

# Ecuaciones Vectoriales

Pablo Darío

14/12/2023

Importantes propiedades de sistemas lineales se pueden describir mediante el concepto y la notación de vectores. Por ahora, **vector** significará una lista ordenada de números. Esta idea sencilla permite realizar, de manera rápida, interesantes e importantes aplicaciones.

## Vectores en $\mathbb{R}^2$

Una matriz con una sola columna es un **vector columna** o simplemente un **vector**. Ejemplos:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix}$$

donde  $w_1$  y  $w_2$  son números reales.  $\mathbb{R}^2$  denota el conjunto de todos los vectores con dos entradas. La  $\mathbb{R}$  representa los números reales que aparecen como entradas en los vectores y el exponente 2 indica que cada vector contiene dos entradas.

Dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  son **iguales** si y solo si sus entradas correspondientes son iguales. Así  $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$  no son iguales, porque los vectores en  $\mathbb{R}^2$  son pares ordenados de números reales.

## Propiedades

### Suma de Vectores

Dados dos vectores  $u$  y  $v$  en  $\mathbb{R}^2$ , su **suma** es el vector  $u + v$ , que se obtiene al sumar las entradas correspondientes de  $u$  y  $v$ . Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

### Multiplicación por un Escalar

Considerando un vector  $\mathbf{u}$  y un número real  $c$ , el múltiplo escalar de  $\mathbf{u}$  por  $c$  es el vector  $c\mathbf{u}$ , que se obtiene al multiplicar por  $c$  cada entrada en  $\mathbf{u}$ . Ejemplo:

$$\text{si } u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y } c = 5, \quad \text{entonces } c\mathbf{u} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 \\ -1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

El número  $c$  en  $c\mathbf{u}$  se llama escalar; se escribe en cursivas, para así distinguirlo del vector  $\mathbf{u}$ .

Es posible combinar las operaciones de multiplicación por un escalar y suma vectorial, como en el siguiente ejemplo:

## Ejemplo

A partir de  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ , encuentre  $4\mathbf{u}$ ,  $(-3)\mathbf{v}$  y  $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$ .

$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad -3\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$4\mathbf{u} + (-3\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Un vector también se puede representar con paréntesis, por ejemplo el vector columna  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  se puede representar como  $(3, -1)$ . En este caso los paréntesis y la coma distinguen al vector  $(3, -1)$  de la matriz  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$  que se representa con corchetes y sin coma. Así bien:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq [3 \quad -1]$$

Ya que las matrices tienen distintas formas, aunque las entradas sean iguales.

## Geometría en $\mathbb{R}^2$

Cada punto en el plano está determinado por un par ordenado de puntos, así bien, es posible identificar un punto geométrico  $(a, b)$  con el vector columna  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . Así, puede considerarse a  $\mathbb{R}^2$  como el conjunto de todos los puntos del plano.

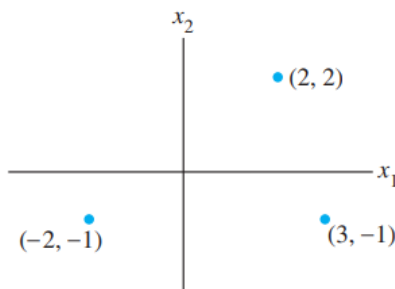


Figure 1: Vectores como puntos

### Regla del Paralelogramo para la adición

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{R}^2$  se representan como puntos en el plano, entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  corresponde a un cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{v}$

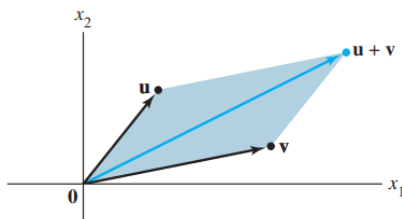


Figure 2: Regla del paralelogramo

## Ejemplo

Los vectores  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$  forman el siguiente paralelogramo:

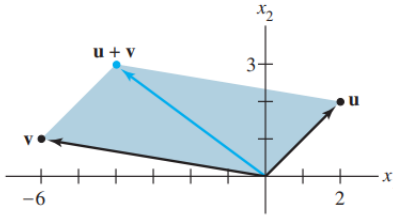


Figure 3: Ejemplo Paralelogramo

El conjunto de todos los múltiplos escalares de un vector diferente de cero o no nulo, fijo, es una recta que pasa por el origen,  $(0, 0)$

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Representa en el plano  $\mathbf{u}$ ,  $2\mathbf{u}$  y  $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$ .

