# Ecuaciones Vectoriales

Pablo Darío

14/12/2023

Importantes propiedades de sistemas lineales se pueden describir mediante el concepto y la notación de vectores. Por ahora, **vector** significará una lista ordenada de números. Esta idea sencilla permite realizar, de manera rápida, interesantes e importantes aplicaciones.

## Vectores en $\mathbb{R}^2$

Una matriz con una sola columna es un **vector columna** o simplemente un **vector**. Ejemplos:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix}$$

donde $w_1$ y $w_2$ son números reales. $\mathbb{R}^2$ denota el conjunto de todos los vectores con dos entradas. La $\mathbb{R}$ representa los números reales que aparecen como entradas en los vectores y el exponente 2 indica que cada vector contiene dos entradas.

Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son **iguales** si y solo si sus entradas correspondientes son iguales. Así $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ no son iguales, porque los vectores en $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados de números reales.

### Propiedades

### Suma de Vectores

Dados dos vectores $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^2$, su **suma** es el vector $u + v$, que se obtiene al sumar las entradas correspondientes de $u$ y $v$. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

### Multiplicación por un Escalar

Considerando un vector $\mathbf{u}$ y un número real $c$, el múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ por $c$ es el vector $c\mathbf{u}$, que se obtiene al multiplicar por $c$ cada entrada en $\mathbf{u}$. Ejemplo:

$$\text{si} \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c = 5, \quad \text{entonces} \quad c\mathbf{u} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 \\ -1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

El número $c$ en $c\mathbf{u}$ se llama escalar; se escribe en cursivas, para así distinguirlo del vector $\mathbf{u}$.

Es posible combinar las operaciones de multiplicación por un escalar y suma vectorial, como en el siguiente ejemplo:

### Ejemplo

A partir de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, encuentre $4\mathbf{u}$, (-3)$\mathbf{v}$ y $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$.

$$4u = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad -3v = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$4u + (-3v) = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Un vector también se puede representar con paréntesis, por ejemplo el vector columna $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ se puede representar como $\big(3, -1\big)$. En este caso los paréntesis y la coma distinguen al vector (3, -1) de la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ que se representa con corchetes y sin coma. Así bien:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Ya que las matrices tienen distintas formas, aunque las entradas sean iguales.

## Geometría en $\mathbb{R}^2$

Cada punto en el plano está determinado por un par ordenado de puntos, así bien, es posible identificar un punto geométrico $(a, b)$ con el vector columna $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Así, puede considerarse a $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de todos los puntos del plano.

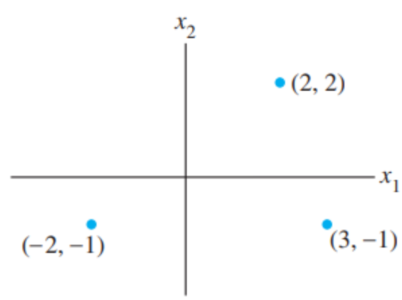


Figure 1: Vectores como puntos

**Regla del Paralelogramo para la adición**

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ se representan como puntos en el plano, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ corresponde a un cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son **u, 0** y **v**

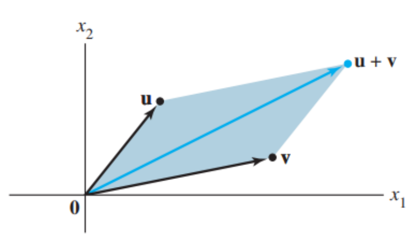


Figure 2: Regla del paralelogramo

## Ejemplo

Los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ forman el siguiente paralelogramo:

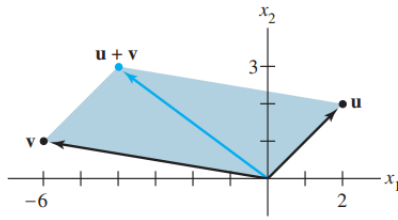


Figure 3: Ejemplo Paralelogramo

El conjunto de todos los múltiplos escalares de un vector diferente de cero o no nulo, fijo, es una recta que pasa por el origen, (0, 0)

## Ejemplo

Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Representa en el plano $\mathbf{u}$, $2\mathbf{u}$ y -$\frac{2}{3}\mathbf{u}$.

