Conjunto ordenado $(A, \leq)$

$\leq$ es reflexiva, transitiva, antisimétrica

- Diagrama de Hasse si A es finito
- Ordenación Topológica
- Cota superior / inferior
  - Supremo / ínfimo
  - Maximal / minimal
  - Máximo / mínimo

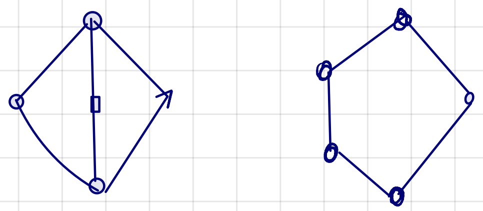
Retículo $(A, \leq)$ $(A, \sqcup, \sqcap)$

- Ordenado: existen $\sup\{x,y\}$ $\inf\{x,y\}$
- Algebraico: $\sqcup, \sqcap$ son operaciones conmutativas, asociativas, con absorción
- $x \leq y \iff x \sqcup y = y$ (supremo)
  $\iff x \sqcap y = x$ (ínfimo)

Retículo distributivo

$\sqcap$ distribuye respecto de $\sqcup$
$\sqcup$ distribuye respecto de $\sqcap$

"No" es distributivo si y solo si tiene un subretículo isomorfo a uno de los siguientes:



$\mathcal{P}(S)$

$\emptyset \subset B \subset S$

$\boxed{\text{Retículo acotado}}$ Existe 1_L y 0_L tales que

$0_L \leq x \leq 1_L$ para todo x

$\boxed{\text{Retículo (acotado y) complementado}}$

Para cada x, existe $\bar{x}$ tal que

$x \sqcup \bar{x} = 1 \qquad x \sqcap \bar{x} = 0$

* El complemento puede no ser único
* Si es distributivo, el complemento es único

$\boxed{\text{Algebra (o retículo) de Boole}}$

→ Ret. distributivo y complementado

→ $(A, \sqcup, \sqcap, ^-, 1, 0)$

* Asociativas, conmutativas, distributivas
Identidad, complemento.
* Absorción, idempotencia, dominancia
involución, De Morgan.

* Toda álgebra de Boole finita es isomorfa a $\underbrace{|P(S)|}$
para algún conjunto finito S

$|A| = 2^{|S|}$

1. Los prerrequisitos en las asignaturas de una carrera universitaria constituyen un orden parcial. Se dice que $a \preceq b$ si es necesario acabar con éxito la asignatura a para poder terminar con éxito la asignatura b (enunciado así, la relación $\preceq$ es reflexiva). Considera los prerrequisitos para las asignaturas de Matemáticas (Mat)

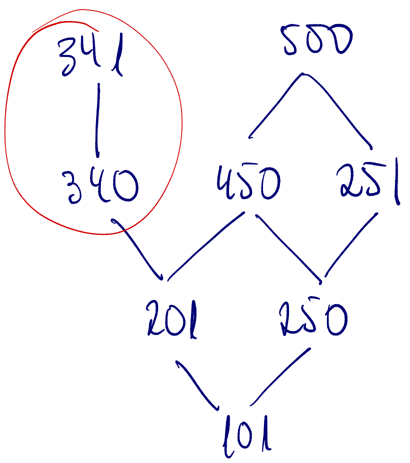
Asignaturas	Prerrequisitos
Mat 101	Ninguno
Mat 201	Mat 101
Mat 250	Mat 101
Mat 251	Mat 250
Mat 340	Mat 201
Mat 341	Mat 340
Mat 450	Mat 201, Mat 250
Mat 500	Mat 450, Mat 251

a) Dibuja el diagrama de Hasse correspondiente.

b) Si un estudiante quiere cursar las 8 asignaturas, pero sólo una por semestre, ¿qué asignaturas debe cursar en su primer semestre? ¿Y en el último?

c) Suponiendo que quiere cursar Mat 250 en su primer año (primer o segundo semestre) y Mat 340 en su último curso (séptimo u octavo semestre), halla todas las formas en que puede cursar las ocho asignaturas.

(a)



(b) Basta establecer una ordenación topológica.

