1. Demuestra que la siguiente función es biyectiva.

$$f\colon [0,1] \to (0,1), \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{n+2} & \text{si } x = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\[2ex] x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma se demuestra que los conjunto $[0,1]$ y $(0,1)$ tienen el mismo cardinal.

La aplicación f deja fijos todos los elementos del intervalo $[0,1]$ excepto los del conjunto

$$A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

Dentro de este conjunto, f hace un "desplazamiento"

$$\boxed{0, 1,} \ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots$$

f

A 0 y a 1 no llegan flechas

---

f es inyectiva:

$f(x) = f(y)$

- Si $f(x) = f(y) \in A$, entonces $f(x) = f(y) = \frac{1}{n}$ para algún $n \geq 2$ y por tanto $x = y = \frac{1}{n-2}$ si $n \geq 3$
  $x = y = 1$ si $n = 2$
- Si $f(x) = f(y) \notin A$, entonces $x = f(x) = f(y) = y$

f es sobreyectiva: Si $y \in \{\frac{1}{n} \,;\, n \geq 2\}$, entonces $f^{-1}(y) = \frac{1}{n-2}$ si $n \geq 3$
$f^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$

Si $y \neq \frac{1}{n}$ para todo n, entonces $f^{-1}(y) = y$

2. Demuestra las siguientes afirmaciones:

   a) Si A es infinito, entonces $A \cup B$ es infinito para cualquier conjunto B.

   b) Si $f : A \to B$ es una función inyectiva y A es infinito, entonces B es infinito.

   c) Si A es infinito y $B \neq \emptyset$, entonces $A \times B$ es infinito.

   d) Si A es infinito, entonces $\mathcal{P}(A)$ es infinito.

---

a) A infinito $\Rightarrow \begin{cases} \text{Existe } f: A \to A \text{ inyectiva} \\ f(A) \subset A \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} g: A\cup B \to A \cup B \\ g(x) = f(x) \quad \text{si } x \in A \\ g(x) = x \quad \text{si } x \in B - A \end{cases}$

$\Rightarrow g(A \cup B) = f(A) \cup (B - A) \subset A \cup (B-A) = A \cup B$

c) A infinito $\Rightarrow \begin{cases} \text{Existe } f: A \to A \text{ inyectiva} \\ f(A) \subset A \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} g: A \times B \to A \times B \\ g(x,y) = (f(x), y) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a \in A - f(A) \Rightarrow (a,y) \in (A\times B) - g(A\times B) \\ \Rightarrow g(A\times B) \subset A \times B \end{cases}$

2. Demuestra las siguientes afirmaciones:

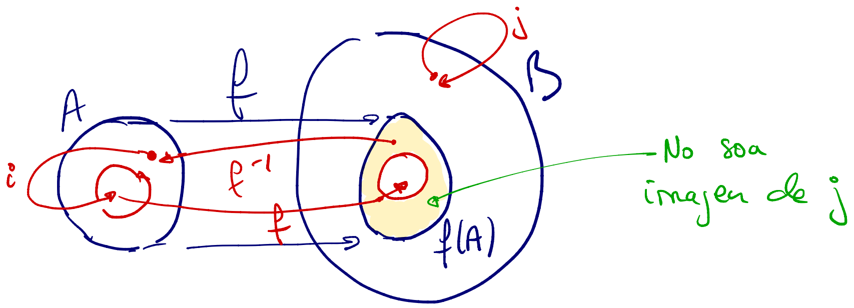
   a) Si A es infinito, entonces $A \cup B$ es infinito para cualquier conjunto B.

   b) Si $f\colon A \to B$ es una función inyectiva y A es infinito, entonces B es infinito.

   c) Si A es infinito y $B \neq \varnothing$, entonces $A \times B$ es infinito.

   d) Si A es infinito, entonces $\mathcal{P}(A)$ es infinito.

(b) Sea $i: A \to A$, inyectiva y tal que $i(A) \subset A$



$j: B \to B$

$j(x) = f(i(f^{-1}(x)))$ si $x \in f(A)$

$j(x) = x$ si $x \in B - f(A)$

(d) Usando el apartado (b):

$$f: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$f(x) = \{x\}$$

f es inyectiva y por lo tanto, $\mathcal{P}(A)$ es infinito.

