Guía de Matemáticas III, Otoño 2023. Segundo Parcial

Subespacios Vectoriales

1. Determine si los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales:

a. $V = M_{22}; H = \{A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in R\}$

b. $V = M_{22}; H = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in R\}$

c. $V = P_4; H = \{p \in P_4 : P(0) = 0\}$

d. $V = R^3; H = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, x^2 + y^2 + z^2 - (vt)^2 = 1\}$

Combinación Lineal

1. Dados los vectores $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ y $w = (3, 2, 5)$. Exprese los siguientes vectores como combinaciones lineales de u,v y w.

a. $(5, 5, 9)$

$$\begin{bmatrix}2&1&3&5\\1&-1&2&5\\4&3&5&9\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&9\\1&-1&2&5\\2&1&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{1}{4})R_1}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\2&1&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{1}{2})R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{2}{7})R_2}\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}}\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{3}{4})R_3}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&9\\0&-\frac{7}{4}&0&\frac{7}{2}\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-5)R_3}\begin{bmatrix}4&3&0&14\\0&-\frac{7}{4}&0&\frac{7}{2}\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&0&14\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-3)R_2}\begin{bmatrix}4&0&0&20\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{4}}\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

b. $(2,0,6)$

$$\begin{bmatrix}2&1&3&2\\1&-1&2&0\\4&3&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&6\\1&-1&2&0\\2&1&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{1}{4})R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\2&1&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}}\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{3}{4})R_3}\begin{bmatrix}4&3&5&6\\0&-\frac{7}{4}&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-5)R_3}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&0&16\\0&-\frac{7}{4}&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}}\begin{bmatrix}4&3&0&16\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&0&0&16\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{4}}\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

c. $(2, 2, 3)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{4})R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{3}{4})R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-5)R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d. $(-1, 3, \frac{1}{2})$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1.0 \\ 1 & -1 & 2 & 3.0 \\ 4 & 3 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 1 & -1 & 2 & 3.0 \\ 2 & 1 & 3 & -1.0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{4})R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 2.875 \\ 2 & 1 & 3 & -1.0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 2.875 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 2.875 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 2.875 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -2.07142857142857 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 2.875 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -2.07142857142857 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 2.875 \\ 0 & 0 & 1 & -7.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{3}{4})R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0.5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 8.312 \\ 0 & 0 & 1 & -7.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 36.75 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 8.3125 \\ 0 & 0 & 1 & -7.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 36.75 \\ 0 & 1 & 0 & -4.75 \\ 0 & 0 & 1 & -7.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 51.0 \\ 0 & 1 & 0 & -4.75 \\ 0 & 0 & 1 & -7.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12.75 \\ 0 & 1 & 0 & -4.75 \\ 0 & 0 & 1 & -7.25 \end{bmatrix}$$

2. Si $p_1 = 2 + x + 4x^2$, $p_2 = 1 - x + 3x^2$ y $p_3 = 3 + 2x + 5x^2$. Exprese los siguientes polinomios como una combinación de p_1, p_2 y p_3.

a. $9x + 5 - 5x^2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{4})R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{41}{4} \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{41}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{41}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{41}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{32}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{41}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{32}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{41}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{3}{4})R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-5)R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -85 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -85 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -88 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

b. $2 + 6x^2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{4})R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + (-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{3}{4})R_3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-5)R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 16 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

c. $3-2^{-1}x^2+x$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\1&-1&2&1.0\\2&1&3&3.0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\1&-1&2&1.0\\2&1&3&3.0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{1}{4})R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&1.125\\2&1&3&3.0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&1.125\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&3.25\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&1.125\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&3.25\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&1.125\\0&0&\frac{2}{7}&2.92857142857143\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&1.125\\0&0&\frac{2}{7}&2.92857142857143\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}}\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&1.125\\0&0&1&10.25\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{3}{4})R_3}\begin{bmatrix}4&3&5&-0.5\\0&-\frac{7}{4}&0&-6.5625\\0&0&1&10.25\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&0&-51.75\\0&-\frac{7}{4}&0&-6.5625\\0&0&1&10.25\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}}\begin{bmatrix}4&3&0&-51.75\\0&1&0&3.75\\0&0&1&10.25\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&0&0&-63.0\\0&1&0&3.75\\0&0&1&10.25\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{4}}\begin{bmatrix}1&0&0&-15.75\\0&1&0&3.75\\0&0&1&10.25\end{bmatrix}$$

d. $7x-2x^2+1$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\1&-1&2&7\\2&1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\1&-1&2&7\\2&1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{1}{4})R_1}\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{15}{2}\\2&1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{1}{2})R_1}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{15}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{15}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{2}{7})R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{15}{2}\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{15}{2}\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{2}{7}}}\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{15}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{3}{4})R_3}\begin{bmatrix}4&3&5&-2\\0&-\frac{7}{4}&0&\frac{63}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-5)R_3}$$

$$\begin{bmatrix}4&3&0&\frac{1}{2}\\0&-\frac{7}{4}&0&\frac{63}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{7}{4}}}\begin{bmatrix}4&3&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{9}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(-3)R_2}$$

$$\begin{bmatrix}4&0&0&14\\0&1&0&-\frac{9}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{4}}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{7}{2}\\0&1&0&-\frac{9}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

