TEMA 3

Espacios Vectoriales

Contenidos

1. Espacios vectoriales sobre un cuerpo.
2. Dependencia e independencia lineal.
3. Sistemas de generadores. Bases. Coordenadas. Dimensión de (sub)espacio. Rango de un sistemas de vectores.
4. Coordenadas y cambios de bases.
5. Ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial.
6. Intersección y suma de subespacios.

Prerrequisitos: Los contenidos de los temas anteriores.

Objetivos: Saber determinar una base a partir de un sistemas generador. Saber determinar la matriz de cambio de bases y trabajar con ella. Saber determinar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de un subespacio vectorial y en particular de la suma e intersección de subespacios.

3.1. Introducción

Dado el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales, el producto de $\mathbb{R}$ por sí mismo n veces $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ se denota $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A los elementos $\mathbb{R}^n$ los llamamos *vectores* y en este contexto, a los elementos de $\mathbb{R}$ los llamamos *escalares*. En este conjunto además, podemos definir las operaciones de suma entre vectores y el producto de un escalar por un vector.

Concretamente, en $\mathbb{R}^n$ se define la *suma de vectores* como:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \vec{x} + \vec{y} \end{array} \qquad \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Y definimos el *producto de un escalar* $c \in \mathbb{R}$ *por un vector* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (c, \vec{x}) & \mapsto & c \cdot \vec{x} \end{array} \qquad c \cdot \vec{x} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Estamos denotando los vectores colocando una flechita sobre la letra utilizada. Esto no es necesario, aunque es frecuente para facilitar la lectura. En alguno libros se opta por cambiar el tipo letra a negrita y, en otros, se prescinde de cualquier marca.

Es importante tener en cuenta que los vectores deben escribirse como matrices $n \times 1$ y así lo haremos en todo el curso. Si por cuestiones de espacio queremos escribirlos como en una fila horizontal, usaremos el operador transpuesta:

$$\vec{x} = (x_1 \dots x_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Las operaciones definidas anteriormente verifican una serie de propiedades bien conocidas. Dados vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y escalares $c, d \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes igualdades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$

6. $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$

7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$

8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Usando estas propiedades se pueden realizar manipulaciones algebraicas de los vectores de $\mathbb{R}^n$ de manera muy similar a como se hace con números reales. Por otra parte, $\mathbb{R}^n$ no es el único conjunto dotado de operaciones con estas propiedades, hay muchos objetos matemáticos que las comparten y son los que denominamos *espacios vectoriales.*

DEFINICIÓN 3.1.1 (ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO)
Se dice queun conjunto no vacío $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial *sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ si en $\mathcal{V}$ hay definidas dos operaciones con las siguientes propiedades:*

1. *Una operación interna $+ \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $(\mathcal{V}, +)$ es grupo abeliano.*

2. *Una ley de composición externa $\cdot \colon \mathcal{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que verifica las siguientes propiedades:*

   - *Distributiva respecto a vectores: $c(\vec{v} + \vec{w}) = c\vec{v} + c\vec{w}$, para todo $c \in \mathcal{K}$ y todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$.*
   - *Distributiva respecto a escalares: $(c + d)\vec{v} = c\vec{v} + d\vec{v}$, para todo $c, d \in \mathcal{K}$ y todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$*
   - *Pseudoasociativa: $c(d\vec{v}) = (c \cdot d)\vec{v}$, para todo $c, d \in \mathcal{K}$ y todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$*
   - *Existencia de elemento neutro, $1 \in \mathcal{K}$, tal que $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$.*

EJEMPLO 3.1.2 Estos son algunos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

- El conjunto que hemos utilizado en la introducción: $\mathbb{R}^n$. En general, de la misma forma se pueden definir los espacios vectoriales $\mathcal{K}^n$ para cualquier cuerpo $\mathcal{K}$.

- El conjunto $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de matrices $m \times n$ con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar. En general, si $\mathcal{K}$ es un cuerpo, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$.

- El conjunto $\mathbb{R}_k[x]$ de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que k; es decir, de la forma $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \mathbb{R}$ y con las operaciones usuales entre polinomios.