Conjuntos de referencia para $\aleph_0$ y $\aleph_1$

Para hallar el cardinal de un conjunto, usamos conjuntos de referencia:

$\aleph_0$ Para demostrar que $|A| = \aleph_0$, tenemos que definir una biyección entre A y $\mathbb{N}$ o bien entre A y $\mathbb{Z}^+$. Puede darse en cualquier sentido:

$$f: \mathbb{N} \to A \quad \text{o bien} \quad g: A \to \mathbb{N}$$

$\aleph_1$ De la misma forma, demostramos que $|A| = \aleph_1$ definiendo una biyección entre A y alguno de estos intervalos: $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$ ó $(0,1]$

SIEMPRE hay que probar inyectividad y sobreyectividad

Argumentos alternativos:

* Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein: En lugar de una biyección, definimos dos aplicaciones inyectivas
* Razonando con otros resultados o usando reducción al absurdo

3. Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables estableciendo una biyección con $\mathbb{Z}^+$.

$$A = \{10, 20, 30, 40, ...\}; \quad B = \{6, 7, 8, 9, ...\};$$

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}; \quad C = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

$f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow A: \quad f(n) = 10n$

Inyección: $f(n) = f(m) \Rightarrow \cancel{10}n = \cancel{10}m \Rightarrow n = m$

Sobreyección: $x \in A \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{10} \in \mathbb{Z}^+$ ya que todos los elementos de A son múltiplos de 10

$g: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow B: \quad g(n) = n+5$

Inyección: $g(n) = g(m) \Rightarrow n + \cancel{5} = m + \cancel{5} \Rightarrow n = m$

Sobreyección: $x \in B \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 5 \in \mathbb{Z}^+$ si $x \geq 6$

$h: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^-: \quad h(n) = -n$

Inyección: $h(n) = h(m) \Rightarrow -n = -m \Rightarrow n = m$

Sobreyección: $x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow h(x) = -x \in \mathbb{Z}^+$ si x es negativo

$j: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow C: \quad j(n) = \frac{1}{n}$

Inyección: $j(n) = j(m) \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \Rightarrow n = m$

Sobreyección: Si $x = \frac{1}{n} \in C$, entonces $j^{-1}(x) = \frac{1}{x} = n \in \mathbb{Z}^+$

4. En el conjunto $\mathbb{R}$ se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}, \quad C = \left\{\frac{3n+3}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

a) Determina el cardinal de A, B y C estableciendo una biyección con el correspondiente conjunto estándar.

b) Determina el cardinal de los conjuntos: $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) Determina el cardinal de los conjuntos: $C - A$ y $C - B$.

(a) A y B tienen cardinal $\aleph_1$

$f : [0,1] \to A \quad f(x) = 2x$

Inyectiva $f(x) = f(y) \Rightarrow \cancel{2}x = \cancel{2}y \Rightarrow x = y$

Sobreyectiva: $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} \leq 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$g : [0,1] \to B \quad g(x) = 3x + 2$

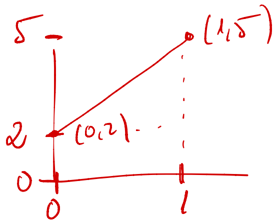
Inyectiva: $g(x) = g(y) \Rightarrow \cancel{3}x + \cancel{2} = \cancel{3}y + \cancel{2}$

$\Rightarrow x = y$

Sobreyectiva: $2 \leq y \leq 5 \Rightarrow 0 \leq y - 2 \leq 3$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{y-2}{3} \leq 1$

$\Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$



$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{g(x) - 2}{5 - 2}$$

El cardinal de C es $\aleph_0$:

$$\frac{3n+3}{n+6} = \frac{3n+18}{n+6} - \frac{15}{n+6} = 3 - \frac{15}{n+6} < 3$$

$h : \mathbb{N} \to C, \quad h(n) = 3 - \frac{15}{n+6}$

Inyectiva: $h(n) = h(m) \Rightarrow \cancel{3} - \frac{\cancel{15}}{n+6} = \cancel{3} - \frac{\cancel{15}}{m+6} \Rightarrow \frac{1}{n+6} = \frac{1}{m+6}$

$\Rightarrow n + 6 = m + 6 \Rightarrow n = m$

Sobreyectiva: $y = 3 - \frac{15}{n+6} \Rightarrow 3 - y = \frac{15}{n+6} \Rightarrow n + 6 = \frac{15}{3-y} \Rightarrow n = \frac{15}{3-y} - 6$

Está definido para todo y, ya que $3 \notin C$

4. En el conjunto $\mathbb{R}$ se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}, \quad C = \left\{\frac{3n+3}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

a) Determina el cardinal de A, B y C estableciendo una biyección con el correspondiente conjunto estándar.

b) Determina el cardinal de los conjuntos: $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) Determina el cardinal de los conjuntos: $C - A$ y $C - B$.

