Archivo-1.pdf

ConEstoApruebo

Topología I

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Topología I (grupo B)
Grado en Matemáticas. Curso 2022-2023
Ejercicio de evaluación del tema 1

Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología dada por:

$$T = \{U \subseteq \mathbb{R} \,/\, \text{si } x \in U \text{ entonces } x+1 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Encontrar un conjunto $A \in T \cap C_T$ con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}, T)$ un espacio T_1?
2. Probar que $(\mathbb{R}, T)$ cumple el IAN (describir en cada $x \in \mathbb{R}$ una base de entornos numerable).
3. Calcular $\overline{\{0\}}$ en $(\mathbb{R}, T)$. ¿Es $\mathbb{Q}$ denso en $(\mathbb{R}, T)$?
4. Para cada $A \subset \mathbb{R}$ no vacío definimos $\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) \,/\, x, y \in A\}$. Probar que, si $\text{diám}(A) < 1$, entonces A es discreto en $(\mathbb{R}, T)$ ¿Es cierto el recíproco?
5. (complementario y opcional). ¿Cumple $(\mathbb{R}, T)$ el IIAN?

Todos los apartados obligatorios tienen igual puntuación

Granada, 7 de noviembre de 2022

Topología I (grupo B)
Grado en Matemáticas. Curso 2021-2022
Ejercicio de evaluación del tema 1

Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología dada por:

$$T = \{U \subset \mathbb{R} \,/\, 0 \in U \ y \ 1 \notin U\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

1. Sea $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq C_T$ con I arbitrario. ¿Es cierto que $\cup_{i\in I} F_i \in C_T$?
2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ obtener, si es posible, una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$ con un entorno.
3. Calcular razonadamente el interior en $(\mathbb{R}, T)$ de cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$.
4. Sea $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ¿Es $\mathbb{I}$ denso en $(\mathbb{R}, T)$? ¿Es $\mathbb{I}$ discreto en $(\mathbb{R}, T)$?
5. (complementario y opcional). ¿Cumple $(\mathbb{R}, T)$ el IIAN?

Los apartados 1,2,3 y 4 tienen igual puntuación

Granada, 11 de noviembre de 2021

Soluciones

1.- Sabemos que $F \in C_T$ si y sólo si $F^c \in T$. De aquí deducimos que un subconjunto $F \neq \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si para cada $x \notin F$ se cumple que $x+1 \notin F$. El conjunto A que buscamos debe cumplir dos condiciones: si $x \in A$ entonces $x+1 \in A$, y si $x \notin A$, entonces $x+1 \notin A$. Hay varios conjuntos así distintos de $\emptyset$ y de $\mathbb{R}$. Uno de ellos es $\mathbb{Z}$.

Por otro lado, según el ejercicio 1 de la relación 1.3, que $(\mathbb{R}, T)$ sea T_1 equivale a que los conjuntos finitos sean cerrados. Veamos que $(\mathbb{R}, T)$ no es T_1. Basta considerar $F = \{0\}$, que es finito y claramente no cerrado, pues $x = -1$ no está en F pero $x+1 = 0$ sí lo está.

2.- Sean $x \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathcal{N}_x$. Así, existe $U \in T$ tal que $x \in U \subseteq N$. Como $U \in T$ y $x \in U$ entonces $x+1 \in U$. Como $U \in T$ y $x+1 \in U$, entonces $x+2 \in U$. Un argumento de inducción muestra que $V_x \subseteq U$, donde $V_x = \{x+n \,/\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Definimos $\mathcal{V}_x = \{V_x\}$. Es claro que $V_x \in T$ y $x \in V_x$, de donde $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{N}_x$. Además, hemos visto que cada $N \in \mathcal{N}_x$ contiene a V_x. Esto prueba que $\mathcal{V}_x$ es una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$. Como $\mathcal{V}_x$ es numerable (consta de un único entorno), entonces $(\mathbb{R}, T)$ cumple el IAN.

3.- Sea $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que $x \in \overline{\{0\}}$ si y sólo si $V_x \cap \{0\} \neq \emptyset$ para cada $V_x \in \mathcal{V}_x$, siendo $\mathcal{V}_x$ cualquier base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$. En particular, para la base de entornos $\mathcal{V}_x = \{V_x\}$, donde $V_x = \{x+n \,/\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, se tiene que $x \in \overline{\{0\}}$ si y solo si $V_x \cap \{0\} \neq \emptyset$, es decir, $0 \in V_x$. Esto equivale a que exista $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 = x+n$, es decir, $x = -n$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Concluimos que $\overline{\{0\}} = \{-n \,/\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = -\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por otro lado veamos que $\mathbb{Q}$ no es denso en $(\mathbb{R}, T)$. De lo contrario, todo $x \in \mathbb{R}$ sería un punto adherente de $\mathbb{Q}$. Esto se aplicaría en particular a todo número irracional. Sea $x \in \mathbb{Q}^c$. Se tendrá que $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ si y sólo si $V_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Como $V_x = \{x+n \,/\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, se sigue que $V_x \subset \mathbb{Q}^c$ y, por tanto, $V_x \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Esto nos dice que ningún irracional está en $\overline{\mathbb{Q}}$.

4.- Sea $A \neq \emptyset$ con $\textit{diám}(A) < 1$. Queremos ver que A es discreto en $(\mathbb{R}, T)$. Esto equivale a que $T_{|A} = T_D$ en A, es decir, para cada $x \in A$, existe $U \in T$ tal que $U \cap A = \{x\}$. Sea $x \in A$ y tomemos el abierto $V_x = \{x+n \,/\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Es claro que $x \in V_x \cap A$. Si en $V_x \cap A$ existiese un punto $y \neq x$, entonces $y = x+n$ con $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, se tendría que $d(x,y) = n \geq 1$, lo que contradice que $\textit{diám}(A) < 1$. Esto prueba que $V_x \cap A = \{x\}$.

