E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2022/2023

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación de Ejercicios 7

1. Demuestra que la siguiente función es biyectiva.

$$f\colon [0,1] \to (0,1), \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{si } x = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma se demuestra que los conjunto $[0,1]$ y $(0,1)$ tienen el mismo cardinal.

2. Demuestra las siguientes afirmaciones:

   a) Si A es infinito, entonces $A \cup B$ es infinito para cualquier conjunto B.

   b) Si $f\colon A \to B$ es una función inyectiva y A es infinito, entonces B es infinito.

   c) Si A es infinito y $B \neq \varnothing$, entonces $A \times B$ es infinito.

   d) Si A es infinito, entonces $\mathcal{P}(A)$ es infinito.

3. Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables estableciendo una biyección con $\mathbb{Z}^+$.

$$A = \{10, 20, 30, 40, ...\}; \quad B = \{6, 7, 8, 9, ...\};$$

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}; \quad C = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

4. En el conjunto $\mathbb{R}$ se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}, \quad C = \left\{ \frac{3n+3}{n+6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

   a) Determina el cardinal de A, B y C estableciendo una biyección con el correspondiente conjunto estándar.

   b) Determina el cardinal de los conjuntos: $A \cap C$ y $B \cap C$.

   c) Determina el cardinal de los conjuntos: $C - A$ y $C - B$.

5. Determina el cardinal de los conjuntos

$$\mathbb{Q}, \qquad \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

6. *a*) Determina el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

   b) Si $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, demuestra que $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})\right|$.

   c) Determina el cardinal de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

7. Determina el cardinal $A \cup B$ en los siguientes casos:

   a) Si A y B son conjuntos numerables.

   b) Si A es numerable y B no es numerable.

8. Si $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos numerables, ¿cuál es el cardinal de $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$?