TEMA 8

Retículos y álgebras de Boole

Contenidos

1. Conjuntos ordenados. Diagramas de Hasse. Ordenación topológica
2. Retículos ordenados y algebraicos. Isomorfismos de retículos. Retículos distributivos. Retículos acotados. Retículos complementados.
3. Álgebras de Boole.

Prerrequisitos: Teoría intuitiva de conjuntos. Relaciones binarias y sus propiedades fundamentales.

Objetivos: Saber estudiar las propiedades de una relación y determinar si es un retículo y clasificarlo. Saber dibujar el diagrama de Hasse de un conjunto parcialmente ordenado y usar esta representación para reconocer las características del conjunto y los elementos destacados en caso de ser un retículo. Saber identificar una álgebra de Boole y operar en ella utilizando las propiedades básicas. Saber construir expresiones booleanas para una función boolena y transformarlas en sus formas normales.

8.1. Conjuntos ordenados

En la asignatura de Matemática Discreta se ha estudiado el concepto general de relación y las propiedades que determinan la relaciones de orden. Recordamos a continuación estos conceptos

Definición 8.1.1 (Relación binaria) *Una* relación binaria definida en un conjunto A *es cualquier subconjunto* $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Algunas relaciones que ya hemos estudiado son la relación de inclusión entre conjuntos, la relación de divisibilidad entre números enteros, la relación de orden habitual entre números,... Por otra parte, el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas son otras relaciones conocidas en el área de la geometría.

Las relaciones pueden verificar determinadas propiedades.

Definición 8.1.2 (Propiedades de relaciones binarias) *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida en un conjunto* A.

- $\mathcal{R}$ *es* reflexiva *si para todo* $a \in A, \quad a\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ *es* simétrica *si para todo* $a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ *es* antisimétrica *si para todo* $a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b \text{ y } b\mathcal{R}a \implies a = b$
- $\mathcal{R}$ *es* transitiva *si para todo* $a, b, c \in A, \quad a\mathcal{R}b \text{ y } b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- $\mathcal{R}$ *es* conexa *si para todo* $a, b \in A, \quad$ *o bien* $a\mathcal{R}b$, *o bien* $b\mathcal{R}a$

Definición 8.1.3 (Relación de orden) *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío* A.

- *Se dice que* $\mathcal{R}$ *es una* relación de orden parcial *si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En este caso, decimos que el par* $(A, \mathcal{R})$ *es un* conjunto parcialmente ordenado.
- *Si* $\mathcal{R}$ *es una relación de orden parcial y además es conexa, decimos que es una* relación de orden total *y decimos que el par* $(A, \mathcal{R})$ *es un* conjunto totalmente ordenado.

Las relaciones de orden son el modelo matemático que describen comparaciones entre elementos de un conjunto. Por ejemplo, en un conjunto de personas podemos establecer comparaciones según la estatura, la edad, el sueldo,... que determinarían ordenaciones entre los individuos.

Ejemplo 8.1.4 1. Si S es un conjunto cualquiera, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

2. Lar relación $\leq$ dentro de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, es una relación de orden total.

3. La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ es una relación de orden parcial.

Habitualmente, para representar relaciones de orden utilizamos símbolos como $\leq$, $\preceq$ o $\sqsubseteq$ y los escribimos de forma infija, $x \leq y$, $x \preceq y$, $x \sqsubseteq y$. Cuando trabajamos en un conjunto ordenado y dos elementos están relacionados, $x \preceq y$, decimos que x es *anterior* o *precede* a y, o que y es *posterior* o *supera* a x.

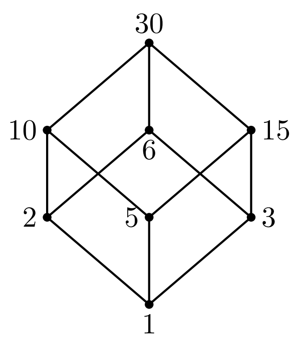
Los conjuntos parcialmente ordenados se pueden representar gráficamente con un *grafo dirigido* simplificado. Por ejemplo, teniendo en cuenta que la relación es reflexiva, se pueden omitir las aristas (a, a). Y dado que son relaciones transitivas, si aparecen las aristas (a, b) y (b, c), podemos omitir la arista correspondiente a (a, c). Por otra parte, en esas representaciones, ningún par de vértices estará unido con dos aristas en sentidos opuestos, puesto que la relación es antisimétrica. Finalmente, es habitual omitir la punta de la flecha que indica la dirección en la que se relacionan dos elementos disponiendo los vértices en sentido ascendente de forma que el inferior será anterior al superior. La representación así descrita se denomina *Diagrama de Hasse* de la relación de orden y podremos utilizarla para representar conjuntos ordenados finitos e incluso infinitos numerables si en ese caso cada elemento tiene un *sucesor inmediato.*

DEFINICIÓN 8.1.5 (SUCESOR INMEDIATO) *Sean x e y elementos de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$. Decimos que y es un* sucesor inmediato *de x si $x \preceq y$ y no existe ningún elemento $z \in A$ tal que $x \preceq z \preceq y$.*

EJEMPLO 8.1.6 Si $n > 1$ es un número natural, denotaremos por D_n al conjunto de sus divisores positivos,

$$D_n = \{m \mid m \text{ divide a } n\}$$

y por $\mathcal{D}_n = (D_n, |)$ al correspondiente conjunto ordenado con la relación de divisibilidad. Por ejemplo, $\mathcal{D}_{30} = (\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |)$ y el diagrama de Hasse de la relación aparece en el siguiente grafo:



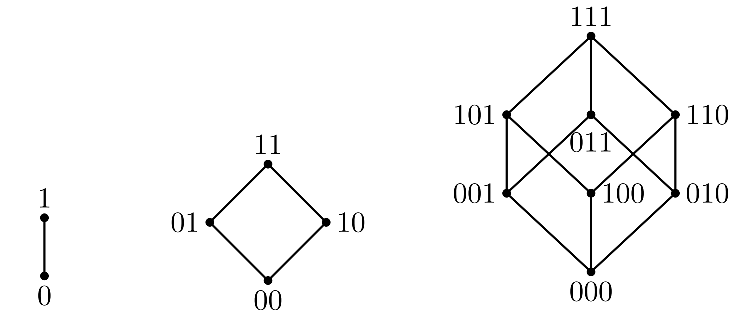
□

Ejemplo 8.1.7 (Orden producto) Si $(A, \preceq_1)$ y $(B, \preceq_2)$ son dos conjuntos parcialmente ordenados, podemos definir en $A \times B$ la relación

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \preceq_1 x_2, \quad y_1 \preceq_2 y_2$$

Esta relación es una relación de orden parcial en $A \times B$. Por ejemplo, si consideramos $A = B = \mathbb{R}$ con la relación de orden habitual entre números, la definición anterior introduciría una relación de orden parcial en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En esta relación, $(2, 1) \leq (3, 5)$, pero $(2, 5) \not\leq (3, 1)$. Obsérvese que, aunque $\leq$ es una relación de orden total en $\mathbb{R}$, su extensión a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no lo es; por ejemplo $(2, 5) \not\preceq (3, 1)$ y $(3, 1) \not\preceq (2, 5)$.

