E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2022/2023

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de ejercicios del tema 2

1. Estudia cada uno de los sistemas siguientes y halla todas las soluciones (si existen) usando el método de eliminación de Gauss y usando el método de reducción de Gauss-Jordan

$$(1)\quad \begin{cases} 3x-4y+6z &= 7\\ 5x+2y-4z &= 5\\ x+3y-5z &= 3 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x+y-z &= 3\\ 2x-y+4z &= 3\\ 3x+2y-z &= 8 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x-y+2z-t &= 0\\ 2x+y-z+t &= 4\\ -x+2y+z-2t &= -2\\ 3x-y-3z+t &= 1 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} x+y+z-t &= 0\\ 2x+3y-z-3t &= 0\\ -3x-2y-2z+4t &= 0\\ 4x+2y+5z-2t &= 1 \end{cases}$$

2. Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas, en función del parámetro α, y resuélvelo cuando sea posible

$$(1)\quad \begin{cases} x+2y+4z-3t &= 2\\ 3x+7y+5z-5t &= 3\\ 5x+12y+6z-7t &= \alpha \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x+y-z &= 1\\ 3x+\alpha y+\alpha z &= 5\\ 4x+\alpha y &= 5 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha x+y+z &= 1\\ x+\alpha y+z &= \alpha\\ x+y+\alpha z &= \alpha^2 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} x+y+z &= 2\\ x+3y+2z &= 5\\ 2x+3y+(\alpha^2-1)z &= \alpha+1 \end{cases}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 &+& x_2 &+& x_3 &=& 1\\ 2x_1 &+& 2x_2 &+& (1+\alpha^2)x_3 &=& 2\alpha\\ x_1 &+& &+& (1-\alpha)x_3 &=& -\alpha\\ x_1 &+& x_2 &+& \alpha^2 x_3 &=& \alpha \end{cases}$$

   a) Estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución.

   b) Resuelve el sistema para algún valor de α encontrado en el apartado anterior.

4. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}, \quad a_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n\\[2ex] x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \alpha, \end{cases}$$

   a) Utilizando el método de Gauss clasifícalo para $n = 4$.

   b) Generaliza el resultado para cualquier n.

5. Halla los valores de a y b tales que el siguiente sistema homogéneo tenga soluciones no triviales.

$$\begin{cases} x-ay+z=0\\ x-y-z=0\\ 2x-y-bz=0\\ y+z=0 \end{cases}$$

6. Determina, si existe, la inversa de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Estudia si es posible encontrar valores para los parámetros α y β tales que tenga solución la ecuación matricial $AX = 2X + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 3 & 5 & \alpha \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

8. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema en $\mathbb{Z}_3$, en función del parámetro β, y resuélvelo cuando sea posible

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & & = 1 \\ x & + & \beta y & & = \beta \\ & & & \beta z & = 2\beta + 1 \end{array} \right\}$$

9. Se considera la matriz de verificación de paridad

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Utilizando el método de Gauss, resuelve en $\mathbb{Z}_2$ el sistema de ecuaciones lineales $x\mathcal{H} = 0$ siendo $x = (x_1, ..., x_5)$ y da explícitamente el conjunto de todas las soluciones.

   b) Encuentra el código de grupo utilizando la matriz generadora $\mathcal{G}$ asociada a $\mathcal{H}$.

   c) Analiza el código anterior en términos de la detección y corrección de errores.