Tema 5: Variables Aleatorias. Distribuciones de Probabilidad

Tema 5a: Variables Aleatorias.

Departamento Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Curso 2020-2021

Introducción

Dado un experimento aleatorio, al conjunto de sucesos elementales le hemos llamado espacio muestral (E). Supongamos que es discreto.
A cada suceso elemental podemos asociarle un número real de muchas formas diferentes. Cada una será una variable aleatoria.

Por ejemplo, al lanzar una moneda 4 veces, el espacio muestral es:
$E = \{CCCC, CCCF, CCFC, CCFF, CFCC, CFCF, CFFC, CFFF, FCCC, FCCF, FCFC, FCFF, FFCC, FFCF, FFFC, FFFF\}$ donde $C =$'Cara' y $F =$'Cruz.

- 'Número de caras obtenidas'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 y a $FCFC$ un 2.
- 'Número de caras antes de la primera aparición de cruz'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 y a $FCFC$ un 0.
- 'Cada cara se valora multiplicada por el lugar de aparición'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 (1+0+0+0) y a $FCFC$ un 6 (0+2+0+4).

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, es decir un espacio muestral E, una álgebra o σ-álgebra $\mathcal{A}$ y una probabilidad P.

Definición

Decimos que X es una **variable aleatoria** *sobre E, a una aplicación de $E \to \mathbb{R}$ que verifique la propiedad:*

$$\textit{Para todo } x \in \mathbb{R}, \ \textit{el conjunto } \{w \in E / X(w) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

O equivalentemente

$$X^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{A}.$$

Definición

Llamamos **soporte** *de la variable aleatoria X (S_X), al conjunto de valores reales que puede tomar.*

Ejemplo

Ejemplo

Dado el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda y la variable aleatoria X: 'valor obtenido en el dado, que se duplica si resulta cara al lanzar la moneda'.

- *Determinar su espacio muestral.*
- *Hallar el aplicado de cada uno de los elementos de E.*
- *Determinar el soporte de X.*

a) E={'1C', '2C', '3C', '4C', '5C', '6C', '1F', '2F', '3F', '4F', '5F', '6F'}

b) X('1C')=2, X('2C')=4, X('3C')=6, X('4C')=8, X('5C')=10, X('6C')=12, X('1F')=1, X('2F')=2, X('3F')=3, X('4F')=4, X('5F')=5, X('6F')=6.

c) El soporte $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

Función de distribución

Definición

Dado un espacio probabilístico $(E, \mathcal{A}, P)$ y una variable aleatoria X. Definimos la **función de distribución de la variable aleatoria** X *como una función que verifica:*

1. $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
2. $F(x) = P(\omega \in E / X(\omega) \leq x)$ $F(x) = P(X \leq x)$ minúscula Mayuscula.

Propiedad

La función de distribución asociada a una variable aleatoria es única y caracteriza a la misma.

Esto es, si conocemos la función de distribución podemos calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor.

Variable Discreta | Variable continua

Función de probabilidad

$F(x) = P(X \leq x)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Función de densidad

$f(x) = F'(x)$

ribuciones de

s.

ada

$E[X] = \sum_{i=1}^{r} x_i \, p(x_i)$

$p(x_i) = P(X \leq x_i)$

$E[g(x)] = \sum_{i=1}^{r} g(x_i) \cdot p(x_i)$

$X : E \longrightarrow P$

$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x)\,dx$

$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$

Entre 0 y 1

$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \quad F(x) = P(\underbrace{X}_{\text{variable aleatoria}} \leq x)$

$Var[X] = E[X - E[X]]^2 = E[X^2] - E[X]^2$

Propiedades de la función de distribución

1. $P(X \leq x) = F(x)$
2. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
4. $P(X = a) = F(a) - \lim_{h \to 0^+} F(a - h)$
5. $0 \leq F(x) \leq 1$
6. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
7. $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
8. F(x) **es monótona no decreciente**, es decir: $a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$
9. F(x) **es continua por la derecha**, es decir, $\lim_{h \to 0^+} F(x + h) = F(x)$

Ejemplo

Ejemplo

La función de distribución $F(x)$ de una v.a. discreta X viene dada por:

x	$(-\infty, 1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$	$[10,12)$	$[12,\infty)$
$F(x)$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

Hallar:
1) $P(X \leq 3.5)$, 2) $P(X \leq 7)$, 3) $P(X > 2)$, 4) $P(X \geq 2)$, 5) $P(3 < X \leq 8)$.

