TEMA **2**

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Contenidos

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Forma matricial.
2. Matrices escalonadas y matrices escalonadas reducidas. Método de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas lineales.
3. Sistemas homogéneos.
4. Cálculo de la matriz inversa.

Prerrequisitos: Operaciones con matrices. Resolución de ecuaciones.

Objetivos: Saber estudiar y resolver sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos usando el método de Gauss-Jordan. Saber calcular la inversa de una matriz usando el método de Gauss-Jordan.

2.1. Ecuaciones Lineales

Definición 2.1.1 *Una* ecuación lineal en n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ *tiene la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

en donde los coeficientes a_1, a_2,..., a_n *y* b *son elementos de un cuerpo* K.
Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas *es un conjunto de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Los *coeficientes* a_{ij} y los *términos independientes* b_i son elementos de un cuerpo. De esta forma, el coeficiente a_{ij} corresponde a la i-ésima ecuación y al j-ésima incógnita, x_j. Si el número de incógnitas es pequeño, las representaremos con letras distintas en lugar de usar subíndices: x, y, z, t,...

Toda la teoría desarrollada en este tema será aplicable a cualquier cuerpo. La mayoría de los ejemplos y ejercicios se desarrollarán en lo que vamos a hacer en este tema será valido en cualquier cuerpo. Aunque en la mayoría de ejemplos y ejercicios trabajaremos en $\mathbb{Q}$, también lo haremos en otros cuerpos, como en $\mathbb{C}$ o algún $\mathbb{Z}_p$ con p primo.

Ejemplo 2.1.2

1. Las ecuaciones siguientes son lineales:

$$\begin{array}{llll} (i) & 3x + (\log 5)y = 7 & (ii) & \frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2} \\ (iii) & 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 18 & (iv) & \left(sen\frac{\pi}{7}\right)x_1 - 4x_2 = e^2 \end{array}$$

2. Y no son ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{llll} (v) & xy + z = 2 & (vi) & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ (vii) & 2x_2 \operatorname{sen} x_1 - 3x_3 = \sqrt{2} & (viii) & e^x - 2y = 0 \end{array}$$

   Es decir, en las ecuaciones lineales, las incógnitas (variables) no están en el ámbito de raíces, funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas, ni exponentes distintos de 1.

3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ es un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

4. $$\begin{cases} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{cases}$$
es un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

5. $$\begin{cases} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{cases}$$
es un sistema de 5 ecuaciones y 4 incógnitas. □

DEFINICIÓN 2.1.3 *1. Una* solución *de un sistema lineal con n incógnitas es una n-tupla $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ de elementos del cuerpo tal que, al sustituir cada incógnita x_i por el correspondiente s_i, las ecuaciones del sistema se convierten en igualdades. Resolver un sistema de ecuaciones, consiste en hallar el conjunto de todas sus soluciones.*

2. Se dice que un sistema lineal es compatible *si tiene al menos una solución.*

3. Se dice que un sistema lineal es compatible determinado *si tiene exactamente una solución y se dice* compatible indeterminado *si tiene más de una solución.*

4. Se dice que un sistema lineal es incompatible *si no tiene solución.*

EJEMPLO 2.1.4

- El siguiente sistemas es incompatible:

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

- El siguiente sistema es compatible determinado y $x = -1$, $y = 1$ es su única solución:

$$\begin{cases} x & - & y & = & -2 \\ x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

- El siguiente sistema es compatible indeterminado:

$$x + 2y - 3z = 1$$

  Para cualesquiera valores de y y de z, $x = 1-2y+3z$ es solución de la ecuación. En el cuerpo $\mathbb{Q}$ (y por tanto cualquiera que lo contenga), el conjunto de soluciones es infinito. Estas soluciones se expresar usando una *representación paramétrica*. En este ejemplo, necesitamos dos *parámetros*, α, β, de forma que todas las soluciones se obtienen a partir de cualquier valor que se le dé a estos dos parámetros en las siguiente *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2\alpha - 3\beta \\ y &= \alpha \\ z &= \beta \end{aligned} \qquad \square$$

