TEMA 7

Cardinalidad

Contenidos

1. Introducción. Conceptos básicos. Conjuntos finitos e infinitos
2. Conjuntos numerables. Enumeraciones.
3. Conjuntos no-numerables

Prerrequisitos: Teoría intuitiva de conjuntos. Propiedades de funciones: funciones inyectivas y sobreyectivas.

Objetivos: Saber utilizar las herramientas básicas para determinar el cardinal de conjuntos numerables. Saber utilizar las herramientas básicas para determinar que un conjunto no es numerable: diagonales de Cantor. Saber utilizar las herramientas básicas para determinar que un conjunto tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$. Estas herramientas incluyen las operaciones entre conjuntos y la definición de funciones entre conjuntos numéricos, sabiendo estudiar si son inyectivas o sobreyectivas.

7.1. Introducción

En la asignatura de Matemática Discreta hemos estudiado el área de las matemáticas conocida como *combinatoria* o *recuento*, en la que se estudian técnicas para determinar el tamaño de conjuntos finitos mediante modelos matemáticos basados en la teoría de conjuntos. Nos preguntamos ahora si es posible hacer algo similar en conjuntos "infinitos": ¿Hay diferentes "tamaños" de conjuntos infinitos? ¿Podemos definir el "cardinal" de un conjunto infinito?

Vamos a empezar estableciendo los conceptos básicos que permiten comparar el tamaño de los conjuntos, generalizando la idea básica del recuento en conjuntos finitos. Qua A sea un conjunto finito, significa que podemos establecer una biyección entre A y un conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Establecer esa biyección se corresponde con el proceso de contar los elementos del conjunto A y en ese caso decimos que el *el cardinal de A es igual a n*, es decir, $|A| = n$.

DEFINICIÓN 7.1.1 *Sean A y B conjuntos cualesquiera.*

- *Decimos que el* cardinal de A es menor o igual que el cardinal de B *si existe una función inyectiva de A en B; en tal caso escribimos $|A| \leq |B|$.*
- *Decimos que el* cardinal de A es igual al cardinal de B *o que A y B son* equipotentes *si existe una función biyectiva de A en B; en tal caso escribimos $|A| = |B|$.*
- *Decimos que el* cardinal de A es estrictamente menor el cardinal de B, *y lo denotamos $|A| < |B|$, si $|A| \leq |B|$ y $|A| \neq |B|$.*

Los conjuntos del primer ejemplo,

$$A = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}, \qquad B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

son equipotentes, y eso significa que "tienen el mismo número de elementos". Es decir, en estos conjuntos el cardinal coincide con la idea intuitiva de "tamaño" del conjunto. Sin embargo, esto no ocurre siempre.

EJEMPLO 7.1.2 Sea $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par }\}$. La función

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{Z} & \to & E \\ & & x & \mapsto & 2x \end{array}$$

permite afirmar que $\mathbb{Z}$ tiene el mismo cardinal que E, aunque la intuición nos dice que E tiene la "mitad" de los elementos de $\mathbb{Z}$. □

Es fácil ver que la relación $<$ entre cardinales es una relación *irreflexiva* y *transitiva* y que la relación $\leq$ es una *relación de orden*, que además es de orden *total*, según establece el siguiente resultado.

TEOREMA 7.1.3 (ZERMELO) *Para cualquier para de conjuntos A y B, se verifica una y solo una de las siguientes relaciones.*

$$|A| < |B|, \qquad |A| = |B|, \qquad |B| < |A|$$

Según la definición de equipotencia, demostrar que dos conjuntos tienen el mismo cardinal, supone encontrar una biyección entre ellos, el siguiente teorema facilita el trabajo.

TEOREMA 7.1.4 (CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN) *Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si se verifica que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

EJEMPLO 7.1.5 Los intervalos de números reales $[0,1]$ y $(0,1)$ tienen el mismo cardinal, dado que la siguiente función es una biyección:

$$f\colon [0,1] \to (0,1), \qquad \begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{2} & \\ f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n+2} & n \in \mathbb{Z}^+ \\ f(x) = x & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Utilizando el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein podemos definir funciones más simples para obtener la misma conclusión.

