x+n) = n \geq 1$ $x+n \notin A \Rightarrow x+n \notin O$.
$\forall A' \subset A$ $\exists U \in \tau / U = \{x+n / x \in A' \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \Longrightarrow A' \subset U$
$U \cap A = \{x+n / x \in A', n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cap A$. Pero, si $x \in A' \subset A \Rightarrow x \in A$.
Como hemos demostrado antes $x+n \notin A$ con $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$
Luego $U \cap A = \{x / x \in A'\} = A' \in \tau_A$
Como A' era arbitrario, $\forall A' \in \mathcal{P}(A)$ $A' \in \tau_A \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \tau_A$
Y, por def., $\tau_A \subset \mathcal{P}(A)$, luego $\tau_A = \mathcal{P}(A) \Longrightarrow \tau_A = \tau_{A_D}$
Por lo que A discreto en $(\mathbb{R}, \tau)$

El recíproco no es cierto ya que, por ejemplo $A = \{0, 2'5\}$
$\tau_A = \{\emptyset, A, \{0\}, \{2'5\}\} = \mathcal{P}(A) \Longrightarrow A$ es discreto en $(\mathbb{R}, \tau)$,
sin embargo $\text{diám}(A) = 2'5 > 1$

5.- $(\mathbb{R}, \tau)$ es AN-II?
Esto es que τ admite una base numerable
Supongamos que $\exists \mathcal{B} \subset \tau$ / $\forall U \in \tau$ $\exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} / U = \bigcup_{i \in I} B_i$
Como $U \in \tau$, podemos definirlo como $U = A \cup \{x+n : x \in A \ n \in \mathbb{N}\}$
Como $B_i \in \tau$ $\forall i \in I$ $B_i = B_i' \cup \{x+n : x \in B_i' \ n \in \mathbb{N}\}$
Si $A = \{x\} \subset \mathbb{R}$ $\exists i_0 \in I / B_{i_0} = \{x\} \cup \{x+n : n \in \mathbb{N}\}$
Sin embargo, si $A \subset \mathbb{R}$ no numerable, $\forall x \in A$ $\exists i_0 \in I / B_{i_0} = \{x\} \cup \{x+n : n \in \mathbb{N}\}$
Lo cual contradice que $\mathcal{B}$ sea numerable $\Longrightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ no cumple AN-II