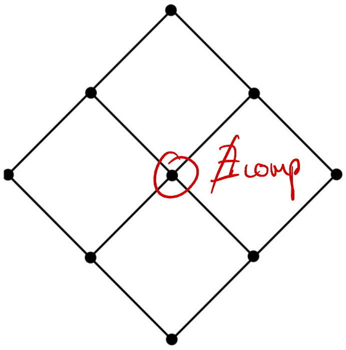
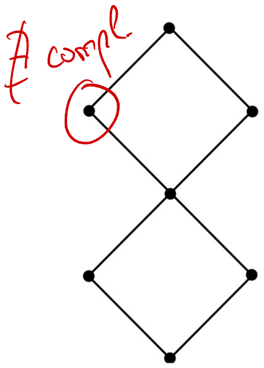
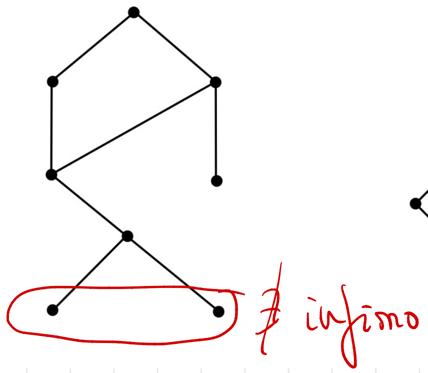
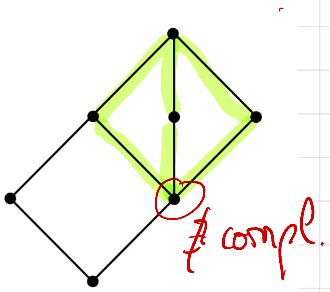
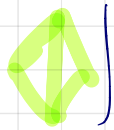
Por ejemplo:

$101 \ll 250 \ll 251 \ll 201 \ll 450 \ll 500 \ll 340 \ll 341$

(c) La ordenación anterior no es única, este apartado nos pide encontrar todas las que empiezan por $101 \ll 250$ y terminan en $340 \ll 341$

Hay dos más: $101 \ll 250 \ll 201 \ll 450 \ll 251 \ll 340 \ll 341$

$101 \ll 250 \ll 201 \ll 251 \ll 450 \ll 340 \ll 341$

			
Retículo Acotado ~~Complementado~~ Distributivo ⏟ Isomorfo a D_{36}	Retículo Acotado ~~Complementado~~ Distributivo ⏟ Subretículo de D_{36}	No es retículo	Retículo Acotado ~~Complementado~~ ~~Distributivo~~ (Contiene al diamante )

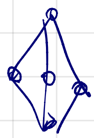
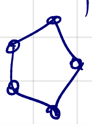
¿Cómo demostramos que es distributivo?

* Para cada terna de elementos distintos:

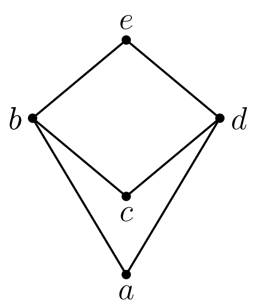
$$x, y, z \Rightarrow \begin{cases} x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \\ x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \end{cases}$$

* Reconociendo el retículo (D_n, $\mathcal{P}(S)$, $\mathbb{B}^4$, ...)
* Si es subretículo de un retículo distributivo

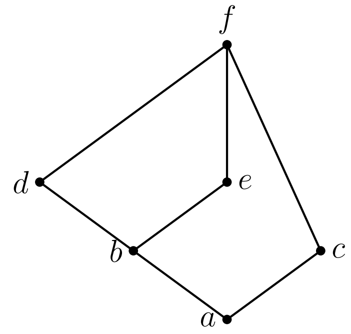
¿Cómo demostramos que NO es distributivo?

* Si un elemento tiene dos complementos, No es distributivo
* Si contiene a  o , NO es distributivo

3. Para los siguientes diagramas de Hasse, justifica que $(\mathcal{A}, \preceq)$ no es un retículo y que $(\mathcal{M}, \preceq)$ es un retículo no distributivo. Estudia si $(\mathcal{M}, \preceq)$ es complementado.



