Tema 5: Variables Aleatorias. Distribuciones de Probabilidad

Tema 5a: Variables Aleatorias.

Departamento Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Curso 2020-2021

Introducción

Dado un experimento aleatorio, al conjunto de sucesos elementales le hemos llamado espacio muestral (E). Supongamos que es discreto.
A cada suceso elemental podemos asociarle un número real de muchas formas diferentes. Cada una será una variable aleatoria.

Por ejemplo, al lanzar una moneda 4 veces, el espacio muestral es:
$E = \{CCCC, CCCF, CCFC, CCFF, CFCC, CFCF, CFFC, CFFF, FCCC, FCCF, FCFC, FCFF, FFCC, FFCF, FFFC, FFFF\}$ donde $C =$'Cara' y $F =$'Cruz.

- 'Número de caras obtenidas'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 y a $FCFC$ un 2.
- 'Número de caras antes de la primera aparición de cruz'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 y a $FCFC$ un 0.
- 'Cada cara se valora multiplicada por el lugar de aparición'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 (1+0+0+0) y a $FCFC$ un 6 (0+2+0+4).

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, es decir un espacio muestral E, una álgebra o σ-álgebra $\mathcal{A}$ y una probabilidad P.

Definición

Decimos que X es una **variable aleatoria** *sobre E, a una aplicación de $E \to \mathbb{R}$ que verifique la propiedad:*

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ el conjunto } \{w \in E / X(w) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

O equivalentemente

$$X^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{A}.$$

Definición

Llamamos **soporte** *de la variable aleatoria X (S_X), al conjunto de valores reales que puede tomar.*

Ejemplo

Ejemplo

Dado el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda y la variable aleatoria X: 'valor obtenido en el dado, que se duplica si resulta cara al lanzar la moneda'.

- *Determinar su espacio muestral.*
- *Hallar el aplicado de cada uno de los elementos de E.*
- *Determinar el soporte de X.*

a) E={'1C', '2C', '3C', '4C', '5C', '6C', '1F', '2F', '3F', '4F', '5F', '6F'}

b) X('1C')=2, X('2C')=4, X('3C')=6, X('4C')=8, X('5C')=10, X('6C')=12, X('1F')=1, X('2F')=2, X('3F')=3, X('4F')=4, X('5F')=5, X('6F')=6.

c) El soporte $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

Ejemplo

Ejemplo

Determinar el soporte para:

- *La variable aleatoria 'Número de llamadas recibidas'.*
- *Obtener un número aleatorio x en [0,1). (x=rand(1,1))*
- *Multiplicar 6 por x y sumarle 1. (y=6*x+1)*
- *Quedarte con la parte entera de y. (z=floor(y))*

Ejemplo

Un componente es sustituido cuando se avería o al cabo de 10 años.

- *Determinar el soporte de la v.a. 'Duración del componente'.*
- *Si disponemos de 5 componentes iguales y cada uno sustituye al anterior. Lo mismo para la v.a. 'Duración de los 5 componentes'.*
- *Repetir los anteriores apartados si solo se sustituye por avería.*

Función de distribución

Definición

Dado un espacio probabilístico $(E, \mathcal{A}, P)$ y una variable aleatoria X. Definimos la **función de distribución de la variable aleatoria** X *como una función que verifica:*

1. $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$
2. $F(x) = P(\omega \in E / X(\omega) \leq x)$

Propiedad

La función de distribución asociada a una variable aleatoria es única y caracteriza a la misma.

Esto es, si conocemos la función de distribución podemos calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor.

Propiedades de la función de distribución

1. $P(X \leq x) = F(x)$
2. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
4. $P(X = a) = F(a) - \lim_{h \to 0^+} F(a - h)$
5. $0 \leq F(x) \leq 1$
6. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
7. $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
8. F(x) **es monótona no decreciente**, es decir: $a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$
9. F(x) **es continua por la derecha**, es decir, $\lim_{h \to 0^+} F(x + h) = F(x)$

Ejemplo

Ejemplo

La función de distribución $F(x)$ de una v.a. discreta X viene dada por:

x	$(-\infty,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$	$[10,12)$	$[12,\infty)$
$F(x)$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

Hallar:
1) $P(X \leq 3.5)$, 2) $P(X \leq 7)$, 3) $P(X > 2)$, 4) $P(X \geq 2)$, 5) $P(3 < X \leq 8)$.

