# TEMA 7: ESPACIOS EUCLÍDEOS

## PRODUCTO ESCALAR

$$\vec{u}\cdot\vec{v}\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\\(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\\\vec{u}(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\vec{u}\cdot\vec{v}_1+\vec{u}\cdot\vec{v}_2\end{cases}$$

Norma = longitud

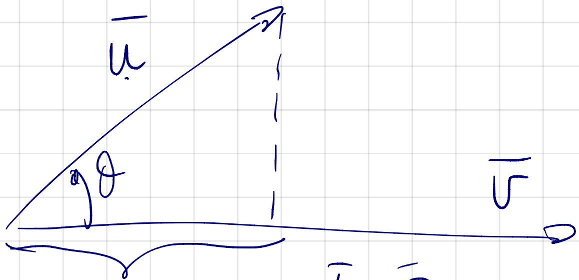
$$\|\bar{v}\|=\sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}}$$

Distancia:

$$d(\bar{u},\bar{v})=\|\bar{u}-\bar{v}\|$$

Ángulo:

$$\cos\theta=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|}$$



$$\|\bar{u}\|\cdot\cos\theta=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\Longrightarrow\underbrace{\|\bar{u}\|\cdot\cos\theta\cdot\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\bar{v}}_{\text{Proyección de u sobre v}}$$

- Complemento ortogonal
- Proyección ortogonal
- Descomposición ortogonal
- Bas Ortogonal y Ortonormal: Método de Gram-Schmidt

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Halla un vector unitario ortogonal al subespacio $\mathcal{W}$ generado por el sistema de vectores

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---

Buscamos $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tal que: $x \cdot w_1 = 0$, $x \cdot w_2 = 0$, $x \cdot w_3 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ -x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -3\alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$W^{\perp} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, un vector unitario en $W^{\perp}$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{9+1+1}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

*a*) Halla una base del complemento ortogonal de $\mathcal{U}$ y sus ecuaciones cartesianas.

*b*) Dado el vector $\vec{v} = (2,0,1,0)^t$, halla vectores $\vec{v}_1 \in \mathcal{U}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{U}^\perp$ tales que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

---

a) Buscamos los vectores $\bar{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ tales que

$$\begin{aligned}
\bar{x}\cdot\bar{v}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\\
\bar{x}\cdot\bar{v}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\\
\bar{x}\cdot\bar{v}_3 &= x_1 + x_3 = 0\\
\bar{x}\cdot\bar{v}_4 &= 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&0&1&0\\3&-2&3&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-3&0&-3\\0&-1&0&-1\\0&-5&0&-5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}x_1&=-\alpha\\x_2&=-\beta\\x_3&=\alpha\\x_4&=\beta\end{aligned}\right.$$

$$\mathcal{U}^{T} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Obsérvese que el mismo proceso de Gauss-Jordan nos permite decir que:

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

---

$$\begin{pmatrix}-1&0&x_1\\0&-1&x_2\\1&0&x_3\\0&1&x_4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1&0&x_1\\0&-1&x_2\\0&0&x_1+x_3\\0&1&x_4\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c}-1&0&x_1\\0&-1&x_2\\\hline 0&0&x_1+x_3\\0&0&x_2+x_4\end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{U}^\perp \equiv \left\{\begin{aligned}x_1+x_3&=0\\x_2+x_4&=0\end{aligned}\right.$$

ⓑ

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_2}\right) \qquad \mathcal{U}^{T} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$v = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Hemos encontrado una base ortogonal de $\mathcal{U}$, que podemos usar para halla la proyección de $v$ sobre $\mathcal{U}$:

$$\text{proy}_{\mathcal{U}}(v) = \frac{v \cdot u_1}{u_1 u_1} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$v \cdot u_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 3; \quad v \cdot u_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = 0; \quad u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = 2$$

$$v_1 = \text{proy}_{\mathcal{U}}(v) = \frac{3}{2} u_1 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\0\\3/2\\0\end{pmatrix}$$

$$v_2 = v - \text{proy}_{\mathcal{U}}(v) = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3/2\\0\\3/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\\0\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}3/2\\0\\3/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}3/2\\0\\3/2\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

3. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual se consideran los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rl} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_2 - x_3 & = 0 \end{array} \right\}, \quad \mathcal{U}_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + ax_2 + bx_3 = 0\}$$

*a*) Calcula los valores de $a$ y $b$ para que $\mathcal{U}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{U}_2$.

*b*) Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{U}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{U}_2$ tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

---

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{array} \Rightarrow \mathcal{U}_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -ax_2 - bx_3 \quad \begin{array}{|l} x_1 = -a\alpha - b\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{array} \Rightarrow \mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -b + 2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

Por lo tanto, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son ortogonales si $a=1, b=2$

b) Para $a=1$, $b=2$, usamos el método de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $\mathcal{U}_2$ a partir de la base

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 - \text{proy}_{u_1}(u_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1} \cdot \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2$$

Por lo tanto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Finalmente, normalizamos para obtener la base ortonormal

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

4. En el espacio $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, halla una base ortonormal para el subespacio $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No sabemos si $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ es una base, así que en primer lugar determinamos una base a partir de este sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

No es necesario, pero así conseguimos vectores más simples

Para aplicar Gram-Schmidt, elegimos un vector cualquiera de los tres de la base como primer vector:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para el segundo vector elegimos otro vector de la base inicial y le restamos su proyección sobre $w_1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathrm{proy}_{w_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Como segundo vector podemos tomar cualquier vector en la dirección de $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})^t$, así que consideramos

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para el tercer vector, restamos al vector restante del sistema inicial su proyección sobre $L(w_1, w_2)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix} - \frac{-3}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{-3}{6}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\3/2\\3/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Tomamos $w_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Comprobamos que $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es ortogonal

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix} = 1-1=0; \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = -1+1=0; \quad \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = 2-1-1=0$$

Finalmente normalizamos cada vector para obtener una base ortonormal:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\}$$

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la forma $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida:

$$\varphi(\vec{x},\vec{y}) = 4x_1y_1 + 2x_3y_1 + 6x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_3$$

*a*) Estudia si es un producto escalar. Determina, si es posible, una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^t A\vec{y}$.

