Sistemas Homogéneos de Ecuaciones

Pablo DS

06/12/2023

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales se llama homogéneo si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son cero; si alguna o algunas de las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_m$ es o son diferentes de cero, decimos que el sistema lineal es no homogéneo. Es decir el sistema general homogéneo está dado por:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Con respecto a las soluciones de los sistemas lineales **no homogéneos** existen tres posibilidades

- Que no tenga soluciones
- Que tenga una solución
- Que tenga un número infinito de soluciones

Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla. Para sistemas generales no homogéneos, $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} = \cdots = \mathbf{x_n} = \mathbf{0}$ es siempre una solución (**llamada solución trivial o solución cero**), por lo que sólo se tienen dos posibilidades

- La solución trivial es la única solución
- Existe un número infinito de soluciones además de la trivial.

Las soluciones distintas a la solución cero se llaman soluciones no triviales

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \quad & +3x_3 = 0 \\
4x_1 + 5x_2 \quad & +6x_3 = 0 \\
3x_1 + x_2 \quad & -2x_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}}
\left(\begin{array}{crr|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}
\left(\begin{array}{crr|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \tag{1}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 5R_2}}
\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow{R_3 \to -R_3}
\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \to R_2 + -2R_3}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{2}
$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

Ejemplo 2

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad -1x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 \quad +2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 \quad +6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3}$$

Así bien con sustitución hacia atrás podemos darnos cuenta que el conjunto de soluciones es infinito el cual es $(\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3)$. Si $x_3 = 0$ se obtiene la **solución trivial**.

Sistema Homogéneo con más incógnitas que ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad -x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 \quad +7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right) \tag{4}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \tag{5}$$

En esta ocasión **tenemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que hay un número infinito de soluciones**. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $(-\frac{5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3)$

Ecuaciones con más Incógnitas que Ecuaciones

En un sistema no homogéneo con más incógnitas que ecuaciones se podía tener o ninguna solución o infinitas soluciones, sin embargo en un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones se tienen infnitas solcuiones siempre, más formalmente se tiene:
Teorema -¿ Condición para tener un número infinito de soluciones El sistema homogéneo tiene un número infinito de solcuiones si $n > m$

Resumen

- Us sitema Homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial o solución cero**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homgéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales**

- El sistema lineal homgéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones $(n > m)$