---

b

$\underline{A \cap C}$

$$0 \leq 3 - \frac{15}{n+6} \leq 2 \qquad \frac{1}{3} \leq \frac{n+6}{15} \leq 1$$

$$-3 \leq -\frac{15}{n+6} \leq -1 \qquad 5 \leq n+6 \leq 15$$

$$1 \leq \frac{15}{n+6} \leq 3 \qquad -1 \leq n \leq 9$$

$$n = 0, 1, \ldots, 9$$

$$A \cap C = \left\{3 - \frac{15}{n+6} ;\ 0 \leq n \leq 9\right\} =$$

$$= \left\{\frac{3}{6}, \frac{6}{7}, \frac{9}{8}, \frac{12}{9}, \frac{15}{10}, \frac{18}{11}, \frac{21}{12}, \frac{24}{13}, \frac{27}{14}, \frac{30}{15}\right\}$$

$$|A \cap C| = 10$$

$\underline{B \cap C}$

$$2 \leq 3 - \frac{15}{n+6} \leq 5 \qquad 1 \leq \frac{n+6}{15}$$

$$-1 \leq -\frac{15}{n+6} \leq 3 \qquad 15 \leq n+6$$

$$0 \leq \frac{15}{n+6} \leq 1 \qquad 9 \leq n$$

$$B \cap C = \left\{3 - \frac{15}{n+6} ;\ n \geq 9\right\} \Rightarrow |B \cap C| = \aleph_0$$

$$f: \mathbb{N} \to B \cap C, \quad f(n) = 3 - \frac{15}{(n+9)+6} = 3 - \frac{15}{n+15}$$

Es biyectiva

4. En el conjunto $\mathbb{R}$ se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}, \quad C = \left\{\frac{3n+3}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

a) Determina el cardinal de A, B y C estableciendo una biyección con el correspondiente conjunto estándar.

b) Determina el cardinal de los conjuntos: $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) Determina el cardinal de los conjuntos: $C - A$ y $C - B$.

(c)

$$C - A = C \cap \bar{A} = C \cap \left[(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)\right] =$$
$$= \cancel{\left(C \cap (-\infty, 0)\right)} \cup \left(C \cap (2, +\infty)\right) =$$
$$= C \cap (2, +\infty)$$

$$2 < 3 - \frac{15}{n+6} \qquad -1 < -\frac{15}{n+6}$$

$$\frac{15}{n+6} < 1 \qquad 15 < n+6 \qquad n > 9$$

$$\Rightarrow C - A = \left\{3 - \frac{15}{n+6} \,;\, n > 9\right\} \Rightarrow |C - A| = \aleph_0$$

$$f : \mathbb{N} \to C - A$$
$$f(n) = 3 - \frac{15}{(n+10)+6} = 3 - \frac{15}{n+16}$$

Es biyectiva

(d)

$$C - B = C \cap \bar{B} = C \cap \left((-\infty, 2) \cup (5, +\infty)\right)$$
$$= \left(C \cap (-\infty, 2)\right) \cup \cancel{\left(C \cap (5, +\infty)\right)} = C \cap (0, 2)$$

$$0 < 3 - \frac{15}{n+6} < 2$$
$$-3 < -\frac{15}{n+6} < -1$$
$$1 < \frac{15}{n+6} < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{n+6}{15} < 1$$
$$5 < n+6 < 15$$
$$-1 < n < 9$$
$$0 \leq n \leq 8$$

$$|C - B| = 9$$

7. Determina el cardinal $A \cup B$ en los siguientes casos:

a) Si A y B son conjuntos numerables.

b) Si A es numerable y B no es numerable.

(a) $|A| = \aleph_0 \Rightarrow$ Existe $f: \mathbb{N} \to A$ biyectiva

$|B| = \aleph_0 \Rightarrow$ Existe $g: \mathbb{N} \to A$ biyectiva

$A \to f(0), f(1), f(2), f(3), \dots f(n), \dots$

$B \to g(0), g(1), g(2), g(3), \dots g(n), \dots$

$$h: \mathbb{N} \to A \cup B \begin{cases} h(2k) = f(k) & \in A \\ h(2k+1) = g(k) & \in B \end{cases}$$

Es una enumeración de los elementos de $A \cup B$

Por lo tanto, $|A \cup B| = \aleph_0$

(b) $|A| = \aleph_0 \Rightarrow$ Sea $f: \mathbb{N} \to A$ biyectiva

$|B| \geq \aleph_1 \Rightarrow$ Existe $g: [0,1] \to B$ inyectiva

$$h: [0,1] \cup \mathbb{N} \to [0,1] \begin{cases} h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} & n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N} \\ h(n) = \frac{1}{n} & n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N} \\ x \text{ en otros casos} \end{cases}$$

h es una biyección y también lo es h^{-1}

$$i: [0,1] \to A \cup B \begin{cases} f(h^{-1}(x)) & \text{si } h^{-1}(x) \in \mathbb{N} \\ g(h^{-1}(x)) & \text{si } h^{-1}(x) \in [0,1] \end{cases}$$

