

Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

**Cálculo y diseño
sismorresistente de edificios.
Aplicación de la norma
NCSE-02**

H. Barbat
S. Oller
J. C. Vielma

Monografías de Ingeniería Sísmica
Editor A. H. Barbat

**Cálculo y diseño
sismorresistente de edificios.
Aplicación de la norma
NCSE-02**

H. Barbat
S. Oller
J. C. Vielma

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA
Editor A. H. Barbat

ISSN: 1134-3249

CÁLCULO Y DISEÑO SISMORRESISTENTE DE EDIFICIOS. APLICACIÓN DE LA NORMA NCSE-02
Monografía CIMNE IS56
„ Los autores

ISBN: 84-95999-89-7
Depósito legal: B-46488-2005

Índice

Índice	iii
Pólogo	vii
1 Las normativas de diseño como mecanismo de reducción del riesgo sísmico	1
1.1 Introducción	1
1.2 La vulnerabilidad, el riesgo sísmico y su reducción	4
1.2.1 Concepto de riesgo sísmico	5
1.2.2 Concepto de amenaza sísmica	6
1.2.3 Evaluación de la vulnerabilidad y del riesgo sísmico Físico	9
1.2.4 Métodos de evaluación de la vulnerabilidad sísmica	12
1.2.5 Ejemplo de aplicación: Barcelona	13
1.2.6 Mitigación del riesgo sísmico	17
2 Espectros de respuesta y espectros de diseño	19
2.1 Introducción	19
2.2 Espectros de respuesta elásticos	23
2.2.1 Conceptos teóricos	23
2.2.2 Modificación de espectros y espectro medio	28
2.2.3 Espectro normalizado	30
2.2.4 Representación espectral logarítmica tripartita	31
2.2.5 Influencia de las condiciones locales del terreno	32
2.2.6 Observaciones finales sobre los espectros de respuesta	32
3 Cálculo de la respuesta estructural	33
3.1 Modelos estructurales típicos utilizados en el cálculo de edificios: edificio de cortante	33
3.2 Ecuaciones del movimiento para edificios de cortante	36
3.3 Pórticos de cortante con grados de libertad rotacional: caso general	40
3.3.1 Cálculo del centro de masa y del centro de torsión del nivel j	40
3.3.2 Obtención de la fuerza por traslación y su correspondiente desplazamiento en el nivel j	42
3.3.3 Obtención de la fuerza por rotación y su correspondiente desplazamiento en el nivel j	43
3.3.4 Obtención de la matriz de rigidez para el piso j	44
3.3.5 Cálculo de la rigidez de cada pilar i del piso j .	48
3.4 Fuerza de inercia translacional y rotacional	49
3.5 Desacoplamiento modal de las ecuaciones del movimiento	50

3.6	Respuestas máximas modales utilizando espectros sísmicos de respuesta	55
3.6.1	Planteamiento del problema	55
3.6.2	Características modales máximas	57
3.6.3	Esfuerzos seccionales modales	63
3.7	Cálculo de la respuesta máxima total	64
4	Aplicación práctica de la teoría del análisis modal en las normativas de cálculo sismorresistente	67
4.1	Aspectos generales	67
4.2	Espectros sísmicos de respuesta	68
4.3	Aspectos de cálculo de las fuerzas sísmicas	69
4.4	Espectros de respuesta inelásticos	73
4.4.1	No linealidad en el comportamiento estructural	73
4.4.2	Fenómeno de ductilidad – conceptos básicos	74
4.5	El efecto P-Δ	77
4.6	El efecto de la torsión global de la estructura	79
5	La normativa española NCSE-02	81
5.1	Métodos de cálculo según la normativa	81
5.2	Cálculo de las fuerzas sísmicas	82
5.3	Determinación de la aceleración espectral	84
5.3.1	Cálculo de la aceleración espectral	84
5.3.2	Cálculo de la fuerza sísmica equivalente	88
5.4	Ejemplo de aplicación	89
6	Recomendaciones de diseño en las normativas sismorresistentes	103
6.1	Generalidades	103
6.2	Tipologías de edificios utilizadas en zonas sísmicas	105
6.3	Criterios heurísticos de diseño	109
7.	Defectos de configuración y detallado sismorresistente	123
7.1	Detalles de diseño sismorresistente de edificios	123
7.2	Influencia del adecuado diseño sismorresistente en la respuesta global y local de la estructura	124
8.	Comparación entre las normativas NCSE-02, EUROCÓDIGO-8 y Covenin 1756-98	
8.1	Introducción	137
8.2	Factores de reducción de respuesta	137
8.2.1	Componentes del factor de reducción de respuesta R	138
8.2.2	Nueva propuesta (ATC 1995)	141
8.3	Comparación de factores de reducción aplicados en diferentes normativas	143
8.3.1	Factores de reducción de respuesta en el	

	EUROCODIGO-8	151
8.3.2	Factores de reducción de respuesta en la Normativa NCSE-02	151
8.3.3	Factores de reducción de respuesta en la Normativa Covenin 1756-98	158
8.3.4	Comparación entre los valores de los factores de reducción	162
8.3.5	Cálculo simplificado de las fuerzas sísmicas equivalentes	166
8.3.6	Otras formas de definición de la acción y de cálculo de la respuesta sísmica	170
8.3.7	Desviación de piso	170
8.3.8	Estabilidad	172
8.3.9	Torsión e irregularidades	173
Anexo:	Programa para ordenador MODAL	175
Referencias		177

Prólogo

El ámbito de aplicación de la mayoría de las normativas de diseño sismorresistente, vigentes en los distintos países del mundo, es el campo de las *estructuras de edificación*. La apariencia de generalidad que a veces se les da a dichas normativas se refiere solamente a la definición de la intensidad o aceleración máxima del terreno en las diferentes zonas sísmicas del país. La incorporación de requisitos de diseño sismorresistente en las normativas de diseño de edificios data de los años 20 y 30 del siglo XX, cuando se observó claramente la necesidad de incluir en los cálculos los efectos de la acción sísmica. Al no disponerse de mediciones fiables de las características cinemáticas del movimiento sísmico del terreno y de conocimientos suficientes acerca de la respuesta dinámica de las estructuras, las fuerzas sísmicas de diseño se evaluaban de una manera muy simplificada. Habitualmente, se adoptaban para la acción sísmica fuerzas estáticas horizontales del orden del 10% del peso total del edificio. Puesto que se utilizaba un cálculo elástico con base en criterios de tensión admisible, las estructuras reales diseñadas tenían una resistencia a fuerzas laterales mayor que la calculada.

En el período transcurrido desde 1940 hasta 1960, se registraron numerosos acelerogramas de terremotos fuertes, lo que creó las condiciones para ampliar el estado del conocimiento acerca de los movimientos sísmicos del terreno. Asimismo, al desarrollarse procedimientos de cálculo dinámico cada vez más sofisticados, orientados hacia su aplicación en ordenadores, se pudieron realizar estudios mucho más rigurosos de la respuesta sísmica de las estructuras. El criterio de diseño que se utilizaba en las normativas de aquel tiempo requería que no se supere la capacidad de resistencia de la estructura. Sin embargo, años más tarde se pudo comprobar que al diseñar las estructuras utilizando dichas normativas, no se aseguraba que su límite de resistencia en el campo lineal elástico no se supere durante algunos terremotos fuertes. A pesar de ello, se pudo observar que esta falta de resistencia no siempre llevaba al fallo de la estructura y, muchas veces ni siquiera a daños sísmicos severos. La conclusión fue que

las estructuras lograban sobrevivir a los terremotos si se conseguía mantener la degradación de su resistencia por encima de ciertos límites durante la fase de deformación inelástica y en tal caso hasta era posible su reparación con unos costes razonables.

Una vez hecha la observación de que la resistencia excesiva no es esencial y ni siquiera deseable, el objetivo del diseño sismorresistente sufrió un cambio: en vez de asegurar la resistencia de las estructuras a grandes fuerzas laterales, se trataba ahora de *evitar el efecto destructivo* de dichas fuerzas sobre las estructuras (Paulay y Priestley 1992). Como consecuencia, empezó a utilizarse el cálculo no lineal de las estructuras como una herramienta esencial en la evaluación del diseño sismorresistente. Más recientemente, se llegó a la conclusión que el diseño sismorresistente debe orientarse al uso de edificios con alta capacidad para deformarse en el campo inelástico, permitiendo que esta no linealidad se concentre en ciertas zonas preestablecidas de las estructuras.

A pesar de la cada vez mejor comprensión y conocimiento de los factores que influyen en el comportamiento sísmico de los edificios, existe actualmente un gran desnivel entre los desarrollos teóricos que se realizan continuamente en la ingeniería sísmica y los conceptos que se aplican en las normativas de diseño de muchos países y, obviamente, en el diseño. Este hecho se refleja claramente en el comportamiento sísmico muy irregular de los edificios durante los grandes terremotos ocurridos en el mundo en los últimos diez años.

Es importante destacar la manera en que la aplicación de las normativas de diseño puede llevar a una reducción del riesgo sísmico en las zonas urbanas. En una zona sísmica existen edificios construidos en diferentes épocas históricas y con tipologías estructurales muy variadas. Obviamente, mediante la aplicación de normativas se consigue reducir solamente el riesgo de los edificios de nuevo diseño, que son muy pocos en comparación con la totalidad de los edificios existentes en la zona. En consecuencia, dicha aplicación puede dar resultados solamente a largo plazo. Y es importante aclarar que es muy difícil tomar medidas que tengan un resultado inmediato. Por ejemplo, aplicar un plan de evaluación del estado de los edificios, junto con uno de reparación o rehabilitación de los edificios que lo requieran, también puede dar resultados sólo a largo plazo.

Las normativas hacen recomendaciones referentes a las cargas sísmicas que se deben utilizar, a los métodos simplificados de cálculo de estructuras, a los criterios que deben aplicarse para asegurar un buen comportamiento global de las mismas así como a los detalles de diseño sismorresistente que se deben incorporar. Los procedimientos de análisis estructural previsto en todas las normativas del mundo están fundamentados en conceptos generalmente utilizados en el cálculo estático y dinámico de estructuras. Sin embargo, al considerarse en las normativas la posibilidad de utilizar procedimientos simplificados de cálculo dinámico y fórmulas aproximadas para la determinación de las características dinámicas de los edificios, los mencionados conceptos no aparecen explicados de una manera clara. Por ejemplo, en los cálculos dinámicos, en la mayoría de las normativas se desarrollan relaciones aplicables únicamente al cálculo de estructuras modeladas como edificios de cortante, las cuales, aunque introducen importantes simplificaciones, proporcionan resultados satisfactorios en ciertas tipologías estructurales. Este hecho puede tener como consecuencia que algunos

usuarios de las normativas, que no tenga suficiente base teórica en la dinámica de estructuras, puedan no entender el origen de los procedimientos o de las fórmulas de cálculo que deben aplicar. Por este motivo, en la monografía se analiza el contenido de las normativas de diseño sismorresistente en lo referente a los métodos de cálculo que proponen, explicando los conceptos de cálculo de estructuras que se aplican en cada caso, con especial referencia a la normativa española en vigor, NCSE-02.

Además, la monografía trata aspectos concretos del así llamado diseño conceptual, el cual proporciona descripciones cualitativas de las soluciones de diseño a partir de la experiencia del proyectista; dicho diseño tiene como finalidad asegurar un buen comportamiento sísmico global de los edificios. La necesidad de este objetivo se debe al hecho de que en muchas normativas el diseño conceptual se concreta en reglas que no se justifican en el texto de la normativa. Hay que mencionar que la fase de diseño conceptual de un edificio es muy importante, puesto que durante ella se eligen, por ejemplo, la tipología estructural, las formas en planta de la estructura, la distribución en altura de las masas y de la rigideces, se especifica la organización del sistema resistente, etc. Todo esto implica tomar decisiones determinantes en fases iniciales del diseño de estructuras, que condicionan el comportamiento sísmico de las mismas hasta tal punto que todos los cálculos posteriores así como los detalles de diseño que se apliquen, pueden no tener el efecto esperado.

Para facilitar la aplicación del análisis dinámico de edificios, se ha incorporado un programa elaborado en Matlab ®, el cual se puede obtener de la página web: www.cimne.com/is-56/modal, junto con los archivos de datos y resultados que están descritos en el Anexo de la presente monografía. Cabe indicar que el uso del programa está restringido a fines académicos.

Capítulo 1

Las normativas de diseño como mecanismo de reducción del riesgo sísmico

1.1 INTRODUCCIÓN

Las pérdidas económicas y de vidas humanas que se producen como consecuencia de los terremotos están relacionadas, en la mayoría de los casos, con un comportamiento deficiente de las estructuras (Bertero 1992b; Comartin *et al.* 1995). Numerosas estructuras realizadas de acuerdo con normativas de diseño y construcción actualmente en vigor sufrieron daños importantes durante terremotos ocurridos en los últimos 20 años. Así es el caso de los terremotos de Chile y México (1985), de Armenia (1988), de California (1989 y 1994), de Japón (1995), de Turquía e India (1999), de Irán (2003), Japón (2004), etc.

Es indudable el gran avance de la investigación en los métodos de cálculo y diseño sismorresistente en los últimos años, pero quizás no es tan evidente el avance de la práctica, con particular referencia a las normativas de diseño. Prueba de ello son los efectos de los de Northridge (1994) y de Kobe (1995). El terremoto de Northridge, que es considerado como el terremoto más destructivo en la historia de Estados Unidos, ocasionó un número de 57 víctimas y unas pérdidas económicas entre 20000 y 30000 millones de dólares (Bonacina *et al.* 1994). El terremoto de Kobe provocó 5470 víctimas y pérdidas económicas de 110.000 millones de dólares (Comartin *et al.* 1995). Para poder comparar adecuadamente estos datos, debe aclararse primero que en la zona

sísmica de California las normativas, que se actualizan continuamente, a medida que ocurren nuevos terremotos en la zona, tienen en cuenta todos los datos disponibles referentes a la peligrosidad. Al contrario, en la región de Kobe hubo un fallo en la predicción de la acción: dicha región estaba incluida entre las 18 zonas de Japón con una peligrosidad sísmica moderada, debido a la simple casualidad de que en los 30 años anteriores no se habían producido terremotos importantes en la zona. No es, pues, una paradoja, sino la pura realidad, que las zonas de mayor riesgo son las de Sismicidad aparentemente moderada, en las cuales el período de retorno de un terremoto fuerte es largo (Barbat *et al.* 1995; Bozzo y Barbat 1995b).

Es obvio que los avances que se realizan en el campo del diseño de estructuras pueden aplicarse solamente a las estructuras nuevas. Sin embargo, el número de éstas es muy pequeño en comparación con el número total de estructuras existentes en una zona. Consecuentemente, para reducir las pérdidas debidas a los sismos es necesario mejorar también el comportamiento de las estructuras antiguas. Esta necesidad ha sentado las bases de los estudios de vulnerabilidad sísmica de las estructuras. El objetivo de tales estudios es el de predecir los daños esperados en una estructura, en un grupo de estructuras o en una zona urbana completa, en el supuesto de un terremoto de una cierta magnitud. Partiendo de la mencionada predicción de daños, pueden definirse las soluciones de reducción de la vulnerabilidad estructural y, en consecuencia, de las pérdidas esperadas (Yépez, Barbat y Canas 1995; Yépez, Barbat y Canas 1996a).

Desde un punto de vista del cálculo de estructuras, el ingeniero calculista espera que la sismología le proporcione los datos necesarios para la definición de la acción sísmica. La totalidad de los procedimientos analíticos, experimentales y numéricos que pueden conducir dicha definición de la acción para su utilización en el cálculo de las estructuras son objeto de una materia relativamente nueva, denominada *Ingeniería Sismológica*. Obviamente, la operación de definición de la acción tiene un carácter de *predicción* de los parámetros de los terremotos, con todas las implicaciones probabilistas que dicha operación requiere (Barbat y Canet 1994).

Por otra parte, la definición de la acción está directamente relacionada con el tipo de análisis estructural que se pretende realizar. En el caso de *estructuras con comportamiento lineal*, se suele partir del desacoplamiento modal de las ecuaciones del movimiento y definir la acción mediante espectros sísmicos de respuesta, lo que permite sólo el cálculo de la respuesta máxima de la estructura; sin embargo, dicha respuesta máxima es el dato más importante en el que se fundamenta el diseño estructural. Esta forma de definición de la acción es la que se utiliza también en las normativas de diseño sismorresistente. En el caso de *estructuras con comportamiento no lineal*, se suelen utilizar procedimientos de integración numérica de las ecuaciones diferenciales del movimiento siendo necesaria, en consecuencia, una definición de la acción sísmica mediante acelerogramas. Los procedimientos de integración mencionados permiten el cálculo de la historia completa de la respuesta estructural, pero ésta tiene escaso valor práctico en el diseño de estructuras por la complicación que luego introduce el post-proceso de la información obtenida del cálculo. Además de esto, dicho cálculo consume más tiempo de ordenador y al mismo tiempo requiere un conocimiento previo detallado

de ciertas características de la estructura que en un cálculo preliminar no suelen definirse (Lin y Mahin, 1985; Barbat *et al.* 1994).

En las normativas existentes en los distintos países del mundo, la teoría de los espectros sísmicos de respuesta ha sido aplicada también al análisis no lineal de estructuras. Aunque la aplicabilidad de dichos espectros al análisis no lineal de estructuras no está completamente fundamentada desde un punto de vista teórico (Lin y Mahin, 1985), han sido desarrollados para tal caso espectros para sistemas con comportamiento no lineal. Éstos se representan gráficamente en función de los períodos propios correspondientes al sistema lineal elástico y de coeficientes de reducción que tienen en cuenta la capacidad de *ductilidad* de la estructura, la cual se define y analiza en los capítulos 4 y 6.

Cualquier normativa de diseño sismorresistente debe dar recomendaciones referentes a tres temas principales:

1. las cargas sísmicas y la probabilidad de que éstas sean superadas,
2. los criterios que deben aplicarse para un buen comportamiento global de la estructura durante los terremotos,
3. los detalles de diseño sismorresistente.

Además, las normativas suelen dar algunas indicaciones acerca de los procedimientos de cálculo de estructuras sometidas a fuerzas estáticas horizontales, representando las fuerzas sísmicas equivalentes (véase el capítulo 4). Estas indicaciones pueden considerarse como innecesarias dentro del más amplio nivel de conocimiento de los calculistas de estructuras.

Los aspectos concretos que suelen ser tratados detalladamente en una normativa de cálculo sísmico, dentro del marco de los temas antes mencionados, son los siguientes (Barbat y Hurtado 1996):

1. Tipos de estructuras a los que es aplicable la normativa.
2. Mapa de peligrosidad sísmica de la zona.
3. Definición de la acción en forma de espectro sísmico de respuesta, para la zona sísmica.
4. Método de cálculo de las fuerzas sísmicas equivalentes, con base en la superposición modal. Las normativas incluyen siempre procedimientos de cálculo simplificados de dichas fuerzas, cuya presencia es hoy en día obsoleta debido al uso generalizado de ordenadores.
5. Indicaciones acerca de los procedimientos de cálculo de los esfuerzos seccionales modales y los métodos de superposición modal de dichos esfuerzos. Es conveniente notar que esta metodología es rigurosamente justificada sólo bajo el cumplimiento de las hipótesis de la linealidad de la respuesta estructural (véase el apartado 4.4.1). Es por esta condición de linealidad que aún se continua escalando las acciones elásticas mediante factores de reducción, para obtener acciones inelásticas equivalentes.
6. Indicaciones referentes a las formas en planta de las estructuras más adecuadas a una zona sísmica y la distribución con la altura de las masas y rigideces de las mismas. Asimismo, para cada tipo de estructura contemplado en la normativa,

deben especificarse los sistemas más adecuados de organización del sistema resistente.

7. Recomendaciones para los detalles de diseño que se deben utilizar para cada una de las tipologías estructurales contempladas por la normativa.

En la presente monografía se hará un análisis de todos los aspectos mencionados en los puntos anteriores, dentro del marco de los conceptos de cálculo de estructuras que se deben aplicar en cada caso. Para centrar el tema en un marco más amplio, en este capítulo se examina la posibilidad de reducir el riesgo sísmico en una zona mejorando las normativas de diseño sismorresistente existentes. Se parte del problema de la relación entre la peligrosidad sísmica y el potencial destructivo de los terremotos. Luego se analiza la modalidad en que el estudio de la vulnerabilidad sísmica de las estructuras de una zona puede proporcionar datos para la mitigación de los efectos destructivos de los terremotos y el papel de las normativas de diseño en este contexto.

1.2 LA VULNERABILIDAD, EL RIESGO SÍSMICO Y SU REDUCCIÓN

Se ha observado durante los terremotos ocurridos en el pasado que ciertas estructuras, dentro de la misma tipología, experimentan un daño más severo que otros, a pesar de estar ubicadas en la misma zona. Al grado de daño que sufre una estructura, ocasionado por un sismo de determinadas características, se le denomina vulnerabilidad. Por ello, a los edificios se les puede clasificar en *más vulnerables* o *menos vulnerables* frente a un mismo evento sísmico. Si se observa la figura 1.1, la respuesta de la estructura X_4 es consecuencia de la convolución del movimiento en la cimentación por la función de transferencia D. La vulnerabilidad frente a un sismo de determinadas características es una propiedad intrínseca de cada estructura y, por tanto, independiente de la peligrosidad del emplazamiento. Esto quiere decir que una estructura puede ser vulnerable pero no estar en riesgo si no se encuentra en un sitio con una cierta peligrosidad sísmica.

En los últimos años se ha intentado definir el riesgo sísmico para poder realizar su gestión con el objetivo de evitar o mitigar los desastres económicos, sociales y ambientales que puedan producirse. La reducción del riesgo es el mecanismo preventivo que mejor permite cumplir con este objetivo y cualquier acción orientada hacia su reducción debe partir de su correcta evaluación. En dicha evaluación es necesario tener en cuenta, desde un punto de vista multidisciplinar, no solamente el daño físico esperado, el número de víctimas o las pérdidas económicas, sino también factores sociales, organizacionales e institucionales, relacionados con el desarrollo de las comunidades. A escala urbana, por ejemplo, la vulnerabilidad como factor interno de riesgo debe relacionarse no solamente con la exposición del contexto material o su susceptibilidad física de ser afectado, sino también con las fragilidades sociales y la falta de resiliencia de la comunidad propensa. La falta de organización institucional y comunitaria, las debilidades en los preparativos para la atención de emergencias, la inestabilidad política y la falta de salud económica de un área geográfica contribuyen a tener un mayor riesgo. Por lo tanto, las consecuencias potenciales no sólo están

relacionadas con el impacto del suceso, sino también con la capacidad para soportar el impacto y las implicaciones del impacto en el área geográfica afectada.

1.2.1 Concepto de riesgo sísmico

El marco conceptual de la vulnerabilidad surgió de la experiencia humana en situaciones en que la propia vida diaria normal era difícil de distinguir de un desastre. La gran mayoría de las veces existían condiciones extremas que hacían realmente frágil el desempeño de ciertos grupos sociales, las cuales dependían del nivel de desarrollo alcanzado, así como también de la planificación de ese desarrollo. Se empezó a identificar entonces en los grupos sociales la vulnerabilidad, entendida como la reducción de la capacidad a “acomodarse” a determinadas circunstancias. Dicha vulnerabilidad ha sido definida de diferentes maneras, entre las que se puede citar la siguiente: Grado de pérdida de un elemento o grupo de elementos en riesgo como resultado de la probable ocurrencia de un suceso desastroso, expresada en una escala desde 0 (sin daño) a 1 (pérdida total). La UNDRO y la UNESCO promovieron una definición que se sintetiza a continuación a partir de los siguientes conceptos (Sandi 1983):

- **Amenaza, peligro o peligrosidad, H .** Es la probabilidad de ocurrencia de un suceso potencialmente desastroso durante cierto período de tiempo en un sitio dado.
- **Vulnerabilidad, V .** Es el grado de pérdida de un elemento o grupo de elementos bajo riesgo como resultado de la probable ocurrencia de un suceso desastroso, expresada en una escala desde 0 o sin daño a 1 o pérdida total.
- **Elementos en riesgo, E .** Son la población, los edificios y obras civiles, las actividades económicas, los servicios públicos, las utilidades y la infraestructura expuesta a una amenaza en un área determinada.
- **Riesgo total, R_t .** Se define como el número de pérdidas humanas, heridos, daños a las propiedades y efectos sobre la actividad económica debido a la ocurrencia de un desastre, es decir el producto del riesgo específico, y los elementos en riesgo, E .

Con estas definiciones, la evaluación del riesgo total puede llevarse a cabo mediante la siguiente fórmula general:

$$R_t = H \otimes V \otimes E \quad (1.1)$$

El concepto de **amenaza** se refiere a un peligro latente o factor de riesgo externo de un sistema expuesto que se puede expresar matemáticamente como la probabilidad de exceder un nivel de ocurrencia de un suceso con una cierta intensidad, en un sitio específico y en un período de tiempo determinado. La **vulnerabilidad** puede entenderse como un factor de riesgo interno, correspondiente a su predisposición intrínseca de ser

susceptible a sufrir un daño, expresado como la factibilidad de que el sistema expuesto sea afectado por el fenómeno que caracteriza la amenaza.

Así como en tiempos anteriores se utilizó el término riesgo para referirse a lo que hoy se denomina amenaza, actualmente se utiliza a veces la palabra vulnerabilidad con el significado de riesgo. Pero los conceptos son diferentes y su definición es esencial para disponer de un enfoque que permita identificar las posibilidades de reducción del riesgo: en general no es posible actuar sobre la amenaza pero es posible reducir el riesgo disminuyendo la vulnerabilidad de los elementos expuestos.

El concepto de **vulnerabilidad global** (Wilches-Chaux 1989) caracteriza la vulnerabilidad y el riesgo no sólo desde una perspectiva física, sino que también integra varias otras dimensiones que caracterizan el contexto del problema teniendo en cuenta varias otras perspectivas tales como la económica, social, educativa, política, institucional, ambiental, cultural e ideológica. El planteamiento de una vulnerabilidad global permite su visualización desde diversas perspectivas del conocimiento y facilita su evaluación como un proceso dinámico acumulativo de fragilidades, deficiencias o limitaciones (Cardona y Barbat 2000).

1.2.2 Concepto de amenaza sísmica

Se entiende por amenaza o peligrosidad sísmica de una zona cualquier descripción de los efectos provocados por terremotos en el suelo de dicha zona (Udías y Mézcua 1986; Bertero 1992). Estos efectos pueden representarse como aceleración, velocidad o desplazamiento sísmico del terreno o por la intensidad macrosísmica de la zona. Por ejemplo, la **peligrosidad sísmica** podría definirse de manera probabilista, como la probabilidad de ocurrencia, dentro de un período específico de tiempo y dentro de un área dada, de un movimiento sísmico del terreno de una intensidad determinada. Para su evaluación es necesario analizar los fenómenos que ocurren desde la emisión de ondas sísmicas en el foco hasta que dichas ondas alcancen la zona estudiada. En la Figura 1.1 puede observarse el mecanismo de propagación de la energía de un sismo desde el epicentro hasta un punto de una estructura. Puede observarse que, al ocurrir un terremoto con unas ciertas características focales (profundidad, mecanismo focal, magnitud, etc.), parte de la energía disipada se convierte en ondas sísmicas.

