# CuestionarioT4T5.pdf

Esfacilverque21

Inferencia Estadística

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

1) Sea $(X_1,\dots,X_n)$ m.a.s de una var. al. $X$ con función $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$ y $\theta>0$. Sabiendo que la fam. de distrib de $X$ es regular, con $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Elija la opción correcta:

a) El UMVUE de $\theta^2$, si existe, es eficiente.

b) La única función paramétrica con estim. efic. es $\frac{-1}{\theta}$.

c) Sea $n=1$ y $U(X)$ insesgado en $\frac{-1}{\theta}$. Si $E[U(X)\ln(X)] = \frac{1}{\theta^2}$ $\Rightarrow$ $U(X)$ es regular.

d) $\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i^2)$ es efic para $\frac{-2n}{\theta}$.

a) F

- No tiene por qué, ya que UMVUE $\not\Rightarrow$ Eficiente.

b) F

- No, porque si $-\frac{1}{\theta}$ tuviese estim efic $\Rightarrow$ $\forall a\neq 0$, $\forall b\in\mathbb{R}$, $-\frac{a}{\theta}+b$ tendría estim. efic

Luego, no es la única func. param. que tiene estim. efic.

c) F

*) Como $U(X)$ insesg. en $-\frac{1}{\theta}$ $\Rightarrow$ $E_\theta[U(X)] = -\frac{1}{\theta}$

*) Compruebo condición de regularidad:

- $\underline{\dfrac{\partial E_\theta[U(X)]}{\partial\theta} = \dfrac{1}{\theta^2}}$

- $\underline{E_\theta\left[U(X)\dfrac{\partial \ln(f_\theta(x))}{\partial\theta}\right]} = E_\theta\left[U(X)\dfrac{\partial(\ln\theta + (\theta-1)\ln(x))}{\partial\theta}\right] = E_\theta\left[U(X)\left(\frac{1}{\theta}+\ln(X)\right)\right] = E_\theta\left[U(X)\frac{1}{\theta} + U(X)\ln(X)\right] =$

$= \frac{1}{\theta}E_\theta[U(X)] + E_\theta[U(X)\ln(X)] = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \underline{0}$

- Como $E_\theta\left[U(X)\dfrac{\partial\ln(f_\theta(x))}{\partial\theta}\right] \neq \dfrac{\partial E_\theta[U(X)]}{\partial\theta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{U(X) \text{ no es regular.}}$

d) V

*) Para verlo, voy a usar el T$^{a}$ de caract de estim efic:

*) Tomo $g(\theta) = \frac{-2n}{\theta}$ y supongo cierto ii):

$I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta)\, g'(\theta) \Rightarrow \frac{n}{\theta^2} = a(\theta)\frac{2n}{\theta^2} \Rightarrow a(\theta) = \frac{1}{2} \neq 0$

*) Compruebo que se cumple i):

- $a(\theta)[T(X_1,\dots,X_n) - g(\theta)] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i^2) + \frac{2n}{\theta}\right] = \underline{\frac{1}{2}\left[2\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + \frac{2n}{\theta}\right]}$

- $\dfrac{\partial\ln(f_\theta^n(x))}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\left(n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\right)}{\partial\theta} = \underline{\dfrac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)} =$

- Luego, $T \equiv \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i^2)$ es efic para $\frac{-2n}{\theta}$

② Sea $(X_1,\dots,X_n)$ m.a.s de $X$ con $f_\theta(x) = \theta/(1+x)^{1+\theta}$, $x>0$ y $\theta>0$. Sabiendo que la fam. de dist. de $X$ es regular y que $E_\theta[\ln(X+1)] = 1/\theta$ y $Var_\theta[\ln(X+1)] = 1/\theta^2$. Entonces, la cota de FCR para la varianza de estim reg insesg en $\theta^2$ es:

a) $\frac{4\theta^4}{n}$ y no es alcanzable.

b) $\frac{2\theta^4}{n}$ y no es alcanzable.

c) $\frac{4\theta^4}{n}$ y es alcanzable.

d) $\frac{2\theta^4}{n}$ y es alcanzable.

