Tema 4: Cálculo de Probabilidades

Sucesos aleatorios. Probabilidad

Departamento Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Curso 2020-2021

Experimento aleatorio

Un experimento científico puede ser:

- **Determinista:** Si se repite en las mismas circunstancias, siempre da el mismo resultado.
  Ejemplo: si calentamos agua a altas temperaturas sabemos que el agua hervirá a partir de cierta temperatura.
- **Aleatorio:** Si se repite en las mismas circunstancias puede dar resultados diferentes. El conjunto de resultados posibles se encuentra predeterminado.
  Ejemplo: si lanzamos una moneda no sabemos si saldrá cara o cruz.

Espacio muestral

Definición

- *Llamamos* **espacio muestral (E)** *de un experimento aleatorio al conjunto de los resultados posibles. Es decir, es el conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio.*
- *Llamamos* **suceso aleatorio** *a un subconjunto A del espacio muestral.* $(A \subset E)$ $(A \in \mathcal{P}(E) = \{\textit{Espacio de sucesos}\})$

Tipos de espacio muestral

- Finito: Extraer una carta al azar de una baraja española. El espacio muestral será finito y tendrá 40 elementos.

  $E_1 =$
  $\{(1,O),(2,O),(3,O),(4,O),(5,O),(6,O),(7,O),(S,O),(C,O),(R,O),$
  $(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C),(7,C),(S,C),(C,C),(R,C),$
  $(1,E),(2,E),(3,E),(4,E),(5,E),(6,E),(7,E),(S,E),(C,E),(R,E),$
  $(1,B),(2,B),(3,B),(4,B),(5,B),(6,B),(7,B),(S,B),(C,B),(R,C)\}$
- Infinito numerable: Lanzar una moneda hasta la primera aparición de 'cara'.
  El espacio muestral será $E_2 = \{C, FC, FFC, FFFC, \ldots\}$, donde F='cruz' y C='cara'.
- Infinito no numerable. Tiempo transcurrido hasta la llegada de una llamada de teléfono
  El espacio muestral será $E_3 = [0, \infty)$.

Concepto de suceso. Ejemplos

Un suceso será cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

- Para el primer experimento:
  A:'Sacar menos de 3'
  $\{(1,O),(2,O),(1,C),(2,C),(1,E),(2,E),(1,B),(2,B)\}$

  B:'sacar oros'
  $\{(1,O),(2,O),(3,O),(4,O),(5,O),(6,O),(7,O),(S,O),(C,O),(R,O)\}$
  C:'sacar un 7'
  $\{(7,O),(7,C),(7,E),(7,B)\}$
- Para el segundo experimento: A: 'Lanzar 5 veces'
  $\{FFFFC\}$,
  B:'Haber obtenido al menos 3 cruces'
  $\{FFFC, FFFFC, \ldots,\}$.
- Para el tercer experimento: A: 'Recibir la llamada antes de 3 minutos'; B:'Tardar más de 5 horas'

Tipos de sucesos

- Un **suceso elemental** es aquél que corresponde a un resultado simple del experimento, no pudiendo dividirse en otros. P. ej.: 'Sacar el as de oros' en una extracción de la baraja.
- Un **suceso compuesto** está formado por varios simples. P. ej.: 'Sacar as' se compone de 'as de oros', 'as de copas', 'as de espadas' y 'as de bastos'.
- El **suceso seguro (E)** es aquél que sabemos que ocurrirá siempre al realizar el experimento. P. ej. 'Salir menos de 7' al lanzar un dado. E=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Llamamos **suceso imposible ($\emptyset$)** al suceso que nunca ocurrirá. P.ej.: 'Salir par e impar' al lanzar un dado.

Operaciones con sucesos

Definición

- *Llamamos* **unión de los sucesos A y B** *al suceso que sucede cuando ocurre A, o cuando lo hace B (alguno de los dos) y se denota por* $(A \cup B)$. (OR)
- *Llamamos* **intersección de los sucesos A y B** *al suceso que se produce cuando ocurre A, y conjuntamente sucede B y se denota por* $(A \cap B)$. (AND)
- *Llamamos* **suceso contrario o complementario** *del suceso A, al suceso que ocurre cuando no sucede A y se denota por* $(\bar{A})$.