- El conjunto $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones reales definidas en el intervalo $[0,1]$. La suma está definida como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

TEOREMA 3.1.3 (PROPIEDADES DE LOS VECTORES) *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Para cualesquiera $c, d \in \mathcal{K}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ se verifica:*

1. $0\vec{v} = \vec{0}$
2. $c\vec{0} = \vec{0}$
3. *Si $c\vec{v} = \vec{0}$, entonces $c = 0$ ó bien $\vec{v} = \vec{0}$.*
4. $(-c)\vec{v} = -(c\vec{v}) = c(-\vec{v})$
5. $c(\vec{u} - \vec{v}) = c\vec{u} - c\vec{v}$
6. $(c-d)\vec{v} = c\vec{v} - d\vec{v}$
7. *Si $c\vec{v} = d\vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $c = d$*
8. *Si $c\vec{u} = c\vec{v}$, y $c \neq 0$, entonces $\vec{u} = \vec{v}$*

DEFINICIÓN 3.1.4 (SUBESPACIO VECTORIAL) *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial $\mathcal{V}$. Se dice que $\mathcal{U}$ es* subespacio vectorial *de $\mathcal{V}$ si $\mathcal{U}$ tiene estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que $\mathcal{V}$.*

De la misma forma en en grupos, el concepto de subespacio se simplifica con la siguiente caracterización que esencialmente dice que un suconjunto es subespacio si las operaciones son cerradas en el conjunto.

TEOREMA 3.1.5 (CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBESPACIOS VECTORIALES) *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Entonces, $\mathcal{U}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{U}$, entonces $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}$.*
2. *Si $c \in \mathcal{K}$ y $\vec{v} \in \mathcal{U}$, entonces $c\vec{v} \in \mathcal{U}$.*

EJEMPLO 3.1.6

- El conjunto $\mathcal{U}_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, 0)^t + (y_1, y_2, 0)^t = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0)^t \in \mathcal{U}_1 \\ c \cdot (x_1, x_2, 0)^t = (cx_1, cx_2, 0)^t \in \mathcal{U}_1\end{gathered}$$

- El conjunto $\mathcal{U}_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

- $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ también es subespacio.

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U},\ \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{W} \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$$
$$\vec{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \Longrightarrow c \cdot \vec{u} \in \mathcal{U},\ c \cdot \vec{u} \in \mathcal{W} \Longrightarrow c \cdot \vec{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$$

  Como vemos, solo se usa la caracterización de subespacio (primera implicación) y la definición de intersección (segunda implicación).

- Sin embargo, la unión de los subespacios no es necesariamente un subespacio. Los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{U}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\};$$

  sin embargo, su unión no es un subespacio:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2, \quad \text{pero} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$$

□

3.2. Dependencia e Independencia Lineal

La noción de dependencia lineal es fundamental en las estructura de espacio vectorial. Expresar unos vectores a partir de otros mediante combinaciones lineales permite representar de forma simplificada conjuntos complejos. No es exagerado decir que en este concepto reside la potencia de las aplicaciones del álgebra lineal.

En adelante, utilizaremos la expresión *sistema de vectores* para referirnos a un conjunto finito de vectores.

Definición 3.2.1 (Combinación lineal) *Una* combinación lineal *de los vectores del sistema* $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{u_n}\} \subset \mathcal{V}$ *es cualquier vector dado por una expresión de la forma*

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{u_n}$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son escalares.*

Ejemplo 3.2.2 En $\mathbb{R}^3$, el vector $(2, 5, 3)^t$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{v_1} = (1, 1, 0)^t$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)^t$, ya que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$$

También se dice que $(2, 5, 3)^t$ se expresa como combinación lineal de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$. □

EJEMPLO 3.2.3 Vamos a ver si $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$, en donde

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para ello, se deberían poder determinar escalares a, b y c tales que

$$\vec{w} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos que encontrar, si existen, las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} & & -b & + & 3c & = & -1 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2 \end{array}$$

Este sistema tiene una única solución:

$$a = 1, \qquad b = -2, \qquad c = -1$$

Y por lo tanto, $\vec{w} = \vec{v_1} - 2\vec{v_2} - \vec{v_3}$. □

DEFINICIÓN 3.2.4 (DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL)
Un sistema de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ *es* linealmente independiente *si no es posible expresar ninguno de ellos como combinación lineal del resto. En caso contrario, decimos que el sistema es* linealmente dependiente.