$(\mathcal{A}, \preceq)$



$(\mathcal{M}, \preceq)$

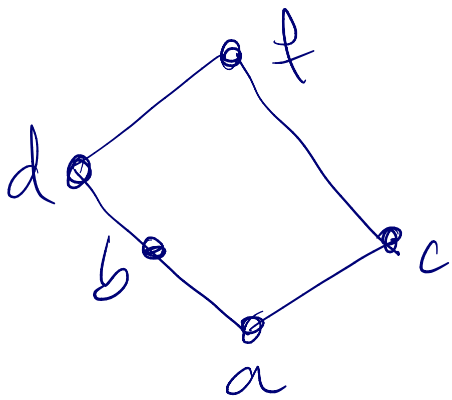
No existe $\inf\{a, c\}$

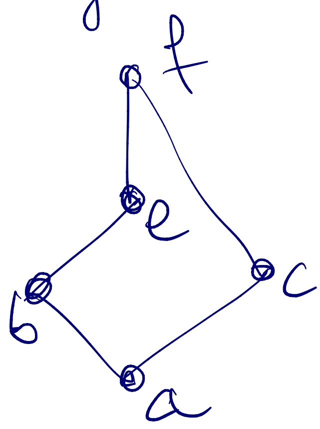
* c tiene dos complementos

$\inf\{c, d\} = \inf\{c, b\} = a$

$\sup\{c, d\} = \sup\{c, b\} = f$

* Contiene al pentagono





Por lo tanto, no es distributivo

$\mathcal{M}$ es complementado: c es complemento de d, b y e

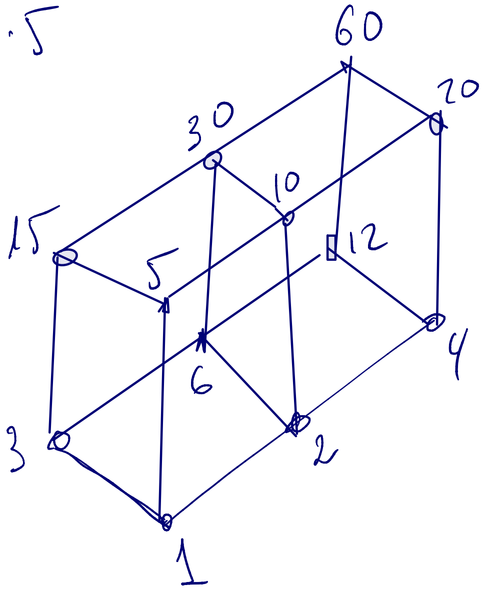
4. Sea D_{60} el conjunto de todos los divisores de 60 con la relación divisibilidad

a) Dibuja su diagrama de Hasse y determina sus átomos y su elementos $\sqcup$-irreducibles.

b) Expresa 60, 12 y 20 mediante elementos $\sqcup$-irreducibles. ¿Las expresiones son únicas?

c) Determina los elementos que tienen complemento.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$



$\text{Átomos} = \{2, 3, 5\}$

$\sqcup\text{-irreducibles} = \{2, 4, 3, 5\}$

b) $60 = 4 \sqcup 3 \sqcup 5$

$12 = 4 \sqcup 3$

$20 = 4 \sqcup 5$

Las expresiones son únicas

$20 = \text{mcm}\{4, 10\}$

c) $\bar{3} = 20$, $\bar{4} = 15$, $\bar{5} = 12$

Por lo tanto, el retículo no es complementado

¿Cuáles son los $\sqcup$-irreducibles de D_n?

¿Qué elementos de D_n tienen complemento?

¿Para qué valores de n, D_n está complementado?

Respuestas:

* Los elementos $\sqcup$-irreducibles son aquellos que solo tienen un predecesor inmediato.
Si $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ es su factorización en factores primos, entonces los divisores $\sqcup$-irreducibles son $p_i^{\alpha_i}$ con $\alpha_i \le e_i$.
Cualquier divisor de la forma $p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$ no sería irreducible:

$$p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} = mcm\{p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}\}$$

* Si $d \in D_n$ tiene complemento, significa que existe $x \in D_n$ tal que $mcd(d, x) = 1$ y $mcm(d, x) = n$.

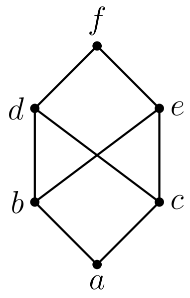
Si $mcd(d, x) = 1$, entonces $mcm(d, x) = d \cdot x$ si $mcm(d, x) = n$, entonces $d \cdot x = n$.
En consecuencia, d tiene complemento si y solo si

$$mcd\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1$$

Por lo tanto, si $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ los divisores con complemento, son aquellos en los que los factores primos tienen la máxima potencia.
Por ejemplo, en D_{180}, dado que $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, los divisores con complemento son $2^2, 3^2, 5, 2^2 3^2, 2^2 5, 3^2 5$

* En consecuencia, para que todos los elementos de D_n tengan complemento, n debe ser producto de primos distintos

9 5. Consideramos el conjunto parcialmente ordenado $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ con el orden dado por el siguiente diagrama de Hasse



a) Determina los elementos destacables de los siguientes subconjuntos:

$$B_1 = \{a, b, c\}, \qquad B_2 = \{c, d\}, \qquad B_3 = \{d, e\}$$

b) Define un orden total que sea compatible con el orden parcial dado.