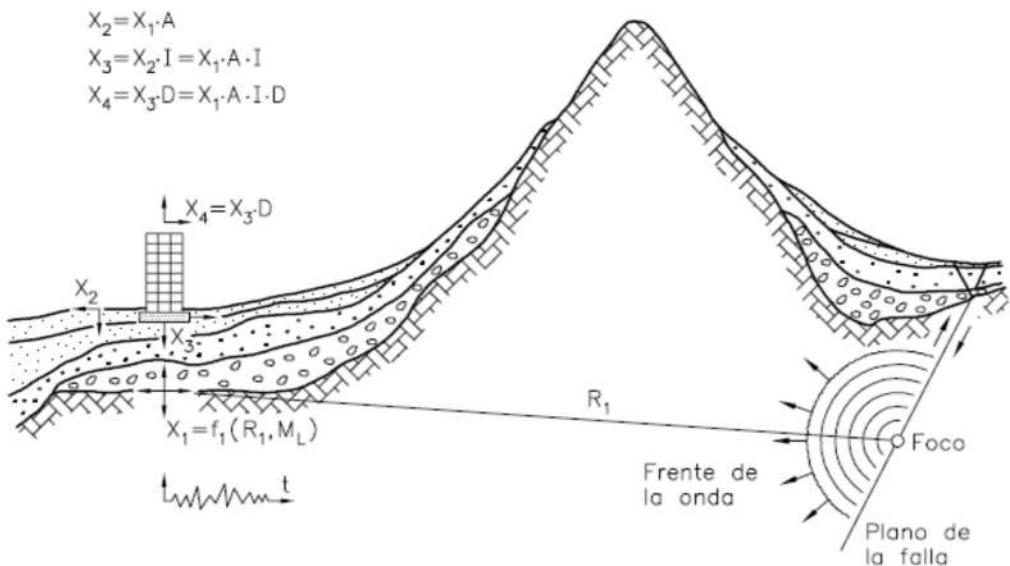


Figura 1.1. Propagación de la energía sísmica desde el epicentro hasta la estructura (Bertero 1992).

Al propagarse por la tierra, las ondas sísmicas se reflejan, se refractan, se atenúan o se amplifican, hasta llegar al basamento rocoso que se encuentra debajo del emplazamiento de una estructura como una excitación X_1 . Las ondas sufren un nuevo filtrado a través de las capas de suelo que se encuentran entre el basamento y la superficie, que tienen una función de transferencia, obteniéndose la señal X_2 . Debido al fenómeno de interacción suelo-estructura descrito por una función de transferencia A , la señal sufrirá nuevos cambios hasta obtenerse la señal X_3 , que será la excitación en la base del edificio. La respuesta de la estructura X_4 es el resultado de la convolución de la señal X_3 a través de la función de transferencia de la estructura.

La evaluación de las funciones de transferencia I y D es un problema de ingeniería estructural, mientras que el cálculo de la función de transferencia A y la evaluación de la excitación X_1 deben solucionarse mediante estudios de peligrosidad sísmica. En otras palabras, un estudio de peligrosidad tiene como objetivo estimar el movimiento del terreno en un lugar determinado como consecuencia de los terremotos o, como mínimo, de proporcionar una evaluación del tamaño del terremoto en el lugar en cuestión (Barbat, Canas y Canet 1988; Canas 1994 *et al.*; Canas y Barbat 1995).

Los estudios de peligrosidad sísmica a nivel regional, también conocidos como estudios de macrozonificación, se dirigen a estimar el parámetro X_1 , mientras que los estudios de peligrosidad a nivel local -microzonificación- tienen como objetivo el de evaluar la función de transferencia A y por ende la señal X_2 . Para realizar estos estudios se requiere investigaciones detalladas en varios campos tales como la Geofísica, la Geología y la Geotécnica.

La evaluación de la peligrosidad sísmica en una región completa puede realizarse mediante varias metodologías. Algoritmos conocidos, como los de Cornell y McGuire (1977), son generalmente los utilizados para realizar la mencionada evaluación. Varios otros métodos, como el propuesto por Egozcue *et al.* (1991), utilizan técnicas bayesianas para solucionar el problema de la falta de datos en regiones de sismicidad moderada o baja.

En las normativas de diseño sísmico de estructuras se adopta una severidad de la acción de acuerdo con el período de vida de la estructura, llamado también tiempo de exposición; durante este tiempo se espera que la acción de diseño no sea excedida para un determinado nivel de probabilidad de ocurrencia (Yépez, Barbat y Canas 1994; Barbat, Yépez y Canas 1995). El mencionado tiempo de exposición puede variar según la importancia de la estructura y, por ello, es de gran interés relacionarlo con el período de retorno de los terremotos, que es el tiempo medio transcurrido entre la ocurrencia de sismos con la misma característica específica. Cuando la mencionada característica es, por ejemplo, la aceleración máxima, al período de retorno se le puede denominar $T_r(a_{\max})$. Si t es el tiempo de exposición, la probabilidad de excedencia en t años de un sismo de tamaño asociado al período de retorno dado, puede expresarse de la siguiente manera (Barbat y Miquel Canet 1994):

$$P_t(a_{\max}) = 1 - \left[1 - \frac{1}{T_r(a_{\max})} \right]^t \quad (1.2)$$

De esta manera pueden obtenerse mapas de peligrosidad sísmica de toda una región o de un país para terremotos con distintas intensidades esperadas (o distintas aceleraciones máximas), asociadas a un período de retorno determinado.

Aunque, tradicionalmente, la fuerza destructiva de un terremoto ha sido expresada en función de la aceleración máxima del terreno, existen otras características de los sismos, tales como la intensidad, el contenido de frecuencias, la duración, el número, la secuencia de los choques, etc., que tienen una influencia importante en el daño sufrido por las estructuras. Obviamente, a efectos de cálculo de estructuras, el factor más importante a tener en cuenta al elegir un procedimiento de descripción de la fuerza de los terremotos sería justamente la capacidad de cuantificar el daño estructural. Sin embargo, siempre ha existido una cierta dualidad en la caracterización de la violencia de los terremotos: por una parte, la tendencia de los sismólogos ha sido de utilizar los registros de los movimientos del terreno y, por otra parte, los ingenieros han considerado más útil la información relacionada con la respuesta de las estructuras (Lin y Mahin, 1985). Por ejemplo, se han utilizado, además de los valores máximos de la aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno, el espectro de amplitudes de Fourier, el espectro de seudo-velocidades, la intensidad espectral propuesta por Housner (1947) (ver sección 2.2), el valor medio cuadrático de las aceleraciones correspondientes a la fase fuerte de un acelerograma, la intensidad en diferentes escalas macrosísmicas, etc.

La utilización de dicha intensidad implica la siguiente contradicción: Por una parte las escalas macrosísmicas -que son escalas de efectos- son utilizadas en las normativas para definir la propia acción. A partir de dicha acción puede calcularse el daño sufrido por una estructura mediante métodos de la mecánica aplicada. Por otra parte, estas mismas escalas describen, por su propia definición, los efectos de los terremotos; uno de estos efectos es justamente el daño sufrido por la estructura. Sería interesante comprobar si este daño coincide con el obtenido a partir de la acción.

Se ha puesto de manifiesto en los últimos años que, a pesar de los avances en la Ingeniería Sísmica y en la Ingeniería Estructural, el riesgo debido a los terremotos ha incrementado. Un ejemplo puede proporcionarlo la comparación de las pérdidas producidas por el terremoto de San Francisco del año 1906, que tuvo una magnitud de 8.3, con las del terremoto de Loma Prieta, del año 1989, de magnitud 7.1. Las pérdidas económicas directas, debidas únicamente al daño o colapso de las estructuras, fueron parecidas: 8000 millones de dólares (Astaneh 1989; Benuska 1990). Sin embargo, si se compara la energía liberada durante los dos terremotos, se observa que en el caso del terremoto del año 1906 ésta fue 63 veces mayor. Surge una paradoja: con el paso del tiempo, el potencial de destrucción de los sismos va aumentando, a pesar de que la sismicidad de una zona permanece constante. La explicación de este hecho la da Bertero (1992), mostrando que la posibilidad que se produzca un desastre por terremoto se incrementa cuanto mayor y más cercano a un centro urbano sea el sismo, cuanto mayor sea la población y el desarrollo económico y cuanto menor sea el grado de preparación antisísmica de la población. Sin embargo, debe añadirse otra causa a las anteriores: la existencia de estructuras antiguas muy vulnerables en las zonas sísmicas. Muchas de éstas fueron construidas sin diseño sismorresistente alguno, o utilizando normativas de los tiempos cuando la Ingeniería Sísmica aún estaba en sus comienzos; otras sufrieron ya el efecto de algún terremoto con el consiguiente daño, que, a veces, no se aprecia a simple vista. Además de todo esto, es importante dejar claro que, a pesar de que las normativas de diseño se están mejorando continuamente y son cada vez más exigentes, aún no son infalibles (Bertero 1992).

1.2.3 Evaluación de la vulnerabilidad y del riesgo sísmico físico

El concepto de riesgo sísmico está siempre relacionado con la predicción de pérdidas futuras y está íntimamente ligado a la psicología personal o colectiva, razón por la que, obviamente, es difícil darle objetividad. Por este motivo es tan compleja la evaluación del riesgo, aun cuando se trate solamente de su dimensión física. Cuando, además, a esta dimensión se le añaden las relacionadas con el contexto, aspectos absolutamente necesarios para facilitar la gestión, el problema se vuelve mucho más complejo aun. Además, es absolutamente necesario que el riesgo esté siempre asociado con la decisión, con la ejecución de una acción que se debe llevar a cabo. Puesto que los resultados de cada acción factible son inciertos, es esencial considerar incertidumbres en el análisis de sistemas físicos para poder decidir si un modelo es apropiado para el problema que se debe resolver (Cardona 1999).

Un análisis de vulnerabilidad es un estudio de la capacidad de un sistema de resistir o absorber el impacto de un suceso que caracteriza una amenaza y, por lo tanto, se diferencia del análisis de riesgo, que es la estimación de pérdidas de acuerdo con el grado de amenaza considerado y con el nivel de vulnerabilidad existente en el sistema expuesto. La evaluación de la vulnerabilidad física ha sido la que más se ha desarrollado hasta ahora. El correspondiente riesgo físico puede calcularse como la pérdida esperada en un período de tiempo y puede expresarse como una proporción del valor o coste de reemplazo de los elementos en riesgo.

Al igual que la amenaza, el riesgo puede plasmarse en mapas, que pueden ser probabilistas o deterministas. En este último caso, los mapas de riesgo representan un escenario, o sea la distribución espacial de los efectos potenciales que puede causar un suceso de una intensidad dada sobre un área geográfica, de acuerdo con el grado de vulnerabilidad de los elementos que componen el sistema expuesto. Estos mapas, no sólo son de fundamental importancia para la planificación de la intervención de la amenaza y/o la vulnerabilidad, sino también para la elaboración de los planes de contingencia que los organismos operativos deben realizar durante la etapa de preparativos para emergencias. La evaluación de pérdidas futuras requiere técnicas probabilistas, con lo que los riesgos se expresan en pérdidas medias de dinero o de vidas por año.

El riesgo físico está directamente relacionado con la calidad del diseño sismorresistente de la estructura. Cuando se lleva a cabo un diseño estructural, en realidad se está realizando la evaluación de la vulnerabilidad de un modelo, que tiene ciertas características geométricas y de los materiales, de acuerdo con los requisitos mínimos establecidos por una normativa y considerando como aceptable el modelo cuando cumple dichos requisitos. Sin embargo, este tipo de análisis de vulnerabilidad se realiza con el fin de proyectar dicho modelo, es decir, de proponerlo como solución constructiva que debe llevarse a cabo teniendo en cuenta factores de seguridad. Hoy se conocen las bases que permiten realizar dicho diseño con razonable seguridad para la vida. Más aun, en el diseño se admiten sistemas estructurales que sufran daños controlados y que disipen una parte importante de la energía absorbida. Obviamente, durante la vibración de estas estructuras en el rango plástico durante sismos fuertes se producen daños estructurales y no estructurales. Es decir, los propios criterios de diseño utilizados en las normativas admiten la vulnerabilidad de la estructura y un cierto nivel de riesgo aceptable que está implícitamente incluido en las normas. Tal como se ha visto durante los últimos terremotos del año 2003 de California e India, en las regiones donde se diseña de acuerdo con una normativa sismorresistente adecuada, donde la construcción es sometida a una supervisión estricta y donde el sismo de diseño es representativo de la amenaza sísmica real de la zona, el daño es marginal en comparación con el observado en sitios donde no se dan estas circunstancias.

En el caso de las estructuras de hormigón armado, es común que se produzcan daños estructurales en pilares durante los sismos muy fuertes, tales como grietas diagonales, causadas por cortante y/o torsión, o grietas verticales, desprendimiento del recubrimiento, aplastamiento del hormigón y pandeo de las barras longitudinales por exceso de esfuerzos de flexión y compresión. En vigas se producen grietas diagonales y rotura de estribos por causa del cortante y/o de la torsión y grietas verticales, rotura del

refuerzo longitudinal y aplastamiento del hormigón por la flexión debida a cargas alternativas. Las conexiones entre elementos estructurales son, por lo general, los puntos más críticos. En las uniones viga-pilar (nudos), el cortante produce grietas diagonales y es habitual ver fallos por adherencia y anclaje del refuerzo longitudinal de las vigas como consecuencia de esfuerzos excesivos de flexión. En las losas se pueden producir grietas por punzonamiento alrededor de los pilares y grietas longitudinales a lo largo de la losa de piso debido a la excesiva demanda de flexión que puede imponer el sismo. Las irregularidades en altura, tales como cambios bruscos de rigidez entre pisos adyacentes, hacen que la absorción y disipación de energía durante el sismo se concentren en los pisos flexibles, donde los elementos estructurales se ven sometidos a solicitudes excesivas. Las irregularidades en planta de la masa, rigidez y resistencia pueden originar vibraciones torsionales que generan concentraciones de esfuerzos difíciles de evaluar.

Generalmente, los daños no estructurales se deben a la unión inadecuada entre los muros divisorios, las instalaciones y la estructura, o a la falta de rigidez de la misma, lo que conduce a excesivas deformaciones que no pueden ser absorbidas. Los elementos no estructurales de las construcciones rígidas se comportan, en general, mejor que en las flexibles, al sufrir menor daño al limitarse el desplazamiento relativo entre pisos. La vulnerabilidad física de un edificio condiciona su vulnerabilidad funcional, que está relacionada no solamente con la seguridad de la estructura, sino también con el comportamiento de los elementos no estructurales, tales como tabiques, instalaciones, equipos, etc., que son fundamentales para que el edificio se mantenga en servicio. Este aspecto es de máxima importancia en el caso de aquellos edificios cuya función es vital, como es, por ejemplo, el caso de los hospitales.

Se han propuesto muchos métodos para evaluar las pérdidas esperadas durante futuros terremotos en centros urbanos. Aunque no es posible predecir con precisión cuándo y dónde va a ocurrir un sismo, sí es posible realizar estimaciones de cuántas víctimas y qué daños causará. Este tipo de evaluaciones permite dimensionar la magnitud del problema que tendrá que afrontar una ciudad o una región, razón por la cual este tipo de estudios se han convertido en ineludibles para la prevención de desastres. Se han propuesto diferentes metodologías para la evaluación del riesgo sísmico de centros urbanos mediante escenarios de daños. Partiendo de una estimación de la amenaza sísmica mediante un estudio de micro zonificación, se utilizan luego matrices o funciones de vulnerabilidad para diversas tipologías estructurales, que relacionan el daño potencial con la severidad del movimiento sísmico esperado (ATC 1985; Barbat 1998). En general, los diferentes métodos utilizados pueden clasificarse en probabilistas y deterministas, y su utilización depende del objetivo del estudio. En los métodos probabilistas, la amenaza sísmica se calcula mediante técnicas de la teoría de la probabilidad, luego se evalúa la vulnerabilidad por tipos de edificios y se estima el riesgo en términos de pérdidas probables. La vulnerabilidad de las estructuras también puede estimarse en términos probabilistas, dada la dispersión de los resultados que puede ofrecer un análisis de vulnerabilidad para un amplio número de edificios. Comúnmente, estos métodos son utilizados para la estimación de pérdidas económicas acumuladas y de las primas de seguros. En los métodos deterministas se postulan uno o más terremotos sin considerar explícitamente su probabilidad de ocurrencia.

Habitualmente, se utiliza el terremoto más fuerte conocido que haya ocurrido en la región, también llamado máximo terremoto histórico. Las etapas son similares a las de los métodos probabilistas y se utilizan para evaluar las pérdidas debidas a un terremoto específico, a fin de estudiar anticipadamente la reducción de daños y determinar un escenario para la planificación de emergencias.

1.2.4 Métodos de evaluación de la vulnerabilidad sísmica

El análisis de vulnerabilidad de un edificio existente puede entenderse como el cálculo de la capacidad que dicha estructura tiene para soportar las solicitudes sísmicas reales. Esta evaluación difiere sustancialmente del proceso de análisis que se realiza en la fase de diseño, pues en este caso las cargas deben ser las reales, al igual que la resistencia y la ductilidad de la estructura y de los elementos, sin considerar los tradicionales factores de seguridad. En la evaluación del daño estructural se pueden utilizar:

Matrices de probabilidad de daño, que expresan en forma discreta la probabilidad condicional de que una estructura sufra un nivel de daño ND igual a j, dado un sismo con un nivel de severidad i (Whitman et al. 1973).

Funciones de vulnerabilidad, que son relaciones gráficas o matemáticas que expresan en forma continua la vulnerabilidad en función de algún parámetro que describa el nivel de severidad del sismo.

La vulnerabilidad sísmica puede evaluarse mediante observación y levantamiento de planos del estado de fisuración real producido por terremotos y su posterior estudio estadístico, denominándose en este caso vulnerabilidad observada. La vulnerabilidad también puede cuantificarse mediante el cálculo de la respuesta sísmica no lineal de las estructuras, caso en que se denomina vulnerabilidad calculada o simulada. El resultado más importante de un cálculo de este tipo es un índice de daño que caracteriza globalmente la degradación de una estructura sometida a terremotos.

El método del índice de vulnerabilidad (Benedetti y Petrini 1984) utiliza los datos obtenidos mediante inspección para realizar una calificación de la calidad del diseño y construcción sismorresistente de los edificios mediante un coeficiente denominado índice de vulnerabilidad, IV. El método hace una calificación numérica de once parámetros estructurales preestablecidos por expertos y calcula, a partir de estos valores, el índice de vulnerabilidad. En el caso de los edificios de mampostería no reforzada, estos parámetros son: 1) organización del sistema resistente; 2) calidad del sistema resistente; 3) resistencia convencional; 4) influencia de la cimentación; 5) elementos horizontales; 6) configuración en planta; 7) configuración en elevación; 8) separación máxima entre muros; 9) tipo de cubierta; 10) elementos no estructurales; y 11) estado de conservación. En el caso de edificios de hormigón armado, los parámetros 8) y 9) cambian por los siguientes: 8) conexión entre elementos; 9) elementos de baja ductilidad. El método relaciona luego el índice de vulnerabilidad obtenido, IV, con el grado de daño global, D, que sufre la estructura, a través de funciones de vulnerabilidad para cada grado de intensidad macrosísmica del terremoto o para diferentes niveles de aceleración máxima. Una de las ventajas del método es que es aplicable no sólo a diferentes subtipologías de edificios sino también a diferentes calidades de construcción

dentro de la misma subtipología, diferenciadas por rangos de índices de vulnerabilidad, Barbat *et al.* (1996).

El análisis y diseño basado en las prestaciones o en el desempeño sísmico de las estructuras, conocido en la literatura inglesa como *performance based engineering*, se ha convertido en un área científica y técnica relevante de la ingeniería estructural. Su ámbito de aplicación ha trascendido al diseño de edificios nuevos para emplearse en la predicción del comportamiento de edificios existentes, es decir, en la evaluación de la vulnerabilidad y del riesgo sísmico. De particular interés es la aplicación de esta técnica en zonas urbanas de sismicidad moderada, donde el crecimiento económico ha tenido como consecuencia el aumento del riesgo sísmico.

1.2.5 Ejemplo de aplicación: Barcelona

Como ejemplo, se muestran los escenarios de riesgo obtenidos para la ciudad de Barcelona, donde la gran mayoría de los edificios son de mampostería no reforzada o de hormigón armado con forjados reticulares. En el período comprendido entre 1875 y 1900 se construyeron en Barcelona casi 10.000 edificios de mampostería no reforzada, desarrollándose de esta manera el distrito del Eixample, zona emblemática del centro de la ciudad, con un importante valor histórico, arquitectónico y cultural. Los edificios de esta zona se encuentran incorporados en conjuntos denominados manzanas que miden aproximadamente 113m por 113m, son prácticamente simétricos, perfectamente alineadas y achaflanadas en sus vértices mediante aristas de unos 20 metros, cubriendo aproximadamente 750 hectáreas de la superficie de la ciudad (ver la Figura 1.2). Debe indicarse que en el distrito del Eixample hay 7.000 edificios mientras que en toda la ciudad de Barcelona el número de edificios es de 80.000.



Figura 1.2. Manzanas típicas del Eixample.

Desde un punto de vista sísmico, Barcelona está clasificada en cuatro tipos correspondientes a 4 grandes zonas que pueden verse en la Figura 1.3 (Cid 1998).

La amenaza sísmica en Barcelona se reevaluó recientemente, tanto desde una óptica determinista como desde una probabilista, considerando la severidad de la acción en términos de la intensidad y en términos de las aceleraciones espectrales para los períodos de 0, 0.3, 0.6, 1.0 y 2.0 s (Irizarry et al. 2003). La Figura 1.4 muestra los espectros correspondientes a los escenarios determinista y probabilista en formato aceleración-desplazamiento (AD) para la zona II en la cual se encuentra localizado el distrito del Eixample.

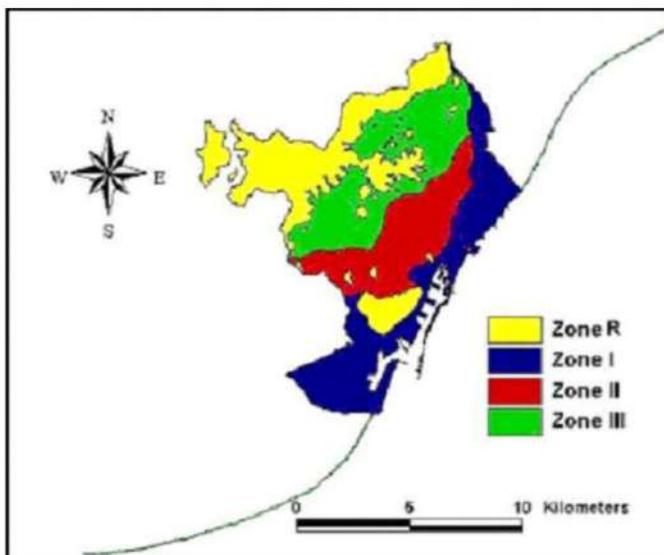


Figura 1.3. Zonificación sísmica de Barcelona (Cid 1998)

En la Figura 1.5 se muestran las curvas de fragilidad obtenidas para el tipo de edificios de mampostería no reforzada existente en el distrito del Eixample de Barcelona. En la Figura 1.6 puede verse un ejemplo de curvas de fragilidad obtenidas para edificios típicos de hormigón armado con forjados reticulares existentes en España, para alturas de 2, 5 y 8 plantas.

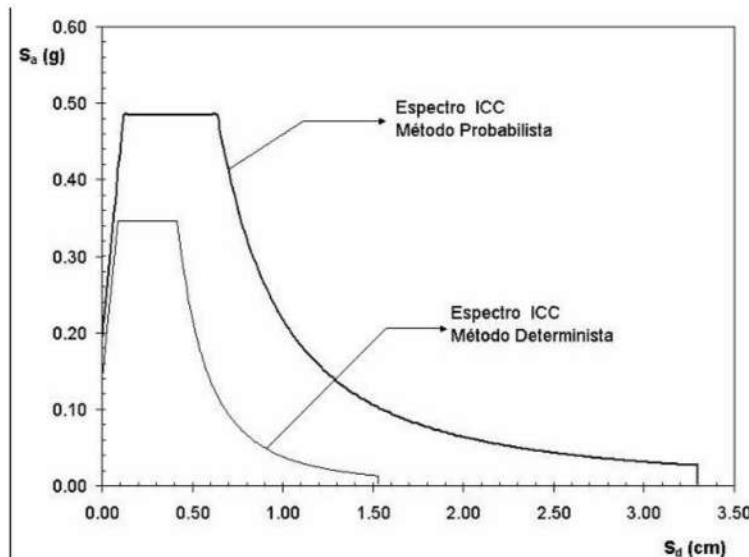


Figura 1.4. Espectros de respuesta propuestos por el ICC para los escenarios de amenaza sísmica determinista y probabilista (Irizarry et al. 2003)

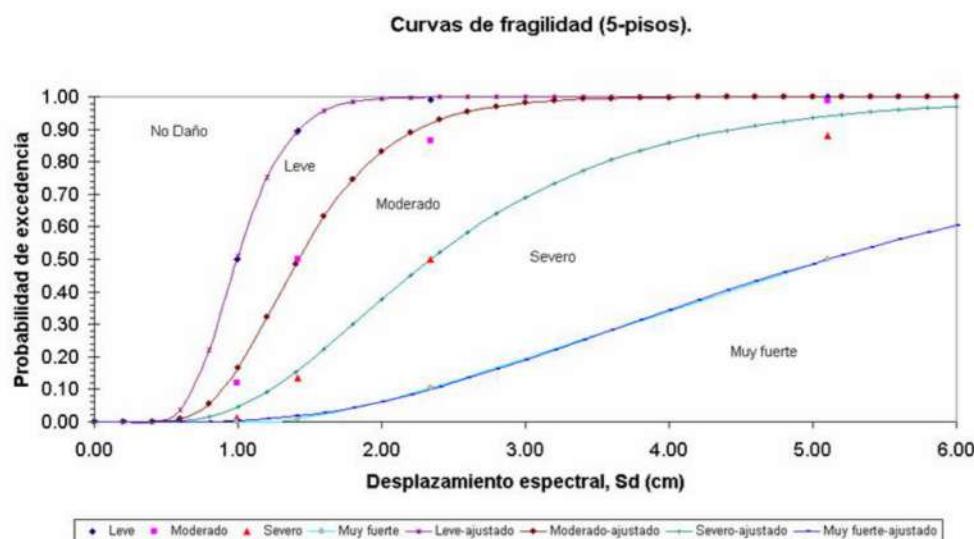


Figura 1.5. Curvas de fragilidad para un edificio típico de 6 niveles de mampostería no reforzada del distrito del Eixample de Barcelona.

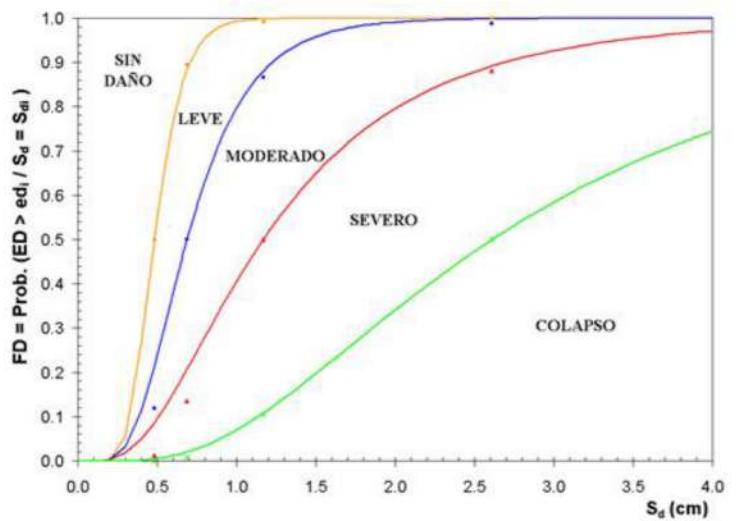


Figura 1.6. Curvas de fragilidad para un edificio con forjados reticulares y cinco plantas.

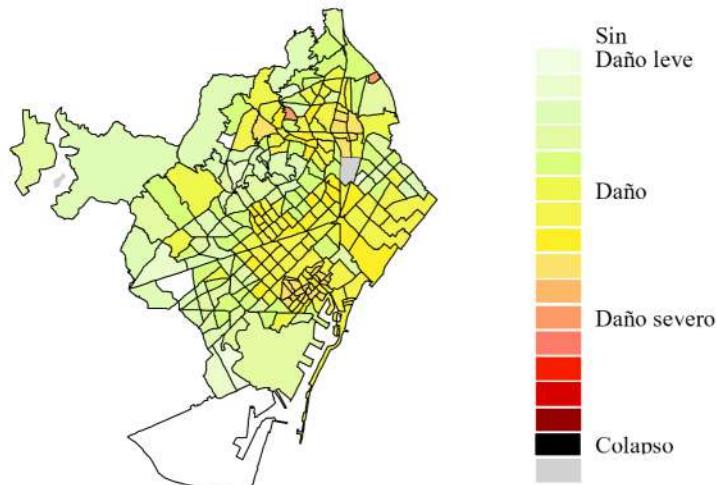


Figura 1.7. Escenario de riesgo sísmico para un escenario de amenaza probabilista.

