3. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Encontrar el test más potente de tamaño α para resolver el problema de contraste

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$
$$H_1 : \lambda = \lambda_1$$

Aplicación: En una centralita telefónica el número de llamadas por minuto sigue una distribución de Poisson. Si en cinco minutos se han recibido 12 llamadas, ¿puede aceptarse que el número medio de llamadas por minuto es 1.5, frente a que dicho número es 2, al nivel de significación 0.05? Calcular la potencia del test obtenido.

$X \sim P(\lambda)$

Lema N P

$$\varphi(x_1 \_ x_n) = \begin{cases} 1 & f_1^n > k f_0^n \\ \gamma & f_1^n = k f_0^n \\ 0 & f_1^n < k f_0^n \end{cases}$$

$$\lambda(x_1 \_ x_n) = \frac{f_1^n(x_1 \_ x_n)}{f_0^n(x_1 \_ x_n)} = \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\Sigma x_i} \cancel{\prod x_i}}{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\Sigma x_i} \cancel{\prod x_i}} \quad \neq 0$$

$$= e^{n\lambda_0 - n\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\Sigma x_i}$$

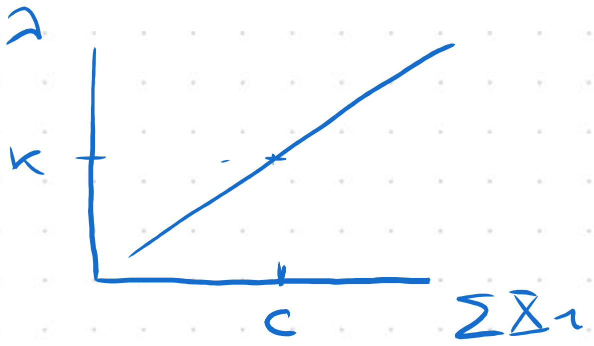
$$\varphi(x_1 \_ x_n) = \begin{cases} 1 & e^{n\lambda_0 - n\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\Sigma x_i} > k \\ \gamma & e^{n\lambda_0 - n\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\Sigma x_i} = k \\ 0 & e^{n\lambda_0 - n\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\Sigma x_i} < k \end{cases}$$

$$\log \lambda = n\lambda_0 - n\lambda_1 + y \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$\boxed{\lambda_1 > \lambda_0}$ $\quad \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 0$

$\Rightarrow \lambda$ creciente en función de ΣX_i



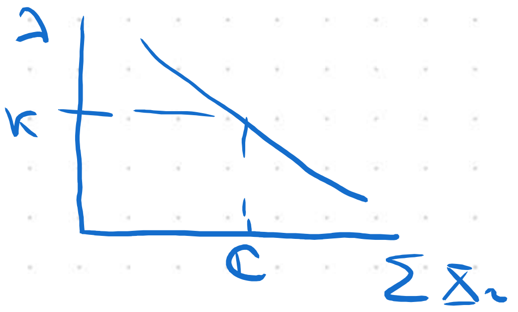
$$\varphi(X_1 \ldots X_n) = \begin{cases} 1 & \sum X_i > c \\ \gamma & \sum X_i = c \\ 0 & \sum X_i < c \end{cases} \qquad Y = \sum X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$$

$$\alpha = \beta_\varphi(\lambda_0) = E_{\lambda_0}(\varphi(X_1 \ldots X_n)) =$$

$$P_{\lambda_0}[\sum X_i > c] + \gamma\, P_{\lambda_0}[\sum X_i = c]$$

$\boxed{\lambda_1 < \lambda_0}$ $\quad \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 0$

$\Rightarrow \lambda$ decrece en función de $\sum X_i$



$$\varphi(X_1 \ldots X_n) = \begin{cases} 1 & \sum X_i < c \\ \gamma & \sum X_i = c \\ 0 & \sum X_i > c \end{cases}$$

$$\alpha = \beta_\varphi(\lambda_0) = P_{\lambda_0}[\sum X_i < c] + \gamma\, P_{\lambda_0}[\sum X_i = c]$$

X = "nº llamadas por minuto" $\quad X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Se han recibido 12 llamadas en 5 minutos

$\Rightarrow \sum x_i = 12$

$\alpha = 0'05 \qquad \lambda_0 = 1'5 \qquad \lambda_1 = 2$

$\alpha = P_{\lambda_0}[\sum X_i > c] + \gamma P_{\lambda_0}[\sum X_i = c]$ $\quad Y \sim P(5\lambda_0)$

$0'05 = P_{1'5}[Y > c] + \gamma P_{1'5}[Y = c]$ $\quad = P(7'5)$

$c = 12 \quad P_{1'5}[Y > 12] = 0'0427$

$P_{1'5}[Y > 11] > 0'05$

$\Rightarrow 0'05 = 0'0427 + \gamma\, 0'0366$

$\Rightarrow \gamma = 0'199454$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} 1 & \sum X_i > 12 \\ \gamma & \sum X_i = 12 \\ 0 & \sum X_i < 12 \end{cases}$$