TEOREMA 3.2.5 (CARACTERIZACIÓN DE LA INDEPENDENCIA LINEAL) *El sistema de vectores* $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_p}\}$ *es linealmente independiente si, y sólo si, la única combinación lineal tal que*

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_p\vec{v_p} = \vec{0}$$

es la que tiene todos los coeficientes a_i *iguales a 0.*

EJEMPLO 3.2.6 En $\mathbb{R}^3$, el sistema $\left\{(1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (2,5,3)^t\right\}$ es linealmente dependiente, ya que podemos expresar uno de ellos como combinación lineal de los otros dos:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$ □

EJEMPLO 3.2.7 En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, el sistema $\{2 - x + x^2, 2x + x^2, 4 - 4x + x^2\}$ es linealmente dependiente, porque

$$4 - 4x + x^2 = 2(2 - x + x^2) - (2x + x^2) \qquad \square$$

EJEMPLO 3.2.8 En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente, porque

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

EJEMPLO 3.2.9
El sistema de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores $\vec{v_1} = (1, 1, 0)^t$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)^t$, $\vec{v_3} = (0, 0, 3)^t$ es linealmente independiente. Consideremos una combinación lineal nula de estos vectores

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \\ a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema homogéneo se resuelve fácilmente para deducir que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Por lo tanto, efectivamente el sistema es independiente. $\square$

EJEMPLO 3.2.10 En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, el sistema $\{x^2, 1 + x, -1 + x\}$ es linealmente independiente. Si tomamos una combinación nula y reagrupamos los términos, obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + b(1 + x) + c(-1 + x) &= 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ ax^2 + (b + c)x + (b - c) &= 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por las propiedades de los polinomios, todos los coeficientes deben ser igual a 0:

$$a = 0, \qquad b + c = 0, \qquad b - c = 0$$

Resolviendo el sistema homogéneo, obtenemos que la única solución es $a = b = c = 0$, y por lo tanto, el sistema es efectivamente linealmente independiente. $\square$

3.3. Sistemas de generadores, bases, dimensión

Teorema 3.3.1 (Subespacio generado por un sistema de vectores)
Sea $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p}\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Entonces, el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$. Este subespacio vectorial se denomina subespacio generado por S *y se denota*

$$\mathcal{L}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}) = \left\{a_1\vec{v_1} + \cdots + a_p\vec{v_p} \mid a_1, \dots, a_p \in \mathcal{K}\right\}$$

Ejemplo 3.3.2 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, el conjunto $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}$ es un sistema generador del subespacio $\mathcal{W} = \Big\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\Big\}$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Este no es el único sistema generador de $\mathcal{W}$, por ejemplo, se puede comprobar fácilmente que

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \square$$

El hecho de que varios sistemas puedan generar el mismo subespacio, motiva la siguiente definición y caracterización.

Definición 3.3.3 (Sistemas equivalentes de vectores)
Se dice que dos sistemas de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_p}\}$ y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_m}\}$ son equivalentes *si generan el mismo subespacio, es decir, si*

$$\mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_p}) = \mathcal{L}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_m})$$

Podemos usar la denominación de equivalencia puesto que la relación verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por otra parte, para demostrar que dos sistemas son equivalentes, basta con demostrar que los vectores de un sistemas on expresables como combinación lineal de los vectores del otro. Esto es lo que establece el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4 (Criterio de equivalencia de sistemas de vectores)
Sean $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_p}\}$ y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_m}\}$ dos sistemas de vectores. Los dos sistemas son equivalentes si, y sólo si, cada vector del primer sistema se expresa como combinación lineal de los vectores del segundo sistema y viceversa.