1) $P(X \leq 3.5)$=F(3.5)=$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
2) P($X \leq 7$)=F(7)=$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
3) P($X > 2$)=1-F(2)=$\frac{3}{4}$.
4) P($X \geq 2$) $= P(X = 2) + P(X > 2) = (F(2) - \lim_{h\to 0} F(2-h)) + \frac{3}{4} =$
$= (\frac{3}{12} - \frac{1}{12}) + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$
5) P($3 < X \leq 8$)=F(8)-F(3)=$\frac{10}{12} - \frac{4}{12}$=0.5.
NOTA: La variable X es la de un ejemplo anterior con lanzamiento de moneda y dado.

Tipos de variables aleatorias

Dependiendo de como sea el conjunto soporte podemos distinguir varios tipos de variables aleatorias.

$$\text{Tipos de variables aleatorias.} \begin{cases} \textit{Discretas} \begin{cases} \text{Soporte finito} \\ \text{Soporte numerable} \end{cases} \\ \textit{Continuas} \\ \textit{Mixtas} \end{cases}$$

Finita: Lanzamiento de un dado. Puntos obtenidos por un equipo de fútbol en una jornada ($S_P = \{0, 1, 3\}$).
Numerable: Días transcurridos hasta realizar un cambio de tarifa de móvil. Número de averías recibidas por un servicio técnico.
Continua: Alcance de una antena. Distancia recorrida por un vehículo en 1 hora. Consumo en litros de combustible en 100Km.
Mixta: a) Distancia alcanzada por un lanzador, si no lo realiza se codifica como -1.
b) Premio obtenido. Se realiza un sorteo entre 10 concursantes, si es seleccionado puede obtener un premio entre 5 y 20.

Variable aleatoria discreta

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio y sea X una variable aleatoria. Diremos que se trata de una **variable aleatoria discreta** *si su soporte es es un conjunto discreto. Es decir, la variable X toma solo un conjunto finito o infinito numerable de valores en $\mathbb{R}$.*

Para este tipo de variable, la forma más simple de definirlas es dar la probabilidad p_i de que tome cada uno de los posible valores x_i de su soporte.

Definición

Definimos la **función de probabilidad** *de una variable aleatoria discreta, mediante:*

$$p(x_i) = P(\omega \in E / X(\omega) = x_i) = P(X = x_i)$$

Ejemplos

Ejemplo

La función de probabilidad de la variable aleatoria: 'Suma de los valores obtenidos al lanzar 2 dados' es:

x_i	$p(x_i)$		x_i	$p(x_i)$
2	$\frac{1}{36}$		8	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{2}{36}$		9	$\frac{4}{36}$
4	$\frac{3}{36}$		10	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$		11	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{5}{36}$		12	$\frac{1}{36}$
7	$\frac{6}{36}$			

Ejemplo

La función de probabilidad de 'Número de caras' al lanzar 3 monedas es: $p(0)=1/8$, $p(1)=3/8$, $p(2)=3/8$, $p(3)=1/8$.

Ejemplo para v.a. numerable

Ejemplo

Sea la variable aleatoria 'Lanzar un dado hasta la primera aparición de un 5'. Hallar la función de probabilidad.

p(1)=P(X=1)=P(sacar 5 a la 1ª)=1/6.
p(2)=P(X=2)=P(fallar la primera y sacar 5 a la 2ª)=(5/6)(1/6).
p(3)=P(X=3)=P(fallar 2 veces y sacar 5 a la 3ª)=(5/6)(5/6)(1/6)=
$=(5/6)^2(1/6)$,
...
$p(k) = P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$, para $k = 1, 2, \ldots$
que es la función de probabilidad.

Propiedades

- **La función de probabilidad caracteriza a la variable aleatoria discreta.**
- Si p es una función de $\mathbb{R}$ en $[0,1]$ que verifica: $\sum_i p(x_i) = 1$, entonces existe una v.a. que la tiene como función de probabilidad.