Ejemplo

Se lanza un dado y se consideran los sucesos:

A: 'Obtener un número par' $\Rightarrow A=\{2,4,6\}$
B:'Obtener menos de 3' $\Rightarrow B=\{1,2\}$

Entonces:

- $A \cup B=\{1,2,4,6\}$
- $A \cap B=\{2\}$
- $\bar{A}$:*'Obtener un número impar'*$\Rightarrow \bar{A}=\{1,3,5\}$
- $\bar{B}$:*'Obtener un número mayor o igual a 3'* $\Rightarrow \bar{B}=\{3,4,5,6\}$

Álgebra de Boole de sucesos

El espacio de sucesos E con las operaciones unión, intersección y complementario es un álgebra de Boole. Pero existen subconjuntos $\mathcal{A}$ de E que también lo son.

Definición

Decimos que una familia de sucesos $\mathcal{A} = \{A_i\}$, *es un* **álgebra de Boole** *si y solo si verifica:*

1. $E \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{A}$

σ-álgebra de Boole de sucesos

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, el axioma 3 indica que la unión finita de sucesos del álgebra es un suceso del álgebra, pero no podemos pasar al caso infinito numerable. Cuando sí se puede, tenemos el concepto de σ-álgebra de Boole.

Definición

Decimos que una familia de sucesos $\mathcal{A} = \{A_i\}$, es un **σ-álgebra de Boole** *si y solo si verifica:*

1. $E \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathcal{I})$, *entonces* $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$. *Siendo* $\mathcal{I}$ *un conjunto finito o infinito numerable.*

Álgebra y σ-álgebra de Boole de sucesos

Ejemplo

Si sacamos un número aleatorio en [0,1], podemos considerar la familia $\mathcal{A}$ de sucesos formada por el suceso imposible $\emptyset$ y los sucesos "obtener un valor en el conjunto A_i donde A_i es unión finita de intervalos con extremos racionales e incluidos en [0,1]. ¿Será $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole? ¿Será $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de Boole? .

Solución-ejemplo

Veamos que es un álgebra de Boole:

1: Es evidente que $E = [0, 1] \in \mathcal{A}$.

2: El complemento de una unión finita de intervalos, también lo es y sus extremos son racionales.

Ejemplo: $A = [0.1, 0.2) \cup (0.3, 0.5)$ tiene por complemento $\bar{A} = [0, 0.1) \cup [0.2, 0.3] \cup [0.5, 1]$

3: La unión de 2 elementos de la familia es unión de intervalos.

Ejemplo: $B = [0, 0.2) \cup [0.35, 0.7]$ y $A \cup B = [0, 0.2) \cup (0.3, 0.7]$ que es unión de intervalos de extremos racionales.

Por tanto **es un álgebra de Boole**.

Ejemplo-cont.

Pero si consideramos intervalos de la forma $C_i = \left[\frac{1}{c_i}, 1\right]$ donde c_i es la representación de $\sqrt{2}$ con i decimales, sabiendo que $i \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo: la representación de $\sqrt{2}$ con 3 decimales, sería $c_3 = 1.414$.

Tenemos entonces que los $C_i \in \mathcal{A}$ y están formados por un intervalo de extremos racionales que está incluido en [0,1].

Sin embargo $\bigcup_i C_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \notin \mathcal{A}$ (tiene extremo no racional).

No es un σ-álgebra de Boole.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra o un σ-álgebra de sucesos diremos que se trata de un **espacio probabilizable** y tiene las propiedades:

- El suceso imposible pertenece al álgebra, es decir: $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Podemos definir la intersección de sucesos como: $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.
- **Asociativa:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- **Commutativa:** $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
- **Idempotente:** $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- **Simplificativa:** $(A \cup B) \cap A = A, \quad (A \cap B) \cup A = A$
- **Existencia de ínfimo:** $\exists\, \emptyset, \forall A : A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- **Existencia de supremo:** $\exists E, \forall A : A \cup E = E, \quad A \cap E = A$

Otras Propiedades

- **Existencia de complementario:**
  $\forall A, \exists \bar{A} : A \cup \bar{A} = E, \; A \cap \bar{A} = \emptyset$
- **Distributivas:**
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Leyes de Morgan:**
  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- **Doble complementario:** $\bar{\bar{A}} = A$
- **Definición de diferencia:** $A - B = A \cap \bar{B}$
- **Diferencia simétrica:** $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Definición axiomática de Probabilidad

Sea E un espacio muestral y $\mathcal{A}$ un álgebra o σ-álgebra de sucesos, diremos que $(E, \mathcal{A})$ es un espacio probabilizable.