En la Figura 1.7 se muestra un escenario de riesgo sísmico para el escenario de amenaza probabilista. Dicho escenario se representó utilizando las zonas censales de Barcelona. Al utilizarse las curvas de fragilidad para evaluar el riesgo sísmico, es posible obtener mapas que muestren la probabilidad de que ocurra en los diferentes edificios de una zona un cierto estado de daño. En la Figura 1.8 puede verse un mapa de este tipo para un estado de daño leve y para el escenario de amenaza probabilista.

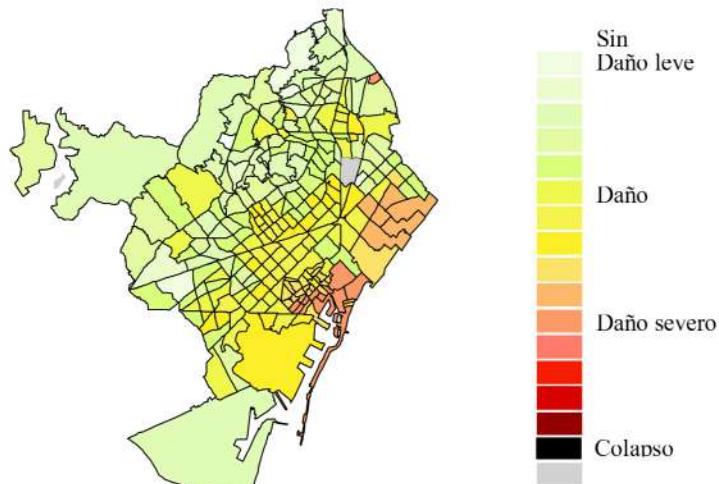


Figura 1.8. Mapa de probabilidad de daño leve para un escenario de amenaza probabilista.

1.2.6 Mitigación del riesgo sísmico

Para mitigar el riesgo sísmico R en un lugar determinado, debe disminuirse la peligrosidad H , la vulnerabilidad V o el coste E . Seguidamente se analizan estas tres posibilidades:

- La peligrosidad sísmica puede reducirse influyendo en las condiciones locales del suelo. Por ejemplo, pueden escogerse emplazamientos lo suficientemente alejados de las fallas, evitando los lugares de posibles deslizamientos o de alto potencial de licuefacción y utilizando técnicas de mejora de las condiciones del suelo.
- Referente a la reducción de la vulnerabilidad sísmica de una cierta zona, deben considerarse dos casos. El primero es el de una estructura de nuevo diseño; la reducción de su vulnerabilidad puede lograrse por medio del cumplimiento de todos los requisitos de las normativas de diseño y construcción sismo-resistente. Por ello, es también muy importante que se mejoren dichas normativas conforme avancen los conocimientos acerca del comportamiento sísmico de las estructuras. Adicionalmente, es esencial mejorar la tecnología y calidad de la construcción. El segundo caso es el de las estructuras ya existentes. La única alternativa para mitigar el riesgo sísmico de la zona es la reducción de la vulnerabilidad de estas estructuras a través de su refuerzo, su rehabilitación o, sencillamente, su demolición.

Sobre el coste E no puede actuarse de manera eficaz. Sin embargo, cuando se están estudiando las pérdidas humanas, se deben emprender campañas de preparación y educación de la población, explicando las formas de protegerse durante terremotos. Las

pérdidas pueden también reducirse si se elaboran planes de emergencia adecuados (Winslow y Ross 1993).

Capítulo 2

Espectros de respuesta y espectros de diseño

2.1 INTRODUCCIÓN

La determinación de la respuesta en desplazamientos, velocidades o aceleraciones, en el dominio del tiempo, para un oscilador elástico a un grado de libertad, requiere el siguiente cálculo:

- **Para forzantes armónicas:** la resolución de la ecuación diferencial del movimiento en forma exacta,
- **Para cualquier forzante armónica o no** (caso de la acción de una fuerza sísmica): la resolución de una integral de convolución de impulsos elementales *integral de Duhamel* (Barbat y Canet 1994) o, como alternativa, la resolución de la ecuación diferencial del movimiento mediante una aproximación en diferencias finitas en el tiempo.

Como breve recordatorio, se presentan a continuación los conceptos fundamentales de la *integral de Duhamel*. Esta integral considera un oscilador libre a un sólo grado de libertad sometido a una fuerza $F(t)$, aplicada como una sucesión de impulsos en el tiempo $dI = f(t)dt$ (ver Figura 2.1). Para ello se aplica un impulso al oscilador y se deja oscilar libremente, resultando

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \dots \forall t \geq t_I = \tau + dt$$

Condiciones iniciales: $\begin{cases} \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \Rightarrow d\dot{u}(t=0)d\dot{u}_0 = \frac{dI}{m} \\ u(t=0) = u_0 = 0 \end{cases}$ (2.1)

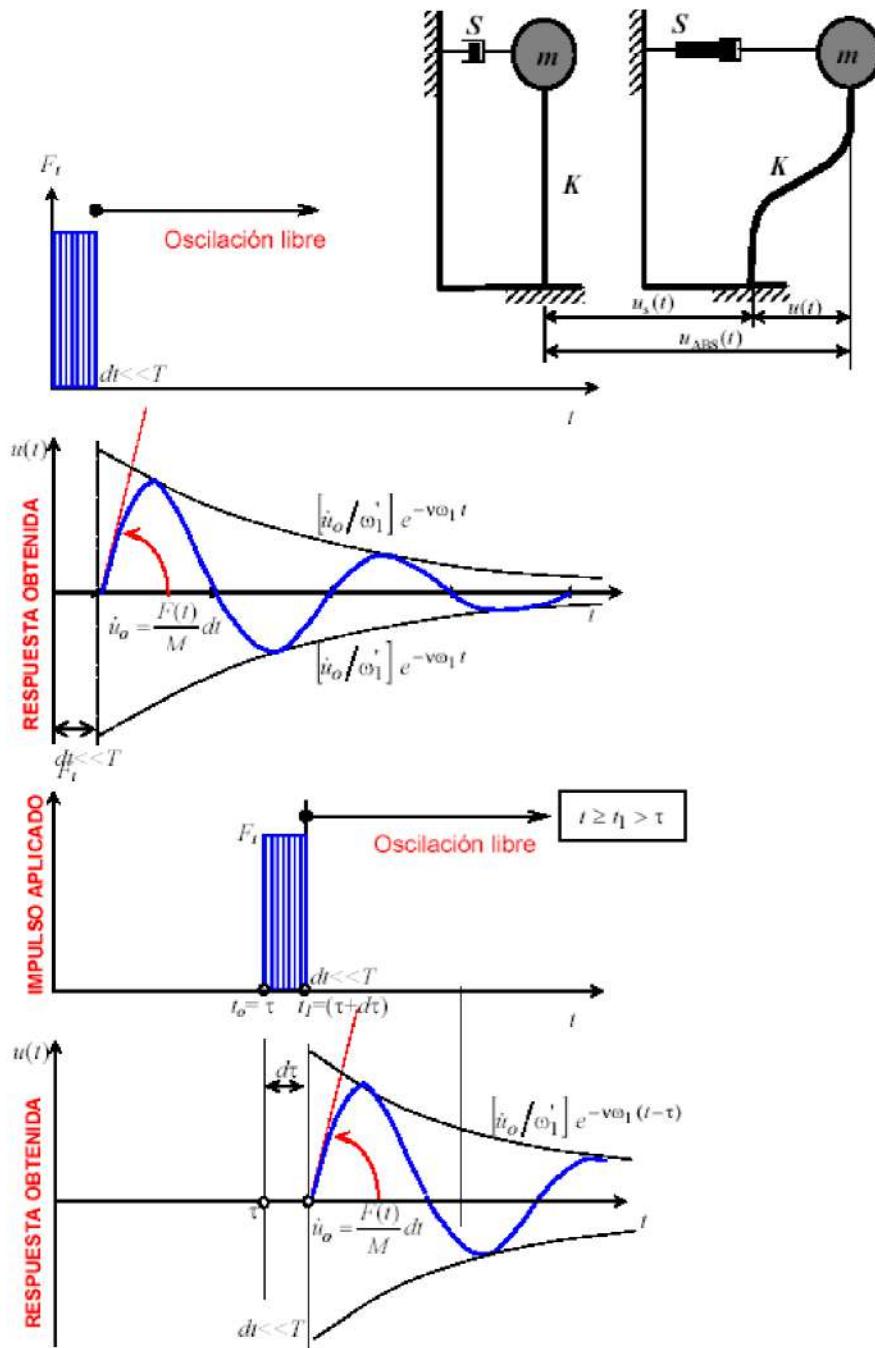


Figura 2.1 Oscilador a un grado de libertad, sometido a un impulso: (a) inicial.

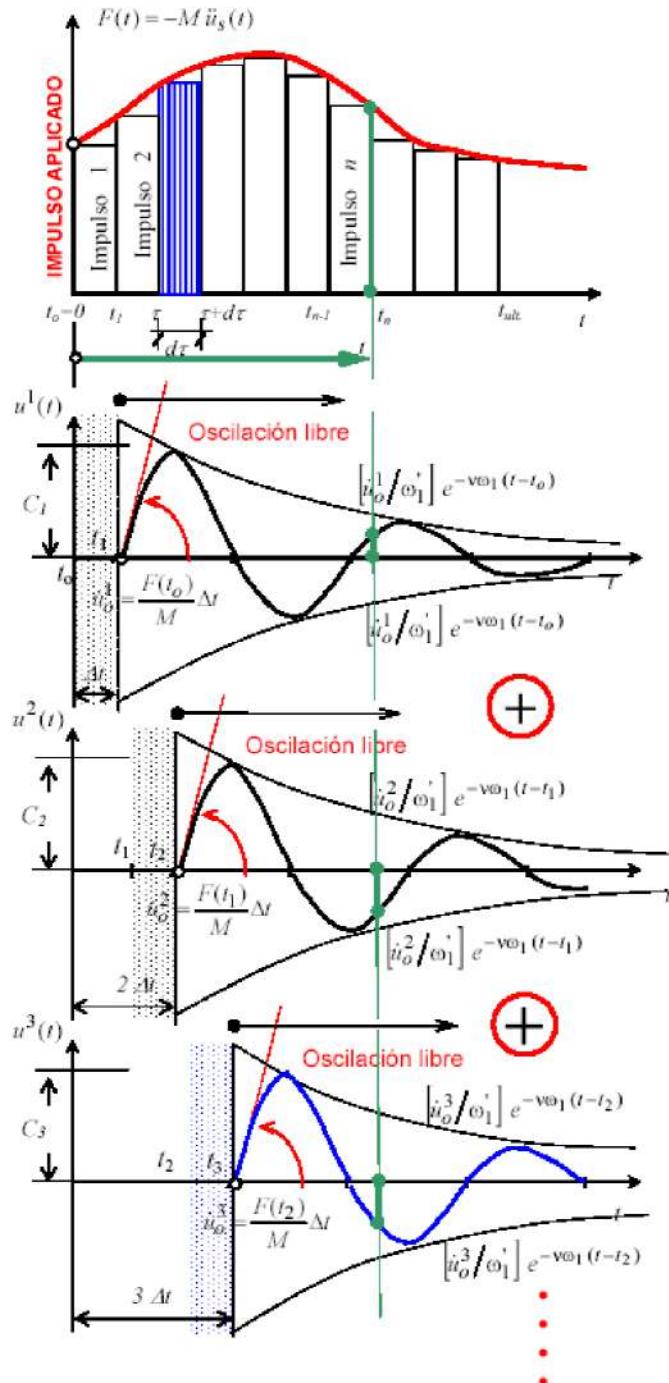


Figura 2.2 Oscilador a un grado de libertad, sometido a un impulso: (b) de duración

$$0 \leq t \leq t_{ult} .$$

Considerando la solución homogénea de la ecuación diferencial a derivadas parciales con coeficientes constantes (2.1) y diferenciando dicha solución en u, se obtiene la siguiente expresión luego de sustituir en ella la definición del impulso $du_0 = \frac{I}{m}$:

$$du(t) = dI \frac{1}{m\omega\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\nu\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\nu^2}t) \equiv h(t)I = h(t)f(t)dt$$

Donde m, $c = 2\nu\omega$ y k son, respectivamente, la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez del oscilador; $\omega = \sqrt{k/m}$ es la pulsación angular del oscilador y v la fracción de amortiguamiento del crítico. A h(t) se le denomina impulso elemental unitario y t_1 es el tiempo a partir del cual se inicia una oscilación libre debida a la imposición del impulso. Inmediatamente que concluye la aplicación del primer impulso elemental, se aplica otro impulso y nuevamente se deja oscilar libremente y así sucesivamente hasta alcanzar el tiempo último t_{ult} de duración de la fuerza aplicada F(t). Puesto que se tratan de osciladores armónicos con comportamiento elástico, se puede considerar la *superposición de impulsos elementales* $I = \int_t^T dI$, de donde resulta la respuesta global del oscilador sometido a una carga no armónica, como la integración de cada respuesta armónica correspondiente a cada impulso elemental.

$$u(t) = \int_t^T du(t) = \int_0^T \frac{f(\tau)}{m\omega\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin(\omega\sqrt{1-\nu^2}(t-\tau))d\tau \quad (2.2)$$

Esta integral implica una convolución de impulsos, esto significa que por cada impulso nuevo que se añade, se vuelven a superponer nuevamente todos los anteriores. Para el caso en que la fuerza $F(t) = -m a(t)$ provenga de una aceleración del terreno a(t) provocada por un sismo, la respuesta de la ecuación (2.2) queda expresada de la siguiente forma:

$$u(t) = \frac{1}{\omega\sqrt{1-\nu^2}} \int_0^t a(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin(\omega\sqrt{1-\nu^2}(t-\tau))d\tau \quad (2.3)$$

Que equivale a resolver por diferencias finitas la ecuación diferencial de un oscilador simple sometido a una aceleración en la base,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -ma(t) \dots \forall t \quad (2.4.a)$$

O escrita en aceleraciones

$$\ddot{u}(t) + 2\nu\omega u(t) + \omega^2 u(t) = -a(t) \dots \dots \forall t \quad (2.4.b)$$

Las expresiones (2.2) y (2.3) son dos formas de presentar la denominada *integral de Duhamel* (Clough, Penzien 1975), (Gavarini 1979), (Paz 1992), (Barbat, Miquel 1994) Chopra (1996). Esta integral da la respuesta exacta de un oscilador elástico lineal sometido a una acción no armónica y representa la convolución en el tiempo de las respuestas a los sucesivos impulsos unitarios. Obsérvese que para cada t_i esta integral superpone, para el dominio $t_i \leq t \leq t_{ult}$, una nueva oscilación libre a la ya existente (concepto de convolución). Hay distintas formas numéricas de resolver de esta integral, ver referencias (Barbat, Miquel 1994), (Clough, Penzien 1975), (Paz 1992), (Gavarini 1979). Actualmente gracias a que los ordenadores la integral de convolución se resuelve rápidamente sin costes computacionales elevados.

2.2 ESPECTROS DE RESPUESTA ELÁSTICOS

Es correcto y deseable, que la respuesta de una estructura elástica sea obtenida a través de un método que permita conocer su estado en cada instante de tiempo (por ejemplo, mediante el método numérico de resolución directa, paso a paso, de la ecuación diferencial del movimiento). Sin embargo, se puede abreviar el cálculo si sólo se quiere obtener la respuesta máxima que tendrá la estructura, sin importar el instante en que ésta se produce. Para obtener este estado más desfavorable, es necesario utilizar los denominados espectros de respuesta.

2.2.1. Conceptos teóricos

Se denomina *espectro de respuesta* a la representación gráfica de una familia de curvas, tal que cada una de ellas representa la *máxima respuesta* (en desplazamientos, velocidad o aceleración), que pueden alcanzar distintos osciladores con distintas frecuencias y amortiguamiento constante (ver Figura 2.3), cuándo son sometidos a una acción dinámica. Por lo tanto, estos espectros reciben el nombre de *espectros sísmicos de respuesta*, si dicha acción dinámica se refiere a un sismo.

Dado un conjunto de osciladores, cuyas frecuencias propias van desde $\omega_1 \geq \omega \geq \omega_n$ si se someten estos osciladores a una fuerza $f(\omega) = F_0 F(\omega)$ (o aceleración en la base) de amplitud constante F_0 , pero cuya frecuencia varía entre $\omega^{\max} \geq \omega \geq \omega^{\min}$ (barrido de frecuencias), se puede observar la máxima excitación para cada oscilador, en el instante que el barrido de frecuencias de la forzante pase por una magnitud próxima a la frecuencia propia del oscilador (resonancia).

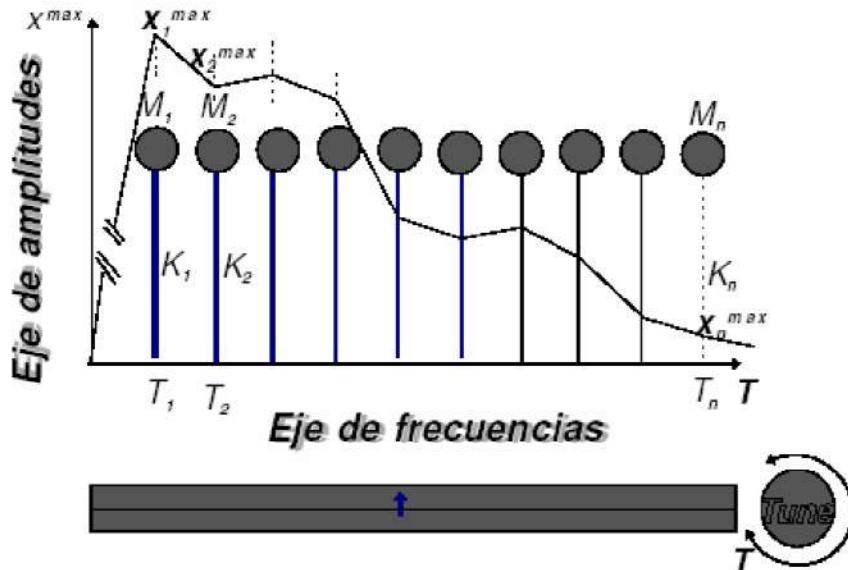


Figura 2.3 Representación esquemática de un espectro de respuesta de desplazamientos.

Una forma de calcular los máximos desplazamientos, velocidades y aceleraciones, de un oscilador simple sometido a una aceleración aplicada en la base $a(t)$, es mediante la integral de Duhamel para unas condiciones iniciales $u_0 = 0, u_0' = 0$ (ecuaciones 2.2 y 2.3). Para simplificar las expresiones, se denominará pulsación natural amortiguada a la expresión: $\omega_v = \omega\sqrt{1 - \nu^2}$. Esto es:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_v} \int_0^t a(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin(\omega_v(t-\tau)) d\tau \quad (2.5.a)$$

$$u^{\max} = |u(t)|^{\max}$$

Expresiones similares se obtienen para la velocidad y la aceleración, utilizando la siguiente regla de derivación: $\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_t f(t, \tau) d\tau \right] = \int_t \left[\frac{\partial f(\tau, t)}{\partial t} \right] d\tau + [f(\tau, t)]_{\tau=t}$:

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \frac{du(t)}{dt} = \\
&= - \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \cos(\omega_v(t-\tau)) d\tau + \int_0^t \frac{a(\tau)v}{\sqrt{1-v^2}} e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega_v(t-\tau)) d\tau \\
\dot{u}(t) &= - \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \cos(\omega_v(t-\tau)) d\tau - v\omega u(t) \\
\dot{u}_{\max} &= |\dot{u}(t)|^{\max}
\end{aligned} \tag{2.5.b}$$

Y, siguiendo este procedimiento analítico, la aceleración absoluta resulta a partir de sumar a la aceleración del terreno la propia del oscilador,

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_{abs}(t) &= \ddot{u}(t) + a(t) \\
&= \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \\
&= \int_0^t a(\tau) \frac{\omega(1-2v^2)}{\sqrt{1-v^2}} e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega_v(t-\tau)) d\tau + 2v\omega \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \cos(\omega_v(t-\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

De donde se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
u_{abs}(t) &= \underbrace{\omega^2 \frac{(1-2v^2)}{1-v^2} \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega_v(t-\tau)) d\tau}_{-u_{eff}(t) = -(\omega_v)^2 u(t)}, \underbrace{-2(v\omega)^2 u(t) - 2v\omega \dot{u}(t)}_{-u_v(t)} \\
u_{abs}(t) + 2(v\omega)^2 u(t) + 2v\omega \dot{u}(t) + (\omega_v)^2 u(t) &= 0 \\
u_{abs}^{\max} &= |u_{abs}(t)|^{\max}
\end{aligned} \tag{2.5.c}$$

Donde $u_{abs}(t)$ es la aceleración absoluta, medida desde el origen del sistema referencial (ver figura 2.1); $u_{eff}(t)$ es la aceleración eficaz, relativa a la base del oscilador, que actúa sobre las propiedades elásticas del oscilador (rigidez); y $u_v(t)$ es la aceleración de amortiguamiento, relativa a la base del oscilador, que actúa sobre las propiedades viscosas del oscilador. Las dos primeras de las ecuaciones 2.5 representan el desplazamiento y la velocidad máxima, relativa a la posición de la base del oscilador, en tanto la última expresa la aceleración absoluta, respecto del origen (ver Figura 2.1). Esta última se puede también expresar como la contribución de la desaceleración debida a la rigidez estructural más otra debida al amortiguamiento $|u_{abs}(t)|^{\max} = |-u_{eff}(t) - u_v(t)|^{\max}$ (Gavarini 1979), (Oller, Caro 1984). Por otro lado, se puede obtener también la aceleración absoluta a partir de la ecuación del movimiento de un oscilador simple, sometido a una aceleración sísmica en la base a(t). Esto es:

$$\begin{aligned} m[u(t) + a(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) &= 0 \\ \underbrace{[u(t + a(t))]}_{u_{abs}(t)} + \underbrace{2\nu\omega u(t)}_{u_v(t)} + \underbrace{\omega_1^2 u(t)}_{u_{eff}(t)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

De la comparación de esta última ecuación con la (2.5c), se deduce que coinciden siempre que ν sea pequeño (por ejemplo, inferior al 20%) y en tal caso el término $(\nu\omega)^2$ se puede despreciar.

Conocidos los valores máximos de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, sólo queda establecer, a partir de las ecuaciones (2.5) y (2.6), los espectros reales:

$$\begin{aligned} \text{Espectro de Desplazamiento Relativo: } S_d^r &= S_d^r(\omega, \nu) = |u(t)|^{\max} \\ \text{Espectro de Velocidad Relativa: } S_v^r &= S_v^r(\omega, \nu) = |\dot{u}(t)|^{\max} \\ \text{Espectro de Aceleración Absoluta: } S_a^r &= S_a^r(\omega, \nu) = |u(t) + a(t)|^{\max} = |u_{abs}(t)|^{\max} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por conveniencia y con la finalidad de establecer una formulación simple que interrelacione las expresiones de los espectros de respuesta, Housner 1947 (Paz 1992), (Barbat y Canet 1994), (Gavarini 1979), definió unos espectros aproximados de velocidad y aceleración, a los que llamó pseudo-espectros. Estos admiten las siguientes simplificaciones:

Se aproxima $\omega_v = \omega\sqrt{1 - \nu^2}$ por $\approx \omega$. Esto es bastante cierto debido a que en las obras civiles, el factor de amortiguamiento es muy bajo, se admite que la aceleración producida por el amortiguamiento es despreciable $u_v \approx 0$ por el mismo motivo antes citado, se sustituye en el espectro de velocidades la función $\cos(\omega_v(t - \tau))$ por la función $\sin(\omega_v(t - \tau))$. Esto, tiene sentido por que sólo se busca el máximo de la respuesta y tanto la función seno como la coseno tienen máximo unidad.

Considerando estas hipótesis simplificativas, se obtienen los denominados seudo-espectros, realizando las siguientes transformaciones en las ecuaciones (2.5), sin que los resultados se alteren significativamente. De esta manera se consigue relacionar los tres seudo-espectros en función de la frecuencia angular del oscilador,

$$S_d = S_d(\omega, \nu) = \left| -\frac{1}{\omega} \int_0^t a(\tau) e^{-\omega\nu(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right|^{\max} \quad (2.8.a)$$

$$S_v = S_v(\omega, \nu) = \left| -\int_0^t a(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right|^{\max} = \omega S_d \quad (2.8.b)$$

$$S_a = S_a(\omega, v) = \left| \omega \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right|^{\max} = -\omega^2 S_d \quad (2.8.c)$$

El seudo-espectro de aceleración es una buena aproximación del correspondiente espectro real, en tanto el seudo-espectro de velocidad se acerca al real sólo para amortiguamiento bajo y frecuencia media-alta (Paz 1992). Un examen de la función espectral para frecuencias extremas, revela las siguientes conclusiones (ver Figura 2.4):

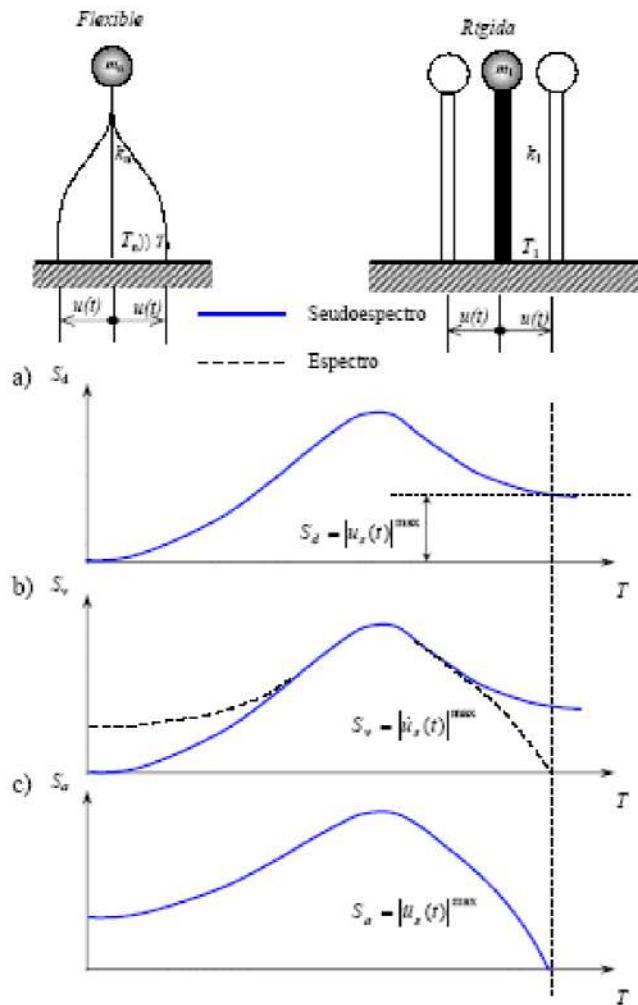


Figura 2.4 Estados límites en la respuesta espectral. a) Tipo de estructura, b) espectro de desplazamiento, c) Espectro y seudo espectro de velocidad, d) Espectro de aceleración. Seudo espectro en línea de puntos, espectro real en línea continua.

Para bajas frecuencias $\omega \rightarrow 0$ (altos períodos $T \rightarrow \infty$), el sistema es muy flexible y la masa permanece en estado estacionario, mientras su base se mueve (figura 2.3a). Esto permite deducir que el máximo desplazamiento relativo o desplazamiento spectral coincide con el del terreno $|u_s|^{max} = S_d$. La máxima velocidad relativa o velocidad spectral coincide con la del terreno $|\dot{u}_s|^{max} = S_v$, pero la seudo-velocidad spectral es nula y por lo tanto se comete un error al utilizar los seudo-espectros de respuesta. La máxima aceleración absoluta o aceleración spectral es nula $|\ddot{u}_{abs}|^{max} = S_a \rightarrow 0$, situación que en este caso coincide con el seudo-espectro de aceleraciones. Por lo tanto para estructuras muy flexibles, los seudo-espectros de desplazamientos y aceleraciones se aproximan muy bien a los respectivos espectros reales.