Así bien, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\frac{2}{3}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. La flecha para $2\mathbf{u}$ es el doble del largo que la flecha para $\mathbf{u}$ y va en el mismo sentido que $\mathbf{u}$. La flecha para - $\frac{2}{3}\mathbf{u}$ es dos tercios de la longitud de la flecha para $\mathbf{u}$ y va en sentido opuesto. En general, la longitud de la flecha para $c\mathbf{u}$ es $|c|$ veces la longitud de la flecha para $\mathbf{u}$.

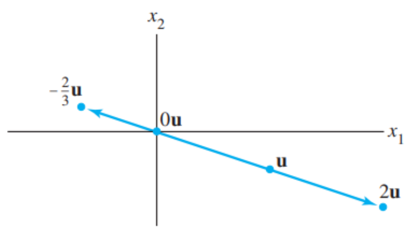


Figure 4: Múltiplos del vector u

## Vectores en $\mathbb{R}^n$

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ son matrices columna de $3 \times 1$ con tres entradas. Se representan geométricamente mediante puntos en un espacio coordenado tridimensional; algunas veces se incluyen flechas desde el origen para dar una mayor claridad visual.

Si $n$ es un entero positivo, $\mathbb{R}^n$ denota la colección de todas las listas de $n$ números reales, generalmente escritas como matrices columna de $n \times 1$ del tipo

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

El vector cuyas entradas son todas cero se llama **vector cero** y se denota con 0. La igualdad de vectores en $\mathbb{R}^n$ y las operaciones de multiplicación escalar y suma vectorial en $\mathbb{R}^n$ se definen entrada por entrada como en $\mathbb{R}^2$

**Propiedades Algebraicas de $\mathbb{R}^n$**

Para todo **u, v, w** en $\mathbb{R}^n$ y para todos los escalares $c$ y $d$:

1.- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2.- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3.- $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$

4.- $\mathbf{u}$ + (-$\mathbf{u}$) = -$\mathbf{u}$ + $\mathbf{u}$ = 0

5.- $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

6.- $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

7.- $c(d\mathbf{u}) = (cd)(\mathbf{u})$

8.-1$\mathbf{u} = \mathbf{u}$

## Combinaciones Lineales

Dados los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ en $\mathbb{R}^n$ y dados los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ el vector **y** es definido por:

$$\mathbf{y} = c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p$$

y se llama **combinaciòn lineal** de $v_1, \cdots, v_p$ con pesos $c_1, \cdots, c_p$. Los pesos en una combinación lineal pueden ser cualesquiera números reales, incluyendo el cero, algunos ejemplos de combinaciones lineales de $v_1$ y $v_2$ son

$$\sqrt{3}v_1 + v_2, \quad \frac{1}{2}v_1 (= \frac{1}{2}v_1 + 0v_2), \quad 0(= 0v_1 + 0v_2)$$

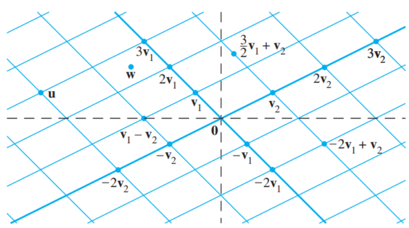


Figure 5: Combinaciones Lineales

## Ejemplo

Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Determine si $b$ se puede generar como una combinación lineal de $v_1$ y $v_2$. Es decir, determine si existen pesos $x_1$ y $x_2$ tales que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$$

Así bien, gracias a las propiedades de multiplicación por un escalar y suma vectorial, podemos reescribir la ecuación como:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Aplicando las operaciones obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Los vectores en los miembros izquierdo y derecho de son iguales si y solo si sus entradas correspondientes son iguales. Es decir, $x_1$ y $x_2$ hacen válida la ecuación vectorial $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ si y solo si $x_1$ y $x_2$ satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & +2x_2 & = 7 \\ -2x_1 & +5x_2 & = 4 \\ -5x_1 & +6x_2 & = -3 \end{array}$$

