TEMA 4

Aplicaciones Lineales

Contenidos

1. Aplicaciones lineales. Definiciones y propiedades.
2. Expresión matricial de una aplicación lineal.
3. Nucleo e imagen.
4. Espacios vectoriales isomorfos.
5. Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal.

Prerrequisitos: Los contenidos de los temas anteriores.

Objetivos: Saber reconocer aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. Saber determinar la matriz de una aplicación lineal. Saber hallar el núcleo y la imagen de una aplicación lineal y deducir las propiedades de inyectividad, sobreyectividad e isomofismo. Saber determinar la matriz de una aplicación lineal cuando se cambia la base en el dominio o en el codominio.

4.1. Definiciones y propiedades

Definición 4.1.1 (Aplicación Lineal) *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$. Se dice que la aplicación $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una* aplicación lineal *de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ si para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ y todo $c \in \mathcal{K}$ se verifica:*

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
2. $\varphi(c\vec{u}) = c\varphi(\vec{u})$

Las aplicaciones lineales también se denominan *homomorfismos* entre espacios vectoriales o *transformaciones lineales*.

Ejemplo 4.1.2 Probamos que la siguiente función es una aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

verificando que conserva la suma de vectores y el producto por un escalar.

1. Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{x'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, entonces

$$\varphi(\vec{x} + \vec{x'}) = \varphi \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ x_3 + x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x'_1) + (x_2 + x'_2) \\ (x_2 + x'_2) + (x_3 + x'_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (x'_1 + x'_2) \\ (x_2 + x_3) + (x'_2 + x'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 + x'_2 \\ x'_2 + x'_3 \end{pmatrix} = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{x'})$$

2. De $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\varphi(c \cdot \vec{x}) = \varphi \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ c \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 + c \cdot x_2 \\ c \cdot x_2 + c \cdot x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c \cdot (x_1 + x_2) \\ c \cdot (x_2 + x_3) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = c \cdot \varphi(\vec{x}) \qquad \square$$

Dado que las aplicaciones lineales son casos particulares de funciones, usamos los conceptos habituales asociados a ellas: dominio, codominio, imagen y preimagen.

Ejemplo 4.1.3 Dos aplicaciones lineales muy simples son:

- La *aplicación cero* o *nula*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{W} \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{0} \end{array}$$

- La *aplicación identidad*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{array}$$

□

Ejemplo 4.1.4 Sea $\mathcal{C}^1[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones con derivada continua en $[a,b]$ y $\mathcal{C}^0[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[a,b]$. La función derivada,

$$\begin{array}{rccc} \frac{d}{dx}\colon & \mathcal{C}^1[a,b] & \to & \mathcal{C}^0[a,b] \\ & f & \mapsto & \frac{df}{dx} \end{array}$$

es una aplicación lineal, ya que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^1[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ sabemos que se verifica:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$
$$\frac{d(cf)}{dx} = c \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)$$

□

Ejemplo 4.1.5 Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de las funciones polinómicas. La aplicación integración entre a y b,

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}\colon & \mathbb{R}(x) & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \int_a^b p(x)dx \end{array}$$

es lineal, ya que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}[x]$ y $c \in \mathbb{R}$ sabemos que se verifica:

$$\mathcal{I}(p+q) = \int_a^b \big[p(x)+q(x)\big]dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b q(x)dx = \mathcal{I}(p) + \mathcal{I}(q)$$
$$\mathcal{I}(c \cdot p) = \int_a^b \big[c \cdot p(x)\big]dx = c \cdot \int_a^b p(x)dx = c \cdot \mathcal{I}(p)$$

□

En los siguientes teoremas se dan algunas propiedades básicas de las aplicaciones lineales.

Teorema 4.1.6 (Propiedades de las aplicaciones lineales) *Sea* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una aplicación lineal y sean* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, *entonces*

1. $\varphi(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$

2. $\varphi(-\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$

3. $\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})$

4. $\varphi(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_m\vec{v}_m) = c_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + c_m\varphi(\vec{v}_m)$

TEOREMA 4.1.7 (PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES LINEALES) *Sea* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una aplicación lineal. Se verifica:*

1. Si $\mathcal{V}_1$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$, *entonces* $\varphi(\mathcal{V}_1)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{W}$.

