Guia-T1topo1.pdf

Pablo_RS_03

Topología I

2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

GUÍA DE TOPOLOGÍA

Esta guía está basada en los exámenes de Ritoré y en sus apuntes. Tendrá todo lo considerado importante en ella.

TEMA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

- Un conjunto $T \subset X$ es una **topología** si:
  - $\rightarrow X \in T$ y $\emptyset \in T$
  - $\rightarrow \{U_i\}_{i\in I} \subset T \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$ (unión arbitraria)
  - $\rightarrow U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$ (intersección finita)
- A los elementos de una topología se les llama **abiertos** de T.
- A los conjuntos $C \subset (X, T)$ que cumplen que $X \setminus C \in T$ se les llama **cerrados** de T
- Una familia $\{B_i\}_{i\in I}$ se dice que es **base de la topología** si:
  - $\rightarrow B_i \in T \ \forall i \in I$
  - $\rightarrow \forall U \in T,\ U = \bigcup_{i\in J} B_i,\ J \subset I$
- Llamamos C_T a la **familia de cerrados** de la topología T. Cumple:
  - $\rightarrow \emptyset \in C_T,\ X \in T$
  - $\rightarrow \{C_i\}_{i\in I} \subset C_T \Rightarrow \bigcap_{i\in I} C_i \in C_T$
  - $\rightarrow C_1, \dots, C_k \in C_T \Rightarrow C_1 \cup \dots \cup C_k \in C_T$

Proposición: La familia $\mathcal{B} \subset X$ es base de una única topología si $\mathcal{B}$ cumple:

- $\rightarrow \forall x \in X,\ \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
- $\rightarrow$ Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Si $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B};\ x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

- Sea $x\in X$, se dice que un conjunto V es **entorno de x** si $\exists U\in T$ tal que $x\in U\subset V$. (A la familia de todos los entornos de x la llamamos N_x)
- La familia $\mathcal{B}_x$ se le llama **base de entornos de x** si cumple:
  - $\rightarrow B\in N_x \ \forall B\in \mathcal{B}_x$
  - $\rightarrow \forall V\in N_x, \exists B\in\mathcal{B}_x ; x\in B\subset V$.

Proposición La familia $\mathcal{B}(x)=\{U\in T ; x\in U\}$ es base de entornos.

- Diremos que $S\subset P(X)$ es **subbase de la topología** si la familia $\{\bigcap_{i\in I} A_i, I \text{ finito}: A_i\in S\}$ es base

ESPACIOS MÉTRICOS

- Sea (X,d) un espacio métrico, definimos la **bola abierta** de centro c y radio r como $B(c,r)=\{x\in X: d(c,x)<r\}$
- " " " **bola cerrada** de centro c y radio r como $\overline{B}(c,r)=\{x\in X: d(c,x)\leq r\}$
- Llamamos T_d a la **topología asociada** a la distancia d.
- Una topología T es **metrizable** si existe una distancia d tal que $T=T_d$
- $A\subset X$ es **abierto** si $\forall a\in A, \exists r>0: B(a,r)\subset A$

COMPARACIÓN DE TOPOLOGÍAS

- Dadas T, T' topologías en X decimos que T es **más fina** que T', o que T' es **más gruesa** que T si $T'\subset T$