Es falso que si A es discreto en $(\mathbb{R}, T)$, entonces $\textit{diám}(A) < 1$. Si tomamos $A = \{0, 8\pi\}$, entonces A es discreto (porque $V_0 \cap A = \{0\}$ y $V_{8\pi} \cap A = \{8\pi\}$) pero $\textit{diám}(A) = 8\pi > 1$.

5.- Veamos que $(\mathbb{R}, T)$ no cumple el IIAN. De lo contrario, como "cumplir el IIAN" es propiedad hereditaria, cualquier subespacio $(A, T_{|A})$ cumpliría el IIAN. Tomamos $A = (0, 1/2)$. Por el apartado anterior sabemos que A es discreto en $(\mathbb{R}, T)$, es decir $T_{|A} = T_D$ en A. Esto impide que $(A, T_{|A})$ cumpla el IIAN, pues hemos probado en clase que un espacio discreto cumple el IIAN si y sólo si es numerable. Esta contradicción implica que $(\mathbb{R}, T)$ no cumple el IIAN.

Alternativamente, siguiendo un argumento hecho en otros ejercicios, puede probarse que cualquier base $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}, T)$ contiene a todos los conjuntos V_x definidos en el apartado 2. Como $V_x \neq V_y$ si $x \neq y$ (esto requiere demostración), se concluye que $\mathcal{B}$ es no numerable.

Soluciones

1.- La respuesta es afirmativa. La familia de cerrados de $(\mathbb{R}, T)$ está dada por:

$$C_T = \{F \subseteq \mathbb{R} \,/\, F^c \in T\} = \{F \subseteq \mathbb{R} \,/\, 0 \in F^c, 1 \notin F^c\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} = \{F \subseteq \mathbb{R} \,/\, 0 \notin F, 1 \in F\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Sea $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq C_T$ con I arbitrario. Veamos que $\cup_{i\in I} F_i \in C_T$. Esto es claro si $\cup_{i\in I} F_i = \emptyset$ o $\cup_{i\in I} F_i = \mathbb{R}$. Supongamos que $\cup_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ y $\cup_{i\in I} F_i \neq \mathbb{R}$. Entonces, existe $j \in I$ de modo que $0 \notin F_j$ y $1 \in F_j$. En particular $1 \in \cup_{i\in I} F_i$. Como $\cup_{i\in I} F_i \neq \mathbb{R}$ entonces $F_i \neq \mathbb{R}$ para cada $i \in I$. En consecuencia $0 \notin F_i$ para cada $i \in I$, de donde $0 \notin \cup_{i\in I} F_i$. Esto prueba que $\cup_{i\in I} F_i \in C_T$.

2.- Sea $x \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathcal{N}_x$. Por definición de entorno, existe $U \in T$ tal que $x \in U \subseteq N$. Como $U \in T$ y $U \neq \emptyset$ entonces, o bien $0 \in U$ y $1 \notin U$, o bien $U = \mathbb{R}$.

(i) Si $x = 1$ debe ocurrir $U = \mathbb{R}$, de donde $N = \mathbb{R}$. Esto implica que $\mathcal{N}_1 = \{\mathbb{R}\}$, por lo que $\mathcal{V}_1 = \{\mathbb{R}\}$ es una base de entornos formada por un único entorno.

(ii) Supongamos que $x \neq 1$. Como $U \in T$ y $U \neq \emptyset$ entonces $0 \in U$. Por tanto $\{0, x\} \subseteq U$. Llamemos $\mathcal{V}_x = \{\{0, x\}\}$. Como $\{0, x\} \in T$ y $x \in \{0, x\}$ entonces $\{0, x\} \in \mathcal{N}_x$. Además, hemos probado que el conjunto $\{0, x\}$ está contenido en cualquier $U \in T$ con $x \in U$. Todo esto nos dice que $\mathcal{V}_x$ es una base de entornos de x con un único entorno.

3.- Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos que $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$. Supongamos $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{R}$.

(i) Si $0 \notin A$, entonces A no contiene ningún abierto distinto del vacío y, por tanto, $A^\circ = \emptyset$.

(ii) Supongamos que $0 \in A$. Si $x \in A^\circ$ entonces $A \in \mathcal{N}_x$. Y como $\mathcal{V}_x$ es una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$, se sigue que $V_x \subseteq A$, donde $V_x = \{0, x\}$ si $x \neq 1$ y $V_x = \mathbb{R}$ si $x = 1$. Esto impide que $1 \in A^\circ$ ya que $A \neq \mathbb{R}$. Hemos probado que $A^\circ \subseteq A \setminus \{1\}$. Por otro lado, dado un punto $x \in A \setminus \{1\}$, es obvio que $x \in A^\circ$. Esto se debe a que $\{0, x\} \subseteq A$, lo que prueba que $A \in \mathcal{N}_x$. Concluimos que $A^\circ = A \setminus \{1\}$ en este caso.

4.- El conjunto $\mathbb{I}$ no es denso en $(\mathbb{R}, T)$, puesto que $0 \notin \overline{\mathbb{I}}$. Esto se debe a que $\{0\}$ es un entorno de 0 en $(\mathbb{R}, T)$ y $\{0\} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Veamos que $\mathbb{I}$ es discreto en $(\mathbb{R}, T)$. Esto significa que la topología inducida $T_{|\mathbb{I}}$ coincide con la topología discreta en $\mathbb{I}$. Para probar esto, basta tomar cualquier $x \in \mathbb{I}$ y verificar que $\{x\} \in T_{|\mathbb{I}}$. Ahora, si tomamos el conjunto $\{0, x\}$, se tiene que $\{0, x\} \in T$ (porque $x \neq 1$ al ser x un irracional) y $\{0, x\} \cap \mathbb{I} = \{x\}$ (porque $0 \notin \mathbb{I}$). Esto nos dice que $\{x\} \in T_{|\mathbb{I}}$, como se quería.

