Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

**Высшая школа программной инженерии**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**Дробное дифференцирование и интегрирование**

по дисциплине «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил  студент гр. 5130903/20001 |  | Д. Р. Галин |
| Руководитель  доцент, д.т.н. |  | Е.Г. Хитров |

28.05.2024

Санкт-Петербург

2024

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

**Высшая школа программной инженерии**

**ЗАДАНИЕ**

**НА ВЫПОЛНЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ**

студенту 5130903/20001 Галину Денису Рашитовичу

**1. Тема проекта (работы):**   
Дробное дифференцирование и интегрирование

**2. Срок сдачи студентом законченного проекта (работы)** 28.05.2024

**3. Исходные данные к проекту (работе**):   
Консультации с руководителем проекта, материалы сети «Интернет», учебно-методическая литература.

**4. Содержание пояснительной записки** (перечень подлежащих разработке вопросов): введение, основная часть (Приближённые вычисления и оценка погрешностей, Приближение функций, Преобразования Фурье), заключение, список использованных источников, приложение. Примерный объём пояснительной записки 23 страницы печатного текста

**5. Перечень графического материала** (с указанием обязательных чертежей и плакатов):

—

**6. Консультанты**   
—

**7. Дата получения задания:** 13.02.2024

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Руководитель |  |  | Е.Г. Хитров |
|  | (подпись) |  | (инициалы, фамилия) |
| Задание принял к исполнению |  |  | Д.Р. Галин |
|  | (подпись) |  | (инициалы, фамилия) |
| 13.02.2024 |  |  |  |
| (дата) |  |  |  |

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc167784629)

[1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ 6](#_Toc167784630)

[1.1 Определение дробных интеграла и производных Римана-Лиувилля 6](#_Toc167784631)

[1.2 Дробная производная Грюнвальда-Летникова 12](#_Toc167784632)

[2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ГРЮНВАЛЬДА-ЛЕТНИКОВА И РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ 15](#_Toc167784633)

[3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ 17](#_Toc167784634)

[3.1 Дробные производные степенных функций 17](#_Toc167784635)

[3.2 Дробные производные тригонометрических функций 18](#_Toc167784636)

[3.3 Дробные экспоненты и натурального логарифма 19](#_Toc167784637)

[3.4 Реализация исчисления дробных производных в математическом пакете Maple 2024 20](#_Toc167784638)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 22](#_Toc167784639)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 24](#_Toc167784640)

[ПРИЛОЖЕНИЕ 1 25](#_Toc167784641)

**ВВЕДЕНИЕ**

Дробная производная (или производная дробного порядка) является обобщением математического понятия производной. Существует несколько разных способов обобщить это понятие, но все они совпадают с понятием обычной производной в случае натурального порядка.

Широко известны дифференциальные операторы , где порядок дифференцирования принимается целым и положительным. Вопросом, можно ли придать символам или даже смысл дифференциальных операторов, задавались еще в самом начале становления математического анализа. Первые шаги в этом направлении были сделаны Л. Эйлером, П. Лапласом и Ж. Фурье. Собственно историю дробного исчисления следует вести с работ Н. Х. Абеля и Ж. Лиувилля, появившихся в 30-е годы XIX в. Рядом с работами Ж. Лиувилля по значимости следует поставить работы Б. Римана, который пришел к конструкции дробного интегрирования, служащей с тех пор одной из основных форм дробного интегрирования и названную его именем.

В настоящее время существует большое число книг и статей по теории и приложениям дифференциальных уравнений с дробными производными, но интерес к объектам, описываемыми дробными дифференциальными уравнениями, не ослабевает до сих пор и, в первую очередь, это связано с их многочисленными приложениями в различных областях физики и математики. При моделировании динамических процессов дробной (или фрактальной) природы зачастую необходимо решать не только прямую, но и обратную задачу, т.е. нахождение исходной функции, дробная производная которой используется в данной модели.

Данная работа ставит своей целью изучение и рассмотрение различных определений и процесса исчисления дробных производных, а также реализацию исчисления дробных производных в математическом пакете Maple 2024.