Ejemplo

¿Determina la función: $p(k) = (2/3)^k(1/3)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots,$ una función de probabilidad?

Para todo k, $0 \leq p(k) \leq 1$. Veamos si $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$.
$\sum_k p(k) = p(0) + p(1) + \ldots = (2/3)^0(1/3) + (2/3)^1(1/3) +$
$+ (2/3)^2(1/3) + (2/3)^3(1/3) + \ldots = 1/3 + (2/3)(1/3) + (2/3)^2(1/3) + \ldots =$
$= \frac{1/3}{1-2/3} = 1$ luego define una función de probabilidad.

Representación gráfica. Ejemplo.

Tanto la función de probabilidad, como la de distribución de una variable aleatoria pueden ser representadas gráficamente.

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria 'Número de caras' al lanzar 4 monedas. Hallar:

- *Función de probabilidad.*
- *Función de distribución.*
- *Representar ambas gráficamente.*

p(0) $= P('FFFF') = 1/16$, p(1) $= P('CFFF' \cup' FCFF' \cup' FFCF' \cup' FFFC') = 4/16$,
p(2) $= P('CCFF' \cup' CFCF' \cup' CFFC' \cup' FCCF' \cup' FCFC' \cup' FFCC') = 6/16$,
$\ldots$ p(3) $= 4/16$, p(4) $= 1/16$.

Ejemplo-cont

La función de probabilidad expresada como tabla y la función de distribución $F(x) = P(X \leq x)$ quedan:

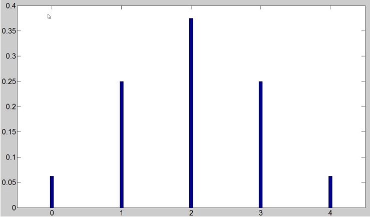
x_i	p_i
0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{4}{16} \\ 2 & \frac{6}{16} \\ 3 & \frac{4}{16} \\ 4 & \frac{1}{16} \\ \text{Otro} & 0 \end{cases}$$

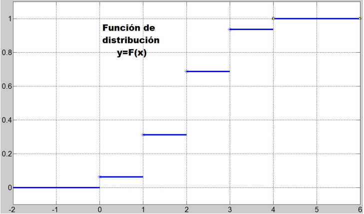
x	$F(x)$
$(-\infty, 0)$	0
$[0, 1)$	$\frac{1}{16}$
$[1, 2)$	$\frac{5}{16}$
$[2, 3)$	$\frac{11}{16}$
$[3, 4)$	$\frac{15}{16}$
$[4, \infty)$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Función de probabilidad



Función de distribución



Esperanza matemática. Caso discreto

Definición

Se llama **esperanza matemática** *de la variable aleatoria discreta X a:*

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{x_i \in S_X}} \mathrm{x_i p(x_i)} = \sum_{\mathrm{x_i \in S_X}} \mathrm{x_i P(X = x_i)}$$

En el caso de que el soporte S_X sea un conjunto infinito numerable, será necesario que la serie sea absolutamente convergente, esto es $\sum_{x_i \in S_X} |x_i| P(X = x_i) < \infty$

Ejemplo

Hallar la esperanza matemática del 'Número de caras' al lanzar 4 monedas.

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) + 2p(2) + 3p(3) + 4p(4) = 0\frac{1}{16} + 1\frac{4}{16} + 2\frac{6}{16} + 3\frac{4}{16} + 4\frac{1}{16} = 2$$

Generalización del concepto

Definición

Sea g una función real y X una variable aleatoria llamamos **esperanza de g(x)** *a:*

$$E(g(X)) = \sum_{x_i \in S_X} g(x_i) P(X = x_i)$$

con la condición de que la serie sea absolutamente convergente: $\sum_{x_i \in S_X} |g(x_i)| P(X = x_i)$

Ejemplo

Si X es la v.a. 'Número de caras' al lanzar 4 monedas. Hallar las esperanzas de: 1) X^2, *2)* X^3, *3)* $\operatorname{sen}(\frac{\pi X}{2})$*:*

1) $E(X^2) = 0^2 p(0) + 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3) + 4^2 p(4) = \frac{1 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 6}{16} + \frac{9 \cdot 4}{16} + \frac{16 \cdot 1}{16} = 5$