5.- El espacio $(\mathbb{R}, T)$ no cumple el IIAN. Veamos que toda base $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}, T)$ es no numerable. Tomamos un punto $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Es claro que $\{0, x\} \in T$ y $x \in \{0, x\}$. Como $\mathcal{B}$ es base en $(\mathbb{R}, T)$, debe existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \{0, x\}$. Dado que $B \in T$ y $B \neq \emptyset$ entonces $0 \in B$. De este modo $\{0, x\} \subseteq B \subseteq \{0, x\}$, de donde $B = \{0, x\}$. Esto nos dice que toda base $\mathcal{B}$ contiene a cada conjunto de la forma $\{0, x\}$ con $x \neq 1$. Concluimos que no hay bases numerables en $(\mathbb{R}, T)$.

Topología I. Curso 2019-2020

Grado en Matemáticas
Ejercicio de evaluación del tema 1

Un conjunto no vacío $U \subseteq \mathbb{R}$ es *simétrico* si para cada $x \in U$ se cumple que $-x \in U$. Consideremos la familia:

$$T = \{U \subseteq \mathbb{R} \,/\, U \, \textit{es simétrico}\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Probar que T es una topología en $\mathbb{R}$ y que $C_T = T$.
2. Analizar si $(\mathbb{R}, T)$ es o no un espacio de Hausdorff.
3. Para cada $x \in \mathbb{R}$, encontrar una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$ formada por un único entorno de x.
4. En $(\mathbb{R}, T)$ calcular la clausura, el interior y la frontera de $[-1, 0]$.

Todos los apartados tienen igual puntuación

Granada, 28 de octubre de 2019

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1

– Grado en Matemáticas. Curso 2013/14 –

Nombre:

1. Sea X un conjunto y un subconjunto suyo $A \subset X$, que lo fijamos. Definimos

$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Probar que τ es una topología en X.

   (b) Probar que $\beta_x = \{B_x\}$ es base de entornos de $x \in X$, donde $B_x = \{x\} \cup A$.

   (c) Si $C \subset X$, caracterizar el interior y la adherencia de C.

2. En $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, hallar el interior y la adherencia de

$$A = B_1((0,0)) - \{(0,0)\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

3. En $\mathbb{R}^2$, consideramos la familia $\beta = \{(a,b) \times \{c\} : a < b, a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Probar que β es base de abiertos de una topología τ en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Comparar τ con τ_u.

   (c) Dado $C = \{0\} \times \mathbb{R}$, estudiar cuál es la topología relativa $\tau_{|C}$ y si es conocida.

Razonar todas las respuestas

Soluciones

1. *Sea X un conjunto y un subconjunto suyo $A \subset X$, que lo fijamos. Definimos*

$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) *Probar que τ es una topología en X.*

i. $\emptyset \in \tau$ por definición y $A \subset X$, luego $X \in \tau$.

ii. Si $O_1, O_2 \in \tau$, entonces $O_i \supset A$, luego al intersecar ambas inclusiones, $O_1 \cap O_2 \supset A \cap A = A$, luego $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

iii. Si $\{O_i : i \in \tau\}$, entonces $A \subset O_i, \forall i \in I$. Al hacer uniones en $i \in I$, $A \subset \cup_{i \in I} O_i$.

(b) *Probar que $\beta_x = \{B_x\}$ es base de entornos de $x \in X$, donde $B_x = \{x\} \cup A$.*

En primer lugar, $B_x \supset A$, luego B_x es un abierto, y como $x \in B_x$, es un entorno suyo. Por otro lado, sea U un entorno de x. Entonces existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. En particular, $A \subset O$. Esto prueba que $B_x = \{x\} \cup A \subset \{x\} \cup O = O \subset U$.

(c) *Si $C \subset X$, caracterizar el interior y la adherencia de C.*

Los conjuntos cerrados son $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \subset X - A\} \cup \{X\}$. Distinguimos casos:

i. Si $A \subset C$, entonces C es un abierto, luego $int(C) = C$. Por otro lado, si F es un cerrado no trivial que contiene a C, entonces $X - A \supset F \supset C \supset A$. Esta contradicción, prueba que C es trivial, es decir, $F = X$ y así $\overline{C} = X$.

ii. Si $A \not\subset C$, y $O \in \tau$ no trivial tal que $O \subset C$, entonces $C \supset O \supset A$: contradicción. Por tanto, el único abierto incluido en C es el trivial, es decir, $O = \emptyset$, probando que $int(C) = \emptyset$. Si F es un cerrado no trivial conteniendo a C, entonces $X - A \supset F \supset C$, es decir, $C \subset X - A$, probando que C es cerrado y $\overline{C} = C$. En otro caso, es decir, si $C \not\subset X - A$, el único cerrado es que contiene a C es el trivial, es decir, X, probando ahora $\overline{C} = X$.

2. *En $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, hallar el interior y la adherencia de*

$$A = B_1((0,0)) - \{(0,0)\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

(a) Sabemos que un punto en un espacio métrico (en este caso, $\mathbb{R}^2$) es un cerrado, luego

$$A = B_1((0,0)) \cap (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},$$

es decir, intersección de dos abiertos, luego $int(A) = A$.

Otra manera es darse cuenta que $A = \cup_{(x,y)\in\mathbb{S}^1_{1/2}} B_{1/2}(x,y)$, luego es abierto por ser unión de conjuntos abiertos.

Otra manera es que dado $(x,y) \in A$, y tomando $r = \min\{\sqrt{x^2+y^2}, 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ entonces r es positivo (ya que $x^2+y^2 \notin \{0,1\}$) y que $B_r((x,y)) \subset A$.