Si consideramos $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ y la relación $\prec$ dada por $0 \preceq 0$, $0 \preceq 1$, $1 \preceq 1$, los siguientes diagramas de Hasse representan los conjuntos $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^2$, $\mathbb{B}^3$ utilizando en los dos últimos el orden producto.



$(\mathbb{B}, \preceq)$ $(\mathbb{B}^2, \preceq)$ $(\mathbb{B}^3, \preceq)$

□

Ejemplo 8.1.8 (Orden Lexicográfico) Si $(A, \preceq_1)$ y $(B, \preceq_2)$ son dos conjuntos parcialmente ordenados. En el conjunto $A \times B$ se define el orden lexicográfico como

$$(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \prec_1 x_2, \quad \text{o bien,} \quad x_1 = x_2, \quad y_1 \preceq_2 y_2$$

Esta relación es de orden parcial y se extiende de forma natural a cualquier producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y al conjunto de las listas de elementos de un conjunto ordenado, A^*. □

Definición 8.1.9 (Elementos destacables) *Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.*

1. *Se dice que $c \in A$ es* cota superior *de B, si c es posterior a todos los elementos de B: para todo $x \in B$, $x \preceq c$. Denotaremos por $CS(B)$ al conjunto de todas las cotas superiores de B.*

2. *Se dice que $c \in A$ es* cota inferior *de B, si c es anterior a todos los elementos de B: para todo $x \in B$, $c \preceq x$. Denotaremos por $CI(B)$ al conjunto de todas las cotas inferiores de B.*

3. *Se dice que $M \in A$ es la* mínima cota superior *o* supremo *de B, si M es la menor de todas las cotas superiores de B: $M \in CS(B)$ y para todo $x \in CS(B)$, $M \preceq x$.*

4. *Se dice que $m \in A$ es la* máxima cota inferior *o* ínfimo *de B, si m es la mayor de todas las cotas inferiores de B: $m \in CI(B)$ y para todo $x \in CI(B)$, $x \preceq m$.*

5. *Se dice que $M \in B$ es* maximal *de B si no existe ningún elemento de B posterior a c: no existe $x \in B$ tal que $c \preceq x$.*

6. *Se dice que $m \in B$ es* minimal *de B si no existe ningún elemento de B anterior a m: no existe $x \in B$ tal que $x \preceq m$.*

7. *Se dice que $M \in B$ es* máximo *de B si es un elemento de B posterior a todos los elementos de B: $M \in B$ y para todo $x \in B$, $x \preceq M$.*

8. *Se dice que $m \in B$ es* mínimo *de B si es un elemento de B anterior a todos los elementos de B: $m \in B$ y para todo $x \in B$, $m \preceq x$.*

Un conjunto puede tener varias cotas superiores o inferiores y varios elementos maximales o minimales, sin embargo, en caso de existir, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, serían únicos.

Teorema 8.1.10
Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.

1. *Si existe el supremo de B, entonces es único.*

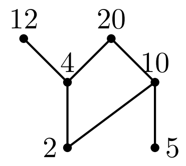
2. *Si existe el ínfimo de B, entonces es único.*

3. *Si existe el máximo de B, entonces es único.*

4. *Si existe el mínimo de B, entonces es único.*

La demostración de los cuatro apartados es similar. Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de B. Entonces $x \preceq s_1$ y $x \preceq s_2$; como s_1 es menor que todas las cotas superiores, $s_1 \preceq s_2$; pero s_2 también es menor que todas las demás cotas superiores, es decir, $s_2 \preceq s_1$. Entonces, por la propiedad de antisimetría se verifica que $s_1 = s_2$

Ejemplo 8.1.11
Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{A} = (\{2, 4, 5, 10, 12, 20\}, |)$ cuyo diagrama de Hasse se miuestra en la siguiente figura



Veamos algunos ejemplos de elementos destacados para subconjuntos de A.

- 12 y 20 son elementos maximales de $\{2, 4, 12, 20\}$ y 2 y 5 son minimales.
- 20 es máximo de $\{2, 4, 10, 20\}$, ya que es un elemento del conjunto y es múltiplo de todos los elementos. Además, 2 es mínimo del mismo conjunto, ya que pertenece a él y divide a todos los elementos.
- 20 es máximo de $\{2, 4, 5, 20\}$, pero este conjunto no tiene mínimo.
- 2 es mínimo de $\{2, 4, 12, 20\}$, pero este conjunto no tiene máximo.
- 10 y 20 son las cotas superiores de $\{2, 5, 10\}$ y por lo tanto, 10 es el supremo de ese conjunto: $CS(\{2, 5, 10\}) = \{10, 20\}$, $\sup(\{2, 5, 10\}) = 10$. En este caso, además, $\text{máx}(\{2, 5, 10\}) = 10$.
- 2 es la única cota inferior de $\{4, 10, 12, 20\}$ y por lo tanto es su ínfimo:

  $$CI(\{4, 10, 12, 20\}) = \{2\}, \quad \text{ínf}(\{4, 10, 12, 20\}) = 2$$

  Obsérvese que en este caso, el conjunto no tiene mínimo.
- 4 es la única cota inferior de $\{4, 12, 20\}$ y por lo tanto es su ínfimo y también su mínimo, puesto que pertenece al conjunto. □

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$, nos planteamos encontrar una relación de orden total $\ll$ "compatible" con $\preceq$, es decir, una relación de orden total $\ll$ que contenga a la relación de orden parcial $\preceq$ dada:

$$\text{si} \quad x \preceq y, \quad \text{entonces} \quad x \ll y$$

El proceso de construcción de $\ll$ se llama *ordenación topológica* y se basa en el siguiente lema.

