# solucionesexamenextraordinario.pdf

Alexmaths

Topología I

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Topología I. Convocatoria extraordinaria

Grado en matemáticas, doble grado en física y matemáticas y doble grado en ingeniería informática y matemáticas

7 de febrero de 2020

**1.-** (4 puntos). Sea $X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ donde $\alpha \notin \mathbb{R}$. En $X$ se considera la topología $T$ de la que conocemos una base $\mathcal{B}$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R},\, a < b\} \cup \{(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon) \,/\, \varepsilon > 0\}.$$

a) Decidir si $(X,T)$ es un espacio de Hausdorff.

b) Probar que $T_{|X-\{\alpha\}} = T_u$ y que $(X - \{0\}, T_{X-\{0\}})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, T_u)$.

c) Estudiar la conexión en $(X,T)$ del conjunto $A = (a,b) \cup \{\alpha\}$.

d) ¿Es el conjunto $C = [-1,1]$ cerrado en $(X,T)$? ¿Es $C$ compacto en $(X,T)$?

**2.-** (2 puntos). Sean $(X,T)$ e $(Y,T')$ espacios topológicos. Probar que el espacio producto $(X \times Y, T \times T')$ es conexo si y sólo si $(X,T)$ e $(Y,T')$ son conexos.

**3.-** (4 puntos). Resolver de forma razonada los siguientes apartados:

a) Se considera $f : ([0,1], T_{u|[0,1]}) \to (\{0,1\}, T)$, donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y $f$ se define como $f = 1$ en $[0, 1/2)$ y $f = 0$ en $[1/2, 1]$. Probar que $f$ es una identificación pero no es abierta ni cerrada.

b) Sea $(X,T)$ un espacio compacto y $A \subseteq X$ infinito. Demostrar que $A' \neq \emptyset$, donde $A'$ es el conjunto de puntos de acumulación de $A$ en $(X,T)$.

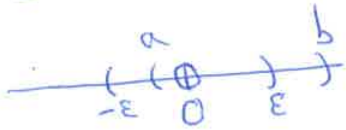
*Duración del examen:* 3 horas

# EJERCICIO 1

$X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ con $\alpha \notin \mathbb{R}$. $T =$ top. en $X$ tal que:
$\mathcal{B} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon) / \varepsilon>0\}$
es una base de $(X,T)$.

a) ¿$(X,T)$ es Hausdorff? Lo será si se cumple:
$\forall x,y \in X$ con $x \neq y$ $\exists\, \mathcal{U},V \in T$ con $x\in\mathcal{U}$, $y \in V$ y $\mathcal{U}\cap V = \emptyset$.

No es difícil probar que si $x,y \in X - \{0,\alpha\}$ y $x\neq y$ entonces $\exists\, B,B' \in \mathcal{B}$ tales que $x\in B$, $y \in B'$, y $B\cap B' = \emptyset$.
Veamos sin embargo que $x=0$ e $y=\alpha$ no se pueden separar por abiertos disjuntos. Así $(X,T)$ NO es de Hausdorff. Vamos a probar
Sean $\mathcal{U},V\in T$ tales que $0\in\mathcal{U}$ y $\alpha \in V$.
que $\mathcal{U}\cap V \neq \emptyset$.
$0\in\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists\, B\in\mathcal{B} / 0\in B \subseteq \mathcal{U}$
$\alpha\in V$ y $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists\, B' \in\mathcal{B} / \alpha \in B' \subseteq V$.




Por la descripción de $\mathcal{B}$ tenemos que:
$B = (a,b)$ con $a<0<b$
$B' = (-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon>0$.
Como $((a,b)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)) - \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq B\cap B' \subseteq \mathcal{U}\cap V$.

———o———

b) ¿$T_{|X-\{\alpha\}} = T_u$? Como $X - \{\alpha\} = \mathbb{R}$, nos estamos preguntando si $T_{|\mathbb{R}} = T_u$.
Como $\mathcal{B}$ es, por definición, una base de $(X,T)$, entonces:
$\mathcal{B}_{|\mathbb{R}} = \{B\cap\mathbb{R} / B\in\mathcal{B}\}$ es una base de $(\mathbb{R}, T_{|\mathbb{R}})$.
Por la descripción de $\mathcal{B}$ tenemos que:

1

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{(-\varepsilon,0)\cup(0,\varepsilon) \,/\, \varepsilon>0\}$.