Dos sistemas de ecuaciones con el mismo número de incógnitas se dicen *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de soluciones. El estudio y resolución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en la transformación del sistema en otro equivalente. Dado un sistema de ecuaciones lineales podemos pasar a otro sistema equivalente realizando alguna de las siguientes manipulaciones:

1. Intercambiar el orden en el que figuran las ecuaciones en el sistema.
2. Multiplicar una de las ecuaciones por cualquier escalar no nulo.
3. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

A cada una de estas estas operaciones, que trivialmente mantienen el conjunto de soluciones, se les llama *operación elemental*. La aplicación sucesiva de operaciones elementales sobre las ecuaciones de un sistema lineal permite pasar de un sistema lineal a otro que, teniendo las mismas soluciones que el planteado inicialmente, es más fácil de resolver.

Ejemplo 2.1.5 Vamos a resolver es siguiente sistema usando las transformaciones anteriores, y que se corresponden con el método conocido com *reducción*.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Restamos dos veces la primera ecuación a la segunda ecuación y sumamos tres veces la primera ecuación a la tercera.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & & & 2x_3 & = & -2 \\ & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 20 \end{array} \right.$$

De esta forma, hemos obtenido un nuevo sistema, con las mismas soluciones que el inicial, pero sin que aparezca la incógnita x_1 en la segunda y tercera ecuación.

2. Intercambiamos las ecuaciones segunda y tercera. Obviamente, esto no afecta al conjunto de soluciones, pero facilita el trabajo posterior:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 20 \\ & & & & 2x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

3. Ahora multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{-1}{5}$ y la tercera por $\frac{1}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

4. Como hemos observado, este último sistema y el sistema inicial tienen "exactamente" las mismas soluciones, pero además, el último se puede resolver fácilmente:

   - La tercera ecuación nos da el valor de x_3 en cualquier solución: $x_3 = -1$.
   - Al sustituir el valor de x_3 en la segunda ecuación obtenemos $x_2 - (-1) = -4$, por lo que ya tenemos el valor de la segunda incógnita: $x_2 = -5$.
   - Finalmente, sustituimos los valores de x_3 y x_2 en la primera ecuación y obtenemos $x_1 - 2(-5) + (-1) = 6$, lo que permite hallar el valor de la primera incógnita: $x_1 = -3$. $\square$

2.2. Forma matricial

En adelante, vamos a trabajar con la *expresión matricial de los sistemas lineales*, lo que simplifica el estudio y resolución de los sistemas. Dado el sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

se definen las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Entonces, el sistema se puede escribir como $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

La matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se denomina *matriz de coeficientes* del sistema lineal, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$ es el *vector* de términos independientes y $(A \mid \boldsymbol{b})$ es la *matriz aumentada* del sistema lineal:

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo 2.2.1

Sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$

Forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matriz aumentada: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 4 & 10 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ □

La matriz ampliada es una representación "limpia" del sistema de ecuaciones en la que se "ocultan" las incógnitas y los símbolos de igualdad. Las operaciones elementales que vimos anteriormente sobre un sistema se traducen de manera obvia a operaciones elementales por filas en la matriz aumentada.

1. Intercambiar filas.
2. Multiplicar una fila por cualquier escalar no nulo.
3. Sumar a una fila un múltiplo de otra.

Vamos a repetir el ejemplo que hicimos anteriormente usando la matriz ampliada y estas operaciones.

Ejemplo 2.2.2 Vamos a resolver el siguiente sistema usando la matriz ampliada y la versión matricial de las transformaciones elementales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 4 & 10 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2=f_2+(-2)f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{f_3=f_3+(3)f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\uparrow\downarrow f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{f_2=\frac{-1}{5}f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3=\frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Si escribimos la última matriz ampliada como sistema, la resolución del mismo es inmediata y es la solución del sistema inicial.

