Matriz de una Transformación Lineal

Pablo Dario

04/01/2024

Cada transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una transformación matricial $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$; la clave para encontrar a A es observar que T esta determinada por su acción sobre las columnas de la matriz identidad de $n \times n, I_n$

Ejemplo

Las columnas de $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son $\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Suponga que T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(\mathbf{e_2}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre la imagen de una $\mathbf{x}$ arbitraria en $\mathbb{R}^2$

Así bien creamos un vector $\mathbf{x}$ genérico y lo múltplicamos por la matriz identidad, dejándonos:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2}$$

Como T es una transformación lineal y ya conocemos a los vectores transformados de $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= x_1 T(\mathbf{e_1}) + x_2 T(\mathbf{e_2}) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación lineal es: $T(\mathbf{x}) = T(5x_1 - 3x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1 + 0)$ y su **matriz estándar** A es:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Los pasos anteriores explican porque el conocimiento de $T(\mathbf{e_1})$ y $T(\mathbf{e_2})$ es suficiente para determinar $T(\mathbf{x})$ para cualquier $\mathbf{x}$.

Matriz Estándar

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, existe una única matriz A tal que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ para toda } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

A es la matriz de $m \times n$ cuya $j-$ésima columna es el vector $T(\mathbf{e_j})$, donde $\mathbf{e_j}$ es la $j-$ésima columna de la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & \cdots & T(\mathbf{e_n}) \end{bmatrix}$$

El término transformación lineal se enfoca sobre una propiedad de un mapeo, mientras que la transformación matricial describe cómo se implementa tal mapeo.

Ejemplo 2

Encuentre la matriz estándar A para la transformación de dilatación $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$.

$$T(\mathbf{e_1}) = 3\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(\mathbf{e_2}) = 3\mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Existencia y Unicidad

Existencia

Se dice que un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **sobre** $\mathbb{R}^m$ si cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de al menos una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.
T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ si y solo si las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.

De manera equivalente, T es sobre $\mathbb{R}^m$ cuando todo el rango de T es codominio $\mathbb{R}^m$. Es decir T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$, si para cada $\mathbf{b}$ en el codominio $\mathbb{R}^m$, existe al menos una solución de $T(x) = \mathbf{b}$.

El mapeo T no es sobre $\mathbb{R}^m$ cuando existe alguna $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ para la cual la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ no tiene solución.

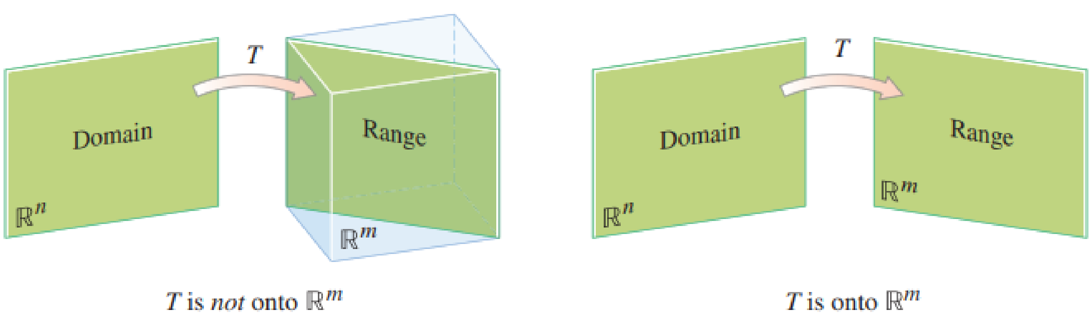


Figure 1: ¿El rango de T es todo $\mathbb{R}^m$?

Unicidad

Se dice que un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **uno a uno** si cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de a lo sumo una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$

De manera equivalente, T es uno a uno si, para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tiene una única solución o ninguna solución.

El mapeo de T no es uno a uno cuando algún $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de más de un vector en $\mathbb{R}^n$. Si no existe tal $\mathbf{b}$, entonces T es uno a uno.

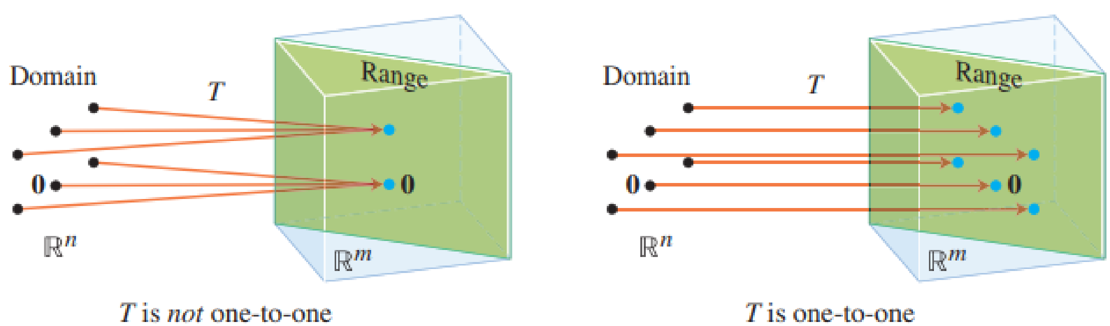


Figure 2: ¿Cada $\mathbf{b}$ es la imagen de a lo sumo un vector?