Si $(x,y) \in \overline{A}$, entonces existe $\{(x_n,y_n)\} \subset A \to (x,y)$. En particular, $0 < x_n^2 + y_n^2 < 1$. Ya que $x_n \to x$ e $y_n \to y$, tomando límites obtenemos $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$. Por tanto, $\overline{A} \subset \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$. Para probar la igualdad, observemos que si $\lambda_n \to 1$ con $0 < \lambda_n < 1$ (por ejemplo, $\lambda_n = 1 - 1/n$), entonces si (x,y) satisface $x^2+y^2 = 1$, tenemos $\lambda_n(x,y) \in A$, pues $|\lambda_n||(x,y)| = \lambda_n \in (0,1)$ y

$$\lim \lambda_n(x,y) = (x,y) \Rightarrow (x,y) \in \overline{A}.$$

Para el punto $(0,0)$ basta darse cuenta que

$$B_r(0,0) \cap A = B_{\min\{1,r\}}(0,0) - \{(0,0)\},$$

que no es vacío, al ser una bola de $\mathbb{R}^2$ (que es un conjunto infinito) menos un punto.

(b) El conjunto $\mathbb{R} \times (-1,1)$ es abierto pues

$$\mathbb{R} \times (-1,1) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n) \times (-1,1) \in \tau_u.$$

Por tanto, $int(B) \supset \mathbb{R} \times (-1,1)$. Veamos que es una igualdad. Para $(x,1) \in B$, dado $B_r(x,1)$, entonces esta bola no está contenida en B ya que $(x, 1+r/2) \in B_r(x,1)$ pero $(x, 1+r/2) \notin B$. Esto prueba que $(x,1)$ no es interior. Del mismo modo se hace para los punto $(x,-1)$.

Para la adherencia, y haciendo un razonamiento como en el caso A (seguimos la misma notación), se tendría $-1 \leq y_n \leq 1$. Tomando límites, $-1 \leq y \leq 1$, es decir, $\overline{B} \subset B$, obteniendo pues, la igualdad.

3. *En $\mathbb{R}^2$, consideramos la familia $\beta = \{(a,b) \times \{c\} : a < b, a, b, c \in \mathbb{R}\}$.*

(a) *Probar que β es base de abiertos de una topología τ en $\mathbb{R}^2$.*

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(x,y) \in (x-1, x+1) \times \{y\} \in \beta$, probando que $\mathbb{R}^2 = \cup_{B\in\beta} B$.

Por otro lado, sean $B_1 = (a,b) \times \{c\}$, $B_2 = (a',b') \times \{c'\}$ y $(x,y) \in B_1 \cap B_2$. En particular, $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Esto prueba que $c = c'$. Entonces tomamos

$$B_3 = B_1 \cap B_2 = (\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}) \times \{c\}.$$

(b) *Comparar τ con τ_u.*

Tomamos como base de τ_u el producto de intervalos abiertos. Entonces dado $B \in \beta_u$ y $(x, y) \in B$, con $B = (a, b) \times (c, d)$, tomamos $B' = (a, b) \times \{y\}$, teniendo $(x, y) \in B' \subset B$. Esto prueba que $\tau_u \subset \tau$.

La otra inclusión no es cierta, pues dado $B' = (0, 2) \times \{0\}$ y $(1, 0) \in B'$, si $\tau \subset \tau_u$ existiría $(a, b) \times (c, d) \in \beta_u$ tal que

$$(1, 0) \subset (a, b) \times (c, d) \subset B' = (0, 2) \times \{0\}.$$

En particular, $(c, d) \subset \{1\}$, una contradicción ya que el intervalo (c, d) tiene infinitos puntos.

(c) *Dado $C = \{0\} \times \mathbb{R}$, estudiar cuál es la topología relativa $\tau_{|C}$ y si es conocida.*

Una base de $\tau_{|C}$ es $\beta_{|C} = \{B \cap C : B \in \beta\}$. La intersección de B con C o es vacío o es un punto. Concretamente, dicha base tiene al menos las siguientes intersecciones:

$$\{((-1, 1) \times \{y\}) \cap C = \{(0, y)\} : y \in \mathbb{R}\}.$$

Esto prueba que los puntos de C son abiertos y así, $\tau_{|C}$ es la topología discreta.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1

– Grado en Matemáticas –

Curso 2011/12

<u>**Nombre**</u>:

Razonar todas las respuestas

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Probar que $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$ es una base de τ.

   (b) Si $B \subset X$, hallar el interior y la adherencia de B.

   (c) ¿Qué topología conocida es $\tau_{|A}$?

2. Para $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología en X. Hallar una base de entornos para $x \in X$ con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

3. Sea $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$ con la topología usual.

   (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(2, 3)$ son abiertos o cerrados en A.

   (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $(0, 1)$.

   (c) Probar que $\{\{5\}\}$ es una base de entornos de $x = 5$ en A.

Soluciones

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Probar que $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$ es una base de τ.

   Los conjuntos son abiertos ya que contienen a O. Por otro lado, si $O \in \tau$ y $x \in O$, entonces $\{x\} \cup A \subset O$ ya que $A \subset O$. Por tanto, $x \in \{x\} \cup A \subset O$.

   (b) Si $B \subset X$, hallar el interior y la adherencia de B.

   El interior de B es el mayor conjunto abierto dentro de B. En particular, $int(B) \subset A$. Si $B \supset A$, entonces B es abierto y coincide con su interior. En caso contrario, $int(B) = \emptyset$ ya que si no, $A \subset int(B) \subset B$, lo cual no es posible.