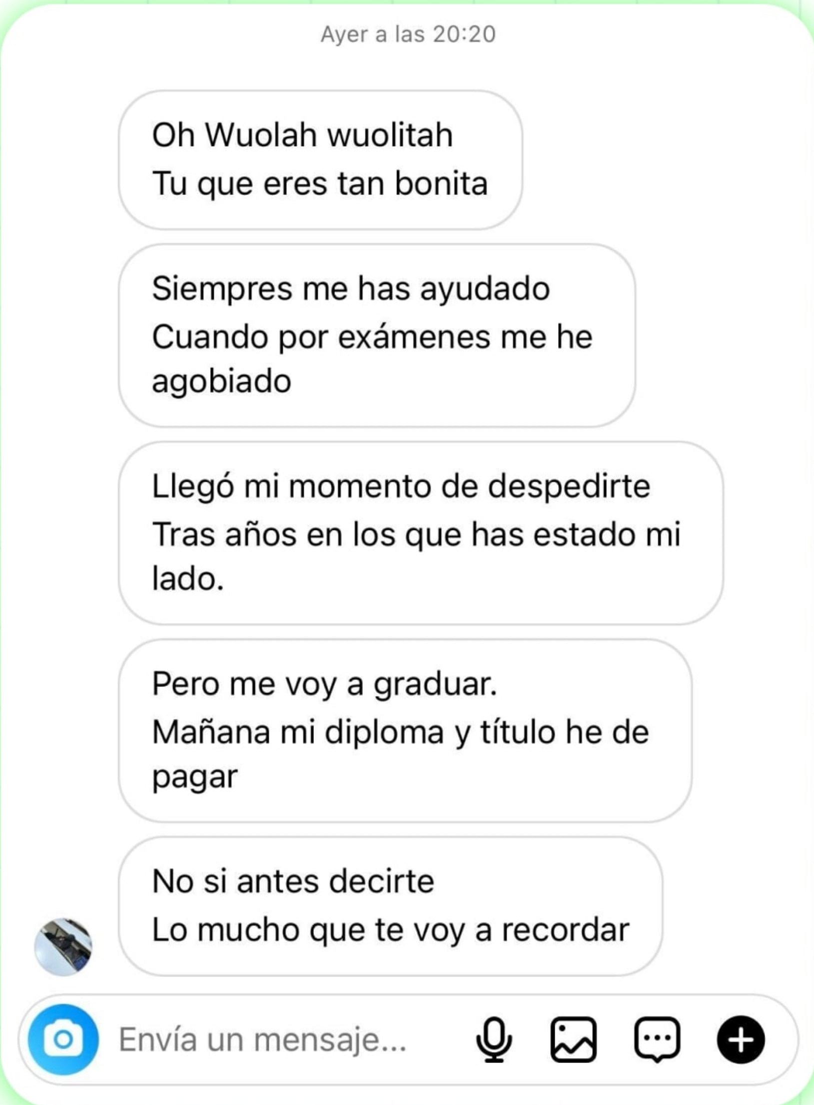
Proposición: Sean T_1, T_2 topologís en X y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de T_1, T_2 respectivamente. Son equivalentes:

i) $T_1\subset T_2$

ii) $\forall B_1\in\mathcal{B}_1, \forall x\in B_1, \exists B_2\in\mathcal{B}_2$ tq $x\in B_1\subset B_2$

Que no te escriban poemas de amor cuando terminen la carrera 🚩🚩🚩🚩🚩🚩

(a nosotros por suerte nos pasa) :)



WUOLAH

ÁREAS DE UN CONJUNTO ($A \subset X$)

- **Interior** $\Rightarrow x \in int(A)$ ó $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists U \in T;\ x \in U \subset A$ ($x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in N_x$)
- **Cierre** $\Rightarrow x \in cl(A)$ ó $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in N_x,\ V \cap A \neq \emptyset$
- **Frontera** $\Rightarrow x \in Fr(A)$ ó $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall V \in N_x,\ V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A^c \neq \emptyset$
- **Puntos acumulación** $\Rightarrow x \in Ac(A)$ ó $x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in N_x;\ (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
- **Puntos aislados** $\Rightarrow x \in ais(A) \Leftrightarrow \exists V \in N_x;\ V \cap A = \{x\}$.