Lema 8.1.12 *Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, finito y no vacío, entonces tiene un elemento minimal.*

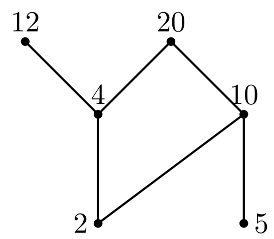
Basta recorrer los elementos del conjunto hasta encontrar uno que no tenga elementos anteriores. El proceso terminará puesto que el conjunto es finito.

El *algoritmo de ordenación topológica* se puede describir como sigue:

1. Elegimos un elemento minimal $a_1 \in A$.
2. Si el conjunto $A - \{a_1\}$ no es vacío, y dado que también es finito, tiene un elemento minimal $a_2 \in A - \{a_1\}$. Consideramos que $a_1 \ll a_2$.
3. Podemos seguir así hasta disponer a todos los elementos de A en una cadena $a_1 \ll a_2 \ll ... \ll a_n$ que define el orden total.

El orden $\ll$ definido en el algoritmo es el orden de elección de los elementos de A. Por esta razón, si $a_i \prec a_j$ necesariamente tendremos que elegir a a_i antes que a a_j, puesto que elegimos elementos minimales. De esta forma, si $a_i \prec a_j$ entonces $a_i \ll a_j$.

Ejemplo 8.1.13 Consideremos el conjunto ordenado definido por el siguiente diagrama de Hasse.



- 5 es un elemento minimal del conjunto, así que podemos elegirlo en primer lugar.
- El conjunto $\{2, 4, 10, 12, 20\}$ resultante de eliminar 5, tiene un único elemento minimal, el 2, así que lo elegimos en segundo lugar, $5 \ll 2$.
- El conjunto $\{4, 10, 12, 20\}$ resultante de eliminar 5 y 2, tiene dos elementos minimales, 4 y 10; elegimos 10: $5 \ll 2 \ll 10$.
- El conjunto $\{4, 12, 20\}$ resultante de eliminar 5, 2 y 10, tiene un único elemento minimal, el 4 y lo elegimos a continuación: $5 \ll 2 \ll 10 \ll 4$.
- Los dos elementos del conjunto $\{12, 20\}$, resultante de eliminar 5, 2, 10 y 4, son minimales. Elegimos 20 y finalmente 12 para construir el orden completamente: $5 \ll 2 \ll 10 \ll 4 \ll 20 \ll 12$.

Podemos observar fácilmente que la ordenación topológica no es única, ya que cuando tenemos varios maximales podemos elegir uno cualquiera. Por ejemplo,

$2 \ll 4 \ll 12 \ll 5 \ll 10 \ll 20$ sería otro orden total compatible con el orden parcial inicial. □

8.2. Retículos ordenados y algebraicos

Los *retículos* son un tipo de conjuntos ordenados con importantes aplicaciones en computación en áreas en dónde se necesitan nociones de aproximación. Se usan para representar el comportamiento de programas y son útiles en áreas como optimización combinatoria y criptografía. Son la base matemática del *Análisis Formal de Conceptos*, herramienta usada para el análisis de datos.

DEFINICIÓN 8.2.1 (RETÍCULO ORDENADO) *Se dice que un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \preceq)$ *es un* retículo (ordenado) *si cada par de elementos* $x, y \in L$ *tiene supremo e ínfimo,* $\sup\{a,b\} \in \mathcal{L}$, $\text{ínf}\{a,b\} \in \mathcal{L}$. *Un retículo se dice* completo *si todo subconjunto* $X \subseteq L$ *tiene supremo e ínfimo* $\sup(X) \in \mathcal{L}$, $\text{ínf}(X) \in \mathcal{L}$.

En los retículos ordenados se suelen utilizar los operadores supremo e ínfimo como operadores binarios, utilizando los símbolos $\sqcup$ y $\sqcap$

$$x \sqcup y = \sup\{a,b\}, \qquad x \sqcap y = \text{ínf}\{a,b\}$$

EJEMPLO 8.2.2 Para todo conjunto S, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo ordenado:

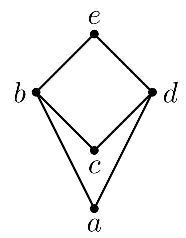
$$A \sqcup B = \sup\{A,B\} = A \cup B \in \mathcal{P}(S), \quad A \sqcap B = \text{ínf}\{A,B\} = A \cap B \in \mathcal{P}(S)$$ □

EJEMPLO 8.2.3 $(\mathbb{Z}^+, |)$ es un retículo ordenado:

$$n \sqcup m = \sup\{n,m\} = \text{mcm}(n,m) \in \mathbb{Z}^+, \quad n \sqcap m = \text{ínf}\{n,m\} = \text{mcd}(n,m) \in \mathbb{Z}^+$$ □

EJEMPLO 8.2.4 Los siguientes diagramas de Hasse corresponden a retículos ordenados.

Sin embargo, el siguiente conjunto ordenado no es retículo.



Por ejemplo, $\mathrm{CS}(\{a,c\}) = \{b,d,e\}$ y este conjunto no tiene elemento mínimo, por lo que no existe el supremo de a y c. $\square$

Como operadores binarios, el supremo y el ínfimo caracterizan los retículos ordenados. En el siguiente teorema vemos las propiedades que los definen.

TEOREMA 8.2.5 *Sea el retículo* $(L, \preceq)$ *un retículo ordenado con operador supremo* $\sqcup$ *y operador mínimo* $\sqcap$*. Entonces:*

1. Propiedad conmutativa: $x \sqcup y = y \sqcup x, \quad x \sqcap y = y \sqcap x.$
2. Propiedad asociativa: $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z, \quad x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z.$
3. Propiedad de absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x, \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x.$

Estas tres propiedades constituyen la definición axiomática de *retículo algebraico*.

