Test-Resueltos-T4T5.pdf

StudentEnApuros

Inferencia Estadística

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

TESTS

1. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una m.a.s. de una variable X con una función $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$, $(\theta>0)$. Sabiendo que la familia es regular, con $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$, ¿cuál es la correcta?

a) El UMVUE de θ^2, si existe, es eficiente $\qquad$ Ef $\Rightarrow$ UMVUE, $\not\Leftarrow$

b) La única función paramétrica con estimador ef. es $-\frac{1}{\theta}$.

c) sea $n=1$ y $U(X)$ insesgado en $-\frac{1}{\theta}$. Si $E[U(X)\ln(X)] = \frac{1}{\theta^2}$ $\Rightarrow U(X)$ es regular.

d) $\sum_{i=1}^n \ln(x_i)^2$ es efic. para $\frac{-2n}{\theta}$.

- $\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta} = \left[\frac{1}{\theta} + \ln(x)\right]$

$$\frac{\partial \ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\theta} + \ln x\right] = n\left[\sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i}{n} - \frac{1}{\theta}\right] \Rightarrow a(\theta) = n,\ T(X_1,\dots,X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n},\ g(\theta) = -\frac{1}{\theta}$$

$\Rightarrow$ Corolario 1, $\forall a \neq 0, b \in \mathbb{R}$, $a\sum_{i=1}^n \ln X_i + b$ es el estimador de $a\left(-\frac{1}{\theta}\right) + b$, y solo estas funciones admiten estimador eficiente.

a) $\boxed{\text{Corolario 5}}$ No tiene por qué darse. (T'an $g(\theta) = \theta^2$ no es ef en la familia $a(-\frac{1}{\theta}+b)$)

b) NO, pq a y b toman infinitos valores $(\forall a \neq 0\ \forall b \in \mathbb{R})$

c) $E[U(X)] = \frac{-1}{\theta}$ $\qquad E[U(X)\ln(X)] = \frac{1}{\theta^2}$

$$U[X] \text{ regular} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial E[U(X)]}{\partial\theta}}_{1} = \underbrace{E\left[U \cdot \frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right]}_{2} \ *$$

1. $\frac{\partial E[U(X)]}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta^2}$

2. $E\left[U(X)\cdot\left(\frac{1}{\theta} + \ln x\right)\right] = E\left[U(X)\cdot \underset{\text{escalar, sale fuera}}{\frac{1}{\theta}}\right] + \overset{E[U(X)]}{E[U(X)\ln(X)]} = \frac{1}{\theta}\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta^2} = 0$

$*$ $\frac{1}{\theta^2} \neq 0$ $\Rightarrow U(X)$ no es regular.

d) $\sum_{i=1}^n \ln(x_i)^2 = 2\sum_{i=1}^n \ln x = 2\cancel{n}\left(\frac{\sum \ln x_i}{\cancel{n}}\right) \longrightarrow \frac{-2n}{\theta} = 2n\left(\frac{-1}{\theta}\right)$ Luego para $a = 2n$ y $b = 0$ se cumple el enunciado. ✓

2. Sea $(X_1,\dots,X_n)$ una m.a.s. de una variable X con una función $f_\theta(x) = \theta/(1+x)^{1+\theta}$, $x>0$, $(\theta>0)$. Sabiendo que la familia es regular y que $E[\ln(1+X)] = 1/\theta$ y $Var[\ln(1+X)] = 1/\theta^2$, se tiene que la cota de FCR para la varianza de estimadores insesgados y regulares de θ^2 es:

se coge esta para la cota

a) $\frac{4\theta^4}{n}$ y dicha cota no es alcanzable.

b) $\frac{2\theta^4}{n}$ y dicha cota no es alcanzable.

c) $\frac{2\theta^4}{n}$ y dicha cota es alcanzable.

d) $\frac{4\theta^4}{n}$ y dicha cota no es alcanzable.

ps θ^2 no es func lineal de $g(\theta) = \frac{n}{\theta}$

$$\text{Cota}: \frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)} = \frac{(2\theta)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{4\theta^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{4\theta^4}{n}$$

y no es comb. lineal de nuestra familia, luego no se alcanza.