   Los conjuntos cerrados F son aquéllos tales que $A \subset X - F$ o $F = X$, es decir, $F \subset X - A$ o $F = X$. Ya que $\overline{B}$ es el menor cerrado que contiene a B, si $B \subset X - A$, entonces $\overline{B} = B$. En caso contrario, es decir, si $B \not\subset X - A$, entonces $\overline{B} = X$.

   (c) ¿Qué topología conocida es $\tau_{|A}$?

$$\tau_{|A} = \{O \cap A; O \in \tau\} \cup \{\emptyset\} = \{A\} \cup \{\emptyset\}.$$

   Por tanto, $\tau_{|A}$ es la topología trivial de A.

2. Para $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología en X. Hallar una base de entornos para $x \in X$ con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

   A los abiertos de la primera familia los llamaremos del primer tipo y los de la segunda, del segundo tipo. El conjunto vacío está en τ por definición y por otro lado, X pertenece al del segundo tipo.

   Sea $\{O_i\}_{i \in I} \subset \tau$. Si alguno de los abiertos, llamado O_{i_0}, es del segundo tipo, entonces

$$(-1, 1) \subset O_{i_0} \subset \cup_{i \in I} O_i,$$

luego la unión es del segundo tipo. En caso contrario, es decir, si todos son del primer tipo, entonces ningún abierto contiene a $x = 0$ y menos aún, la unión de todos.

Sea $O_1, O_2 \in \tau$. Es evidente que si los dos son del primer tipo, la intersección no contiene a $x = 0$; que si los dos son del segundo tipo, ambos contienen a $(-1, 1)$, y por tanto, también la intersección. Finalmente, si O_1 es del primer tipo y O_2 del segundo, entonces $0 \notin O_1$ y por tanto, $0 \notin O_1 \cap O_2$.

Una base de entornos de x es:

$$\beta_x = \begin{cases} \{(-1,1)\} & \text{si } x = 0 \\ \{\{x\}\} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Es evidente que en ambos casos, los conjuntos son abiertos, luego entornos de todos sus puntos. Por otro lado, si U es un entorno de 0, existe $O \in \tau$ tal que $0 \in O \subset U$. Entonces O contiene al 0, luego tiene que ser del segundo tipo, en particular, $(-1, 1) \subset O$, probando que $0 \in (-1, 1) \subset U$. Si $x \neq 0$ y U es un entorno suyo, entonces $x \in \{x\} \subset U$.

El conjunto $(0, 1]$ es abierto porque no tiene a $x = 0$. Veamos si 0 es interior a A. En tal caso, $(-1, 1) \subset A$, ya que $(-1, 1)$ es el elemento de la base de entornos de $x = 0$. Como esto no es posible, $int(A) = (0, 1]$. Para la adherencia, si $x \notin A$, entonces $x \neq 0$, luego $\{x\} \cap A = \emptyset$ y así no es adherente. Esto dice que $\overline{A} = A$ (también A es cerrado ya que su complementario, que es $[-1, 0)$, es abierto (del primer tipo)).

3. Sea $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$ con la topología usual.

   (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(2, 3)$ son abiertos o cerrados en A.

   El conjunto $\{5\}$ es abierto y cerrado en A ya que $\{5\} = (4, 6) \cap A = [4, 6] \cap A$ y $(4, 6)$ y $[4, 6]$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$, respectivamente.
   El conjunto $(2, 3)$ es abierto y cerrado en A ya que $(2, 3) = (2, 3) \cap A = [2, 3] \cap A$ y $(2, 3)$ y $[2, 3]$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$, respectivamente.

   (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $(0, 1)$.

   El conjunto $(0, 1)$ es abierto en A: $(0, 1) = (0, 1) \cap A$, luego coincide con su interior. Por otro lado, $[0, 1)$ es cerrado en A ya que $[0, 1) = [0, 1] \cap A$ y $[0, 1]$ es cerrado de $\mathbb{R}$. En particular, la adherencia de $(0, 1)$ en A está contenida en $[0,1)$. Finalmente, $x=0$ es adherente a A ya que una base de entornos de 0 en A es $\{[0,\epsilon); 0<\epsilon<1\}$ pues $[0,\epsilon)=(-\epsilon,\epsilon)\cap A$ y $\{(-\epsilon,\epsilon); 0<\epsilon<1\}$ es una base de entornos de $x=0$ en $\mathbb{R}$. Por tanto la adherencia del conjunto es $[0,1)$.

(c) Probar que $\{\{5\}\}$ es una base de entornos de $x=5$ en A.

Ya se ha visto que $\{5\}$ es un abierto en A, luego un entorno de $x=5$ en A. Como todo entorno de 5 en A debe contener a $x=5$, en particular, $\{5\}$ está contenido en dicho entorno. Otra forma es: una base de entornos de $x=5$ en la topología usual de $\mathbb{R}$ es $\{(5-\epsilon,5+\epsilon); 0<\epsilon<1\}$. Por tanto, una base de entornos de 5 en A es

$$\{(5-\epsilon,5+\epsilon)\cap A; 0<\epsilon<1\}=\{\{5\}\}.$$

Examen Tema 1 2011

① En $\mathbb{N}$ se considera $T = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \dots\}$. Probar que es una topología. Hallar el interior y la adherencia de $A = \{\text{Números pares}\}$ y $B = \{4, 6\}$.

1) $\emptyset \in T$, $\mathbb{N} = A_1 \in T$

2) $\underset{T}{\underset{\cap}{A_n}} \cap \underset{T}{\underset{\cap}{A_m}} = \underset{T}{\underset{\cap}{A_{\max\{n,m\}}}}$

3) $\bigcup_{i \in I} \underset{T}{\underset{\cap}{A_{n_i}}} = \underset{T}{\underset{\cap}{A_{\min\{n_i : i \in I\}}}}$

$\Rightarrow$ T es una topología y la familia de cerrados es $C_T = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, \dots, n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ningún conjunto A_n está incluido en $A \Rightarrow \operatorname{int}(A) = \emptyset$.

