E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2022/2023

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de ejercicios del tema 1

1. En el conjunto $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ se define la operación binaria $*$

$$\begin{array}{rccccl} *: & G \times G & \longrightarrow & G & & \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y & = x + y + xy \end{array}$$

   a) Demuestra que $(G, *)$ es grupo abeliano.

   b) Encuentra el valor de $x \in G$ tal que $2 * x * 3 = 35$

2. En el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ se define la operación binaria

$$x * y = \frac{x \cdot y}{2}$$

   Estudia si $(\mathbb{R} - \{0\}, *)$ es un grupo.

3. En el conjunto $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ se considera una operación binaria $*$ dada por

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a		e	f	c	d
b	b	e	a			
c	c				a	
d	d	f				
f	f	c		a		

   Completa la tabla anterior para que $(G, *)$ sea un grupo. ¿Es abeliano?

4. Sea S_3 el conjunto de las permutaciones de 3 elementos.

   a) Demuestra que $(S_3, \circ)$ es un grupo de orden 6 no conmutativo.

   b) Halla un subgrupo de S_3 que sea conmutativo.

5. Sea $(S_5, \circ)$ el grupo de las permutaciones de 5 elementos y sean $\sigma, \rho \in S_5$

$$\sigma = [3, 5, 2, 1, 4] \qquad\qquad \rho = [3, 1, 4, 2, 5]$$

   Halla $(\sigma \circ \rho)^{-1}$ y $(\rho \circ \sigma)^{-1}$.

6. Hemos visto que el subconjunto de $\mathbb{Z}$ formado por los números pares constituyen un subgrupo de $\mathbb{Z}$, estudia si el subconjunto de los número impares también es un subgrupo.

7. Demuestra las siguientes propiedades

   a) Si $(G, *)$ es un grupo tal que $x^2 = e$ para todo $x \in G$, entonces es abeliano.

   b) Si $(G, *)$ es un grupo tal que $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ para todo $x, y \in G$, entonces es abeliano.

8. Se considera el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ en el que se consideran las operaciones de suma y producto habituales

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad\qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

   Estudia si $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es anillo unitario.

9. Estudia qué estructura algebraica tiene el conjunto

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + y\sqrt{2}\ ;\ x, y \in \mathbb{Z}\right\}$$

   con la suma y el producto habituales.

10. En el conjunto

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\ ;\ x, y \in \mathbb{Z}_3\right\}$$

   se consideran la suma y el producto de matrices habituales (definidos a partir de la suma y el producto en $\mathbb{Z}_3$). Estudia si $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ es un anillo.

11. En el anillo unitario $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$ se considera el subconjunto

$$S = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$

   Estudia si es un anillo unitario. ¿Es un subanillo de $\mathbb{Z}_{15}$?

12. Halla los valores de a en el anillo $\mathbb{Z}_8$ que hacen que la ecuación $ax = a$ tenga solución única.

13. Estudia para qué valores de $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, la ecuación $2x = 6$ tiene solución única en el anillo $\mathbb{Z}_m$.

14. *a*) En el anillo $(\mathbb{Z}_{36}, +_{36}, \cdot_{36})$ determina los elementos que son divisores de cero.

   b) En el subgrupo grupo multiplicativo $(U_{36}, \cdot_{36})$ formado por los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{36}$, halla los inversos de cada uno de los elementos.

15. Para cada una de las siguientes matrices generadoras, determina cuantos errores detecta y cuantos errores corrige el correspondiente código:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Sea $\mathcal{C}$ el código de grupo dado por la matriz generadora

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin hallarlas, determina cuántas clases laterales distintas tiene. Usa la matriz $\mathcal{H}$ de verificación de paridad para decodificar el mensaje

$$1100011 \quad 1011000 \quad 0101110 \quad 0110001 \quad 1010110$$

17. Sea $\mathcal{C}$ un código de grupo $(2,5)$. Sabiendo que 10101 y 11010 son palabras clave, determina:

    a) Las restantes palabras clave de $\mathcal{C}$.

    b) La matriz generadora del código y la matriz de verificación de paridad asociada.

18. Sabembos que la matriz de verificación de paridad de un código de grupo $\mathcal{C}$ es

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 1 \\ 1 & b & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    a) Calcula los valores a, b, c, d para que $\mathcal{H}$ reconozca las palabras 101011 y 110110 como palabras clave del código.

    b) Halla las demás palabras clave y determina hasta cuántos errores pueden corregir.