

Parcial-Mates-B-2022-23.pdf



antooniojrr



Topología I



2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas



Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de
Telecomunicación
Universidad de Granada



Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ►►►►►►►

Smiley face icon

(a nosotros por
suerte nos pasa)

WUOLAH

Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ➤➤➤➤➤



WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de
pagar

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi
lado.

Siempre me has ayudado
Cuando por exámenes me he
agobiado

Oh Wuolah wuolah
Tu que eres tan bonita

Topología I (grupo B) Grado en Matemáticas. Curso 2022-2023 Ejercicio de evaluación del tema 1

Sobre \mathbb{R} se considera la topología dada por:

$$T = \{U \subseteq \mathbb{R} / \text{si } x \in U \text{ entonces } x + 1 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Encontrar un conjunto $A \in T \cap C_T$ con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$. ¿Es (\mathbb{R}, T) un espacio T_1 ?
2. Probar que (\mathbb{R}, T) cumple el IAN (describir en cada $x \in \mathbb{R}$ una base de entornos numerable). *causa*
3. Calcular $\overline{\{0\}}$ en (\mathbb{R}, T) . ¿Es \mathbb{Q} denso en (\mathbb{R}, T) ?
4. Para cada $A \subset \mathbb{R}$ no vacío definimos $\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) / x, y \in A\}$. Probar que, si $\text{diám}(A) < 1$, entonces A es discreto en (\mathbb{R}, T) . ¿Es cierto el recíproco?
5. (complementario y opcional). ¿Cumple (\mathbb{R}, T) el IIAN?

Todos los apartados obligatorios tienen igual puntuación

Granada, 7 de noviembre de 2022

WUOLAH

$\mathcal{T} = \{ U \subset \mathbb{R} / \text{si } x \in U \Rightarrow x+1 \in U \}$ $\cup \{ \emptyset \}$

2.- $A \in \mathcal{T} \cap C_{\mathcal{T}} \neq \emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$ $C(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es T_1 ?

$A \in \mathcal{T} \wedge A \subset C_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{T}$

Con $A = \mathbb{Z}$, vemos que se cumple ya que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \in \mathbb{N}$,
y como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbb{Z} \in C_{\mathcal{T}}$

$C(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es $T_1 \iff \forall x, y \in \mathbb{R} \exists V_x \in U_x, V_y \in U_y / y \notin V_x \text{ si } x \notin V_y$
 $C(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es T_1 ya que tomando $x \in \mathbb{R}$ arbitrario e
 $y = x+1 \in \mathbb{R}$, es claro que $x \neq y$. Sin embargo, $\forall V \in U_x$
debe cumplir que $\exists U \in \mathcal{T} / x \in U \subset V$ y $\forall U \in \mathcal{T} / x \in U$
 $x+1 = y \in U$, luego $\forall V \in U_x \quad y \in V \Rightarrow C(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es T_1 .

2.- Probar que $C(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ cumple AN- Σ

$\forall x \in \mathbb{R}$, podemos definir $B_x = \{ x+n, \forall n \in \mathbb{N} \}$

Como $\# B_x = \aleph_0$, será numerable

Además, es base de entornos ya que:

- $\forall B \in \mathcal{B}_x \quad \forall y \in B \quad y = x+n_0 \quad y+1 = x+n_0+1 \in B$ ya
que $n_0+1 \in \mathbb{N}$, con lo que $B \in \mathcal{T}$ y, como $x = x+0 \in B$,
entonces $B \in U_x \Rightarrow B_x \subset U_x$

- $\forall V \in U_x \quad \exists U \in \mathcal{T} / x \in U \subset V$. Como $x \in U \in \mathcal{U}$
 $x+1 \in U$ y, por recursividad vemos que $x+n \in U$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, con lo que $B = \{ x+n : \forall n \in \mathbb{N} \}$ $\subset U$, con lo
que $x \in B \subset U \subset V \Rightarrow x \in B \subset V$.