Ejemplo 3.3.5 Los sistemas de vectores

$$\left\{\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\{\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

son equivalentes, ya que

$$\begin{array}{rclcrcl}
\vec{v_1} &=& 3\vec{u_1} - \vec{u_2} - \vec{u_3}, & \qquad & \vec{u_1} &=& \vec{v_2} - 2\vec{v_3} + \vec{v_4} \\
\vec{v_2} &=& 2\vec{u_1} - \vec{u_2} - \vec{u_3}, & & \vec{u_2} &=& \vec{v_2} - 3\vec{v_3} + \vec{v_4} \\
\vec{v_3} &=& \vec{u_1} - \vec{u_2}, & & \vec{u_3} &=& -\vec{v_3} + \vec{v_4} \\
\vec{v_4} &=& \vec{u_1} - \vec{u_2} + \vec{u_3} & & & &
\end{array}$$

□

En general, en un espacio vectorial no trivial (es decir, distinto de $\{\vec{0}\}$), son posibles dos casos: que contengan sistemas linealmente independientes con un número de vectores tan grande como se quiera o que los sistemas linealmente independientes contengan un número máximo de vectores. En este segundo caso, hablamos de *espacios vectoriales de tipo finito*, y son con los que vamos a trabajar en este curso. En particular, los (sub)espacios vectoriales generados por un sistema finito de vectores son de tipo finito y en estos (sub)espacios estamos interesados en utilizar sistemas generadores que además sean linealmente independientes, es decir, *bases*.

Definición 3.3.6 (Base de un espacio vectorial) *Se dice que* $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ *es una* base *de* $\mathcal{V}$ *si*

1. $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ *es un sistema generador de* $\mathcal{V}$ *y*
2. $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ *es un sistema linealmente independiente.*

Como consecuencia del criterio de equivalencia de sistemas de vectores, se obtiene el siguiente resultado que justifica la noción de dimensión de un espacio vectorial

Teorema 3.3.7 *Si* $\mathcal{V}$ *es un (sub)espacio vectorial de tipo finito, todas las bases tienen el mismo número de vectores. Este número se denomina* dimensión de $\mathcal{V}$*, y lo denotamos por* $\dim(\mathcal{V})$.

Ejemplo 3.3.8

1. $\mathcal{C} = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la *base canónica* o *estándar* de $\mathbb{R}^3$.

2. El sistema $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es la *base canónica* o *estándar* de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. El sistema
$$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
es la *base canónica* o *estándar* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Naturalmente, la dimensión del espacio vectorial trivial $\{\vec{0}\}$, es cero. Por otra parte, también es evidente que en un (sub)espacio de dimensión n, cualquier sistema de vectores con más de $n+1$ vectores será linealmente dependiente. Por otra parte, si $\mathcal{U}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$, entonces $\dim(\mathcal{U}) \leq \dim(\mathcal{V})$; es más, si $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{V})$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Ejemplo 3.3.9

- $\mathbb{R}^n$ es de tipo finito y tiene dimensión n.
- $\mathbb{R}_n[x]$ es de tipo finito y tiene dimensión $n+1$. Como hemos visto antes, ya que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base.
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tiene dimensión $m \cdot n$. □

Si $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{V}$ se puede escribir *de forma única* como combinación lineal de los elementos de la base, lo que se demuestra fácilmente como sigue utilizando la caracterización de sistemas linealmente independientes:

$$x_1\vec{v_1} + \cdots + x_n\vec{v_n} = y_1\vec{v_1} + \cdots + y_n\vec{v_n}$$
$$(x_1 - y_1)\vec{v_1} + \ldots + (x_n - y_n)\vec{v_n} = \vec{0}$$
$$x_1 = y_1, \ \ldots, \ x_n = y_n$$

Esta propiedad justifica la siguiente definición.

Definición 3.3.10 (Coordenadas de un vector respecto de una base) *Sea* $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ *una base de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$. *Los escalares* $x_1, \dots, x_n$ *tales que*

$$\vec{x} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \cdots + x_n\vec{v_n}$$

se denominan coordenadas de $\vec{x}$ respecto de $\mathcal{B}$ *y lo escribimos, en forma matricial, como:*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, la representación matricial habitual de sus elementos coincide con la representación matricial de sus coordenadas respecto de la base canónica.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n}$$

Por otra parte, la representación matricial de los vectores de cualquier cuerpo finito utilizando las coordenadas respecto de una base, permite que podamos trabajar en cualquier espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ utilizando matrices en ese cuerpo. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}\}$ es un sistema linealmente dependiente (con algún vector no nulo), entonces podemos encontrar un subsistema linealmente independiente que genere el mismo subespacio. Al ser linealmente dependiente, algún vector del sistema se debe poder escribir como combinación lineal del resto y por lo tanto se puede eliminar del sistema obteniendo otro equivalente. Esto lo podemos seguir haciendo hasta que nos quede un sistema linealmente independiente.