DEFINICIÓN 8.2.6 (RETÍCULO ALGEBRAICO) *Sean* $\sqcup$ *y* $\sqcap$ *dos operaciones binarias definidas en un conjunto* L*. Decimos que* $(L, \sqcup, \sqcap)$ *es un* retículo algebraico *si para todo* $x, y, z \in L$ *se verifican las siguientes propiedades:*

1. Propiedad conmutativa: $x \sqcup y = y \sqcup x, \quad x \sqcap y = y \sqcap x.$
2. Propiedad asociativa: $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z, \quad x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z.$
3. Propiedad de absorción: $x \sqcup (x \sqcap y) = x, \qquad x \sqcap (x \sqcup y) = x.$

De hecho, las dos estructuras son coincidentes. Si en el teorema anterior a esta definición hemos visto que todo retículo ordenado es un retículo algebraico, también podemos demostrar que todo retículo algebraico es un retículo ordenado.

TEOREMA 8.2.7 *Sea* $(L, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo algebraico y consideremos la relación*

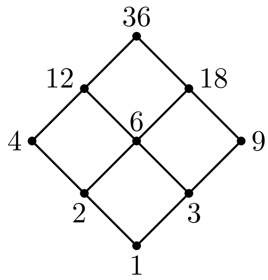
$$x \prec y \quad \text{si y solo si} \quad x \sqcup y = y, \quad x, y \in L$$

Entonces, $(L, \preceq)$ *es un retículo ordenado y* $\sup_L\{x,y\} = x \sqcup y$, $\text{ínf}_L\{x,y\} = x \sqcap y$.

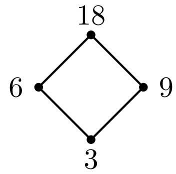
Definición 8.2.8 (Subretículo) *Sea* $(L, \sqcup, \sqcap)$ *un retículo y* $M \subseteq L$. *Decimos que* M *es un* subretículo *de* L *si para todo* $x, y \in \mathcal{M}$,

$$x \sqcup y \in \mathcal{M}, \qquad x \sqcap y \in \mathcal{M}$$

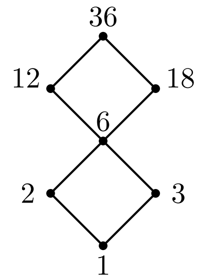
Ejemplo 8.2.9 Considerando los siguientes diagramas de Hasse, $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son subretículos de $\mathcal{D}_{36}$.



$\mathcal{D}_{36}$

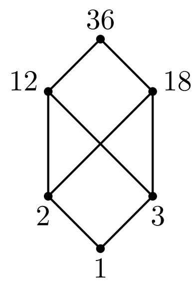


$\mathcal{M}_1$



$\mathcal{M}_2$

Sin embargo, no todos los subconjuntos de un retículo son subretículos. Por ejemplo, $\mathcal{M}_3$ no es subreticulo de $\mathcal{D}_{36}$, puesto que $\sup\{2, 3\} \notin \mathcal{M}_3$.



$\mathcal{M}_3$

□

Como es habitual en estructuras matemáticas, usamos la noción de isomorfismo para describir conjuntos que son indistinguibles respecto de una estructura determinada.

Definición 8.2.10 *Sean* $(L_1, \preceq_1)$ *y* $(L_2, \preceq_2)$ *dos retículos. Decimos que son* isomorfos *si existe un* isomorfismo de retículos *entre ellos, una función biyectiva* $f \colon L_1 \to L_2$ *tal que*

$$x \preceq_1 y \iff f(x) \preceq_2 f(y), \qquad \textit{para todo } x, y \in L_1$$

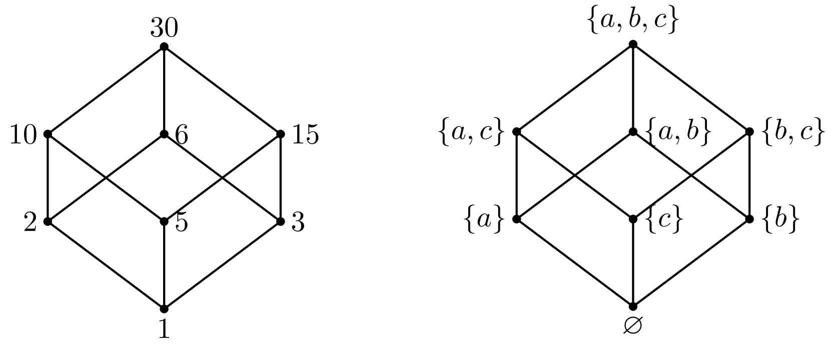
Los isomorfismos también se pueden caracterizar usando la estructura algebraica.

TEOREMA 8.2.11 *Sean* $(L_1, \preceq_1)$ *y* $(L_2, \preceq_2)$ *dos retículos y* $f\colon L_1 \to L_2$ *una función biyectiva.* f *es un isomorfismo si y solo si*

$$f(x \sqcup_1 y) = f(x) \sqcup_2 f(y), \qquad f(x \sqcap_1 y) = f(x) \sqcap_2 f(y)$$

Dos retículos isomorfos son idénticos algebraicamente y como conjuntos ordenados y, por lo tanto, sus diagramas de Hasse sólo se diferenciarán en las etiquetas de los vértices.

EJEMPLO 8.2.12 $(D_{30}, |)$ y $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ son retículos isomorfos:



$\mathcal{D}_{30}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$

Y la siguiente aplicación es un isomorfismo:

$$f(1) = \varnothing, \quad f(2) = \{a\}, \quad f(5) = \{c\}, \quad f(3) = \{b\}, \quad f(10) = \{a,c\},$$
$$f(6) = \{a,b\}, \quad f(15) = \{b,c\}, \quad f(30) = \{a,b,c\}$$ □

8.3. Retículos distributivos, acotados, complementados

DEFINICIÓN 8.3.1 (RETÍCULO DISTRIBUTIVO) *Se dice que el retículo* $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ *es* distributivo *si para cada* $x, y, z \in \mathcal{L}$ *se verifica*

$$\begin{aligned} x \sqcap (y \sqcup z) &= (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \\ x \sqcup (y \sqcap z) &= (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \end{aligned}$$

EJEMPLO 8.3.2

- Para cada conjunto S, $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$ es un retículo distributivo.
- Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{D}_n$ es un retículo distributivo.

TEOREMA 8.3.3 *Los subretículos de retículos distributivos son también distributivos.*

Ejemplo 8.3.4 Los retículos definidos por los siguientes diagramas de Hasse no son distributivos.

