Examen - Junio 2022

1. X = rentabilidad de Mcdon Y = tiempo en vender
Rectas de regresión X e Y : $6y+5x=7$ y $3y+2x=4$

$x \to X$ $y \to Y$

a) Recta de regresión. Y/X y X/Y

$6y = 7-5x \Rightarrow y = \frac{7}{6} - \frac{5x}{6}$

$3y = 4-2x \Rightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{2x}{3}$

Aquella recta con la menor pendiente es Y/X por lo tanto

$Y/X \Rightarrow 3y+2x=4$ $X/Y \Rightarrow 6y+5x=7$

b) Estudiamos en X/Y para analizar la rentabilidad

$y = 3$ años.

$X/Y = 6y+5x=7 \Rightarrow 18+5x=7$ $5x=-11$ $\underline{\underline{x=-2.2}}$

Rentabilidad negativa.

c) Sabiendo que $\sigma_Y^2 = 5$, calcula la varianza de X, la covarianza y el coef. de correlación lineal.

$X/Y \Rightarrow x = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}y$ $-\frac{6}{5} = \frac{Cov(x,y)}{5} \Rightarrow -6 = Cov(x,y)$ $\square$

$Y/X \Rightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x$ $= \frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$ $-\frac{2}{3} = \frac{-6}{Var}$

$$Var(x) = \frac{-18}{2} = 9 \quad \square$$

Coef. de correlación.

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} = \frac{-6}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}} = -0\ 894$$

② Variable bidimen. (x,y) toma los siguientes 4 valores $(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)$. Calc. el error cuadrático medio. (MSE) para los dos modelos. y determina el mejor modelo.

1) $y = -6 + 6 \cdot x$ 2) $y = -5 + 5 \cdot x$

$1 \Rightarrow$
- 1 : 0
- 2 : 6
- 3 . 12
- 4 : 18

$2 \Rightarrow$
- 1 : 0
- 2 : 5
- 3 : 10
- 4 : 15

1 : 1
2 : 4
3 : 9
4 : 16

$$MSE = \sum \frac{e^2}{n}$$

$$MSE_1 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2}{4} = \frac{18}{4} = 4.5$$

$$MSE_2 = \frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{4} = 1$$

Se ajusta mejor el segundo modelo ya que la suma de los errores es más próxima a 0.

3 Un laboratorio produce dos medicamentos A y B para la misma afección. En el primer de ellos se reportan efectos secundarios en el 3% de los casos, mientras que esta tasa aumenta a un 10% para el medicamento B. Si se estima que cada 3 pacientes en trat. dos toman A.

a) Calc la prob. de que un paciente reporte efectos secundarios

A : 3% ef.s $\quad P(A) = 2/3 \quad P(efs/A) = 3\%$

B: 10% efs. $\quad P(B) = 1/3 \quad P(efs/B) = 10\%$

$$\text{Prob Total} = P(A) \cdot P(efs/A) + P(B) \cdot P(efs/B)$$

$$= 2/3 \cdot 0.03 + 1/3 \cdot 0.1 = 0.05\bar{3}.$$

b) Eligen aleatoriamente 40 pacientes y nos aseguran que hay menos de dos personas por efecto secundario.

Prob. de Tomar A.

$$P(A/efs) = \frac{P(A) \cdot P(efs/A)}{P(efs)} =$$

A

$P(X<2) \quad B(40, 0.03)$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$\binom{40}{0}(0.03)^0(0.97)^{40} + \binom{40}{1}(0.03)^1(0.97)^{39} = 0.66.$$

B $P(X<2) \quad B(40, 0.1)$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$\binom{40}{0}(0.1)^0(0.9)^{40} + \binom{40}{1}(0.1)^1(0.9)^{39} = 0.08$$

$$P(E) = P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) =$$

$$2/3 \cdot 0.66 + 1/3 \cdot 0.08 = 0.47$$

$$P(A/E) = \frac{P(A) \cdot P(E/A)}{P(E)} = \frac{2/3 \cdot 0.66}{0.47} = 0.93617$$