# 1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Дробные производные имеют несколько различных определений. В данной работе для рассмотрения были выбраны определения дробных интеграла и производной Римана-Лиувилля и формула дробного интегрирования-дифференцирования Грюнвальда-Летникова.

## Определение дробных интеграла и производных Римана-Лиувилля

Для начала определим самые распространенные конструкции дробного интегрирования-дифференцирования – дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля. Начать необходимо с интегрального уравнения Н. Абеля, ведь интеграл в этом уравнении и представляет собой дробный интеграл Римана-Луивилля, умноженный на постоянную. Обращение же уравнения Абеля позволяет определить дробную производную.

Итак, интегральное уравнение

где называется уравнением Абеля. Уравнение рассматривается на отрезке

Решение уравнения имеет вид

и единственно.

Теперь мы можем ввести определение дробного интеграла Римана-Лиувилля. Для этого используем следующее представление кратного интеграла:

Picture background

Для дальнейших рассуждений необходимо обратиться к материалам из функционального анализа, откуда нам нужны следующие ниже определения и выводы.

**Определение 1.** *Функция* *называется абсолютно непрерывной на отрезке Ω*, *если для любого* *можно найти такое* , *что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков* , *=*, *такой, что*

*справедливо неравенство*

*Класс всех таких функций обозначается*

Известно, что класс совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций:

**Определение 2.** *Через* , *где* и - *отрезок,* *обозначим класс функций* , *непрерывно дифференцируемых на до порядка* , *причем* .

Очевидно, что и класс состоит из функций, представимых n-кратным интегралом Лебега с переменным верхним пределом от суммируемой функции с заменой постоянной в (4) на многочлен порядка :

Picture background

Имея теперь формулу (5), перепишем ее с использованием (3) в виде

Введем определение гамма-функции. Пусть – комплексное число. Гамма-функция определялась Л. Эйлером как предел

но чаще используется определение в виде интеграла Эйлера второго рода

который сходится при всех для которых

Интегрирование (7) по частям приводит к рекуррентной формуле

Так как , то рекуррентная формула (8) для положительных целых приводит к равенству

Заметим, что в (3) (см. (9)). Благодаря этому правой части в (3) можно придать смысл и при нецелых .

Для гамма-функций справедлива следующие равенства:

а также следующие соотношения:

формула дополнения

формула удвоения (или формула Лежандра):

Теперь можно определить интегрирование нецелого порядка.

**Определение 3.** *Пусть , тогда интегралы*

*где , называются соответственно левосторонним* (14) *и правосторонним* (15) *дробными интегралами Римана-Лиувилля порядка*

Для дробных интегралов справедливо полугрупповое свойство (без доказательства)

Приведем также лемму об ограниченности дробного интеграла Римана-Лиувилля (также без доказательства).

**Лемма1.** *Дробный интегральный оператор при ограничен в :*

Теперь перейдем к определению дробных производных Римана-Лиувилля. Это можно сделать через определение дифференцирования, как операции, обратной дробному интегрированию, c учетом указанного выше решения интегрального уравнения Абеля.

**Определение 4.** *Для функции заданной на отрезке каждая из формул*

*соответственно определяет дробную производную Римана-Лиувилля порядка и эти производные называются соответственно левосторонней* (18) *и правосторонней* (19)*.*

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка , а дробные производные – пока только для порядка .

Перейдем к дробным производным порядка . Будем использовать следующие обозначения: – целая часть числа , – дробная.

Если целое число, то под дробной производной понимается обычное дифференцирование:

Если же – нецелое, то определяем и следующими формулами

Наконец можем дать общее определение.

**Определение 5.** *Для функции заданной на отрезке каждая из формул*

*где называется дробной производной Римана-Лиувилля порядка , соответственно левосторонней* (20) *и правосторонней* (21)*.*

Достаточным условием существования производных (20) и (21) является принадлежность интеграла к классу Для выполнения этого условия в свою очередь достаточно, чтобы .