Definición

Sea $(E, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable, diremos que una función $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ es una **función de probabilidad** *si y solo si verifica:*

- *Para todo $A \in \mathcal{A}$ se verifica $P(A) \geqslant 0$.*
- $\mathrm{P(E) = 1}$
- *Para todo conjunto $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ verificando $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, se verifica:* $\mathrm{P}(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathcal{I}} \mathrm{A_i}) = \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{I}} \mathrm{P(A_i)}$

A la terna $(E, \mathcal{A}, P)$ se le denomina ***espacio de probabilidad****.*

Consecuencia: Como consecuencia si E es un conjunto finito (o infinito numerable) y conocemos la probabilidad para cada suceso elemental, conocemos la de cualquier suceso.

Propiedades

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

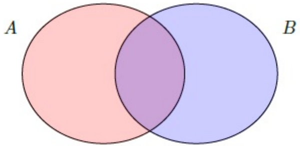

Diagrama de Venn de la unión de sucesos

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Ejemplo

Podemos asignar diferentes funciones de probabilidad a un mismo espacio muestral.
Por ejemplo: Consideremos como resultados simples $E = \{1, X, 2\}$.

- $P(\{1\}) = P(\{X\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{3}$
- $P(\{1\}) = 0.5, \qquad P(\{X\}) = P(\{2\}) = 0.25$
- $P(\{1\}) = 0.5, \qquad P(\{X\}) = 0.3, \qquad P(\{2\}) = 0.2$

La probabilidad del suceso $A = \{1, X\}$ quedaría determinada en cada caso por:

- $P(A) = \frac{2}{3}$, ya que $P(A) = P(\{1\}) + P(\{X\}) - P(\{1\} \cap \{X\})$
- $P(A) = 0.75$
- $P(A) = 0.8$

Ejemplo-Continuación

No cualquier función de $\mathcal{P}$(E) en $[0,1]$ es una función de probabilidad.

Siendo $E = \{1, X, 2\}$ consideremos los sucesos $A = \{1, X\}$, $B = \{X, 2\}$ y una función tal que $P(A) = 0.4$ y $P(B) = 0.5$.

Se puede demostrar que no puede ser una función de probabilidad. Sabemos que:

$$P(\bar{A}) = P(\{2\}) = 1 - P(A) = 0.6$$

$$P(B) = P(\{X\}) + P(\{2\}) - P(\{X\} \cap \{2\}) = 0.5$$

$$0.5 = P(\{X\}) + 0.6 \Rightarrow P(\{X\}) = -0.1$$

Definición clásica-frecuentista de probabilidad

Definición

Dado un suceso A del espacio muestral E de un experimento aleatorio. Si realizamos N veces el experimento y contabilizamos el número de veces que ha ocurrido A (que denotamos por n_A), la frecuencia relativa de A será: $f_A = \dfrac{n_A}{N}$.

Llamamos **probabilidad del suceso A** *al límite de la frecuencia relativa de A cuando N tiende a infinito, es decir:*

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} f_A = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

Definición clásica-frecuentista de probabilidad. Regla de Laplace

Partimos de dos condiciones:

- Tenemos un álgebra con **sucesos elementales equiprobables**.
- El número de resultados del experimento es finito.

Podremos obtener la probabilidad de un suceso A como:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Número sucesos favorables}}{\text{Número sucesos posibles}}$$

Ejemplo

Ejemplo 1: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de la baraja española que sea inferior a 4?

Solución:

- Sucesos posibles: 40
- Sucesos favorables: 12

Por tanto, aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{12}{40} = 0.3$$

Ejemplo

Ejemplo 2: Si extraemos simultáneamente dos bolas de una urna que contiene 5 bolas blancas y 7 bolas rojas ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color?