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = 6 \\ x_2 - x_3 & = -4 \\ x_3 & = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 6 + 2x_2 - x_3 = 6 - 10 + 1 = -3 \\ x_2 & = x_3 - 4 = -1 - 4 = -5 \\ x_3 & = -1 \end{array}\right.$$

□

De esta forma, la propiedad de equivalencia de sistemas se puede formular sobre la forma matricial como sigue: dado un sistema de ecuaciones lineales $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, podemos pasar a otro sistema equivalente realizando cualquiera de las operaciones elementales de fila en la matriz aumentada $(A \mid \boldsymbol{b})$. O de forma más general, sustituyendo cualquier fila por una combinación lineal de esa fila y cualquier otra fila:

$$f_i = \alpha f_i + \beta f_j, \quad \alpha, \beta \neq 0$$

En adelante, también hablaremos de matrices *equivalente por filas*: dos matrices son equivalentes si podemos obtener una a partir de la otra efectuando una serie finita de operaciones elementales sobre filas. La equivalencia de matrices (aumentadas) se corresponde, como hemos visto, en equivalencia de sistemas lineales. Es importante destacar que podemos referirnos a esta relación como equivalencia porque verifica las tres propiedades que determinan una relación de equivalencia: es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

2.3. Matrices escalonadas. Sistemas escalonados.

En los ejemplos anteriores, con las operaciones elementales por filas hemos podido llegar a *matrices triangulares superiores* pero, en general, solo podemos llegar a matrices escalonadas.

DEFINICIÓN 2.3.1 (MATRICES ESCALONADAS) *Una matriz $m \times n$ está en* forma escalonada por filas *si verifica:*

1. *Si hay filas que solo contienen ceros, están en la parte inferior de la matriz.*
2. *En cada fila, al leer de izquierda a derecha, la primera entrada distinta de cero, llamada* entrada principal *o* pivote *de su fila, es un 1.*
3. *Si las filas i y $i+1$ no constan solo de ceros, entonces la entrada principal de la fila $i+1$ está a la derecha de la entrada principal de la fila i.*

Una matriz escalonada por filas se dice que está en forma escalonada reducida por filas *si además verifica:*

4. *Si una columna contiene la entrada principal de alguna fila, entonces el resto de los elementos de esa columna son iguales a cero.*

EJEMPLO 2.3.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas tres matrices están en forma escalonada por filas. Las matrices B y C, además, están en forma reducida, pero la matriz A no está en forma reducida, ya que por encima del pivote de la segunda fila hay un 3. □

El concepto de matrices escalonadas se traslada de forma natural a los sistemas de ecuaciones.

DEFINICIÓN 2.3.3 (SISTEMAS ESCALONADOS) *Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un* sistema escalonado *si su matriz aumentada es escalonada. Y se dice que es un* sistema escalonado reducido *si su matriz aumentada es escalonada reducida.*

La importancia de las matrices y los sistemas escalonados es que se resuelven muy fácilmente y cualquier sistema es equivalente a un sistema escalonado reducido.

TEOREMA 2.3.4 *Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ distinta de cero es equivalente a una matriz escalonada reducida por filas.*

De esta forma, la resolución de un sistema de ecuaciones se realiza convirtiendo su matriz aumentada en una matriz escalonada reducida. Este método se conoce como *Método de Gauss-Jordan*:

Para resolver un sistema lineal $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ procedemos así:

1. Se forma la matriz aumentada $(A \mid \boldsymbol{b})$.
2. Mediante operaciones elementales de filas, se transforma la matriz aumentada $(A \mid \boldsymbol{b})$ a su forma escalonada reducida por filas $(U \mid \boldsymbol{c})$.
3. En cada fila distinta de cero de la matriz $(U \mid \boldsymbol{c})$, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de la fila.

En el siguiente ejemplo, mostramos con detalle todo el proceso.

EJEMPLO 2.3.5 Vamos a resolver el sistema

$$\begin{array}{rrrrcl} & 2y & +3z & -4t & = & 1 \\ & & 2z & +3t & = & 4 \\ 2x & +2y & -5z & +2t & = & 4 \\ 2x & & -6z & +9t & = & 7 \end{array}$$

Y para ello, vamos a transformar en matriz escalonada reducida su matriz aumentada

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{array}\right)$$

Describimos con detalle los pasos necesarios de lo que constituye el algoritmo que demuestra el teorema antes enunciado.