Ahora tenemos que resolver el sistema para ver si existen valores para $x_1$ y $x_2$ que hagan válido dicho sistema; para ello reducimos por filas la matriz aumentada como sigue:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

Así obtenemos que la solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Así que $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $v_1$ y $v_2$. Esto es,

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por brevedad se puede escribir la matriz aumentada en una forma que identifique sus columnas fácilemnte como $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & b \end{bmatrix}$

**Ecuación Vectorial y Sistema lineal**

Una ecuación vectorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b$$

tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal cuya matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \cdots & v_n & b \end{bmatrix}$$

En particular $\mathbf{b}$ se puede generar por una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si y solo si existe una solución al sistema lineal correspondiente a la matriz aumentada anterior.

**Conjunto de Combinaciones Lineales**

Si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ se denota como $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ y se llama **subconjunto de $\mathbb{R}^n$ extendido o generado por** $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Es decir $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir en la forma

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$$

con escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$

Preguntar si un vector $\mathbf{b}$ está en $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ equivale a preguntar si la ecuación vectorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = b$$

tiene una solución. La cual se puede reescribir como,

$$x_1 \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} + \cdots + x_p \begin{bmatrix} v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

o de manera equivalente, si el sistema lineal con la matriz aumentada $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p & b \end{bmatrix}$ tiene una solución.

Observe que Gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ contiene a cada múltiplo escalar de $v_1$ (por ejemplo), ya que $cv_1 = cv_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_p$. Por tanto, el vector cero debe estar en Gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.

## Descripción Geométrica de Gen{v} y de Gen{u, v}

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero en $\mathbb{R}^3$. Entonces Gen$\{\mathbf{v}\}$ es el conjunto de todos los múltiplos escalares de $\mathbf{v}$, que es el conjunto de puntos sobre la recta en en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{v}$ y 0.

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$, y $\mathbf{v}$ no es un múltiplo de $\mathbf{u}$, entonces Gen$\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ es el plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y 0. En particular, Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contiene la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{u}$ y 0, y la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y 0.

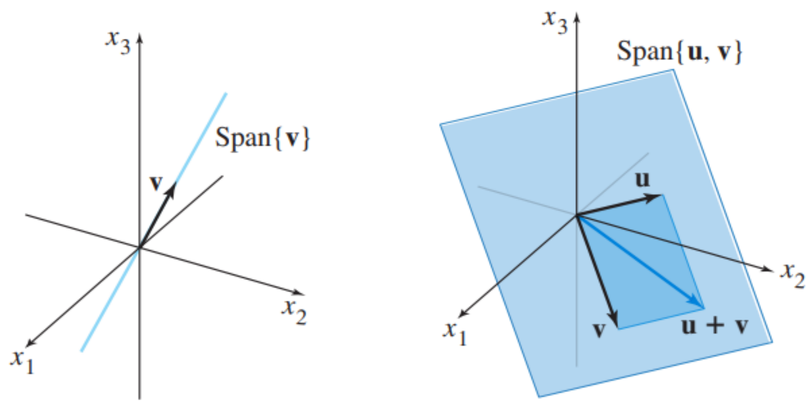


Figure 6: Gen$\{u\}$ y Gen$\{u,\, v\}$

## Ejemplo

Sean $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces Gen$\{\mathbf{a_1},\, \mathbf{a_2}\}$ es un plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$. ¿Está $\mathbf{b}$ en ese plano?

Para responder esto debemos ver si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$; es decir ¿Tiene solución la ecuación $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} = \mathbf{b}$? Así bien debemos reducir por la filas la matriz aumentada $\begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -18 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, vemos que el sistema es inconsistente, debido a que la tercera ecuación es 0 = -2. La ecuación vectorial $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} = \mathbf{b}$ no tiene solución, de manera que $\mathbf{b}$ no está en Gen$\{\mathbf{a_1},\, \mathbf{a_2}\}$ o bien, $\mathbf{b}$ no es una combinación lineal de $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$. (Lay, 2012)

# References

Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson Educación, México.