TEMA 5: DIAGONALIZACIÓN

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \varphi(\bar{x}) = A\cdot\bar{x} \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

---

* Valores y vectores propios:

$$A\cdot\bar{v} = \lambda\cdot\bar{v}$$

* Polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda\cdot I|$$

Sus raíces son los valores propios

* Criterios de diagonalizabilidad $\longrightarrow$ Diagonalización
* Teorema de Cayley-Hamilton

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + ax_2 + x_3 \\ -x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Utiliza la definición de valor y vector propio de un homomorfismo para hallar los valores del parámetro a tales que $\vec{v} = (2, -3, 2)^t$ sea un vector propio de φ.

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4-3a+2 = 2\lambda \\ 3+6 = -3\lambda \\ -6 = 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6-3a = 2\lambda \longrightarrow 6-3a=-6 \Rightarrow -3a=-12 \Rightarrow a=4 \\ 9=-3\lambda \Rightarrow \lambda=-3 \\ -6=2\lambda \Rightarrow \lambda=-3 \end{array}\right.$$

Es vector propio si $\boxed{a=4}$ y el valor propio asociado es $\boxed{-3}$

2. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$. Usa la definición de valor y vector propio para determinar los valores de los parámetros a y b tales que $\vec{v} = (1,1,1)^t$ sea un vector propio de A.

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 + a = \lambda \Rightarrow a = \lambda - 3 = -1 = a \\ 2 = \lambda \\ b + 3 = \lambda \Rightarrow b = \lambda - 3 = -1 \\ b = -1 \end{array}$$

El vector es propio si $\boxed{a = b = -1}$ y el valor propio correspondiente es $\boxed{\lambda = 2}$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores y vectores propios de φ

b) Estudia si φ es diagonalizable y en tal caso determina la matriz de paso para obtener la forma diagonal.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda)+2\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

$\lambda = 1$ es el único valor propio

Los vectores propios $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ son aquellos que:

$$(A - \lambda I)\bar{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 0 \\ -1 & 3-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_2 = 0 & \Rightarrow \\ -v_1 + 2v_2 = 0 & \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{matrix} v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_3 = \alpha \end{matrix}} \qquad U_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No es diagonalizable ya que solo tenemos un valor propio real de multiplicidad 1

Ejemplo adicional

Vamos a calcular los valores y vectores propios y ver si es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\big) =$$

$$= (1-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3) \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow A - 0 \cdot I = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow U_0 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -x_3 - 3x_1 = -3\alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{matrix} \Rightarrow U_3 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Como los tres valores son distintos, podemos afirmar que A es diagonalizable; lo comprobamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Estudia para qué valores del parámetro a son diagonalizables los siguientes endomorfismos en $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\varphi_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ax_1+x_2\\x_1+x_2+2x_3\end{pmatrix}} \qquad \varphi_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-2x_2-(2+a)x_3\\x_2+ax_3\\x_3\end{pmatrix}$$

---

a)

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\a&1-\lambda&0\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)\quad\begin{cases}\lambda=1\to m_1=2\\\lambda=2\to m_2=1\end{cases}$$

$\underline{\lambda=1}$ $\to$ $A-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$a\neq 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A-I)=2 \Rightarrow \operatorname{nul}(A-I)=1\neq 2=m_1$

$\Rightarrow$ No es diagonalizable

$a=0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A-I)=1 \Rightarrow \operatorname{nul}(A-I)=2=m_1$

$\Rightarrow$ puede ser diagonalizable

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow u_1+u_2+u_3=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}u_1=-\alpha-\beta\\u_2=\alpha\\u_3=\beta\end{array}\right\}\Rightarrow U_1=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$\underline{\lambda=2}$ Consideramos solo $a=0$

$$A-2\cdot I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}u_1=0\\u_2=0\\u_3=\alpha\end{array}\right|\Rightarrow U_2=\mathcal{L}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Es diagonalizable solo si $a=0$

4. Estudia para qué valores del parámetro a son diagonalizables los siguientes endomorfismos en $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ax_1+x_2\\x_1+x_2+2x_3\end{pmatrix};\qquad \boxed{\varphi_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-2x_2-(2+a)x_3\\x_2+ax_3\\x_3\end{pmatrix}}$$

---

b)

$$\varphi_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-2-a\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2-a\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-2-a\\0&1-\lambda&a\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3\ \left\{\begin{array}{l}\lambda=1\\ m_1=3\end{array}\right.$$

$$A-I=\begin{pmatrix}0&-2&-2-a\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-2&-2\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}\ \left\{\begin{array}{ll}\text{Si } a=0, & m\ell=2\neq 3\\ \text{Si } a\neq 0 & m\ell=1\neq 3\end{array}\right.$$

No es diagonalizable

5. De un homomorfismo en φ en $\mathbb{R}^2$ sabemos que $\varphi((0,1)^t) = (1,2)^t$ y que $(1,1)^t$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.

a) Encuentra la matriz del homomorfismo respecto de la base canónica.

b) Halla, si es posible, una base respecto a la cual la matriz de φ sea una matriz diagonal.