$\underline{\underline{93.6\%}}$

4. De una variable aleatoria se sabe que la mediana es $3/2$

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a+bx & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ c & \text{si } 3 < x \end{cases} \qquad Me = 3/2$$

a) Determina los valores de a, b y c. Det. su esperanza.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{3} a+bx\,dx + \int_{3}^{\infty} c\,dx$$

$$\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left.ax + \frac{bx^2}{2}\right]_1^3 + \left.cx\right]_3^{\infty}$$

$$\frac{1}{3} + \left(3a + \frac{9}{2}b - a - \frac{b}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3} + 2a + 4b = 1$$

$$F(3/2) = 0.5 \Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^{3/2} a+bx\,dx = 0.5$$

$$\frac{1}{3} + \left[ax + \frac{bx^2}{2}\right]_1^{3/2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2}a + \frac{\frac{9}{4}b}{2} - a - \frac{b}{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + \frac{5}{8}b = 0.5}$$

$$\begin{cases} 1/3 + 2a + 4b = 1 \\ 2/3 + a + \frac{10}{8}b = 1 \end{cases}$$

$$a = 1 - \frac{2}{3} + \frac{10}{8}b \Rightarrow \underbrace{a = \frac{1}{3} + \frac{10}{8}b}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{10}{8}b + 4b = 1$$

$$\frac{10}{8}b + 4b = 0 \qquad \underline{\underline{b=0}} \qquad \underline{\underline{a = \frac{1}{3}}}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)$$

$$\int_0^1 x^3\,dx + \int_1^3 ax+bx^2$$

$$\left.\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3}\right]_1^3 \quad \text{siendo } a = \frac{1}{3} \quad b=0$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = 19/12 \qquad f(x)\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ 1/3 & 1 < x \le 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases}$$

b) Num. real X . Variable alea. N = num puntos obtenidos.

3 puntos si $x \le 1$ 2 puntos si $1 < x \le 2$ y
1 punto $x > 2$

Calcula función dist de N. Det esperanza y la moda.

Para F(1)

$$F(1) = \int_{-\infty}^{1} f(x) = \int_0^1 x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Para $1 < x \le 2$

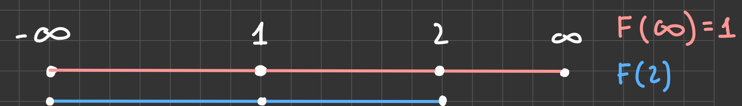
$F(2) - F(1) =$ La resta es el rango 1 − 2

$$\Rightarrow F(2) = \int_0^1 x^2 + \int_1^3 f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} = 2/3$$

$F(2) = 1/3$

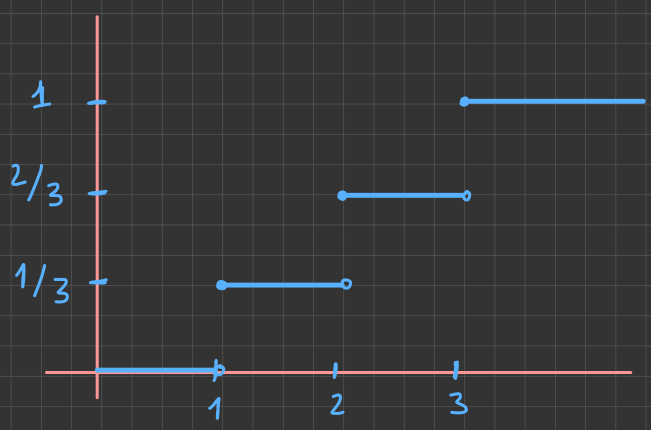
$$F(2) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{1/3}$$

Para $x > 2$



$F(\infty) - F(2) =$

$1 - 2/3 = \boxed{1/3}$



5. Dos tipos de balones (A y B)

Radio de A sigue una dist. normal de media 20 cm varianza 16 cm^2

Radio de B " " " " media 16 cm desv. tip. 3cm

P(A): balones que se producen de A = 0.7 $P(\bar{A}) = 0.3$

a) Prob de que radio de balón A mida 3cm más que del balón B.

$P(r_A - r_B > 3)$ Aquí trabajamos con tablas o con R.

$X_1 - X_2 \sim N(20-16, \sqrt{16+9})$

$\frac{3-4}{5} = -1/5$ $P(z > -0{,}2) = P(z < 0.2)$

$= 1 - P(Z > 2)$ Miramos en la tabla el valor correspondiente. diapo. 25

$1 - 0.4207 = 0.5793$. Probablidad de 3 o más de diferencia.

b) Prob de que balón al azar, radio < 22 cm.