3. Escriba a B como una combinación lineal del conjunto de vectores A.

a. $B=\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}, A=\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}\}$

$$\begin{bmatrix}-2&4&3&-1\\-1&-1&1&-2\\-5&-2&-3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\-1&-1&1&-2\\-2&4&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{1}{5})R_1}\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&-\frac{3}{5}&\frac{8}{5}&-\frac{14}{5}\\-2&4&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(-\frac{2}{5})R_1}$$

$$\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&-\frac{3}{5}&\frac{8}{5}&-\frac{14}{5}\\0&\frac{24}{5}&\frac{21}{5}&-\frac{13}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&\frac{24}{5}&\frac{21}{5}&-\frac{13}{5}\\0&-\frac{3}{5}&\frac{8}{5}&-\frac{14}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+(\frac{1}{8})R_2}$$

$$\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&\frac{24}{5}&\frac{21}{5}&-\frac{13}{5}\\0&0&\frac{17}{8}&-\frac{25}{8}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&\frac{24}{5}&\frac{21}{5}&-\frac{13}{5}\\0&0&\frac{17}{8}&-\frac{25}{8}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_3}{\frac{17}{8}}}\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&\frac{24}{5}&\frac{21}{5}&-\frac{13}{5}\\0&0&1&-\frac{25}{17}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+(-\frac{21}{5})R_3}\begin{bmatrix}-5&-2&-3&4\\0&\frac{24}{5}&0&\frac{304}{85}\\0&0&1&-\frac{25}{17}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(3)R_3}$$

$$\begin{bmatrix}-5&-2&0&-\frac{7}{17}\\0&\frac{24}{5}&0&\frac{304}{85}\\0&0&1&-\frac{25}{17}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{\frac{24}{5}}}\begin{bmatrix}-5&-2&0&-\frac{7}{17}\\0&1&0&\frac{38}{51}\\0&0&1&-\frac{25}{17}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+(2)R_2}$$

$$\begin{bmatrix}-5&0&0&\frac{55}{51}\\0&1&0&\frac{38}{51}\\0&0&1&-\frac{25}{17}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{-5}}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{11}{51}\\0&1&0&\frac{38}{51}\\0&0&1&-\frac{25}{17}\end{bmatrix}$$

b. $B=-x^2+2x, A=\{x^2-1,x^2+1,x^2-x-1,x^2+5x\}$: No se puede $\because r>m$

Vectores Linealmente Independientes y Dependientes

1. Determine los valores de k para que el conjunto $H=\{\begin{pmatrix}k\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2k\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\0\\3\end{pmatrix}\}$ sea lineal-mente independiente.

2. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones con valore real definidas sobre la recta real completa. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en V son lineal-mente dependientes?

a. $\{2,4\sin^2 x,\cos^2 x\}$

b. $\{x,\cos x\}$

c. $\{1,\sin x,\sin 2x\}$

d. $\{\cos 2x,\sin^2 x,\cos^2 x\}$

3. Para que los valores de k, las siguientes matrices son linealmente independientes de M_{22}

a. $\begin{bmatrix}1&0\\1&k\end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Construya un conjunto de vectores $H = \{v_1, v_2, v_3\} \in R^3$ tal que sean linealmente independientes y $v_1^T V_2 = v_2^T v_3 = 0$.

5. Sea $H = \{v_1, v_2, v_3\} \in R^3$. Demuestre que si $det(H) = det([v_1, v_2, v_3]) = 0$, entonces H es lineal-mente independiente.

Bases y Cambios de Base

1. Determine una base para el espacio de funciones que satisface: $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$.

2. Considera las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{u_1', u_2'\}$ para R^2, donde: $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, u_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a. Calcula la matriz de transición de B' hacia B.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-1)R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-5}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-4)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{13}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

b. Calcula la matriz de transición de B hacia B'.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{3})R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{2}{3}}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

c) Dado el vector $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, calcula $[w]_B$ y $[w]_{B'}$.

$$[W]_B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-1)R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-5}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (-4)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{17}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{10} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

$$[W]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{3})R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-\frac{2}{3}}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (1)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

3. Sean los polinomios $p_1 = x^2 + x - 2$, $p_2 = 3x^2 - x$, realiza los siguientes ejercicios:

a. $p_3 = 2p_1 - p_2$

$$2x^2 + 2x - 4 - 3x^2 - x = -x^2 + x - 4$$

b) El conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$, ¿forman una base? Justifica.

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{aligned} -x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Determina la base(si es que existe) del conjunto solución del problema.

5. Dados los vectores y bases siguientes:

$$V = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, Z = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a. Calcula $[V]_W$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (0)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Calcula la matriz de transición de W hacia Z.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-\frac{1}{3})R_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{1}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + (}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{-3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c. Calcula $[V]_Z$ utilizando la matriz de transición del inciso anterior.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

6. Dado el siguiente conjunto de vectores: $(\frac{1}{2}, -7, 0), (-\frac{1}{3}, 0, 2), (0, -7, \frac{1}{5})$.

a. Determine si el conjunto genera a R^3.
b. Genere un espacio vectorial de 3 elementos usando el conjunto de vectores.
c. Con los vectores, construya un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y determine la base de las soluciones del sistema.

7. Sea $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $[V]_W = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ determine la base W, sabiendo que $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ -3x \end{pmatrix} \right\}$

8. Sea $[V]_S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ y $[V]_W = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, sabiendo que $W = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ y $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, determine:

a. W
b. Matriz de transición de la base S hacia W
c. Matriz de transición de la base W hacia S.

9. Calcular las coordenadas de $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en términos de base $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Calcule $||V||$ y $||V_H||$. ¿Porué $||V|| \neq ||V_H||$?