TEMA 6

Espacios Euclídeos

Contenidos

1. Producto Escalar. Espacios euclídeos.
2. Norma de un vector. Distancias.
3. Ángulo entre vectores. Ortogonalidad. Proyección ortogonal. Complemento ortogonal.
4. Bases ortogonales y ortonormales.
5. Método de Gram-Schmidt para ortonormalización.

Prerrequisitos: Los contenidos de los temas anteriores.

Objetivos: Saber reconocer productos escalares en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Saber calcular normas, distancias y ángulos a partir de un producto escalar. Saber calcular proyecciones ortogonales, complementos ortogonales y la descomposición de vectores como suma de vectores ortogonales. Saber utilizar el método de Gram-Schmidt para determinar bases ortogonales y ortonormales de un subespacio vectorial.

6.1. Espacios euclídeos

Los conceptos geométricos de *distancia*, *longitud*, *ángulo* o *perpendicularidad* que conocemos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden generalizar a cualquier espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. El concepto fundamental para ello es el de *producto escalar*.

Definición 6.1.1 (Producto escalar) *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Un* producto escalar *en $\mathcal{V}$ es una función $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ que verifica:*

1. $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{u})$*, es decir, φ es una* forma simétrica.
2. $\varphi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \varphi(\vec{u},\vec{v}) + \varphi(\vec{u},\vec{w})$*;* $\quad\varphi(c\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{u},c\vec{v}) = c\varphi(\vec{u},\vec{v})$*; es decir, φ es una* forma bilineal.
3. $\varphi(\vec{v},\vec{v}) \geq 0$ *para todo* $\vec{v}\in\mathcal{V}$*, y* $\varphi(\vec{v},\vec{v}) = 0$ *si y sólo si* $\vec{v} = \vec{0}$*; es decir, φ es* definida positiva.

Para denotar productos escalares se suelen usar notaciones como

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle, \qquad (\vec{v}\mid\vec{w}), \qquad \vec{v}\cdot\vec{w}$$

Aunque la última la reservaremos para el producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$, que se denomina *producto escalar euclídeo*

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = v_1u_1 + \cdots + v_nu_n$$

Sin embargo, debe quedar claro que este no es el único producto escalar que se puede definir en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 6.1.2 La función $\langle,\rangle\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como

$$\langle\vec{x},\ \vec{y}\rangle = x_1y_1 + 7x_2y_2$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

En general, si $c_i > 0$ para todo $i = 1,\dots,n$, la forma

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = c_1v_1w_1 + c_2v_2w_2 + \dots + c_nv_nw_n$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Es más, si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces la siguiente aplicación es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$:

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = \vec{v}^{\,t}A\vec{w}$$

Si en un espacio vectorial tenemos definido un producto escalar, decimos que es un *espacio vectorial euclídeo.*

Naturalmente, también es posible definir productos vectoriales en espacios distintos de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 6.1.3 Son espacios euclídeos:

1. $(\mathbb{R}_n[t], \langle\ \rangle)$, en donde $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$.

2. $(\mathcal{C}^0[a,b], \langle\ \rangle)$, en donde $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. $\square$

6.2. Norma y distancia

Como ya hemos dicho antes, el producto escalar es el concepto básico que nos permite establecer nociones de distancia y longitud.

Definición 6.2.1 *Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo.*

- *Llamamos* norma *del vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ al número real $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle}$.*

  Si $\|\vec{u}\| = 1$, decimos que $\vec{u}$ vector unitario .

- *Llamamos* distancia *entre dos vectores $\vec{v}, \vec{w}$ al número real $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$.*

Teorema 6.2.2 (Propiedades de la norma) *Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sean $c \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$.*

1. $\|\vec{v}\| = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = 0$

2. $\|c\vec{v}\| = |c|\ \|\vec{v}\|$

3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ *(Desigualdad triangular)*

Estas propiedades también se pueden expresar sobre la operación distancia.

Teorema 6.2.3 (Propiedades de la distancia) *Sean $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores de un espacio euclideo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. Entonces*

1. $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$

2. $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = \vec{w}$

3. $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$

4. $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$ *(Desigualdad triangular)*

Ejemplo 6.2.4 En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar euclídeo, la norma del vector $\vec{v} = (2,2,1)^t$ es

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

Por lo tanto, $\vec{v}$ no es un vector unitario, pero si lo dividimos por su norma, el resultado sí es un vector unitario

$$\|\frac{1}{3}\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{3}\vec{v} \cdot \frac{1}{3}\vec{v}} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \qquad \square$$

El proceso que hemos mostrado en el ejemplo anterior para construir un vector unitario proporcional a un vector $\vec{v}$, se conoce como *normalización* del vector $\vec{v}$, es decir, $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ es el vector *normalizado* de $\vec{v}$.