También podemos sistemas generadores equivalentes y linealmente independiente realizando *transformaciones elementales* que mantienen la equivalencia del sistema:

1. Multiplicar cualquier vector por un escalar distinto de cero.
2. Sumar a cualquier vector, otro multiplicado por una constante.
3. Eliminar del sistema cualquier vector que sea combinación lineal de los vectores restantes y, en particular, el vector nulo si estuviera en el sistema.

Ejemplo 3.3.11 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema el sistema S

formado por los siguientes vectores:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vamos generar un sistema de vectores equivalente y linealmente independiente. Para aplicar las transformaciones elementales que hemos descrito anteriormente, vamos a disponer los vectores del sistema como filas de una matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

De esta forma, las transformaciones elementales coinciden con la operaciones elementales por filas del método de Gauss. Es decir, si aplicamos estas operaciones por filas sobre A, las filas de las matrices que generemos serán sistemas de vectores equivalentes. Concretamente, estamos interesados en obtener una matriz escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al llegar a una matriz escalonada podemos afirmar que las filas que contienen elementos distintos de 0, determinan un sistema linealmente independiente y por lo tanto una base de $\mathcal{L}(S)$. La razón es que el sistema homogéneo que tendríamos que resolver para demostrarlo, es compatible y solo tiene la solución nula.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, efectivamente el sistema

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente, y en consecuencia es una base, y la dimensión del subespacio es 3. □

Ejemplo 3.3.12 Como hemos visto antes, si $\mathcal{U}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{V})$ entonces $\mathcal{U} = \mathcal{V}$; si $\dim(\mathcal{U}) < \dim(\mathcal{V})$, entonces $\mathcal{U}$ es un subespacio propio de $\mathcal{V}$. En este ejemplo, vamos a mostrar que, en este caso, es posible completar una base de $\mathcal{U}$ para formar una base de $\mathcal{V}$.

En $\mathbb{R}^3$, vamos a consideramos el subespacio

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\6\end{pmatrix}\right)$$

En primer lugar, siguiendo el método de las transformaciones elementales que hemos visto anteriormente, vamos a determinar una base:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\2 & 1 & 3\\1 & 8 & 6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & -5 & -3\\0 & -10 & -6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & 5 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\mathcal{B} = \{(-1,2,0)^t, (0,5,3)^t)\}$ es una base de $\mathcal{U}$ y su dimensión es 2. Si, en la última matriz, sustituimos la última fila por $(0,0,1)$ la matriz resultante sigue siendo escalonada y los tres vectores fila formarían un sistema linealmente independiente, es decir, formarían una base de $\mathbb{R}^3$. Es decir, para completar la base de $\mathcal{U}$ a una base de $\mathbb{R}^3$ basta añadir el vector

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

□

Otra forma de nombrar la dimensión de un subespacio generado por un sistema de vectores es como *rango*.

Definición 3.3.13 (Rango de un sistema de vectores) *El* rango *de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio que genera.*

Este concepto se aplica también a las matrices, entendiendo que toda matriz lleva asociados dos sistemas de vectores, uno formado por los vectores fila y el otro formado por los vectores columna. Así, podríamos considerar el rango de una matriz dependiendo de si nos fijamos en sus vectores fila o sus vectores columna. El siguiente resultado establece que ambos rangos coinciden.

Teorema 3.3.14 (Rango de una matriz) *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$*, la dimensión del subespacio de* $\mathcal{K}^m$ *generado por el sistema de vectores fila de* A *coincide con la dimensión del subespacio* $\mathcal{K}^n$ *generado por el sistema de vectores columna. Esta dimensión se denomina* rango *de la matriz.*

Ejemplo 3.3.15 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ podemos hallar su rango mediante operaciones elementales en sus filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos que $\operatorname{ran}(A) = 2$.

3.4. Coordenadas y cambio de base

Si en un mismo espacio vectorial tenemos dos bases distintas, un mismo vector será representado por distintas coordenadas en cada una de las bases. Un problema importante en estas situaciones es determinar la relación que hay entre las coordenadas respecto de una y otra base.

