Introducción a las Transformaciones Lineales

Pablo Dario

03/01/2024

La diferencia entre una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y la ecuación vectorial asociada $x_1\mathbf{a_1} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{b}$ es tan solo cuestión de notación. Sin embargo, es posible encontrar una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en álgebra lineal que no esté directamente relacionada con combinaciones lineales de vectores. Esto sucede cuando se piensa en la matriz A como un objeto que "actúa" sobre un vector $\mathbf{x}$ multiplicándolo para producir un nuevo vector $A\mathbf{x}$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Así podemos observar que la multiplicación por la primera matriz transforma al primer vector en otro, y transforma al segundo vector en el vector cero.

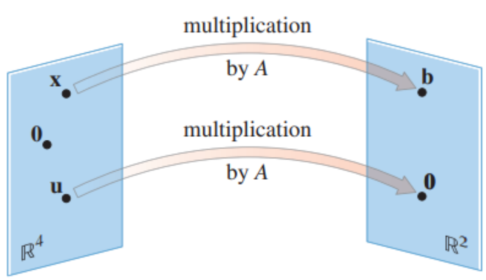

Figure 1: Transformación de vectores por medio de multiplicación matricial

Así bien, desde este punto de vista resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a encontrar todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que se transforman en el vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$ como resultado de la acción de la multiplicación por A.

La correspondencia de $\mathbf{x}$ a $A\mathbf{x}$ es una **función** de un conjunto de vectores a otro. Este concepto generaliza la noción común de una función como una regla que transforma un número real en otro. Así bien una **transformación** puede verse como una **función o mapeo**.

Una **transformación** T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ un vector $T(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^m$. El conjunto de $\mathbb{R}^n$ se llama **dominio** de T, y $\mathbb{R}^m$ se llama el **codominio** de T.
La notación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ indica que el dominio T es $\mathbb{R}^n$ y que el codominio es $\mathbb{R}^m$. Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, el vector $T(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^m$ es la **imagen** de $\mathbf{x}$ (bajo la acción o transformación de T). El **conjunto de todas las imágenes** $T(\mathbf{x})$ es el **rango** de T.

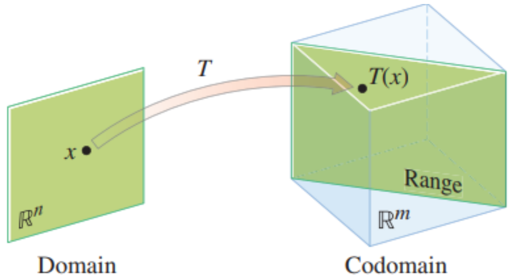

Figure 2: Dominio, codominio y rango de T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Transformaciones Matriciales

Para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x})$ se calcula como $A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de $m \times n$. Para simplificar, algunas veces esta transformación matricial se denota como $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$. El dominio de T es $\mathbb{R}^n$ cuando A tiene n columnas y el codominio de T es $\mathbb{R}^m$ cuando las columnas de A tienen m entradas. El rango de T es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A porque cada imagen $T(\mathbf{x})$ es de la forma $A\mathbf{x}$.

Ejemplo 1

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

defina una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, así bien obtenemos

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -3x_2 \\ 3x_1 & +5x_2 \\ -x_1 & +7x_2 \end{bmatrix}$$

1.- Encuentre $T(\mathbf{u})$, la imagen de $\mathbf{u}$ bajo la transformación de T

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

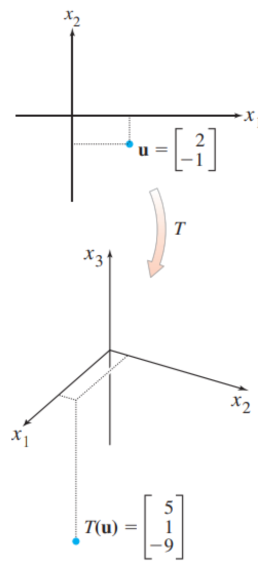

Figure 3: Imagen de $\mathbf{u}$

2.- Encuentre una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$

Para ello, debemos resolver $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Es decir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Reducimos por filas la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así que $x_1 = 1.5, x_2 = -0.5$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ La imagen de este vector $\mathbf{x}$ bajo T es el vector $\mathbf{b}$ dado

Ahora nos preguntamos si hay más de una $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$ o bien ¿Es $\mathbf{b}$ la imagen de una única $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$?; si vemos el vector anterior $\mathbf{x}$ nos daremos cuenta que no hay variables libres y por lo tanto la solución es única, es decir hay exactamente una $\mathbf{x}$ cuya imagen es $\mathbf{b}$.