1) $P(X \leq 3.5)$=F(3.5)=$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
2) P($X \leq 7$)=F(7)=$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
3) P($X > 2$)=1-F(2)=$\frac{3}{4}$.
4) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X > 2) = (F(2) - \text{lím}_{h \to 0} F(2-h)) + \frac{3}{4} =$
$= (\frac{3}{12} - \frac{1}{12}) + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$
5) P($3 < X \leq 8$)=F(8)-F(3)=$\frac{10}{12} - \frac{4}{12}$=0.5.
NOTA: La variable X es la de un ejemplo anterior con lanzamiento de moneda y dado.

Tipos de variables aleatorias

Dependiendo de como sea el conjunto soporte podemos distinguir varios tipos de variables aleatorias.

$$\text{Tipos de variables aleatorias.} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Discretas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Soporte finito} \\ \text{Soporte numerable} \end{array} \right. \\ \textit{Continuas} \\ \textit{Mixtas} \end{array} \right.$$

Finita: Lanzamiento de un dado. Puntos obtenidos por un equipo de fútbol en una jornada ($S_P = \{0, 1, 3\}$).
Numerable: Días transcurridos hasta realizar un cambio de tarifa de móvil. Número de averías recibidas por un servicio técnico.
Continua: Alcance de una antena. Distancia recorrida por un vehículo en 1 hora. Consumo en litros de combustible en 100Km.
Mixta: a) Distancia alcanzada por un lanzador, si no lo realiza se codifica como -1.
b) Premio obtenido. Se realiza un sorteo entre 10 concursantes, si es seleccionado puede obtener un premio entre 5 y 20.

Variable aleatoria discreta

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio y sea X una variable aleatoria. Diremos que se trata de una **variable aleatoria discreta** *si su soporte es es un conjunto discreto. Es decir, la variable X toma solo un conjunto finito o infinito numerable de valores en $\mathbb{R}$.*

Para este tipo de variable, la forma más simple de definirlas es dar la probabilidad p_i de que tome cada uno de los posible valores x_i de su soporte.

Definición

Definimos la **función de probabilidad** *de una variable aleatoria discreta, mediante:* $p(x_i) = P(X \leq x_i)$

$$p(x_i) = P(\omega \in E / X(\omega) = x_i) = P(X = x_i)$$

En el ejemplo anterior:
$p(\pi) = 0$
$F(\pi) = 3/36$

Ejemplos

Ejemplo

La función de probabilidad de la variable aleatoria: 'Suma de los valores obtenidos al lanzar 2 dados' es:

x_i	$p(x_i)$		x_i	$p(x_i)$
2	$\frac{1}{36}$		8	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{2}{36}$		9	$\frac{4}{36}$
4	$\frac{3}{36}$		10	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$		11	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{5}{36}$		12	$\frac{1}{36}$
7	$\frac{6}{36}$			

Ejemplo

La función de probabilidad de 'Número de caras' al lanzar 3 monedas es: p(0)=1/8, p(1)=3/8, p(2)=3/8, p(3)=1/8.

Ejemplo para v.a. numerable

$E[X] \to$ De media, qué número de veces lanzas el dado para que de 5.

Ejemplo

Sea la variable aleatoria 'Lanzar un dado hasta la primera aparición de un 5'. Hallar la función de probabilidad.

p(1)=P(X=1)=P(sacar 5 a la 1ª)=1/6.
fallar a la primera
acertar la 2ª
p(2)=P(X=2)=P(fallar la primera y sacar 5 a la 2ª)=(5/6)(1/6).
p(3)=P(X=3)=P(fallar 2 veces y sacar 5 a la 3ª)=(5/6)(5/6)(1/6)=
$=(5/6)^2(1/6)$,
fallar fallar Acertar
...
$p(k) = P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$, para $k = 1, 2, \ldots$
que es la función de probabilidad.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(k) = \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot \frac{5}{6}^{k-1} \cdot \frac{1}{6} =$$

Propiedades

- **La función de probabilidad caracteriza a la variable aleatoria discreta.**
- Si p es una función de $\mathbb{R}$ en $[0,1]$ que verifica: $\sum_i p(x_i) = 1$, entonces existe una v.a. que la tiene como función de probabilidad.

