

Ecuaciones Lineales

Pablo DS

28/11/2023

1 Sistemas Lineales

En matemáticas la palabra “lineal” tiene un significado muy amplio. Una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es, de hecho, una generalización de las propiedades de la línea recta.

Propiedades de la Recta

- La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{si } x_1 \neq x_2$$

- Si $x_2 = x_1$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es indefinida.
- Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen $\mathbf{y = mx + b}$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen
- Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.
- Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero
- Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal en las variables x_1, x_2, \dots, x_n es una ecuación que puede escribirse de la forma $a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n = b$ donde b y los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n son números reales o complejos, el subíndice n puede ser cualquier número entero positivo. En los problemas de la vida real, n puede ser 50 o 5000, o incluso mayor. Aquí se utiliza la palabra lineal, porque en la ecuación algebraica cada término tiene un exponente de 1 y, cuando se representa gráficamente, siempre resulta una línea recta, la cual dependiendo del número de incógnitas se puede extrapolar a diferentes dimensiones.

En muchas aplicaciones se nos da b y a las constantes a_1, a_2, \dots, a_n donde debemos determinar los números x_1, x_2, \dots, x_n denominados **incógnitas**, que satisfacen la ecuación.

Una **solución** de una ecuación lineal es una sucesión n de números s_1, s_2, \dots, s_n que tienen la propiedad de satisfacer a la ecuación, cuando los valores (s_1, s_2, \dots, s_n) se sustituyen por (x_1, x_2, \dots, x_n) en la ecuación.

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** x_1, x_2, \dots, x_n , (al que podemos llamar sistema lineal) es un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas; el cual se puede denotar como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Una solución del sistema es una lista s_1, s_2, \dots, s_n de números que hace que cada ecuación sea una afirmación verdadera cuando los valores (s_1, s_2, \dots, s_n) se sustituyen por (x_1, x_2, \dots, x_n) , respectivamente. El conjunto de todas las soluciones posibles se denomina conjunto de soluciones del sistema lineal. Dos sistemas lineales se denominan equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. Las preguntas que surgen son: ¿tiene este sistema varias soluciones? y, de ser así, ¿cuántas?

Encontrar el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables es fácil porque cada ecuación corresponde a una línea recta, por lo cual la solución equivale a encontrar la intersección de dos rectas. Dos rectas no tienen por qué intersectarse en un único punto; si no son paralelas, entonces se intersectan en un punto, por el contrario, si son paralelas entonces o no se intersectan o son la misma recta y se intersectan en infinitos puntos. (Kolman & Hill, 2006)

La gráfica de cada ecuación de un sistema de 2×2 es una línea recta, que denotamos mediante l_1 y l_2 , respectivamente. Si $x = s_1, y = s_2$ es una solución del sistema lineal, entonces el punto (s_1, s_2) pertenece a ambas rectas, l_1 y l_2 . De manera recíproca, si el punto (s_1, s_2) está en ambas rectas, l_1 y l_2 , entonces $x = s_1, y = s_2$ es una solución para el sistema lineal.

Posibles casos

1. El sistema tiene una solución única; esto es, las rectas l_1 y l_2 se intersectan exactamente en un punto.
2. El sistema no tiene solución; es decir, las rectas l_1 y l_2 no se intersectan.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones; en otras palabras, las rectas l_1 y l_2 coinciden.

Se dice que un sistema es inconsistente si no tiene solución y que un sistema es consistente si tiene 1 solución o infinitas soluciones.