Solución: Primero definimos los sucesos:

B: 'Extraer simultáneamente dos bolas blancas'

R: 'Extraer simultáneamente dos bolas rojas'

$$P(B) = \frac{C_{5,2}}{C_{12,2}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{10}{66} \qquad P(R) = \frac{C_{7,2}}{C_{12,2}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{21}{66}$$

Entonces $P(B \cup R) = P(B) + P(R) - P(B \cap R) = \frac{10}{66} + \frac{21}{66} = \frac{31}{66}$

Probabilidad condicionada

Definición

Sea un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ y sea A un suceso cualquiera, tal que $P(A) \neq 0$. Para cualquier suceso $B \in \mathcal{A}$ definimos la **probabilidad de B condicionada a A** *como:*

$$P_A(B) = \mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$$

A y B son independientes $\Longleftrightarrow$ $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$

(Da igual B, que la probabilidad de B no cambia)

A y B son independientes $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap B) &= P(A/B) \cdot P(B) \end{aligned}\right\} \; P(A) \cdot P(B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Veamos que:

$$P_A(B) = \mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

es una probabilidad.

1. Es un cociente de números no negativos y $(A \cap B) \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$, por lo que a cada suceso B le asigna un valor en [0,1].
2. $P(E/A) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(A)} = 1$, ya que $A \cap E = A$.
3. Si $B \cap C = \emptyset \Rightarrow P((B \cup C)/A) = P(B/A) + P(C/A)$ pues:

$$\frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$$

Independencia de sucesos

Definición

Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$. Decimos que el suceso A es independiente del suceso B si y solo si

$$\mathrm{P(A/B) = P(A)}$$

Propiedades:

- Si A es independiente de B, entonces B es independiente de A. En general decimos que A y B son **sucesos independientes**.
- Si A y B son independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

  Nótese que:

  $$P(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo:

Hallar la probabilidad de sacar de una baraja española 3 cartas sin reemplazamiento y obtener:

1. As, Rey y Caballo en este orden.
2. Un as, un rey y un caballo.
3. Obtener 3 ases.
4. Obtener 2 oros y 1 copa.

Soluciones:

Llamamos:
A_i= "sacar un as en la extracción i-ésima"
R_i= "sacar un rey en la extracción i-ésima"
O_i= "sacar un oro en la extracción i-ésima"
C_i= "sacar un caballo en la extracción i-ésima"
Co_i= "sacar una copa en la extracción i-ésima"

Ejemplo-Continuación

1: Un as, rey y un caballo en este orden.

$$P(A_1 \cap R_2 \cap C_3) = P(C_3/A_1R_2) \cdot P(A_1R_2) \text{ y } P(A_1R_2) = P(R_2/A_1) \cdot P(A_1)$$

$$P(A_1R_2C_3) = P(C_3/A_1R_2) \cdot P(R_2/A_1) \cdot P(A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}$$

2: Un as, un rey y un caballo.

$$P(\{A_1R_2C_3 \cup A_1C_2R_3 \cup R_1A_2C_3 \cup R_1C_2A_3 \cup C_1A_2R_3 \cup C_1R_2A_3\}) = 6 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}$$

3: Obtener 3 ases.

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3/A_1A_2) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$$

4: Obtener 2 oros y 1 copa.

$$P(\{O_1O_2Co_3 \cup O_1Co_2O_3 \cup Co_1O_2O_3\}) = 3 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{38}$$

Sistema completo de sucesos

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *un conjunto de sucesos. Decimos que* $\mathcal{C}$ *es un* **conjunto completo de sucesos** *si y solo si se verifican:*

1. *Para todo* $i \neq j$, *se verifica que* $C_i \cap C_j = \emptyset$. *Es decir,* C_i *y* C_j **son sucesos disjuntos:** (un suceso y su contrario $A, \bar{A}$)
2. $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} C_i = E$. *Es decir, la unión de sucesos 'cubre' todo E.*

Teorema de la probabilidad total

Teorema

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ *un sistema completo de sucesos, tal que para todo* $i \in \mathcal{I}$, $P(C_i) > 0$. *Si* $B \in \mathcal{A}$ *entonces:*

$$\boxed{P(B) = \sum_{i \in \mathcal{I}} P(B/C_i) \cdot P(C_i)}$$

$$\boxed{P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/\bar{B})\ P(\bar{B})} \rightarrow$$

Ejemplo

PROBABILIDAD DE APROBAR
mujeres : 70% $P(Ap/\bar{H})$
hombres : 55% $P(Ap/H)$

CUÁNTA GENTE HAY
mujeres : 20%
hombres : 80%

H = hombre
$\bar{H}$ = mujer
Ap = Aprobar

$0{,}55 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}2$

$P(Ap) = P(Ap/H) \cdot P(H) + P(Ap/\bar{H}) \cdot P(\bar{H})$.