Diamante Pentágono

El diamante no es distributivo, ya que las siguientes resultados son distintos:

$$\begin{array}{rcccl} a \sqcap (b \sqcup c) & = & a \sqcap 1 & = & a \\ (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) & = & 0 \sqcup 0 & = & 0 \end{array}$$

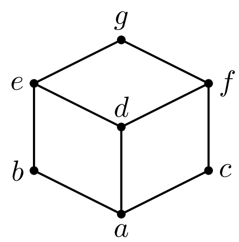
El pentágono tampoco es distributivo porque los siguietnes resultados son distintos:

$$\begin{array}{rcccl} a \sqcup (b \sqcap c) & = & a \sqcup 0 & = & a \\ (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) & = & b \sqcap 1 & = & b \end{array}$$ □

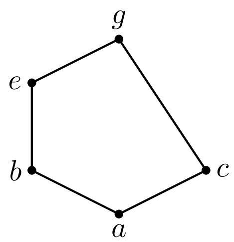
Los retículos del ejemplo anterior son los más representativos de entre los no distributivos y de hecho los caracterizan.

Teorema 8.3.5 *Un retículo es no distributivo si y sólo si contiene un subretículo isomorfo al diamante o al pentágono del ejemplo anterior.*

Ejemplo 8.3.6 El retículo definido por el siguiente diagrama de Hasse no es distributivo.



El subretículo $\{a, b, c, e, g\}$ es isomorfo al pentágono.



También podemos probarlo usando las siguientes expresiones cuyos valores no son iguales.

$$\begin{array}{rcccl} e \sqcap (b \sqcup c) & = & e \sqcap g & = & e \\ (e \sqcap b) \sqcup (e \sqcap c) & = & b \sqcup a & = & b \end{array}$$

□

Teorema 8.3.7 (Cancelación) *Sea $(L, \sqcup, \sqcap)$ un retículo distributivo y sean $a, b, c \in L$ tales que*

$$x \sqcup y = x \sqcup z \qquad y \qquad x \sqcap y = x \sqcap z$$

Entonces $y = z$.

La demostración consiste en aplicar las propiedades de los operadores:

$$\begin{aligned} y &\overset{(Abs.)}{=} y \sqcup (x \sqcap y) \overset{(Hip.)}{=} y \sqcup (x \sqcap z) \overset{(Dist.)}{=} (y \sqcup x) \sqcap (y \sqcup z) = \\ &\overset{(Hip.)}{=} (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z) \overset{(Dist.)}{=} (x \sqcap y) \sqcup z \overset{(Hip.)}{=} (x \sqcap z) \sqcup z \overset{(Abs.)}{=} z \end{aligned}$$

Definición 8.3.8 *Sea $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ un retículo. Se llama* mínimo *o* primer elemento *de $\mathcal{L}$ al elemento, si existe, que es anterior a todo elemento del retículo, y se denota por 0_L. Se llama* máximo *o* último elemento *de $\mathcal{L}$ al elemento, si existe, que es posterior a todo elemento del retículo, y se denota por 1_L. Decimos que el retículo es* acotado *si tiene primer y último elemento.*

Ejemplo 8.3.9

- Para cada conjunto S: $\big(\mathcal{P}(S), \subseteq\big)$ es retículo acotado, siendo $\varnothing$ su mínimo y S su elemento máximo.
- Para todo entero positivo n: $(D_n, |)$ es un retículo acotado, siendo 1 su mínimo y n su elemento máximo. □

En general, no todos los retículos infinitos son acotados. Por ejemplo, $\big(\mathcal{P}(S), \subseteq\big)$ es un retículo acotado incluso si S es infinito, pero $(\mathbb{Z}, \leq)$ no es acotado, puesto que no tiene ni primer ni último elemento. Sin embargo, es obvio que todo todo retículo finito es acotado, ya que si $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces $x_1 \sqcap \cdots \sqcap x_n$ es el primer elemento del retículo y $x_1 \sqcup \cdots \sqcup x_n$ es el último elemento del retículo.

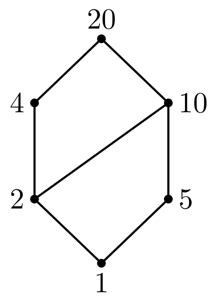
Las siguientes propiedades son inmediatas.

Teorema 8.3.10 *Si $(L, \preceq)$ un retículo acotado, entonces todo elemento x del retículo verifica:*

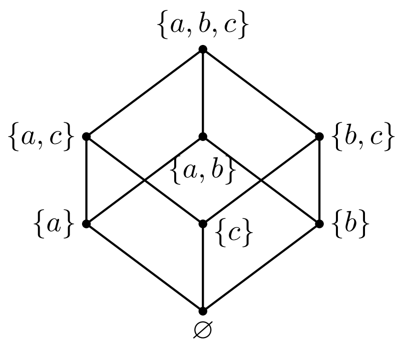
1. $x \sqcup 0_L = x, \qquad a \sqcap 0_L = 0_L$
2. $x \sqcap 1_L = x, \qquad x \sqcup 1_L = 1_L$

Definición 8.3.11 (Átomo y superátomo) *Sea* $(L, \preceq)$ *un retículo acotado. Se llama* átomo *a cada elemento que es sucesor inmediato del primer elemento. Se llama* superátomo *a cada elemento cuyo sucesor inmediato es el último elemento.*

Ejemplo 8.3.12 Los átomos del retículo $\mathcal{D}_{20}$ son 2 y 5 y los superátomos son 4 y 10.



En $P(\{a,b,c\})$, los átomos son los subconjuntos con un único elemento y los superátomos son los subconjuntos con dos elementos.

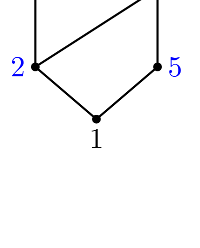


□

Definición 8.3.13 (Elemento $\sqcup$-irreducible) *Un elemento* $x \in \mathcal{L}$ *de un retículo se dice que es* $\sqcup$-irreducible *si no se puede expresar como el supremo de otros elementos, es decir:*

$$\textit{Si} \quad x = y \sqcup z, \quad \textit{entonces o bien} \quad x = y \quad \textit{o bien} \quad x = z$$

Ejemplo 8.3.14 Los elementos $\sqcup$-irreducibles de $\mathcal{D}_{20}$ son 2, 4 y 5.