F inf.

$$I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = n I_X(\theta) = n Var_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right] = n Var_\theta\left[\frac{\partial(\ln\theta - (1+\theta)\ln(1+x))}{\partial\theta}\right] = n Var_\theta\left[\frac{1}{\theta} - \ln(1+x)\right] =$$

$$= n\, Var[\ln(1+x)] = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x_1,\dots,x_n)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} - \ln(1+x_i)\right) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) = \overset{a[T-g]}{(-1)\left[\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) - \frac{n}{\theta}\right]}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(\theta) = -1 \\ T(x) = \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) \\ g(\theta) = \frac{n}{\theta} \end{cases} \qquad a\left(\frac{n}{\theta}\right) + b$$

$$I ?= ag' ? \qquad -1\cdot n\left(\frac{-1}{\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}\ \checkmark$$

3. Dos candidatos A y B se presentan a una elección. Se realizan de forma independiente cinco encuestas, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento, finalizando cada una de ellas cuando se encuentra el primer votante de A. Decir cuál de la siguiente afirmaciones es correcta:

a) Si la persona entrevistada en las cinco encuestas han sido 4,5,6,6 y 4, la estimación más verosímil de elegir un votante de B en la población es 0,2 .

b) Si la estimación máximo verosímil de la probabilidad de que el primer votante de A sea el segundo entrevistado es 0,16 , el número total de personas entrevistadas han sido 30

c) Si las personas entrevistadas en las cinco encuestas han sido 3,4,2,5 y 1, la estimación más verosímil de la probabilidad de que el primer votante de A sea el segundo entrevistado es 2/9

d) Si en dos encuestas ha salido A a la primera, en 1 a la cuarta y en 2 a la tercera, la estimación más verosímil de la probabilidad de que los dos primeros votantes sean de B es 25/144

X = nº de encuestas hasta primer votante de A.

$X-1 \sim G(p)$ y $X \sim BN(1,p)$

$P[X=x] = p(1-p)^{x-1}$; $n=5$

máx.V

$\rightarrow L_{X_1,\ldots,X_n}(p) = p(1-p)^{x_1-1} \cdots p(1-p)^{x_n-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$

$\ln L_{X_1,\ldots,X_n}(p) = n\ln p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)\ln(1-p)$

$\frac{\partial \ln L_{X_1,\ldots,X_n}(p)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} = \frac{(1-p)n - p(\sum x_i - n)}{p(1-p)} = 0$

$(1-p)n = p(\sum x_i - n) \Leftrightarrow n - \cancel{np} = p\sum x_i - \cancel{np} \Leftrightarrow p = \frac{n}{\sum x_i} \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$ EMV.

b) $P[X=2] = 0'16 \Rightarrow$ 30 entrevistas.

$P[X=2] = p(1-p)^{2-1} = p(1-p) = p - p^2$.

$\widehat{P[X=2]} = \hat{p} - \hat{p}^2 = \frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = 0'139 \neq 0'16$

$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$

c)

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$P[\widehat{\bar{x}=2}] = \frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{\bar{x}^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = 2/9$ ✓

d)

1	3	4
2	2	1

$\bar{x} = \frac{2+6+4}{5} = \frac{12}{5}$

$P[\widehat{\bar{x}=2}] = \frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{\bar{x}^2} = \frac{5}{12} - \frac{25}{144} = \frac{35}{144}$

Que los dos primeros sean de B, significa que no sean de A $\Rightarrow 1 - \frac{35}{144} = \frac{109}{144} \neq \frac{25}{144}$

a)

4	5	6
2	1	2

$\bar{x} = \frac{8+5+12}{5} = \frac{25}{5} = 5$

$P[\bar{x}=1] = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{5} = 0'2$

$B: 1 - P[\bar{x}=1] = 0'8 \neq 0'2$

4. Decir cual de las siguientes afirmaciones es correcta:

a) Si T es el UMVUE para θ, entonces $h(T)$ es el UMVUE para $h(\theta)$ F (no tiene porqué)

b) El UMVUE de una f paramétrica es el estimador de segundo orden que minimiza unif. la varianza. F falta que sea insesgado

c) El UMVUE de una f paramétrica es el estimador insesgado de segundo orden que minimiza unif el ECM.

d) Si T es suf., $E_\theta[S] = g(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$ y $E_\theta[S^2] < +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$, $\Rightarrow E[S|T]$ es el UMVUE de $g(\theta)$. F falta que sea completo (Tª Lehman-Scheffé)

5. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de X con función de densidad, $f_\theta(x) = -2x/(1-\theta)^2$, $1-\theta < x < 0$, $(\theta > 1)$. ¿Cuál es la correcta?

a) Si los datos observados $-5, -4'8, -1'2, -3, -2'5, -6'4$, la EMV de θ es $41'96$.

b) El estimador MV de θ es $-\min X_i$

c) El estimador de θ por el método de los momentos es $1 - 3\bar{X}/2$.

d) $\nexists$ EMV de θ.

$$f_\theta(x) = \frac{-2x}{(1-\theta)^2}$$

Calculemos EMV, $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = f_\theta^n(x) = \frac{-2x_1}{(1-\theta)^2}, \ldots, \frac{-2x_n}{(1-\theta)^2} = \frac{-2^n}{(1-\theta)^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i$

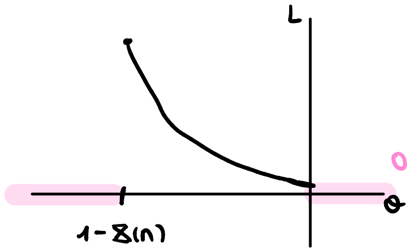
$$\ln L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = \ln\left(-2\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \ln(1-\theta)^2 = \ln\left(-2\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - 2\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2}{1-\theta} = 0 \quad \text{(no podemos decir nada, el máx o el mín)}$$

$$\frac{2}{1-\theta} < 0 \quad (\text{pq } \theta > 1) \Rightarrow \text{estric. decre.}$$

$X_{(n)} > 1-\theta \Leftrightarrow \theta > 1 - X_{(n)}$

$X_{(n)} < 0$



$$\begin{cases} 0 & \text{si } X_{(n)} < 1-\theta \Leftrightarrow \theta < 1 - X_{(n)} \\ -\frac{2^n}{(1-\theta)^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i & \text{si } X_{(n)} > 1-\theta \end{cases}$$

(decreciente $\Rightarrow$ máx EMV) $\hat{\theta} = 1 - X_{(n)}$

a) El valor máx es $-1'2$ $\Rightarrow \hat{\theta} = 1-(-1'2) = 2'2 \neq 41'96$

b) No, es la máx.

d) Sí $\exists$, lo hemos calculado.

c) Aplico el método de los momentos: (usamos el mét. de los mom. sólo cd nos lo pidan) (no s de el mismo error que con el otro met)

$M_1 = A_1$; $E[X] = \bar{X}$

↳ pobl. ↳ muestra

pq es uniparamétrica
si fuera bi pues 2
y usamos
$Var[X] = Var[X_1, \ldots, X_n]$

$\frac{P}{a^2}$ $\quad E[X^2] - (E[X])^2$

$$E[X] = \int_{1-\theta}^{0} x\, f_\theta(x)\, dx = \int_{1-\theta}^{0} x \frac{(-2x)}{(1-\theta)^2}\, dx = \frac{1}{(1-\theta)^2}\int_{1-\theta}^{0} -2x^2\, dx = \frac{1}{(1-\theta)^2}\left[-\frac{2x^3}{3}\right]_{1-\theta}^{0} =$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^2}\left(+\frac{2(1-\theta)^3}{3}\right) = \frac{2(1-\theta)}{3} = \bar{X}$$

Luego $\theta = 1 - 3\bar{X}/2$ (Estimador de θ por el métodos de los momentos.

6. $(X_1, \ldots, X_n)$ m.a.s. de X con f. densidad $f_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$, $x > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Sabiendo que es regular y que $E[X] = 2/\theta$ y $Var[X] = 2/\theta^2$ se tiene que la cota FCR para la varianza de estimadores insesgados y regulares de θ^2 es:

a) $\frac{\theta^4}{2n}$ y no alcanzable

b) " es alcanzable

c) $\frac{2\theta^4}{n}$ y no "

d) " es alcanzable.