EJEMPLO 6.2.5 En el espacio euclídeo $(\mathcal{C}^0[0,1], \langle\ \rangle)$ en donde $\langle\ \rangle$ está definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

vamos a hallar la norma de $g(t) = t$:

$$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \int_0^1 g(t)g(t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $\|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\square$

EJEMPLO 6.2.6 La distancia entre los vectores $\vec{v} = (7,1)^t$ y $\vec{w} = (3,2)^t$ en $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea es:

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17} \qquad \square$$

EJEMPLO 6.2.7 Calculemos la distancia entre $f(t) = t$ y $g(t) = t^2$ el espacio euclídeo $(\mathcal{C}^0[0,1], \langle\ \rangle)$:

$$\begin{aligned} d(f,g)^2 = \|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g\rangle = \int_0^1 \big(f(t)-g(t)\big)^2 dt = \\ = \int_0^1 \big(t-t^2\big)^2 dt = \int_0^1 \big(t^2 - 2t^3 + t^4\big)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(f,g) = \frac{1}{\sqrt{30}}$ $\square$

6.3. Ángulo entre vectores. Ortogonalidad

Otra noción asociada al producto escalar es la de *ángulo entre vectores*. Para justificar su definición, necesitamos introducir el siguiente resultado.

TEOREMA 6.3.1 (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ) *Sean $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores de un espacio euclideo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$; entonces*

$$\big|\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle\big| \le \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Por lo tanto, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son nulos, se deduce que

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \leq 1$$

y siempre es posible aplicar la función arcocoseno a la expresión central; el resultado es lo que llamamos ángulo entre los vectores.

Definición 6.3.2 (Ángulo entre dos vectores) *Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores no nulos en un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. El* ángulo *entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define como*

$$\operatorname{ang}(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \in [0, \pi]$$

Ejemplo 6.3.3 En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar euclídeo, el ángulo entre los vectores $\vec{v} = (1, 2, 1, 0^t)$ y $\vec{w} = (0, 1, 0, 1)^t$ es

$$\arccos \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1}} = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \qquad \square$$

Definición 6.3.4 (Ortogonalidad) *Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo.*

- *$\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ se dice que son* ortogonales *si $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, y se denota $\vec{v} \perp \vec{w}$.*
- *Si $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\vec{v}$ es ortogonal a todos los vectores de $\mathcal{W}$, se dice que $\vec{v}$ es* ortogonal *a $\mathcal{W}$, y se denota $\vec{v} \perp \mathcal{W}$.*
- *Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son subespacios de $\mathcal{V}$ y cada vector de $\mathcal{U}$ es ortogonal a cada vector de $\mathcal{W}$, se dice que los subespacios son ortogonales y se denota $\mathcal{U} \perp \mathcal{W}$*

Teorema 6.3.5 (Teorema de Pitágoras) *Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$; entonces:*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \quad \Longleftrightarrow \quad \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

Ejemplo 6.3.6 En el espacio euclídeo $(\mathcal{C}^0[0, 2\pi], \langle\ \rangle)$ las funciones $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ son ortogonales:

$$\langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t dt = \left. \frac{-\cos 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$\square$

Debemos tener en cuenta que la ortogonalidad depende del producto escalar con el que trabajemos. Dos vectores pueden ser ortogonales con respecto a un producto escalar y no serlo con respecto a otro producto.

Por otra parte, como es habitual en espacios vectoriales, el estudio de la ortogonalidad entre subespacios se reduce a trabajar con los vectores de bases.

Ejemplo 6.3.7 Consideremos el espacio $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar euclídeo. Vamos a demostrar que $\vec{v} = (0, 1, 0, -1)^t \in \mathbb{R}^4$ es ortogonal al subespacio $\mathcal{W}$ generado por los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tomemos un vector cualquiera de $\mathcal{W}$, es decir, $\vec{w} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$. Vamos a utilizar las propiedades de bilinealidad del producto escalar para reducir el estudio de ortogonalidad a los vectores generadores:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{v}_1) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{v}_2 + \gamma(\vec{v} \cdot \vec{v}_3)$$

El resultado de esta operación es 0, teniendo en cuenta que cada sumando es 0:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

□

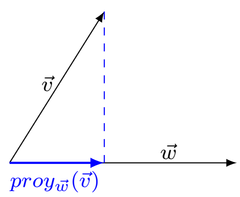
Siempre podremos hacer lo que hemos mostrado en este ejemplo sin tener que indicarlo explícitamente, es decir, si $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_r\}$ una base de un subespacio vectorial $\mathcal{W}$, un vector $\vec{v}$ es ortogonal a $\mathcal{W}$ si y solo si $\vec{v}$ es ortogonal a cada vector de $\mathcal{B}$.