2. Si $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k\}$ *es un sistema generador de un subespacio vectorial* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{V}$, *entonces* $\{\varphi(\vec{u}_1), \cdots, \varphi(\vec{u}_k)\}$ *es un sistema generador de* $\varphi(\mathcal{U})$.

3. Si $\mathcal{W}_1$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{W}$, *entonces la preimagen* $\varphi^{-1}(\mathcal{W}_1)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$.

TEOREMA 4.1.8 (COMPOSICIÓN DE DOS APLICACIONES LINEALES) *La composición* $\psi \circ \varphi$ *de dos aplicaciones lineales* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *y* $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$,

$$\begin{array}{rccll} \psi \circ \varphi\colon & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{W} & \\ & \vec{u} & \mapsto & (\psi \circ \varphi)(\vec{u}) & = \psi(\varphi(\vec{u})) \end{array}$$

también es una aplicación lineal.

TEOREMA 4.1.9 (APLICACIÓN LINEAL DEFINIDA POR UNA MATRIZ) *Sea la matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *La aplicación* T *definida por*

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$.

Este resultado es una consecuencia de las propiedades de linealidad del producto de matrices.

EJEMPLO 4.1.10 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, su aplicación lineal asociada $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 2z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix} \qquad \square$$

Ejemplos de aplicaciones lineales definidas por una matriz son los siguientes.

- La *simetría respecto al eje OY*:

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_1\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- La *simetría respecto al eje OX* es una aplicación lineal

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_2\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- La *simetría respecto al origen* de coordenadas es una aplicación lineal

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_3\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- La *rotación de $\theta \in [0, 2\pi)$ radianes*

$$\begin{array}{cccccc} \varrho\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Además, cualquier aplicación lineal entre dos espacios de tipo finito se puede describir mediante una matriz una vez se establezca una base en el dominio y en el codominio.

4.2. Expresión matricial de una aplicación lineal

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathcal{K}$ y $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Supongamos $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ es una base de $\mathcal{W}$.

$$\begin{array}{cccccc} \varphi\colon & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{W} & & \\ & \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) & = & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \end{array}$$

Vamos a seguir desarrollando la espresión de la imagen de $\vec{x}$. En primer lugar, usamos la linealidad para escribirlo en función de las imágenes de la base:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n)$$

A continuación, cada vector $\varphi(\vec{v}_i)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base del codominio $\mathcal{W}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{v}_1) &= a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m \\
\varphi(\vec{v}_2) &= a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{w}_m \\
\cdots &= \quad \cdots \\
\varphi(\vec{v}_n) &= a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m
\end{aligned}$$

lo que permite hacer lo mismo con la imagen de $\vec{x}$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n) = \\
&\quad = x_1(a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\vec{w}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m) = \\
&\qquad = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{w}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)\vec{w}_m = \\
&\qquad\qquad = y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

Es decir, la matriz $(a_{ij})_{m\times n}$ de la igualdad anterior determina la aplicación lineal cuando consideramos las coordenadas de los vectores del dominio y codominio respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente.

TEOREMA 4.2.1 (MATRIZ ASOCIADA UNA APLICACIÓN LINEAL) *Sea* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una aplicación lineal y sean las bases* $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ *de* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ *de* $\mathcal{W}$*. Consideremos las imágenes de los vectores* $\vec{v}_i$ *respecto de* $\mathcal{B}_2$*:*

$$\varphi(\vec{v}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Los coeficientes a_{ij} *determinan la matriz* $(a_{ij})_{m\times n}$ *que se denomina* matriz de φ

respecto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ *y verifica:*

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

Ejemplo 4.2.2 Consideremos la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si consideramos la base canónica en el dominio y en el codominio:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz son las imágenes de los elementos de la base canónica:

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora la base $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1)^t, (0,1,1)^t, (0,0,1)^t\}$ en $\mathbb{R}^3$; vamos a determinar la matriz de φ considerando la base $\mathcal{B}_1$ en el dominio y la base canónica en el codominio. Basta calcular las imágenes de los vectores de $\mathcal{B}_1$:

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \qquad \square$$

4.3. Núcleo e Imagen

Teorema 4.3.1 (Núcleo de una aplicación lineal) *Consideremos una aplicación lineal* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. *Entonces, el subconjunto de* $\mathcal{V}$ *formado por los vectores* *cuya imagen es* $\vec{0}$ *es un subespacio que se denomina* núcleo *de denotado* φ *y se denota* $\ker(\varphi)$*:*

$$\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{v} \in \mathcal{V} \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Naturalmente, el núcleo de una aplicación lineal nunca será vacío, ya que al menos contendrá al vector nulo.

Ejemplo 4.3.2 Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal dada matricialmente por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, entonces el núcleo de T es el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$; por esta razón, al conjunto de soluciones de un sistema homogéneo determinado por una matriz A se le denomina *núcleo de la matriz* A. Vamos a calcular el núcleo de

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es decir,

$$\ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo, que es indeterminado, y expresamos sus soluciones de forma paramétrica para determinar una base del núcleo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \left. \begin{array}{rcr} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & -\lambda \\ x_3 & = & \lambda \end{array} \right\}$$

Por lo tanto $\ker(\varphi) = \mathcal{L}((1, -1, 1)^t)$. □

Ya hemos visto que la *imagen* de una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, denotada $\mathrm{Im}(\varphi)$ o igualmente $\varphi(\mathcal{V})$,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathcal{V}) = \{\vec{w} \in \mathcal{W} \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{w} \text{ para algún } \vec{v} \in \mathcal{V}\},$$

es un subespacio de $\mathcal{W}$. Además, si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ es una base de $\mathcal{V}$, el conjunto $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_m)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(\varphi)$. De forma general, si $\mathcal{U}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$, y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ es una base de $\mathcal{U}$, entonces $\{\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_k)\}$ es un sistema generador de $\varphi(\mathcal{U})$. Por otra parte, si los espacios vectoriales son de tipo finito, de lo anterior se deduce $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathcal{V})$.

Ejemplo 4.3.3 Consideremos la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

La forma matricial de esta aplicación es

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Según hemos visto antes, las columnas de la matriz de la forma anterior son las imágenes de la base canónica, y por lo tanto, la imagen es el subespacio generado por estas columnas:

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En este caso, es fácil comprobar que la dimensión de la imagen, que coincide con el el rango de la matriz de la aplicación lineal, es 2 y por lo tanto, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$. □

Tal y como hemos observado en el ejemplo anterior, si una aplicación lineal está expresada en forma matricial como $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, la imagen de T coincide con el espacio generado por las columnas de A.

Por otra parte, las dimensiones del dominio, núcleo e imagen están relacionadas por el siguiente resultado.

Teorema 4.3.4 (de la dimensión) *Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Entonces*

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) =$$

Ya habíamos visto que la dimensión de la imagen de una aplicación se denomina igualmente *rango*, que además coincide con el rango de las matrices que la definan respecto de una base. Por otra parte, la dimensión del núcleo también se denomina *nulidad* de la aplicación. De esta forma, el teorema de la dimensión anterior se lee rápidamente diciendo que la dimensión del dominio de una aplicación lineal es igual a la suma de su rango y de su nulidad.

