EL TEOREMA DE TIJONOV

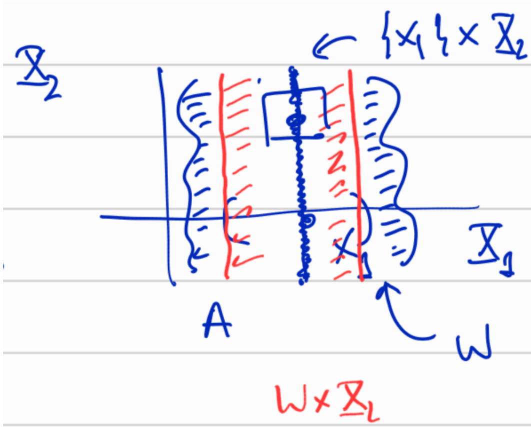
MANUEL RITORÉ

Probamos el teorema de Tijonov sobre compacidad de un producto de espacios topológicos. Únicamente demostraremos una versión sencilla para un producto *finito* de espacios topológicos.

Teorema 1 (Tijonov). *Sean $(X_1, T_1), \dots, (X_k, T_k)$ espacios topológicos. Entonces $X_1 \times \cdots \times X_k$ con la topología producto es compacto si y sólo si todos los espacios (X_i, T_i) son compactos.*

En la demostración utilizaremos el siguiente resultado

Lema 2 (Lema del tubo). *Sean $(X_1, T_1), (X_2, T_2)$ espacios topológicos, con (X_2, T_2) compacto. Sea $x_i \in X_1$ y sea $A \in T_1 \times T_2$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset A$. Entonces existe $W \in T_1$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$.*



Demostración. Como A es abierto de $T_1 \times T_2$, para cada $z \in X_2$ tomamos $U_z \in T_1, V_z \in T_2$ tales que

$$(x_1, z) \in U_z \times V_z \subset A.$$

La familia $\{V_z\}_{z \in X_2}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto (X_2, T_2). Existe entonces un subconjunto finito $F \subset X_2$ tal que $\{V_z\}_{z \in F}$ es un subrecubrimiento de X_2. Si

$$W = \bigcap_{z \in F} U_z,$$

entonces

$$\{x_1\} \times X_2 \subset W \times \Big(\bigcup_{z \in F} U_z\Big) \subset \bigcup_{z \in F} U_z \times V_z \subset A. \qquad \square$$

Demostración del teorema de Tijonov. Si el producto $(X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ es compacto, para cada $i = 1, \dots, k$ el espacio (X_i, T_i) es compacto por ser la imagen de un espacio compacto por la proyección continua $p_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to X_i$.

Date: 22 de diciembre de 2021.

Supongamos ahora que todos los espacios (X_i, T_i) son compactos. Probamos que el espacio producto es compacto por inducción sobre k. Al igual que en la demostración de que el producto de espacios conexos es conexo basta considerar el caso $k = 2$.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$. Para cada $x \in X_1$, el subconjunto $\{x\} \times X_2$ es compacto, por lo que existe $J(x) \subset I$ finito tal que

$$\{x\} \times X_2 \subset \bigcup_{i\in J(x)} U_i.$$

Usando el lema del tubo, existe $W_x \in T_1$ tal que

$$\{x\} \times X_2 \subset W_x \times X_2 \subset \bigcup_{i\in J(x)} U_i.$$

La familia $\{W_x\}_{x\in X_1}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto X_1. Por tanto, existe $F \subset X_1$ finito tal que

$$X_1 \subset \bigcup_{x\in F} W_x.$$

Tenemos entonces que

$$X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{x\in F} W_x \times X_2 \subset \bigcup_{x\in F} \Big(\bigcup_{i\in J(x)} U_i \Big),$$

que es un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. □

Una consecuencia inmediata del teorema de Tijonov es

Teorema 3 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es compacto si y sólo si es cerrado y acotado (para la distancia euclídea).*

Demostración. Supongamos que K es compacto. Entonces K es acotado para la distancia euclídea, que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$, y K es cerrado por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio Hausdorff.

Supongamos ahora que K es cerrado y acotado para la distancia euclídea. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$K \subset \prod_{i=1}^{n} [-r, r].$$

Por el teorema de Tijonov, $\prod_{i=1}^{n}[-r, r]$ es compacto. Como K es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto. □

Un último corolario del teorema de Heine-Borel-Lebesgue es la siguiente propiedad.

Corolario 4. *Sea (X, T) un espacio topológico compacto, y sea $f : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_u)$ una aplicación continua. Entonces existen $x_{\min}, x_{\max} \in X$ tales que*

$$f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max})$$

para todo $x \in X$. Es decir, la aplicación f alcanza un mínimo y un máximo.

Demostración. Como $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ con la topología usual, es cerrado y acotado por el teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Por tanto existen $a = \min f(X), b = \max f(X)$. Como $a, b \in f(X)$, existen $x_{\min}, x_{\max} \in X$ tales que $a = f(x_{\min}), b = f(x_{\max})$. □