E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2022/2023

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 5 de Ejercicios

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + ax_2 + x_3\\ -x_2 + 3x_3\\ 2x_2\end{pmatrix}$$

   Utiliza la definición de valor y vector propio de un homomorfismo para hallar los valores del parámetro a tales que $\vec{v} = (2, -3, 2)^t$ sea un vector propio de φ.

2. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix}3 & a & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & b & 3\end{pmatrix}$. Usa la definición de valor y vector propio para determinar los valores de los parámetros a y b tales que $\vec{v} = (1, 1, 1)^t$ sea un vector propio de A.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo:

$$\varphi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2\\ -x_1 + 3x_2\\ x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

   a) Halla los valores y vectores propios de φ

   b) Estudia si φ es diagonalizable y en tal caso determina la matriz de paso para obtener la forma diagonal.

4. Estudia para qué valores del parámetro a son diagonalizables los siguientes endomorfismos en $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ ax_1 + x_2\\ x_1 + x_2 + 2x_3\end{pmatrix}; \qquad \varphi_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - 2x_2 - (2+a)x_3\\ x_2 + ax_3\\ x_3\end{pmatrix}$$

5. De un homomorfismo en φ en $\mathbb{R}^2$ sabemos que $\varphi((0,1)^t) = (1,2)^t$ y que $(1,1)^t$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.

   a) Encuentra la matriz del homomorfismo respecto de la base canónica.

   b) Halla, si es posible, una base respecto a la cual la matriz de φ sea una matriz diagonal.

6. De un endomorfismo φ en $\mathbb{R}^3$ se sabe que:

   - Es diagonalizable.
   - $\vec{v}_1 = (-1,4,1)^t$, $\vec{v}_2 = (1,-1,-1)^t$, $\vec{v}_3 = (1,2,1)^t$ son vectores propios.
   - $\varphi((1,1,1)^t) = (4,4,2)$.

   Halla los valores propios de φ y su matriz respecto a la base canónica.

7. Halla los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Para cada una de las siguientes matrices, determina los valores reales de los parámetros a y b para que la matriz sea diagonalizable y, para esos casos, obtenga su forma diagonal y una matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a+3 & a^2-10 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

9. Sea la matrtiz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.

   b) Usa el apartado anterior para calcular A^{200}

   c) Sin efectuar nuevos cálculos, ¿podrías decir si existe la inversa de A?

10. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.

   b) Usa el apartado anterior para calcular A^{2011} y determina (si es posible) A^{-2011}.

11. Sea $f\colon \mathbb{Z}_{13}^3 \to \mathbb{Z}_{13}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z) = (7x + 12y + 4z, x + 6y + 3z, 5x + 6y + 12z)$$

   a) Halle la matriz A de la aplicación f respecto de la base canónica.

   b) Estudie si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, halle una base de vectores propios.

   c) Calcule A^{2431} y $f^{2432}(1,2,3)$.

12. Demuestra las siguientes propiedades:

a) Si λ es un valor propio de una matriz A inversible, entonces $\lambda \neq 0$ y $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

b) Si λ es un valor propio de una matriz A, entonces λ^2 es un valor propio de A^2. En general, λ^n es un valor propio de A^n.

¿Cuáles son los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^9$?