E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2022/2023

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 4 de Ejercicios

1. Sea la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz de φ respecto a las bases canónicas, una base de $\ker(\varphi)$ y las ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

2. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el homomorfismo definido

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

   a) Halla la matriz de φ respecto a la base canónica.

   b) Halla una base de $\ker(\varphi)$ y deduce si φ es inyectiva.

   c) Halla las ecuaciones cartesianas de $Im(\varphi)$ y su dimensión. Deduce si φ es sobreyectiva.

3. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ el homomorfismo definido por

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ ax + ay + z + (1+a)t \\ x + (1-a)y + 2az + (1+a)t \\ x + 2z + 2t \end{pmatrix}$$

   a) Halla la matriz asociada a φ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   b) Estudia si el vector $(1, 1+a, 1+2a, a)^t$ está en $\mathrm{Im}(\varphi)$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

   c) Halla, según los valores de a, una base de $\ker(\varphi)$ y comprueba el teorema de la dimensión.

4. Sea la aplicación lineal $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$\tau\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \tau\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \tau\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   a) Halla la matriz asociada a τ respecto de las bases canónicas.

   b) Encuentra las ecuaciones cartesianas del subespacio $\tau(\mathcal{U})$, en donde

$$\mathcal{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\right\}$$

5. Sea la aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz asociada a φ respecto de las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ una aplicación lineal tal que:

$$\varphi(1) = 1 + t^2 \qquad \varphi(t) = t + t^2 \qquad \varphi(t^2) = 1 + t + 2t^2$$

   a) Halla $\varphi(a + bt + ct^2)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

   b) Determina bases y ecuaciones cartesianas de $\ker(\varphi)$ y de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

   c) Deduce si φ es inyectiva y/o sobreyectiva.

7. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden dos y sea $\mathcal{E}$ el subconjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b + c \\ -b + c & a \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   a) Prueba que $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial y que el siguiente conjunto es una base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   b) Halla la matriz del endomorfismo $\psi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definido por

$$\psi\begin{pmatrix} a & b + c \\ -b + c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b + c \\ -2b + c & 0 \end{pmatrix}$$

   respecto de la base $\mathcal{B}$.

   c) Determina el núcleo y la imagen de ψ.

8. En los espacios vectoriales $\mathbb{R}_3[t]$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran las bases

$$\mathcal{B} = \{t^3, t^2, t, 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se define el homomorfismo $\psi\colon \mathbb{R}_3[t] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$\psi(at^3 + bt^2 + ct + d) = \begin{pmatrix} a & b - d \\ c - b & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Halla la matriz de ψ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$.

b) Encuentra una base del núcleo y las ecuaciones implícitas de la imagen.

9. El homomorfismo $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ en una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Determina la matriz B que corresponde a dicho homomorfismo en otra base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ dada por

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad\qquad \vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$