No se puede aceptar sin más

Potencia

$\beta_\varphi(2) = P_2[Y > 12] + \gamma P_2[Y = 12]$

$= 0'227408$

8. Sea X una observación de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

Construir el test de razón de verosimilitudes de tamaño α arbitrario para contrastar

$\Theta_0 = \{\theta_0\}$ $\quad H_0 : \theta = \theta_0$ $\quad \Theta = (0, \theta_0]$

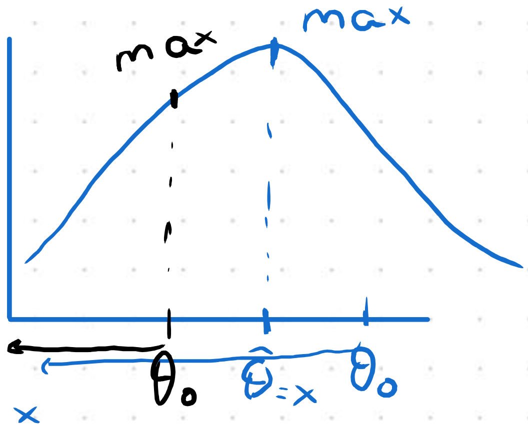
$\Theta_1 = (0, \theta_0)$ $\quad H_1 : \theta < \theta_0.$

Calculamos primero la función de verosimilitud.

$L_x(\theta) = f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$

$\log L_x(\theta) = -\log\theta - \frac{x}{\theta}$

$\frac{\partial \log L_x(\theta)}{\partial(\theta)} = \frac{-\theta}{\theta^2} + \frac{x}{\theta^2} = 0 \iff \hat{\theta} = x \quad (\iff x \leq \theta_0)$



$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_1} L_x(\theta)} = \frac{L_x(\theta_0)}{\sup_{\theta\in(0,\theta_0)} L_x(\theta)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{L_x(\theta_0)}{L_x(\hat{\theta})} = \dfrac{\frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}}{\frac{1}{x} e^{-1}} = \dfrac{x}{\theta_0} e^{1-\frac{x}{\theta_0}} & x < \theta_0 \\ 1 & x \geq \theta_0 \end{cases}$$

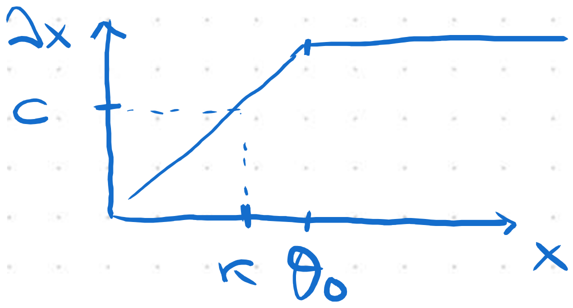
$$\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta_0} e^{1-\frac{x}{\theta_0}} & x < \theta_0 \\ 1 & x \geq \theta_0 \end{cases}$$

$$\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \lambda(\underline{X}) < c \\ 0 & \lambda(\underline{X}) \geq c \end{cases}$$

Veamos como se comporta $\lambda(x)$ respecto a x, recordando que $x < \theta_0$

$$g(x) = \frac{x}{\theta_0} e^{1-\frac{x}{\theta_0}} \qquad \log g(x) = \log x - \log\theta_0 + 1 - \frac{x}{\theta_0}$$

$$\frac{\partial \log g(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\theta_0} = \frac{\theta_0 - x}{x\theta_0} > 0 \quad \left(x < \theta_0 \quad x\theta_0 > 0\right)$$



$$\boxed{k \leq \theta_0}$$

El testo por tanto es equivalente al siguiente

$$\varphi'(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \underline{X} < k \\ 0 & \underline{X} \geq k \end{cases}$$

Impongo ahora $\alpha =$ tamaño

$$\alpha = \text{tamaño} = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\varphi'}(\theta) = \beta_{\varphi'}(\theta_0)$$

$$= E_{\theta_0}(\varphi'(\underline{X})) = P_{\theta_0}[\overline{X} < k]$$

$$\alpha = \int_0^k \frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0} dx = \left[-e^{-x/\theta_0} \right]_0^k$$

$$\alpha = 1 - e^{-k/\theta_0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-k/\theta_0} = 1 - \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-k}{\theta_0} = \ln(1-\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \quad k = -\theta_0 \ln(1-\alpha) \leq \theta_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\ln(1-\alpha) \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} \leq e \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{e} \leq 1 - \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\alpha \leq 1 - \frac{1}{e}}$$

Por tanto este test solo vale si

$$\alpha \leq 1 - \frac{1}{e} \approx 0'6321$$

Lo cual es más que suficiente