- $f\colon (0,1) \to [0,1]$ definida $f(x) = x$ es una función inyectiva y por lo tanto, $\big|(0,1)\big| \leq \big|[0,1]\big|$
- $g\colon [0,1] \to (0,1)$ definida $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ también es inyectiva y por lo tanto $\big|[0,1]\big| \leq \big|(0,1)\big|$. □

Como hemos recordado antes, un conjunto es finito si existe un número natural n tal que se puede establecer una biyección entre el conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto A. La definición de conjunto *infinito* la hacemos por oposición.

DEFINICIÓN 7.1.6 (CONJUNTO INFINITO) *Se dice que un conjunto A es* infinito *si no es finito, es decir, si no existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede establecer una biyección entre el conjunto $\{1, 2, ..., n\ \}$ y el conjunto A).*

Por lo tanto, para probar que un conjunto A es infinito se debe demostrar que no es posible definir ninguna biyección entre $\{1, 2, \ldots, n\}$ y A para ningún n, y esto puede ser complicado.

Ejemplo 7.1.7 Para demostrar que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, vamos a ver que no existe ningún número natural n para el que se pueda establecer una biyección del conjunto entre $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathbb{N}$.

Sea n un número natural cualquiera y $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Si tomamos $k = 1 + \max\{f(1), \ldots, f(n)\}$, claramente $f(x) \neq k$ para todo x y en consecuencia f no es sobreyectiva y por lo tanto no es biyectiva. En consecuencia, $\mathbb{N}$ es infinito. □

La definición de conjunto infinito como opuesto a conjunto finito, no permite reconocer explícitamente los conjuntos infinitos. La caracterización dada por el siguiente teorema es más conveniente para establecer que un conjunto es efectivamente infinito.

Teorema 7.1.8 *Un conjunto A es infinito si y solo si existe una función inyectiva $f\colon A \to A$ tal que $f(A) \subset A$.*

Ejemplo 7.1.9 La función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 2n$, es trivialmente inyectiva y $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, ya que por ejemplo $7 \notin f(\mathbb{N})$. Por lo tanto, $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito. □

Ejemplo 7.1.10 El conjunto de todas las cadenas de elementos de $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, denotado por Σ^*, es un conjunto infinito. La función $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ definida por $f(w) = \mathrm{a}w$ es inyectiva y $f(\Sigma^*)$ no coincide Σ^*, ya que $f(\Sigma^*)$ no incluye las cadenas que empiezan por b. □

Ejemplo 7.1.11 Si A es un conjunto infinito y $A \subset B$, entonces B es infinito.

Si A es infinito, existe un función $f\colon A \to A$ inyectiva tal que $f(A) \subset A$. Consideramos entonces la función $g\colon B \to B$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ x & \text{si } x \in B - A \end{cases}$$

Entonces g es claramente inyectiva y la imagen de g no incluye el conjunto no vacío $A - f(A)$. □

Teorema 7.1.12 (Cantor) *Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración: Claramente, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, pues la siguiente función es inyectiva

$$f\colon A \to \mathcal{P}(A); \qquad f(x) = \{x\}$$

Nos queda demostrar que $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$ y para ello tenemos que probar que no existe ninguna función sobreyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$. Por reducción al absurdo, supongamos que g es una función sobreyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$ y consideremos el conjunto

$$Y = \{x \in A \mid x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(A)$$

Dado que g es sobreyectiva, existe $y \in A$ tal que $g(y) = Y$. Pero esto no es posible, ya que

- Si $y \in Y$, entonces, por la definición del subconjunto Y, se verificaría $y \notin g(y) = Y$, lo cual es absurdo.
- Si $y \notin Y$, entonces, por la definición de Y, se verificaría que $y \in g(y) = Y$, lo cual también es absurdo.

Por lo tanto, la función g no puede ser sobreyectiva.