Приведем формулы композиции. Воспользуемся единообразным обозначением и для дробных интегралов, и для дробных производных, полагая, что при

**Теорема 1.** (без доказательства) *Равенство*

*выполняется в каждом из следующих случаев:*

## 1.2 Дробная производная Грюнвальда-Летникова

Конструкция, которая будет рассматриваться далее, была предложена А. Грюнвальдом и А. В. Летниковым. Она наиболее часто применяется и, соответственно, наиболее удобна в приближенных вычислениях.

Для начала необходимо получить универсальную формулу для производной -ого порядка и -кратного интеграла.

При рассмотрении функции из класса на отрезке вещественной оси . Общая формула для ее -ой производной выглядит так:

где – биномиальные коэффициенты.

С использованием данной формулы, (9) и интеграла Римана (рассуждения опустим) выводится универсальная формула для -ой производной

где – целое число произвольного знака.

С использованием (24) можем дать определение производной вещественного порядка. Формулами ниже определим дробное дифференцирование и интегрирование соответственно

**Определение 6.** *Объединим формулы* (25) *и* (26) *и, тем самым, определим дробное интегрирование-дифференцирование формулой*

*где – произвольное. Так определенная формула называется производной Грюнвальда-Летникова.*

**Замечание:**  *для всех положительных целых и для всех вещественных .*

# 2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ГРЮНВАЛЬДА-ЛЕТНИКОВА И РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Определения Грюнвальда-Летникова и Римана-Лиувилля эквивалентны. Покажем, что (23) при совпадает с дробным интегралом Римана-Лиувилля (14), при – c дробной производной Римана-Лиувилля (16), где – порядок операторов.

Обозначим дробную производную Грюнвальда-Летникова при через :

**Теорема 2.** *Пусть . Предел* (28) *существует почти для всех и*

Доказательство данной теоремы можно посмотреть в источнике … . Нам же интересны следующие из доказательства теоремы 2 выводы.

Интегралы Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова совпадают при :

Формулы композиции (22) для дробной производной и дробного интеграла Римана-Лиувилля можно записать в виде

Аналогичные формулы (по замечанию из пункта 1.2) справедливы и для дробной производной и дробного интеграла Грюнвальда-Летникова

В силу формул композиции теорема справедлива для любых , достаточно выбрать достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства и в первом и втором случаях соответственно.

В силу эквивалентности определений дробных производных Грюнвальда-Летникова и Римана-Лиувилля для суммируемых функций, все доказанные свойства производной Римана-Лиувилля будут справедливы и для производной Грюнвальда-Летникова для указанных функций.

# 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

## 3.1 Дробные производные степенных функций

Пусть и при

Для степенных функций

имеем

используя формулы (14) и (15) соответственно.

Найдем дробную производную Грюнвальда-Летникова функции . Имеем

Теперь, используя формулы (10) и (11), получим

Выражение домножим и разделим на , a на

Применив формулу (8), получаем

Используя (17) из источника [1], получим

Полученная формула совпадает с формулой (29), если в (29) положить и . Стоит отметить, что при нахождении дробных производных, очевидно, удобнее пользоваться определением Римана-Лиувилля.

## 3.2 Дробные производные тригонометрических функций

Формулы интегрирования-дифференцирования круговых синуса и косинуса аргумента имеют крайне сложный вывод, предполагающий использование материала, не имеющего непосредственного отношения к работе (например, гипергеометрическая функция Гаусса).

Вывод этих формул можно посмотреть в работах [1] и [2]. В [2] можно также найти классический с точки зрения математического анализа результат, полученный путем принятия . Общий вид данной задачи выглядит следующим образом:

## Дробные экспоненты и натурального логарифма

Рассмотрим, как действует интегральный-дифференциальный оператор на функции и

Начнем с . Разложим функцию в ряде Тейлора в окрестности и получим

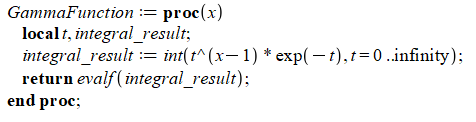
Если в интеграле провести замену то можно получить результат