Ejemplo

¿Determina la función: $p(k) = (2/3)^k(1/3)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$, una función de probabilidad?

Para todo k, $0 \leq p(k) \leq 1$. Veamos si $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$.
$\sum_k p(k) = p(0) + p(1) + \ldots = (2/3)^0(1/3) + (2/3)^1(1/3) +$
$+ (2/3)^2(1/3) + (2/3)^3(1/3) + \ldots = 1/3 + (2/3)(1/3) + (2/3)^2(1/3) + \ldots =$
$= \frac{1/3}{1-2/3} = 1$ luego define una función de probabilidad.

Representación gráfica. Ejemplo.

Tanto la función de probabilidad, como la de distribución de una variable aleatoria pueden ser representadas gráficamente.

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria 'Número de caras' al lanzar 4 monedas. Hallar:

- *Función de probabilidad.*
- *Función de distribución.*
- *Representar ambas gráficamente.*

p(0) $=P('FFFF') = 1/16$, p(1) $=P('CFFF' \cup' FCFF' \cup' FFCF' \cup' FFFC') = 4/16$,
p(2) $=P('CCFF' \cup' CFCF' \cup' CFFC' \cup' FCCF' \cup' FCFC' \cup' FFCC') = 6/16$,
... p(3) $= 4/16$, p(4) $= 1/16$.

Ejemplo-cont

La función de probabilidad expresada como tabla y la función de distribución $F(x) = P(X \leq x)$ quedan:

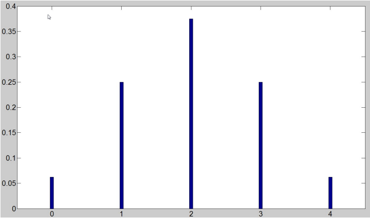
x_i	p_i
0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{4}{16} \\ 2 & \frac{6}{16} \\ 3 & \frac{4}{16} \\ 4 & \frac{1}{16} \\ \text{Otro} & 0 \end{cases}$$

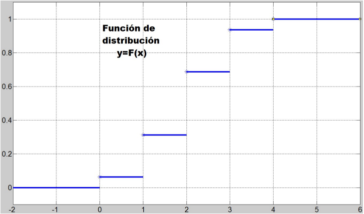
x	$F(x)$
$(-\infty, 0)$	0
$[0, 1)$	$\frac{1}{16}$
$[1, 2)$	$\frac{5}{16}$
$[2, 3)$	$\frac{11}{16}$
$[3, 4)$	$\frac{15}{16}$
$[4, \infty)$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Función de probabilidad



Función de distribución



Esperanza matemática. Caso discreto

Definición

Se llama **esperanza matemática** *de la variable aleatoria discreta X a:*

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{x_i \in S_X}} \mathrm{x_i p(x_i)} = \sum_{\mathrm{x_i \in S_X}} \mathrm{x_i P(X = x_i)}$$

En el caso de que el soporte S_X sea un conjunto infinito numerable, será necesario que la serie sea absolutamente convergente, esto es $\sum_{x_i \in S_X} |x_i| P(X = x_i) < \infty$

Ejemplo

Hallar la esperanza matemática del 'Número de caras' al lanzar 4 monedas.

$$E(X) = 0p(0) + 1p(1) + 2p(2) + 3p(3) + 4p(4) = 0\frac{1}{16} + 1\frac{4}{16} + 2\frac{6}{16} + 3\frac{4}{16} + 4\frac{1}{16} = 2$$

Generalización del concepto

Definición

Sea g una función real y X una variable aleatoria llamamos **esperanza de g(x)** *a:*

$$\mathrm{E}(\mathrm{g}(\mathrm{X})) = \sum_{\mathrm{x_i} \in \mathrm{S_X}} \mathrm{g}(\mathrm{x_i})\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x_i})$$

con la condición de que la serie sea absolutamente convergente: $\sum_{x_i \in S_X} |g(x_i)| P(X = x_i)$

Ejemplo

Si X es la v.a. 'Número de caras' al lanzar 4 monedas. Hallar las esperanzas de: 1) X^2, *2)* X^3, *3)* $\operatorname{sen}(\frac{\pi X}{2})$*:*