Proposición Dado $A \subset X \Rightarrow \mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. Además, $\mathring{A}$ es conjunto abierto y $\overline{A}$ es cerrado. En particular:

→ Si $U \subset A,\ U \in T \Rightarrow U \subset \mathring{A}$ ($\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A)
→ Si $A \subset C,\ C \in C_T \Rightarrow \overline{A} \subset C$ ($\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A)

En particular: $\mathring{A} = \{\bigcup U_i : U_i \in T,\ U_i \subset A\}$ y $\overline{A} = \{\bigcap C_i : A \subset C_i,\ C_i \in C_T\}$

Proposición

i) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ (∂A es cerrado)

ii) Los conjuntos $\mathring{A}$, ∂A y $X \setminus \overline{A}$ forman una partición de X.

Además, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Proposición: Sea $\mathcal{B}(x)$ base de entornos de x:

i) $x \in \mathring{A}$ si $\exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset A$

ii) $x \in \overline{A}$ si $\forall B \in \mathcal{B}(x) : B \cap A \neq \emptyset$

(La propiedad de la base se puede utilizar para los aislados y los ptos de acum)

SEPARACIÓN Y NUMERABILIDAD

- Diremos que (X,T) es **T1** o es un **espacio de Fréchet** si $\forall x,y \in X : x \neq y$
$\exists U \in N_x,\ V \in N_y : x \notin V,\ y \notin U$
- Diremos que (X,T) es **T2** o es **espacio de Hausdorff** si $\forall x,y \in X : x \neq y$,
$\exists U \in N_x,\ V \in N_y : V \cap U = \emptyset$.

si lees esto me debes un besito

Proposición Todo espacio T2 es T1

Proposición (X,T) es T1 si, y solo si, los puntos son conjuntos cerrados.

NUMERABILIDAD

- (X,T) es **AN-I** si $\forall x \in X$ existe una base de entornos de x numerable.
- (X,T) es **AN-II** si existe una base numerable de la topología.

Proposición: Si (X,T) es AN-II, es AN-I

Proposición: $(\mathbb{R}, T_u)$ no es AN-II, pero sí AN-I

Proposición: Todo espacio métrico es Hausdorff

- Dado (X,T), $D \subset X$ es **denso** si $\overline{D} = X$
- (X,T) es **separable** si admite un subconjunto denso y numerable

TOPOLOGÍAS NOTABLES

- **Topología usual** (T_u) Es la inducida por la distancia usual de $\mathbb{R}$.
- **Topología trivial** (T_t) Es la topología en X formada por X y $\emptyset$.
- **Topología discreta** (T_D) Es la formada por las partes de X.
- **Topología de Sorgenfrey** (T_S) Es la inducida por la base $B = \{[a,b),\ a<b\}$
- **Topología de Minkowsky** (T_M) $X = \{0,1\}$. $T_M = \{\emptyset, \{0\}, X\}$

Proposición Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$. Son equivalentes:

i) f es continua

ii) $\forall C\in C_{T'},\ f^{-1}(C)\in C_T$

iii) Sea $U\subset X$, $f(\overline{U})\subset\overline{f(U)}$

Proposición: Sean $(X,T),(Y,T'),(Z,T'')$ e.t.

i) Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ y $g:(Y,T')\to(Z,T'')$ son continuas, entonces $f\circ g:(X,T)\to(Z,T'')$ es continua.

ii) Si f es continua en $x_0\in X$ y g continua en $f(x_0)$, entonces $f\circ g$ es continua en x_0.

HOMEOMORFISMOS

•) $f:(X,T)\to(Y,T')$ es **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y cuya inversa es continua.

•) Dos espacios topológicos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos (lo notaremos $(X,T)\approx(Y,T')$

•) Un **invariante topológico** es una propiedad que se preserva a través de homeomorfismos.

Proposición: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ homeomorfismo. Si (X,T) es Hausdorff, (Y,T') es Hausdorff.

•) $f:(X,T)\to(Y,T')$ es **abierta** si $\forall U\in T,\ f(U)\in T'$

•) $f:(X,T)\to(Y,T')$ es **cerrada** si $\forall C\in C_T,\ f(C)\in C_{T'}$