$$\frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta)} = \frac{(2\theta)^2}{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{4\theta^2}{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{\cancel{4}2\theta^4}{\cancel{2}n} = \frac{2\theta^4}{n}$$

$$I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = n\, I_X(\theta) = n\, Var_\theta\left(\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right) = n Var_\theta\left(\frac{\partial(2\ln\theta + \ln x - \theta x)}{\partial\theta}\right) = n Var_\theta\left(\frac{2}{\theta} - x\right) =$$

$$= n\, Var[X] = \frac{2n}{\theta^2}$$

Tenemos que averiguar la familia:

$$\frac{\partial \ln f_{X_1,\ldots,X_n}(\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{\theta} - x_i\right) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = \overbrace{-1\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{2n}{\theta}\right]}^{a[T-g]} = \begin{cases} a(\theta) = -1 \\ T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ g(\theta) = \frac{2n}{\theta} \end{cases}$$

$a\left(\frac{2n}{\theta}\right) + b$

θ^2 no es func. lineal de $a\left(\frac{2n}{\theta}\right) + b$.

7.- $(X_1,\dots,X_n)$ m.a.s. de X con f. densidad $f_\theta(x)=\theta^2 x e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta\in\mathbb{R}$. Sabiendo que es regular y que $E[X]=2/\theta$ y $Var[X]=2/\theta^2$ se tiene que la cota FCR para la varianza de estimadores insesgados y regulares de $\frac{(\theta+2)}{\theta}$ es:

a) $\frac{2}{n\theta^2}$ y cota alcanzable.

b) " no es alcanzable

c) $\frac{2\theta^2}{n}$ y dicha cota es "

d) " " no es alcanzable.

$$\frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}} = \frac{\left(\frac{\cancel{\theta}-\cancel{\theta}-2}{\theta^2}\right)^2}{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{\frac{2\cdot 4}{\theta^{4}}}{\frac{2n}{\cancel{\theta^2}}} = \frac{2}{n\theta^2}$$

$$I_{X_1,\dots,X_n} = n\, I_{X_1}(\theta) = n Var_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right] = n Var_\theta[\partial(2\ln\theta + \ln x - \theta x \ln e)] =$$

$$= n Var_\theta\left[\frac{2}{\theta} - x\right] = n\, Var[X] = n\cdot\frac{2}{\theta^2}$$

Buscamos la familia:

$$\frac{\partial \ln f_{X_1,\dots,X_n}(\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^n\left(\frac{2}{\theta}-x\right) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i = \overbrace{(-1)\left[\sum_{i=1}^n x_i - \frac{2n}{\theta}\right]}^{a[T-g]} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ T=\sum_{i=1}^n x_i \\ g=\frac{2n}{\theta}\end{cases}$$

La familia $a\left(\frac{2n}{\theta}\right)+b$ y admite estimadores $a\sum_{i=1}^n x_i + b$

Luego, $\frac{\theta+2}{\theta}$ no es func. lineal de $\frac{2n}{\theta}$ $\Rightarrow$ la cota no es alcanzable.

8. Se lanza un dado cargado hasta que sale uno y se repite el experimento seis veces de forma independiente decir cuál es falsa:

a) Si la estimación máximo verosímil de la probabilidad de que el 1 salga en la segunda tirada es 0,16 , el número total de lanzamientos ha sido 30

b) Si en dos repeticiones ha salido el uno a la primera, en dos a la segunda y en las otras dos a la tercera, la estimación máximo verosímil es 0,25

c) Si los lanzamientos necesarios para obtener el 1 en las seis repeticiones han sido 5,4,6,6,4 y 5, la estimación máximo verosímil de no salir uno es 0,8

d) Si los lanzamientos han sido 6,5,7,7,5 y 6, la estimación máximo verosímil de que el uno salga en la segunda tirada es 1/6.

X: "nº de lanzamientos hasta que sale el 1". $\sim BN(1,p)$

$P[X=x] = p(1-p)^{x-1}$

Primero buscamos el EMV

máx.V

$\rightarrow L_{X_1,\dots,X_n}(p) = p(1-p)^{x_1-1} \dots p(1-p)^{x_n-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$

$\ln L_{X_1,\dots,X_n}(p) = n\ln p + (\sum_{i=1}^{n} x_i - n)\ln(1-p)$

$\frac{\partial \ln L_{X_1,\dots,X_n}(p)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} = \frac{(1-p)n - p(\sum x_i - n)}{p(1-p)} = 0$

$(1-p)n = p(\sum x_i - n) \Leftrightarrow n - \cancel{np} = p\sum x_i - \cancel{np} \Leftrightarrow p = \frac{n}{\sum x_i} \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$ EMV.