Ejemplo 3.4.1 Para el vector $\vec{v} = (8, 0, 10)^t \in \mathbb{R}^3$, los números 8, 0 y 10 son sus coordenadas respecto de la base canónica (habitualmente, omitiremos el subíndice en la matriz correspondiente a esta base). Consideremos ahora otra base en $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Vamos a determinar las coordenadas x, y, z de $\vec{v}$ respecto de $\mathcal{B}$.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales usando los métodos del tema anterior, obtenemos que $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$ y por lo tanto podemos escribir

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \square$$

Tras resolver el sistema del ejemplo anterior, obtenemos la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Es decir, la matriz construida disponiendo como columnas los vectores de $\mathcal{B}$ escritos con coordenadas respecto de $\mathcal{C}$, transforma las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ en coordenadas respecto de $\mathcal{C}$ al multiplicar por la matriz. Por esta razón, esta matriz se denomina *matriz de cambio de* o *matriz de paso* de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Teorema 3.4.2 (Matriz de cambio de base) *Sean* $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \cdots, \vec{u_n}\}$ *y* $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ *bases de un espacio vectorial y supongamos que*

$$\begin{aligned} \vec{v'}_1 &= a_{11}\vec{v_1} + a_{21}\vec{v_2} + \cdots + a_{n1}\vec{u_n} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \vec{v'}_n &= a_{1n}\vec{v_1} + a_{2n}\vec{v_2} + \cdots + a_{nn}\vec{u_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

y sea $\vec{w} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t_{\mathcal{B}} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^t_{\mathcal{B}'}$. *Entonces*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matriz cuadrada en la igualdad anterior se denomina matriz de cambio de base o matriz de paso de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$; *es decir, la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de cada vector* $\vec{v'}_j$ *de la base* $\mathcal{B}'$ *expresado respecto de la base* $\mathcal{B}$.

La demostración de este resultado es sencilla y solo usa las propiedades distributivas y la unicidad de las coordenadas de un vector respecto de una base.

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= x'_1\vec{v'}_1 + x'_2\vec{v'}_2 + \cdots + x'_n\vec{v'}_n \\
&= x'_1(a_{11}\vec{v_1} + a_{21}\vec{v_2} + \cdots + a_{n1}\vec{u_n}) + \\
&\quad\; x'_2(a_{12}\vec{v_1} + a_{22}\vec{v_2} + \cdots + a_{n2}\vec{u_n}) + \\
&\quad\; \ldots \\
&\quad\; x'_n(a_{1n}\vec{v_1} + a_{2n}\vec{v_2} + \cdots + a_{nn}\vec{u_n}) \\
&= (a_{11}\cdot x'_1 + a_{12}\cdot x'_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x'_n)\vec{v_1} + \\
&\quad\; (a_{21}\cdot x'_1 + a_{22}\cdot x'_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x'_n)\vec{v_2} + \\
&\quad\; \ldots \\
&\quad\; (a_{n1}\cdot x'_1 + a_{n2}\cdot x'_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x'_n)\vec{u_n} \\
&= x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \cdots + x_n\vec{u_n}
\end{aligned}$$

Y de ahí, por la unicidad de las coordenadas, obtenemos las siguientes igualdades que demuestran la identidad de matrices del enunciado del teorema.

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}\cdot x'_1 + a_{12}\cdot x'_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x'_n \\
x_1 &= a_{21}\cdot x'_1 + a_{22}\cdot x'_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x'_n \\
&\;\;\ldots \\
x_n &= a_{n1}\cdot x'_1 + a_{n2}\cdot x'_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x'_n
\end{aligned}$$

Corolario 3.4.3 (Inversa de la matriz del cambio de base) *Si P es la matriz de cambio de una base $\mathcal{B}'$ a otra base $\mathcal{B}$, entonces P es inversible y P^{-1} es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

3.5. Ecuaciones cartesianas de un subespacio

Consideremos una matriz A en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$ y consideremos el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz A como matriz de coeficientes:

$$\mathcal{U} = \{\vec{u} \mid A\vec{u} = \vec{0}\}$$

Obviamente este conjunto es un subespacio de $\mathcal{K}^n$: si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U}$, entonces

$$A\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}; \qquad A\cdot(c\cdot\vec{u}) = cA\vec{u} = c\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

De hecho, todo subespacio vectorial se puede escribir como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo.