Ejemplo-cont

2) $E(X^3) = 0^3 p(0) + 1^3 p(1) + 2^3 p(2) + 3^3 p(3) + 4^3 p(4) =$
$= \frac{1\cdot 4}{16} + \frac{8\cdot 6}{16} + \frac{27\cdot 4}{16} + \frac{64\cdot 1}{16} = 14$
3) $E(\mathrm{sen}\left(\frac{\pi X}{2}\right)) = \mathrm{sen}(0)p(0) + \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})p(1) + \mathrm{sen}(\pi)p(2) +$
$+ \mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2})p(3) + \mathrm{sen}(2\pi)p(4) = \frac{4}{16} - \frac{4}{16} = 0$

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria 'Número de lanzamientos' de un dado hasta la primera aparición de la cara '5'. Hallar $E(X)$.

Conocemos que $p(k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$ para $k=1,2,\ldots$, luego:
$E(X) = 1(1/6) + 2(5/6)(1/6) + 3(5/6)^2(1/6) + 4(5/6)^3(1/6) + \ldots =$
$= \frac{1}{6}[1 + 2(5/6) + 3(5/6)^2 + 4(5/6)^3 + \ldots] = \frac{S}{6}$

$$\begin{array}{lcllll} S & = & 1 & +2(5/6) & +3(5/6)^2 + 4(5/6)^3 + \ldots \\ \frac{5}{6}S & = & & +1(5/6) & +2(5/6)^2 + 3(5/6)^3 + \ldots \\ \hline S - \frac{5}{6}S & = & 1 & + \ (5/6) & + \ (5/6)^2 + \ (5/6)^3 + \ldots \Rightarrow \end{array}$$

$$\frac{S}{6} = \frac{1}{1 - 5/6} = 6 \Rightarrow S = 36 \Rightarrow \mathrm{E(X)} = 6$$

Variable aleatoria continua

Definición

Se dice que una **variable aleatoria** *es* **continua** *si su soporte es un intervalo real (finito o infinito) o unión de ellos.*

Son variables aleatorias continuas: Temperatura, peso, duración de un componente, ...

Definimos la probabilidad de un intervalo:

$$P(a < X \leq b) = P(X^{-1}(a, b]) = P(\omega \in E/a < X(\omega) \leq b)$$

En las variables aleatorias continuas (v.a.c.) se da la circunstancia de que **la probabilidad de un punto es cero**, aunque pueda ocurrir. Por ello:

1) $\mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{F}(\mathrm{b})$,

2) $\mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathrm{a}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq \mathrm{a}) = 1 - \mathrm{F}(\mathrm{a})$

3) $\mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{F}(\mathrm{b}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})$

Función de densidad

Definición

Dada una variable aleatoria continua X, decimos que la función $y = f(t)$ real y no negativa es una **función de densidad** *asociada a X, si verifica:* $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$

Propiedades:

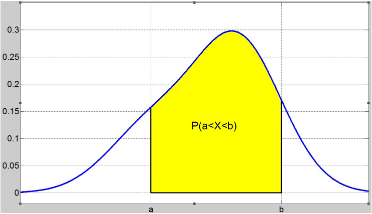
- $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 1$ (Consecuencia de $F(+\infty) = 1$)
- $\mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ (Consecuencia de que $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$)
- **La función de densidad es la derivada de la función de distribución:** $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{dF}(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{a}) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0$ (La probabilidad de un punto es 0)
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathrm{b}) = \int_{\mathrm{b}}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 1 - \mathrm{F}(\mathrm{b})$

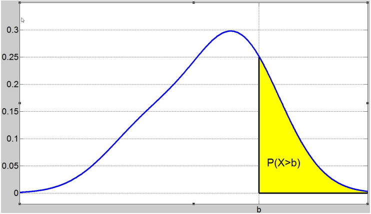
Interpretación de la función de densidad

La función de densidad además de caracterizar a la variable aleatoria sirve para calcular probabilidades. Así, las probabilidades:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
$$P(X > b) = \int_b^\infty f(t)dt = 1 - F(b)$$
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(t)dt$$

pueden ser interpretadas como áreas bajo la función de densidad.