a) $P[X=2] = 0'16$ $\quad \bar{X} = \frac{30}{6} = 5$

$\widehat{P[X=2]} = \hat{p} - \hat{p}^2 = \frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}^2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25} = 0'16$

b)

1	2	3
2	2	2

$\bar{X} = \frac{2+4+6}{6} = 2$

$\widehat{P[X=2]} = \frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0'25$

c)

4	5	6
2	2	2

$\bar{X} = \frac{8+10+12}{6} = 5$

$P[X=1] = p(1-p)^0 = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{5} = 0'2 \Rightarrow 1 - P[X=1] = 0'8$

d) $\begin{array}{c|ccc} & 5 & 6 & 7 \\ \hline & 2 & 2 & 2 \end{array}$ $\bar{X} = \frac{10+12+14}{6} = \frac{36}{6} = 6$

$$\widehat{P[X=2]} = \frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}^2} = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{6}$$

9. Decir cuál es falsa:

F, insesgado a) El UMVUE de una función paramétrica es el estimador de 2^{do} orden que minimiza unif la var.

✓ Lehmann b) Si T sufic y completo, S es de segundo orden y $E_\theta[S] = g(\theta)$ $\forall\theta \in \Theta \Rightarrow E[S/T]$ es UMVUE de $g(\theta)$.

✓ c) El UMVUE de una f. paramétrica es el estimador insesgado de 2^{do} orden que minimiza unif el ECM.

d) Si T es suf, completo y de 2^{o} orden $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{T es el UMVUE para } E_\theta[T]}_{\text{implica que } E_\theta[T] = g(\theta) \text{ insesgado.}}$.

✓ Lehmann - Scheffé

10. $(X_1, \ldots, X_n)$ m.a.s. con $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$, $\theta>0$. Sabiendo que la familia es regular, con $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$, decir cual es correcta:

a) $\ln(\prod_{i=1}^n x_i)$ es eficiente para $-n/\theta$.

b) El UMVUE de θ, si $\exists$, es eficiente.

c) Toda función lineal de θ admite est. eficiente.

d) Sea $n=1$ y $U(x)$ insesgado en $1/\theta$. Si $E_\theta[U(X)\ln(X)] = -1/\theta^2 \Rightarrow U(X)$ es regular.

Familia regular $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$ La función es uniparamétrica

$$\frac{\partial \ln f_\theta^n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} + \ln x_i\right) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 1\Big[\overbrace{\sum_{i=1}^n \ln x_i}^{\text{"}T\text{"}} - \overbrace{\left(-\frac{n}{\theta}\right)}^{\text{"}g\text{"}}\Big]$$

$\forall a \neq 0$ $\forall b \in \mathbb{R}$, $a\sum \ln x_i + b$ es el estimador de $a\left(\frac{-n}{\theta}\right) + b$

$\sum \ln x_i = \ln(\prod x_i)$ $\rightarrow a = 1$

$b = 0$ est. ef. $\rightarrow -\frac{n}{\theta}$

a) Familia $a\left(\frac{-n}{\theta}\right)+b$ admite est. de la forma $a\sum \ln x_i + b = a\ln(\prod x_i) + b$

b) en θ no es ef. (no es f. lineal de $\frac{-n}{\theta}$) $\Rightarrow$ el UMVUE, si $\exists$, tampoco.

c) θ no es ef. (sería toda f. lineal de $\frac{-n}{\theta}$)

d) $E[U(X)] = \frac{1}{\theta}$ $\quad E_\theta[U(\bar{X})\ln(\bar{X})] = \frac{-1}{\theta^2}$ $\quad U(x)$ reg $\Rightarrow \frac{\partial EU}{\partial\theta} = E\left[U \frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right]$

$-\frac{1}{\theta^2} = E\left[U\left(\frac{1}{\theta} + \ln x\right)\right] = \frac{1}{\theta} E[U] + E[U \ln X] = \frac{1}{\theta^2} + \left(-\frac{1}{\theta^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{-1}{\theta^2} \neq 0 \Rightarrow U$ no es reg.

