Independencia Lineal

Pablo Darío

02/01/2023

Las ecuaciones homogéneas se pueden estudiar desde una perspectiva diferente si las escribimos como ecuaciones vectoriales. De esta manera, la atención se transfiere de las soluciones desconocidas de $A\mathbf{x} = 0$ a los vectores que aparecen en las ecuaciones vectoriales.

Por ejemplo, considere la ecuación

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación tiene una solución trivial, desde luego, donde $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Independencia Lineal

Se dice que un conjunto indexado de vectores $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + ... + x_p\mathbf{v_p} = 0$$

solo tiene la solución trivial. Se dice que el conjunto $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ es linealmente dependiente si existen pesos $c_1, ..., c_p$ no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + ... + c_p\mathbf{v_p} = 0$$

La última ecuación se llama relación de dependencia lineal entre $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}$ cuando no todos los pesos son cero. Un conjunto indexado es linealmente dependiente si y solo si no es linealmente independiente. Por brevedad, puede decirse que $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}$ son linealmente dependientes cuando queremos decir que $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Se utiliza una terminología semejante para los conjuntos linealmente independientes.

Ejemplo

Sean $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Determine si el conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ es linealmente independiente

Se debe determinar si existe una solución no trivial. Reduciendo a la matriz a su forma escalonada, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por lo tanto x_1 y x_2 son variables básicas y x_3 es libre. Cada valor de x_3 distinto determina una solución no trivial. Así que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ son **linealmente dependientes** (por tanto no son linealmente independientes).

Para encontrar una **relación de dependencia lineal** entre $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ se reduce por filas completamente a la matriz aumentada y se escribe el nuevo sistema:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad -2x_3 &= 0 \\ x_2 \quad +x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Así $x_1 = 2x_3, x_2 = -x_3$ y x_3 es libre. Seleccione cualquier valor distinto de cero para x_3; por ejemplo $x_3 = 5$. De esta manera obtenemos la **relación de dependencia lineal:**

$$10\mathbf{v_1} - 5\mathbf{v_2} + 5\mathbf{v_3} = 0$$

Esta es una (entre una infinidad) de las posibles relaciones de dependencia lineal entre $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$

Columnas de una Matriz

Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = 0$ tiene solo la solución trivial.

Así bien si tenemos una matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, la ecuación matricial $A\mathbf{x} = 0$ se puede escribir como

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + ... + x_n\mathbf{a_n} = 0$$

Cada relación de dependencia lineal entre las columnas de A corresponde a una solución no trivial de $A\mathbf{x} = 0$.

Ejemplo

Determine si las columnas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

Se reduce por filas la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

En este punto está claro que hay 3 variables básicas y ninguna variable básica. Así la ecuación $A\mathbf{x} = 0$ solo tiene la solución trivial y las columnas de A son **linealmente independientes**.

Conjuntos de uno o dos vectores

Un conjunto que solo tiene un vector $\mathbf{v}$ es linealmente independiente si y solo si $\mathbf{v}$ no es el vector cero. Esto se debe a que la ecuación vectorial $x_1\mathbf{v} = 0$ solo tiene la solución trivial cuando $\mathbf{v} \neq 0$. El vector cero es linealmente dependiente porque $x_1 0 = 0$ tiene muchas soluciones no triviales

Ejemplo

Determine si los siguientes conjutnos de vectores son linealmente independientes

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que $\mathbf{v_2}$ es múltiplo de $\mathbf{v_1}$, para ser exactos $\mathbf{v_2} = 2\mathbf{v_1}$. Así que $-2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = 0$, lo que demuestra que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 2

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Desde luego los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ no son múltiplos entre sí; por lo tanto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Conjunto de 2 vectores

Un conjunto de dos vectores $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores es un múltiplo del otro. El conjunto es linealmente independiente si y solo si ninguno de los vectores es un mñultiplo del otro.

En términos geométricos, dos vectores son linealmente dependientes si y solo si ambos están sobre la misma recta que pasa por el origen.