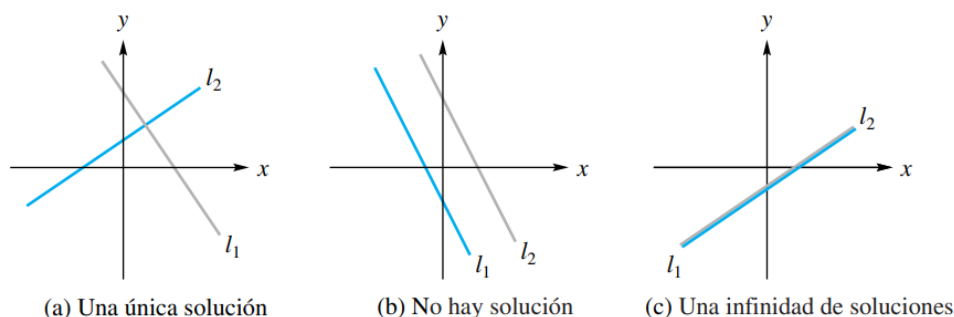


Figure 1: Ilustración de casos con 2 incógnitas

Ahora, consideremos un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, x, y y z :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es un plano, y se denota con P_1, P_2 y P_3 respectivamente. Como en el caso de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, el sistema lineal puede tener una solución única, no tener solución o tener una infinidad de soluciones. Estos 3 casos se extrapolan a sistemas de ecuaciones de $m \times n$.

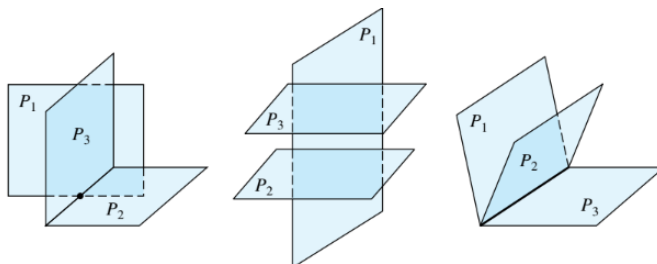


Figure 2: Ilustración de casos con 3 incógnitas

1.1 Resolviendo Sistemas de Ecuaciones

Para resolver las siguientes ecuaciones lineales usaremos el método de eliminación, el cuál consiste en eliminar variable(s) de alguna ecuación hasta aislar una sola para obtener su valor y después sustituir ese valor en las demás ecuaciones; para ello se hará uso de las operaciones elementales por filas, las cuales al efectuarlas no afectan el sistema de ecuaciones.

Operaciones Elementales por filas

1. Intercambiar dos ecuaciones o dos filas.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Multiplicar una ecuación y sumarla a otra.

Ejemplo 1 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned}x - 3y &= -7 \\ 2x - 6y &= 7\end{aligned}$$

Decidimos eliminar x . Para ello sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y obtenemos:

$$\begin{aligned}x - 3y &= -7 \\ 0x + 0y &= 21\end{aligned}$$

Cuya segunda ecuación no tiene sentido. Esto significa que la solución del sistema lineal es el conjunto vacío o bien el sistema no tiene solución.

Ejemplo 2 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + y - 3z &= 4\end{aligned}$$

Para eliminar x , sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y obtenemos:

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= -4 \\ -3y + 3z &= 12\end{aligned}$$

Despejamos y en la segunda ecuación para obtener

$$y = z - 4$$

donde z puede ser cualquier número real. Entonces, sustituyendo a y y despejando a x en la primera ecuación obtenemos:

$$x = z + 4$$

Por lo tanto, una solución para el sistema lineal es:

$$\begin{aligned}x &= \mathbb{R} + 4 \\ y &= \mathbb{R} - 4 \\ z &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

Esto significa que el sistema lineal tiene un número infinito de soluciones. Cada vez que asignamos un valor a z , obtenemos otra solución.

Ejemplo 3 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\2x - 3y + 2z &= 14 \\3x + y - z &= -2\end{aligned}$$

Para eliminar x de la segunda y tercer ecuación, sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y (-3) veces la primera ecuación a la tercera, lo que da por resultado

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\-7y - 4z &= 2 \\-5y - 10z &= -20\end{aligned}$$

Ahora queremos eliminar y de la tercera ecuación, por lo que multiplicamos la tercera ecuación por $-\frac{1}{5}$ obteniendo:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\-7y - 4z &= 2 \\y + 2z &= 4\end{aligned}$$

Intercambiamos la segunda y tercer ecuación

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\y + 2z &= 4 \\-7y - 4z &= 2\end{aligned}$$

Finalmente sumamos 7 veces la segunda ecuación a la tercera, eliminando así a y de la tercer ecuación

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\y + 2z &= 4 \\10z &= 30\end{aligned}$$

Así bien, obtenemos que $z = 3$ y sustituyendo este valor en la segunda ecuación encontramos que $y = -2$. Al sustituir estos valores en la primera ecuación, finalmente obtenemos $x = 1$

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= -2 \\z &= 3\end{aligned}$$

1.2 Matrices

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de matriz.