Ejemplo

Ejemplo

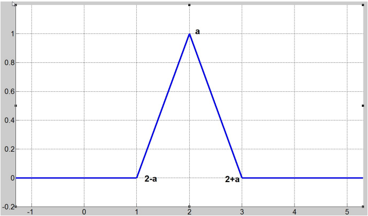
Sea X la v.a.c. determinada por la función de densidad:
$f(x) = \text{máx}\{0, a - |2 - x|\}$.

- *Determinar el valor de a para que $f(t)$ sea una función de densidad.*
- *Hallar la función de distribución.*
- *Hallar las probabilidades de los sucesos a)$P(X \leq 1.5)$, b)$P(X > 2.3)$, c) $P(1.1 \leq X \leq 1.7)$ d) $P(1.5 \leq X \leq 2.5)$*

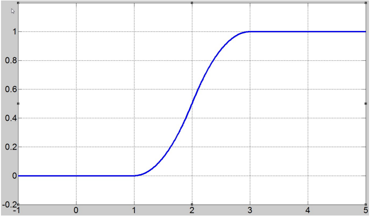
a) La forma de la función $y = f(x)$ es triangular con máximo en x=2 y altura a, y base $(2 - a, 2 + a)$. Para que el área valga 1:
$S = Bh/2 = (2a)a/2 = a^2 = 1 \Rightarrow$ a $= 1$ y resulta la figura.

b) $f(x) = \text{máx}\{0, 1 - |2 - x|\} = \begin{cases} x - 1 & x \in (1, 2] \\ 3 - x & x \in (2, 3) \\ 0 & x \notin (1, 3) \end{cases}$

Ejemplo-cont



Función de densidad de X



Función de distribución de X

Integramos para hallar la función de distribución: (la constante de integración se ajusta para que sea continua, así F(1)=0, F(2)=0.5, F(3)=1).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ 3x - \frac{x^2}{2} - 3.5 & 2 < x < 3 \\ 1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Ejemplo-cont2

- a)$P(X \leq 1.5) = \int_{-\infty}^{1.5} f(t)dt = \int_{1}^{1.5}(t-1)dt = \{\text{Más fácil}\} =$
$= F(1.5) = 0.125$
- b)$P(X > 2.3) = \int_{2.3}^{\infty} f(t)dt = \int_{2.3}^{\infty}(3-t)dt = \{\text{Más fácil}\} =$
$= 1 - F(2.3) = 1 - \left[3(2.3) - \frac{2.3^2}{2} - 3.5\right] = 0.245$
- c) $P(1.1 \leq X \leq 1.7) = \int_{1.1}^{1.7} f(t)dt = \int_{1.1}^{1.7} t - 1dt =$
$\{\text{Más fácil}\} = F(1.7) - F(1.1) = 0.245 - 0.005 = 0.24$
- d) $P(1.5 \leq X \leq 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(t)dt = \int_{1.5}^{2}(t-1)dt +$
$+ \int_{2}^{2.5}(3-t)dt = \{\text{Más fácil}\} = F(2.5) - F(1.5) =$
$= 0.875 - 0.125 = 0.75$

Esperanza matemática. Caso Continuo

Definición

Se llama **esperanza matemática** *de la v.a.c.* X *a:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Solo quedará definida cuando la integral sea absolutamente convergente, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$

Ejemplo

Hallar la esperanza matemática de la función de la variable aleatoria X *del ejemplo anterior.*

La función de densidad era: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in (1,2] \\ 3-x & x \in (2,3) \\ 0 & x \notin (1,3) \end{cases}$, entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(3-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 2$$

Generalización del concepto

Definición

Sea g una función real y X una variable aleatoria continua llamamos **esperanza de g(x)** *a:*

$$\mathrm{E(g(X))} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{g(x)f(x)dx}$$

con la condición de que la integral sea absolutamente convergente: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)dx$

Ejemplo

Hallar E(sen(X))

$$E[sen(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} sen(x)f(x)dx = \int_{1}^{2} sen(x)(x-1)dx + \int_{2}^{3} sen(x)(3-x)dx \approx 0.836$$