*) Tomo $g(\theta)=\theta^2$. Calculo $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$:

- $I_X(\theta) = Var_\theta\left[\frac{\partial \ln(f_\theta(X))}{\partial\theta}\right] = Var_\theta\left[\frac{\partial(\ln\theta - (1+\theta)\ln(1+X))}{\partial\theta}\right] = Var_\theta\left[\frac{1}{\theta} - \ln(1+X)\right] = Var_\theta[\ln(1+X)] = \frac{1}{\theta^2}$

-Luego, $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$

*) Entonces, sea $T \equiv T(X_1,\dots,X_n)$ estad. regular de 2º orden insesg en $g(\theta)=\theta^2$, entonces:

- $Var_\theta(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)} = \frac{(2\theta)^2}{n/\theta^2} = \frac{4\theta^4}{n} \Rightarrow \boxed{\text{b) y d) falsas}}$

⊛ La cota será alcanzable si T es eficiente

*) Como T es regular $\xrightarrow{\text{T}^{\text{a}}\text{ caract de estim. efic}}$ $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta)g'(\theta) \Rightarrow \frac{n}{\theta^2} = a(\theta)2\theta \Rightarrow a(\theta) = \frac{n}{2\theta^3} \neq 0$, $\forall\theta\in\Theta$

* Impongo i) del Teorema:

- $f_\theta^n(x) = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^n(1+x_i)\right)^{\theta+1}} \Rightarrow \ln(f_\theta^n(X)) = n\ln\theta - (\theta+1)\sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) \xRightarrow{\text{deriv resp }\theta} \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln(1+X_i)$

- $a(\theta)[T - g(\theta)] = \frac{2}{n\theta^3}[T-\theta^2] = \frac{2T}{n\theta^3} - \frac{2}{n\theta}$

$\xRightarrow{\text{i)}}$

$\Rightarrow \frac{2}{n\theta^3}T - \frac{2}{n\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) \Rightarrow$ Si despejo T, va a depender de $\theta$ !!

-Luego, T no es efic $\Rightarrow$ La cota no es alcanzable $\Rightarrow \boxed{\text{a) verdadera}}$

③ Dos candidatos A y B se presentan a una elección. Se realizan de forma independiente cinco encuestas, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento, finalizando cada una de ellas cuando se encuentra el primer votante de A. Decir cuál de la siguiente afirmaciones es correcta:

a) Si la persona entrevistada en las cinco encuestas han sido 4,5,6,6 y 4, la estimación más verosímil de elegir un votante de B en la población es 0,2.

b) Si la estimación máximo verosímil de la probabilidad de que el primer votante de A sea el segundo entrevistado es 0,16, el número total de personas entrevistadas han sido 30

c) Si las personas entrevistadas en las cinco encuestas han sido 3,4,2,5 y 1, la estimación más verosímil de la probabilidad de que el primer votante de A sea el segundo entrevistado es 2/9

d) Si en dos encuestas ha salido A a la primera, en i a la cuarta y en 2 a la tercera, la estimación más verosímil de la probabilidad de que los dos primeros votantes sean de B es 25/144

$X$ = "Nº de encuestas realizadas hasta salir A (incluyendo la última)"

$X \to \{ G(p) : p \in (0,1) \}$ , $P(X=x) = p(1-p)^x$ , $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $(X_1, \ldots, X_5)$ m.a.s

$X-1$ = "Nº de encuestas realizadas hasta salir A"

$$P(X-1 = x-1) = p(1-p)^{x-1} \quad , x \in \mathbb{N}$$

$\times$ calculo e.m.v de $p$:

$\bullet L_{x_1,\ldots,x_n}(p) = p^5 (1-p)^{\sum_{i=1}^5 x_i - 5}$ $\Big\}$ $L_{x_1,\ldots,x_n}'(p) = 0 \Leftrightarrow 5p^4(1-p)^{\sum x_i - 5} - (\sum x_i - 5)(1-p)^{\sum x_i - 6} p^5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(1-p) - (\sum x_i - 5)p = 0 \Leftrightarrow 5 - p\sum x_i = 0$ $\Big\} \Rightarrow \hat{p}(X_1, \ldots, X_5) = \frac{1}{\overline{X}}$