1. En la primera columna con elementos no nulos A (columna pivote) buscamos

el primer elemento no nulo, el elemento pivote:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Si es necesario, intercambiamos la primera fila con la fila del pivote:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

3. "Hacemos ceros" por debajo del pivote. Es decir, sustituimos cada fila por la combinación lineal de la propia fila y la primera fila que haga cero el primer elemento. En este ejemplo, solo tenemos que restar la primera fila a la cuarta fila:

$$A_1 \overset{f_4=f_4-f_1}{\rightarrow} A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Repetimos los pasos anteriores sobre la submatriz que se obtiene al eliminar la primera fila y la primera columna.

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right) \overset{f_3 \updownarrow f_2}{\rightarrow} A_3 = \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_4=f_4+f_2}{\rightarrow} A_4 = \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

5. Repetimos los pasos anteriores sobre la submatriz que se obtiene al eleminar la primera y segunda fila y la primera y segunda columna.

$$A_4 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_4=f_4-f_3} A_5 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

6. Seguimos así hasta que hagamos todos los ceros posibles moviéndonos "hacía abajo" y a partir de ahí empezamos a hacer ceros "hacía arriba" con la entrada principal de cada fila. En este ejemplo, utilizamos la entrada principal de la tercer fila para hacer ceros en su columna en las dos primera filas

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2=2\cdot f_2-3\cdot f_3} A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -17 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1=2\cdot f_1-(-5)\cdot f_3} A_7 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 19 & 28 \\ 0 & 4 & 0 & -17 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Repetimos el paso anterior utilizando la entrada principal de la segunda fila para hacer ceros en su columna en la primera fila

$$A_7 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 19 & 28 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -17 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1=f_1-f_2} A_8 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 36 & 38 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -17 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Finalmente, dividimos cada fila por el valor de su elemento principal para obtener la matriz escalonada reducida por filas equivalente a la matriz inicial:

$$A_8 = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 36 & 38 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -17 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A_9 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{-17}{4} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema, escribimos el sistema que tiene como matriz aumentada a A_9, y que en este caso tiene una ecuación menos que el sistema inicial

$$\left\{\begin{array}{ll} x+9t & =\frac{19}{2} \\ y-\frac{17}{4}t & =\frac{-5}{2} \\ z+\frac{3}{2}t & =2 \end{array}\right. \qquad \longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{ll} x & =\frac{19}{2}-9t \\ y & =\frac{-5}{2}+\frac{17}{4}t \\ z & =2-\frac{3}{2}t \end{array}\right.$$

Como vemos, el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible indeterminado) y las soluciones quedan expresadas en función de un parámetro; la incógnita t queda como variable independiente de la que dependen las otras tres. □

2.4. Existencia de soluciones

Acabamos de ver que el método de Gauss-Jordan nos permite resolver una sistema de ecuaciones lineales incluso si el sistema tiene infinitas soluciones. Pero, como sabemos, no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución: ¿qué ocurrirá en ese caso si aplicamos el método de Gauss-Jordan?

TEOREMA 2.4.1 (INCOMPATIBILIDAD DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES) *Un sistema de ecuaciones lineales es incompatible si y sólo si su matriz aumentada es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas, que tiene una fila en la que todos los elementos son nulos excepto el último.*

EJEMPLO 2.4.2 Vamos a estudiar y resolver, si fuera posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Utilizamos la forma matricial y el método de Guass-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2=f_2-2\cdot f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3=f_3-f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3=f_3-f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, por el teorema anterior, el sistema es incompatible, ya que en la tercera fila el único elemento no nulo es el último. Es fácil entender esto si escribimos el sistema que tiene por matriz aumentada a esta última matriz:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

Naturalmente, la última igualdad es siempre falsa y por lo tanto el sistema no tiene solución. □

Debemos tener en cuenta que si un sistema es incompatible, no será necesario completar el procedimiento de Gauss-Jordan hasta encontrar la matriz escalonada reducida. En el momento en que obtengamos una fila con todos los elementos nulos excepto el último, podremos parar el procedimiento concluyendo la incompatibilidad del sistema.