Cuando se tiene altas frecuencias $\omega \rightarrow \infty$ (bajos períodos $T \rightarrow 0$) el sistema es muy rígido y la masa tiende a moverse con el terreno (figura 2.3a). Esto permite deducir que el máximo desplazamiento relativo o desplazamiento spectral tiende a cero $|u_s|^{max} = S_d \rightarrow 0$. La máxima velocidad relativa o velocidad spectral también tiende a cero $|\dot{u}_s|^{max} = S_v \rightarrow 0$ al igual que la seudo-velocidad spectral. La máxima aceleración absoluta o aceleración spectral es igual a la del terreno $|\ddot{u}_{abs}|^{max} = S_a$, situación que en este caso coincide con el seudo-espectro de aceleraciones. Por lo tanto para estructuras muy rígidas, los seudo-espectros de desplazamientos y aceleraciones se aproximan muy bien a los respectivos espectros reales.

A partir de esta explicación, y por simplicidad en la presentación de los conceptos, se llamará en adelante espectros de respuesta a los seudo-espectros, que son los que habitualmente se utilizan en las normativas.

2.2.2. Modificación de espectros y espectro medio

Las curvas de los espectros, obtenidas mediante las expresiones 2.8, tienen fuertes discontinuidades en sus derivadas, debido a que en muchos puntos se está cercano a la resonancia. Esto produce máximos y mínimos para osciladores cuyos períodos se encuentran bastante cercanos (ver Figura 2.5 y Figura 2.6) y conduce a que un espectro de este tipo no puede ser adoptado como espectro de diseño. Por esta razón y a los fines de proyecto, se deben utilizar los espectros medios, que se obtienen a partir del estudio de varios terremotos ocurridos en una zona determinada, durante un tiempo también pre-establecido.

El espectro medio, resulta de la superposición de n espectros de respuesta. Su construcción se obtiene como envolvente de los espectros ocurridos y se los suaviza para evitar los picos y valles. Este nuevo espectro garantiza, con cierta probabilidad, que su utilización para el diseño cubre un porcentaje bien definido de sismos ocurridos en el lugar durante un determinado tiempo.

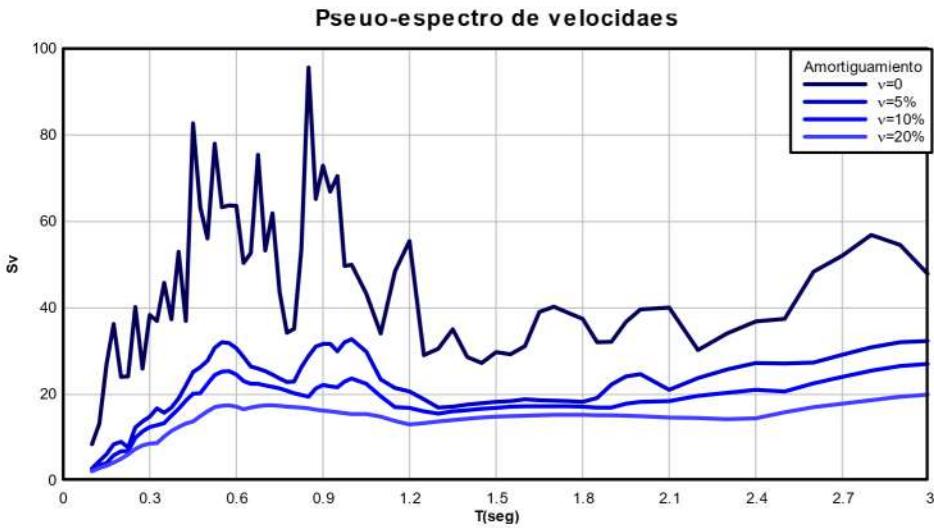


Figura 2.5 Pseudo-espectro de respuesta en velocidades: Resultado de la utilización directa de la teoría.

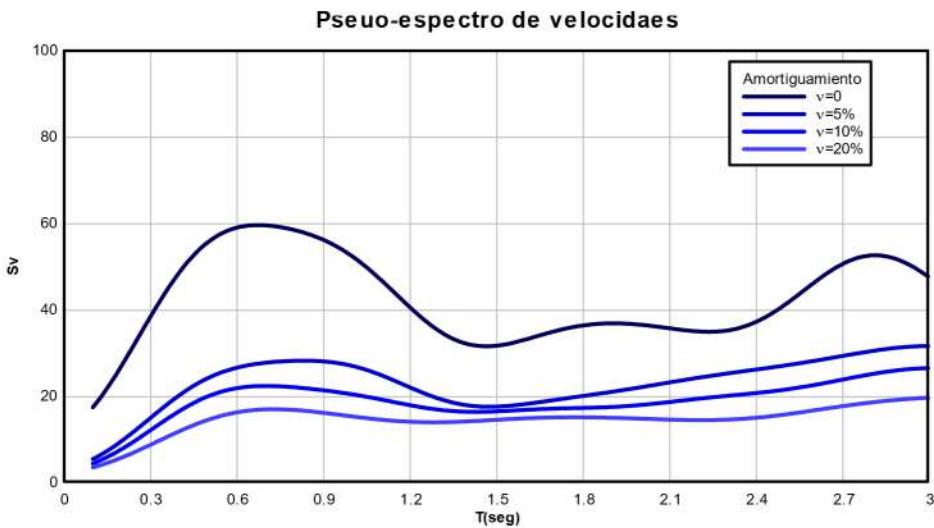


Figura 2.6 Pseudo-espectro de respuesta en velocidades: Espectro medio suavizado.

Las normativas utilizan para los fines de proyecto el denominado espectro simplificado, que surge de aplicar a los espectros medios unos coeficientes de riesgo (apartado 1.3), que funciona como coeficiente de seguridad. Además de lo dicho, también se practica sobre estos espectros una rectificación de funciones, que simplifica aun más su posterior utilización.

2.2.3. Espectro normalizado

Debido a la necesidad de confrontar diversos espectros de respuesta simplificados y establecer el espectro de proyecto, es necesaria su normalización. Normalizar un espectro, significa referirlo a un valor común de aceleración, velocidad o desplazamiento. Debido a que el espectro más significativo es el de aceleraciones, es a este el que se normaliza a partir de la aceleración gravitatoria. Es por esto que normalmente las ordenadas de los espectros de aceleraciones absolutas S_a , están expresadas como una fracción de la aceleración gravitatoria g . A este número adimensional, se lo suelo denominar coeficiente sísmico (Barbat, Miquel 1994), (Oller, Caro 1994). Esto es:

$$c(T, \nu) = \frac{S_a(T, \nu)}{g} \quad (2.9)$$

Para ampliar este concepto, se recomienda ver el apartado 4.3.

La hipótesis que se utiliza normalmente cuando se trabaja en diseño estructural con los seudo-espectros, es que la aceleración absoluta máxima coincide con la eficaz máxima para situaciones donde $\nu \rightarrow 0$ y por lo tanto la aceleración por al amortiguamiento resulta despreciable (ver ecuación 2.5c), es decir $\ddot{u}_v(t) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\ddot{u}_{abs}(t)|^{\max} \approx |-\ddot{u}_{efi}(t)|^{\max}$. Esto conduce a pensar que toda la fuerza aplicada debe ser resistida por la rigidez elástica de la estructura,

$$\begin{aligned} S_a(T, \nu) &= |\ddot{u}_{abs}(t)|^{\max} = |\ddot{u}(t) + a(t)|^{\max} \approx |-\ddot{u}_{efi}(t)|^{\max} = \dot{u}_{efi}^{\max} \\ F^{\max} &= mS_a(T, \nu) = m|\ddot{u}_{abs}(t)|^{\max} = m|\ddot{u}(t) + a(t)|^{\max} \approx m\dot{u}_{efi}^{\max} \approx ku^{\max} = kS_d \end{aligned} \quad (2.10)$$

Esto último permite rescribir el coeficiente sísmico, como:

$$c(T, \nu) = \frac{mS_a(T, \nu)}{mg} \approx \frac{kS_d(T, \nu)}{mg} = \frac{(F_{efi})^{\max}}{P} \quad (2.11)$$

Donde P es el peso de la masa del oscilador y F_{efi} es la fuerza que actúa sobre la rigidez del oscilador propiamente dicha. Esta fuerza recibe el nombre de fuerza estática equivalente y es capaz de producir sobre el oscilador una respuesta equivalente a la que desarrolla un sismo en su base.

De las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 surge también, como información adicional, la valoración del desplazamiento y la velocidad máxima:

$$u_{\max} = S_d = -\frac{S_a}{\omega^2} = -\frac{cg}{\omega^2} \quad (2.12)$$

$$\dot{u}_{\max} = S_v = \frac{S_a}{\omega} = \frac{cg}{\omega}$$

2.2.4. Representación espectral logarítmica tripartita

En algunos ámbitos se conoce también a esta representación como la representación espectral de Newmark. Es un gráfico que contiene la información de los tres espectros a la vez (ver la Figura 2.7) (Newmark 1971) (Barbat, Canet 1994), (Clough, Penzien 1975), (Paz 1992). Representa en abscisas y ordenadas, en escalas logarítmicas, los valores del período $T(s)$ y la velocidad espectral $S_v [cm/s] = \omega S_d = \omega^2 S_d / g = \log(f) + \log(2\pi S_d)$, respectivamente. Luego, sobre un eje a 45° el desplazamiento vertical $S_d [cm]$ y sobre otro ortogonal a este último, el coeficiente sísmico $c = S_a/g = \omega^2 S_d / g = \log(f^2) + \log(4\pi^2 S_d) - \log(g)$. Para el trazado de los ejes S_a y S_d se elige un origen de coordenadas (T, S_v) arbitrario.

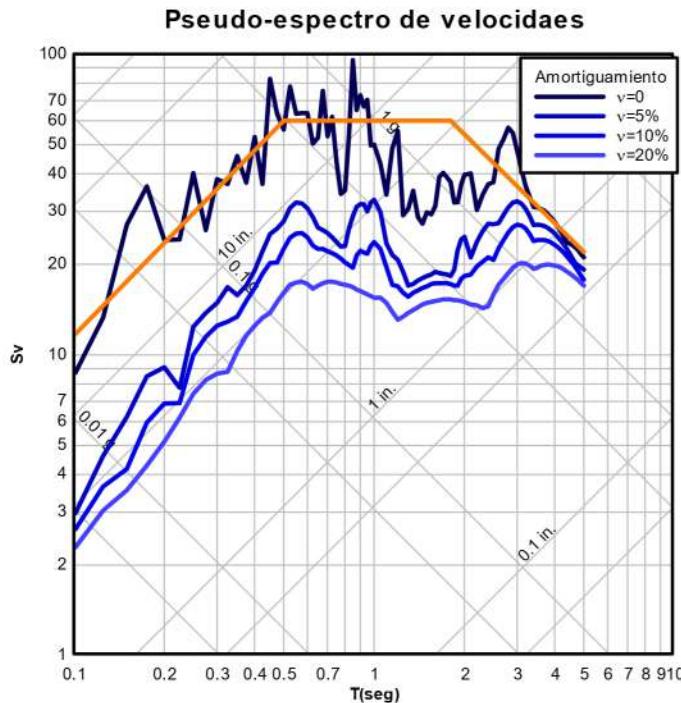


Figura 2.7 Representación espectral de Newmark: esquema de interpretación.

A partir de esta nueva representación, surge una idealización de las curvas espetrales, mediante trazos casi-rectos en cada uno de los tres sectores del gráfico de Newmark: 1) zona de espectro de aceleración constante, 2) zona de espectro de

velocidad constante y 3) zona de espectro de desplazamiento constante. Del gráfico de Newmark, se puede concluir lo siguiente:

- Para valores de T bajos, se tiene aceleración espectral casi constante.
- Para valores de T medios, se tiene velocidad espectral casi constante.
- Para valores de T altos, se tiene desplazamiento espectral casi constante.

2.2.5. Influencia de las condiciones locales del terreno

El terreno de cimentación de una estructura actúa normalmente como un filtro de frecuencias y por lo tanto cambia en gran medida la excitación que transmite a la estructura. Este efecto, conocido como efecto de sitio, puede comprenderse si se interpreta al terreno como un sistema dinámico, cuya frecuencia propia hace que ciertas señales se amplifiquen y otras no. Los terrenos duros o muy rígidos, amplifican las señales cuyas frecuencias dominantes son muy altas (bajos períodos) y en tanto su transmisibilidad se reduce por debajo de la unidad para excitaciones con frecuencia dominante baja (períodos altos). El efecto contrario ocurre con los suelos blandos. Además de este aspecto, aparecen otros fenómenos que alteran la respuesta dinámica del suelo, como es el agua intersticial dentro de los terrenos friccionales, como las arenas. En estos casos, se produce un fenómeno denominado licuefacción y que conduce a la pérdida total de la capacidad portante del terreno. Todo esto hace necesario que los espectros de diseño reflejen de alguna manera y aunque simplificada, el tipo de terreno de cimentación.

2.2.6. Observaciones finales sobre los espectros de respuesta

Los espectros de proyecto se basan normalmente a un estudio como el que se ha mencionado en los sub-apartados anteriores, pero practicado a partir de información a nivel de la superficie del terreno. Por otro lado, éste se realiza sobre un terreno libre de construcción alguna y por lo tanto no considera la influencia de la masa estructural en la perturbación de la acción. Estas razones, entre otras, hacen que los espectros no deban admitirse como único elemento informante para el proyectista, sino que además debe conocer también el terremoto de diseño. Esto último incluye también información sobre la actividad sísmica de la región, el mecanismo de falla, el contenido de agua del terreno y licuefacción, efectos de sitio, efectos de topografía local, etc. (Barbat, Canet 1994), (Clough, Penzien 1975).

En lo que respecta el concepto de ductilidad en estructuras con comportamiento inelástico, su tratamiento será presentado en el apartado 4.4.

Capítulo 3

Cálculo de la respuesta estructural

3.1 MODELOS ESTRUCTURALES TÍPICOS UTILIZADOS EN EL CÁLCULO DE EDIFICIOS –EDIFICIO DE CORTANTE

La determinación de la respuesta sísmica de una estructura requiere disponer de una adecuada definición tanto del movimiento del terreno como de las características estructurales. Obviamente, el sujeto de un análisis sísmico no es la propia estructura, sino un modelo mecánico de la misma que, en este caso, es uno dinámico. La definición de tal modelo depende del tipo de estructura analizado y del grado de información que se quiere tener sobre la respuesta de la estructura. Además, el análisis pretende, por un lado, proporcionar una descripción realista de su comportamiento y por el otro, obtener relaciones entre la acción y la respuesta, las cuales en conjunto constituyen el *modelo matemático* del problema (Barbat y Canet 1994).

En el caso particular de los edificios, la modelización debe tener en cuenta que su masa está generalmente concentrada en unas zonas de la estructura fácilmente identificables. Por este motivo, los modelos dinámicos que suelen considerarse en este caso son de *masas concentradas*, de fácil aplicación y que proporcionan resultados suficientemente precisos. La masa total del edificio se concentra en puntos predefinidos del mismo, los cuales se encuentran concretamente a nivel de los forjados, simulándose de esta manera el efecto de las fuerzas de inercia reales que aparecen en la estructura durante su vibración. Se hace también la suposición de que el resto de la estructura tiene solamente rigidez (pilares), pero no masa si bien ésta es considerada como concentrada tanto en el nivel superior como en el inferior, y su comportamiento se describe mediante barras elásticas sin masa. Como consecuencia de estas simplificaciones, el número de grados de libertad del modelo se reduce, tal como puede verse en el caso del pórtico plano de la Figura 3.1(a) (Barbat y Canet 1994). Si además se hacen las

simplificaciones de despreciar la deformación por esfuerzo axil de los pilares y de considerar que los forjados son perfectamente rígidos tanto a flexión como a axil, el pórtico puede modelizarse mediante el sistema con masas concentradas de la Figura 3.1(b), denominado modelo de *edificio de cortante*.

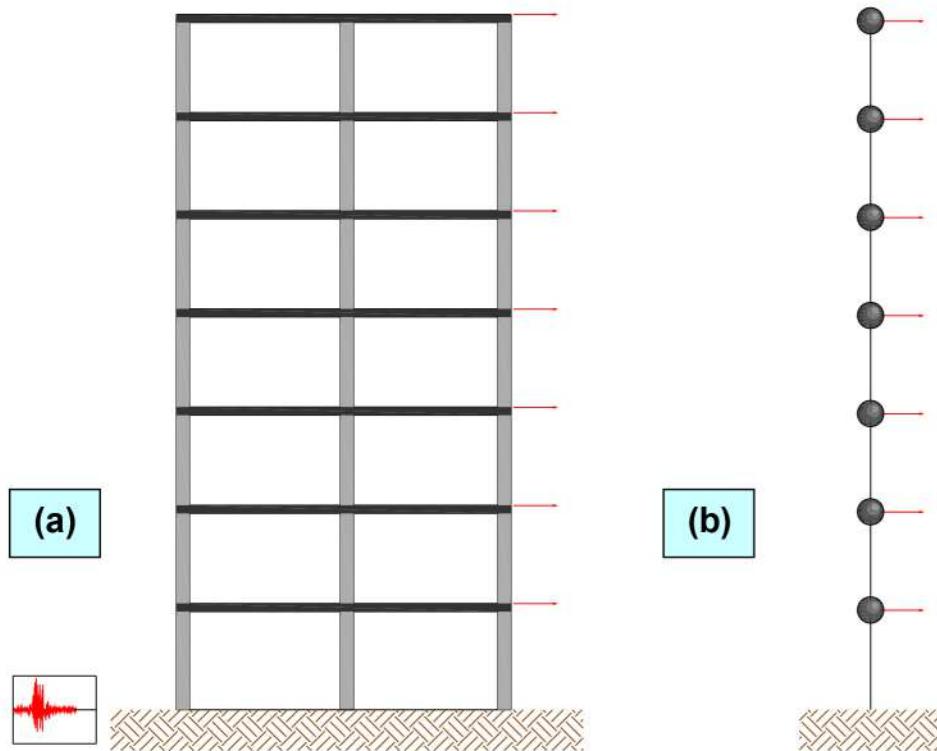


Figura 3.1 Modelos dinámicos de masas concentradas para edificios. (a) edificio de plantas rígidas y (b) su modelo dinámico de edificio de cortante

En la Figura 3.2(a) se esquematiza un pórtico tridimensional sometido a la acción de un terremoto que actúa según su plano de simetría. En la hipótesis de planta flexible, la estructura tendría diez grados de libertad (x_1, x_2, \dots, x_{10}) mientras que si se supone que las plantas son rígidas, el número de grados de libertad queda reducido a dos, siendo éstos los desplazamientos X_1 y X_2 de los pisos, tal como se observa en la Figura 3.2(b). En el caso en que la dirección del terremoto no está contenida en dicho plano, es posible considerar en el modelo grados de libertad adicionales, a fin de incluir en el análisis la posibilidad de giro de los pisos en su propio plano, es decir, el fenómeno de torsión global de la estructura. Éste es el caso que se describe en la Figura 3.3, donde el modelo tridimensional de la Figura 3.3(a) puede sustituirse por el de la

Figura 3.3(b), que considera la torsión de una forma simplificada, utilizando la hipótesis de plantas rígidas y de deformación por axil nula en los pilares (Barbat y Canet 1994).

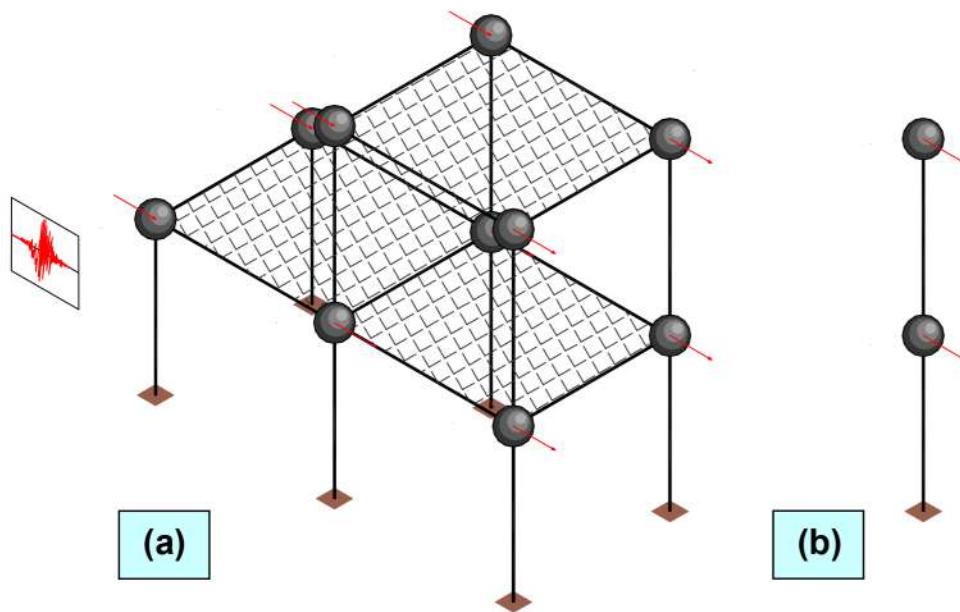


Figura 3.2 Modelos dinámicos de masas concentradas para edificios. (a) pórtico espacial modelizado como un sistema de 10 grados de libertad y (d) su modelo con dos grados de libertad

Las simplificaciones que se realizan al modelizar una estructura tridimensional como *edificio de cortante* pueden resumirse en lo siguiente:

- El edificio se considera sometido, por separado, a dos componentes horizontales ortogonales de la aceleración sísmica. En consecuencia, se realizan dos cálculos diferentes, uno para cada componente de aceleración, utilizando en cada uno de ellos el modelo de edificio de cortante de la estructura correspondiente a la dirección de la acción. Al final del proceso de cálculo, los resultados obtenidos para las dos direcciones se combinan, considerando para la aceleración sísmica la dirección más desfavorable. En todas las normativas se prevén reglas para la mencionada combinación de resultados, generalmente aplicando la regla la regla del 30% que para los edificios regulares ha demostrado ser conservadora.
- En la modelización de los pórticos que componen cada dirección se consideran diafragmas rígidos en los pisos y se supone que la traslación horizontal es el único grado de libertad por planta.
- La totalidad de la masa del edificio se concentra a nivel de las plantas las cuales son infinitamente rígidas en su plano y se considera que el resto de la estructura no tiene masa.

- Las masas concentradas se conectan entre sí mediante barras elásticas sin masa, cuya rigidez es equivalente a la rigidez total de cada planta.
- La torsión se tendrá en cuenta en el análisis de una manera desacoplada, después de efectuar el análisis dinámico para los grados de libertad de traslación.

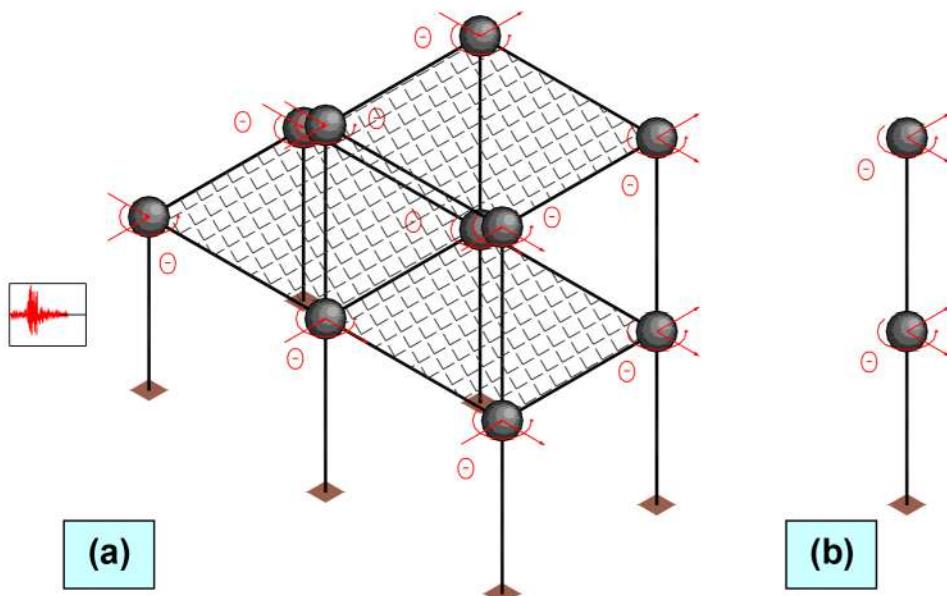


Figura 3.3 (a) Modelo dinámico completo de un pórtico tridimensional con torsión.
(b) modelo simplificado del mismo pórtico.

Todas estas son simplificaciones que implícitamente se hacen al realizar un cálculo dinámico de un edificio mediante el modelo de cortante, sin embargo, los errores de cálculo que suponen son razonables, hecho por el cual el modelo de edificio de cortante es generalmente considerado por los calculistas de estructuras como adecuado.

3.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PARA EDIFICIOS DE CORTANTE

Las expresiones matemáticas que gobiernan la respuesta dinámica de las estructuras se conocen con el nombre de ecuaciones del movimiento. En el caso de los edificios de cortante con comportamiento lineal, las ecuaciones del movimiento se suelen expresar utilizando el principio de d'Alembert. En la figura 3.3 se ha representado un esquema para la determinación de las ecuaciones del movimiento (Barbat 1982; Barbat 1984).

El modelo de la Figura 3.4(a) está sometido a una aceleración horizontal $a(t)$ de origen sísmico. Aislando las masas m_i e introduciendo todas las fuerzas correspondientes,

incluidas las de inercia, resulta el esquema de la Figura 3.4(b). Expresando el equilibrio dinámico de la masa m_r , de acuerdo con el principio de D'Alembert, en un sistema de referencia no inercial con el origen en la posición inicial del edificio, se obtiene

$$F_{ir}(t) - F_{er}(t) - F_{ar}(t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

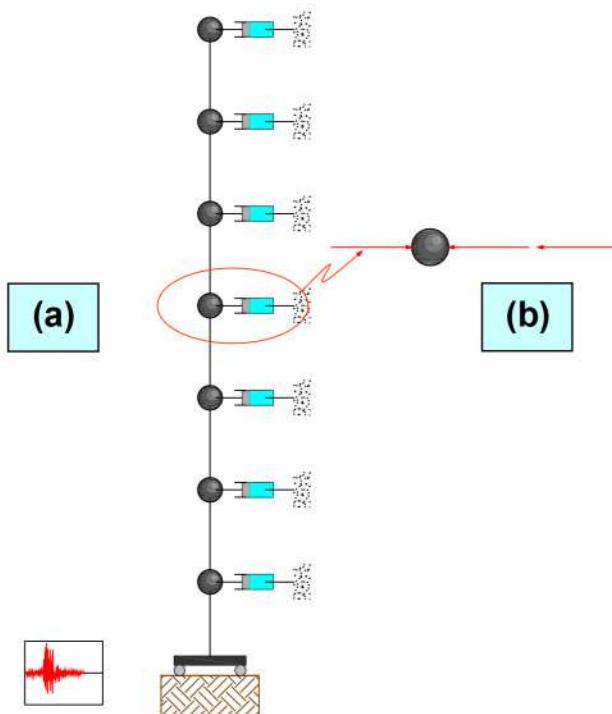


Figura 3.4 Modelo de edificio de cortante. (a) Modelo sísmico; (b) equilibrio de fuerzas.