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \quad \Big\| \quad \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Si A es la matriz respecto de la base canónica:

$$A\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \quad \begin{cases}\text{Valores propios} \\ \lambda = 1 \quad m_1 = 1\\ \lambda = 2 \quad m_2 = 1\end{cases}$$

$$U_1 \to A - I = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 = \lambda\\ x_2 = 0\end{cases} \Longrightarrow U_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$U_2 \to A - 2I = \begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 = x_2 = \lambda\\ x_2 = \lambda\end{cases} \Longrightarrow U_2 = \mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = (\mathcal{B}\to\mathcal{C}) \to \boxed{\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right) \to \begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&-1\end{array}\right)} \to P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix} = (\mathcal{C}\to\mathcal{B})$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Si cambiamos el orden de los vectores, obtendríamos otra diagonalización:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

6. De un endomorfismo φ en $\mathbb{R}^3$ se sabe que:

- Es diagonalizable.
- $\vec{v}_1 = (-1,4,1)^t$, $\vec{v}_2 = (1,-1,-1)^t$, $\vec{v}_3 = (1,2,1)^t$ son vectores propios.
- $\varphi((1,1,1)^t) = (4,4,2)$.

Halla los valores propios de φ y su matriz respecto a la base canónica.

$$\begin{pmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ v_3^t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 3$$

Por lo tanto $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ es una base de vectores propios

Si $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ son los correspondientes valores propios y A es la matriz de φ respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Además: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

A partir de aquí, podemos calcular A y D

$$Q^{-1} A Q = D \Rightarrow A = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$$

$$Q D Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la inversa de Q:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1/2 \quad 0 \quad 1/2}_{Q^{-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$QDQ^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow DQ^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda_1 \\ -2\lambda_2 \\ 6\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \\ \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -2} \\ \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 3} \end{array}$$

DETERMINANTES

Calculo por adjuntos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Signos

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Adjuntos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Por 1ª fila

$$+3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Por 4ª Columna

$$-5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\,\cancel{\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\,\cancel{\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}} =$$

$$= -5\left(-1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) - \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -5(+3+4) - (-11-4) = -35 + 15 = -20$$

Propiedades para facilitar el cálculo:

* Si a una fila (resp. columna) se le suma una combinación lineal de las otras filas (resp. columnas) el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1 = C_1 + 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

* Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna por un numero, el determinante queda multiplicado por dicho número:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrices

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Deter.

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

7. Halla los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$f_2 = f_2 + f_3$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2-\lambda \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(14-8\lambda+\lambda^2) + (-6+2\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(14-8\lambda+\lambda^2-2)$$

$$= (3-\lambda)(12-8\lambda+\lambda^2) = (3-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda)$$

$$U_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow U_2 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_3 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow U_3 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_6 \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{array} \Rightarrow U_6 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Halla los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{f_3=f_3-2f_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2(\lambda+1) & -(\lambda+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{(1+\lambda)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{c_2=c_2+2c_3}{=} (1+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 & 4 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\left((3-\lambda)(4-\lambda)-20\right) = (1+\lambda)(8+7\lambda-\lambda^2) =$$

$$= (1+\lambda)^2(8-\lambda)$$

$$\lambda = \frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{-2} = \frac{-7\pm 9}{-2} = \begin{cases} 8 \\ -1 \end{cases}$$

$$U_{-1} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{matrix} \Rightarrow U_{-1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$U_8 \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{cases}$$

* Permutamos filas 1 y 2
* Dividimos filas 1 por 2

$$\Rightarrow U_8 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Para cada una de las siguientes matrices, determina los valores reales de los parámetros a y b para que la matriz sea diagonalizable y, para esos casos, obtenga su forma diagonal y una matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a+3 & a^2-10 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & a \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$$U_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a\neq 2,\ \operatorname{nul}(A-I)=1 \text{ y } A \text{ no es diagonal.} \\ \text{Si } a=2,\ \operatorname{nul}(A-I)=2=m_2 \end{cases}$$

$$U_3 \text{ para } a=2 \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{nul}(A-2I)=1=m_1$$

