TEMA 5

Diagonalización

Contenidos

1. Valores y vectores.
2. Diagonalización de endomorfismos y matrices
3. Teorema de Cayley-Hamilton.

Prerrequisitos: Los contenidos de los temas anteriores.

Objetivos: Saber determinar los valores y vectores propios de matrices. Saber determinar si un endomorfismo/matriz es o no diagonalizable y determinar, en su caso, las bases respecto de la cual un endomorfismo admite una forma matricial diagonal. Saber utilizar el teorema de Cayley-Hamilton para calcular potencias de una matriz cuadrada.

Hemos visto en el tema anterior como podemos expresar matricialmente homomorfismos entre espacios vectoriales de dimensión finito a partir de bases del dominio y el codominio. Esa matriz depende de las bases las bases elegidas. En este tema estamos interesados en aplicaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo, también denominadas *endomorfismos*, y en la posibilidad de encontrar una base respecto de la cual la matriz sea diagonal.

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si esta representación es posible, los vectores de la base verificarán

$$\varphi(\vec{u_i}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = d_i \cdot \vec{u_i}$$

Por esta razón, lo primero que vamos a hacer es estudiar la existencia de vectores que verifiquen la propiedad anterior.

5.1. Valores y vectores propios

Definición 5.1.1 (Valor y vector propio de un endomorfismo) *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ y $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un endomorfismo. Se dice que un vector $\vec{\in}\mathcal{V}$ no nulo es un* vector propio *de φ si verifica que*

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}, \text{ para algún } \lambda \in \mathcal{K}$$

Este escalar λ se llama valor propio *asociado al vector propio $\vec{v}$*

La definición establece que el vector nulo no se considera vector propio pero sin embargo, el elemento neutro del cuerpo sí puede ser un valor propio de un endomorfimo.

También es fácil observar que el valor propio asociado a un vector propio es único y que si $\vec{v}$ es un vector propio asociado un valor λ, cualquier vector de la forma $\alpha\vec{v}$ también es un vector propio asociado a λ:

$$f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v}) = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v})$$

De hecho, se verifica el siguiente resultado que permite definir los subespacios propios.

TEOREMA 5.1.2 (SUBESPACIO PROPIO) *Si endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es un endomorfimo y λ un valor propio de φ, entonces el siguiente conjunto es un subespacio de $\mathcal{V}$:*

$$\mathcal{U}_\lambda = \{\vec{v} \in \mathcal{V} \mid f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Este subespacio se denomina subespacio propio asociado a λ.

Dado que trivialmente se verifica que $\varphi(\mathcal{U}_\lambda) \subseteq \mathcal{U}_\lambda$, los subespacios propios también se denominan subespacios *invariantes*.

EJEMPLO 5.1.3 Consideremos el endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

El vector $\vec{v}_1 = (1, -1)^t$ es propio, ya que

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De la misma forma, $\vec{v}_2 = (0, 1)^t$ es un vector propio, ya que

$$\varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ son valores propios y los correspondientes subespacios propios son:

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

En este ejemplo, hemos partido de valores propios ya conocidos, pero ¿cómo calculamos esos valores propios? Eso lo vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.1.4 (CÁLCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UN ENDOMORFISMO) Consideremos el endomorfimo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Que escrito en forma matricial respecto de la base canónica es igual a:

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Para hallar los valores y vectores propios de φ, buscamos vectores $(x_1,x_2)^t$ y escalares λ tales que

$$\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\implies$$
$$\implies\left[\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Es decir, $(x_1,x_2)^t$ es un vector propio asociado al valor λ si el sistema homogéneo anterior tiene solución no trivial. Y el sistema homogeneo tiene solución no trivial si y solo si

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Calculando ese determinante, obtenemos los valores propios:

$$0=\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)-2=4-5\lambda+\lambda^2\implies\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1&=&4\\\lambda_2&=&1\end{array}\right.$$

Una vez tenemos los valores propios, es fácil determinar los correspondientes subespacios propios:

$$\mathcal{U}_4=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,(A-4I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=(A-4I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4&2\\1&2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\implies$$
$$\implies x_1=2x_2\implies\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathcal{L}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\implies\mathcal{U}_4=\mathcal{L}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,(A-I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1 = -x_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{U}_1 = \mathcal{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

El proceso descrito en el ejemplo anterior constituye la demostración del siguiente resultado.