1) $E(X^2) = 0^2 p(0) + 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3) + 4^2 p(4) = \frac{1 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 6}{16} + \frac{9 \cdot 4}{16} + \frac{16 \cdot 1}{16} = 5$

Ejemplo-cont

2) $E(X^3) = 0^3 p(0) + 1^3 p(1) + 2^3 p(2) + 3^3 p(3) + 4^3 p(4) =$
$= \frac{1 \cdot 4}{16} + \frac{8 \cdot 6}{16} + \frac{27 \cdot 4}{16} + \frac{64 \cdot 1}{16} = 14$
3) $E(\text{sen}\left(\frac{\pi X}{2}\right)) = \text{sen}(0)p(0) + \text{sen}(\frac{\pi}{2})p(1) + \text{sen}(\pi)p(2) +$
$+ \text{sen}(\frac{3\pi}{2})p(3) + \text{sen}(2\pi)p(4) = \frac{4}{16} - \frac{4}{16} = 0$

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria 'Número de lanzamientos' de un dado hasta la primera aparición de la cara '5'. Hallar $E(X)$.

Conocemos que $\mathrm{p(k)} = (5/6)^{\mathrm{k}-1}(1/6)$ para k=1,2,. . . , luego:
$E(X) = 1(1/6) + 2(5/6)(1/6) + 3(5/6)^2(1/6) + 4(5/6)^3(1/6) + \ldots =$
$= \frac{1}{6}[1 + 2(5/6) + 3(5/6)^2 + 4(5/6)^3 + \ldots] = \frac{S}{6}$

$$\begin{array}{lclll}
S & = & 1 & +2(5/6) & +3(5/6)^2 + 4(5/6)^3 + \ldots \\
\frac{5}{6}S & = & & +1(5/6) & +2(5/6)^2 + 3(5/6)^3 + \ldots \\
\hline
S - \frac{5}{6}S & = & 1 & + \ (5/6) & + \ (5/6)^2 + \ (5/6)^3 + \ldots \Rightarrow
\end{array}$$

$$\frac{S}{6} = \frac{1}{1 - 5/6} = 6 \Rightarrow S = 36 \Rightarrow \mathrm{E(X)} = 6$$

Variable aleatoria continua

Definición

Se dice que una **variable aleatoria** *es* **continua** *si su soporte es un intervalo real (finito o infinito) o unión de ellos.*

Son variables aleatorias continuas: Temperatura, peso, duración de un componente, ...

Definimos la probabilidad de un intervalo:

$$P(a < X \leq b) = P(X^{-1}(a, b]) = P(\omega \in E / a < X(\omega) \leq b)$$

En las variables aleatorias continuas (v.a.c.) se da la circunstancia de que **la probabilidad de un punto es cero**, aunque pueda ocurrir. Por ello:

1) $\mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{F}(\mathrm{b})$,

2) $\mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathrm{a}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq \mathrm{a}) = 1 - \mathrm{F}(\mathrm{a})$

3) $\mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{F}(\mathrm{b}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})$

Función de densidad

Definición

Dada una variable aleatoria continua X, decimos que la función $y = f(t)$ real y no negativa es una **función de densidad** *asociada a X, si verifica:* $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}, \ \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$

Propiedades:

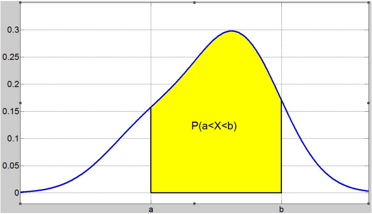
- $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 1$ (Consecuencia de $F(+\infty) = 1$)
- $\mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ (Consecuencia de que $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$)
- **La función de densidad es la derivada de la función de distribución:** $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{dF}(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{a}) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0$ (La probabilidad de un punto es 0)
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathrm{b}) = \int_{\mathrm{b}}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 1 - \mathrm{F}(\mathrm{b})$

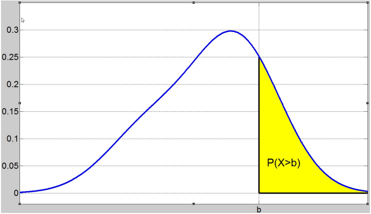
Interpretación de la función de densidad

La función de densidad además de caracterizar a la variable aleatoria sirve para calcular probabilidades. Así, las probabilidades:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
$$P(X > b) = \int_b^{\infty} f(t)dt = 1 - F(b)$$
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

pueden ser interpretadas como áreas bajo la función de densidad.