Así bien,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$  y  $\frac{2}{3}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ . La flecha para  $2\mathbf{u}$  es el doble del largo que la flecha para  $\mathbf{u}$  y va en el mismo sentido que  $\mathbf{u}$ . La flecha para  $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$  es dos tercios de la longitud de la flecha para  $\mathbf{u}$  y va en sentido opuesto. En general, la longitud de la flecha para  $c\mathbf{u}$  es  $|c|$  veces la longitud de la flecha para  $\mathbf{u}$ .

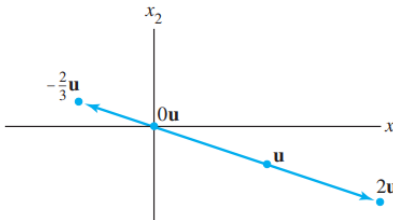


Figure 4: Múltiplos del vector  $\mathbf{u}$

## Vectores en $\mathbb{R}^n$

Los vectores en  $\mathbb{R}^3$  son matrices columna de  $3 \times 1$  con tres entradas. Se representan geoméricamente mediante puntos en un espacio coordenado tridimensional; algunas veces se incluyen flechas desde el origen para dar una mayor claridad visual.

Si  $n$  es un entero positivo,  $\mathbb{R}^n$  denota la colección de todas las listas de  $n$  números reales, generalmente escritas como matrices columna de  $n \times 1$  del tipo

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

El vector cuyas entradas son todas cero se llama **vector cero** y se denota con  $0$ . La igualdad de vectores en  $\mathbb{R}^n$  y las operaciones de multiplicación escalar y suma vectorial en  $\mathbb{R}^n$  se definen entrada por entrada como en  $\mathbb{R}^2$

Para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  en  $\mathbb{R}^n$  y para todos los escalares  $c$  y  $d$ :

1.-  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2.-  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3.-  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

4.-  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

5.-  $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

6.-  $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

7.-  $c(d\mathbf{u}) = (cd)(\mathbf{u})$

8.-  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

## Combinaciones Lineales

Dados los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_p$  en  $\mathbb{R}^n$  y dados los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_p$  el vector  $\mathbf{y}$  es definido por:

$$\mathbf{y} = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p$$

y se llama **combinación lineal** de  $v_1, \dots, v_p$  con pesos  $c_1, \dots, c_p$ . Los pesos en una combinación lineal pueden ser cualesquiera números reales, incluyendo el cero, algunos ejemplos de combinaciones lineales de  $v_1$  y  $v_2$  son

$$\sqrt{3}v_1 + v_2, \quad \frac{1}{2}v_1 (= \frac{1}{2}v_1 + 0v_2), \quad 0 (= 0v_1 + 0v_2)$$

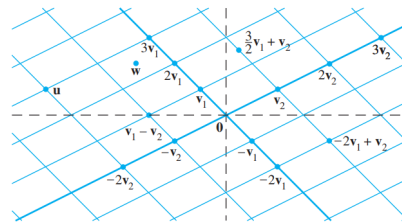


Figure 5: Combinaciones Lineales

## Ejemplo

Sean  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  y  $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ . Determine si  $b$  se puede generar como una combinación lineal de  $v_1$  y  $v_2$ . Es decir, determine si existen pesos  $x_1$  y  $x_2$  tales que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$$

Así bien, gracias a las propiedades de multiplicación por un escalar y suma vectorial, podemos reescribir la ecuación como:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Aplicando las operaciones obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Los vectores en los miembros izquierdo y derecho de son iguales si y solo si sus entradas correspondientes son iguales. Es decir,  $x_1$  y  $x_2$  hacen válida la ecuación vectorial  $x_1v_1 + x_2v_2 = b$  si y solo si  $x_1$  y  $x_2$  satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & = 7 \\ -2x_1 & +5x_2 & = 4 \\ -5x_1 & +6x_2 & = -3 \end{array}$$

Ahora tenemos que resolver el sistema para ver si existen valores para  $x_1$  y  $x_2$  que hagan válido dicho sistema; para ello reducimos por filas la matriz aumentada como sigue:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

Así obtenemos que la solución es  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 2$ . Así que  $\mathbf{b}$  es una combinación lineal de  $v_1$  y  $v_2$ . Esto es,

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por brevedad se puede escribir la matriz aumentada en una forma que identifique sus columnas fácilmente como  $[v_1 \ v_2 \ b]$

### Ecuación Vectorial y Sistema lineal

Una ecuación vectorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = b$$

tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal cuya matriz aumentada es

$$[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n \ b]$$

En particular  $\mathbf{b}$  se puede generar por una combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  si y solo si existe una solución al sistema lineal correspondiente a la matriz aumentada anterior.