Como $\mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow T_u \leq T_{\mathbb{R}}$.

Por otro lado, es claro que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq T_u$, de donde deducimos que $T_{\mathbb{R}} \leq T_u$.

- ¿ $(X - \{0\}, T_{|X-\{0\}}) \cong (\mathbb{R}, T_u)$?

$X_* = X - \{0\} = (\mathbb{R}-\{0\}) \cup \{\alpha\} = \mathbb{R}_* \cup \{\alpha\}$.

Vamos a encontrar un homeo. bastante simple.


Definimos $f: (X_*, T_{|X_*}) \to (\mathbb{R}, T_u)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_+, \text{ es decir, si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

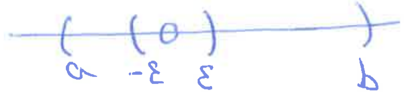
Es muy sencillo comprobar que $f$ es biyectiva, es decir, $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists_1 x \in X_*$ tal que $f(x) = y$ (ejercicio).

¿Es $f$ continua? Tomo $\mathcal{B}_u = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$ base usual de $(\mathbb{R}, T_u)$. Es suficiente con demostrar que $f^{-1}((a,b)) \in T_{|X_*}$ $\forall (a,b) \in \mathcal{B}_u$. Por la definición de $f$ llegamos a:

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (a,b) \in \mathcal{B} \subseteq T_{|X_*} & \text{si } 0 \notin (a,b) \\ (a,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,b) & \text{si } 0 \in (a,b). \end{cases}$$

¿ $(a,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,b) \in T$? Veamos que todos sus puntos son interiores en $(X_*, T_{|X_*})$. Basta comprobarlo con $x = \alpha$

Como $0 \in (a,b)$ y $(a,b) \in T_u$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq (a,b)$




Entonces $(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon) \in T$
y $(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon) \subseteq X_*$.
y $(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon) \in T_{|X_*}$, contiene a $\alpha$,
Concluimos que $(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon) \subseteq (a,0) \cup \{\alpha\} \cup (0,b)$.

¿Es f abierta? Basta comprobar que $f(B) \in T_u \ \forall B \in \mathcal{B}_{|X_*}$.
$\mathcal{B}_{|X_*} = \{B \cap X_* / B \in \mathcal{B}\}$.

Por un lado tenemos:
$f((a,b)) = (a,b) \quad \forall (a,b) \in \mathcal{B}_{|X_*} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a<b, 0 \notin (a,b)\} \cup \{(-\varepsilon,0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon) / \varepsilon > 0\}$

y por otro:
$f((-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon)) = f((-\varepsilon,0)) \cup \{f(\alpha)\} \cup f((0,\varepsilon))$
$= (-\varepsilon, 0) \cup \{0\} \cup (0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \in T_u$.

---

c) Estudiar la conexión en $(X, T)$ de $A = (a,b) \cup \{\alpha\}$.
Vamos a distinguir 2 casos:

cierre de $(a,b)$ en $(X,T)$

c1) $0 \in [a,b]$.
Veamos que $\alpha \in \overline{(a,b)}$. Por definición de cierre, basta ver que $B \cap (a,b) \neq \emptyset \ \forall B \in \mathcal{B}$ con $\alpha \in B$.
Dado $B \in \mathcal{B}$ con $\alpha \in B \Rightarrow B = (-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.
y claramente $B \cap (a,b) \neq \emptyset$ porque $0 \in [a,b]$.
Por otro lado nótese que $(a,b)$ es conexo en $(X,T)$.
En efecto; como $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ y $T_{|\mathbb{R}} = T_u$, entonces:
$(a,b)$ es conexo en $(X,T) \Leftrightarrow (a,b)$ es conexo en $(\mathbb{R}, T_u)$, lo que se cumple porque $(a,b)$ es un intervalo.

Finalmente, como $\alpha \in \overline{(a,b)}$ tenemos

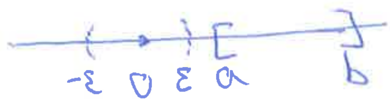
$$\underbrace{(a,b)}_{\text{conexo}} \subseteq (a,b) \cup \{\alpha\} = A \subseteq \overline{(a,b)},$$

y por un resultado de clase se sigue que $\underline{A}$ es conexo.

c2) $0 \notin [a,b]$.