Por lo tanto, para $a=2$ es diagonalizable

$$U_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_2 = -\beta \\ u_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$U_3 \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_2 = 0 \\ u_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow U_3 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

8. Para cada una de las siguientes matrices, determina los valores reales de los parámetros a y b para que la matriz sea diagonalizable y, para esos casos, obtenga su forma diagonal y una matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a+3 & a^2-10 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} a+3-\lambda & a^2-10 \\ 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} = (a+3-\lambda)(a+1-\lambda) - a^2+10$$

$$= \lambda^2 - (2a+4)\lambda + (a+3)(a+1) - a^2+10 =$$

$$= \lambda^2 - (2a+4)\lambda + (\cancel{a^2}+4a+3-\cancel{a^2}+10) =$$

$$= \lambda^2 - (2a+4)\lambda + (4a+13)$$

$$\lambda = \frac{2a+4 \pm \sqrt{4a^2+16+\cancel{16a}-\cancel{16a}-4\cdot 13}}{2} = \frac{2a+4\pm\sqrt{4a^2-36}}{2}$$

$$= \boxed{a+2\pm\sqrt{a^2-9}}$$

Si $a^2-9>0$, los valores propios son distintos y por lo tanto B es diagonalizable.

Si $a^2-9=0$, es decir, para $a=3$, $a=-3$, el valor propio tiene multiplicidad 2.

$\underline{a=3}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 3+2=5$$

$$B_1 - 5I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nul}(B_1 - 5I) = 1 \neq 2 \text{ no es diag.}$$

$\underline{a=-3}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -3+2 = -1$$

$$B_2 + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nul}(B_2 + I) = 1 \neq 2$$

$\Rightarrow$ no es diag.

8. Para cada una de las siguientes matrices, determina los valores reales de los parámetros a y b para que la matriz sea diagonalizable y, para esos casos, obtenga su forma diagonal y una matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a+3 & a^2-10 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

$$|C-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & b \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda)$$

$a \neq -1$
$a \neq 5$

$$U_{-1} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{a+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Dim}(U_{-1}) = 1$$

$$U_5 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & a-5 \end{pmatrix} \to \mathrm{Dim}(U_5) = 1$$

$$U_a \to \begin{pmatrix} 5-a & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{Dim}(U_a) = 1$$

Diagonalizable

$a = -1$

$$U_5 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \mathrm{Dim}(U_5) = 1$$

$$U_{-1} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b = 0 \Rightarrow \mathrm{Dim}(U_{-1}) = 2 \Rightarrow$ Diagonaliz.

$b \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Dim}(U_{-1}) = 1 \Rightarrow$ NO Diagon.

$a = 5$

$$U_{-1} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Dim}(U_{-1}) = 1$$

$$U_5 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & a-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Dim}(U_5) = 1$$

No diagonalizable

8. Para cada una de las siguientes matrices, determina los valores reales de los parámetros a y b para que la matriz sea diagonalizable y, para esos casos, obtenga su forma diagonal y una matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a+3 & a^2-10 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

$$|D-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} \underset{f_3=f_3-f_2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ 0 & \lambda-\alpha & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2+C_3}{=}$$

$$= (\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha-\lambda & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)\left(\lambda(\alpha+\lambda)-2\alpha^2\right) =$$

$$= (\alpha-\lambda)(\lambda^2+\alpha\lambda-2\alpha^2)$$

$$= (\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda)(-2\alpha-\lambda)$$

$$= (\alpha-\lambda)^2(-2\alpha-\lambda)$$

$$U_{-2\alpha} \to \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Dim}(U_{-2\alpha}) = 1$$

$$U_{\alpha} \to \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Dim}(U_{\alpha}) = 2$$

Diagonalizable para todo $\alpha \neq 0$

9. Sea la matrtiz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.

b) Usa el apartado anterior para calcular A^{200}

c) Sin efectuar nuevos cálculos, ¿podrías decir si existe la inversa de A?