Ejemplo

Ejemplo

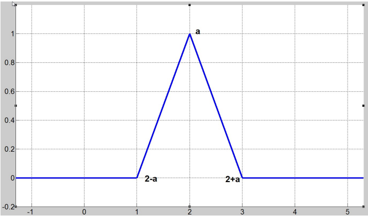
Sea X la v.a.c. determinada por la función de densidad:
$f(x) = \text{máx}\{0, a - |2 - x|\}$.

- *Determinar el valor de a para que* $f(t)$ *sea una función de densidad.*
- *Hallar la función de distribución.*
- *Hallar las probabilidades de los sucesos a)*$P(X \leq 1.5)$, *b)*$P(X > 2.3)$, *c)* $P(1.1 \leq X \leq 1.7)$ *d)* $P(1.5 \leq X \leq 2.5)$

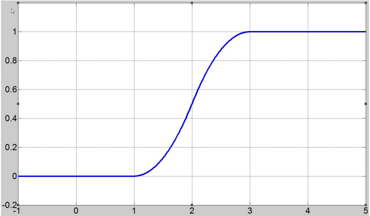
a) La forma de la función $y = f(x)$ es triangular con máximo en x=2 y altura a, y base $(2 - a, 2 + a)$. Para que el área valga 1:
$S = Bh/2 = (2a)a/2 = a^2 = 1 \Rightarrow$ a $=$ 1 y resulta la figura.

b) $f(x) = \text{máx}\{0, 1 - |2 - x|\} = \begin{cases} x - 1 & x \in (1, 2] \\ 3 - x & x \in (2, 3) \\ 0 & x \notin (1, 3) \end{cases}$

Ejemplo-cont



Función de densidad de X



Función de distribución de X

Integramos para hallar la función de distribución: (la constante de integración se ajusta para que sea continua, así F(1)=0, F(2)=0.5, F(3)=1).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ 3x - \frac{x^2}{2} - 3.5 & 2 < x < 3 \\ 1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Ejemplo-cont2

- a)$P(X \leq 1.5) = \int_{-\infty}^{1.5} f(t)dt = \int_{1}^{1.5}(t-1)dt = \{\text{Más fácil}\} =$
$= F(1.5) = 0.125$
- b)$P(X > 2.3) = \int_{2.3}^{\infty} f(t)dt = \int_{2.3}^{\infty}(3-t)dt = \{\text{Más fácil}\} =$
$= 1 - F(2.3) = 1 - \left[3(2.3) - \frac{2.3^2}{2} - 3.5\right] = 0.245$
- c) $P(1.1 \leq X \leq 1.7) = \int_{1.1}^{1.7} f(t)dt = \int_{1.1}^{1.7} t - 1dt =$
$\{\text{Más fácil}\} = F(1.7) - F(1.1) = 0.245 - 0.005 = 0.24$
- d) $P(1.5 \leq X \leq 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(t)dt = \int_{1.5}^{2}(t-1)dt +$
$+ \int_{2}^{2.5}(3-t)dt = \{\text{Más fácil}\} = F(2.5) - F(1.5) =$
$= 0.875 - 0.125 = 0.75$

Esperanza matemática. Caso Continuo

Definición

Se llama **esperanza matemática** *de la v.a.c. X a:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Solo quedará definida cuando la integral sea absolutamente convergente, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$

Ejemplo

Hallar la esperanza matemática de la función de la variable aleatoria X del ejemplo anterior.

La función de densidad era: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in (1,2] \\ 3-x & x \in (2,3) \\ 0 & x \notin (1,3) \end{cases}$, entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{2} x(x-1)dx + \int_{2}^{3} x(3-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 2$$

Generalización del concepto

Definición

Sea g una función real y X una variable aleatoria continua llamamos **esperanza de g(x)** *a:*

$$\mathrm{E(g(X))} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{g(x)f(x)dx}$$

con la condición de que la integral sea absolutamente convergente: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx$

Ejemplo

Hallar E(sen(X))

$$E[sen(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}(x)f(x)dx = \int_{1}^{2} \mathrm{sen}(x)(x-1)dx + \int_{2}^{3} \mathrm{sen}(x)(3-x)dx \approx 0.836$$