Ejemplo 4.3.5 Consideremos la aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para hallar el núcleo, transformamos la matriz de la aplicación lineal a una forma escalonada, lo que corresponde a resolver el correspondiente sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este momento ya podemos afirmar que la dimensión de la imagen es 3, ya que ese es el rango de la matriz. Además, por el teorema de la dimensión ya podemos afirmar que la dimensión del núcleo, es decir, la nulidad es igual a $4 - 3 = 1$; esto también lo podemos ver terminado de resolver el sistema homogéneo para hallar una sistema generador del núcleo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -3\lambda \\ x_2 &= 2\lambda \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ker(\varphi) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como vemos, hemos podido comprobar la igualdad dada en el teorema de la dimiensión:

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \qquad \square$$

4.4. Isomorfismos

Una aplicación del teorema de la dimensión y del concepto de núcleo es el estudio de los *isomorfismos*, concretamente, facilitar el trabajo de decidir si una aplicación lineal es sobreyectiva e inyectiva, lo que define a los isomorfismos.

Teorema 4.4.1 (Caracterización de la inyectividad) *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$ y $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *φ es inyectiva.*
2. $\ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$
3. *Si $\mathcal{V}$ es de dimensión finita,* $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

Teorema 4.4.2 (Caracterización de la sobreyectividad) *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$ y $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. φ es sobreyectiva si y solo si el rango de* $\mathrm{ran}(\varphi) = \dim(\mathcal{W})$.

Ejemplo 4.4.3 Consideremos la aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Podemos afirma que φ es sobreyectiva dado que su rango es 2, que es la dimensión del codominio. Por el teorema de la dimensión deducimos que la nulidad de φ es igual a $3 - 2 = 1 \neq 0$ y por lo tanto no puede ser inyectiva. □

Definición 4.4.4 (Isomorfismo) *Una aplicación $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ inyectiva y sobreyectiva se llama* isomorfismo.

Teorema 4.4.5 *Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita.*

1. *Una aplicación lineal φ es un isomorfismo si y solo si* $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) = \mathrm{ran}(\varphi)$.
2. *Si $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, la aplicación φ es isomorfismo si y solo si es inyectiva; de la misma forma φ es isomorfismo si y solo si es sobreyectiva.*

Ya hemos visto en múltiples ejemplos que trabajar con coordenadas respecto de una base en cualquier espacio vectorial es igual a trabajar en el espacio vectorial $\mathcal{K}^n$. Formalmente, eso se corresponde con el hecho de que todos los espacios vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ son isomorfos a $\mathcal{K}^n$.

4.5. Cambio de base como aplicación lineal

Ejemplo 4.5.1 Consideremos la aplicación lineal siguiente

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vamos a determinar la matriz de φ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$, en donde:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Empezamos escribiendo la matriz de φ respecto de las bases canónicas en el dominio y el codominio. Como ya hemos visto en ejemplos anteriores, para ello basta mirar los coeficientes de las expresiones que definen la aplicación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \varphi(\vec{x})$$

Ahora consideramos las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$, $\vec{x} = (x'_1, x'_2, x'_3)^t)_{\mathcal{B}_1}$, que verifican

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Sustituyendo en la primera expresión matricial de la aplicación lineal obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \varphi(\vec{x})$$

De esta forma, multiplicando las dos matrices del lado izquierdo, tendríamos la matriz de la aplicación lineal considerando la base $\mathcal{B}_1$ en el dominio y la base canónica en el codominio.

Consideremos ahora la matriz de cambio de base de la base canonica en $\mathbb{R}^2$ a la base $\mathcal{B}_2$, que sabemos es la inversa de la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a la matriz canónica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Si multiplicamos ambos lados de la última igualdad matricial de la aplicación lineal, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \varphi(\vec{x})$$

Por lo tanto, el producto de las tres matrices del lado izquierdo dará como resultado la matriz de la aplicación lineal respecto de la bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en dominio y codominio respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

El proceso seguido en el ejemplo anterior constituye la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 4.5.2 *Si $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tiene asociada la matriz A respecto de unas bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, entonces la matriz asociada a φ respecto de las bases $\mathcal{B}'_1$ y $\mathcal{B}'_2$ es la matriz*

$$B = Q^{-1}AP$$

en donde P es la matriz de paso de $\mathcal{B}'_1$ a $\mathcal{B}_1$ y Q es la matriz de paso de $\mathcal{B}'_2$ a $\mathcal{B}_2$.