11. $f_\theta(x) = \frac{3x^2}{(\theta+1)^3}$, $0 < x < \theta+1$, $\theta > -1$

a) $\nexists$ EMV de θ.

b) si los datos observados son 5; 4'8; 1'2; 3; 2'5; 6'4, la EMV de θ^2 es 39'96.

c) el EMV de θ es máx $\bar{X}_i$

d) el estimador de θ obtenido por el método de momentos es $4/3\bar{X} - 1$

Calculamos EMV por mét. de los momentos:

$m_1 = A_1 \qquad E[\bar{X}] = \bar{X}$

d) $E[\bar{X}] = \int_0^{\theta+1} x \cdot \frac{3x^2}{(\theta+1)^3} dx = \frac{1}{(\theta+1)^3} \int_0^{\theta+1} 3x^3 dx = \frac{1}{(\theta+1)^3} \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^{\theta+1} = \frac{3(\theta+1)^4}{4\cancel{(\theta+1)^3}} = \frac{3\theta+3}{4} = \bar{X}$

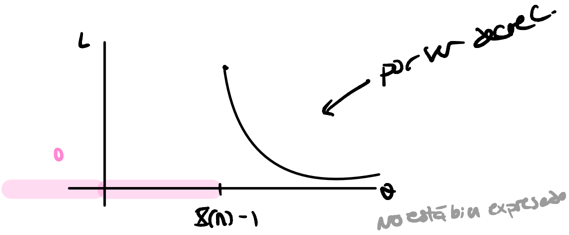
cqd $\Rightarrow \theta = \frac{4\bar{X}-3}{3}$

b) Calculamos el EMV:

$L_{x_1,\dots,x_n} = f_\theta(x_1,\dots,x_n) = \frac{3x_1^2}{(\theta+1)^3} \cdots \frac{3x_n^2}{(\theta+1)^3} = \frac{3^n \prod^n x_i^2}{(\theta+1)^{3n}}$

$\ln L_{x_1,\dots,x_n} = (n\ln 3 + \ln \prod^n x_i^2) - 3n\ln(\theta+1)$

$\frac{\partial \ln L_{x_1,\dots,x_n}}{\partial\theta} = \frac{-3n}{\theta+1} < 0 \Rightarrow$ estric. decrec.



$\bar{X}_{(n)} > 0$

$\bar{X}_{(n)} < \theta+1 \Leftrightarrow \theta > \bar{X}_{(n)} - 1$

$\begin{cases} 0 & \bar{X}_{(n)} > \theta+1 \Leftrightarrow \theta < \bar{X}_{(n)}-1 \\ \frac{3^n \prod x_i^2}{(\theta+1)^{3n}} & \bar{X}_{(n)} < \theta+1 \Leftrightarrow \theta > \bar{X}_{(n)}-1 \end{cases}$

el máx es EMV $\Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}_{(n)} - 1$

El máx de los 5 valores es 5'4

$\hat{\theta^2} = (\hat{\theta})^2 = (X_{(n)}-1)^2 = 5'4^2 = 29'16 \neq 39'96$

sesgo

c) El EMV es el máx $X_i + 1$

a) Si ∃, lo hemos calculado.

12. Se dispone de una urna con bolas blancas y negras y se extraen bolas sucesivamente hasta obtener una blanca. Este experimento se realiza 5 veces de forma independiente. Decir cual es correcta

a) Si en las tres primeras repeticiones ha salido la blanca a la primera y en las dos últimas ha salido a la segunda, la estimación más verosímil de la probabilidad de que las dos primeras sean negras es 2/7.

b) Si la estimación máximo verosímil de la probabilidad de que la blanca salga en la 2 extracción es 0,09 , el número total de extracciones ha sido 25.

c) Si los intentos necesarios para obtener una blanca en las 5 repeticiones han sido 5,4,6,6 y 4, la estimación más verosímil de la probabilidad de que la bola blanca salga en la segunda extracción es 0,16.

d) Si los intentos necesarios para obtener bola blanca en las cinco repeticiones han sido 6,5,7,7 y 5, la estimación más verosímil de la proporción de bolas negras en la urna es 4/6.