Teorema 5.1.5 (Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo) *Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un endomorfismo y sea A la matriz asociada a φ respecto de una base $\mathcal{B}$.*

1. *λ es un valor propio de φ si y solo si λ es una raíz de la ecuación $|A-\lambda I| = 0$.*
2. *Un vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ no nulo es un vector propio de φ asociado al valor propio λ si y solo si $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$*

Debido a este teorema, hablaremos igualmente de valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$, decimos que λ es un *valor propio* de A si $|A - \lambda I| = 0$. De la misma forma, un vector $\vec{v}$ no nulo se dice que es un vector propio de A asociado al valor propio λ si es solución no nula del sistema homogéneo $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Por otra parte, la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ siempre será una ecuación polinómica y el polinomio que la determina se denomina *polinomio característico*.

Definición 5.1.6 (Polinomio característico) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$. Llamamos* polinomio característico *de A al dado por el siguiente determinante:*

$$p(\lambda) = \ |A - \lambda I|$$

Y la correspondiente ecuación polinomica se denomina ecuación característica*: $|A - \lambda I| = 0$.*

Ejemplo 5.1.7 Vamos a calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica es

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Y, por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, que tiene multiplicidad 2.

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \phantom{x_2 +{}} x_3 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \square$$

Las raíces del polinomio característico son los valores propios del endomorfismo y estos valores son independientes de la base que utilicemos para determinarlos, por lo tanto, el propio polinomio característico será independiente de la base que elijamos para determinarlo.

TEOREMA 5.1.8 *Si A y B son dos representaciones matriciales de un endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico. Por esta razón, a este polinomio lo denominamos* polinomio característico *del endomorfismo.*

5.2. Diagonalización

DEFINICIÓN 5.2.1 (ENDOMORFISMO DIAGONALIZABLE) *Se dice que un endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es* diagonalizable *si existe una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$ tal que la representación matricial de φ respecto a la base $\mathcal{B}$ es una matriz diagonal.*

Teniendo en cuenta que las columnas de la matriz coinciden con la imagen de los vectores de la base, si la matriz es diagonal significa que esos vectores son además vectores propios. De hecho, esa propiedad caracteriza los endomorfismos que son diagonalizables.

Teorema 5.2.2 (Caracterización de endomorfismo diagonalizable) *Un endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es diagonalizable si y solo si existe una base de $\mathcal{V}$ formada por vectores propios.*

Ejemplo 5.2.3 En un ejemplo de la sección anterior, hemos calculado los valores y vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Concretamente, hemos visto que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ son los valores propios de la matriz y que los subespacios propios asociados a ellos son:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Los tres vectores propios que hemos determinado son linealmente independientes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Según el teorema anterior, el endomorfismo asociado a la matriz inicial es diagonalizable y la matriz del endomorfismo asociada a la base de vectores propios es diagonal. Esto lo podemos comprobar fácilmente calculando dicha matriz, que viene dada por el siguiente producto según vimos en el tema anterior:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como vemos, la diagonal de la matriz resultante está formada por los valores propios del endomorfismo. □

La relación establecida entre la matriz original y la matriz diagonal resultante en el ejemplo anterior se denomina *semejanza*: dos matrices cuadradas A y B se dicen *semejantes* si $B = P^{-1}AP$ para alguna matriz invertible P. De esta forma, podemos decir que una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

En general, no todos los endomorfismos admiten una represenación matricial diagonal, o lo que es lo mismo, no todas las matrices cuadradas son diagonalizables. Vemos a continuación algunos resultados que caracterizan esta posibilidad.

El primer resultado es una condición suficiente que establece que si tenemos tantos valores propios distintos como la dimensión del espacio, el endomorfismo es diagonalizable.