Dado que i es inyectiva, $|A \cup B| \geqslant \aleph_1$

Otros casos relacionados con el ejercicio 7:

* Si $|A| = \aleph_1$ y $|B| = \aleph_1$, entonces $|A \cup B| = \aleph_1$

$$[0, \tfrac{1}{2}) \longrightarrow [0,1) \xrightarrow{f} A \quad \text{biyección}$$
$$x \longmapsto 2x$$

$$[\tfrac{1}{2}, 1] \longrightarrow [0,1] \xrightarrow{g} B \quad \text{biyección}$$
$$x \longmapsto 2x-1$$

$$h : [0,1] \longrightarrow A \cup B \begin{cases} f(2x) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ g(2x-1) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

* Si $|A| = \aleph_1$ y $|B| = \aleph_0$, entonces $|A \cup B| = \aleph_1$

$$A \cup B \supset A \Longrightarrow |A \cup B| \geq |A| = \aleph_1$$

Sean $f : A \to [0,1]$ y $g : B \to \mathbb{Z}^+$ biyectivas

$$h : A \cup B \longrightarrow [0,1] \cup [1,2]$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = f(x) \quad \text{si } x \in A \\ h(x) = \dfrac{1}{g(x)} + 1 \quad \text{si } x \in B \end{array}\right| \text{Es inyectiva}$$

Por lo tanto, $|A \cup B| \leq |[0,1] \cup [1,2]| = \aleph_1$ y en consecuencia $|A \cup B| = \aleph_1$

5. Determina el cardinal de los conjuntos

$$\mathbb{Q}, \qquad \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

---

* $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-| = \aleph_0$ ya que

$$|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{Q}^-| = \aleph_0$$

---

* Podemos definir una enumeración de los elementos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ igual que para $\mathbb{Q}^+$

	0	1	2	3	4	5	...
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Por lo tanto, $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$

* $\mathbb{R}-\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow |\mathbb{R}-\mathbb{Q}| \leq \aleph_1$

Supongamos que $|\mathbb{R}-\mathbb{Q}| = \aleph_0$

En ese caso:

$$|\mathbb{R}| = |\underbrace{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})}_{\aleph_0} \cup \underbrace{\mathbb{Q}}_{\aleph_0}| = \aleph_0 \Rightarrow \text{Absurdo}$$

Por lo tanto $|\mathbb{R}-\mathbb{Q}| = \aleph_1$

6. *a*) Determina el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

   b) Si $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, demuestra que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$.

   c) Determina el cardinal de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

---

a) Si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$
$$A \longmapsto f(A)$$

también es una biyección:

$$f(A) = f(B) \Rightarrow A = f^{-1}(f(B)) = B$$

Por ser f biyectiva

b)
$$\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$
$$f \longmapsto \{(n, f(n)) ; n \in \mathbb{N}\}$$

φ es inyectiva, ya que $\varphi(f)$ es el grafo de f y cada grafo se corresponde con una única función:

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow \{(n, f(n)) ; n \in \mathbb{N}\} = \{(n, g(n)) ; n \in \mathbb{N}\}$$
$$\Rightarrow (n, f(n)) = (n, g(n)) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow f(n) = g(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow f = g$$

Dado que φ es inyectiva, podemos afirmar que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \aleph_1$

ⓒ Para demostrar que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$ solo nos falta definir una aplicación inyectiva

$$\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

Esta función puede ser la determinada por las funciones características:

$$\psi(A) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \Big\{ \ \psi(A)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

ψ es inyectiva:

$$\psi(A) = \psi(B) \Rightarrow \psi(A)(n) = \psi(B)(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ | Si $m \in A$, entonces $1 = \psi(A)(m) = \psi(B)(m)$ y $m \in B$

| Es decir $A \subseteq B$

| Si $m \in B$, entonces $1 = \psi(B)(m) = \psi(A)(m)$ y $m \in A$

| Es decir, $B \subseteq A$

$\Rightarrow A = B$

En consecuencia $\aleph_1 = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$

Teniendo en cuenta el apartado anterior, podemos concluir que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$

8. Si $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos numerables, ¿cuál es el cardinal de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$?

$$\left| \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right| = \aleph_0$$

Construimos una enumeración similar a la de $\mathbb{Q}^+$

Sean $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$ biyections para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lllllll}
A_0 & \rightsquigarrow & f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3), & \cdots \\
A_1 & \rightsquigarrow & f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3), & \cdots \\
A_2 & \rightsquigarrow & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3), & \cdots \\
A_3 & \rightsquigarrow & f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3), & \cdots \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$