Probabilidad de aprobar (en general)

Ejemplo

Tres máquinas A, B y C producen condensadores. La máquina A produce el 30 %, la B el 50 % y la C el 20 % restante. Se estima que A produce un 0.003 % de defectuosos, B el 0.002 % y C el 0.006 %. Hallar la probabilidad de:

1. Producir un condensador defectuoso.
2. Los condensadores son empaquetados en lotes de 4, todos ellos producidos por la misma máquina. Hallar la probabilidad de que de un lote al azar obtengamos alguno defectuoso.

Solución: Definamos los sucesos:

A: 'Condensador producido por la máquina A'

B: 'Condensador producido por la máquina B'

C: 'Condensador producido por la máquina C'

D: 'Condensador defectuoso'.

Ejemplo-Continuación

Además del enunciado sabemos que:

$P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(C) = 0.2$

$P(D/A) = 3 \cdot 10^{-5}, P(D/B) = 2 \cdot 10^{-5}$ y $P(D/C) = 6 \cdot 10^{-5}$

1. $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)$

   $P(D) = 3(10)^{-5} \cdot (0.3) + 2(10)^{-5} \cdot (0.5) + 6(10)^{-5} \cdot (0.2)$

   $P(D) = 0.000031$

2. Llamamos $D_i =$ "condensador i-ésimo defectuoso del lote ". Por tanto: $P(\text{Alguno defectuoso en el lote}) = 1 - P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)$

   De los datos podemos deducir que:

   $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)/A) = (0.99997)^4$, $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)/B) = (0.99998)^4$, $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)/C) = (0.99994)^4$

   $\Rightarrow P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4) = P(A) \cdot P((\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)/A) + P(B) \cdot P((\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)/B) + P(C) \cdot P((\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)/C)$

   $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4) = (0.3) \cdot (0.99997)^4 + (0.5) \cdot (0.99998)^4 + (0.2) \cdot (0.99994)^4$

   $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4) = 0.999876 \Rightarrow P(\text{Alguno defectuoso en el lote}) = 1 - P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4) = 0.000124$

Teorema de Bayes

→ libro : el teorema que nunca murió.

$* \ P(A/B) = \frac{P(B/A)}{P(B)} P(A)$ → tienes información nueva.

Este teorema te aporta certeza cuando añades información, multiplicando por P(A). Preguntan probabilidad en el sentido contrario al intuitivo.

Teorema

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un sistema completo de sucesos, tal que para todo $i \in \mathcal{I}, P(C_i) > 0$. Si $B \in \mathcal{A}$ es un suceso cualquiera entonces:

$$P(C_j/B) = \frac{P(B/C_j)P(C_j)}{\sum_{i \in \mathcal{I}} P(B/C_i)P(C_i)} = \frac{P(B/C_j)P(C_j)}{P(B)}$$

La idea tras este teorema es que la probabilidad 'a priori' de un suceso C_j, resulta modificada si tenemos una información adicional B. Esta nueva probabilidad 'a posteriori' es $P(C_j/B)$.

$* \ \text{También se escribe: } P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{\underbrace{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}_{P(B) \text{ extendido por Th. de la probabilidad total.}}}$

Ejemplo Teorema de Bayes

Utilizando los datos del ejemplo anterior:

3. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote de condensadores sea de B si sabemos que no hay ningún condensador defectuoso en el lote?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote de condensadores sea de B si sabemos que todos son defectuosos?