□

Teorema 8.3.15 *Sea $x \neq 0_L$ es $\sqcup$-irreducible si y solo si es sucesor inmediato de exactamente un elemento. En particular, los átomos son elementos $\sqcup$-irreducibles.*

En general, puede haber elementos $\sqcup$-irreducibles que no sean átomos. Por ejemplo, en el retículo $\mathcal{D}_{20}$ del ejemplo anterior a este teorema, hemos visto que 4 es un elemento $\sqcup$-irreducible y no es átomo.

Teorema 8.3.16 *Cada elemento x de un retículo finito se puede expresar como supremos de elementos $\sqcup$-irreducibles*

$$x = d_1 \sqcup d_2 \sqcup \cdots \sqcup d_t$$

tales que $d_i \not\leq d_j$ para cada para i, j (es decir, no hay elementos redundantes).

Por lo general, la expresión descrita en el teorema anterior no tiene porqué ser única.

Definición 8.3.17 (Elementos complementarios) *Sea $\mathcal{L}$ un retículo acotado. Decimos que dos elementos del retículo, x, y, son* complementarios *si*

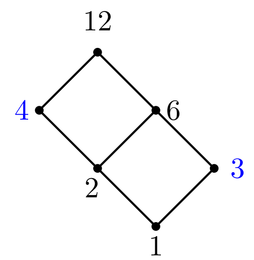
$$x \sqcup y = 1_L \quad y \quad x \sqcap y = 0_L$$

También decimos que x es complemento *de y y que y es* complemento *de x. En particular, 1_L y 0_L son complementarios.*

Decimos que el retículo es complementado *si cada elemento tiene al menos un complemento. Si cada elemento x tiene un único complemento, lo denotamos $\overline{x}$.*

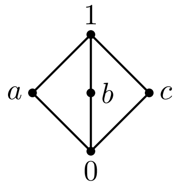
La segunda parte de la definición tiene sentido porque en un retículo acotado, un elemento puede no tener complemento, tener un único complemento o puede tener más de un complemento.

Ejemplo 8.3.18 En el retículo $\mathcal{D}_{12}$, los elementos 2 y 6 no tienen complementos; el único complemento de 3 es 4, que tiene a 3 como único complemento.



□

EJEMPLO 8.3.19 En el retículo diamante,



- b y c son complementos de a, ya que $a \sqcup b = 1$, $a \sqcap b = 0$, $a \sqcup c = 1$ y $a \sqcap c = 0$
- b y c son complementarios, ya que $b \sqcup c = 1$ y $b \sqcap c = 0$. □

8.4. Álgebras de Boole

DEFINICIÓN 8.4.1 *Los retículos distributivos y complementados se denominan* retículos de Boole *o* álgebras de Boole*.*

EJEMPLO 8.4.2

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ con el orden habitual, es un álgebra de Boole Las operaciones supremo e ínfimo asociadas son:

$\sqcup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\sqcap$	0	1
0	0	0
1	0	1

  Y el complemento es; $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$.

- Para cada conjunto S el conjunto de las partes de S forma un álgebra de Boole, $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$, en donde el complemento es $\overline{X} = S - X$. □

Habitualmente, se prefiere utilizar la estructura algebraica de las álgebras de Boole tomando la siguiente definición equivalente.

DEFINICIÓN 8.4.3 (ÁLGEBRA DE BOOLE) *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío que contiene dos elementos especiales $0_\mathcal{A}, 1_\mathcal{A}$, $0_\mathcal{A} \neq 1_\mathcal{A}$; dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ y una operación unaria $-$. Se dice que $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_\mathcal{A}, 1_\mathcal{A})$ es un* álgebra de Boole *si para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$ se verifican las siguientes propiedades:*

- *Asociativa:* $x + (y + z) = (x + y) + z$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

- *Identidad:* $x + 0_{\mathcal{A}} = x, \quad x \cdot 1_{\mathcal{A}} = x.$
- *Conmutativa:* $x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x.$
- *Distributiva:* $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z), \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$
- *Complemento:* $x + \overline{x} = 1_{\mathcal{A}}, \quad x \cdot \overline{a} = 0_{\mathcal{A}}$

De esta forma, si $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ es un álgebra de Boole, consideraremos como definida la relación de orden que le dota de la estructura de retículo distributivo y complementado:

$$x \preceq y \iff x + y = y \iff x \cdot y = x$$

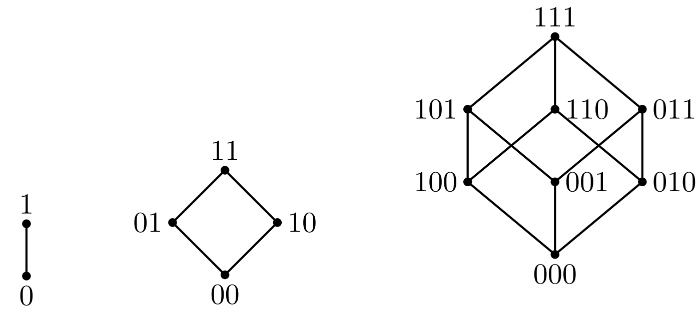
TEOREMA 8.4.4 *En todo álgebra de Boole* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *se verifican las siguiente propiedades:*

- *Absorción:* $x + (x \cdot y) = x, \quad x \cdot (x + y) = x.$
- *Idempotencia:* $x + x = x, \quad x \cdot x = x.$
- *Dominancia:* $x + 1 = 1, \quad 0 \cdot x = 0.$
- *De Morgan:* $(\overline{x + y}) = \overline{x} \cdot \overline{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}.$
- *Involución:* $\overline{\overline{x}} = x.$

Todos los conceptos y resultados que hemos visto en la sección correspondiente a retículos son aplicables a las álgebras de Boole, por ejemplo, los conceptos de átomos, superátomos y elementos irreducibles.