7.2. Conjuntos numerables

Para los conjuntos finitos, los conjuntos $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$ se usan como conjuntos estándar para compararlos con otros conjuntos y definir su cardinal: *un conjunto finito tiene cardinal n si, y sólo si, hay una biyección de* $\{1, 2, ..., n\}$ *en A*. Además, por definición, el cardinal del conjunto vacío es 0, es decir, $|\varnothing| = 0$.

Para conjuntos infinitos, también podemos usar la misma idea, establecer conjuntos infinitos de referencia para distinguir distintos “tamaños” entre ellos. Vamos a empezar considerando el conjunto de los números naturales.

Definición 7.2.1 *Se dice que un conjunto A tiene* cardinal $\aleph_0$ *si existe una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y A. En tal caso, escribimos $|A| = \aleph_0$.*

La igualdad entre cardinales es una relación de equivalencia, de forma que las clases del conjunto cociente contienen los conjuntos con el mismo cardinal. De esta forma, podemos entender que $\aleph_0$ representa a la clase de $\mathbb{N}$, es decir, a la clase de todos los conjuntos equipotentes con $\mathbb{N}$ o que tienen el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.

La existencia de biyección entre un conjunto A y los conjuntos $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_n$, sugiere la idea de “contar” o “enumerar” los elementos de A (aunque este proceso sea interminable). Por esta razón, decimos que un conjunto es *numerable* si es finito o tiene cardinal $\aleph_0$ y, en particular, si un conjunto tiene cardinal $\aleph_0$ decimos que es *infinito numerable*. Algunos libros y autores utilizan igualmente la denominación de *contable*.

Ejemplo 7.2.2 Recordemos que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ y $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Estos conjuntos son equipotentes, ya que la aplicación

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+, \qquad f(n) = n + 1,$$

es biyectiva.

Por esta razón, podemos utilizar indistintamente estos dos conjuntos para estudiar si un conjunto es numerable. □

Ejemplo 7.2.3 El conjunto

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

es infinito numerable. $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$ definida por $f(n) = \dfrac{1}{n}$ establece una biyección entre $\mathbb{Z}^+$ y A. Por lo tanto, $|A| = |\mathbb{Z}^+| = \aleph_0$ y A es numerable.

Ejemplo 7.2.4 Sea k un entero no nulo y consideremos el conjunto de los múltiplos positivos de k,

$$k\mathbb{Z}^+ = \{k \cdot n; n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Entonces, $k\mathbb{Z}^+$ es numerable, ya que la siguiente función es biyectiva:

$$f\colon \mathbb{Z}^+ \to k\mathbb{Z}^+, \qquad f(x) = kx$$ □

Un conjunto se puede enumerar si sus elementos se pueden disponer en una lista finita o infinita. Si una lista enumera el conjunto A, entonces cada entrada de la lista es un elemento de A y cada elemento de A aparece como una entrada de la lista.

Definición 7.2.5 *Una* enumeración *de un conjunto A es una función sobreyectiva f de $\mathbb{N}_n$ en A, para algún n, o de $\mathbb{Z}^+$ en A.*

- *Si f es inyectiva (y por tanto, biyectiva), es una* enumeración sin repeticiones.
- *Si f no es inyectiva, entonces f es una* enumeración con repeticiones.

Una enumeración f, se especifica normalmente dando la secuencia o lista

$$[f(1), f(2), \dots].$$

Ejemplo 7.2.6 Si $A = \{a, b, c\}$, entonces $[b, c, b, a]$ y $[c, b, a]$ son enumeraciones de A. La primera con repeticiones y la segunda sin repeticiones. □

Aunque en general, determinar el cardinal de un conjunto requiere determinar aplicaciones biyectivas que establezcan la equipotencia de dos conjuntos, en el caso de conjuntos numerables es suficiente que la función definida en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{Z}^+$ sea sobreyectiva, es decir, basta establecer una enumeración.