Definición

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales (o complejos) ordenados en m filas horizontales y n columnas verticales. Se pueden representar con paréntesis o corchetes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz de Coeficientes

Es aquella matriz que únicamente contiene los coeficientes de las incógnitas.

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 4 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz Aumentada

Es aquella matriz que representa un sistema de ecuaciones lineales, donde la línea vertical separa la parte de los coeficientes (a la izquierda) de la parte de los términos independientes (a la derecha).

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = 18 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & = 24 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 4 \end{array} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

La matriz también se puede escribir como $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Es importante mencionar que el primer número diferente de cero en una fila (si lo hay) se llama **entrada principal para esa fila**.

Forma Escalonada y Escalonada Reducida

Una matriz se encuentra en forma escalonada si cumple con las siguientes propiedades:

Propiedades de la Forma Escalonada

- Todas las filas cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.
- La entrada principal en cualquier fila está a la derecha de la entrada principal de la fila anterior.
- Todos los elementos en una columna por debajo de una entrada principal son ceros.

Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por filas** si también se cumplen las siguientes condiciones:

- La entrada principal en cualquier fila no nula es 1.
- La entrada principal es el único elemento distinto de 0 en su columna.

Ejemplo Forma Escalonada

Ejemplos generalizados:

Las entradas principales (.) pueden tener cualquier valor diferente de 0; las otras entradas (*) pueden tener cualquier valor (incluyendo cero).

$$\begin{pmatrix} . & * & * & * \\ 0 & . & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & . & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & . & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

Ejemplos aleatorios:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [0 \quad 5 \quad 0 \quad -4], \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pivote

Un pivote en una matriz es la primera entrada no nula en una fila, por lo que los valores de los pivotes en una matriz en la forma escalonada puede ser cualquiera diferente de 0, mientras que en una escalonada reducida el valor de sus pivotes es únicamente 1.

Ejemplo Forma Escalonada Reducida

Ejemplos generalizados:

Las entradas principales son 1 (pivotes) y los demás elementos en su columna son 0, las otras entradas (*) pueden tener cualquier valor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Ejemplos aleatorios:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cualquier matriz distinta de cero puede reducirse en más de una matriz en forma escalonada, utilizando diferentes secuencias de operaciones de fila. Sin embargo, la forma escalonada reducida que se obtiene de una matriz es única.

Ejemplo de Matrices no Escalonadas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Unicidad de la Forma Escalonada Reducida

Cada matriz es equivalente en fila a una y sólo una matriz escalonada reducida.

Ejemplo Convertir una Matriz a Forma Escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2} R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{pmatrix}$$

Ya casi tenemos la matriz escalonada, solo tenemos que hacer cero el valor de la segunda incógnita de la tercer ecuación

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sustitución Hacia Atrás

La matriz aumentada del sistema se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la sustitución hacia atrás para despejar primero x_2 y después x_1 . La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ con lo que se obtiene que $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución $(4, -2, 3)$. El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

Cuando un sistema está en forma escalonada y no contiene ecuaciones del tipo $0 = b$, con b diferente de cero, entonces cada ecuación no nula tiene una variable básica con un coeficiente distinto de cero. Es posible que las variables básicas estén completamente determinadas (sin variables libres) o que al menos una de las variables básicas pueda expresarse en términos de una o más variables libres. En el primer caso, existe una solución única; en el último caso, hay infinidad de soluciones (una para cada asignación de valores a las variables libres).