EJEMPLO 8.4.5

- ($\mathcal{D}_{210}$ con las operaciones mínimo común múltiplo y máximo común divisor es un álgebra de Boole. En este álgebra, los elementos 2, 3, 5 y 7 son los átomos y los superátomos son 105, 70, 42 y 30.
- En el álgebra de Boole $\big(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, -, \varnothing, \{a, b, c\}\big)$, los átomos son $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$ y los superátomos son $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ y $\{a, b\}$.
- El producto cartesiando de dos álgebras de Boole también será un álgebra de Boole considerando las operaciones por componentes. Por ejemplo, las siguientes se construyen a partir de $\mathbb{B}$:



$\mathbb{B}$ $\quad$ $\mathbb{B} \times B$ $\quad$ $\mathbb{B} \times B \times B$

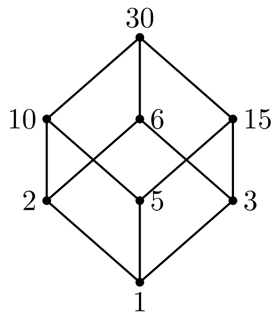
Definición 8.4.6 (Isomorfismo de álgebras de Boole)
Sean $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *y* $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}})$ *dos álgebras de Boole. Un* isomorfismo *de álgebras de Boole es una función* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *que es biyectiva y que verifica, para todo* $x, y \in \mathcal{A}$*:*

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$
2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$
3. $\varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(y)}$

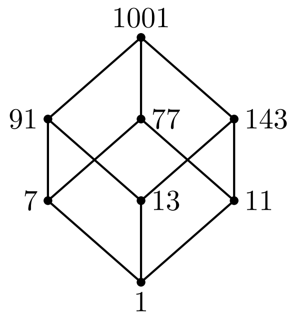
Ejemplo 8.4.7 La función $\varphi\colon \mathcal{D}_{30} \to \mathcal{D}_{1001}$ definida

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} \varphi(1) & = & 1 & \varphi(2) & = & 7 & \varphi(5) & = & 13 & \varphi(3) & = & 11 \\ \varphi(10) & = & 91 & \varphi(6) & = & 77 & \varphi(15) & = & 143 & \varphi(30) & = & 1001 \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras de Boole.



$(\mathcal{D}_{30}, |)$



$(\mathcal{D}_{1001}, |)$

□

Como es habitual, los isomorfismos capturan la estructura del conjunto con independencia de los elementos. En el caso de álgebras finitas, las posibles estructuras distintas son muy reducidas.

Lema 8.4.8 *Sea* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ *un álgebra de Boole finita. Si* b *es cualquier elemento distinto de* $0_{\mathcal{A}}$ *en* $\mathcal{A}$*, y* $a_1, a_2, ..., a_k$ *son todos los átomos de* $\mathcal{A}$ *tales que* $a_i \preceq b$*, entonces* $b = a_1 + a_2 + ... + a_k$ *de forma única.*

Es decir, en un álgebra de Boole finita, todo elemento se puede expresar como suma de los átomos anteriores a él.

Ejemplo 8.4.9

- En el álgebra de Boole $\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$ cada elemento se expresa como unión de los subconjuntos unitarios contenidos en él. Por ejemplo, $\{a, c, d\} = \{a\} \cup \{c\} \cup \{d\}$.

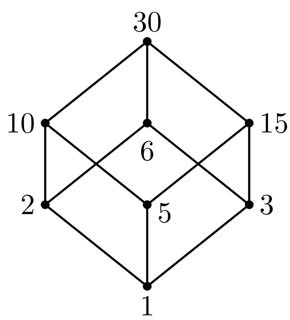
- En el álgebra de Boole $\mathbb{B}^7$, el elemento $(0,1,0,0,1,1,0)$ se expresa como suma de los átomos $(0,1,0,0,0,0,0)+(0,0,0,0,1,0,0)+(0,0,0,0,0,1,0)$. □

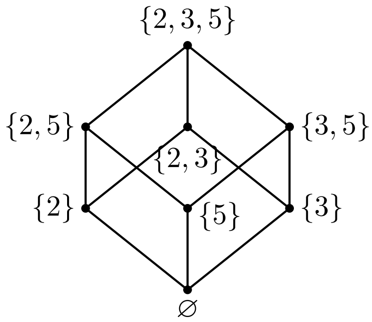
Del lema anterior se deduce que hay una biyección entre los elementos de un álgebra de Boole y los subconjuntos de sus átomos. Esta biyección determina un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{P}(S)$, en donde S es el conjunto de átomos de $\mathcal{A}$.

Teorema 8.4.10 *Toda álgebra de Boole finita* $(\mathcal{A},+,\cdot,-,0_{\mathcal{A}},1_{\mathcal{A}})$ *es isomorfa al álgebra de Boole* $(\mathcal{P}(S),\cup,\cap,-,\varnothing,S)$*, donde* S *es el conjunto de átomos de* $\mathcal{A}$*.*

Como consecuencia, se deduce que el cardinal de un álgebra de Boole finita es igual a 2^n para algún natural n.

Ejemplo 8.4.11
$(\mathcal{D}_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$ es isomorfa a $(\mathcal{P}(\{2,3,5\}),\cup,\cap,-,\varnothing,\{2,3,5\})$





$$\varphi\colon \mathcal{D}_{30} \longrightarrow \mathcal{P}(\{2,3,5\})$$

$$\begin{array}{rclrcl}
\varphi(1) & = & \varnothing & \varphi(2) & = & \{2\} \\
\varphi(3) & = & \{3\} & \varphi(5) & = & \{5\} \\
\varphi(6) & = & \{2,3\} & \varphi(10) & = & \{2,5\} \\
\varphi(15) & = & \{3,5\} & \varphi(30) & = & \{2,3,5\}
\end{array}$$

□

8.5. El álgebra de las funciones booleanas

Una función booleana de n variables es cualquier función

$$f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$$

El conjunto de todas las aplicaciones booleanas se denota $\mathcal{F}\big(B^n, B\big)$.

Teorema 8.5.1 $\mathcal{F}\big(B^n, B\big)$ *es un álgebra de Boole con las operaciones:*

- *Suma:* $(f+g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- *Producto: quad* $(f \cdot g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- *Complemento:* $\overline{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$

Las funciones booleanas se pueden usar para representar los requerimientos de salida de un circuito para todos los posibles valores de entrada dados por voltajes indicadores 0, 1.