Teorema 7.2.7 *Un conjunto A es numerable si, y sólo si, existe una enumeración de A.*

Ejemplo 7.2.8 Dado cualquier alfabeto finito Σ, el conjunto Σ^* es infinito numerable. Esto se puede demostrar colocando los elementos de Σ^* en un orden estándar. Por ejemplo, para $\Sigma = \{0, 1\}$ si entendemos que 0 precede a 1, colocaríamos los elementos de Σ^* en el orden "alfabético" estándar:

$$[\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots] \qquad \square$$

Ejemplo 7.2.9 El conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ es infinito numerable. No es finito, dado que contiene a $\mathbb{N}$ y por lo tanto, basta con definir una enumeración de los elementos de $\mathbb{Q}^+$.

Todo número racional positivo es el cociente p/q de dos enteros positivos. Se escriben los números racionales positivos enumerando los de denominador 1 en la primera fila, los de denominador 2 en la segunda fila, y así sucesivamente. Para enumerar los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ en una sucesión se empieza por el racional positivo con $p + q = 2$, seguido de aquellos con $p + q = 3$, continuando con aquellos con $p + q = 4, \dots$ como se muestra en la figura.

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	$\ddots$	
3	1/3	2/3	3/3	4/3		
4	1/4	2/4	3/4			
5	1/5	2/5				
6	1/6					
$\vdots$						

Esto es una enumeración de $\mathbb{Q}^+$ con repeticiones y por tanto, $\mathbb{Q}^+$ es infinito numerable. $\square$

El siguiente conjunto establece que $\aleph_0$ es el menor cardinal de los conjuntos infinitos.

Teorema 7.2.10 *Cada conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable. Es decir, si A es infinito, entonces $\aleph_0 \le |A|$.*

Demostración: Dado que A no es vació, podemos construir una sucesión de elementos de A eligiendo los elementos como de la siguiente forma

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A - \{a_1\},\ a_3 \in A - \{a_1, a_2\}, \dots, a_{k+1} \in A - \{a_1, a_2 \dots, a_k\}, \dots$$

Esto nos da una enumeración infinita y sin repeticiones, puesto que cada conjunto $A - \{a_1, a_2 \dots, a_k\}$ es infinito, ya que en caso contrario, A sería finito por ser unión de dos conjuntos finitos,

$$A = A - \{a_1, a_2 \dots, a_k\} \cup \{a_1, a_2 \dots, a_k\}$$

Por lo tanto, $B = \{a_i; i \in \mathbb{Z}^+\}$ es infinito numerable, $B \subseteq A$ y en consecuencia $\aleph_0 \leq |A|$.

7.3. Conjuntos no numerables

Ahora nos preguntamos si hay conjuntos infinitos que no sean equipotentes a $\mathbb{N}$. El siguiente teorema establece un ejemplo importante.

TEOREMA 7.3.1 (CANTOR) *El intervalo de números reales* $[0, 1]$ *no es numerable.*

Demostración: Debemos demostrar que ninguna función $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ es sobreyectiva. Usamos la expresión decimal de cada número $f(n)$ para escribir la siguiente lista

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0, x_{11}x_{12}x_{13} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} 10^{-j} \\
f(2) &= 0, x_{21}x_{22}x_{23} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j} 10^{-j} \\
f(3) &= 0, x_{31}x_{32}x_{33} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} x_{3j} 10^{-j} \\
&\vdots \\
f(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} x_{nj} 10^{-j}
\end{aligned}$$

Es decir, x_{nj} es el j-ésimo dígito en la expansión decimal de $f(n)$. Consideramos entonces el número real

$$y = 0, y_1 y_2 y_3 \cdots \in [0, 1], \qquad y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{jj} \neq 1 \\ 2 & \text{si } x_{jj} = 1 \end{cases}$$

El número y es distinto de cada número $f(n)$ puesto que sus expansiones decimales difieren, al menos, en el n-ésimo dígito. Por lo tanto, la función $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ no es sobreyectiva y no puede ser una enumeración de $[0, 1]$. Dado que esto lo podemos hacer para cualquier función, concluimos que $[0, 1]$ no es numerable.

La técnica de demostración que acabamos de utilizar se conoce como el método de *la diagonal de Cantor*. Esta técnica tiene muchas variaciones y se aplica frecuentemente en teoría de la computabilidad.