Donde $F_{ir}(t), F_{er}(t), F_{ar}(t)$ son las fuerzas de inercia, elásticas y de amortiguamiento, respectivamente, correspondientes al grado de libertad r . Obviamente, el modelo dinámico completo está en equilibrio si lo están todas y cada una de sus masas. Escribiendo una ecuación de equilibrio del tipo (3.1) para cada una de las masas y, expresando el conjunto de todas ellas en forma matricial, se tiene

$$\mathbf{F}_i(t) - \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_a(t) = 0 \quad (3.2)$$

Los vectores de las fuerzas elásticas, $\mathbf{F}_e(t)$ de inercia, $\mathbf{F}_i(t)$ y de amortiguamiento, $\mathbf{F}_a(t)$, se definen mediante las siguientes expresiones matriciales:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_e(t) &= \mathbf{KU}(t) \\ \mathbf{F}_i(t) &= -\mathbf{M}[\ddot{\mathbf{U}}(t) + \{1\} \dot{\mathbf{a}}(t)] \\ \mathbf{F}_a(t) &= \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

En estas ecuaciones, $\mathbf{U} = [u_1(t) \dots u_r(t) \dots u_n(t)]$ es el vector de desplazamientos respecto a la base del edificio de cortante y $\{1\}$ es el vector de colocación de la aceleración compuesto por elementos unidad. \mathbf{K} es la matriz de rigidez cuya componente genérica K_{r+1} es la fuerza elástica que se desarrolla en el grado de libertad bloqueado $r+1$, cuando se impone un desplazamiento unitario $u_r = 1$, en el grado de libertad r (para mayor explicación ver la Figura 3.5)

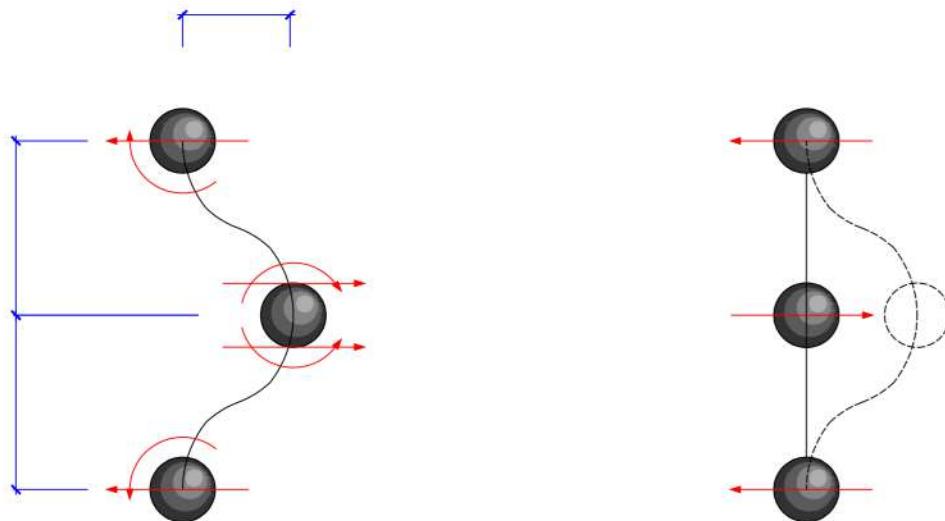


Figura 3.5 Esquema representativo de la rigidez de un grado de libertad.

De esta manera se construye la columna r de dicha matriz. En el caso particular del pórtico de cortante, la influencia del grado de libertad r sólo afecta a los dos grados adyacentes, es decir que la fuerza en los restantes grados de libertad $F_{r+2} = F_{r-2} = 0$ (véase Barbat y Canet 1994). En este caso particular, se llega a la siguiente forma explícita tri-diagonal:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & K_r + K_{r+1} & -K_{r+1} & 0 \\ \mathbf{0} & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & \cdots & K_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

En donde $k_r = 12EI_r/h_{r,r-1}^3$ es la rigidez cortante del grupo de pilares r , siendo I_r la suma de los momentos de inercia de los pilares situados entre las plantas r y $r-1$ y donde $h_{r,r-1}$ es la altura de dichos pilares. En el apartado 3.3.4 se muestra la construcción de esta matriz con más detalle. La matriz de masa \mathbf{M} es diagonal para modelos de edificio de cortante, es decir que no existe interacción entre las masas asociadas a dos grados de libertad distintos del sistema.

Referente a la matriz de amortiguamiento C es oportuno hacer algunos comentarios. La fuerza de amortiguamiento se produce principalmente por efecto de la propia viscosidad del material. Existen otros fenómenos que también producen disipación -fricción en zonas de contacto, fricción interna, etc.-, pero sólo se puede denominar fuerza de amortiguamiento a aquella que depende de la velocidad y en este caso sólo participan las fuerzas viscosas (ver apartado 4.4.1).

Habitualmente, en el cálculo dinámico de estructuras se utiliza solamente un *amortiguamiento viscoso*, proporcional a la velocidad, que está basado en el modelo de Kelvin-Voigt. Este es el caso contemplado en la última de las ecuaciones (3.3). Su utilización se debe a la capacidad de describir, de una manera sencilla, el amortiguamiento global de toda la estructura y poder tener solución cerrada en la ecuación diferencial del movimiento. La definición parte de la hipótesis simplificativa de que existe un mecanismo de pérdida de energía homogéneo, que es externo a la estructura (Wilson y Penzien 1972). En estas condiciones se obtiene una matriz de amortiguamiento proporcional a la matriz de masa, a la matriz de rigidez o una combinación lineal de ambas, es decir:

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K} \quad (3.5)$$

Siendo α_1 y α_2 unos coeficientes a determinar. En este último caso al amortiguamiento se le denomina de tipo Rayleigh. Este tipo de amortiguamiento puede estar muy alejado de representar la realidad de una estructura, pero a cambio permite dar una solución cerrada de la ecuación diferencial del movimiento.

Sustituyendo ahora las ecuaciones (3.3) en (3.2), se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para el modelo de edificio de cortante sometido a una aceleración en la base,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = -\mathbf{M}\{l\}a(t) \quad (3.6)$$

Las vibraciones libres amortiguadas en el modelo dinámico se expresan como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Y, cuando se prescinde del amortiguamiento, resulta

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Que es el sistema de ecuaciones que describe las vibraciones libres no amortiguadas del modelo.

3.3 PÓRTICOS DE CORTANTE CON GRADOS DE LIBERTAD ROTACIONAL: CASO GENERAL

El pórtico de cortante admite una generalización al considerar la rotación de cada piso condensada en la fuerza que actúa en la dirección del pórtico. En este apartado se desarrollará las expresiones que permite calcular los edificios teniendo en cuenta su rotación y traslación, considerando pórticos de cortante.

Se admite por hipótesis que los forjados son diafragmas infinitamente rígidos, tanto en su propio plano así como también a flexión. Esto permite reducir la estructura a tres grados de libertad por piso, ver Figura 3.6(a).

3.3.1 Cálculo del centro de masa y del centro de torsión del nivel j

Se supone un nivel j de la estructura de edificio, ver Figura 3.6(b). A continuación se calcula la posición del centro de masa y el centro de rigidez o torsión,

Centro de masa:

$$\begin{cases} x_j^{CM} = \frac{\sum k(M_j)_k \cdot (x_j)_k}{\sum k(m_j)_k} \\ y_j^{CM} = \frac{\sum k(m_j)_k \cdot (y_j)_k}{\sum k(m_j)_k} \end{cases} \quad (3.9)$$

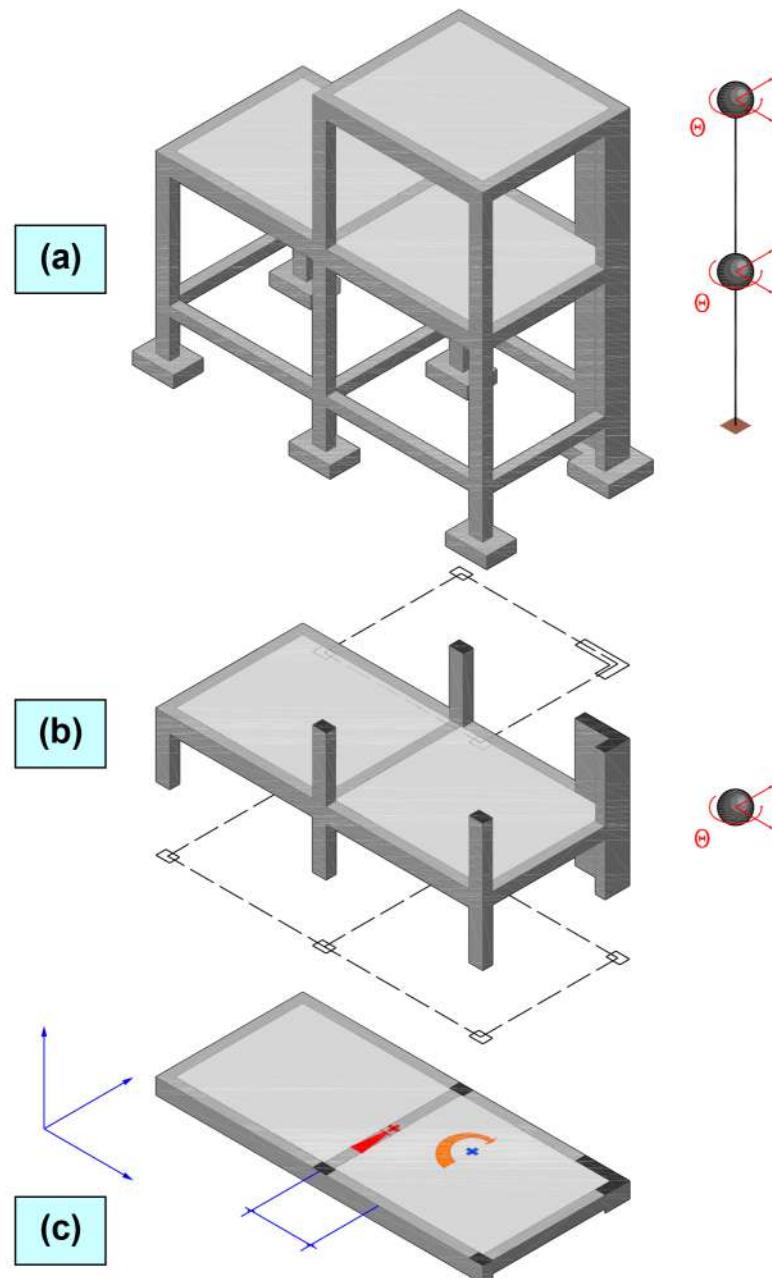


Figura 3.6 Estructura aporticada genérica, representativa de un edificio en tres dimensiones y su simplificación.

siendo $(m_j)_k$ la masa de un elemento estructural pilar, viga, forjado, muro, etc.- perteneciente al nivel j de la estructura, y $[(x_j)_k, (y_j)_k]$ las coordenadas del centro de masa del elemento estructural k .

Centro de rigidez:

$$\begin{cases} x_j^{CT} = \frac{\sum_i (K_j^y)_i \cdot (x_j)_i}{\sum_i (K_j^y)_i} \\ y_j^{CT} = \frac{\sum_i (K_j^x)_i \cdot (y_j)_i}{\sum_i (K_j^x)_i} \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $(K_j^x)_i$ y $(K_j^y)_i$ representan las rigideces del pilar i , nivel j , en las direcciones x e y respectivamente.

3.3.2 Obtención de la fuerza por traslación y su correspondiente desplazamiento en el nivel j

Se establece el equilibrio translacional de fuerzas en la dirección y para todo el nivel j a través de la siguiente ecuación,

$$F_j^y = \sum_i (F_j^y)_i = \sum_i (K_j^y)_i \cdot (u_j^y)_i \quad (3.11)$$

Estableciendo una compatibilidad de desplazamientos en la traslación del piso j , $(u_j^y)_i \equiv u_j^y$, resulta el desplazamiento de todo el piso en función de la fuerza,

$$F_j^y = u_j^y \sum_i (K_j^y)_i \dots \Rightarrow u_j^y = \frac{F_j^y}{\sum_i (K_j^y)_i} \quad (3.12)$$

Con este desplazamiento translacional del piso j , de magnitud u_j^y se obtiene la fuerza $(F_j^y)_i$ que se desarrolla en el pilar i^{esimo} , nivel j^{esimo} , dirección y ,

$$(F_j^y)_i = (K_j^y)_i \cdot u_j^y = F_j^y \frac{(F_j^y)_i}{\sum_i (K_j^y)_i} \quad (3.13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, resulta la fuerza $(F_j^x)_i$ en la dirección x ,

$$(F_j^x)_i = (K_j^x)_i \cdot u_j^x = F_j^x \frac{(F_j^x)_i}{\sum_i (K_j^x)_i} \quad (3.14)$$

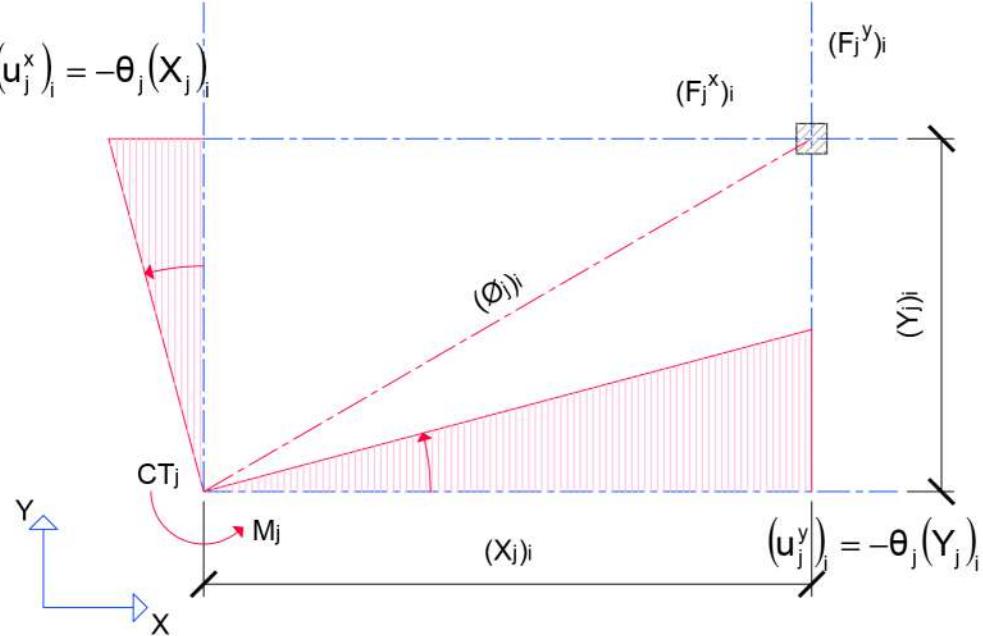


Figura 3.7 Desplazamientos producidos en un pilar como consecuencia de la rotación de piso

3.3.3 Obtención de la fuerza por rotación y su correspondiente desplazamiento en el nivel j

En este apartado se supone un nivel j de la estructura de edificio (ver Figura 3.6(c) y Figura 3.7), y se establece el equilibrio rotacional de fuerzas para todo el nivel j a través de la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned}
 M_j &= \vec{F}_j \times \vec{d}_j^{CT-CM} \\
 &= \sum_i (F_j^y)_i \cdot (x_j)_i - \sum_i (F_j^x)_i \cdot (y_j)_i \\
 &= \left[\sum_i (K_j^y)_i \cdot (u_j^y)_i \right] \cdot (x_j)_i - \left[\sum_i (K_j^x)_i \cdot (u_j^x)_i \right] \cdot (y_j)_i
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sustituyendo en esta ecuación los movimientos de los pilares en función de la rotación del piso (ver Figura 3.7), resulta

$$\begin{aligned}
 M_j &= \theta_j \left[\sum_i (K_j^y)_i \cdot (u_j^y)_i^2 + \sum_i (K_j^x)_i \cdot (y_j)_i^2 \right] \\
 \theta_j &= \frac{M_j}{\sum_i (K_j^y)_i \cdot (x_j)_i^2 + \sum_i (K_j^x)_i \cdot (y_j)_i^2}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Obteniéndose de aquí las fuerzas en los pilares en función del momento M_j , que en adelante denominaremos momento del piso j .

$$\begin{aligned} (F_j^y)_i &= (K_j^y)_i \cdot \theta_j \cdot (x_j)_i^2 = M_j \cdot \frac{(K_j^y)_i \cdot (x_j)_i^2}{\sum_i (K_j^y)_i \cdot (x_j)_i^2 + \sum_i (K_j^x)_i \cdot (y_j)_i^2} \\ (F_j^x)_i &= (K_j^x)_i \cdot \theta_j \cdot (y_j)_i^2 = M_j \cdot \frac{(K_j^x)_i \cdot (y_j)_i^2}{\sum_i (K_j^y)_i \cdot (x_j)_i^2 + \sum_i (K_j^x)_i \cdot (y_j)_i^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3.4 Obtención de la matriz de rigidez para el piso j

La matriz de rigidez del pórtico de cortantes correspondiente a la estructura que muestra la Figura 3.5 y particularmente la sub matriz del piso j , resulta a partir de las expresiones de las fuerzas obtenidas en los sub apartados previos (ver Figura 3.8).

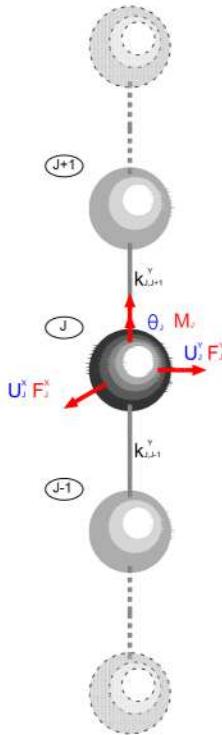


Figura 3.8 Relación de rigideces y grados de libertad para el piso j del pórtico de cortantes que resulta de la estructura que muestra la figura 3.5

- *Ecuación de equilibrio translacional del piso j.*

El equilibrio en el piso j , luego de imponer una traslación del mismo en las direcciones u_j^x y u_j^y se escribe en función de la contribución de las rigideces de los pilares que vinculan el piso j con el $j-1$ y el $j+1$ (ver Figura 3.8). Es decir:

- Se denomina rigidez

$$(K_{j,j}^x) \equiv (K_j^x) = (k_{j,j+1}^x) + (k_{j,j-1}^x) = \sum_i (K_j^x)_i = \sum_i (k_{j,j+1}^x)_i + (k_{j,j-1}^x)_i$$

a la fuerza elástica que se desarrolla en la dirección x en el piso j cuando se impone un desplazamiento unitario $u_j^x = 1$ en el propio piso j , mientras se impide el movimiento de los restantes grados de libertad,

- Se denomina rigidez

$$(K_{j,j}^y) \equiv (K_j^y) = (k_{j,j+1}^y) + (k_{j,j-1}^y) = \sum_i (K_j^y)_i = \sum_i (k_{j,j+1}^y)_i + (k_{j,j-1}^y)_i$$

a la fuerza elástica que se desarrolla en la dirección y en el piso j cuando se impone un desplazamiento unitario $u_j^y = 1$ en el propio piso j , mientras se impide el movimiento de los restantes grados de libertad,

- Se denomina rigidez

$$(K_{j,j-1}^x) \equiv (K_{j-1}^x) = (k_{j,j-1}^x) = \sum_i (K_{j-1}^x)_i = \sum_i (k_{j,j-1}^x)_i$$

a la fuerza elástica que se desarrolla en la dirección x en el piso j cuando se impone un desplazamiento unitario $u_{j-1}^x = 1$ en el piso $j-1$, mientras se impide el movimiento de los restantes grados de libertad,

- Se denomina rigidez

$$(K_{j,j+1}^x) \equiv (K_{j+1}^x) = (k_{j,j+1}^x) = \sum_i (K_{j+1}^x)_i = \sum_i (k_{j,j+1}^x)_i$$

a la fuerza elástica que se desarrolla en la dirección x en el piso j cuando se impone un desplazamiento unitario $u_{j+1}^x = 1$ en el piso $j+1$, mientras se impide el movimiento de los restantes grados de libertad,

- Se denomina rigidez

$$(K_{j,j+1}^y) \equiv (K_{j+1}^y) = (k_{j,j+1}^y) = \sum_i (K_{j+1}^y)_i = \sum_i (k_{j,j+1}^y)_i$$

a la fuerza elástica que se desarrolla en la dirección y en el piso j cuando se impone un desplazamiento unitario $u_{j+1}^y = 1$ en el piso $j+1$, mientras se impide el movimiento de los restantes grados de libertad.

Componiendo las rigideces previamente citadas, se escribe la siguiente ecuación de equilibrio para el piso j ,

$$\begin{cases} F_j^x = \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j+1}^x)_i + \sum_i (k_{j,j-1}^x)_i \right]}_{(K_{j,j}^x)} u_j^x - \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j-1}^x)_i \right]}_{(K_{j,j-1}^x)} u_{j-1}^x - \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j+1}^x)_i \right]}_{(K_{j,j+1}^x)} u_{j+1}^x \\ F_j^y = \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j+1}^y)_i + \sum_i (k_{j,j-1}^y)_i \right]}_{(K_{j,j}^y)} u_j^y - \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j-1}^y)_i \right]}_{(K_{j,j-1}^y)} u_{j-1}^y - \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j+1}^y)_i \right]}_{(K_{j,j+1}^y)} u_{j+1}^y \end{cases} \quad (3.18)$$

reescribiendo esta ecuación a partir de asignar la siguiente notación a los coeficientes de rigidez, resulta

$$\begin{cases} F_j^x = (K_{j,j}^x) u_j^x - (K_{j,j-1}^x) u_{j-1}^x - (K_{j,j+1}^x) u_{j+1}^x \\ F_j^y = (K_{j,j}^y) u_j^y - (K_{j,j-1}^y) u_{j-1}^y - (K_{j,j+1}^y) u_{j+1}^y \end{cases} \quad (3.19)$$

- *Ecuación de equilibrio rotacional del piso j .*

El equilibrio en el piso j , luego de imponer una rotación θ_j , se escribe en función de la contribución de las rigideces de los pilares que vinculan el piso j con el $j-1$ y el $j+1$ (ver Figura 3.8). Es decir:

$$\begin{aligned} M_j = & \underbrace{\left[\sum_i (K_j^y)_i \cdot (x_j)_i^2 + \sum_i (K_j^x)_i \cdot (y_j)_i^2 \right]}_{(K_{j,j}^\theta)} \theta_j - \\ & \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j-1}^y)_i \cdot (x_j)_i^2 + \sum_i (k_{j,j-1}^x)_i \cdot (y_j)_i^2 \right]}_{(K_{j,j-1}^\theta)} \theta_{j-1} - \\ & \underbrace{\left[\sum_i (k_{j,j+1}^y)_i \cdot (x_j)_i^2 + \sum_i (k_{j,j+1}^x)_i \cdot (y_j)_i^2 \right]}_{(K_{j,j+1}^\theta)} \theta_{j+1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

reescribiendo esta ecuación a partir de asignar la siguiente notación a los coeficientes de rigidez, resulta

$$M_j = (K_{j,j}^\theta) \cdot \theta_j - (K_{j,j-1}^\theta) \cdot \theta_{j-1} - (K_{j,j+1}^\theta) \cdot \theta_{j+1} \quad (3.21)$$

Ordenando las ecuaciones (3.21) y (3.19) y describiéndolas en forma matricial, se tiene,

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (3.22)$$

siendo,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots \\ F_{j-1}^x \\ F_{j-1}^y \\ M_{j-1} \\ \dots \\ F_j^x \\ F_j^y \\ M_j \\ \dots \\ F_{j+1}^x \\ F_{j+1}^y \\ M_{j+1} \\ \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots \\ u_{j-1}^x \\ u_{j-1}^y \\ \theta_{j-1} \\ \dots \\ u_j^x \\ u_j^y \\ \theta_j \\ \dots \\ u_{j+1}^x \\ u_{j+1}^y \\ \theta_{j+1} \\ \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & -K_{j,j-1}^x & 0 & 0 & -K_{j,j}^x & 0 & 0 & -K_{j,j+1}^x & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -K_{j,j-1}^x & 0 & 0 & -K_{j,j}^x & 0 & 0 & -K_{j,j+1}^x & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -K_{j,j-1}^\theta & 0 & 0 & -K_{j,j}^\theta & 0 & 0 & -K_{j,j+1}^\theta & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

siendo \mathbf{F} y \mathbf{U} los vectores de fuerza y desplazamiento globales, correspondiente a toda la estructura y \mathbf{K} la correspondiente matriz de rigidez global.

3.3.5 Cálculo de la rigidez de cada pilar i del piso j .

La rigidez de cada pilar (elementos contenidos en la matriz de rigidez de la ecuación 3.22, resulta de la fuerza desarrollada para provocar un desplazamiento unitario relativo $(u_j^x)_y$ entre el piso j y $j-1$ (ver Figura 3.9),

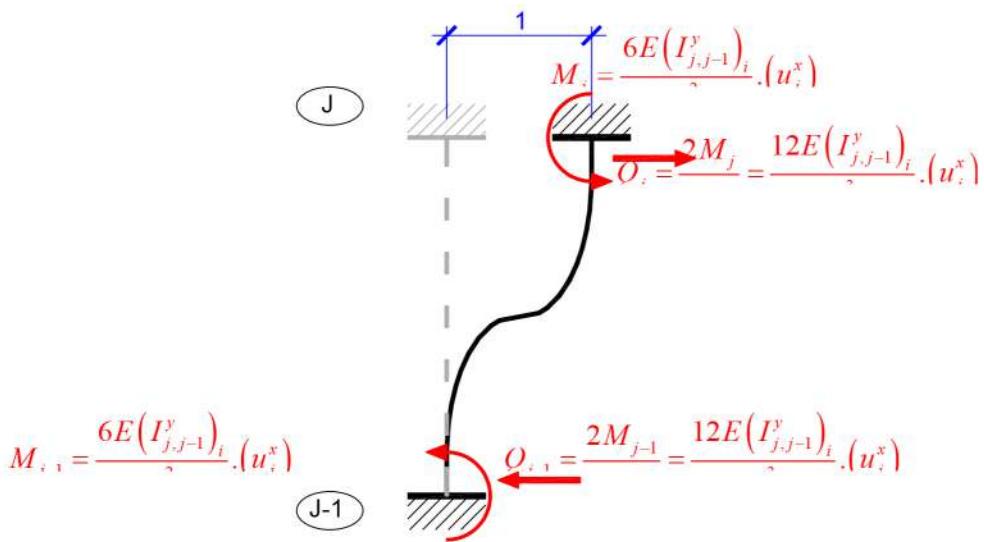


Figura 3.9 Modelos dinámicos de masas concentradas para edificios. (a) edificio de plantas rígidas y (b) su modelo dinámico de edificio de cortante

$$Q_i = \frac{2M}{h_i} = \frac{12E(I_{j,j-1}^y)_i}{h_i^3} (u_i^x) \Rightarrow (k_{j,j-1}^x)_i = \frac{12E(I_{j,j-1}^y)_i}{h_i^3}$$

$$k_{j,j-1}^x = \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j-1}^y)_i}{h_i^3} \right] \quad (3.23)$$

Conocida esta simple rigidez, y sustituida en las ecuaciones del apartado 3.3.4, se obtienen las rigideces al desplazamiento translacional de cada piso en las direcciones x e y ,

$$(K_{j,j}^x) \equiv (K_j^x) = (K_{j,j+1}^x) + (K_{j,j-1}^x) = \sum_i (K_j^x)_i = \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j+1}^y)_i}{h_{j,j+1}^3} + \frac{12E(I_{j,j-1}^y)_i}{h_{j,j-1}^3} \right]$$

$$(K_{j,j}^y) \equiv (K_j^y) = (K_{j,j+1}^y) + (K_{j,j-1}^y) = \sum_i (K_j^y)_i = \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j+1}^x)_i}{h_{j,j+1}^3} + \frac{12E(I_{j,j-1}^x)_i}{h_{j,j-1}^3} \right] \quad (3.24)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se obtiene la rigidez rotacional de cada piso,

$$\begin{aligned} \left(K_{j,j-1}^{\theta}\right) &= \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j-1}^x)_i}{h_{j,j-1}^3} \right] \cdot (x_j^2)_i + \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j-1}^y)_i}{h_{j,j-1}^3} \right] \cdot (y_j^2)_i \\ \left(K_{j,j}^{\theta}\right) &= \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j+1}^x)_i}{h_{j,j+1}^3} + \frac{12E(I_{j,j-1}^x)_i}{h_{j,j-1}^3} \right] \cdot (x_j^2)_i \\ &\quad + \sum_i \left[\frac{12E(I_{j,j+1}^y)_i}{h_{j,j+1}^3} + \frac{12E(I_{j,j-1}^y)_i}{h_{j,j-1}^3} \right] \cdot (y_j^2)_i \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.4 FUERZA DE INERCIA TRASLACIONAL Y ROTACIONAL

En este apartado se obtendrá la expresión detallada de la fuerza de inercia \mathbf{F} que se desarrolla en el pórtico de cortantes (ver ecuación 3.3) y principalmente la matriz de masa \mathbf{M}

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (3.26)$$

La fuerza de inercia producida por las aceleraciones translacionales en el piso j , resultan,

$$\begin{cases} F_j^x = \sum_i (F_j^x)_i = \underbrace{\left[\sum_i (m_j)_i \right]}_{(M_j)} \ddot{u}_j^x \\ F_j^y = \sum_i (F_j^y)_i = \underbrace{\left[\sum_i (m_j)_i \right]}_{(M_j)} \ddot{u}_j^y \end{cases} \quad (3.27)$$

El momento torsor de piso M^T debido a la fuerza de inercia producida por las aceleraciones rotacionales en el piso j es

$$M^T = \sum_i (F_j^y)_i (x_j)_i - \sum_i (F_j^x)_i (y_j)_i \quad (3.28)$$

Sustituyendo en ésta última ecuación las fuerzas de inercia por su magnitud, queda,

$$M_j^T = \sum_i (m_j)_i (\ddot{u}_j^y)_i (x_j)_i - \sum_i (m_j)_i (\ddot{u}_j^x)_i (y_j)_i \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta la cinemática de la rotación de los pisos (ver la figura 3.7)

$$\begin{cases} (\ddot{u}_j^x)_i = \ddot{\theta}_j (y_j)_i \\ (\ddot{u}_j^y)_i = \ddot{\theta}_j (x_j)_i \end{cases} \quad (3.30)$$

y sustituyéndola en la ecuación de momento del piso (3.29), resulta

$$M_j = \ddot{\theta}_j \left[\underbrace{\sum_i (m_j)_i (\ddot{u}_j^y)_i (x_j)_i - \sum_i (m_j)_i (\ddot{u}_j^x)_i (y_j)_i}_{M_j^0} \right] \quad (3.31)$$

Escribiendo ahora las fuerzas de inercia en forma matricial se tiene la siguiente expresión desacoplada para el piso j .

