Cálculos de la Tarea 1B

Inferencia Estadística

Ana
Daniel
Pablo

28 de noviembre de 2020

Capítulo 6

Ejercicio 6.8.3:

- a) (0.99*(10^(-5)))/(0.99*(10^(-5)) + 0.01*(1-10^(-5))) ≈ 0.000989031

```
a = (0.99 * (10^(-5))) / (0.99 * (10^(-5)) + 0.01 * (1 - 10^(-5)))
```

Out[ ]= 0.000989031

- b) (0.01*(10^(-5)))/(0.01*(10^(-5)) + 0.99*(1-10^(-5)))= 0.000000101011

```
b = (0.01 * (10^(-5))) / (0.01 * (10^(-5)) + 0.99 * (1 - 10^(-5)))
```

Out[ ]= 1.01011×10^{-7}

```
AccountingForm[1.01011 × 10^-7]
forma contable
```

Out[ ]//AccountingForm=

```
0.000000101011
```

- c) La suma de las probabilidades anteriores es aproximadamente: 0.000989132

```
a + b
```

Out[ ]= 0.000989132

Ejercicio 6.8.8:

- **a)**

Calculamos la fdp condicional:

In[ ]:=
```
Function[x, PDF[PoissonDistribution[c * θ], x]][x]
función      fun·· distribución Poisson
```

Out[ ]=
$$\begin{cases} \frac{e^{-c\theta}(c\,\theta)^x}{x!} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Nos quedamos con la parte de $x \geq 0$

In[ ]:= fdpCondX = $\frac{e^{-c\theta}(c\,\theta)^x}{x!}$

Out[ ]= $\frac{e^{-c\theta}(c\,\theta)^x}{x!}$

Calculamos la fdp de θ:

In[ ]:=
```
Function[θ, PDF[GammaDistribution[α, 1/λ], θ]][θ]
función      fun·· distribución gamma
```

Out[ ]=
$$\begin{cases} \frac{e^{-\theta\lambda}\theta^{-1+\alpha}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha}}{\text{Gamma}[\alpha]} & \theta > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

In[ ]:= FullSimplify[Piecewise[{{$\frac{e^{-\theta\lambda}\theta^{-1+\alpha}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha}}{\text{Gamma}[\alpha]}$, θ > 0}}, 0]]

simplifica compl··· función a trozos

Out[ ]=
$$\begin{cases} \frac{e^{-\theta\lambda}\theta^{-1+\alpha}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha}}{\text{Gamma}[\alpha]} & \theta > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Nos quedamos con la parte de θ>0:

In[∘]:= fdpΘ = $\frac{e^{-\theta\lambda}\,\theta^{-1+\alpha}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha}}{\text{Gamma}[\alpha]}$

Out[∘]= $\frac{e^{-\theta\lambda}\,\theta^{-1+\alpha}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha}}{\text{Gamma}[\alpha]}$

In[∘]:= fdpXΘ = fdpΘ * fdpCondX

Out[∘]= $\frac{e^{-c\,\theta-\theta\lambda}\,\theta^{-1+\alpha}\,(c\,\theta)^{x}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha}}{x!\ \text{Gamma}[\alpha]}$

La reescribimos. Por simplicidad, aquí d1 := d^{*}, a1:=α^{*} y l1:=λ ^{*}:

In[∘]:= fdpXΘ = d1 * (θ^(a1 - 1)) * (e^(-l1 * θ))

Out[∘]= $d1\ e^{-l1\,\theta}\,\theta^{-1+a1}$

- **b)**

Calculamos la integral de la fdp conjunta respecto a θ:

In[∘]:= fdpX = Integrate[fdpXΘ, {θ, 0, ∞}]
integra

Out[∘]= ConditionalExpression[$d1\ l1^{-a1}$ Gamma[a1], Re[a1] > 0 && Re[l1] > 0]

In[∘]:= fdpCondΘ = fdpXΘ / fdpX

Out[∘]= ConditionalExpression[$\frac{e^{-l1\,\theta}\,l1^{a1}\,\theta^{-1+a1}}{\text{Gamma}[a1]}$, Re[a1] > 0 && Re[l1] > 0]

IV. Ejercicio 6.8.17:

- **a)**

La esperanza de la variable aleatoria $\sqrt{v/U}$ es:

In[∘]:= Expectation[$\sqrt{\frac{\nu}{U}}$, U ≈ GammaDistribution[$\frac{\nu}{2}$, 2]]
expectación　distribución gamma

Out[∘]= $\frac{\sqrt{\nu}\ \text{Gamma}\left[\frac{1}{2}(-1+\nu)\right]}{\sqrt{2}\ \text{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]}$

La esperanza de la variable aleatoria v/U es:

In[ ]:= `Expectation[ν/U, U ≈ GammaDistribution[ν/2, 2]]`
expectación distribución gamma

Out[ ]= $$\frac{\nu}{-2+\nu}$$

- b)

La fdp condicional es:

In[ ]:= `fdpCond = Function[t, PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[ν / u]], t]][t]`
función fun·· distribución normal raíz cuadrada

Out[ ]= $$\frac{e^{-\frac{t^2 u}{2\nu}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\nu}{u}}}$$

Para la fdp de U, primero calculamos:

In[ ]:= `Function[u, PDF[GammaDistribution[ν/2, 2], u]][u]`
función fun·· distribución gamma

Out[ ]= $$\begin{cases} \frac{2^{-\nu/2} e^{-u/2} u^{-1+\frac{\nu}{2}}}{\text{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]} & u>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

In[ ]:= `FullSimplify[Piecewise[{{`$\frac{2^{-\nu/2} e^{-u/2} u^{-1+\frac{\nu}{2}}}{\text{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]}$`, u > 0}}, 0]]`
simplifica compl··· función a trozos

Out[ ]= $$\begin{cases} \frac{2^{-\nu/2} e^{-u/2} u^{-1+\frac{\nu}{2}}}{\text{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]} & u>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Extraemos la parte de u>0 y hacemos:

In[ ]:= `fdpU = ((2^(-ν/2)) * (e^(-u/2)) * (u^(-1 + (ν/2)))) / Gamma[ν/2]`
gamma de Euler

Out[ ]= $$\frac{2^{-\nu/2} e^{-u/2} u^{-1+\frac{\nu}{2}}}{\text{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]}$$

Después calculamos la fdp conjunta:

In[ ]:=
```
fdpConj = FullSimplify[fdpU * fdpCond]
```
simplifica completamente

Out[ ]=
$$\frac{2^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{u (t^2+\nu)}{2\nu}} u^{-1+\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\nu}{u}}\ \mathrm{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]}$$

- c)

Calculamos la integral de fdpConj para obtener la fdp marginal de T:

In[ ]:=
```
fdpT = Integrate[fdpConj, {u, 0, ∞}]
```
integra

Out[ ]=
$$\mathrm{ConditionalExpression}\left[\frac{2^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{t^2}{2\nu}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}}\mathrm{Gamma}\left[\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right]}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu}\ \mathrm{Gamma}\left[\frac{\nu}{2}\right]},\ \mathrm{Re}\left[\frac{t^2}{\nu}\right] > -1\ \&\&\ \mathrm{Re}[\nu] > -1\right]$$

Capítulo 7

Ejercicio 7.8.12:

- **a)**

Aquí calculamos la esperanza de X*Y (aunque esto no se necesito, por la independencia jeje):

In[ ]:=
```
Expectation[x * y, {x ≈ NormalDistribution[μ, σ], y ≈ NormalDistribution[γ, σ]}]
```
expectación | distribución normal | distribución normal

Out[ ]= $\gamma\,\mu$

Aquí calculamos la distribución de $\hat{X}$ - $\hat{Y}$:

In[ ]:=
```
TransformedDistribution[x - y,
  {x ≈ NormalDistribution[μ, Sqrt[σ^(2) / n]], y ≈ NormalDistribution[γ, Sqrt[σ^(2) / m]]}]
```
distribución transformada | distribución normal | raíz cuadrada | distribución normal | raíz cuadrada

Out[ ]=
$$\mathrm{NormalDistribution}\left[-\gamma+\mu,\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{m}+\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

- d)

Procedemos a hallar el estimador insesgado:
Primero hallamos la distribución de U+V. Aquí P representa (U+V)/σ^(2):

In[15]:=
```
TransformedDistribution[σ^(2) * P, P ≈ ChiSquareDistribution[n + m - 2]]
```
distribución transformada · distribución chi cuadrado

Out[15]= GammaDistribution$\left[\frac{1}{2}(-2+m+n),\ 2\sigma^2\right]$

Calculamos su esperanza:

In[16]:= Mean[GammaDistribution$\left[\frac{m+n-2}{2},\ 2\sigma^2\right]$]

media · distribución gamma

Out[16]= $(-2+m+n)\,\sigma^2$

Entonces ajustamos, para que esta esperanza sea σ^(2):

In[18]:=
```
TransformedDistribution[(σ^(2) * P) / (m + n - 2), P ≈ ChiSquareDistribution[n + m - 2]]
```
distribución transformada · distribución chi cuadrado

Out[18]= GammaDistribution$\left[\frac{1}{2}(-2+m+n),\ \frac{2\sigma^2}{-2+m+n}\right]$

Comprobamos que la esperanza nos da lo que deseábamos:

In[19]:= Mean[GammaDistribution$\left[\frac{1}{2}(-2+m+n),\ \frac{2\sigma^2}{-2+m+n}\right]$]

media · distribución gamma

Out[19]= σ^2

Aquí se puede ver cómo (m+n-2)*W/σ^(2) se distribuye como una Chi^(2) con n+m -2 grados de libertad (vimos en clase que Gamma((m+n-2)/2, 1/2) es χ^(2)_(n+m-2)).