*b*) En caso afirmativo, halla una base ortonormal respecto de este producto escalar a partir de la base canónica.

---

a) Observemos que:

$\varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ es el coeficiente de $x_i \cdot x_j$, ya que el resto de los sumandos se anula

$$\underbrace{\bar{e}_i^t A}_{\text{fila } i\text{-ésima de } A} e_j = a_{ij}$$

elemento j-ésimo de la fila

Por lo tanto, $A = \left(\varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)\right)_{n\times n}$ y por la propiedad de bilinealidad:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^t A \bar{y}$$

Para que ésta aplicación sea producto escalar, debe ser conmutativa, y por lo tanto A debe ser simétrica

$$\bar{x}^t A \bar{y} = \bar{y}^t A x = (\bar{y}^t A x)^t = \bar{x}^t A^t \bar{y} \Rightarrow A = A^t$$

Para la función del enunciado: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

lo comprobamos

$$\bar{x}^t A y = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (4x_1+2x_3,\ 6x_2,\ 2x_1+4x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4x_1y_1 + 2x_3y_1 + 6x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_3 = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

Por lo tanto, es producto escalar, puesto que $A$ es simétrica

(5) Tenemos que aplicar el método de Gram-Schmidt sobre la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

usando el producto $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$

$$w_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 - \frac{\varphi(e_2 e_1)}{\varphi(e_1 e_1)} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \implies w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 - \frac{\varphi(e_3 e_1)}{\varphi(e_1 e_1)} e_1 - \frac{\varphi(e_3 e_2)}{\varphi(e_2 e_2)} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es ortogonal respecto de $\varphi$

Para hallar la base ortonormal, dividimos por la norma

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(e_1 e_1)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \frac{1}{\sqrt{\varphi(e_2 e_2)}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix};\ \frac{1}{\sqrt{\varphi(w_3 w_3)}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(-1\ 0\ 2)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 6)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 \implies \sqrt{\varphi(w_3 w_3)} = 2\sqrt{3}$$

6. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[t]$ con el producto escalar $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$:

*a*) Calcula el ángulo que forman $p(t) = t + 3$ y $q(t) = 2t + 4$

*b*) Determina los valores de $\alpha$ tales que $p(t) = t + \alpha$ y $q(t) = t - \alpha$ son ortogonales.

---

a

$$\cos\theta = \frac{\langle p, q\rangle}{\sqrt{\langle p, p\rangle \langle q, q\rangle}}$$

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 (t+3)(2t+4)\,dt = \int_0^1 (2t^2 + 10t + 12)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 5t^2 + 12t\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} + 5 + 12 = \frac{53}{3}$$

$$\langle p, p\rangle = \int_0^1 (t+3)^2 dt = \left.\frac{(t+3)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$$

$$\langle q, q\rangle = \int_0^1 (2t+4)^2 dt = \left.\frac{(2t+4)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{6^3}{6} - \frac{4^3}{6} = \frac{76}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{53/\cancel{3}}{\sqrt{\frac{37}{\cancel{3}} \cdot \frac{76}{\cancel{3}}}} = \frac{53}{37 \cdot 76} = \frac{53}{2812}$$

$$\theta \approx 88{,}92^\circ$$

b

$$\langle t+\alpha, t-\alpha\rangle = \int_0^1 (t^2 - \alpha^2)\,dt = \left.\frac{t^3}{3} - \alpha^2 t\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \alpha^2$$

$$(t+\alpha) \perp (t-\alpha) \iff \frac{1}{3} - \alpha^2 = 0 \iff \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

7. En $\mathbb{R}_2[t]$ se considera el producto escalar $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base estándar $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$.

---

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = t - \frac{1/2}{1} \cdot 1 = t - \frac{1}{2}$$

$$u_3 = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle t^2, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = t^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}\left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right)dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{3\cdot 8} = \frac{1}{12}$$

$\left\{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}$ es una base ortogonal

$$\left\langle t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2}\right\rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{3\cdot 8} = \frac{1}{12}$$

$$\left\langle t^2 - t + \frac{1}{6}, t^2 - t + \frac{1}{6}\right\rangle = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}$$

Base ortonormal:

$$\left\{1, \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\right\}$$

7. En $\mathbb{R}_2[t]$ se considera el producto escalar $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base estándar $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$.

---

También podemos hacerlo usando la matriz del producto:

$\langle 1,1\rangle = \int_0^1 dt = 1$

$\langle 1,t\rangle = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ | $\langle t,t\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$

$\langle 1,t^2\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ | $\langle t,t^2\rangle = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$ | $\langle t^2,t^2\rangle = \int_0^1 t^4 d = \frac{1}{5}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$u_1 = 1$

$$u_2 = t - \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = t - \frac{1/2}{1}\cdot 1 = t - \frac{1}{2}$$

$$u_3 = t^2 - \underbrace{\frac{\langle t^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}}\cdot 1 - \frac{\langle t^2,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle} u_2 = t^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}\left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

Coeficientes de A, no es necesario volver a calcularlos

$$\langle t^2,u_2\rangle = (0,0,1)\,A\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\langle u_2,u_2\rangle = \left(-\tfrac{1}{2},1,0\right)A\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(0\ \tfrac{1}{12}\ \tfrac{1}{12}\right)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}$$