Ya hemos visto que para cualquier conjunto A se verifica que $|A| < \mathcal{P}(A)$. En particular, $|\mathbb{N}| < \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y en consecuencia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable. Vamos a ver una demostración usando el método de la diagonal de Cantor.

TEOREMA 7.3.2 *El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es infinito numerable y sea $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una biyección. La función f sería algo parecido a

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & \{3,5,7\} \\ f(2) & = & \{2,4,6,8,...\} \\ f(3) & = & \emptyset \\ f(4) & = & \{1,2,3,4,5,6,...\} \\ f(5) & = & \{1,2\} \\ & \vdots & \end{array}$$

En algunos casos, k puede ser elemento de $f(k)$; en el ejemplo anterior, $2 \in f(2)$ y $4 \in f(4)$; pero en otros, no ocurre: $1 \notin f(1), 3 \notin f(3)$ y $5 \notin f(5)$.

Consideremos el conjunto

$$D = \{n \in \mathbb{N} | n \notin f(n)\}$$

Dado que f es sobreyectiva, D será la imagen de algún $m \in \mathbb{N}$,

$$D = f(m)$$

Pero vamos a ver que esto es imposible, porque en tal caso m no puede estar ni dentro ni fuera de $f(m)$:

- Si $m \in f(m)$, entonces $m \notin D$ por la definición de D, lo cual es contradictorio con $D = f(m)$.
- Si $m \notin f(m)$, entonces $m \in D$ por la definición de D, lo cual también es contradictorio con $D = f(m)$.

Por lo tanto, f no puede ser biyectiva y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.

Ya podemos entonces introducir un segundo cardinal infinito, el de los conjuntos equipotentes a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

DEFINICIÓN 7.3.3
Un conjunto A tiene cardinal $\aleph_1$ si hay una biyección entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y A.

Esta no es la definición original del cardinal $\aleph_1$ dada por Cantor, pero la usamos aquí por simplicidad. El cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ se representa también por $\mathfrak{c}$ o por $\beth_1$. Asumiendo la *Hipotesis del Continuo* que establece que no hay ningún cardinal estrictamente entre $\aleph_0$ y $\mathfrak{c}$, se demuestra que $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.

Una notación alternativa para el conjunto de las partes de un conjunto A es 2^A. De esta forma, la definición anterior también se puede establecer con la igualdad

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

análoga a la que conocemos para los conjuntos finitos.

Por otra parte, de los resultados vistos hasta ahora se deduce la siguiente relación. Para todo conjunto finito A

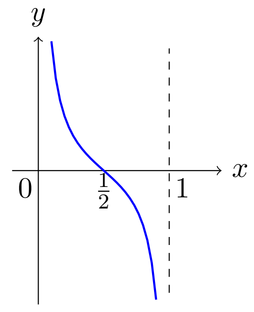
$$|A| < \aleph_0 < \aleph_1$$

Igual que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$ son los conjuntos estándar que usamos para demostrar que un conjunto es infinito numerable, para demostrar que un conjunto tiene cardinal $\aleph_1$ usaremos el intervalo $[0,1]$ dentro de $\mathbb{R}$, tal que como establece es siguiente resultado, cuya demostración queda fuera de los objetivos de este curso.

Teorema 7.3.4 *El cardinal de* $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *es* $\aleph_1$.

Ejemplo 7.3.5 El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene cardinal $\aleph_1$, puesto que la siguiente función es biyectiva

$$g\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}$$



Recordemos que ya habíamos visto que los intervalos $[0,1]$ y $(0,1)$ tienen el mismo cardinal, es decir, $\aleph_1$. □

Como ya hemos visto, el teorema de Cantor establece que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ y, por lo tanto, el proceso de formación de conjuntos potencia nos lleva a una jerarquía de cardinales de conjuntos infinitos y no numerables.

$$|A| \prec |\mathcal{P}(A)| \prec |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| \prec \dots$$

No existe ningún cardinal infinito máximo, aunque, como hemos visto, sí existe un cardinal infinito mínimo, $\aleph_0$. Sin embargo, para los objetivos de este curso, solo vamos a trabajar con conjuntos don cardinales finitos, $\aleph_0$ o $\aleph_1$.