El único cerrado que contiene a A es $\mathbb{N} \Rightarrow \bar{A} = \mathbb{N}$.

Ningún conjunto está incluido en $B \Rightarrow \operatorname{int}(B) = \emptyset$.

El cerrado más pequeño que contiene a B es $\{1, \dots, 6\} \Rightarrow \bar{B} = \{1, \dots, 6\}$.

② En $\mathbb{R}$ se considera la topología T que tiene por base $\mathcal{B} = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Probar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, +\infty)\}$ es una base de entornos de x. Hallar la adherencia de $\{-1, 1\}$.

Como el conjunto $[x, +\infty)$ es un abierto que contiene a x, entonces es un entorno suyo. Por otro lado, sea U un entorno de x. Entonces, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a, +\infty) \subset U$. En particular, $a \leq x$ y, por tanto, $[x, +\infty) \subset [a, +\infty)$.

Los conjuntos cerrados son, aparte de los triviales, los de la forma $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$. Por tanto, $\overline{\{-1,1\}} = (-\infty, 1]$.

③ En $\mathbb{R}$ se considera la topología T del punto incluido para $p = 0$. Se considera $A = [0,2]$ y $B = (1,2)$. Hallar ∂A. Probar que $T_{|B}$ es la topología discreta en B.

Como A contiene al 0, A es un abierto de $T \Rightarrow \text{int}(A) = A$.

Mayor abierto que contiene a A

Tenemos que $\bar{A} = \mathbb{R}$

Por tanto, $\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}(A) = \mathbb{R} \setminus A$.

Dado $b \in B$, $\{b\} = B \cap \{0, b\}$. Por tanto, $\{b\} \in T_{|B}$. Como todo punto es abierto, la topología correspondiente es la discreta.

TOPOLOGÍA. Examen del Parcial 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -
Curso 2010/11

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto fijo. Se define $\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que τ es una topología en X. Para cada $x \in X$, probar que $\beta_x = \{\{x\} \cup A\}$ es una base de entornos de x en (X, τ). Dado $B \subset X$, hallar $\text{int}(B)$ y $\overline{B}$.

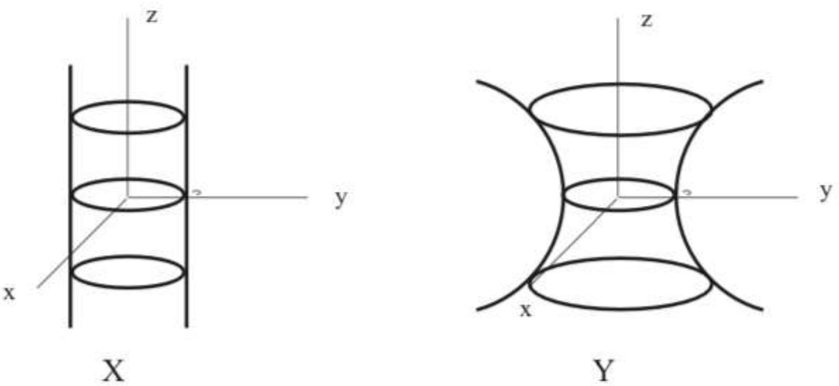
2. En $\mathbb{R}^3$ se considera el cilindro $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ y el hiperboloide reglado $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (ver figura). Hallar explícitamente un homeomorfismo entre ambos conjuntos.

3. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau)$, $g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$ dadas por

$$f(n) = (n^2, n+1), \qquad g(n,m) = n + m.$$

4. Estudiar conexión, componentes conexas y conexión local del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(1, \frac{1}{n})\}$.

Todas las preguntas valen lo mismo.



1. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto fijo. Se define $\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que τ es una topología en X. Para cada $x \in X$, probar que $\beta_x = \{\{x\} \cup A\}$ es una base de entornos de x en (X, τ). Dado $B \subset X$, hallar $\text{int}(B)$ y $\overline{B}$.

   Solución.

   (a) Como $X \supset A$, entonces $X \in \tau$. Por otro lado, si dos conjuntos contienen a A, lo mismo sucede con su intersección; y si una familia de conjuntos contienen a A, su unión también contiene a A. Esto prueba que τ es una topología.

   (b) El conjunto $\{x\} \cup A$ es una abierto (contiene a A), luego es un entorno de x. Si U es un entorno de x, entonces existirá $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Como O es abierto, contiene a A, y como $x \in \emptyset$, entonces $\{x\} \cup A \subset O$.

   (c) El interior de B es el mayor abierto dentro de B. Si $A \not\subset B$, entonces $int(B) = \emptyset$. Si $A \subset B$, entonces B es un abierto y su interior coincide con B.
   Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces todo punto x es adherente a B, ya que $(\{x\} \cup A) \cap B \supset A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $\overline{B} = X$. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{B} = B$, ya que si $x \notin B$, $(\{x\} \cup A) \cap B = \emptyset$.

2. En $\mathbb{R}^3$ se considera el cilindro $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ y el hiperboloide reglado $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (ver figura). Hallar explícitamente un homeomorfismo entre ambos conjuntos.

   Solución. Se define la aplicación $f : X \to Y$ mediante

$$f(x, y, z) = \left(x\sqrt{1 + z^2}, y\sqrt{1 + z^2}, z\right).$$

   Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$g(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z\right).$$

   Tanto f como g son aplicaciones continuas, sin más que componer con las proyecciones de $\mathbb{R}^3$.

3. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n + 1, \ldots\}$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau)$, $g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$ dadas por

$$f(n) = (n^2, n + 1), \qquad g(n, m) = n + m.$$

   Solución.