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j \cdot \ddot{\mathbf{u}}_j = \begin{Bmatrix} F_j^x \\ F_j^y \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{j,j} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{j,j}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_j^x \\ \ddot{u}_j^y \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

siendo $\mathcal{M}_{j,j} \equiv \mathcal{M}_j = \sum_i (m_j)_i$ y $\mathcal{M}_{j,j}^0 \equiv \mathcal{M}_j^0$. La matriz de masa para el resto de los pisos resulta también diagonal y por lo tanto la matriz de masa global -para toda la estructura- también es diagonal.

3.5 DESACOPLAMIENTO MODAL DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Las características dinámicas de los modelos con varios grados de libertad se definen analizando sus vibraciones libres no amortiguadas, que están gobernadas por la ecuación (3.8). Dicha ecuación debe cumplirse para soluciones particulares del tipo

$$\mathbf{U}(t) = \varphi e^{i\omega t} \quad (3.33)$$

El vector φ contiene las amplitudes del desplazamiento y ω es la pulsación. Sustituyendo (3.33) en (3.8), se obtiene la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \varphi = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas constituye un *problema de autovalores*. Dicho sistema tiene soluciones φ distintas de la trivial, es decir, el modelo vibra, solamente si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3.35)$$

Si este determinante se desarrolla en su forma polinómica se obtiene la correspondiente ecuación característica

$$\omega^{2n} + \alpha_1 \omega^{2n-2} + \alpha_2 \omega^{2n-4} + \dots + \alpha_{n-1} \omega^2 + \alpha_n = 0 \quad (3.36)$$

En el caso de las estructuras, la matriz de rigidez \mathbf{K} y la de masa \mathbf{M} son reales y simétricas. Además, \mathbf{K} es definida positiva y \mathbf{M} es semi-definida positiva como mínimo. En el caso en que \mathbf{M} sea definida positiva, de la ecuación característica se obtienen n soluciones positivas ω_i^2 y, en consecuencia, n valores de ω_i reales. Si la matriz \mathbf{M} es solamente semi-definida positiva, el número de soluciones finitas ω_i^2 es menor. Los n autovalores ω_i son las *frecuencias propias o pulsaciones* del modelo estructural, que pueden ordenarse en la diagonal principal de la *matriz espectral* Ω . La frecuencia más baja ω_1 se denomina *frecuencia fundamental*. Los períodos propios del modelo se definen por

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.37)$$

en donde T_1 es el período fundamental. La forma de vibración o autovector φ_i puede obtenerse a partir de la ecuación (3.34), expresando todos los términos de φ_i en función de uno cualquiera de ellos, por ejemplo, φ_{i1} . En este caso, se definen los *autovectores normalizados* $\phi_i = \varphi_i / \varphi_{i1}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, cuyo primer elemento es igual a la unidad. Otra forma es normalizar los autovectores en función de la masa, a partir del uso de la relación

$$\varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i = M_i^* \quad (3.38)$$

lo que permite aplicar la siguiente fórmula de normalización respecto de la masa:

$$\phi_i = \varphi_i \cdot \left(M_i^* \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.39)$$

Esta ecuación asegura el cumplimiento de la condición $(\phi)^T \mathbf{M} \phi = 1$. Los autovectores ϕ_i , que pueden ordenarse en la *matriz modal* Φ , representan las formas del sistema durante la vibración en cada una de sus autofrecuencias. Por ello, los autovectores reciben en el análisis estructural el nombre de *formas naturales de vibración* o *formas modales*. Un autovalor ω_i con su autovector correspondiente ϕ_i constituye el *modo natural de vibración i*.

La condición de ortogonalidad de dos vectores se define por

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad i \neq j \quad (3.40)$$

Pueden introducirse condiciones de ortogonalidad semejantes respecto a la matriz de masa \mathbf{M} y respecto a la de rigidez \mathbf{K} por medio de las expresiones (Bathe 1982, Bathe, K.-J. Newmark y Rosenblueth 1971)

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad i \neq j \quad (3.41)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0 \quad i \neq j \quad (3.42)$$

éstas formas propias cumplen también la siguiente condición de normalidad respecto a la matriz de masa:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = M_i^* \neq 0 \quad (3.43)$$

$$(\phi_i^*)^T \mathbf{M} \phi_i^* = 1 \quad (3.43b)$$

lo que permite escribir en forma compacta una *condición de ortonormalidad* respecto a la matriz de masa: $(\Phi^*)^T \mathbf{M} \Phi^* = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Sin embargo, aunque los vectores propios no fuese ortonormales, la condición de ortogonalidad respecto a la matriz de masa se cumple siempre. Dicha condición puede expresar de la siguiente manera:

$$(\Phi)^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{M}^* \quad (3.44)$$

donde \mathbf{M}^* es diagonal. De igual forma, la condición de ortogonalidad respecto a la matriz de rigidez se puede escribir como

$$(\Phi)^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{K}^* \quad (3.45)$$

donde \mathbf{K}^* es una matriz diagonal cuyos términos no nulos valen $K_{ii}^* = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i$. En el caso de un amortiguamiento \mathbf{C} de tipo proporcional, la matriz de amortiguamiento también cumple la condición de ortogonalidad respecto a la matriz modal

$$(\Phi)^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{C}^* \quad (3.46)$$

siendo \mathbf{C}^* una matriz diagonal. Considerando la definición del amortiguamiento proporcional de la ecuación (3.5), la condición de ortogonalidad (3.46) proporciona $C^* = \alpha_1 M^* + \alpha_2 K^*$.

El problema de autovalores anteriormente mencionado se soluciona mediante técnicas numéricas, como la técnica estándar de Jacobi (Bathe 1982; Barbat y Canet 1994). En muchos casos no es necesario calcular todos los autovalores y autovectores del problema. De hecho, tal como se verá a continuación, es posible obtener una buena aproximación a la solución del problema dinámico utilizando solamente los autovalores más bajos de la estructura. Los autovalores superiores no solo tienen una influencia pequeña en la solución, sino que están distorsionados debido al proceso de modelización de la estructura y a los errores propios al proceso numérico utilizado en su cálculo. Por este motivo, han sido propuestos diversos métodos que calculan solamente los primeros autovalores y autovectores que se deseen (Bathe 1982).

Adoptado ya el método de autovalores y autovectores para la obtención de los modos propios de vibración de la estructura, se introduce ahora el concepto de separación de variables. Este concepto permite tratar por separado la resolución de las ecuaciones en el campo temporal y espacial, expresando el campo de desplazamientos como

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^n \phi_j \chi_j(t) \quad (3.47)$$

donde el autovector ϕ_j describe la forma de vibrar de la estructura en el modo j y la función del tiempo $\chi_j(t)$ su amplitud. A esta última variable se le denomina respuesta generalizada o coordenada normal del grado de libertad j . Sustituyendo (3.47) en (3.6), se obtiene

$$\mathbf{M} \sum_{j=1}^n \phi_j \ddot{\chi}_j(t) + \mathbf{C} \sum_{j=1}^n \phi_j \dot{\chi}_j(t) + \mathbf{K} \sum_{j=1}^n \phi_j \chi_j(t) = -\mathbf{M}\{1\} a(t) \quad (3.48)$$

ecuación que, premultiplicada por la transpuesta de un autovector cualquiera, proporciona

$$\phi_i^T \mathbf{M} \sum_{j=1}^n \phi_j \ddot{\chi}_j(t) + \phi_i^T \mathbf{C} \sum_{j=1}^n \phi_j \dot{\chi}_j(t) + \phi_i^T \mathbf{K} \sum_{j=1}^n \phi_j \chi_j(t) = -\phi_i^T \mathbf{M}\{1\} a(t) \quad (3.49)$$

Utilizando las condiciones de ortogonalidad de los autovectores (ecuaciones 3.36, 3.37 y 3.38), resulta

$$\phi_i^T \mathbf{M} \sum_{j=1}^n \phi_j = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = M_i^* \quad (3.50)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K} \sum_{j=1}^n \phi_j = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = K_i^* \quad (3.50b)$$

y, si la matriz de amortiguamiento es ortogonal, se tiene también

$$\phi_i^T \mathbf{C} \sum_{j=1}^n \phi_j = \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i = C_i^* \quad (3.50c)$$

Las ecuaciones (3.50) permiten formular la ecuación (3.49) como un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas para cada modo de vibración i y que tienen la misma forma que la ecuación del movimiento de un sistema con un solo grado de libertad (ecuación 2.4)

$$M_i^* \ddot{\chi}_i(t) + C_i^* \dot{\chi}_i(t) + K_i^* \chi_i(t) = -\phi_i^T \mathbf{M} \{1\} a(t) \quad (3.51)$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones (3.6) queda reducido a n ecuaciones diferenciales independientes. La ecuación (3.51) puede transformarse dividiendo todos sus términos M_i^* , obteniéndose un sistema de ecuaciones diferenciales en aceleraciones desacopladas (ver la similitud con la ecuación 2.4b de un sistema con un grado de libertad).

$$\ddot{\chi}_i(t) + 2\nu_i \omega_i \dot{\chi}_i(t) + \omega_i^2 \chi_i(t) = -\frac{\phi_i^T \mathbf{M} \{1\}}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} a(t) = -Q_i a(t) = -a_i(t) \quad (3.52)$$

donde se ha introducido el coeficiente Q_i , denominado coeficiente de participación modal correspondiente al modo i de vibración, definido por

$$Q_i = -\frac{\phi_i^T \mathbf{M} \{1\}}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} = \frac{\sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}}{\sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}^2} \quad (3.53)$$

y que aporta la aceleración a_i , correspondiente a un sistema equivalente de un grado de libertad. La ecuación (3.52) puede resolverse utilizando cualquiera de los métodos aplicables a sistemas con un solo grado de libertad dinámica (por ejemplo, la integral de Duhamel, ecuaciones 2.2, 2.3).

Cuando las formas propias de vibración son ortonormales (ortogonales y normalizadas respecto a la masa tal como se muestra en la ecuación 3.39), es decir,

$(\phi)_i^T \mathbf{M} \phi = 1$, el coeficiente de participación modal queda de la forma $Q_i = \sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}$

Obsérvese que si se sustituye la masa M_r por el peso G_r en la ecuación (3.53), dicha ecuación proporcionará el mismo valor Q_i para el coeficiente de participación modal.

A medida que aumenta el orden de las frecuencias, los errores que éstas contienen son mayores, hecho ya puntualizado anteriormente. Al mismo tiempo, los modos inferiores contienen menor energía elástica de deformación, motivo por el cual influyen en mayor medida en la respuesta de la estructura. Por todo ello, en el análisis se incluye un número menor que n de modos propios de vibración y, consecuentemente, la ecuación (3.47) y sus derivadas se suelen escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^q \phi \chi_i(t) \quad \dot{\mathbf{U}}(t) = \sum_{i=1}^q \phi \dot{\chi}_i(t) \quad \ddot{\mathbf{U}}(t) = \sum_{i=1}^q \phi \ddot{\chi}_i(t) \quad (3.54)$$

Como consecuencia, el número $q \leq n$ de ecuaciones del tipo (3.52) que es necesario resolver es habitualmente mucho menor que el número n de modos de vibración del modelo.

Una de las formas de estudiar el comportamiento dinámico de una estructura consiste en obtener la evolución en el tiempo de su respuesta. Para ello, una vez obtenidas las respuestas generalizadas $u_i(t)$ solucionando ecuaciones del tipo (3.52), éstas se sustituyen en (3.54) para obtener la historia de los desplazamientos $\mathbf{U}(t)$. Después de haber determinado dichos desplazamientos, se efectúa el cálculo de los esfuerzos, que se realiza por procedimientos propios de un análisis estático para cada instante t del proceso dinámico. Realizar un análisis de este tipo tiene dos inconvenientes principales. En primer lugar, se necesita disponer de un acelerograma del movimiento sísmico a considerar en el cálculo, y las normativas de diseño especifican solamente espectros sísmicos de respuesta. En segundo lugar, este procedimiento de análisis proporciona un exceso de información acerca de la respuesta de la estructura, y en el diseño de estructuras es, generalmente, suficiente utilizar la respuesta máxima. Por todos estos motivos, el procedimiento que habitualmente se utiliza en el cálculo dinámico de edificios, utiliza la definición de la acción mediante espectros sísmicos de respuesta y proporciona como resultado del cálculo únicamente la respuesta máxima de la estructura. A continuación se desarrollan las bases teóricas de este procedimiento.

3.6 RESPUESTAS MÁXIMAS MODALES UTILIZANDO ESPECTROS SÍSMICOS DE RESPUESTA

3.6.1 Planteamiento del problema

Se considera que la acción sísmica está definida mediante el espectro de respuesta en aceleraciones S_a , correspondiente a un movimiento del terreno de

aceleración $a(t)$. La ecuación desacoplada (3.52), correspondiente al modo i de vibración, se describe a continuación:

$$\ddot{\chi}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\chi}_i(t) + \omega_i^2\chi_i(t) = -Q_i a(t) \quad (3.55)$$

Esta ecuación es similar a la que describe el movimiento de un modelo con un solo grado de libertad (ecuación 2.4). Por este motivo, la respuesta generalizada máxima en aceleraciones $\ddot{\chi}_i(t)_{\max}$, que se podría obtener solucionando numéricamente la ecuación (3.55), es igual a la ordenada espectral S_{a_i} correspondiente al modo i (véase la ecuación 2.8) multiplicada por el coeficiente de participación modal Q_i

$$\ddot{\chi}_i(t)_{\max} = -Q_i (S_a)_i = (\bar{S}_a)_i \quad (3.56)$$

En la ecuación (3.56) se introdujo la notación $(\bar{S}_a)_i = Q_i (S_a)_i$ para definir la aceleración espectral correspondiente al modo i . El desplazamiento generalizado máximo en el modo i de vibración se expresa teniendo en cuenta que $(\bar{S}_a)_i = Q_i (S_a)_i$, siendo $(S_d)_i$ el espectro de respuesta en desplazamientos (ecuación 2.8). En consecuencia (ver ecuación 2.12)

$$\chi_i(t)_{\max} = -Q_i \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} = -\frac{(\bar{S}_a)_i}{\omega_i^2} \quad (3.57)$$

Se estudiarán a continuación una serie de parámetros que caracterizan las respuestas modales máximas de un edificio de cortante del tipo representado en la figura 3.4. Dicho edificio tiene n grados de libertad (r es un grado de libertad corriente) y en su análisis se incluirán, de acuerdo con las ecuaciones (3.54), q modos de vibración. Las más importantes características de respuesta que se analizarán son: las fuerzas sísmicas equivalentes modales en las F_{ri} , los desplazamientos modales de dichas plantas u_{ri} y el cortante modal en la base V_i . A éstas hay que añadir otras características que, en ciertos casos, también pueden tener una influencia significativa en el diseño de los edificios: los cortantes modales de piso V_{ri} y el momento modal de vuelco M_{ri}^v . Un concepto muy importante, que permite determinar de una manera rigurosa el número de modos de vibración que se deben incluir en el análisis, es el de peso efectivo modal.

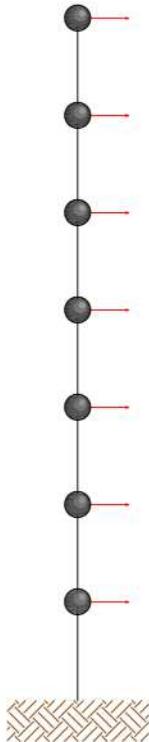


Figura 3.10 Modelos dinámicos de masas concentradas para edificios. (a) edificio de plantas rígidas y (b) su modelo dinámico de edificio de cortante

Una vez determinadas las características modales mencionadas, se calculan los esfuerzos seccionales máximos modales mediante procedimientos de cálculo estático. La evaluación de los valores totales de la respuesta, necesarios para comprobar el comportamiento sísmico de la estructura, se debe hacer mediante procedimientos estadísticos, aplicados directamente a los esfuerzos seccionales máximos modales.

3.6.2 Características modales máximas

- **Desplazamientos modales máximos.** Los desplazamientos modales máximos según todos los grados de libertad del modelo se pueden escribir en la forma (ver apartado 3.6.2.2 de la NCSE-02)

$$(\mathbf{U}_i)_{\max} = \phi \chi_i(t)_{\max} = \phi Q_i \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} = \eta_i \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \quad (3.58)$$

En esta ecuación, $\eta_i = \phi Q_i$ es el vector de los *coeficientes de participación modal* correspondientes al modo i de vibración y

$$(\mathbf{U}_i)_{\max} = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ri} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix}_{\max}$$

es el vector de desplazamientos del grado de libertad r correspondiente al modo i .

- **Desplazamientos modales relativos entre pisos.** Una característica de la respuesta estructural muy importante en el diseño es el desplazamiento relativo entre dos pisos sucesivos, llamado también *desviación de piso*. El valor modal de dicha característica viene dado por la ecuación

$$\Delta_{ri} = u_{ri} - u_{(r-1)i} \quad (3.59)$$

siendo su valor máximo $(\Delta_{ri})_{\max}$.

- **Cortantes modales de piso.** La fuerza sísmica equivalente F_{ri} , correspondiente a un modo de vibración i y a un piso r del modelo de la figura 3.5, se calcula aplicando la segunda ley de Newton

$$F_{ri} = (\ddot{u}_{ri})_{\max} M_r \quad (3.60)$$

donde $(\ddot{u}_{ri})_{\max}$ es el valor máximo de la aceleración de respuesta al nivel r , en el modo i de vibración, y M_r es la masa concentrada al nivel r . La aceleración máxima $(\ddot{u}_{ri})_{\max}$ se escribe a partir de las ecuaciones (3.54) en la siguiente forma:

$$(\ddot{u}_{ri})_{\max} = \phi_{ri} \dot{u}_i(t)_{\max} \quad (3.61)$$

siendo ϕ_{ri} la ordenada modal correspondiente al modo i de vibración y al grado de libertad r . La aceleración generalizada máxima $\ddot{\chi}_i(t)_{\max}$ viene dada por la ecuación (3.56), con lo cual la fuerza sísmica equivalente F_{ri} puede rescribirse en la forma (ver ecuación 2.11 para un grado de libertad)

$$F_{ri} = \phi_{ri} Q_i M_r (S_a)_i = \eta_{ri} \frac{(S_a)_i}{g} P_r \quad (3.62)$$

donde $\eta_{ri} = \phi_{ri} Q_i$, P_r es el peso correspondiente a la masa M_r y g es la aceleración de la gravedad. Los coeficientes η_{ri} se conocen como *coeficientes de forma*, ya que dependen de las formas propias de vibración de la estructura.

El cortante V_{ri} en el modo i y en el piso r del edificio se calcula mediante la ecuación

$$V_{ri} = \sum_{j=r}^n F_{ji} \quad (3.63)$$

De la misma manera, el cortante modal en la base del edificio, T_i , será

$$V_i = \sum_{r=1}^n F_{ri} \quad (3.64)$$

Esta misma ecuación puede escribirse como

$$V_i = \sum_{r=1}^n \phi_{ri} Q_i \frac{(S_a)_i}{g} P_r \quad (3.65)$$

donde ha sido utilizada la ecuación (3.62).

- **Peso efectivo modal.** El peso efectivo modal W_i se define a partir de la siguiente ecuación (Paz 1994; Barbat y Hurtado 1996):

$$V_i = W_i \frac{(S_a)_i}{g} \quad (3.66)$$

que relaciona el cortante modal en la base con la aceleración máxima de respuesta reducida por la aceleración de la gravedad. Comparando la ecuación (3.66) con la ecuación (3.65) se deduce la expresión del peso efectivo modal

$$W_i = Q_i \sum_{r=1}^n \phi_{ri} P_r \quad (3.67)$$

Expresando el coeficiente Q_i proporcionado por la ecuación (3.53) en la siguiente forma:

$$Q_i = \frac{\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}}{\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}^2} \quad (3.68)$$

se obtiene la siguiente ecuación para los pesos efectivos modales W_i

$$W_i = \frac{\left[\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri} \right]^2}{\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}^2} \quad (3.69)$$

Se puede demostrar analíticamente (Clough y Penzien 1993) que la suma sobre todos los modos de vibración de los pesos efectivos modales W_i es igual al peso total de la estructura, es decir

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{r=1}^n P_r \quad (3.70)$$

- **Demostración de la expresión del peso efectivo modal.**
Se parte de la ecuación

$$\{1\} = \Phi \chi \quad (3.71)$$

que expresa el vector $\{1\}$ en coordenadas modales. El vector χ que cumple la condición (3.71) contiene como elementos amplitudes modales y puede calcularse invirtiendo la matriz Φ que no es singular. Dicho vector puede obtenerse también premultiplicando los dos miembros de la ecuación (3.71) por $\phi^T \mathbf{M}$, lo que permite escribir

$$\phi_i^T \mathbf{M} \{1\} = \phi_i^T \mathbf{M} \Phi \chi \quad (3.72)$$

El miembro derecho de esta ecuación puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \Phi \chi = \phi_i^T \mathbf{M} \Phi_1 \chi_1 + \phi_i^T \mathbf{M} \Phi_2 \chi_2 + \dots + \phi_i^T \mathbf{M} \Phi_n \chi_n + \dots + \phi_i^T \mathbf{M} \Phi_1 \chi_1 \quad (3.73)$$

Todos los términos del miembro derecho de la ecuación (3.73), excepto el correspondiente a ϕ_i son iguales a cero debido a la propiedad de ortogonalidad (3.45), con lo cual se obtiene

$$\phi_i^T \mathbf{M} \Phi \chi = M_i^* \chi_i \quad (3.74)$$

donde ha sido utilizada de nuevo la misma condición de orogonalidad. En consecuencia, la ecuación (3.72) puede reescribirse como

$$\phi_i^T \mathbf{M} \{1\} = M_i^* \chi_i \quad (3.75)$$

de donde se expresan las amplitudes modales de la siguiente manera

$$\chi_i = \frac{\phi_i^T M \{1\}}{M_i^*} = \frac{\phi_i^T M \{1\}}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (3.76)$$

Utilizando ahora la ecuación (3.53) en la forma (3.68), la ecuación anterior se reescribe como

$$\chi_i = \frac{\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}}{\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}^2} \quad (3.77)$$

y el vector $\{1\}$ en la ecuación (3.71) tendrá la siguiente expresión:

$$\{1\} = \Phi \begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri} \\ \sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

El peso total de la estructura puede calcularse como

$$\sum_{r=1}^n P_r = g[1] M \{1\} \quad (3.79)$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Sustituyendo ahora el vector $\{1\}$ proporcionado por la ecuación (3.78) en (3.79), se obtiene:

$$\sum_{r=1}^n P_r = \left[\sum_{r=1}^n P_r \phi_{r1} \sum_{r=1}^n P_r \phi_{r2} \dots \sum_{r=1}^n P_r \phi_{rn} \right] \begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri} \\ \sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

Esta ecuación puede reescribirse en la siguiente forma

$$\sum_{r=1}^n P_r = \sum_{i=1}^n \frac{\left[\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri} \right]^2}{\sum_{r=1}^n P_r \phi_{ri}^2} = \sum_{i=1}^n W_i \quad (3.81)$$

con lo cual se ha obtenido la misma ecuación (3.70) que debía demostrarse.

Esta ecuación es muy útil en el momento de determinar el número de modos de vibración que tienen una influencia significativa en la respuesta estructural. Una condición satisfactoria que se utiliza habitualmente es

$$\sum_{i=1}^q W_i \geq 0.9 \sum_{r=1}^n P_r \quad (3.82)$$

Dicha condición permite incluir en el análisis el número q de modos de vibración necesario para que la suma de su correspondiente peso efectivo sea al menos un 90% del peso real total de la estructura.

Fuerzas sísmicas modales. Las fuerzas sísmicas equivalentes modales F_{ri} pueden definirse, para cada piso r , como el producto del cortante modal en la base, V_i por un coeficiente sísmico ξ_{ri}

$$F_{ri} = \xi_{ri} V_i \quad (3.83)$$

Dicho coeficiente corresponde al modo i de vibración y al piso r y puede expresarse mediante la ecuación

$$\xi_{ri} = \frac{P_r \phi_{ri}}{\sum_{i=1}^n P_r \phi_{ri}} \quad (3.84)$$

obtenida a partir de la definición de las fuerzas sísmicas equivalentes modales – ecuación (3.62)- y de los cortantes modales en la base -ecuación (3.64)-.

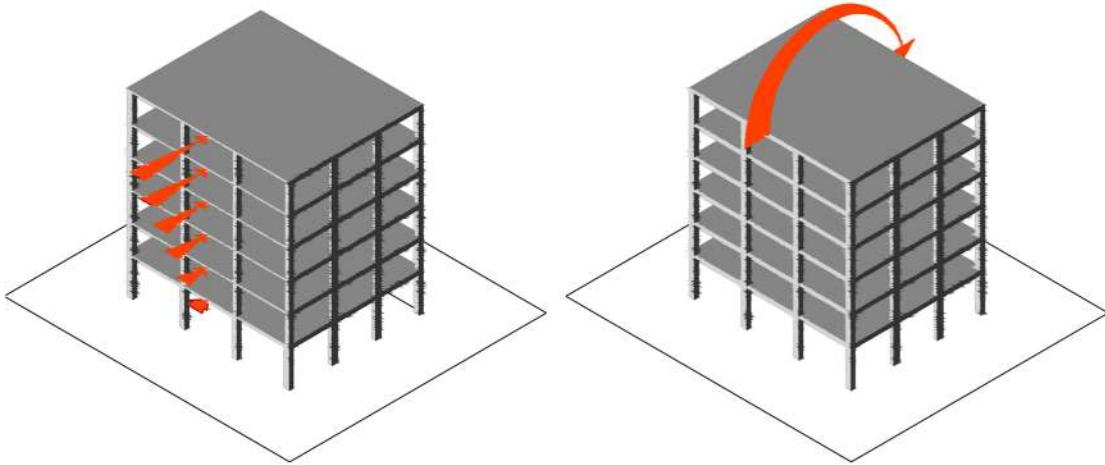


Figura 3.11 Fuerzas sísmicas modales y momento modal de vuelco.

Momento de vuelco modal. El momento de vuelco modal M_{ri}^v correspondiente al nivel r de un edificio de cortante se calcula como la suma de los momentos de las fuerzas sísmicas F_{ri} aplicadas en los pisos $r, r+1, \dots, n$

$$M_{ri}^v = \sum_{j=r+1}^n F_{ji} (h_j - h_r) \quad (3.85)$$

En esta ecuación, h_j es la altura a la cual se encuentra un piso cualquiera j , tal como puede verse en la figura 3.5. Para $r=0$, la ecuación (3.85) proporciona el momento de vuelco modal en la base del edificio.