Найдем теперь

С помощью замены переменной получаем

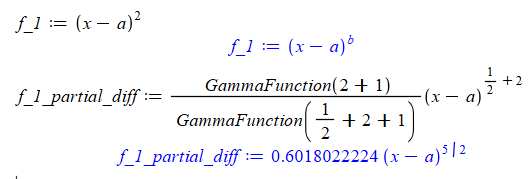
## 3.4 Реализация исчисления дробных производных в математическом пакете Maple 2024

Начнем с введения гамма-функции, которая непосредственно фигурирует в выведенных нами формулах. Реализуем процедуру GammaFunction, используя определение гамма-функции через интеграл:

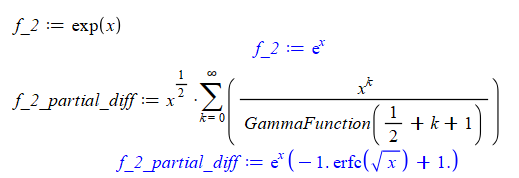


Теперь, непосредственно можем приступить к вычислению дробных производных. Начнем со степенной функции. Предположим, что мы хотим найти дробную производную порядка для степенной функции .

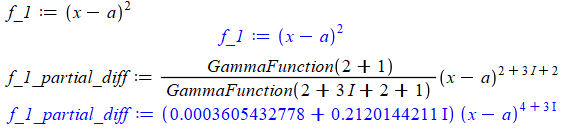
Она будет выглядеть следующим образом:

**

Теперь вычислим дробную производную экспоненциальной функции порядка :



Как говорилось в теоретической части, порядок дифференцирования может быть и комплексным. Так, например, для выше указанной степенной функции результатом дробного дифференцирования порядка будет следующее выражение:

**

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были изучены определения дробных производных и интегралов по Риману-Лиувиллю и Грюнвальду-Летникову, вычилены производные экспоненты, натурального логарифма и степенной функции. Для каждого из этих случаев были проведены аналитические вычисления дробных производных, а также численные эксперименты с использованием математического пакета Maple.

Результаты вычислений показали, что дробные производные степенной функции, экспоненты и натурального логарифма имеют специфические и интересные свойства, отличные от целых производных.

Использование Maple оказалось полезным инструментом для подтверждения аналитических результатов и проведения численных экспериментов. Пакет позволил не только упростить вычисления, но и визуализировать результаты, что способствует лучшему пониманию поведения дробных производных. Следует сказать, что использование математического пакета разумно в тех случаях, когда необходимо вычислить дробную производную некой функции в конкретной точке, так как ручной подсчет является достаточно трудоемким и может быть не столь точным, сколько этого требует задача.

Следует сказать, что сами дробные производные, как таковые, имеют мало практической ценности. Однако они позволяют решать дробные дифференциальные уравнения, которые довольно часто применяются в физических задачах, например, для того, чтобы определить, насколько одна величина качественно отличается от другой.

Таким образом, выполненная работа внесла значительный вклад в понимание и изучение дробных производных элементарных функций, продемонстрировав их важность и потенциальные области применения в различных разделах математики и смежных наук.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

*[1] Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л. Дробные производные и интегралы и их приложения. Учебно-методическое пособие для вузов. Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011, 101 c.*

*[2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987, 687 с.*

*[3] Колмогоров A. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, 1968, 496 с.*

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

*Программный код Maple 2024*

*GammaFunction := proc(x)*

*local t,*

*integral\_result;*

*integral\_result := int(t^(x - 1)\*exp(-t), t = 0 .. infinity);*

*return evalf(integral\_result);*

*end proc*

*f\_1 := (x - a)^2*

*f\_1\_partial\_diff := GammaFunction(2 + 1)\*(x - a)^((2 + 3\*I) + 2)/GammaFunction(((2 + 3\*I) + 2) + 1);*

*f\_2 := exp(x);*

*f\_2\_partial\_diff := x^(1/2)\*sum(x^k/GammaFunction(1/2 + k + 1), k = 0 .. infinity);*