6.4. Proyección ortogonal

Definición 6.4.1 (Proyección ortogonal) *Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$, con $\vec{w} \neq 0$. La* proyección ortogonal *del $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ se define como*

$$\operatorname{proy}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle}{\langle\vec{w}, \vec{w}\rangle}\vec{w}$$

Esta definición se corresponde con la noción geométrica de proyección que conocemos en el plano o en el espacio



La proyección $\text{proy}_{\vec{w}}(\vec{v})$ es el vector en la dirección de $\vec{w}$ y longitud $\|\vec{v}\|\cos\theta$, en donde θ es el ángulo que forman los dos vectores:

$$(\|\vec{v}\|\cos\theta)\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \|\vec{v}\|\frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w} = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle}\vec{w} = \text{proy}_{\vec{w}}(\vec{v})$$

Ejemplo 6.4.2 En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar euclídeo, hallamos la proyección ortogonal de $\vec{v} = (6,2,4)^t$ sobre $\vec{w} = (1,2,0)^t$.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 10, \qquad \vec{w}\cdot\vec{w} = 5$$

Por lo tanto:

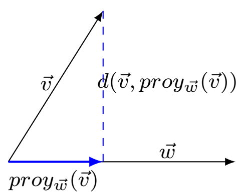
$$\text{proy}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle}\vec{w} = \frac{10}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

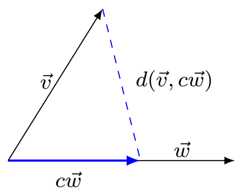
□

Otra forma de definir o ver la proyección de un vector es en términos de distancias. De todos los vectores en la dirección de $\vec{w}$, la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ es el más cercano a $\vec{v}$.

Teorema 6.4.3 (Proyección ortogonal y distancia entre vectores) *Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de un espacio euclídeo $(\mathcal{V},\langle\ \rangle)$ con $\vec{w}\neq 0$; entonces*

$$d(\vec{v},\text{proy}_{\vec{w}}(\vec{v})) < d(\vec{v},c\vec{w}), \qquad \textit{para todo } c$$



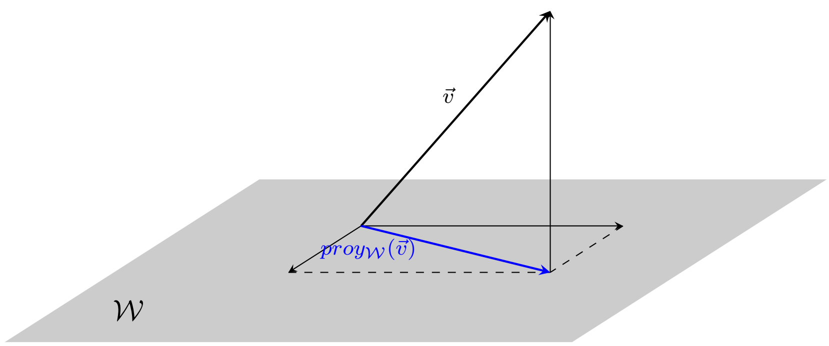


También podemos calcular la proyección de un vector sobre un subespacio, pero para eso debemos conocer previamente una *base ortogonal*, es decir, una base en la cual todos los vectores son ortogonales dos a dos.

Definición 6.4.4 (Proyección ortogonal) *Sea $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\dots,\vec{w}_r\}$ una base ortogonal de un subespacio vectorial $\mathcal{W}$ de un espacio euclídeo $(\mathcal{V},\langle\ \rangle)$. La* proyección ortogonal *de un vector $\vec{v}\in\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$, denotada por* $\text{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v})$ *viene dada por*

$$\text{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v}) = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1 + \frac{\langle\vec{v},\vec{w}_2\rangle}{\langle\vec{w}_2,\vec{w}_2\rangle}\vec{w}_2 + \cdots + \frac{\langle\vec{v},\vec{w}_r\rangle}{\langle\vec{w}_r,\vec{w}_r\rangle}\vec{w}_r$$

Es decir, la proyección ortogonal viene dada por la suma de las proyecciones ortogonales sobre cada uno de los vectores de una base, siempre que esta base sea ortogonal.



Ejemplo 6.4.5 En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar euclídeo, consideramos el vector $\vec{v} = (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$ y el subespacio $\mathcal{W}$ generado por los vectores

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

que son ortogonales entre sí y además son unitarios. La proyección de $\vec{v}$ sobre $\mathcal{W}$ es

$$\text{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_1}{\vec{w}_1\cdot\vec{w}_1}\vec{w}_1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_2}{\vec{w}_2\cdot\vec{w}_2}\vec{w}_2 = 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5})\begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}$$

$\square$

Se puede establecer la misma relación de la proyección ortogonal con la distancia al subespacio que vimos con los vectores: la proyección de un vector sobre un subespacio es el elemento del subespacio más cercano al vector.