Por ejemplo, una función booleana de 3 variables, $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$, se definiría mediante una tabla como sigue:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Para una función de n variables hay que definir la salida de cada una de las 2^n posibles entradas. Dado que hay dos posibilidades para cada una de ellas, en total podemos definir 2^{2^n} funciones boolenas distintas. Es decir,

$$|\mathcal{F}\big(B^n, B\big)| = 2^{2^n}$$

Ejemplo 8.5.2 En la siguiente tabla aparecen todas las funciones booleanas de dos variables

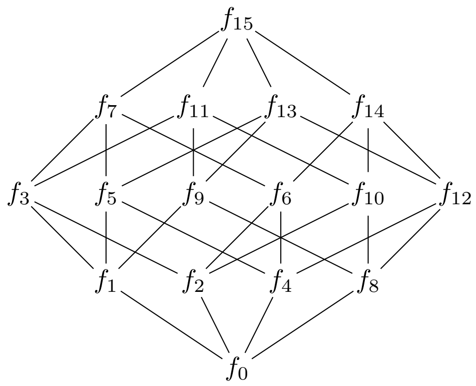
$$\mathcal{F}_2 = \{f_j\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B},\ j : 0, ..., 15\}$$

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Los átomos de $\mathcal{F}_2$ son f_1, f_2, f_4 y f_8 y cada elemento de $\mathcal{F}_2$ se puede expresar como suma de átomos; por ejemplo

$$f_7 = f_1 + f_2 + f_4, \quad f_{10} = f_2 + f_8, \quad f_{14} = f_2 + f_4 + f_8$$

El diagrama de Hasse del álgebra de Boole es el siguiente:



□

Una *expresión booleana* es una expresión en la que intervienen una o varias variables y los operadores binarios o monario de las álgebras de Boole. Por ejemplo,

$$E_1(x,y,z) = \overline{x} \cdot z + \overline{x} \cdot y + \overline{z}, \qquad E_2(x,y,z) = x \cdot \overline{(z + \overline{x} \cdot y)} + y \cdot \overline{z}$$

son expresiones booleanas.

Naturalmente, cada expresión booleana define una función booleana y decimos que dos expresiones son equivalentes si son iguales como funciones, es decir, $E_1(x_1, x_2, ..., x_n) = E_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ si

$$E_1(b_1, b_2, ..., b_n) = E_2(b_1, b_2, ..., b_n), \text{ para todo } b_i \in \{0, 1\}$$

Además, cada función booleana se puede determinar mediante una expresión booleana. El siguiente ejemplo, muestra cómo determinar una expresión booleana que defina una función determinada.

Ejemplo 8.5.3 Consideremos la función $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ definida por la siguiente tabla:

$f(0,0,0) = 1$	$f(1,0,0) = 0$
$f(0,0,1) = 0$	$f(1,0,1) = 0$
$f(0,1,0) = 1$	$f(1,1,0) = 0$
$f(0,1,1) = 0$	$f(1,1,1) = 1$

Si nos fijamos en las salidas iguales a 1 y cada entrada 0 identificamos con $\overline{x_i}$ y cada entrada 1 la identificamos con x_i, construiríamos la siguiente igualdad:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) + (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

Basta sustituir cada una de las ocho posibles entradas para verificar la igualdad.

También podemos fijarnos en las salidas iguales a 0 e identificar cada entrada 0 con x_i y cada entrada 1 con $\overline{x_i}$ para construir la siguiente igualdad:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+\overline{x}_3)\cdot(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+x_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)$$

Nuevamente, basta sustituir cada una de las ocho posibles entradas para verificar la igualdad. □

En este ejemplo, hemos construido expresiones booleanas que responden a esquemas específicos: suma de productos o productos de sumas, de forma que el operador complemento solo se aplica a variables.

DEFINICIÓN 8.5.4

- *Las expresiones booleanas que constan de una única variable o su complemento se llaman* literales.
- *Decimos que una expresión booleana de n variables es un* minitérmino *si es de la forma*
$$\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \dots \cdot \ell_n$$
en donde cada ℓ_i es un literal y cada variable aparece exactamente una vez.
- *Se dice que una expresión booleana está en su* forma normal disyuntiva *si es una suma de minitérminos.*
- *Decimos que una expresión booleana de n variables es un* maxitérmino *si es de la forma*
$$\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n$$
en donde cada ℓ_i es un literal y cada variable aparece exactamente una vez.
- *Se dice que una expresión booleana está en su* forma normal conjuntiva *si es una suma de maxitérminos.*

EJEMPLO 8.5.5

- La expresión $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$ es un minitérmino en las tres variables x_1, x_2, x_3. La función correspondiente en $\mathcal{F}_3$ toma el valor 1 solamente en $(1, 0, 1)$.
- La expresión $x_1 \cdot \overline{x_3}$ es un minitérmino en dos variables x_1, x_3. Pero no es un minitérmino en las tres variables x_1, x_2, x_3. La función correspondiente en $\mathcal{F}_3$ toma el valor 1 en $(1, 0, 0)$ y en $(1, 1, 0)$.
- La expresión $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_1}$ no es un minitérmino ya que involucra a la variable x_1 en más de un literal.
- $(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) + (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ es una expresión booleana en forma normal disyuntiva, con tres minitérminos. □

Las propiedades fundamentales de las álgebras de Boole permiten transformar cualquier expresión booleana en una forma normal disyuntiva equivalente y en una forma normal conjuntiva equivalente.

Ejemplo 8.5.6 Vamos obtener una forma normal disyuntiva equivalente a la expresión $E(x, y, z) = \overline{x \cdot z + y \cdot \overline{z}} + \overline{y}$

$$\begin{aligned}
\overline{x \cdot z + y \cdot \overline{z}} + \overline{y} &= (\overline{x} + \overline{z}) \cdot (\overline{y} + \overline{\overline{z}}) + \overline{y} \quad \text{(De Morgan)} \\
&= (\overline{x} + \overline{z}) \cdot (\overline{y} + z) + \overline{y} \quad \text{(Involución)} \\
&= \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z + \overline{z} \cdot \overline{y} + \overline{z} \cdot z + \overline{y} \quad \text{(Distribución)} \\
&= \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z + \overline{z} \cdot \overline{y} + \overline{y} \quad \text{(Complemento e identidad)}
\end{aligned}$$

Algunos sumando no son minitérminos, puesto que no incluyen a las tres variables. Para completarlos, basta multiplicar los sumandos por $1 = v + \overline{v}$ con las variables v que falten y aplicar la propiedad distributiva las veces necesarias.

$$\begin{aligned}
&\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z + \overline{z} \cdot \overline{y} + \overline{y} = \\
&= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot (z + \overline{z}) + \overline{x} \cdot z \cdot (y + \overline{y}) + \overline{z} \cdot \overline{y} \cdot (x + \overline{x}) + \overline{y} \cdot (x + \overline{x}) \cdot (z + \overline{z}) = \\
&= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = \\
&= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z
\end{aligned}$$

En la última igualdad, hemos eliminado los sumando repetidos. □