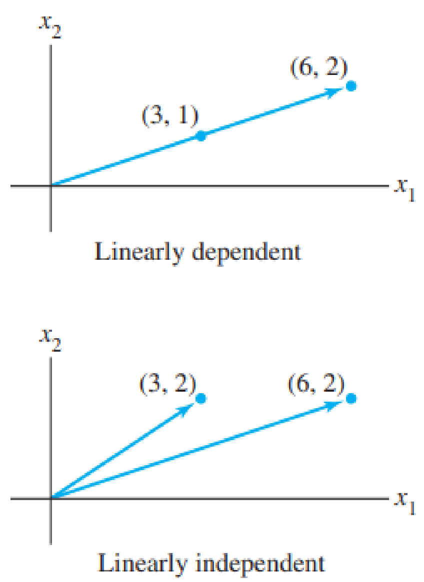

Figure 1: Dependencia Lineal en $\mathbb{R}^2$

Caracterización de conjuntos linealmente dependientes

Un cojunto de dos o más vectores es linealmente dependiente si y solo si al menos uno de los vectores en el conjunto es una combinación lineal de los otros. De hecho si el conjunto es linealmente dependiente y $\mathbf{v_1} \neq 0$ entonces alguna $\mathbf{v_j}$ (con $j > 1$) es una combinación lineal de los vectores precedentes $v_1, \cdots, v_{j-1}$

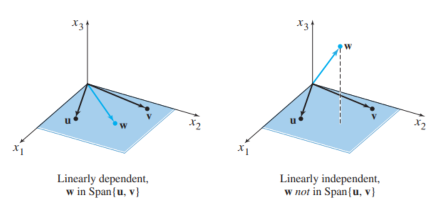

Figure 2: Dependencia Lineal en $\mathbb{R}^3$

Caso Especial

Si un conjunto contiene más vectores que entradas en cada vector, entonces el conjutno es linealmente dependiente. Es decir, cualquier conjunto $\{\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_p}\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $p > n$. Ya que si $p > n$, entonces hay mas variables que ecuaciones, por lo que debe de quedar una variable libre al menos.

Caso especial 2

Si un conjunto de vectores contiene al vector cero, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

Al remunerar los vectores, se puede suponer que $\mathbf{v_1} = 0$. Así la ecuación $1\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} + \cdots + 0\mathbf{v_p} = 0$ indica que el conjunto es linealmente dependiente, ya que se le pueden asignar infinitos pesos a x_1 que al multiplicarse por $\mathbf{v_1}$ (el vector cero), dará siempre cero y la suma de todos los vectores con la condición anterior será 0 para todas las entradas. (Lay, 2012)

Resumen

La dependencia lineal de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ se puede visualizar comodos vectores colindantes en una recta y la Independencia como dos vectores que no colindan en una recta. Para más vectores en $\mathbb{R}^3$ se pueden visualizar como que los vectores están en el mismo plano.

- Un conjunto de vectores es linealmente independiente si la única solución a la ecuación $A\mathbf{x} = 0$ es la trivial.
- Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si un vector puede ser representado como la combinación lineal de los otros vectores.
- Un conjunto $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ es linealmente dependiente si existen pesos $c_1, ..., c_p$ donde al menos uno es diferente de cero, tales que
$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + ... + c_p\mathbf{v_p} = 0$$
.
- Dos vectores son linealmente dependiente si uno es múltiplo de otro.
- Si hay más vectores que entradas, significa que tenemos más variables que ecuaciones, por lo tanto, alguna variable es libre y el conjunto de vectores el linealmente dependiente.
- Si un conjunto tiene al vector 0, entonces el conjunto es linealmente dependiente, ya que el vector 0 es linealmente dependiente, esto debido a que podemos asignar todos los pesos como 0, excepto el del vector cero
$$c_1\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} + \cdots + 0\mathbf{v_p} = 0$$
- Un conjunto de un vector es linealmente independiente si y solo si no es el vector cero, ya que un vector no nulo solo tiene la solución trivial.

References

Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson Educación, México.