ordinaria-2223.pdf

matezanahoria

Geometría I

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Geometría y Topología

Grado en Matemáticas
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Doble Grado en Física y Matemáticas

Geometría I, convocatoria ordinaria, 23/01/23

1. (2 puntos.) Enuncia y demuestra el Teorema del rango.

2. Sea $U = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : M \cdot A = A \cdot M\}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

   (a) (2 puntos.) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ y calcular un complementario.

   (b) (1 punto.) Hallar una base de $M_2(\mathbb{R})/U$ y las coordenadas en esa base de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U$.

   (c) (2 puntos.) Construir una aplicación lineal $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ cuyo núcleo sea U y cuya imagen tenga por sistema de generadores $\{1+x, 1-x\}$.

   (d) (1 punto.) Calcular la matriz de f respecto a las bases usuales $B_u = \{E_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ (con la ordenación que se escoja) de $M_2(\mathbb{R})$ y $B'_u = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (e) (1 punto.) Encontrar, si es posible, bases B de $M_2(\mathbb{R})$ y B' de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que

   $$M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (f) (1 punto.) Hallar bases de $\mathrm{an}(U)$ y $\ker(f^t)$.

2. Sea $U = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : M \cdot A = A \cdot M\}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

$\to 0 \in U$
$\to M_1, M_2 \in U \Rightarrow M_1 + M_2 \in U$
$\to M \in U,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot M \in U$

(a) (2 puntos.) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ y calcular un complementario.

1) $0 \in U$: sea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow O_2 \cdot A = O_2 = A \cdot O_2 \Rightarrow O_2 \in U$

2) $M_1, M_2 \in U \Rightarrow M = M_1 + M_2 \in U$ sean $M_1, M_2 \in U \Rightarrow M_i \cdot A = A \cdot M_i,\ i = 1,2$, $M := M_1 + M_2$, ¿$M \in U$? $M \cdot A = (M_1 + M_2) \cdot A = M_1 A + M_2 A = A M_1 + A M_2 = A \cdot (M_1 + M_2) = A \cdot M \Rightarrow M \in U$

3) $M \in U, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot M \in U$ sean $M \in U, a \in \mathbb{R} \Rightarrow P := a \cdot M$, ¿$P \in U$? : $P \cdot A = (a \cdot M) \cdot A = a \cdot (MA) = a(A \cdot M) = A \cdot (aM) = AP \Rightarrow P \in U$

$\to$ complementario : $W \in M_2(\mathbb{R}) : U \cap W = \emptyset$ y $\dim(U + W) = \dim(V)$, donde $M_2(\mathbb{R})$

1) ec. impl. de U: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} M \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel \\ A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b + d \end{cases} \Rightarrow U = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

sea $W = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{cases} c \neq 0 \\ a \neq b + d \end{cases}$ $\quad (V = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : MA \neq AM\}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

$U \cap W = \begin{cases} c = 0 \\ a = b+d \\ c \neq 0 \\ a \neq b+d \end{cases} = \emptyset$ $\quad U + W = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, con rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$ pues $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, así $\dim(U+W) = 4 = \dim M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow U \oplus W$

(b) (1 punto.) Hallar una base de $M_2(\mathbb{R})/U$ y las coordenadas en esa base de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U$.

1) Hallamos una base de U : $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

2) Ampliamos B a una base de $M_2(\mathbb{R})$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}_{= B'}$ es base de $M_2(\mathbb{R})$

3) Tenemos una base de $M_2(\mathbb{R})/U$: $\tilde{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U\right\}$ es base de $M_2(\mathbb{R})/U$

Para hallar las coord. de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U$ en $\tilde{B}$ puede hacerse de dos formas:

(1) ec. implícitas de U:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = a \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U\right] + b\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + U \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ -1-b & 0 \end{pmatrix} + U \overset{\text{es igual a la clase del vect. } \bar{0}}{=} \bar{0} + U$

como $\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ -1-b & 0 \end{pmatrix} \in U \overset{\text{ec. impl.}}{\Rightarrow} \begin{cases} -1-b = 0 \\ 1-a = 1+0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = (0,-1)_{\tilde{B}}$