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(-\lambda)+2\right] = (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$U_1 \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$U_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha+\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{array} \right. \Rightarrow U_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Por lo tanto, la matriz es diagonalizable: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si despejamos A: $A = PDP^{-1}$

Por lo tanto: $A^5 = PD\cancel{P^{-1}P}D\cancel{P^{-1}P}D\cancel{P^{-1}P}D\cancel{P^{-1}P}DP^{-1} = PD^5P^{-1}$

De forma similar:

$$A^{200} = PD^{200}P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 1^{200} & & \\ & 2^{200} & \\ & & 2^{00} \end{pmatrix}$$

10. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.

b) Usa el apartado anterior para calcular A^{2011} y determina (si es posible) A^{-2011}.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda\left((1-\lambda)(-2+\lambda)+2\right)$$

$$= \lambda^2(3-\lambda)$$

$$U_0 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{array} \right\} \quad U_0 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$U_3 \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow U_3 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \Rightarrow A^{2011} = PD^{2011}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3^{2011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3^{2011} \\ 0 & 0 & 3^{2011} \\ 0 & 0 & 3^{2011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{2010} & 3^{2010} & 3^{2010} \\ 3^{2010} & 3^{2010} & 3^{2010} \\ 3^{2010} & 3^{2010} & 3^{2010} \end{pmatrix}$$

A no es invertible, ya que 0 es un valor propio

11. Sea $f\colon \mathbb{Z}_{13}^3 \to \mathbb{Z}_{13}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z) = (7x + 12y + 4z, x + 6y + 3z, 5x + 6y + 12z)$$

a) Halle la matriz A de la aplicación f respecto de la base canónica.

b) Estudie si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, halle una base de vectores propios.

c) Calcule A^{2431} y $f^{2432}(1,2,3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 4 \\ 1 & 6-\lambda & 3 \\ 5 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 4 \\ 1 & 6-\lambda & 3 \\ 0 & 2+5\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2+5\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2+5\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)(\cancel{-18} - 3\lambda + \lambda^2 \cancel{-6} - 15\lambda) + 7 + 6\lambda =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) + 7 + 6\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 5 + 6t$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 8t + 6 \underset{\text{Ruffini}}{=} -(\lambda+3)(\lambda^2 + 2\lambda - 2)$$

$6 = 1\cdot 6 = 2\cdot 3 = 4\cdot 8$

$$= -(\lambda+3)^2(\lambda-5)$$

```
zn_mult_table(13);
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$$\mathcal{U}_{-3} \sim A+3I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{nul}(A+3I) = 2 = m_{-3}$$

$$\mathcal{U}_5 = A-5I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{nul}(A-5I) = 1 = m_5$$

$$\mathcal{U}_{-3} \sim \quad u_1 - 4u_2 + 3u_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 4\alpha - 3\beta \\ u_2 = \alpha \\ u_3 = \beta \end{cases}, \quad \mathcal{U}_{-3} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathcal{U}_5 \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \cancel{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} u_1 = 2\alpha \\ u_2 = -5\alpha \\ u_3 = \alpha \end{cases} \quad \mathcal{U}_5 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot 9 = 18 = 5$$

Base de vectores propios: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$A = Q D Q^{-1} \Rightarrow A^{2431} = Q D^{2431} Q^{-1}$$

$$A^{2431} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3^{2431} & & \\ & -3^{2431} & \\ & & 5^{2431} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$2431 = 202 \cdot 12 + 7 \qquad 3^{2431} = (3^{12})^{202} \cdot 3^7 \equiv 3^7 \pmod{13}$$

$$\equiv 3 \pmod{13}$$

$$5^{2431} = (5^{12})^{202} \cdot 5^7 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^{2431} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A^{2431} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

12. Demuestra las siguientes propiedades:

a) Si λ es un valor propio de una matriz A inversible, entonces $\lambda \neq 0$ y $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

b) Si λ es un valor propio de una matriz A, entonces λ^2 es un valor propio de A^2. En general, λ^n es un valor propio de A^n.

¿Cuáles son los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^9$?

---

a) Si $\lambda = 0$ es un valor propio de A, entonces A no es inversible. Por lo tanto, si A es inversible, $\lambda = 0$ no es valor propio.

Supongamos que $\lambda \neq 0$ es valor propio de A

$$A v = \lambda v \qquad v \in U_\lambda$$

$$A^{-1} A v = A^{-1}(\lambda v)$$

$$v = \lambda A^{-1} \cdot v$$

$$A^{-1} \cdot v = \frac{1}{\lambda} v$$

Por lo tanto, $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}

b) Sea λ un valor propio de A

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \qquad v \in U_\lambda$$

$$A \cdot A \cdot v = A(\lambda \cdot v)$$

$$A^2 v = \lambda (A v) = \lambda (\lambda v) = \lambda^2 \cdot v$$

Por lo tanto, λ^2 es valor propio de A^2

En general λ^n es valor propio de A^n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$ $\lambda_4 = 2$

Por lo tanto, 1, -1, -2^9 y 2^9 son valores propios de A^9