$CS(\{a,b,c\}) = \{d,e,f\}$ $sup(\{a,b,c\})$ No existe $max(\{a,b,c\})$ No existe Maximales $(\{a,b,c\}) = \{b,c\}$	$CI(\{a,b,c\}) = \{a\}$ $inf(\{a,b,c\}) = min(\{a,b,c\}) = a$ a es el único minimal
$CS(\{c,d\}) = \{d,f\}$ $sup(\{c,d\}) = max(\{c,d\}) = d$ d es el único maximal	$CI(\{c,d\}) = \{c,a\}$ $inf(\{c,d\}) = min(\{c,d\}) = c$ c es el único minimal
$CS(\{d,e\}) = \{f\}$ $sup\{d,e\} = f$ $max\{d,e\}$ No existe Maximales $\{d,e\} = \{d,e\}$	$CI(\{d,e\}) = \{a,b,c\}$ $inf(\{d,e\})$ No existe $min(\{d,e\})$ No existe Minimales $\{d,e\} = \{d,e\}$

6. Sean $\mathcal{B}_1 = D_{2310}$ y $\mathcal{B}_2 = \mathcal{P}(\{a,b,c,d,e\})$. Definimos $f : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ de modo que

$$f(2) = \{a\} \quad f(3) = \{b\} \quad f(5) = \{c\} \quad f(7) = \{d\} \quad f(11) = \{e\}$$

   a) Determina $f(35)$, $f(110)$, $f(210)$ y $f(330)$ para que f sea isomorfismo de Álgebras de Boole.

   b) ¿Cuántos isomorfismos diferentes se pueden definir entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$?

---

a) $f(35) = f(5\cdot 7) = f(5) \cup f(7) = \{c, d\}$

$f(110) = f(2\cdot 5\cdot 11) = f(2) \cup f(5) \cup f(11) = \{a, c, e\}$

$f(210) = f(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7) = \{a, b, c, d\}$

$f(330) = f(2\cdot 3\cdot 5\cdot 11) = \{a, b, c, e\}$

b) Cualquier isomorfismo queda determinado por una biyección entre los conjuntos de átomos. Como cada uno tiene 5 átomos, el número de biyecciones es $5!$

7. Encuentra un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y $\mathbb{B}^5$ sean isomorfos como álgebras de Boole.

$\mathbb{B}^5 = \{0,1\}^5$ tiene cinco átomos

$$A = \{10000, 01000, 00100, 00010, 00001\}$$

Por lo tanto, basta considerar un conjunto S con cinco elementos. Puede ser el mismo conjunto A o cualquier otro:

$$S = \{a, b, c, d, e\}$$

8. Justifica si existe un entero $n \leq 200$ tal que $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ son álgebras de Boole isomorfas.

$$|\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})| = 2^{2^2} = 2^4 = 16$$

Este algebra de Boole tiene 4 átomos

	f_1	f_2	f_3	f_4
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
10	0	0	1	0
11	0	0	0	1

Para que sea isomorfo a D_n, necesitamos que tenga 4 átomos, es decir n debe ser producto de cuatro primos distintos. Por lo tanto, el menor valor que puede tomar n es

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 200$$

9. Halla la forma normal disyuntiva de la función booleana $F : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada en forma conjuntiva

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + \overline{z})$$

$$(x+y+z)(x+y+\bar z)(x+\bar y+\bar z) = (\underline{x+y} + \underline{z\cdot\bar z})(x+\bar y+\bar z) = \quad \text{(Distributiva)}$$

$$= (x+y+\cancel{0})(x+\bar y+\bar z) = \quad \text{(Complemento)}$$

$$= (x+y)(x+\bar y+\bar z) = \quad \text{(Identidad)}$$

$$= x\cdot(x+\bar y+\bar z) + y(x+\bar y+\bar z) \quad \text{(Distributiva)}$$

$$= x + y(x+\bar y+\bar z) \quad \text{(Absorcion)}$$

$$= \underbrace{x + yx}_{\text{Absorción}} + \underbrace{\cancel{y\bar y}}_{\text{Complemento + identidad}} + y\bar z \quad \text{(Distributiva)}$$