TEOREMA 5.2.4 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Si el endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.*

En el caso en que algún valor propio tenga multiplicidad mayor que 1 como raíz del polinomio característico, el endomorfimo podría no ser diagonalizable. Para garantizarlo, necesitaríamos alguna condición sobre ellos.

TEOREMA 5.2.5 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Un endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es diagonalizable si y solo si para cada valor propio λ se verifica que la dimensión del subespacio propio de λ, coincide con la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de φ y la suma de las multiplicidades de los valores propios es igual a n.*

La multiplicidad de las raíces del polinomio característico se la denomina igualmente *multiplicidad algebraica* y la dimensión del subespacio propio de un valor propio se denomina *multiplicidad geométrica*. De esta forma, el teorema anterior se puede enunciar diciendo que un endomorfismo es diagonalizable si la para cada valor propio, coincide la multiplicidad geométrica y la algebraica.

Obsérvese que la condición necesaria que hemos visto inicialmente, es una consecuencia de esta caracterización. Si los valores propios son distintos, la dimensión de cada subespacio propio no puede ser mayor que 1, así que necesariamente cada subespacio propio tiene exactamente dimensión 1, que es la multiplicidad de valor propio puesto que todos son distintos.

El teorema anterior también se puede expresar sobre matrices.

COROLARIO 5.2.6 *Supongamos que la factorización del polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ es* $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$.
La matriz A es diagonalizable si y solo si

$$\operatorname{nul}(A - \lambda_j I) = \alpha_j, \ \textit{para cada } j = 1, \dots, r$$

O, equivalentemente, si y solo si $\operatorname{ran}(A - \lambda_j I) = n - \alpha_j$, *para cada* $j = 1, \dots, r$

Ejemplo 5.2.7 Consideremos el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sus valores propios son:

- $\lambda_1 = -1$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$.
- $\lambda_2 = 8$, con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$.

Y los subsespacios propios correspondientes son

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \mathcal{U}_{\lambda_2} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, φ es diagonalizable. □

Ejemplo 5.2.8 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. y su polinomio característico: $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Por lo tanto, sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad $m_2 = 1$. Para el primer valor propio se verifica que

$$\operatorname{ran}(A - 2I) = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 = 3 - 2$$

y por lo tanto, la matriz A no es diagonalizable. □

5.3. Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 5.3.1 (Cayley-Hamilton) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ y $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ su polinomio característico. Entonces $p(A)$ es la matriz nula (matriz cero).*

Debemos tener en cuenta que este resultado no exige que la matriz sea diagonalizable, y que es aplicable a cualquier matriz cuadrada. Entre otras posibles aplicaciones, podremos utilizar este resultado para calcular de forma más eficiente potencias de una matriz y en particular sus inversas, si existen.

Ejemplo 5.3.2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$ y por lo tanto el teorema de Cayley-Hamilton establece que $p(A)$ es la matriz 3×3 cuyos términos son todos igual a 0. Vamos a comprobarlo:

$$\begin{aligned} p(A) = -(A-2I)^2(A+I) = \\ = -\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ = -\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3.3 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Vamos a usar el teorema de Cayley-Hamilton para demostrar que es invertible y expresar la matriz inversa como un polinomio en A. El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (1-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A^2 + 3A + 2I = 0 \implies A^2 + 3A = -2I \implies (A+3I)A = -2I \implies \\ \implies -\frac{1}{2}(A+3I)A = I \implies A^{-1} = -\frac{1}{2}(A+3I) \end{aligned}$$

También podemos simplificar el cálculo de potencias de la matriz usando el polinomio característico. Por ejemplo, vamos a expresar A^5 en términos de un polinomio en A:

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 \cdot A^2 \cdot A = \\ &= (-3A - 2I) \cdot (-3A - 2I) \cdot A = \\ &= (9A^2 + 12A + 4I) \cdot A = \\ &= [9(-3A - 2I) + 12A + 4I] \cdot A = \\ &= (-15A - 14I) \cdot A = \\ &= -15A^2 - 14A = \\ &= -15(-3A - 2I) - 14A = \\ &= 31A + 30I = \\ &= 31 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 61 & -62 \\ 93 & -94 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$