6.5. Complemento ortogonal

Definición 6.5.1 (Complemento ortogonal de un subespacio) *Sea $\mathcal{W}$ un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. El* complemento ortogonal *de $\mathcal{W}$, denotado $\mathcal{W}^\perp$ es el subespacio*

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{\vec{x} \in \mathcal{V} \mid \langle\vec{x},\vec{w}\rangle = 0,\ \textit{para todo } \vec{w} \in \mathcal{W}\right\}$$

Teorema 6.5.2 *Sea $\mathcal{W}$ un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$; entonces*

1. *$\mathcal{W}^\perp$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.*

2. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

3. *Si* $\dim(\mathcal{V}) = n$, *entonces* $\dim(\mathcal{W}^{\perp}) = n - \dim(\mathcal{W})$.

Ejemplo 6.5.3 En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar euclídeo, consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{W}$ generado por los vectores

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Un vector $(x, y, z, t)^t$ está en el complemento ortogonal si el producto escalar por cada uno de esos tres vectores es igual a 0, es decir, si verifica las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ x - 2y + z - 2t &= 0 \\ x + 2y + 4z + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontrar el complemento ortogonal consiste en resolver este sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = 0 \\ t = \alpha \end{cases} \Rightarrow \mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

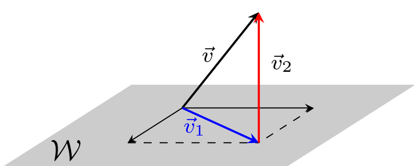
□

Teorema 6.5.4 (Descomposición ortogonal) *Sea* $\mathcal{W}$ *un subespacio de un espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. *Entonces todo vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *tiene una representación única de la forma*

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \ \text{en donde } \vec{v}_1 \in \mathcal{W}, \ \vec{v}_2 \in \mathcal{W}^{\perp}$$

Los vectores de la descomposición definida en el teorema anterior se determinan fácilmente, ya que el primero debe ser la proyección sobre el subespacio. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \mathrm{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v}) \\ \vec{v}_2 &= \vec{v} - \mathrm{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v}) \end{aligned}$$



Ejemplo 6.5.5 En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar euclídeo consideramos el vector $\vec{v} = (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$ y el subespacio generado $\mathcal{W}$ por los vectore

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\mathcal{W}$ es

$$\text{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5})\begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}$$

Y la *componente de $\vec{v}$ ortogonal a $\mathcal{W}$* es

$$\vec{v} - \text{proy}_{\mathcal{W}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/25 \\ 0 \\ 28/25 \end{pmatrix}$$

□

6.6. Existencia de bases ortogonales

Ya hemos utilizado en las secciones anteriores las bases ortogonales para calcular las proyecciones ortogonales sobre un subespacio. En alguno de los ejemplos que hemos visto hemos trabajado con bases ortogonales cuyos elementos eran vectores unitarios; estas bases se denominan *ortonormales*. Nos preguntamos ahora si es posible determinar bases ortogonales y ortonormales en cualquier espacio euclídeo o en cualquier subespacio.

Teorema 6.6.1 *Todo espacio euclídeo de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

La demostración es constructiva y desarrolla el **Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt**. Basándonos en las descomposiciones ortogonales que hemos visto antes, vamos a construir una base ortogonal a partir de una base cualquiera. Normalizando los vectores de esa base ortogonal, se obtiene la base ortonormal.

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. El conjunto $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ definido a continuación constituye una base ortogonal de $\mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= \vec{v}_1 \\
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}\vec{w}_1 \\
\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}\vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle}\vec{w}_2 \\
&\vdots \\
\vec{w}_n &= \vec{v}_n - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}\vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle}\vec{w}_2 \cdots - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_{n-1} \rangle}{\langle \vec{w}_{n-1}, \vec{w}_{n-1} \rangle}\vec{w}_{n-1}
\end{aligned}$$

Es decir, la descomposición ortogonal de $\vec{v}_2$ en el subespacio generado por $\vec{v}_1$ nos da una base ortogonal del subespacio generado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Con esta base podemos calcular la descomposición ortogonal de $\vec{v}_3$ por el subespación generado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, lo que nos da una base del subespacio generado por los tres primeros vectores. Siguiendo sucesivamente este proceso con todos los vectores de la base inicial, llegamos a la base ortogonal de todo el espacio.

Si finalmente necesitamos una base ortonormal, basta con normalizar los vectores de $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\|\vec{w}_1\|}\vec{w}_1, \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2, \dots, \frac{1}{\|\vec{w}_n\|}\vec{w}_n \right\}$$

Ejemplo 6.6.2 Vamos a usar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal a partir de la siguiente base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por los siguientes vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, construimos la base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1/2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dividiendo cada vector por su norma, obtenemos la base ortonormal:

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□