Ejemplo 2.4.3 Vamos a usar el método de Gauss-Jordan para estudiar y resolver, si fuera posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \stackrel{f_4 \uparrow\downarrow f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{f_5 = f_5 - f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \stackrel{f_2 = f_2 - f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos concluir que el sistema es compatible indeterminado y escribir la solución general en forma paramétrica usando la última incógnita como parámetro.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 - x_4 & = 1 \\ x_2 + x_4 & = 3 \\ x_3 + x_4 & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 1 + x_4 \\ x_2 & = 3 - x_4 \\ x_3 & = 1 - x_4 \end{array}\right.$$

El conjunto solución S se puede especificar de la siguiente forma:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 + x_4,\ x_2 = 3 - x_4,\ x_3 = 1 - x_4\} \qquad \square$$

2.5. Sistemas homogéneos

Definición 2.5.1 (Sistema homogéneo) *Un sistema* homogéneo *es un sistema lineal de la forma*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Un sistema homogéneo "siempre" es compatible, pues $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es solución de cualquier sistema homogéneo; a esta solución se la denomina *solución trivial.*

Ejemplo 2.5.2 Vamos a usar el método de Gauss-Jordan para estudiar y resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & & -2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

No necesitamos completar el proceso de Gauss-Jordan ya que el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial, $x = y = z = 0$. □

Ejemplo 2.5.3 Vamos a estudiar y resolver es siguiente sistema homogéneo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & w & = & 0 \\ x & & & & & + & w & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{array}{rcr} x & = & -w \\ y & = & w \\ z & = & -w \end{array}$$

en donde w es cualquier número real. Es decir, el conjunto solución es:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -w,\ y = w,\ z = -w\}$$ □

En la matriz aumentada de los sistemas homogéneos, es habitual omitir la columna de los términos independientes, ya que al estar formado por ceros, se mantiene invariable durante todo el proceso de Gauss-Jordan.

2.6. Cálculo de la matriz inversa

Hemos visto en el tema anterior que, para cualquier cuerpo K, el conjunto de las matrices cuadradas con coeficientes en K, $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, forman un anillo unitario con la suma y producto habituales; sin embargo, no todos sus elementos son invertibles. En esta sección, vamos a aprender a calcular la inversa de una matriz utilizando el método de Gauss-Jordan.

La matriz inversa de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, si existe, es otra matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$; si existe, esta matriz se denota por A^{-1}. En adelante, denotaremos por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ las columnas de la matriz identidad I_n, es decir,

$$\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } j\text{-ésima}$$

En el producto $AB = I_n$, el producto de A por la columna j-ésima de B es igual a la columna j-ésima de I_n. Es decir, la columna j-ésima de B es solución de la ecuación

$$A\boldsymbol{x}_j = \mathbf{e}_j \qquad 1 \le j \le n$$

De esta forma, el problema de determinar la matriz B inversa de A, equivale al problema de determinar las soluciones de los sistemas dados por las siguientes matrices ampliadas:

$$(A \mid \mathbf{e}_1), \quad (A \mid \mathbf{e}_2), \ldots \quad (A \mid \mathbf{e}_n)$$

Dado que las operaciones elementales necesarias para resolver los sistemas solo depende de la matriz A, podemos resolverlos simultánemente considerando una matriz ampliada con todas las columnas $\mathbf{e}_j$:

$$(A \mid \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_n) = (A \mid I_n)$$

Si al aplicar el método de Gauss-Jordan a esta matriz llegamos a una matriz de la forma $(I_n \mid B)$, podemos entonces afirmar que B es la matriz inversa de A; en caso contrario, concluiríamos que A no es invertible.

EJEMPLO 2.6.1 Vamos usar el método descrito anteriormente para determinar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_3=f_3-2f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_3=f_3-2f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{f_1=f_1-2f_3}{\overset{f_2=f_2+f_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_1=f_1+f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid B)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la matriz inicial es inversible y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$