$P(X<22) = P(A) \cdot P(<22/A) + P(\bar{A}) \cdot P(<22/\bar{A})$

$P(X<22/A) = P\left(z < \frac{22-20}{4}\right) = (z < 0.5)$

$1 - (z > 0.5) \rightarrow 1 - 0.3085 = \underline{0.6915}$

$P(X<22/\bar{A}) = P\left(z < \frac{22-16}{3}\right) = P(z < 2)$

$1 - (z > 2) = 1 - 0.0228 = \underline{0.9772}$

Prob. total = $0.7 \cdot 0.6915 + 0.3 \cdot 0.9772 = 0.7721$.

c) 10 balones Prob de que al menos 2 midan más de 22 cm.

Binomial de A + Binomial de B. = Bin de la total

$PT < 22 = 0.7721.$

$PT > 22 = 1 - 0.77721 = \underline{0.22279}$ → Probablidades de que un balón sea mayor a 22 cm.

Sacamos todas las combinaciones

$B(10, 0.22279) \rightarrow 2 \text{ ó mas} = 1 - B(0) - B(1)$

$$1 - \binom{10}{0}(0.22279)^0(0.77721)^{10} - \binom{10}{1}(0.22279)^1(0.77721)^9 = 0.689$$

Por lo Tanto 68.9% de probabilidad de que al menos dos midan más de 22 cm.

6.) Altura de 50 chimpancés. de A.

50 A $\begin{cases} \text{media: } 100 \text{ cm.} \\ \text{varianza: } 98 \text{ cm}^2 \end{cases}$

55 B $\begin{cases} \text{media: } 103 \text{ cm} \\ \text{varianza } 118.8 \text{ cm}^2 \end{cases}$

a) Intervalo de confianza para la diferencia de medias entre las dos alturas., bajo normalidad de datos.

Tabla de Int. confianza diapo 14 tema 6. (diferencia de medias.

Se puede hacer con varianzas o cuasivarianzas. mejor

1. Calcular las cuasivarianzas.

Para A: $\frac{50}{49} \cdot 98 = \underline{\underline{100}}$ Para B: $\frac{55}{54} \cdot 118.8 = \underline{\underline{121}}$

Aplicamos fórmula.

$$\left[103-100 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{121}{55} + \frac{100}{50}} \right]$$

2. Calculamos α.

Piden 95% Falta 5% hasta 100. $\alpha = 0.05$

Buscamos $Z_{0.025}$ en la tabla

$z = 1.96$ 0.005

Por lo que nos queda.

$$3 \pm 1.96 \cdot 2.049 = [-1.016 , 7.01]$$

Este es el intervalo de confianza del 95 %

b) Podemos afirmar que la media de la especie B es mayor que la A.

Como el 0 está en el rango no tenemos suficiente certeza para decir que una media es mayor a la otra.

7. Sondeo movil favorito.

Ciudad/Marca	Huawei	Samsung	Xiaomi
Madrid	150	210	110
Barcelona	200	200	130

a) Contrasta con una significación del 2.5% si están relacionadas.

Tabla de contingencia

Ciudad/Marca	Huawei	Samsung	Xiaomi	$O_{i.}$
Madrid	150	210	110	470
Barcelona	200	200	130	530
$O_{.j}$	350	410	240	1000 ← n

Para cada valor $(O_{.j} \cdot O_{i.})/n$

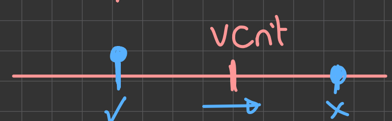
$150 \rightarrow (350 \cdot 470)/1000 = 164.5$

Ciudad/Marca	Huawei	Samsung	Xiaomi
Madrid	164.5	192.7	112.8
Barcelona	185.5	217.3	127.2

Contraste es $\sum \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$ p.e $\frac{(150 - 164.5)^2}{164.5}$

$$1.278 + 1.55 + 0.069 + 1.13 + 1.377 + 0.0616 = \underline{\underline{5.465}} \quad \hat{\chi}^2_0$$

Hay que calcular el valor crítico el cual determina si se acepta o no la hipótesis.



Si el valor crítico es mayor a 5.465 no son dependientes.

$\chi^2_{\alpha}, (K-1)(m-1)$

α porcentaje que te piden (0.025 en este caso

K y m (ancho y largo de la matriz)

$\chi^2_{0.025, 2}$ Buscamos en la tabla: χ^2

: 7.378

Como $\hat{\chi}^2_0 < \chi^2_{\alpha}$ son independientes. con α: 2.5%