*) Si sup cierto c) $\Rightarrow p = \dfrac{1}{\frac{3+4+2+5+1}{5}} = \frac{1}{3}$

- Luego, $P(X=2) = p(1-p) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \Rightarrow$ $\boxed{\text{c) verdadera}}$

④ Selecciona la correcta.

a) Si $T$ es el UMVUE para $\theta \Rightarrow h(T)$ es el UMVUE para $h(\theta)$

b) El UMVUE de una func. param es el estim de 2º orden que minimiza unif la varianza.

c) El UMVUE de una func. param es el estim insesg. de 2º orden que minimiza unif el ECM.

d) Si $T$ es suf, $E_\theta[S] = g(\theta)$ , $\forall \theta \in \Theta$ y $E_\theta[S^2] < +\infty$ , $\forall \theta \in \Theta$ $\Rightarrow E[S/T]$ es el UMVUE de $g(\theta)$.

a) F

- Falso, solo sabemos que si $T_1$ y $T_2$ son UMVUE de $g_1(\theta)$ y $g_2(\theta)$ $\xRightarrow{\text{sean } a_1, a_2 \in \mathbb{R}}$ $a_1 T_1 + a_2 T_2$ es UMVUE de $a_1 g_1(\theta) + a_2 g_2(\theta)$

b) F

- Por la def, falta la insesgadez

c) V

- Sí, por Tª de Rao-Blackwell

d) F

- Falta que $T$ sea completo, por Tª de Lehmann-Sheffé.

⑤ Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ mas de $X$ con $f_\theta(x) = -2x/(1-\theta)^2$ , $1-\theta < x < 0$ y $\theta > 0$. Elija la correcta

a) Si los datos observados son -5, -4'8, -1'2, -3, -2'5, -6'4; la e.m.v de $\theta$ es 41'96.

b) El e.m.v de $\theta$ es $-\min X_i$.

c) El e.m.v de $\theta$ por el método de los momentos es $1 - \frac{3}{2}\overline{X}$.

d) No existe un e.m.v de $\theta$.

*) Calculo e.m.v de $\theta$:

$\max x_i < 0$ y $\min X_i > 1-\theta$

• $L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = f_\theta^n(x) = \frac{(-2)^n}{(1-\theta)^{2n}} \prod_{i=1}^n x_i$ ; $L'_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = 0 \Leftrightarrow -(-2)^n(-2n)\frac{1}{(1-\theta)^{2n+1}} \prod_{i=1}^n x_i =$

$= (-2)^n \frac{2n}{(1-\theta)^{2n+1}} \prod_{i=1}^n x_i = \underbrace{\frac{2n}{(1-\theta)}}_{>0} \underbrace{f_\theta^n(x)}_{\geq 0} \leq 0$

-Luego, como $L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) < 0$ y $\theta > 1 - \min X_i \Rightarrow \hat{\theta}(X_1,\dots,X_n) = 1 - \min X_i$ es e.m.v de $\theta$

$\boxed{\text{-Por tanto, b) y d) Falsas}}$

* Y si consideramos los datos de a) $\Rightarrow \min X_i = -6.4 \Rightarrow \hat{\theta} = 7.4 \Rightarrow$ $\boxed{\text{a) Falsa}}$

*) Calculo em.v por método de los momentos:

• $E[X] = \int_{1-\theta}^{0} x f_\theta(x)\,dx = \int_{1-\theta}^{0} \frac{-2x^2}{(1-\theta)^2}\,dx = \frac{-2}{(1-\theta)^2}\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{1-\theta}^{0} = \frac{2}{3}(1-\theta) \xRightarrow{\text{met mom}}$

$\Rightarrow \overline{X} = \frac{2}{3}(1-\hat{\theta}) \Rightarrow \frac{3}{2}\overline{X} = 1-\hat{\theta} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = 1 - \frac{3}{2}\overline{X}} \Rightarrow \boxed{\text{Luego, c) cierta}}$