Ejemplos de Mapeo uno a uno

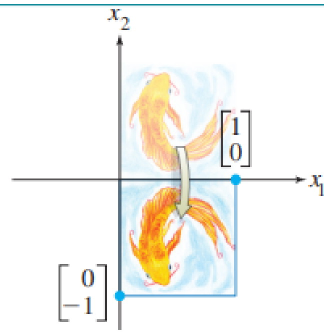
Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Reflection through the x_1-axis		$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

Figure 3: Reflexiones

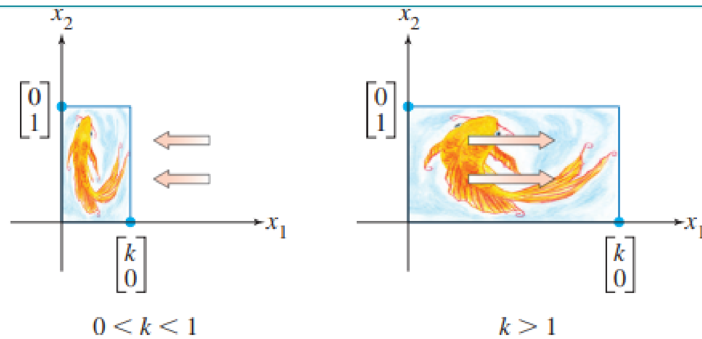
Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Horizontal contraction and expansion		$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Figure 4: Contracción y Expansión

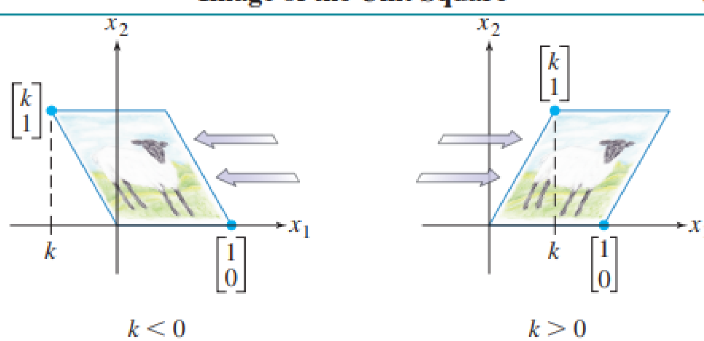
Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Horizontal shear		$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$

Figure 5: Trasquilado

Ejemplo

Sea T la transformación lineal cuya matriz estándar A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

encuentre si T es sobre $\mathbb{R}^4$ y si el mapeo es uno a uno.

Como A está en forma escalonada, podemos ver a la vez que A tiene una posición pivote en cada fila. Para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente. En otras palabras, la transformación lineal T mapea $\mathbb{R}^4$ (su dominio) sobre $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, ya que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una variable libre, cada $\mathbf{b}$ es la imagen de más de una $\mathbf{x}$. **Es decir, T no es uno a uno.**

Unicidad

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y solo si la ecuación $T(\mathbf{x}) = 0$ tiene únicamente la solución trivial.
T es uno a uno si y solo si las columnas de A son linealmente independientes.

Ejemplo

Sea $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$ Demuestre que T es una transformación lineal uno a uno. ¿T mapea a $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$?

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Las columnas de A son linealmente independientes porque no son múltiplos entre sí; por lo tanto T es uno a uno. Por otro lado las columnas de A generan a $\mathbb{R}^3$ si y solo si A tiene 3 posiciones pivote; podemos observar rápidamente que esto es imposible ya que A solo tiene 2 columnas. Así las columnas de A no generan a R^3 y la transformación linealmente asociada no es sobre $\mathbb{R}^3$.

Resumen

- Un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **sobre** $\mathbb{R}^m$ si cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de al menos una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$. Es decir T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$, si para cada $\mathbf{b}$ en el codominio $\mathbb{R}^m$, existe al menos una solución de $T(x) = \mathbf{b}$.
- T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ si y solo si las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.
- Un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **uno a uno** si cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de a lo sumo una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, o si, para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tiene una única solución o ninguna solución
- T es uno a uno si y solo si la ecuación $T(\mathbf{x}) = 0$ tiene únicamente la solución trivial, por lo que si hay una variable libre la transformación T no es uno a uno, o bien si hay más columnas que filas en la matriz A.
- T es uno a uno si y solo si las columnas de A son linealmente independientes.