Propiedades de la esperanza matemática

Las siguientes propiedades son válidas para cualquier variable aleatoria:

- Es la media de la variable aleatoria: $\bar{X} = E(X)$.
- **E(k)=k.** (La esperanza matemática de una constante k es k.)
- **E(aX+b)=aE(X)+b** (Transformación afín)
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (Linealidad)
- Si son independientes se verifica: $E(XY) = E(X)E(Y)$

Ejemplo

Sea X la v.a. 'Número de caras' al lanzar 4 monedas e Y 'Puntos obtenidos' al lanzar un dado. Hallar E(Y), E(X+Y) y E(3Y-2X+7).

$$E(Y) = 1\tfrac{1}{6} + 2\tfrac{1}{6} + \ldots + 6\tfrac{1}{6} = \tfrac{21}{6} = 3.5$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 3.5 = 5.5,$$
$$E(3Y-2X+7) = 3E(Y) - 2E(X) + 7 = 3(3.5) - 2(2) + 7 = 13.5$$

Ejemplo

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria continua dada por la función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^4 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$.

Hallar: a) E(X), b) E($3X - 2$), c) E($\text{sen}(X)$)

a) Lo primero será hallar la función de densidad, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 4x^3$ para $x \in [0, 1]$. Luego: $E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \left[4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5} = 0.8$

$E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3(0.8) - 2 = 0.4$

$E(\text{sen}(X)) = \int_0^1 \text{sen}(x)(4x^3)dx = 0.7084.$

Cálculo realizado con la instrucción Matlab:

>> **h=inline('sin(x).*4.*x.^3'),quad(h,0,1)**

aunque podría haberse calculado mediante integración por partes.

Momentos

Definición

Llamamos **momento de orden r respecto al punto 'a'** *de la variable aleatoria X, a*

$$M_r(a) = E((X-a)^r)$$

Cuando a=0 se denominan momentos ordinarios de orden r:

$$m_r = E(X^r).$$

Cuando $a = \bar{X} = E(X)$ se denominan momentos centrales de orden r: $\mu_r = E((X - E(X))^r)$

Definición

Llamamos **Varianza de una variable aleatoria X** *a su momento central de orden 2:*

$$\mu_2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - \bar{X}^2$$

Relaciones entre momentos

Definición

A la raíz cuadrada de la varianza la llamamos **desviación típica** *de la variable aleatoria:* $\sigma_{\mathrm{x}} = +\sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Propiedades de los momentos:

- $m_0 = 1,\ m_1 = E(X) = \bar{X}$
- $m_2 = V(x) + \bar{X}^2.$
- $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0,$
- $\mu_2 = V(x) = m_2 - \bar{X}^2$
- $\mu_3 = m_3 - 3m_2\bar{X} + 2\bar{X}^3$
- $\mu_4 = m_4 - 4m_3\bar{X} + 6m_2\bar{X}^2 - 3\bar{X}^4$

Parámetros

Parámetros de tendencia central:

Son la media, moda y mediana.

- **Media:** Es la esperanza de X.
- **Moda:** Valor máximo de la función de probabilidad (discretas) o de la de densidad (continuas).
- **Mediana:** Para una variable aleatoria continua, se define la mediana como aquel valor x tal que $F(x) = 0.5$. Para una variable aleatoria discreta, la mediana es aquel valor x tal que $P(X \leq x) \geq 0.5$ y $P(X \geq x) \geq 0.5$. En este caso, la mediana no tiene por qué ser única.

Al igual que en descriptiva podemos hablar de cuantiles, cuartiles, ...
Para el caso continuo, el cuantil $c \in (0,1)$ es el valor x tal que $F(x) = c$.
Para una variable aleatoria discreta, el cuantil c es aquel valor x tal que $P(X \leq x) \geq c$ y $P(X \geq x) \geq (1 - c)$. En este caso, el cuantil no es necesariamente único.

Medidas de dispersión: Podemos hablar de rango, desviación típica, varianza.

Coeficiente de variación: $\mathrm{CV} = \frac{\sigma_x}{|\bar{\mathrm{X}}|}$

Medidas de forma: (Coeficientes de Fisher)

Sesgo: $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

Curtosis: $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$