Para determinar si $\mathbf{c}$ está en el rango de la transformación T, debemos verificar si $\mathbf{c}$ es la imagen vectorial de alguna $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ es decir si $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ para alguna $\mathbf{x}$. Esto es otra manera de preguntar si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es consistente. Al reducir la matriz aumentada obtenemos:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{array}\right]$$

La tercera ecuación nos indica que el sistema es inconsistente, por lo tanto $\mathbf{c}$ no está en el rango de T.

Ejemplo 2

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces la transformación $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ proyecta puntos de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano x_1x_2 porque

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

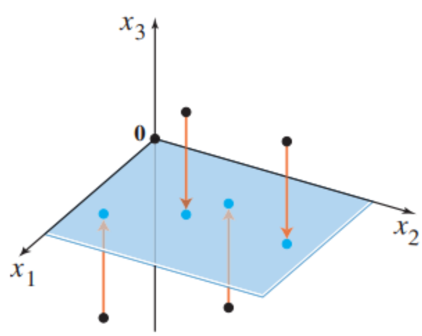

Figure 4: Una transformación proyección

Transformaciones Lineales

Si A es de $m \times n$ entonces la transformación $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ tiene las propiedades

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \quad \text{y} \quad A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$$

para toda $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^{\ltimes}$ y todos los escalares c

Propiedades

Una transformación o (mapeo) T es **lineal** si:

1.- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todas las **u, v** en el dominio de T.

2.- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ para todos los escalares c y para todas las **u** en el dominio de T.

Cada transformación matricial es una transformación lineal; estas preservan las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar. Las propiedades anteriormente mencionadas conducen fácilmente a los siguientes útiles resultados

Propiedades

Si T es una transformación lineal, entonces

$$T(0) = 0$$

y

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

para todos los vectores **u, v** en el dominio de T y para todos los escalares c, d.

La segunda se puede generalizar, obteniendo

$$T(c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_p\mathbf{v_p}) = c_1T\mathbf{v_1} + \cdots + c_pT\mathbf{v_p}$$

conocido también como principio de superposición.

Ejemplo 3

Dado un escalar r defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})$. T se llama contracción cuando $0 \leq r \leq 1$ y una dilatación cuando $r > 1$. Sea $r = 3$ y demuetsre que T es una Transformación lineal.

Sea **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$ y sean c, d escalares, obtenemos:

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) &= 3(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) \\ &= c(3\mathbf{u}) + d(3\mathbf{v}) \\ &= cT(\mathbf{u}) + cT(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Así T es una transformación lineal porque satisface

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

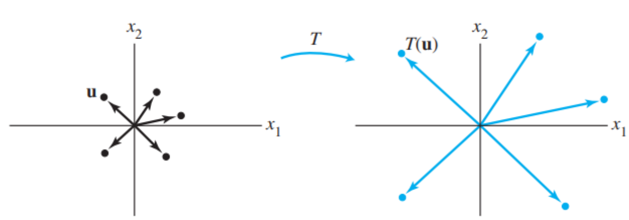

Figure 5: Transformación de Dilatación

Ejemplo 4

Defina una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Encuentre las imágenes bajo T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

Por lo tanto las Transformaciones quedarían de la siguiente manera:

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. Es claro que T hace girar a **u, v** y **u + v** en el sentido antihorario en torno al origen en un ángulo de 90 grados. (Lay, 2012)

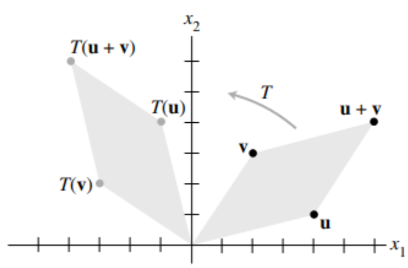

Figure 6: Transformación de Rotación

Resumen

- Una **transformación** T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ un vector $T(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^m$.
- El dominio de T es $\mathbb{R}^n$ cuando A tiene n columnas y el codominio de T es $\mathbb{R}^m$ cuando las columnas de A tienen m entradas.
- Los vectores que se van a transformar bajo T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ tienen n entradas y los vectores resultantes tienen m entradas.

References

Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson Educación, México.