Propiedades de la esperanza matemática

Las siguientes propiedades son válidas para cualquier variable aleatoria:

- Es la media de la variable aleatoria: $\bar{X} = E(X)$.
- **E(k)=k.** (La esperanza matemática de una constante k es k.)
- **E(aX+b)=aE(X)+b** (Transformación afín)
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (Linealidad)
- Si son independientes se verifica: $E(XY) = E(X)E(Y)$

Ejemplo

Sea X la v.a. 'Número de caras' al lanzar 4 monedas e Y 'Puntos obtenidos' al lanzar un dado. Hallar E(Y), E(X+Y) y E(3Y-2X+7).

$$E(Y) = 1\tfrac{1}{6} + 2\tfrac{1}{6} + \ldots + 6\tfrac{1}{6} = \tfrac{21}{6} = 3.5$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 3.5 = 5.5,$$
$$E(3Y - 2X + 7) = 3E(Y) - 2E(X) + 7 = 3(3.5) - 2(2) + 7 = 13.5$$

Ejemplo

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria continua dada por la función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^4 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$.

Hallar: a) E(X), b) E(3$X - 2$), c) E(sen(X))

a) Lo primero será hallar la función de densidad, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 4x^3$ para $x \in [0, 1]$. Luego: $E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \left[4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5} = 0.8$

$$E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3(0.8) - 2 = 0.4$$

$$E(\text{sen}(X)) = \int_0^1 \text{sen}(x)(4x^3)dx = 0.7084.$$

Cálculo realizado con la instrucción Matlab:

$>>$ **h=inline('sin(x).*4.*x.^3'),quad(h,0,1)**

aunque podría haberse calculado mediante integración por partes.

Momentos

Definición

Llamamos **momento de orden r respecto al punto 'a'** *de la variable aleatoria X, a*

$$M_r(a) = E((X - a)^r)$$

Cuando a=0 se denominan momentos ordinarios de orden r:

$$m_r = E(X^r).$$

Cuando $a = \bar{X} = E(X)$ *se denominan momentos centrales de orden r:* $\mu_r = E((X - E(X))^r)$

Definición

Llamamos **Varianza de una variable aleatoria X** *a su momento central de orden 2:*

$$\mu_2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - \bar{X}^2$$

Relaciones entre momentos

Definición

A la raíz cuadrada de la varianza la llamamos **desviación típica** *de la variable aleatoria:* $\sigma_{\mathrm{x}} = +\sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Propiedades de los momentos:

- $m_0 = 1,\ m_1 = E(X) = \bar{X}$
- $m_2 = V(x) + \bar{X}^2$.
- $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0,$
- $\mu_2 = V(x) = m_2 - \bar{X}^2$
- $\mu_3 = m_3 - 3m_2\bar{X} + 2\bar{X}^3$
- $\mu_4 = m_4 - 4m_3\bar{X} + 6m_2\bar{X}^2 - 3\bar{X}^4$

Parámetros

Parámetros de tendencia central:

Son la media, moda y mediana.

- **Media:** Es la esperanza de X.
- **Moda:** Valor máximo de la función de probabilidad (discretas) o de la de densidad (continuas).
- **Mediana:** Para una variable aleatoria continua, se define la mediana como aquel valor x tal que $F(x) = 0.5$. Para una variable aleatoria discreta, la mediana es aquel valor x tal que $P(X \leq x) \geq 0.5$ y $P(X \geq x) \geq 0.5$. En este caso, la mediana no tiene por qué ser única.

Al igual que en descriptiva podemos hablar de cuantiles, cuartiles, ...
Para el caso continuo, el cuantil $c \in (0, 1)$ es el valor x tal que $F(x) = c$.
Para una variable aleatoria discreta, el cuantil c es aquel valor x tal que $P(X \leq x) \geq c$ y $P(X \geq x) \geq (1 - c)$. En este caso, el cuantil no es necesariamente único.

Medidas de dispersión: Podemos hablar de rango, desviación típica, varianza.

Coeficiente de variación: $\mathrm{CV} = \frac{\sigma_x}{|\bar{X}|}$

Medidas de forma: (Coeficientes de Fisher)

Sesgo: $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

Curtosis: $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$