Como B_x base de entornos numerable $\forall x \in \mathbb{R}, C(\mathbb{R}, \mathcal{T})$
cumplirá AN- Σ

Que no te escriban poemas de amor cuando terminen la carrera

(a nosotros por suerte nos pasa)



Ayer a las 20:20

Oh Wuolah wuolitah
Tu que eres tan bonita

Siempre me has ayudado
Cuando por exámenes me he
agobiado

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi
lado.

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de
pagar

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar



Envía un mensaje...



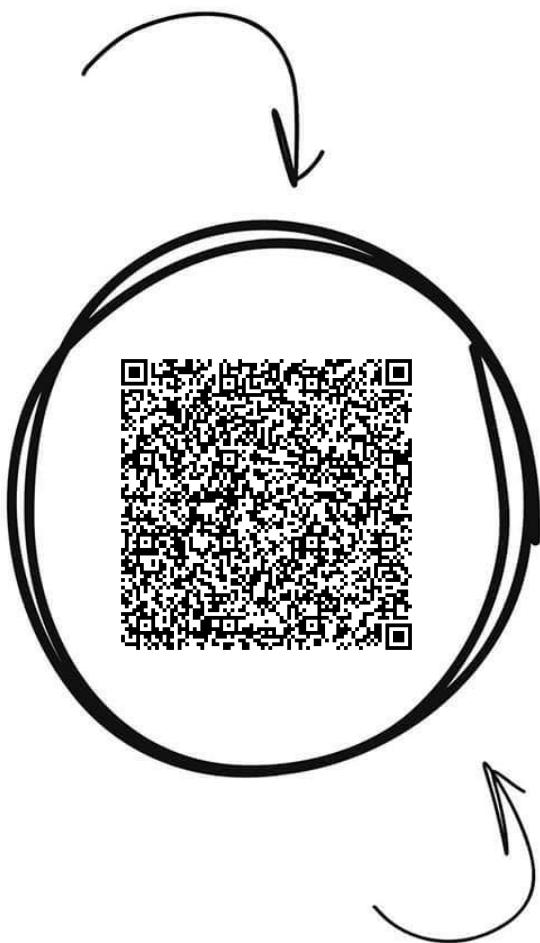
WUOLAH



Topología I



Comparte estos flyers en tu clase y consigue más dinero y recompensas



- 1** Imprime esta hoja
- 2** Recorta por la mitad
- 3** Coloca en un lugar visible para que tus compis puedan escanear y acceder a apuntes
- 4** Llévate dinero por cada descarga de los documentos descargados a través de tu QR

Banco de apuntes de la

WUOLAH



3.- Calcular $\overline{\text{hol}}^A$ en (\mathbb{R}, τ) ¿ \mathbb{Q} denso en (\mathbb{R}, τ) ? \Rightarrow

Es trivial que $0 \in \overline{\text{hol}}$. Estudiando $x \neq 0$.

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\text{hol}}$, si $x \in \overline{\text{hol}} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x \quad V \cap \text{hol} \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x \quad \exists v \in V \cap \text{hol}$

Si $x > 0 \Rightarrow V = h[x+n : n \in \mathbb{N}] \subset \text{hol} \quad \forall V \in \mathcal{N}_x \quad V \cap \text{hol} = \emptyset$. Luego $x \notin \overline{\text{hol}}$

Si $x < 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, definiendo V como en el caso anterior, obtenemos también $\forall y \in V \quad y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y \neq 0$
 $V \cap \text{hol} = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{\text{hol}}$

Si $x < 0 \wedge x \in \mathbb{Z}$, como hemos demostrado antes $B \in \mathcal{B}_x \quad B = h[x+n : n \in \mathbb{N}] \subset V \quad \forall V \in \mathcal{N}_x$.