   (a) Como f llega a un espacio producto, componemos con las proyecciones. Con la primera, $p \circ f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$, $f(n) = n^2$. Esta aplicación es continua, pues

$$(p \circ f)^{-1}(A_n) = \{m \in \mathbb{N}; m^2 \geq n\} = \begin{cases} \{m \in \mathbb{N}; m \geq E[\sqrt{n}]\} = A_{E[\sqrt{n}]} & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \{m \in \mathbb{N}; m \geq E[\sqrt{n}] + 1\} = A_{E[\sqrt{n}]+1} & \text{si } \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

   Para la segunda proyección p', $p' \circ f$ es continua, pues

$$(p' \circ f)^{-1}(A_n) = A_{n-1}.$$

(b) La aplicación g es continua. Una base de entornos de n es $\beta_n = \{A_n\}$. Una base de entornos de (n,m) en $\tau \times \tau$ es $A_n \times A_m$. Finalmente, $g(A_n \times A_m) \subset A_{(n+m)}$.

4. Estudiar conexión, componentes conexas y conexión local del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(1, \frac{1}{n})\}$.

Solución. Las componentes conexas de X son $[0,1] \times \{0\}$ y los puntos $(1, \frac{1}{n})$. Para ello, cada uno de los conjuntos son conexo, ya que el primero es convexo (también es homeomorfo a $[0,1]$) y los otros son puntos. Veamos que son los conexos más grandes. Sea $(0,0) \in [0,1] \times \{0\}$ y supongamos que $[0,1] \times \{0\} \subsetneq C_{(0,0)}$. Entonces existirá $(1, \frac{1}{n}) \in C_{(0,0)} - ([0,1] \times \{0\})$. Sea $y_0 = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})/2$. Se tendría la siguiente descomposición en abiertos de $C_{(0,0)}$:

$$C_{(0,0)} = (C_{(0,0)} \cap \{(x,y); y < y_0\}) \cup (C_{(0,0)} \cap \{(x,y); y > y_0\})$$

la cual no es trivial, pues en el primer conjunto está $(0,0)$ y en el segundo $(1, 1/n)$. Esta contradicción prueba que $[0,1] \times \{0\}$ es una componente conexa.

Sea ahora $(1, 1/n)$ y supongamos que $\{(1, 1/n)\} \subsetneq C_{(1,1/n)}$. Entonces existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1, 1/m) \in C_{(1,1/n)}$ (no puede ser de la forma $(x,0)$, ya que $C_{(x,0)} = C_{(0,0)}$). Sin perder generalidad, supongamos que $m > n$. Usando la notación anterior, tendríamos una partición no trivial de $C_{(1,1/n)}$:

$$C_{(1,1/n)} = (C_{(1,1/n)} \cap \{(x,y); y < y_0\}) \cup (C_{(1,1/n)} \cap \{(x,y); y > y_0\}),$$

lo cual es una contradicción.

El espacio no es localmente conexo, ya que el punto $p := (1,0)$ no tiene ningún entorno conexo. Sea U tal entorno. Entonces existirá $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap X \subset U$. Es evidente que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1, 1/n) \in B_r(p) \cap X \subset U$. Si U es conexo, entonces

$$U \subset C_p = [0,1] \times \{0\},\ U \subset C_{(1,1/n)} = \{(1, 1/n)\} :$$

contradicción.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1

- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -

Curso 2010/11

Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. En $\mathbb{N}$ se considera $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que es una topología. Hallar el interior y adherencia de $A = \{\text{números pares}\}$ y $B = \{4, 6\}$.

2. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\beta_x = \{[x, \infty)\}$ es una base de entornos de x. Hallar la adherencia de $(0, 1)$.

3. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ del punto incluido para $p = 0$. Sean $A = [0, 2]$ y $B = (1, 2)$. Hallar $Fr(A)$. Probar que $\tau_{|B}$ es la topología discreta en B.

1. En $\mathbb{N}$ se considera $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que es una topología. Hallar el interior y adherencia de $A = \{\text{números pares}\}$ y $B = \{4, 6\}$.

   Solución:

   (a) $\mathbb{N} = A_1$. Por otro lado, $A_n \cap A_m = A_{\max\{n,m\}}$ y

   $$\cup_{i\in I} A_{n_i} = A_{\min\{n_i; i\in I\}}.$$

   Como consecuencia, la familia de cerrados es

   $$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, \ldots, n\}; n \in \mathbb{N}\}.$$

   (b) Ningún conjunto A_n está incluido en A, luego su interior es vacío. El único cerrado que contiene a A es $\mathbb{N}$, luego su adherencia es $\mathbb{N}$.

   (c) Ningún conjunto A_n está incluido en B, luego su interior es el vacío. El cerrado más pequeño que lo contiene es $\{1, \ldots, 6\}$.

2. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\beta_x = \{[x, \infty)\}$ es una base de entornos de x. Hallar la adherencia de $\{-1, 1\}$.

   Solución: Como el conjunto $[x, \infty)$ es un abierto que contiene a x, es un entorno suyo. Por otro lado, sea U un entorno de x. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a, \infty) \subset U$. En particular, $a \leq x$ y por tanto, $[x, \infty) \subset [a, \infty)$.

   Los conjuntos cerrados son, aparte de los triviales, los de la forma $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$. Por tanto la adherencia es $(-\infty, 1]$.

3. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ del punto incluido para $p = 0$. Se considera $A = [0, 2]$ y $B = (1, 2)$. Hallar $Fr(A)$. Probar que $\tau_{|B}$ es la topología discreta en B.

   Solución:

   Como A contiene al 0, es abierto. Como $ext(A) = int(\mathbb{R} - A)$, entonces es vacío. Por tanto, la frontera es $\mathbb{R} - A$.

   Dado $b \in B$, $\{b\} = B \cap \{0, b\}$. Por tanto, $\{b\}\tau_{|B}$. Como todo punto es abierto, la topología correspondiente es la discreta.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1

- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2008/09

Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $X = [-1, 1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1, 1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

2. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.

3. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$ dos subconjuntos no triviales. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. ¿Qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X? Sea $p \in X$. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1

- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2008/09

Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $X = [-1,1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1,1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0,1]$.

   Solución: Es evidente que la unión de todos los elementos de β es $[-1,1]$. Incluso menos, pues $[-1,1] = \{-1\} \cup \{1\} \cup (-1,1)$. . Por otro lado, si $B_1, B_2 \in \beta$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, es porque uno es $B_1 = \{x\}$, $x \neq 0$ y el otro es $B_2 = (-1,1)$. Ya que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces $B_1 \cap B_2 = B_1$, luego la segunda propiedad de bases es evidente.

   Para calcular el interior de A estudiamos el mayor abierto dentro de A. Es evidente que $\cup_{x\in(0,1]}\{x\} = (0,1]$ es un abierto incluido en A. Veamos que $0 \notin int(A)$. En tal caso, existiría $B \in \beta$ tal que $0 \in B \subset A$. Como $0 \in B$, entonces $B = (-1,1)$ pero $(-1,1) \not\subset [0,1]$. Esto quiere decir que 0 no es interior. Como consecuencia $int(A) = (0,1]$.

   Por otro lado, $[-1,1] - A = [-1,0) = \cup_{x\in[-1,0)}\{x\}$, entonces $[-1,1] - A$ es abierto, es decir, A es cerrado. Por tanto $\overline{A} = A$.

2. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.

   Solución: Una base de entornos para cada $x \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es $\beta_x = \{(x-r, x+r); 0 < r < 1\}$. Por tanto, una base de entornos de $n \in \mathbb{Z}$ es

   $$\beta_n^{\mathbb{Z}} = \{(n-r, n+r) \cap \mathbb{Z}; 0 < r < 1\} = \{\{n\}\}.$$

   Se sabe entonces que la topología es la discreta.

   En el conjunto A, un base de entornos de 0 es

   $$\beta_0^A = \{(-r, r) \cap A; r > 0\}.$$

   Si la topología fuera la discreta, el conjunto $\{0\}$ sería abierto en A, y por tanto, 0 sería interior en $\{0\}$. En tal caso, existiría $r > 0$ tal que

   $$(-r, r) \cap A \subset \{0\}.$$

   Pero el conjunto de la izquiera tiene más de un punto, puesto que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$.

3. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$ dos subconjuntos no triviales. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. ¿Qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X? Sea $p \in X$. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.

Solución: Se tiene que $A \cup B \in \tau$ y que $A \cap B \in \tau$, es decir,

$$A \cup B \in \{\emptyset, X, A, B\}, \qquad A \cap B \in \{\emptyset, X, A, B\}.$$

Las posibilidades son entonces:

(a) $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, es decir, A y B son complementarios uno del otro.

(b) $A \cup B = A$, es decir, $B \subset A$, entonces $A \cap B = B \in \tau$.

(c) $A \cup B = B$, es decir, $A \subset B$, entonces $A \cap B = A \in \tau$.

Para hallar el interior y la adherencia de C usamos las caracterizaciones que nos dicen que el interior es el mayor conjunto abierto en C y la adherencia es el menor cerrado que contiene a C. Para cada una de las anteriores topologías, tenemos

(a) En este caso, $\mathcal{F} = \tau$. Supongamos que $p \in A$. Entonces $int(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq A$ o $int(C) = \{p\}$ si $A = \{p\}$. En cualquiera de los dos casos, $\overline{C} = A$. Si $p \in B$, el razonamiento es análogo, cambiando A por B.

(b) Supongamos que $B \subset A$.

   i. Si $p \in B$, entonces $int(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq B$ o $int(C) = \{p\}$ si $B = \{p\}$. En cualquier caso, $ext(C) = \emptyset$.

   ii. Si $p \in A - B$, entonces $int(C) = \emptyset$ y $ext(C) = B$.

   iii. Si $p \in X - A$, entonces $int(C) = \emptyset$ y $ext(C) = A$.

(c) Este caso es análogo al anterior, cambiando A por B.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Topología I (grupo B)
Grado en Matemáticas. Curso 2022-2023
Ejercicio de evaluación del tema 2

Ejercicio 1 (3p). Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología T tal que la familia $\mathcal{B} = \{(-r, r) \,/\, r > 0\}$ es una base de T. Se define la aplicación $f : (\mathbb{R}, T) \to (\mathbb{R}, T_S)$, donde $f(x) = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$ y $(\mathbb{R}, T_S)$ es la recta de Sorgenfrey. ¿Es f continua? ¿Es f cerrada?

Ejercicio 2 (3p). Sea (X, T) un espacio topológico. Definimos el conjunto diagonal de X como:

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \,/\, y = x\}.$$

Probar que (X, T) es discreto si y sólo si Δ_X es un subconjunto discreto en $(X \times X, T \times T)$.

Ejercicio 3 (4p). Tomemos el cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = 1,\ z \in [-1, 1]\}$ y la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,/\, u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$. Se define $f : (C, T_{u|C}) \to (\mathbb{S}^2, T_{u|\mathbb{S}^2})$ como:

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{1 - z^2}\; x, \sqrt{1 - z^2}\; y, z\right), \quad \forall\, (x, y, z) \in C.$$

a) Probar que f es una identificación.

b) Deducir que $(C/R, T_{u|C}/R) \cong (\mathbb{S}^2, T_{u|\mathbb{S}^2})$, donde R es la relación en C dada por:

$$(x, y, z)\, R\, (x', y', z') \Longleftrightarrow (x, y, z) = (x', y', z') \ \text{ o } \ z = z' \in \{-1, 1\}.$$

Granada, 1 de diciembre de 2022