X: "nº de extracciones hasta obtener una blanca". $\rightsquigarrow BN(1,p)$ $\quad n=5$

Sacamos EMV

$$L_{x_1,\dots,x_N} = \prod^{n} P[X_i = x] = P[X_1=x_1]\dots P[X_n=x_n] = p(1-p)^{x_1-1}\dots p(1-p)^{x_n-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\cdot 1}$$

$$\ln L_{x_1,\dots,x_N} = n\ln p + (\sum x_i - n)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\dots,x_N}}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{\sum x_i - n}{1-p} = \frac{(1-p)n - p(\sum x_i - n)}{p(1-p)} = 0 \iff n - \cancel{pn} = p\sum x_i - \cancel{pn} \iff p = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

a)

1	2
3	2

$\bar{X} = \frac{7}{5}$

$$1-P[X=2] = 1-(p(1-p)) = 1-(\hat{p}-\hat{p}^2) = 1-\left(\frac{5}{7} - \frac{25}{49}\right) = \frac{39}{49} = 0'7959 \neq 2/7$$

b) $\bar{X} = \frac{25}{5} = 5$

$$P[X=2] = \frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{\bar{X}^2} = \frac{4}{25} = 0'16 \neq 0'09$$

c)

4	5	6
2	1	2

$\bar{X} = \frac{8+5+12}{5} = \frac{25}{5} = 5$

$P[X=2] = 0'16$ ✓

pq es nuestro EMV. si fuera $\hat{q} = \frac{1}{\bar{X}^2} \Rightarrow$ prop $= \frac{1}{36}$

d)

5	6	7
2	1	2

$\bar{X} = \frac{10+6+14}{5} = 6 \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{6}$ (prop. bolas blancas) $\Rightarrow 1-\hat{p} = 5/6 \neq 4/6$

13. $(X_1, \dots, X_n)$ m.a.s. con $f_\theta(x) = \frac{2x}{(\theta-1)^2}$, $0 < x < \theta - 1$ $(\theta > 1)$. ¿Cuál es la correcta?

a) Si los datos observados son 0'5, 0'4, 1, 0'3, 0'2, 0'6 la EMV de θ^2 es 1.

b) El EMV de θ es $\prod_{i=1}^{n} x_i$

c) Si los datos observados son 5'9, 8'4, 9, 3'5, 2'6, 6'7, la EMV de θ^{-1} es 0'1.

d) El estimador de θ obtenido por el método de los momentos es $\bar{X}$.

d) Calculamos el estimador m.m.

$m_1 = A_1 \qquad E[X] = \bar{x}$

$$E[X] = \int_0^{\theta-1} \frac{2x^2}{(\theta-1)^2}\,dx = \frac{1}{(\theta-1)^2}\int_0^{\theta-1} 2x^2\,dx = \frac{1}{(\theta-1)^2}\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\theta-1} = \frac{2(\theta-1)^3}{3(\theta-1)^2} = \frac{2(\theta-1)}{3} = \bar{X}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3\bar{X}+2}{2} \neq \bar{X} \text{ NO}$$

Calculamos EMV

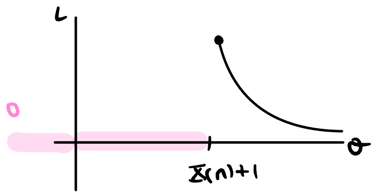
$$L_{x_1,\dots,x_n} = f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{2x_1}{(\theta-1)^2} \cdots \frac{2x_n}{(\theta-1)^2} = \frac{2^n}{(\theta-1)^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\ln L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = (n\ln 2 + \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i)) - 2n\ln(\theta-1)$$

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)}{\partial\theta} = \frac{-2n}{\theta-1} < 0 \quad (\text{por } (\theta>1) \text{ estric. decre.})$$

$X_{(n)} > 0$

$X_{(n)} < \theta - 1$



$$\begin{cases} 0 & X_{(n)} > \theta - 1 \Leftrightarrow \theta < X_{(n)} + 1 \\ \frac{2^n \prod x_i}{(\theta-1)^{2n}} & X_{(n)} < \theta - 1 \end{cases}$$

$\max = X_{(n)} + 1$

$\hat{\theta} = X_{(n)} + 1$

b) Falsa, $\hat{\theta} = X_{(n)} + 1 \neq \prod x_i$

a) $\widehat{\theta^2} = (\hat{\theta})^2 = (X_{(n)}+1)^2 = (1+1)^2 = 4 \neq 1$ valor más es x y luego le sumas 1.

c) $\widehat{\theta^{-1}} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{X_{(n)}+1} = \frac{1}{10} = 0'1$ ✓