Ejemplo 3.5.1 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$ se considera el subespacio $\mathcal{W}$ generado por los vectores

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema es una base, puesto que los vectores son escalonados. Sabemos entonces que cada vector $\vec{x} \in \mathcal{W}$ se puede expresar como combinación lineal:

$$\vec{x} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 + \gamma\vec{w}_4, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \alpha \\ x_2 & = & 2\alpha \\ x_3 & = & \beta \\ x_4 & = & \alpha + \beta \\ x_5 & = & + 2\beta + \gamma \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones se denomina *ecuaciones paramétricas* del subespacio, ya que expresan las coordenadas del vector en función de los parámetros α, β, γ.

Por lo tanto, para que $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ pertenezca a $\mathcal{W}$, deben existir escalares α, β, γ que hagan válidas las ecuaciones parámetricas, es decir, el sistema dado por la siguiente matriz aumentada debe tener solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 2 & 1 & x_5 \end{array}\right)$$

Utilizando el método de Gauss para convertir esta matriz en una matriz escalonada llegamos a la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 - 2x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 - x_3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, este sistema es compatible si y solamente si

$$x_2 - 2x_1 = 0$$
$$x_4 - x_1 - x_3 = 0$$

Es decir, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathcal{W}$ si y solo si se verifican las ecuaciones anteriores. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones cartesianas* de $\mathcal{W}$ y son el sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones coincide con $\mathcal{W}$. □

En el ejemplo anterior, observamos una relación de gran utilidad: la dimensión del subespacio más el número de ecuaciones cartesianas es la dimensión del espacio en el que trabajamos.

3.6. Suma e intersección de subespacios vectoriales

Definición 3.6.1 (Suma de subespacios) *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. La* **suma** *de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es el conjunto de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que se expresan como suma de un vector de $\mathcal{U}$ y un vector de $\mathcal{W}$:*

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \big\{\vec{u} + \vec{w} \;;\; \vec{u} \in \mathcal{U},\; \vec{w} \in \mathcal{W}\big\}$$

La suma de dos subespacios vectoriales también es subespacio vectorial y el siguiente resultado establece cómo están relacionados sus sistemas generadores.

Teorema 3.6.2 *Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ es una base de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ es una base de $\mathcal{W}$, entonces $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ está generado por $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$:*

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p)$$

La unión de las bases de dos subespacios no tiene que ser necesariamente una base de la suma, es decir, la suma de las dimensiones no tiene que ser necesariamente la dimensión de la suma. De hecho, se verifica la relación que se establece en el siguiente resultado en la que también interviene la dimensión del subespacio intersección.

Teorema 3.6.3 *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Entonces*

$$dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{W}) - dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Ejemplo 3.6.4 Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$\mathcal{U} = \Big\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\Big\}, \quad \mathcal{W} = \Big\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\Big\}$$

Resolviendo la ecuación $x_1 - x_3 = 0$ obtenemos las ecuaciones paramétricas del $\mathcal{U}$ y una base:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = \alpha \\ x_2 & = \beta \\ x_3 & = \alpha \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{U}$$

De la misma forma, obtenemos una base de $\mathcal{W}$.

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = \alpha \\ x_2 & = -\alpha \\ x_3 & = \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{W}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Veamos cual es la dimensión de esta suma, determinando una base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la dimensión de la suma es 3 y en consecuencia coincide con $\mathbb{R}^3$.

Vamos a determinar también una base de la intersección para comprobar el teorema de las dimensiones anterior a este ejemplo.

Un vector $(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, si se verifican las ecuaciones cartesianas de los dos subespacios

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema homogéneo, determinaremos una base de la intersección. Naturalmente usamos la forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = \alpha \\ x_2 & = -\alpha \\ x_3 & = \alpha \end{array}\right. \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la dimensión de la intersección es igual a 1 y se verifica la relación entre dimensiones:

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(\mathcal{U} + \mathcal{W})$$

Definición 3.6.5 (Suma directa. Subespacios suplementarios) *Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$ tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, decimos que la suma de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es* suma directa *y la denotamos $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$. Si ademas $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$, decimos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son* suplementarios.