Por hipótesis, $x < 0 \wedge x \in \mathbb{Z}$, luego definiendo $n_0 = -x \in \mathbb{N}$
 $x + n_0 = 0 \in B \Rightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x \quad 0 \in B \subset V \Rightarrow 0 \in V$

Con lo que, $\forall V \in \mathcal{N}_x \quad V \cap \text{hol} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\text{hol}}$

Conclusion: $\overline{\text{hol}} = \mathbb{Z} \cup \text{hol}$

\mathbb{Q} denso en $\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Es claro que $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Sin embargo $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 $x + 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ Por recursividad, $x + n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Con lo que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \exists V \in \mathcal{N}_x \quad V = h[x+n : n \in \mathbb{N}]$
taq $V \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow V \cap \mathbb{Q} = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{\mathbb{Q}}$

Como $\exists x \in \mathbb{R} / x \notin \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$ no es denso en \mathbb{R}

Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera ➤➤➤➤➤



WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de
pagar

Llegó mi momento de despedirme
Tras años en los que has estado mi
lado.

Siempre me has ayudado
Cuando por exámenes me he
agobiado

Oh Wuolah wuolah!
Tu que eres tan bonita

4.- $\forall A \subset \mathbb{R} A \neq \emptyset$ def. $\text{diam}(A) = \sup \{ d(x, y) / x, y \in A \}$
 $\text{diam}(A) < 1 \Rightarrow A$ discreto en (\mathbb{R}, τ)
¿ Recíproco cierto?

Sea $A \subset \mathbb{R}$ fijo arbitrario. Supongamos $\text{diam}(A) < 1$.

$\mathcal{T}_A = \{ U \cap A / U \in \tau \}$. $\forall O \in \mathcal{T}_A O = U \cap A$ con $U \in \tau$

$\forall x \in O \quad x \in A \in \mathcal{T}_A$ i. x est. en U. $x+n \in U \forall n \in \mathbb{N}$, pero como
 $\text{diam}(A) < 1 \Rightarrow d(x, x+n) = n \geq 1 \Rightarrow x+n \notin A$

$\forall A' \subset A \exists U \in \tau / U = \{ x+n / x \in A, n \in \mathbb{N} \} \Rightarrow A' \subset U$

$U \cap A = \{ x+n / x \in A, n \in \mathbb{N} \} = A' \cap \mathcal{T}_A$. Pero, si $x \in A' \cap A \Rightarrow x \in A$

Como hemos demostrado anteriormente $x+n \notin A$ con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Luego $U \cap A = \{ x+n / x \in A, n \in \mathbb{N} \} = A' \cap \mathcal{T}_A$

Como A' era arbitrario, $\forall A' \subset A \forall U \in \tau / A' \cap U = A' \cap \mathcal{T}_A \Rightarrow \text{PCA} \subset \mathcal{T}_A$

y, por def., $\mathcal{T}_A \subset \text{PCA}$, luego $\mathcal{T}_A = \text{PCA} \Rightarrow \mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{A_0}$

Por lo que A discreto en (\mathbb{R}, τ)

El recíproco no es cierto ya que, por ejemplo $A = \{0, 2^{\frac{1}{n}}\}$

$\mathcal{T}_A = \{ \emptyset, A, \{0\}, \{2^{\frac{1}{n}}\}, \{0, 2^{\frac{1}{n}}\} = \text{PCA} \} \Rightarrow A$ es discreto en (\mathbb{R}, τ) ,
sin embargo $\text{diam}(A) = 2^{\frac{1}{n}} > 1$

5.- (\mathbb{R}, τ) es AN-II?

Esto es que τ admite una base numerable

Supongamos que $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} / \forall i \in \mathbb{N} \exists h_{i, \mathbb{N}} \subset B_i / h_{i, \mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{i, n}$

Como $U \in \tau$, podemos definirlo como $U = A \cup \bigcup_{x \in A} h_{x, \mathbb{N}} : x \in A, n \in \mathbb{N}$

Como $B_i \subset V_{i, \mathbb{N}}$ $B_i = B_{i, 1} \cup \bigcup_{n \geq 2} B_{i, n}$

Sí: $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{i, \mathbb{N}}$

Sin embargo, si $A \subset \mathbb{R}$ no numerable, $\forall x \in A \exists i_0 \in \mathbb{N} / B_{i_0} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{i_0, n} \subset V_{i_0, \mathbb{N}}$

Lo cual contradice que \mathbb{R} sea numerable $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ no cumple AN-II