3.6.3 Esfuerzos seccionales modales

Una vez obtenidas todas las características modales necesarias, se procede al cálculo de los esfuerzos seccionales, para los q modos de vibración que se quieran incluir en el análisis, mediante procedimientos estándar de la estática de estructuras.

El máximo de los esfuerzos modales en cada grado de libertad no se produce en el mismo instante de tiempo, tal como sería necesario para poder aplicar las ecuaciones (3.54). En consecuencia, cualquiera de las respuestas máximas totales de la estructura que cumplan con los requisitos preestablecidos de acuerdo con el criterio del peso efectivo, o bien de acuerdo con lo prescrito en el código de diseño aplicado.

3.7 CÁLCULO DE LA RESPUESTA MÁXIMA TOTAL

Una primera forma de aproximar la respuesta máxima total de una estructura es considerando la suma de los valores absolutos de las contribuciones modales máximas. Sin embargo, el valor que se obtiene de esta manera es un ímite superior de la respuesta máxima total, que superará en mucho la respuesta máxima real.

Otro procedimiento, que habitualmente conduce a resultados correctos si las frecuencias propias de la estructura analizada están bien separadas, evalúa la respuesta máxima total como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas modales -Square Root of Sum of Squares: SRSS- (Newmark y Rosenblueth 1971). Si se incluyen en el cálculo q modos de vibración, una respuesta máxima cualquiera S de la estructura (esfuerzo seccional, desplazamiento, etc.), se calcula de acuerdo al procedimiento SRSS mediante la siguiente ecuación:

$$S_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^q (S_j)_{\max}^2} \quad (3.86)$$

Cuando la estructura tiene frecuencias propias con valores cercanos -es decir, la diferencia entre dos frecuencias consecutivas es menor que el 10% de la más bajas de las dos-, el método SRSS puede subestimar o sobreestimar en mucho la respuesta total. Errores importantes se producen, asimismo, si el análisis que se lleva a cabo es tridimensional y el efecto de la torsión es significativo. Por este motivo, ha sido propuesto por Der Kiureghian (1980) y Wilson *et al.* (1981) otro procedimiento, denominado Complete Quadratic Combination (CQC), que tiene sus fundamentos en la teoría de las vibraciones aleatorias y que proporciona mejores resultados que el SRSS. El método CQC calcula la respuesta máxima total de la estructura mediante la siguiente ecuación:

$$S_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q S_i \rho_{ij} S_j} \quad (3.87)$$

El término modal ρ_{ij} se approxima por (ver normativa NCSE-02)

$$\rho_{ij} = \frac{8(\nu_i \nu_j)^{1/2} (\nu_i + \gamma \nu_j) \gamma^{3/2}}{(1 - \gamma^2)^2 + 4\nu_i \nu_j \gamma (1 - \gamma^2) + 4(\nu_i^2 + \nu_j^2) \gamma^2} \quad (3.88)$$

donde $\gamma = \omega_i / \omega_j$ es la relación entre las frecuencias propias de los modos i, j ; ν_i y ν_j son las fracciones del amortiguamiento crítico correspondientes a los modos de vibración i, j .

En el caso particular en el cual la fracción del amortiguamiento crítico es constante y $\gamma = 1$, la ecuación (3.87) proporciona $\rho_{ii} = 1$. Puede observarse que si las frecuencias están separadas, los términos cruzados son despreciables y el método CQC proporciona resultados muy parecidos al método SRSS.

Capítulo 4

Aplicación práctica de la teoría del análisis modal en las normativas de cálculo sismorresistente

En el presente capítulo se presenta un desarrollo general sobre la relación existente entre la teoría del análisis modal y la manera en que esta teoría está incorporada en las normativas de diseño sismorresistente. Además de éste tratamiento general del tema, se hace también una particularización al caso de la normativa española NCSE-02. Dicha particularización incluye referencias puntuales a cada aspecto de cálculo contenido en la normativa.

4.1 ASPECTOS GENERALES

Todas las normativas de diseño sismorresistente vigentes en los distintos países del mundo tienen su ámbito de aplicación claramente definido y éste se extiende concretamente al campo de las *estructuras de edificación*. Sin embargo, a algunas de las normativas se les da una cierta apariencia de “generalidad”, lo que a veces produce cierta confusión entre los ingenieros y arquitectos que las deben aplicar en el diseño. La mencionada apariencia, que se debe solamente a la falta de claridad, puede producir la impresión de que las normativas son de obligatoria aplicación en el país para cualquier tipo de estructura. En realidad, dichas normativas son generales solamente en lo referente a la definición de la peligrosidad sísmica en el país, es decir, al cálculo de la intensidad o aceleración máxima del terreno en cualquier sitio. Sin embargo, en cada país existen normas específicas para el cálculo y diseño de estructuras no edilicias.

En los cálculos dinámicos previstos en todas las normativas de diseño sismorresistente de edificios se utiliza el modelo simplificado de edificio de cortante, similar al descrito en el apartado 3.1. Dicho modelo es aplicable a la mayoría de los edificios más utilizados en la práctica y, a pesar de las simplificaciones que contienen, proporcionan resultados con una precisión satisfactoria. Estas simplificaciones están detalladamente indicadas en el apartado 3.1, y todas las normativas las admiten implícitamente al fundamentar los cálculos en un modelo de edificio de cortante. Sin embargo, las diferentes normativas añaden requisitos específicos de aplicación, que vienen impuestos por los métodos simplificados de cálculo que proponen.

El procedimiento habitual de cálculo dinámico de estructuras prescrito en todas las normativas de diseño sismorresistente del mundo, utiliza la definición de la acción mediante espectros sísmicos de respuesta y proporciona como resultado del cálculo únicamente la respuesta máxima de la estructura (ver apartado 2.2.3). Sin embargo, es interesante recordar que en algunas normativas se deja abierta la posibilidad de definir la acción mediante acelerogramas reales o artificiales representativos de una zona, que se deben escalar en amplitudes y frecuencias de forma que sean compatibles con los espectros sísmicos de respuesta estipulados en la misma normativa (NCSE 2002; E8). Una definición de este tipo sería útil en un cálculo no lineal de las estructuras. Pero dichas normativas no proporcionan ningún procedimiento numérico de definición de los mencionados acelerogramas, dejando al usuario la libre elección de algún acelerograma o grupo de acelerogramas.

4.2 ESPECTROS SÍSMICOS DE RESPUESTA

En la mayoría de las normativas de cálculo sísmico del mundo se formula una única función genérica para la curva de amplificación de las aceleraciones (denominada $\alpha(T_i)$ en la ecuación 5.10; ver también la normativa NCSE 02), válida para una región sísmica entera en la que la norma define la acción (véase la figura 5.1). Esta función de amplificación genérica, una vez multiplicada por la máxima aceleración sísmica del terreno (denominada a_b en la ecuación 5.9; ver también normativa NCSE 02), proporciona la máxima aceleración de respuesta de un modelo con un solo grado de libertad como función del período propio de dicho modelo, es decir, un espectro de respuesta en aceleraciones. Los espectros de respuesta genéricos que se obtienen de esta forma se ajustan luego a las diferentes sub-zonas de la región mediante su multiplicación por diferentes coeficientes, generalmente empíricos y en algunos casos de forma probabilística, tal como ocurre con el factor de importancia de la edificación, que caracterizan dicha sub-zona a partir de criterios tales como sismicidad, peligrosidad sísmica, importancia socio-económica, geología, etc. (Barbat *et al.* 1996). Todos estos aspectos están incorporados en la normativa española dentro del *coeficiente de importancia ρ* (véase Tabla 5.1). En la Figura 4.1 puede verse el aspecto que suelen tener los espectros sísmicos de respuesta en las normativas de diseño (una escala de éste espectro puede verse en la figura 5.2).

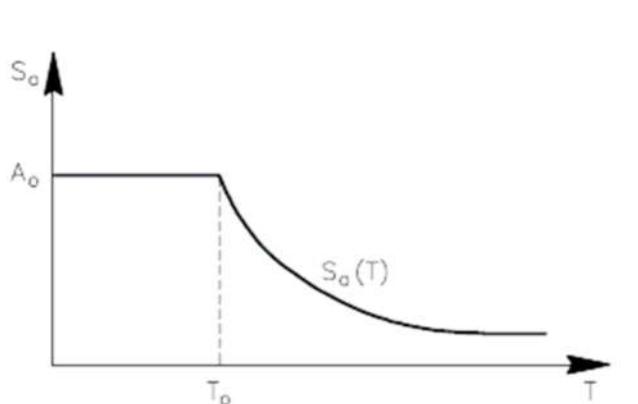


Figura 4.1 Forma típica de los espectros sísmicos de respuesta en las normativas sismorresistentes.

Utilizando otros coeficientes, los espectros se ajustan también a las características de la estructura que se diseña, considerando como criterios: tipología, rigidez, ductilidad, características de los materiales, tipo de cimentación, condiciones locales de suelo, características de amortiguamiento, importancia en los instantes posteriores a los terremotos, etc. (véase las ecuaciones 5.9 a 5.11). Una vez definido un espectro de diseño de esta manera, las normativas estipulan el cálculo de las fuerzas sísmicas modales equivalentes a utilizar para determinar la respuesta estructural total (véase apartado 5.1).

4.3 ASPECTOS DE CÁLCULO DE LAS FUERZAS SÍSMICAS

El proceso de cálculo previsto en las normativas de diseño sismorresistente se desarrolla en las siguientes etapas:

- 1) Cálculo de los períodos propios de la estructura y de las formas modales correspondientes. En muchas normas, para los edificios de cortante se incluyen fórmulas empíricas que proporcionan, de manera simplificada, dichas características dinámicas. En general se correlaciona el período fundamental con la altura de al edificación y la forma modal con el aspecto de la forma correspondiente al primer modo.
- 2) Se utiliza el espectro de respuesta proporcionado por la norma para determinar las ordenadas espectrales correspondientes a cada modo de vibración incluido en el análisis.
- 3) Se calculan las fuerzas sísmicas equivalentes de cada modo de vibración, multiplicando las ordenadas espectrales por la masa y por el coeficiente de participación modal.
- 4) Se efectúa un cálculo estático de la estructura sometida a la acción de estas fuerzas sísmicas modales equivalentes. Se obtienen, de esta manera, valores máximos de los esfuerzos en la estructura en cada modo de vibración.

- 5) Los esfuerzos totales se calculan efectuando la superposición modal mediante cualquiera de los procedimientos estadísticos expuestos en el capítulo 3.

Los primeros tres pasos de este procedimiento tienen carácter dinámico, mientras que el cuarto es estático. Por este motivo, a este tipo de análisis se le llama *seudo-dinámico*.

Considérese una estructura con n grados de libertad, en cuyo análisis se incluye un número $q \leq n$ de {modos de vibración}. Una de las posibilidades es definir las fuerzas sísmicas equivalentes F_{ri} correspondientes al modo i de vibración y al grado de libertad r (en los pórticos de cortante r se identifica con el número de pisos en estudio) mediante la ecuación (3.38), en la cual están expresadas en función del peso P_r de la masa concentrada al nivel r de la estructura. Otra posibilidad de expresar dichas fuerzas sísmicas es la contemplada por la ecuación (3.59), en la cual las fuerzas F_{ri} se formulan como función del cortante modal en la base V_i .

La primera de las dos formulaciones es la que más se utiliza en prácticamente todas las normativas de cálculo sísmico. En éstas, las fuerzas sísmicas equivalentes se expresan como (véase la ecuación 5.13)

$$F_{ri} = s_{ri} P_r \quad (4.1)$$

donde s_{ri} es el coeficiente sísmico correspondiente al grado de libertad r y al modo i de vibración. Comparando la ecuación (4.1) con la (3.38), se puede deducir la expresión teórica del coeficiente sísmico

$$s_{ri} = \frac{(S_a)_i}{g} \eta_{ri} \quad (4.2)$$

Una manera alternativa de expresar las fuerzas sísmicas equivalentes, y que está prevista en algunas normativas (ver también la ecuación 5.13), es

$$F_{ri} = c_i P_r \eta_{ri} \quad (4.3)$$

donde s_{ri} es el coeficiente sísmico para un oscilador de un grado de libertad, identificado en este caso con el modo de vibrar i^{esimo} (ver ecuaciones 2.9 y 5.15). De esta forma, se introduce la siguiente relación entre el coeficiente sísmico c_i del modo i y su particular magnitud s_{ri} asignado al piso "r" del mismo modo i ,

$$c_i = \frac{(S_a)_i}{g} \quad (4.4)$$

Si el coeficiente sísmico c_i fuese formulado en las normativas de acuerdo con la teoría desarrollada en el Apartado 2.2.3, tendría una expresión del tipo

$$c_i = \alpha_i \frac{a_c}{g} \quad (4.5)$$

Siendo α_i el coeficiente de amplificación dinámica (Barbat *et al.* 1994), o también denominado en la normativa NCSE-02 *ordenada espectral afectada del riesgo zonal* y a_c es el coeficiente de intensidad sísmica de la zona, definido como la relación entre la aceleración máxima del terreno $|a(t)|^{\max}$ (ver apartado 5.2).

$$a_c = |a(t)|^{\max} \quad (4.6)$$

Comparando (4.5) con (4.4) se observa que

$$(S_a)_i = \alpha_i a_c \quad (4.7)$$

lo que significa que el producto $\alpha_i a_c$ describe el espectro sísmico de diseño definido por la normativa (ver ecuación 5.15).

Sin embargo, en el cálculo de las fuerzas sísmicas equivalentes estipuladas en las distintas normativas de diseño del mundo, los coeficientes sísmicos se formulan mediante ecuaciones que incluyen, además de éstos, otros parámetros, que describen, de una manera simplificada, ciertas características de la sub-zona sísmica y de la estructura que no han sido incluidos en la teoría. Dichas características son de gran importancia en describir el comportamiento sísmico real de los edificios, pues tienen como objetivo el de eliminar las limitaciones en los cálculo dinámicos teóricos, tanto en lo referente a la definición de la acción mediante espectros sísmicos de respuesta, como en lo que respecta al modelo simplificado de edificio de cortante. Entre los coeficientes que no aparecen en la mencionada teoría, pero que están incorporados en las normativas de cálculo sísmico de diferentes países del mundo, pueden citarse los siguientes:

- Coeficiente de ductilidad μ de la estructura (véase la Tabla 5.4).
- Coeficiente C que considera el efecto del tipo de cimentación y de suelo, es decir, de la interacción suelo-estructura (véase la tabla 5.3).
- Coeficiente ρ que considera la importancia que puede tener una estructura en los instantes posteriores a un terremoto fuerte, en la mitigación de los efectos del terremoto. A este coeficiente se hace referencia de manera implícita en los apartados 1.2.2 y 1.2.3 de la normativa NCSE-02, y directamente a partir del coeficiente ρ que se presenta en el apartado 2.2.

En el caso particular de la NCSE-02 todos estos aspectos están incluidos en el cálculo de $(S_a)_i$. Teniendo en cuenta estas observaciones, la ecuación (4.4) se puede completar, obteniéndose la siguiente fórmula genérica de cálculo del coeficiente sísmico:

$$c_i = \alpha_i \frac{a_c}{g} \beta_i [\rho C] \quad (4.8)$$

donde β_i es el cociente v/μ que engloba la reducción de la respuesta elástica debida al amortiguamiento y la ductilidad.

Este mismo coeficiente puede verse en la normativa NCSE-02 en la forma correspondiente a la ecuación (5.15), sólo que ρ y C están incorporados dentro de a_c . Cada normativa sísmica incorpora de forma distinta todos o algunos de los anteriores coeficientes, dando lugar sus propias expresiones de cálculo del coeficiente sísmico. De entre todos los coeficientes mencionados debe destacarse al que incluye en el cálculo el efecto de la *ductilidad*, por el hecho de que, al describir fenómenos de no linealidad del material, está directamente relacionado con el daño que sufren las estructuras durante la acción sísmica. Sobre este efecto se profundiza en el apartado 4.4.2.

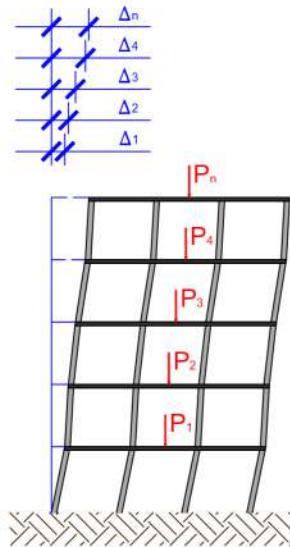


Figura 4.2 Efecto P-Δ.

Sin embargo, existen otros problemas del cálculo dinámico de los edificios, que no pueden solucionarse modificando el coeficiente sísmico de la fórmula (4.8) mediante incorporación de nuevos parámetros. Un primer problema es el de las grandes deformaciones que puede sufrir una estructura bajo las acciones sísmicas, es decir el de la no linealidad geométrica. Un planteamiento simplificado de este problema, que admite la hipótesis de que las tensiones y deformaciones coinciden en la configuración

inicial y deformada de la estructura, se conoce como análisis de segundo orden. En el análisis sísmico de edificios, dicho problema recibe, habitualmente, el nombre de *efecto P-Δ* (véase para detalles sobre este tema el apartado **;Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, el capítulo 7 y también el apartado 3.8 de la normativa NCSE-02).

El segundo problema es el de la *torsión* global que sufren los edificios durante la acción de los terremotos. Un cálculo dinámico que contemple el fenómeno de torsión requiere utilizar grados de libertad de giro en el plano de los pisos, y dichos grados de libertad no se consideran en un modelo estructural de edificio de cortante. Por este motivo, en el caso de este tipo de modelos, es posible incluir en el análisis el efecto de la torsión solamente de una manera desacoplada. Esto quiere decir que deben calcularse primeramente los esfuerzos seccionales debidos a las fuerzas sísmicas equivalentes correspondientes a los grados de libertad de traslación, y sumarlas luego con los esfuerzos seccionales debidos a la torsión. Este procedimiento desacoplado se conoce en algunas normas como método de la torsión estática equivalente y es prescrito para aquellos edificios que satisfacen ciertos criterios de regularidad en planta.

Para aquellos casos en los que la irregularidad induce grandes excentricidades, el efecto de la torsión queda considerado al exigirse la aplicación del análisis modal con tres grados de libertad por planta (dos traslaciones y una rotación)

A continuación se harán unos breves comentarios referentes a estos tres importantes aspectos: ductilidad, efecto P-Δ y torsión estructural.

4.4 ESPECTROS DE RESPUESTA INELÁSTICOS

La energía inducida por los terremotos en estructuras se disipa en parte por el efecto del amortiguamiento y en parte por el efecto de las deformaciones no elásticas en los elementos estructurales (incursión en comportamiento plástico). Las estructuras bien diseñadas y construidas deben ser capaces de absorber y disipar la energía, sufriendo un daño mínimo durante terremotos moderados y daños limitados durante terremotos fuertes. La simulación numérica del proceso de deterioro de las estructuras durante la acción sísmica es complicada y costosa requiriendo procedimientos sofisticados de cálculo no lineal. A pesar de sus numerosas ventajas, los espectros de respuesta, en la forma en la cual han sido definidos, tienen la gran limitación de que pueden aplicarse sólo al análisis de estructuras lineales elásticas. Es de gran utilidad extender el concepto de espectro de respuesta a sistemas no lineales, especialmente para su uso en el análisis de estructuras menos complejas como, por ejemplo, los edificios de cortante.

4.4.1 No linealidad en el comportamiento estructural

El desarrollo que se ha realizado en el apartado 2.2, sólo se refiere a un oscilador con un grado de libertad y con comportamiento elástico lineal. Existen muchos casos estructurales donde no se cumple esta hipótesis básica. En estos casos la forma de obtener la respuesta para un oscilador no lineal es bastante distinta y más complicada que, en el caso de los osciladores lineales. No es posible utilizar la integral de Duhamel por que esta implica superposición de respuestas que, para osciladores con comportamiento no-lineal, no se puede realizar. Sólo es posible obtener la respuesta

mediante la resolución numérica de la ecuación diferencial del movimiento (métodos de integración paso a paso, explícitos o implícitos) y, a partir de allí, obtener los máximos. No obstante, en este apartado se consideran las posibles no linealidades que se presentan en una estructura y se estudia la manera en la cual pueden reflejarse en los espectros de respuesta de una forma simplificada.

En la ecuación del movimiento (2.1), se pueden tener no linealidades en los tres términos de fuerza. Pero es conveniente obviar la *no linealidad en el término de masa*, puesto que esta se mantiene constante en la vida de una estructura $m(t) = \text{cte}$. En cambio sí se debe considerar la *no linealidad por amortiguamiento* que, por tratarse de un fenómeno viscoso, el coeficiente de amortiguamiento depende de la velocidad y no es constante $s(\dot{x}) \neq \text{cte}$ (Barbat *et al.* 1993) (Luccioni *et al.* 1995). Este tipo de no linealidad no es posible contemplarla dentro de los espectros de respuesta dado que como ya se indicó, estos poseen únicamente las respuestas máximas de osciladores con diferentes frecuencias naturales. La *no linealidad en la rigidez* $k(x) \neq \text{cte}$, se puede producir por dos motivos: uno por que se presentan grandes deformaciones, es decir una relación no lineal entre el campo de desplazamientos y el de deformaciones $\varepsilon = f(x)$; y otro por la *no linealidad constitutiva* o del material propiamente dicho $\sigma = E(\varepsilon):\varepsilon$, que se debe a fenómenos de plasticidad, degradación (daño), fractura, etc. Esta *no linealidad en la rigidez* es la que se puede representar dentro de un espectro de respuesta de manera simplificada, y luego obtener una respuesta estructural corregida, como si se tratase de una estructura elástica equivalente (Hanganu *et al.* 1994) (Oller *et al.* 1992).

4.4.2 Fenómeno de ductilidad – conceptos básicos

Todos los fenómenos de no linealidad en la rigidez, podrían incluirse de una manera simplificada, dentro de un concepto que en la ingeniería sísmica se conoce como *ductilidad estructural*. Es decir, se puede admitir que el comportamiento no-lineal que se manifiesta en un oscilador (ver la Figura 4.3), se produce por la acción conjunta de fenómenos plásticos, de degradación de rigidez, de microfisuras, etc. (Hanganu *et al.* 1994, Oller *et al.* 1992). Por otro lado se puede observar que estos fenómenos producen grandes incrementos en los desplazamientos Δ_x , con incrementos pequeños, nulos o negativos en las fuerzas ΔF y una disipación energética no recuperable. Por el momento se dirá que *la ductilidad estructural está relacionada con la capacidad de disipación energética* que tiene una estructura sometida a carga cuasi-estática, y que no tiene ninguna relación con la disipación producida por el amortiguamiento que sólo depende de la velocidad. La disipación de energía independiente del tiempo (cuasi-estática), conduce a que *la fuerza real que actúa sobre la estructura sea inferior a la que corresponde al caso elástico*, tal como puede verse en la Figura 4.3. De aquí surge el *coeficiente de reducción por ductilidad* $R\mu$ (Newmark y Rosenblueth 1971) y cuya expresión es:

$$R\mu = \frac{F}{F^{in}} \quad (4.9)$$

donde F representa la fuerza actuante en una estructura cuyo comportamiento es idealmente elástico y F^{in} la correspondiente a la estructura real, cuyo comportamiento es inelástico.

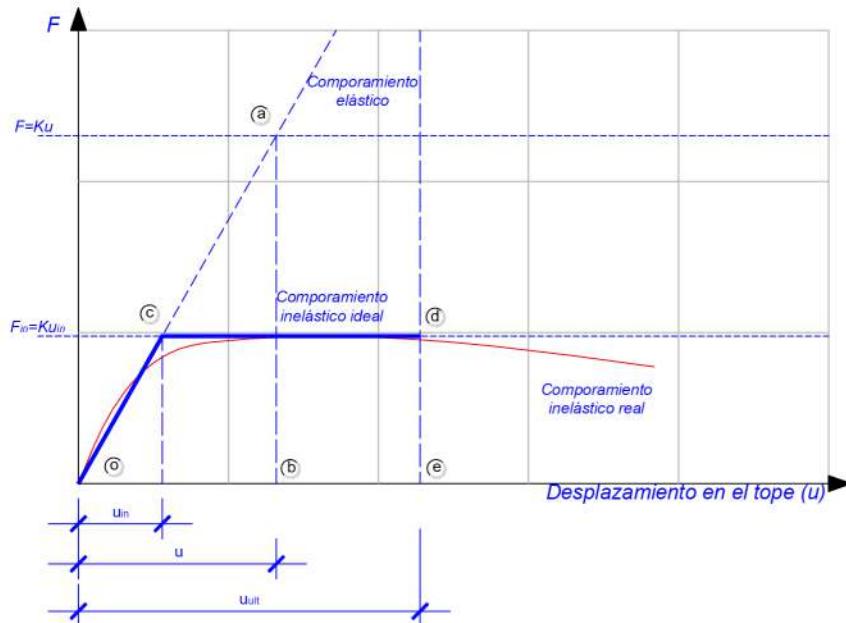


Figura 4.3 Respuesta no lineal de un oscilador para determinar el coeficiente $R\mu$.

Newmark establece tres tipos distintos de coeficientes de reducción según la parte del espectro en que se encuentre el período fundamental del oscilador (ver la Figura 4.4), cuya justificación es la siguiente:

- Para períodos bajos T en la zona de aceleración constante (frecuencia alta - Figura 4.4 -), propone que tanto en la estructura ideal elástica como en la real inelástica, deba mantenerse constante la fuerza aplicada, por lo tanto no hay reducción de las mismas:

$$S_a = S_a^{in} \Rightarrow R\mu = \frac{F}{F^{in}} = \frac{mS_a}{mS_a^{in}} = 1 \quad (4.10.a)$$

- Para períodos intermedios T en la zona de velocidad constante, propone mantener constante la energía tanto en la estructura ideal elástica como en la real inelástica:

$$\text{Area}(oab) = \text{Area}(ocde)$$

$$\frac{1}{2} Fu = \frac{1}{2} F^{in} u^{in} + F^{in} (u^{ult} - u^{in})$$

$$\frac{1}{2} F \frac{F}{k} = \frac{1}{2} F^{in} \frac{F^{in}}{k} + F^{in} \left(\mu \frac{F^{in}}{k} - \frac{F}{k} \right) \quad (4.10.b)$$

$$F^2 = (F^{in})^2 (2\mu - 1)$$

$$R\mu = \frac{F}{F^{in}} = \sqrt{2\mu - 1} \Rightarrow S_a^{in} = \frac{S_a}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

donde μ representa la relación que hay entre el desplazamiento último y aquel correspondiente al umbral inelástico inicial, y frecuentemente se le conoce como ductilidad de desplazamiento $\mu = u^{ult}/u^{in}$.

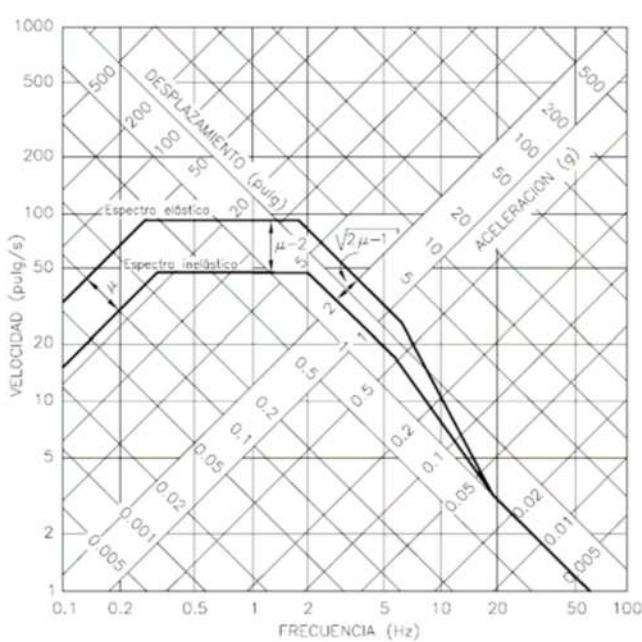


Figura 4.4 Diagrama espectral de diseño para una aceleración máxima del terreno de 1.0 g sin amortiguamiento.