$$= x + y\bar z$$

$$= x(y+\bar y)(z+\bar z) + y\bar z(x+\bar x)$$

{En el último paso tenemos que completar los factores con todas las variables

$$= xyz + xy\bar z + x\bar y z + x\bar y\bar z + \cancel{xy\bar z} + \bar x y\bar z \quad \text{(Distributiva)}$$

repetido ≡ idempotencia

$$= xyz + xy\bar z + x\bar y z + x\bar y\bar z + \bar x y\bar z$$

10. Sean las expresiones booleanas

$$E_1(x,y,z) = \overline{x+\overline{z}} + \overline{y}\cdot z + \overline{y+z} \;\text{ y }\; E_2(x,y,z) = \overline{x\cdot z + y\cdot \overline{z}} + \overline{y}$$

a) Determina si $E_1(x,y,z)$ y $E_2(x,y,z)$ son equivalentes.

b) Estudia si mediante la expresión booleana E_2 se puede especificar la función booleana

$$F(x,y,z) = \overline{x}z + \overline{y}$$

c) Halla la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana que se puede especificar mediante la expresión booleana $E_1(x,y,z)$.

(a) Simplificamos las expresiones para ver si podemos convertirla en la misma

$$E_1(x,y,z) = \overline{x+\overline{z}} + \overline{y}\cdot z + \overline{y+z} = \overline{x}\cdot z + \overline{y}\cdot z + \overline{y}\cdot\overline{z} =$$
$$= \overline{x}z + \overline{y}(z+\overline{z}) = \overline{x}z + \overline{y}$$

=

$$E_2(x,y,z) = \overline{x\cdot z + y\cdot\overline{z}} + \overline{y} = (\overline{x}+\overline{z})(\overline{y}+z) + \overline{y} =$$
$$= \cancel{\overline{x}\,\overline{y}} + \cancel{\overline{y}\,\overline{z}} + \overline{x}z + \cancel{\overline{z}z} + \overline{y} = \overline{x}z + \overline{y}$$

Abs Abs Complemento + identidad

(b) Hecho en el apartado anterior

(c) $$\overline{x}z + \overline{y} = \overline{x}z(y+\overline{y}) + \overline{y}(x+\overline{x})(z+\overline{z})$$ (Completamos sumandos y distribuimos)

$$= \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{y}z + \cancel{\overline{x}\,\overline{y}z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

$$= x\overline{y}z + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$ Idempotencia

$$\overline{x}z + \overline{y} = (\overline{x}+\overline{y})(z+\overline{y}) = (\overline{x}+\overline{y}+z\cdot\overline{z})(x\cdot\overline{x}+z+\overline{y})$$
$$= (\overline{x}+\overline{y}+z)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})(x+\overline{y}+z)\cancel{(\overline{x}+\overline{y}+z)}$$

distribuimos la suma respecto del producto

11. Demuestra o refuta:

a) Todo conjunto ordenado es un retículo.

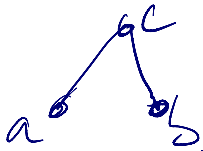
b) Si $\mathcal{L}$ es un retículo finito, entonces es acotado.

c) Si $\mathcal{L}$ es un retículo complementado, entonces es un álgebra de Boole.

d) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole y $x, y, z \in \mathcal{A}$ son tales que $x + y = x + z$, entonces $y = z$.

---

a) Falso



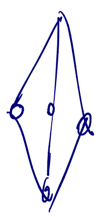
es un orden parcial pero no es retículo, ya que no existe $\inf\{a,b\}$

b) Verdadero: $L = \{a_1 \dots a_n\}$

$\inf(\dots \inf(\inf(\inf(a_1,a_2),a_3),a_4) \dots a_n) \in L$ y será el primer elemento.

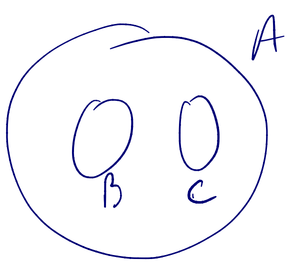
$\sup(\dots \sup(\sup(\sup(a_1,a_2),a_3),a_4), \dots a_n) \in L$ y será el último elemento.

c) Falso:



Es un retículo complementado, pero no es distributivo, por lo que no es Álgebra de Boole

d) Falso: En $\mathcal{P}(S)$ no se verifica



$A = \{1,2,3\}$
$B = \{1\}$
$C = \{2\}$

$A \cup B = \{1,2,3\} = A \cup C$
Pero $B \neq C$