En este caso $\underline{A}$ no es conexo en $(\mathbb{X}, T)$: encontraremos abiertos inducidos $\mathcal{U}_A, V_A \in T_{|A}$ tales que $A = \mathcal{U}_A \cup V_A$, $\mathcal{U}_A \cap V_A = \emptyset$ y $\mathcal{U}_A, V_A \neq \emptyset$.

Como $0 \notin [a,b]$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se cumple $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap [a,b] = \emptyset$




$(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0, \varepsilon) \in \mathcal{B} \subseteq T$ y se verifica que

Así $(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon)) \cap A = \{\alpha\}$

$((-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon)) \cap A = \{\alpha\}$

Esto prueba que $\{\alpha\} \in T_{|A}$. Como $(a,b) \in \mathcal{B} \subseteq T$ y $(a,b) \subseteq A \Rightarrow (a,b) \in T_{|A}$. Así, la separación no trivial buscada para $A$ es $\mathcal{U}_A = (a,b)$ y $V_A = \{\alpha\}$.

---

d) Sea $G = [-1,1]$. ¿$G \in C_T$? Nótese que $G^c = \mathbb{X} - G = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \cup \{\alpha\}$.

$G^c$ no es abierto, puesto que $\alpha$ no es un punto interior: para cada $\varepsilon > 0$ pequeño $(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon) \not\subseteq G^c$.

¿$G$ compacto en $(\mathbb{X}, T)$? Como $G \subseteq \mathbb{R}$ y $T_{|\mathbb{R}} = T_u$, entonces $G$ es compacto en $(\mathbb{X}, T) \Longleftrightarrow$ lo es en $(\mathbb{R}, T_u)$. Y esto último se cumple por el teorema de Heine-Borel ya que $G \in C_u$ y $G$ es acotado.

## EJERCICIO 2

Resultado de teoría demostrado en los apuntes de clase.

— o —

## EJERCICIO 3

a) Se define $f: ([0,1], T_u|[0,1]) \to (\{0,1\}, T)$ donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y $f$ viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1/2), \\ 0 & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

- Veamos que $f$ es una identificación.

¿$f$ sobreyectiva? Evidente.

¿$f$ continua? Veamos que $f^{-1}(U') \in T_u|[0,1]$ $\forall U' \in T$. Esto es fácil de comprobar ya que en $T$ hay 3 abiertos.

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_u|[0,1]$, $f^{-1}(\{0,1\}) = [0,1] \in T_u|[0,1]$

$f^{-1}(\{1\}) = [0,1/2) = (-\infty, 1/2) \cap [0,1] \in T_u|[0,1]$.

¿$T_f = T$? Como $f$ es continua sabemos que $T \subseteq T_f$.

¿$T_f \subseteq T$? Recordemos que $T_f = \{U' \subseteq \{0,1\} \,/\, f^{-1}(U') \in T_u|[0,1]\}$

$P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Como $f^{-1}(\{0\}) = [1/2,1] \notin T_u|[0,1] \Rightarrow T_f \subseteq T$.

- Veamos que $f$ no es abierta ni cerrada.

$U = (1/2,1) = (1/2,1) \cap [0,1] \in T_u|[0,1]$ y $f(U) = \{0\} \notin T$

Así, $f$ no es abierta.

$F = [0,1/4] = [0,1/4] \cap [0,1] \in C_u|[0,1]$ y $f(F) = \{1\} \notin C_T$

porque $\{1\}^c = \{0\} \notin T$.

$C_T = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

b) $(X,T)$ compacto $\overset{¿?}{\Longrightarrow}$ $A' \neq \emptyset$.
$A \subseteq X$ infinito

Recuerda: $x \in A' \Leftrightarrow \forall U \in T,\ x \in U$ se cumple $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos $A' = \emptyset$. Entonces, $\forall x \in X$ se cumple que $x \notin A'$. Así, $\forall x \in X$ $\exists U_x \in T$ con $x \in U_x$ tal que $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Así, Claramente $\{U_x\}_{x \in X} \subseteq T$ y $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$.

la compacidad de $(X,T)$ implica la existencia de $J \subseteq X$ finito tal que $X \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$. Y como $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$. Finalmente, el hecho de que $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$ $\forall x \in X$ implica que $A \subseteq \bigcup_{x \in J} \{x\}$, lo que contradice que $A$ es infinito.