E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2022/2023

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 6 de Ejercicios

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Halla un vector unitario ortogonal al subespacio $\mathcal{W}$ generado por el sistema de vectores

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   a) Halla una base del complemento ortogonal de $\mathcal{U}$ y sus ecuaciones cartesianas.

   b) Dado el vector $\vec{v} = (2, 0, 1, 0)^t$, halla vectores $\vec{v}_1 \in \mathcal{U}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{U}^\perp$ tales que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

3. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual se consideran los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{rl} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_2 - x_3 & = 0 \end{array} \right\}, \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \right\}$$

   a) Calcula los valores de a y b para que $\mathcal{U}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{U}_2$.

   b) Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{U}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{U}_2$ tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

4. En el espacio $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, halla una base ortonormal para el subespacio $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la forma $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 2x_3y_1 + 6x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_3$$

   a) Estudia si es un producto escalar. Determina, si es posible, una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$.

   b) En caso afirmativo, halla una base ortonormal respecto de este producto escalar a partir de la base canónica.

6. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[t]$ con el producto escalar $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)dt$:

   a) Calcula el ángulo que forman $p(t) = t + 3$ y $q(t) = 2t + 4$

   b) Determina los valores de α tales que $p(t) = t + \alpha$ y $q(t) = t - \alpha$ son ortogonales.

7. En $\mathbb{R}_2[t]$ se considera el producto escalar $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)dt$. Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base estándar $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$.