Solución:

3. $P(B/\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4) = \dfrac{P(B) \cdot P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4/B)}{P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \bar{D}_4)} = \dfrac{(0.5) \cdot (0.99998)^4}{0.999876} = 0.500022$
4. $P(B/D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4) =$

$$= \frac{P(B)P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4/B)}{P(A)P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4/A) + P(B)P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4/B) + P(C)P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4/C)}$$

$$= \frac{(0.5) \cdot (0.00002)^4}{(0.3) \cdot (0.00003)^4 + (0.5) \cdot (0.00002)^4 + (0.2) \cdot (0.00006)^4} = 0.027444$$

Interpretación del concepto de probabilidad

- La teoría matemática de la probabilidad se desarrolla con el fin de estudiar problemas reales.
- Tradicionalmente la probabilidad se interpreta como una medida de la frecuencia con la que va a ocurrir un determinado suceso en el futuro.

  Por ejemplo, decimos que al lanzar una moneda la probabilidad de que salga cara es 0.5 porque esperamos que salga cara la mitad de las veces que lanzamos la moneda.
- A menudo la teoría de probabilidad también se utiliza como una medida de la confianza que tenemos en que algo pasado haya ocurrido.

La probabilidad como medida de certeza

- Teniendo en cuenta la sintomatología de un paciente, un médico puede llegar a la conclusión de que padezca una determinada enfermedad con un 40 % de probabilidades.
- Esta conclusión no es un hecho futuro que puede o no ocurrir, es un hecho que ya ha ocurrido. Esta persona tiene o no tiene la enfermedad.
- Cuando el médico afirma de que existe un 40 % de probabilidades de que tenga esa enfermedad, se refiere a que con la información que posee dispone de un nivel de certeza de un 40 % de que tenga la enfermedad.

Teorema de Bayes como mecanismo para incorporar información

- Si luego del pronóstico el médico hace una nueva prueba, tendrá un nuevo suceso: el resultado de la prueba.
- Utilizando el Teorema de Bayes, se podría modificar la "probabilidad a priori" del 40 % que tenía el médico, a una nueva probabilidad basada en el resultado de la nueva prueba médica.
- La nueva probabilidad será una "probabilidad a posteriori" que incorpora nueva información.

Ejemplo: Cáncer de mama y mamografías

Supongamos que:

- La probabilidad de padecer cáncer de mama es de un 1 %.
- La sensibilidad de la mamografía es de un 90 %, es decir, el 90 % de las enfermas son detectadas.
- La tasa de falsos positivos es de un 9 %, o sea, el 9 % de las mujeres sanas tienen una mamografía positiva.

Entonces, si a una mujer le detectan un posible cáncer de mama en una mamografía, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Ejemplo: Cáncer de mama y mamografías

Utilicemos el Teorema de Bayes:

- Probabilidad a priori de padecer cáncer de mama: $P(C) = 0.01$.
- Probabilidad de mamografía positiva si se tiene cáncer: $P(M/C) = 0.9$.
- Probabilidad de mamografía positiva si no se tiene cáncer:

  $P(M/\bar{C}) = 0.09$.
- Probabilidad de mamografía positiva:

  $P(M) = P(M/C) \cdot P(C) + P(M/\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) = 0.9 \cdot 0.01 + 0.09 \cdot 0.99 = 0.0981$.
- Probabilidad de que tenga cáncer si tiene una mamografía positiva:

  $$P(C/M) = \frac{P(C) \cdot P(M/C)}{P(M)} = \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.0981} = 0.092.$$

Entonces, la probabilidad de que una mujer tenga cáncer dado que tiene una mamografía positiva es solo del 9,2 %.

Ejemplo: Cáncer de mama y mamografías

Podríamos concluir entonces que:

- De cada 1000 mujeres, 10 tienen cáncer de mama.
- De esas 10, hay 9 que dan positivo.
- De las 990 sanas, 89 dan positivo también.
- De las 98 que dan positivo, solo 9 están enfermas.

Ejemplo: Cáncer de mama y mamografías

- En el ejemplo vemos que la aparición de una nueva evidencia o suceso, modifica la probabilidad a priori del 1 % que se tenía. En este caso, la multiplica por 9.2, obteniéndose una nueva probabilidad a posteriori del 9.2 %.
- Si apareciesen nuevas evidencias, se podría volver a aplicar el Teorema de Bayes para obtener nuevas probabilidades o grados de certeza.
- Otras aplicaciones de este Teorema las podemos encontrar en:
    - Filtros anti-spam: Para averiguar la certeza de que un email sea no deseado.
    - Salvamento marítimo: Averiguar la probabilidad de que un naufragio se haya producido en una determinada zona.