Übungsblatt 0

Abgabe via Moodle.
Deadline Fr. 5ter Mai

Achten Sie bei diesem Übungsblatt sowohl auf die Korrektheit Ihres Beweises als auch auf die Korrektheit des Aufschriebs Ihres Beweises. In Ihrem Beweis sollten die Aussagen nummeriert werden und für jede neue Aussage müssen Sie angeben, wie sie (a) aus einer Annahme oder (b) aus einer früheren Aussage folgt.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)

Seien A und B Mengen über einem Universium U. Wir definieren $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ und $\bar{B} = \{x \in U \mid x \notin B\}$. Zeigen Sie $(A \setminus B) = (A \cap \bar{B})$.

Lösung:

1. Wir sollen zeigen $(A \backslash B) = (A \cap \bar{B})$
2. Beweisen von (1) ist äquivalent zu beweisen von $(A \backslash B) \subseteq (A \cap \bar{B})$ and $(A \backslash B) \supseteq (A \cap \bar{B})$
3. Sei $x \in (A \backslash B)$ beliebig.
4. Definition $(A \backslash B)$, folgt $x \in A$ und $x \notin B$.
5. Zeigen von $x \in (A \cap \bar{B})$ das gleiche wie zeigen von $x \in A$ und $x \in \bar{B}$.
6. $\bar{B}$ ist definiert als $\{x \in U \mid x \notin B\}$.
7. Durch (6) und (4) gilt $x \in \bar{B}$.
8. Durch (5),(7) und (4) gilt $x \in (A \cap \bar{B})$
9. Sei $x \in (A \cap \bar{B})$ beliebig.
10. Durch (9) $x \in A$ und $x \in \bar{B}$.
11. Durch Definition von $\bar{B}$ (6), gilt $x \notin B$.
12. Durch (11) und (10) gilt $x \in A$ und $x \notin B$
13. Daher $x \in (A \backslash B)$
14. Durch $(1)-(8)$ erhalten wir $(A \backslash B) \subseteq (A \cap \bar{B})$ und durch $(9)-(13)$ erhalten wir $(A \backslash B) \supseteq (A \cap \bar{B})$.
15. Durch (2) und (14) erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Seien A und B Mengen. Zeige:

$$((A \backslash B) \cup B) = (A \cup B)$$

Lösung:
Zeige: $((A \backslash B) \cup B) \subseteq (A \cup B)$

1. Sei $x \in ((A \backslash B) \cup B)$
2. $x \in (A \backslash B)$ oder $x \in B$ (1, def $\cup$)
3. Fall 1: $x \in (A \backslash B)$:
4. $\quad x \in A$ und $x \notin B$ (3)
5. $\quad x \in A$ (4, def und)
6. $\quad x \in A$ oder $x \in B$ (5, def oder)
7. $\quad x \in (A \cup B)$ (6, def $\cup$)
8. Fall 2: $x \in B$:
9. $\quad x \in A$ oder $x \in B$ (8, def oder)
10. $\quad x \in (A \cup B)$ (9, def $\cup$)

Zeige: $(A \cup B) \subseteq ((A \backslash B) \cup B)$

1. Sei $x \in (A \cup B)$.
2. $x \in A$ oder $x \in B$ (1, def oder)
3. $x \notin B$ oder $x \in B$ (jedes x ist entweder in B oder nicht in B)
4. Fall 1: $x \in B$:
5. $\quad x \in B$ oder $x \in (A \backslash B)$ (2, 4, def oder)
6. $\quad x \in ((A \backslash B) \cup B)$ (5, def $\cup$)
7. Fall 2: $x \notin B$:
8. $\quad x \in A$ und $x \notin B$ (2, 7, def oder, def und)
9. $\quad x \in (A \backslash B)$ (8, def $\backslash$)
10. $\quad x \in ((A \backslash B) \cup B)$ (7,9, def $\cup$)

Wir haben $((A \backslash B) \cup B) \subseteq (A \cup B)$ und $(A \cup B) \subseteq ((A \backslash B) \cup B)$ bewiesen, daher gilt $((A \backslash B) \cup B) = (A \cup B)$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung:
IA: $n = 0, 2^0 = 1 = 2^1 - 1$. Die Behauptung gilt für $n = 0$.
IH: Für ein festes n gilt $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
IS: $n \to n+1$. $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \overset{\text{IH}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Zeigen Sie $2^n < n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.

Lösung:
IA: $n = 4, 2^4 = 16 < 24 = 4!$. Die Behauptung gilt für $n = 4$.
IH: Für ein festes n gilt $2^n < n!$.
IS: $n \to n+1$. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IH}}{<} 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$