### Conjunto de Combinaciones Lineales

Si  $v_1, v_2, \dots, v_p$  están en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $v_1, v_2, \dots, v_p$  se denota como  $\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  y se llama **subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  extendido o generado por  $v_1, v_2, \dots, v_p$** . Es decir  $\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir en la forma

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p$$

con escalares  $c_1, c_2, \dots, c_p$

Preguntar si un vector  $\mathbf{b}$  está en  $\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  equivale a preguntar si la ecuación vectorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_pv_p = b$$

tiene una solución. La cual se puede reescribir como,

$$x_1 [v_1] + x_2 [v_2] + \cdots + x_p [v_p] = [b]$$

o de manera equivalente, si el sistema lineal con la matriz aumentada  $[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_p \ b]$  tiene una solución.

Observe que  $\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  contiene a cada múltiplo escalar de  $v_1$  (por ejemplo), ya que  $cv_1 = cv_1 + 0v_2 + \dots + 0v_p$ . Por tanto, el vector cero debe estar en  $\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ .

## Descripción Geométrica de $\text{Gen}\{\mathbf{v}\}$ y de $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$

Sea  $\mathbf{v}$  un vector diferente de cero en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\text{Gen}\{\mathbf{v}\}$  es el conjunto de todos los múltiplos escalares de  $\mathbf{v}$ , que es el conjunto de puntos sobre la recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $\mathbf{v}$  y  $0$ .

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores diferentes de cero en  $\mathbb{R}^3$ , y  $\mathbf{v}$  no es un múltiplo de  $\mathbf{u}$ , entonces  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  es el plano en  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $0$ . En particular,  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  contiene la recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $\mathbf{u}$  y  $0$ , y la recta que pasa por  $\mathbf{v}$  y  $0$ .

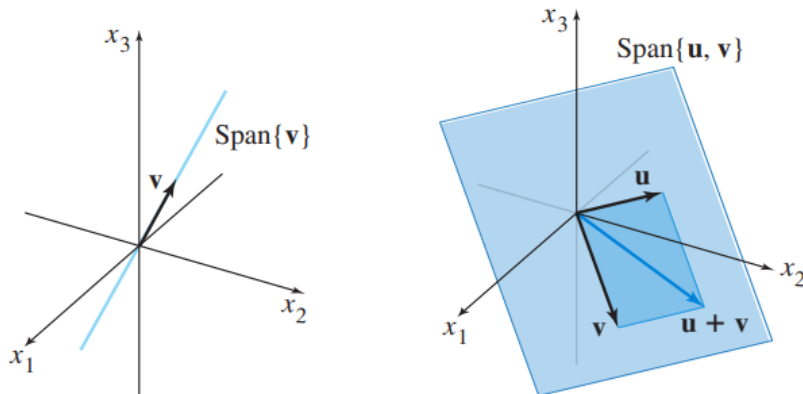


Figure 6:  $\text{Gen}\{u\}$  y  $\text{Gen}\{u, v\}$

## Ejemplo

Sean  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Entonces  $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  es un plano que pasa por el origen en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Está  $\mathbf{b}$  en ese plano?

Para responder esto debemos ver si  $\mathbf{b}$  es una combinación lineal de  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ ; es decir ¿Tiene solución la ecuación  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ ? Así bien debemos reducir por la filas la matriz aumentada  $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}]$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -18 & 10 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

Por lo tanto, vemos que el sistema es inconsistente, debido a que la tercera ecuación es  $0 = -2$ . La ecuación vectorial  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$  no tiene solución, de manera que  $\mathbf{b}$  no está en  $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  o bien  $\mathbf{b}$  no es una combinación lineal de  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ . (Lay, 2012)

## References

Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educación, México.