(2) Mediante la base usada en el paso 2):

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a+b+c \\ 1 = a \\ -1 = d \\ 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \overset{\text{tomando clases}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = 1 \cdot \left[\cancelto{0}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U}\right] + 0 \cdot \left[\cancelto{0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + U}\right] + 0 \cdot \left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U}^{1}\right] + (-1) \cdot \left[\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U}^{1}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = (0,-1)_{\tilde{B}}$

(c) (2 puntos.) Construir una aplicación lineal $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ cuyo núcleo sea U y cuya imagen tenga por sistema de generadores $\{1 + x, 1 - x\}$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : f(M) = 0 \in \mathbb{R}_3[x]\} = U = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \exists M \in M_2(\mathbb{R}) / f(M) = p\} = L\{1+x, 1-x\} = S \Rightarrow B_{\mathrm{Im}(f)} = \{1+x, 1-x\}$

como $f(U) = 0 \Rightarrow \overset{\text{base de } U}{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = B_{\mathrm{Ker}(f)}$

ampliamos B a una base de $M_2(\mathbb{R})$: $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

y sabemos $\left.\begin{array}{ll} f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 & f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x \in S \subset \mathbb{R}_3[x] \\ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 & f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x \in S \end{array}\right\} \Rightarrow$ la apl. $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b - d + (a - b - c - d) \cdot x$ cumple $\begin{cases} \mathrm{Ker}(f) = U \\ \mathrm{Im}(f) = \{1+x, 1-x\} \end{cases}$

que claramente es lineal: $f(\alpha M_1 + \beta M_2) = f\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{pmatrix} = (\alpha a_1 + \beta a_1 - \alpha b_1 - \beta b_1 - \alpha d_1 - \beta d_2) + (\alpha a_1 + \beta a_1 - \alpha b_1 - \beta b_1 - \alpha c_1 - \beta c_2 - \alpha d_1 - \beta d_2)x =$
$= \alpha(a_1 - b_1 - d_1 + (a_1 - b_1 - c_1 - d_1)x) + \beta(a_2 - b_2 - d_2 + (a_2 - b_2 - c_2 - d_2)x) = \alpha f(M_1) + \beta f(M_2)$

(d) (1 punto.) Calcular la matriz de f respecto a las bases usuales $B_u = \{E_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ (con la ordenación que se escoja) de $M_2(\mathbb{R})$ y $B'_u = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

$B_u = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
$B'_u = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x = (1,1,0,0)_{B'_u} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 - x = (-1,-1,0,0)_{B'_u} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x = (1,-1,0,0)_{B'_u} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 - x = (-1,-1,0,0)_{B'_u} \end{array}\right\} \Rightarrow M(f, B'_u \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

POR COLUMNAS

(e) (1 punto.) Encontrar, si es posible, bases B de $M_2(\mathbb{R})$ y B' de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que

$$A = M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

como $rg(A) = 2 = \dim(Im(f))$ es posible, escogemos $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$B' = \{1+x, 1-x, x^2, x^3\}$

ahora calculamos $f(B)$:
$$\left. \begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1+x = (1,0,0,0)_{B'} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1-x = (0,1,0,0)_{B'} \\ f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) (1 punto.) Hallar bases de $\mathrm{an}(U)$ y $\ker(f^t)$.

- Como ya conocemos las ec. implícitas de U $\Rightarrow$ $B_{an(U)} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ donde $\varphi_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -a+b+d$, $\varphi_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c$

$$U = \begin{cases} c = 0 \\ a = b+d \end{cases} = \begin{cases} -a+b+d = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

la igualamos a cero

- $Ker(f^t) = an(Im(f)) = an(\{1+x, 1-x\})$ $\Rightarrow$ $B_{Ker(f^t)} = \{\psi_1, \psi_2\}$ donde $\psi_1(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_2$, $\psi_2(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_3$

en ec. cartesianas:
$$Im(f) = \left\{ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 : \begin{array}{l} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{array} \right\}$$