In[20]:= TransformedDistribution[((m + n - 2) * W) / σ^(2), W ≈ GammaDistribution$\left[\frac{m+n-2}{2},\ \frac{2\sigma^2}{m+n-2}\right]$]

distribución transformada · distribución gamma

Out[20]= GammaDistribution$\left[\frac{1}{2}(-2+m+n),\ 2\right]$

Ejercicio 7.8.18:

a)

Aquí verificamos cuáles son las distribuciones del numerador y del denominador de W.

In[ ]:=
```
TransformedDistribution[U / ν, U ≈ ChiSquareDistribution[ν]]
```
distribución transformada · distribución chi cuadrado

Out[ ]= GammaDistribution$\left[\frac{\nu}{2},\ \frac{2}{\nu}\right]$

In[ ]:= **TransformedDistribution[V / μ, V ≈ ChiSquareDistribution[μ]]**
distribución transformada distribución chi cuadrado

Out[ ]= GammaDistribution$\left[\frac{\mu}{2}, \frac{2}{\mu}\right]$

Aquí verificamos que W se distribuya efectivamente como la distribución F:

In[ ]:= **TransformedDistribution[(U / ν) / (V / μ),**
distribución transformada
{U ≈ ChiSquareDistribution[ν], V ≈ ChiSquareDistribution[μ]}]
distribución chi cuadrado distribución chi cuadrado

Out[ ]= FRatioDistribution[ν, μ]

In[ ]:= **PDF[FRatioDistribution[ν, μ]]**
fun·· distribución razón f

Out[ ]= Function$\left[x, \begin{cases} \frac{x^{-1+\frac{\nu}{2}} \mu^{\mu/2} \nu^{\nu/2} (\mu+x\,\nu)^{\frac{1}{2}(-\mu-\nu)}}{\text{Beta}\left[\frac{\nu}{2},\frac{\mu}{2}\right]} & x>0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}, \text{Listable}\right]$

Finalmente, aquí calculamos la distribución de la v.a (νW)/(μ + νW) con W ≈ F_ν,μ. Y vemos que, efectivamente, la distribución es una Beta y nos da los parámetros buscados.

In[ ]:= **TransformedDistribution[(ν * W) / (μ + ν * W), W ≈ FRatioDistribution[ν, μ]]**
distribución transformada distribución razón f

Out[ ]= BetaDistribution$\left[\frac{\nu}{2}, \frac{\mu}{2}\right]$

- **b)**

Aquí hacemos el cálculo de a/(1-a):

In[ ]:= **a = Y / (1 + Y)**

Out[ ]= $\frac{Y}{1+Y}$

In[ ]:= **1 - a**

Out[ ]= $1 - \frac{Y}{1+Y}$

In[ ]:= **Simplify**$\left[1 - \frac{Y}{1+Y}\right]$
simplifica

Out[ ]= $\frac{1}{1+Y}$

In[∘]:= `a / (1 - a)`

Out[∘]= $$\frac{Y}{(1+Y)\left(1-\frac{Y}{1+Y}\right)}$$

In[∘]:= `Simplify[Y / ((1 + Y) (1 - Y/(1+Y)))]`
simplifica

c)

Aquí calculamos la distribución de W y nos damos cuenta que se distribuye como una Beta Prima Generalizada.

In[1]:= `TransformedDistribution[Y * (μ / ν), Y ≈ BetaPrimeDistribution[ν / 2, μ / 2]]`
distribución transformada · distribución beta prima

Out[1]= `BetaPrimeDistribution[ν/2, μ/2, μ/ν]`

Aquí comparamos las fdp de la Beta Prima y de la F, para guiarnos en los cálculos.

In[2]:= `PDF[BetaPrimeDistribution[ν/2, μ/2, μ/ν], x]`
fun·· distribución beta prima

Out[2]= $$\begin{cases} \frac{\nu \left(\frac{x\nu}{\mu}\right)^{-1+\frac{\nu}{2}} \left(1+\frac{x\nu}{\mu}\right)^{-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}}}{\mu \, \mathrm{Beta}\left[\frac{\nu}{2},\frac{\mu}{2}\right]} & x>0 \\ 0 & \mathrm{True} \end{cases}$$

In[3]:= `PDF[FRatioDistribution[ν, μ]]`
fun·· distribución razón f

Out[3]= Function[x, $\begin{cases} \frac{x^{-1+\frac{\nu}{2}} \mu^{\mu/2} \nu^{\nu/2} (\mu+x\nu)^{\frac{1}{2}(-\mu-\nu)}}{\mathrm{Beta}\left[\frac{\nu}{2},\frac{\mu}{2}\right]} & x>0 \\ 0 & \mathrm{True} \end{cases}$, Listable]

d)

Aquí calculamos la distribución de T^(2), donde T se distribuye como una t de Student.

In[6]:= `TransformedDistribution[T^(2), T ≈ StudentTDistribution[k]]`
distribución transformada · distribución t de Student

Out[6]= `FRatioDistribution[1, k]`

In[14]:= `TransformedDistribution[U / σ^(2), U ≈ ChiSquareDistribution[n - 1]]`
distribución transformada · distribución chi cuadrado