Teorema de Unicidad y Existencia

Un sistema lineal es consistente si y solo si la columna más a la derecha de la matriz aumentada no es una columna pivote, es decir, si y solo si una forma escalonada de la matriz aumentada no tiene filas del tipo $[0 \ \cdots \ 0 \ b]$ con b diferente de cero. Si un sistema lineal es consistente, entonces el conjunto solución contiene:

- i. una única solución, cuando no existen variables libres
- ii. una infinidad de soluciones, cuando hay al menos una variable libre

1.3 Métodos para Resolver Sistemas Lineales

Se ha visto que multiplicar una ecuación por un número diferente de cero da por resultado una nueva ecuación equivalente, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación equivalente y por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Como se vió anteriormente estas son las operaciones elementales por filas. El proceso de aplicar las operaciones elementales por filas para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por filas.

Uso de Reducción de Filas para Resolver un Sistema Lineal

- 1.- Escriba la matriz aumentada del sistema.
- 2.- Emplee el algoritmo de reducción por filas para obtener una matriz aumentada equivalente en forma escalonada. Determine si el sistema es consistente o no. Si no existe solución, deténgase; en caso contrario, continúe con el siguiente paso.
- 3.- Prosiga con la reducción por filas para obtener la forma escalonada reducida.
- 4.- Escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz obtenida en el paso 3.
- 5.- Rescriba cada ecuación no nula del paso 4 de manera que su única variable básica se exprese en términos de cualquiera de las variables libres que aparecen en la ecuación.

La eliminación de Gauss-Jordan es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones.

La eliminación gaussiana es el proceso de resolver un sistema de ecuaciones al reducir por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y utilizando la sustitución hacia atrás.

Métodos

Eliminación de Gauss Jordan

Se reduce por fila la matriz aumentada a la forma escalonada reducida. Es decir se realizan los 5 puntos anteriores.

Eliminación Gaussiana

Se reduce por fila la matriz aumentada a la forma escalonada y después se usa la sustitución hacia atrás. Es decir se realizan los primeros 2 puntos anteriores y si el sistema es consistente se prosigue con sustitución hacia atrás.

Al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales por filas, aunque a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz, en estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Solución de un sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\begin{array}{rrcr} x_1 + 3x_2 & -5x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 & -2x_3 + 4x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces

$$\begin{array}{l} x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4 \\ x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4 \end{array}$$

Por lo tanto, todas las soluciones se representan por

$$(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$$

Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(235, 14, 1, 2)$.

Soluciones en un Sistema con más Incógnitas que Ecuaciones

Un sistema subdeterminado siempre tiene más variables que ecuaciones. No pueden existir más variables básicas que ecuaciones, así que al menos una variable es libre. A tal variable se le puede asignar una infinidad de valores distintos. Por lo que, o no se tiene solución (inconsistente) o cada valor diferente de una variable libre producirá una solución distinta, esto es, infinitas soluciones (indeterminado).

Es importante destacar que la presencia de soluciones infinitas no implica necesariamente que todas las combinaciones de valores sean válidas. Pueden existir restricciones adicionales que limiten las soluciones aceptables.

Problema de Pesca

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago? Sean x_1 , x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago.

$$\begin{array}{rrcr} x_1 + 3x_2 & +2x_3 & = & 25,000 \\ x_1 + 4x_2 & +x_3 & = & 20,000 \\ 2x_1 + 5x_2 & +5x_3 & = & 55,000 \end{array}$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55,000 \end{array} \right)$$

Utilizando reducción de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5,000 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por consiguiente, se tiene un número infinito de soluciones dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 40,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5,000 \\ x_3 &= \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Por supuesto, como se vio anteriormente, que un sistema tenga infinitas soluciones no significa que todas las soluciones sean válidas. En este caso los valores que pueden tomar las incógnitas deben ser enteros, pues no se puede tener por ejemplo 5.6 peces; además se debe tener $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40,000 - 5(5,000) = 15,000$. Por último, como $40,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 40,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5,000 \\ 5,000 &\leq x_3 \leq 8,000 \end{aligned}$$

(Lay, 2012)

References

- Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. Pearson Educación.
- Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educación, México.