- Para períodos altos T en la zona de desplazamiento constante (frecuencia baja - Figura 4.4-), propone mantener constante la proporcionalidad entre desplazamientos y fuerzas tanto en la estructura ideal elástica como en la real inelástica:

$$R\mu = \frac{F}{F^m} = \frac{u^{ult}}{u^m} = \mu \Rightarrow R\mu = \frac{mS_a}{mS_a^m} = \mu \Rightarrow S_a^m = \frac{S_a}{\mu} \quad (4.10.c)$$

Esta última forma de definir la ductilidad es la adoptada por las normativas NCSE-02 (ver la Tabla 5.4, la ecuación 5.10b y la ecuación 5.15). La reducción del espectro elástico mediante factores que son función de la ductilidad de desplazamiento y del período estructural simplifica un problema que de acuerdo con lo expuesto anteriormente es mas complejo, sin embargo la adopción de estos valores en la mayoría de las normas vigentes ha redundado en el diseño de edificios que han tenido un comportamiento satisfactorio ante sismos fuertes (Withhaker, 2003).

Aunque no existe una completa justificación de la aplicación de los espectros de respuesta no lineales al cálculo de la respuesta máxima de sistemas con varios grados de libertad (Lin y Mahin 1985), prácticamente todas las normativas sísmicas del mundo admiten su utilización en el diseño de edificios.

4.5 EL EFECTO P-Δ.

El efecto P-Δ se refiere al momento adicional producido por las acciones verticales con los desplazamientos laterales de las columnas, en edificios sometidos a fuerzas laterales. En la Figura 4.5 puede verse una columna sometida a una fuerza axial P, a un cortante V y a momentos flectores M_A y M_B en sus extremos.

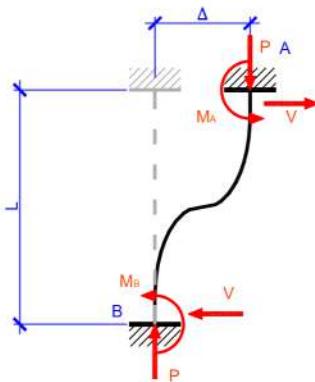


Figura 4.5 Columna deformada con efecto P-Δ (Paz,1994).

Bajo las mencionadas acciones, la columna sufre un desplazamiento lateral relativo Δ entre sus extremos A y B. El momento adicional, de segundo orden, que se produce en estas condiciones es $M^{so} = P\Delta$, al que le corresponde un esfuerzo cortante adicional $V^{so} = P\Delta/L$, siendo $L = h_A - h_B$, donde h_A y h_B son las alturas de los extremos A y B de la columna, respectivamente. Evidentemente, la consideración del efecto P-Δ de esta manera simplificada no tiene en cuenta el hecho de que el desplazamiento lateral Δ de la columna sufre un nuevo incremento debido al efecto del

momento de segundo orden y que, en consecuencia, dicho incremento de Δ también produce un incremento M_r^{so} adicional del momento. Si se considera un edificio de cortante con n niveles, el desplazamiento lateral total en un piso cualquiera r de dicho edificio, denominado $(\Delta_r)_{total}$, que incluye de manera completa el efecto P- Δ , puede evaluarse mediante la siguiente ecuación (Paz 1994):

$$(\Delta_r)_{total} = (\Delta_r) \left(\frac{1}{1 - \zeta_r} \right) \quad (4.11)$$

donde ζ_r es la relación entre el momento total de segundo orden M_r^{so} y el momento de vuelco M_r^v .

$$\zeta_r = \frac{M_r^{so}}{M_r^v} \quad (4.12)$$

El momento de vuelco total al nivel r , M_r^v , puede calcularse a partir de los valores modales M_{ri}^v dados por la ecuación (3.61), aplicando el procedimiento SRSS o CQC. El momento total de segundo orden al nivel r se calcula como

$$M_r^{so} = P_r (\Delta_r)_{total} \quad (4.13)$$

donde $P_r = \sum_{j=r}^n P_j$, siendo P_r el peso correspondiente a la masa concentrada en el piso r .

De esta manera, la ecuación (4.11) puede rescribirse en la forma

$$\zeta_r = \frac{P_r (\Delta_r)_{total}}{M_r^v} \quad (4.14)$$

El efecto P- Δ puede despreciarse en el caso en que el coeficiente ζ_r no excede el valor de 0.1 para cualquier piso del edificio.

4.6 EL EFECTO DE LA TORSIÓN GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

Existen principalmente dos casos en los cuales debe considerarse en el análisis dinámico la torsión. El primero se debe a la presencia de una componente torsional significativa en el movimiento sísmico del terreno. Obviamente, inclusive las estructuras perfectamente simétricas experimentarían vibraciones de torsión en este caso. El procedimiento habitual de solucionar este problema consiste en utilizar un modelo estructural del tipo que se presenta en las figuras 3.2, que considera grados de libertad de giro alrededor de ejes verticales que pasan por el centro de rigidez de cada planta. Sin embargo, debe mencionarse que la componente torsional del movimiento del terreno suele ser despreciable y que, en consecuencia, dicho efecto no se contempla en las normativas de diseño.

En el segundo caso, la torsión se debe a la no coincidencia del centro de masa de cada planta de la estructura con el centro de rigidez de la misma. Dicha no coincidencia se debe principalmente a la falta de simetría de las estructuras. Sin embargo, debe añadirse el caso de estructuras con una aparente simetría de forma, pero en las cuales los dos centros no coinciden debido a inexactitudes en la realización de la construcción o a la no homogeneidad accidental de los materiales. En este caso, la torsión se tendrá en cuenta en el análisis de una manera desacoplada, calculándose por separado los esfuerzos debidos a la torsión en los pilares de la estructura -éstos son los elementos que absorben el momento de torsión- y sumándolos después a los esfuerzos producidas por las fuerzas sísmicas equivalentes.

El análisis parte de la definición de la excentricidad e_r como la distancia entre el centro de masa del piso r y su centro de rigidez. Al momento de torsión modal correspondiente al piso r y al modo de vibración i se le denominará M_{ri}^t . Es el momento de las fuerzas cortantes de piso, aplicadas en el centro de masa de los pisos, con el brazo e_r y produce giros alrededor de ejes verticales que pasan por el centro de rigidez del piso. Dichos cortantes de piso V_{ri}^s , se calculan mediante la ecuación (3.39). En consecuencia, el momento de torsión se calcula mediante la ecuación

$$M_{ri}^t = e_r V_{ri} \quad (4.15)$$

Puesto que este cálculo se realiza para cada modo de vibración, es necesaria la superposición de los esfuerzos modales que se obtienen. Si el efecto de la torsión es significativo, es recomendable la utilización del procedimiento CQC (Der Kiureghian 1980; Wilson *et al.* 1981), descrito en el Apartado 3.5.

CAPÍTULO 5

La normativa española NCSE-02

5.1 MÉTODOS DE CÁLCULO SEGÚN LA NORMATIVA

La normativa NCSE-02 establece como método de referencia para el cálculo sísmico el análisis de la estructura mediante espectros de respuesta, fundamentado en el análisis modal. También permite el cálculo de la respuesta dinámica mediante integración numérica de las ecuaciones del movimiento. Además de estos dos procedimientos, la normativa desarrolla un método simplificado de cálculo de la respuesta sísmica máxima para los casos más usuales de edificios, cuya aplicación es adecuada para estructuras que cumplen los siguientes requisitos:

El número de plantas sobre rasante es inferior a veinte.

La altura del edificio sobre rasante es inferior a sesenta metros.

Existe regularidad geométrica en planta y en alzado, sin entrantes ni salientes importantes.

Dispone de soportes continuos hasta cimentación, uniformemente distribuidos en planta y sin cambios bruscos en su rigidez.

Dispone de regularidad mecánica en la distribución de rigideces, resistencias y masas, de modo que los centros de gravedad y de torsión de todas las plantas estén situados, aproximadamente, en la misma vertical.

La excentricidad del centro de las masas que intervienen en el cálculo sísmico respecto al de torsión es inferior al 10% de la dimensión en planta del edificio en cada una de las direcciones principales.

Asimismo, se podría aplicar el método simplificado de cálculo a los edificios de residenciales de importancia normal de hasta cuatro plantas en total. En todos los casos debe utilizarse un modelo suficientemente preciso de la distribución real de las rigideces y masas de la estructura.

5.2 CÁLCULO DE LAS FUERZAS SÍSMICAS

A continuación se establece el vínculo entre los apartados 2.2.3, 3.4 y 4.3 y las prescripciones de cálculo contenidos en la normativa española NCSE-02. Siguiendo la presentación teórica realizada, ahora se propone abordar un problema estructural típico, consistente en obtener la respuesta de una estructura con “ n ” grados de libertad, idealizada por una ménsula empotrada en la base, con masas concentradas en cada grado de libertad (véase apartado 3.2). Éste sistema ideal, recibe el nombre de modelo de edificio de cortante.

Normalmente se necesita obtener los desplazamientos máximos en cada grado de libertad y la fuerza estática equivalente que sobre ellos actúa (para más detalle ver el apartado 4.3).

El desplazamiento máximo en el modo de vibración i resulta de la resolución de la ecuación del movimiento para dicho modo (ecuación 3.28), dentro de la teoría espectral mencionada en los capítulos 2 y 4 (ver las ecuaciones del movimiento 2.4, 3.28 y 2.6).

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i(t) + \underbrace{2\nu_i\omega_i\dot{u}_i(t)}_{\ddot{u}_i^\nu(t)} + \underbrace{\omega_i^2 u_i(t)}_{\ddot{u}_i^{\text{eff}}(t)} &= -Q_i a(t) \\ \underbrace{[\ddot{u}_i(t) + Q_i a(t)]}_{u_i^{\text{ABS}}(t)} &= \underbrace{-2\nu_i\omega_i\dot{u}_i(t)}_{\ddot{u}_i^\nu(t)} - \underbrace{\omega_i^2 u_i(t)}_{\ddot{u}_i^{\text{eff}}(t)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

La máxima aceleración para amortiguamiento muy bajo, $\nu \approx 0$ resulta de la siguiente simplificación (ver también la ecuación 2.6):

$$\underbrace{[\ddot{u}_i(t) + Q_i a(t)]}_{|u_i^{\text{ABS}}(t)|^{\max}} \approx -\underbrace{|\omega_i^2 u_i(t)|^{\max}}_{|\ddot{u}_i^{\text{eff}}(t)|^{\max}} = (\bar{S}_a)_i \quad (5.2)$$

donde $(\bar{S}_a)_i$ es la aceleración espectral máxima afectada por el coeficiente de participación modal $(\bar{S}_a)_i = Q_i (S_a)_i$ (ver la ecuación 3.32); $(S_a)_i$ es la aceleración espectral definida en la ecuación 2.8c, para un oscilador a un grado de libertad, cuyo período es T_i . Esto corresponde a la definición dada en el apartado 2.2.2, puesto que premultiplicando la ecuación (5.2) por la masa M_i^* correspondiente al grado de libertad i , obtenida según la ecuación (3.19a), se tiene

$$M_i^* (\bar{S}_a)_i = M_i^* |u_i^{\text{eff}}(t)|^{\max} \approx K_i^* |u_i(t)|^{\max} \quad (5.3)$$

De aquí resulta la expresión de la respuesta máxima en términos de desplazamientos (ver también las ecuaciones 2.12 y 3.33):

$$\begin{aligned} (\bar{S}_a)_i &= \frac{K_i^*}{M_i} u_i^{\max} = \omega_i^2 u_i^{\max} = Q_i (S_a)_i \\ u_i^{\max} &= Q_i \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} = \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \frac{\sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}}{\sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

En consecuencia, los desplazamientos máximos correspondientes al modo i pueden expresarse como (ver la ecuación 3.34)

$$(U_i)^{\max} = \phi_i u_i(t)^{\max} \quad (5.5)$$

y, para el modo i y el piso r , se expresa la ecuación (5.4) en la forma siguiente (ver también el apartado 3.6.2.2 de la NCSE-02):

$$(u_{ri})_{\max} = \phi_{ri} u_i(t)^{\max} = \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \left[\phi_{ri} \frac{\sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}}{\sum_{r=1}^n M_r \phi_{ri}^2} \right] = \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \eta_{ri} = \frac{(a_{ri})_{\max}}{\omega_i^2} \quad (5.6)$$

donde η_{ri} es el factor de distribución sísmica o coeficiente de participación modal correspondiente al piso r y al modo de vibración i .

La fuerza estática equivalente en el grado de libertad correspondiente al piso r y modo de vibración i , resulta de multiplicar el máximo desplazamiento del grado de libertad r por la rigidez correspondiente (para modelos con un grado de libertad, comparar la ecuación 2.10 con la 5.7)

$$(F_{ri}) = K_r^* (\phi_{ri})^{\max} = \frac{K_r^*}{\omega_i^2} (S_a)_i \eta_{ri} \quad (5.7)$$

También se puede escribir la ecuación anterior en función del peso del piso r
 $K_r^*/\omega_i^2 = M_r^* = P_r/g$, esto es (ver la ecuación 3.38):

$$(F_{ri}) = P_r \frac{(S_a)_i}{g} \eta_{ri} = P_r c_i \eta_{ri} \quad (5.8)$$

siendo $c_i = (S_a)_i/g$ la ordenada normalizada del espectro de respuesta (ver ecuaciones 2.9 y 4.4).

5.3 DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN ESPECTRAL

5.3.1 Cálculo de la aceleración espectral

La aceleración espectral que debe utilizarse en la expresión 5.8, debe ya contener el coeficiente de reducción R mencionado en las ecuaciones 4.9 y 4.10 y que está relacionado con la ductilidad estructural. También debe contener la influencia del amortiguamiento ν , que es un factor de modificación de la respuesta espectral (véase también el apartado 4.3), es decir

$$(S_a)_i = \bar{\alpha}(T_i) \left(\frac{\nu}{\mu} \right) = (\alpha_i a_c)(\beta) \quad (5.9)$$

donde a_c es la aceleración sísmica de cálculo, α_i es la ordenada del espectro de respuesta afectada por un coeficiente de riesgo zonal (ver el apartado 2.2.2), $\beta = \nu/\mu$ es el coeficiente de respuesta que tiene en cuenta la amortiguación dentro del coeficiente $\nu = f(\nu)$ y la ductilidad estructural μ , a_b es la aceleración sísmica básica en la superficie del terreno para un período de retorno de 500 años y que se obtiene del mapa de zonificación de la figura 5.1 (ver el apartado 2.1 de la normativa), $a_b = a_{b,\max}$ es la aceleración máxima del terreno definida en el apartado 2.2.1, ρ es el coeficiente adimensional de riesgo, que tiene en cuenta la probabilidad aceptable de que a_c sea excedida durante el período de vida que se proyecta la construcción (ver Tabla 5.1), s es el coeficiente de amplificación del terreno y se lo obtiene de la siguiente expresión

$$s = \begin{cases} \frac{C}{1.25} & \forall \rho a_b \leq 0.1g \\ \frac{C}{1.25} + 3.33 \left(\rho \frac{a_b}{g} - 0.1 \right) \left(1.0 - \frac{C}{1.25} \right) & \forall 0.1g \leq \rho a_b < 0.4g \\ 1 & \forall 0.4g < \rho a_b \end{cases} \quad (5.10)$$

Importancia	ρ
Normal	1.0
Especial	1.3

Tabla 5.1 Coeficiente de importancia ρ

La normativa española asigna las siguientes expresiones para cada una de las magnitudes contenidas en la ecuación 5.9:

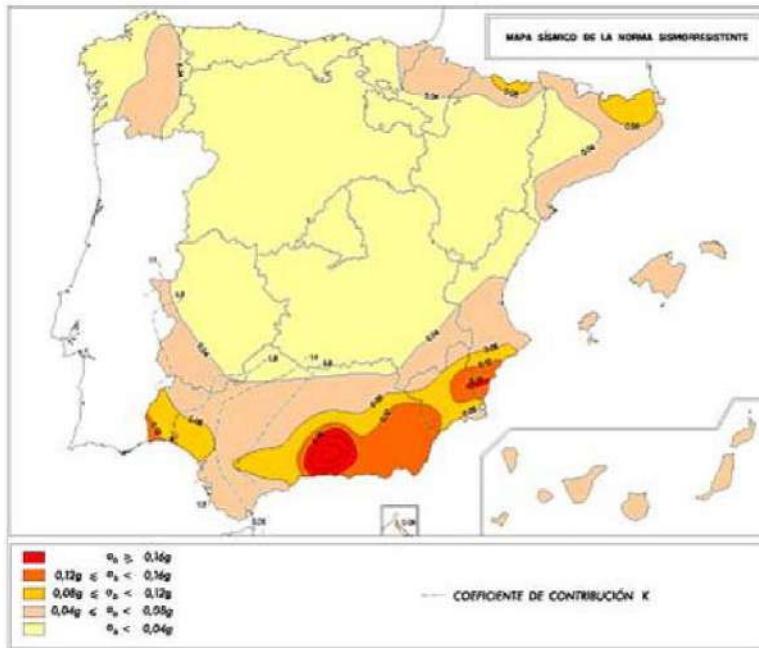


Figura 5.1 Aceleración sísmica básica en la superficie del terreno.

Ordenada del coeficiente de respuesta. Esta ordenada se compone de los siguientes términos (ver apartado 3.6.2.2 de la normativa):

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha(T_i)\beta & \forall T_i \geq T_A \\ 1.0 + (2.5\beta - 1.0) \left(\frac{T_i}{T_A} \right) & \forall T_i < T_A \end{cases} \quad (5.11)$$

Para el caso del cálculo simplificado de la fuerza sísmica equivalente, se puede considerar la siguiente expresión simplificada para α_i (ver apartado 3.7.3 de la normativa),

$$\alpha_i = \begin{cases} 2.5 & \forall T_i \leq T_B \\ 2.5 \left(\frac{T_B}{T_i} \right) & \forall T_i > T_A \end{cases} \quad (5.12)$$

Por último, $\alpha(T_i)$ es la aceleración espectral de respuesta para un oscilador elástico ideal de un grado de libertad y con un factor de amortiguamiento $v=5\%$ del crítico (véase la figura 5.2). Esta magnitud está definida en la normativa sismorresistente española NCSE-02 en tres tramos (ver el apartado 2.5 de la normativa)

Períodos bajos	$T_i < T_A$	$\alpha(T_i) = 1.0 + 1.5 \frac{T_i}{T_A}$
Períodos intermedios	$T_A \leq T_i \leq T_B$	$\alpha(T_i) = 2.5$
Periodos altos	$T_i > T_B$	$\alpha(T_i) = K \frac{C}{T_i}$

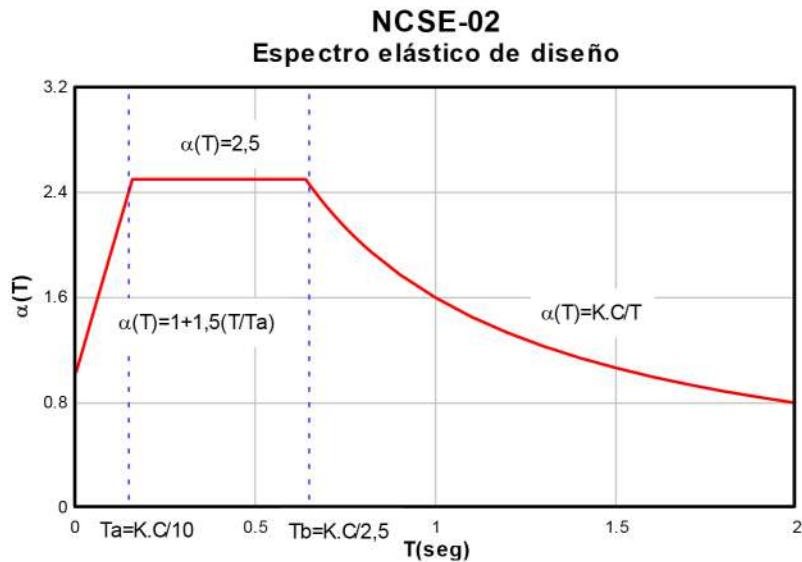


Figura 5.2 Aceleración sísmica básica en la superficie del terreno.

En estas ecuaciones K es el coeficiente de contribución que tiene en cuenta la influencia de los distintos tipos de terremotos esperados en la peligrosidad sísmica de cada punto, $T_A = K.C/10$ y $T_B = K.C/2.5$ son períodos característicos del espectro de respuesta. Además, C es el coeficiente de tipo suelo (ver tabla 5.2), que vale $C=1$ para suelos duros (tipo I), como roca compacta, suelo cementado o granular muy denso (velocidad de propagación de las ondas elásticas transversales $v_s = 750m/s$); $C=1.3$ para suelos intermedios (tipo II), como roca muy fracturada, suelos granulares densos o cohesivos duros (velocidad de propagación de las ondas elásticas transversales $750m/s \geq v_s > 400m/s$), $C=1.6$ para suelos granulares de compacidad media o suelos cohesivos de consistencia firme a muy firme (tipo III) (velocidad de propagación de las ondas elásticas transversales $400m/s \geq v_s > 200m/s$) y $C=2.0$ para suelo granular suelto o suelo cohesivo blando (tipo IV) (velocidad de propagación de las ondas elásticas transversales $v_s \leq 200m/s$ (para mayores detalles, ver el apartado 2.4 de la normativa)).

La normativa añade que se puede determinar los valores de los coeficientes $C = \left(\frac{\sum C_i e_i}{30} \right)$ en función del espesor de los estratos e_i existentes en los primeros 30.00 m a contar desde la superficie del terreno. Este coeficiente no contempla el posible colapso del terreno bajo carga dinámica y para ello habrá que estudiar en forma detallada la posible licuefacción del terreno.

Para determinar el tipo de terreno se puede utilizar el ensayo SPT (Standard Penetration Test) para terrenos granulares, la resistencia a compresión simple para terrenos cohesivos y la técnica de estudio de la velocidad de propagación de ondas en todos los casos.

Por último, el coeficiente de contribución K , que tiene en cuenta la peligrosidad sísmica de la zona, puede obtenerse del anexo 1 de la normativa NCSE-02, depende de las fuentes tectónicas que pueden afectar un sitio dado. Como ejemplo, para la ciudad de Sevilla, dicha tabla proporciona: $a_b/g = 0.07$ y $K = 1.1$.

Tipo de Terreno	Coeficiente C
Tipo I	1
Tipo II	1.3
Tipo III	1.6
Tipo IV	2

Tabla 5.2 Coeficiente de suelo C

Coeficiente de reducción por ductilidad (ver la tabla 5.3). Permite considerar la no linealidad estructural de una manera simplificada (ver apartado 4.4). La normativa adopta la forma simple expresada en la ecuación 4.10c, donde la reducción de ductilidad es independiente del período (ver 3.7.3.1 de la normativa). Es decir

$$R\mu = \mu \quad \forall T_i \quad (5.13)$$

Los valores de del coeficiente de ductilidad oscilan entre $1 \leq \mu \leq 4$ para estructuras que van de no tener ductilidad a aquellas muy dúctiles.

Tipo de estructura	Compartimentación de las plantas	$\Omega (%)$	Coeficiente de comportamiento por ductilidad			sin ductilidad ($\mu=1$)
			$\mu=4$	$\mu=3$	$\mu=2$	
Hormigón armado o acero laminado	Diáfana	4	0.27	0.36	0.55	1.09
	Compartimentada	5	0.25	0.33	0.50	1.00
Muros y similares	Compartimentada	6	-	-	0.46	0.93

Tabla 5.3 Valores del coeficiente de respuesta $\beta = \frac{\nu}{\mu}$

Factor de modificación de respuesta por amortiguamiento. Permite introducir modificaciones por amortiguamiento en la respuesta estructural, puesto que el espectro de la normativa está construido para un amortiguamiento tipo de $v=5\%$ del crítico. Esta modificación resulta de la siguiente expresión (ver apartados 3.7.3.1 y 2.5 de la normativa):

$$\nu = \left(\frac{5}{v[\%]} \right)^{0.4} \quad \forall T_i \geq T_A \quad (5.14)$$

Para períodos $T_i < T_A$, las ordenadas espectrales se interpolarán linealmente entre los valores correspondientes a $\alpha(T_i = 0)$ y $\alpha(T_i = T_A)$.

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la 5.9, se obtiene la aceleración espectral dada por la normativa para el grado de libertad i

$$(S_a)_i = \underbrace{\alpha_i (s \cdot \rho \cdot a_b)}_{\alpha(T_i)} \cdot \underbrace{\frac{\nu}{\mu}}_{\beta} \quad \text{Obteniéndose} \quad c_i = \frac{(S_a)_i}{g} \quad (5.15)$$

Sustituyendo esta última en la ecuación 5.6 se expresa el desplazamiento máximo del piso r para el modo de vibración i (ver apartado 3.6.2.2 de la normativa y la ecuación 3.34).

Esto es:

$$\begin{aligned} (a_{ri})^{\max} &= (\ddot{\phi}_{ri})^{\max} = (S_a)_i \eta_{ri} = (\alpha_i s \rho a_b) \left(\frac{\nu}{\mu} \right) \eta_{ri} \\ (u_{ri})^{\max} &= (\phi_{ri})^{\max} = \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \eta_{ri} = \frac{(\alpha_i s \rho a_b) \left(\frac{\nu}{\mu} \right)}{\omega_i^2} \eta_{ri} \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3.2 Cálculo de la fuerza sísmica equivalente

Sustituyendo la ecuación 5.9 en la 5.8, se obtiene la expresión de la fuerza sísmica equivalente en el piso r y el modo i , en la forma existente en la normativa (ver el apartado 3.7.3 de la normativa y también las ecuaciones 3.38 y 4.1 a 4.3). Esto es:

$$\begin{aligned} (F_{ri})^{\max} &= P_r \underbrace{\alpha_i \frac{(s \rho a_b) \left(\frac{\nu}{\mu} \right)}{g} \eta_{ri}}_{c_i} \\ (F_{ri})^{\max} &= P_r s_{ri} \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde c_i es el coeficiente sísmico para un oscilador con un grado de libertad, $\beta = \nu/\mu$ es el denominado coeficiente de respuesta} (ver la tabla 3.1 de la normativa NCSE-02) y s_{ri} el coeficiente sísmico correspondiente a la planta r y al modo de vibración i (ver ecuación 4.4). Este valor coincide exactamente con el coeficiente sísmico definido para un sistema con un grado de libertad en la ecuación 2.11

$$s_{ri} = c_i (T_i V_i) \eta_{ri} \quad (5.18)$$

tal que la expresión del coeficiente sísmico c_i para un factor de amortiguamiento del 5% del crítico, según lo expresan las normativas, vale (ver la ecuación 2.8c):

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{(S_a)_i}{g} = \alpha_i \frac{(s\rho a_b)}{g} \left(\frac{\nu}{\mu} \right) \\ &= \frac{(s\rho a_b)}{g} \left(\frac{\nu}{\mu} \right) \left| \omega_i \int_0^t a(\tau) e^{-0.05\omega_i(t-\tau)} \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau \right|^{\max} \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.4 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considérese una estructura como la que se muestra en la figura 5.3, sometida a una aceleración sísmica $a(t)$, cuyo espectro sísmico de respuesta corresponde al de la *Normativa Española NCSE-02*. Se requiere calcular la fuerza máxima en cada grado de libertad y el desplazamiento correspondiente. La estructura está construida de hormigón armado con cerramientos en muros de mampostería. La construcción se sitúa en la ciudad de Sevilla sobre un terreno del tipo II (ver el apartado 5.3.1 y la tabla 2.1 de la normativa). Para el desarrollo de este ejemplo se ha preparado un programa en MATLAB, que permite realizar el cálculo de las matrices de masa M y de rigidez K , propias de las características geométricas del pórtico y a las cargas actuantes. Una vez calculadas las características geométricas y ensambladas las matrices, se calculan los autovalores y autovectores, con los autovalores se tiene la frecuencia natural de cada modo y se puede calcular el período. A continuación se pasa a introducir las características del emplazamiento, consistentes en el factor de influencia de la fuente sismotectónica, el tipo de suelo y la aceleración básica obtenida del mapa de riesgo sísmico. Finalmente, se introducen los datos de las características disipativas de la estructura, representados por la fracción de amortiguamiento y la ductilidad.