UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE SAN LUIS POTOSÍ

MATEMATICAS III

Portafolio

FERMIN MORALES ROBLES

Martínez Lara Santiago De La Cruz (177685)

Estrada Gutiérrez Fátima Guadalupe (180799)

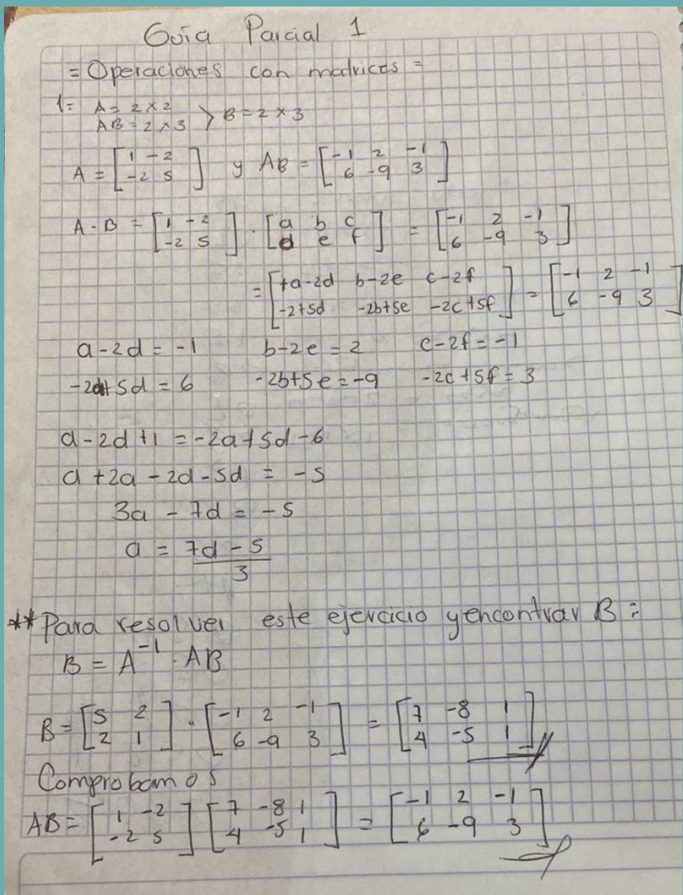
Montelongo Martínez Laura Ivon (177291)

Portafolio

Primer Parcial 3
Guía del Parcial 3
Examen Parcial 10
Actividad 1.1 Sistemas de ecuaciones lineales y reducción de matrices 11
Actividad 1.2 Operaciones de matrices 13

Primer Parcial

Guía del Parcial



Guía Parcial 1

= Operaciones con matrices =

1: $\left.\begin{array}{l} A = 2\times 2 \\ AB = 2\times 3 \end{array}\right\rangle B = 2\times 3$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} +a-2d & b-2e & c-2f \\ -2+5d & -2b+5e & -2c+5f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

$a-2d = -1$ $\quad b-2e = 2$ $\quad c-2f = -1$

$-2a+5d = 6$ $\quad -2b+5e = -9$ $\quad -2c+5f = 3$

$a-2d+1 = -2a+5d-6$

$a+2a-2d-5d = -5$

$3a-7d = -5$

$a = \frac{7d-5}{3}$

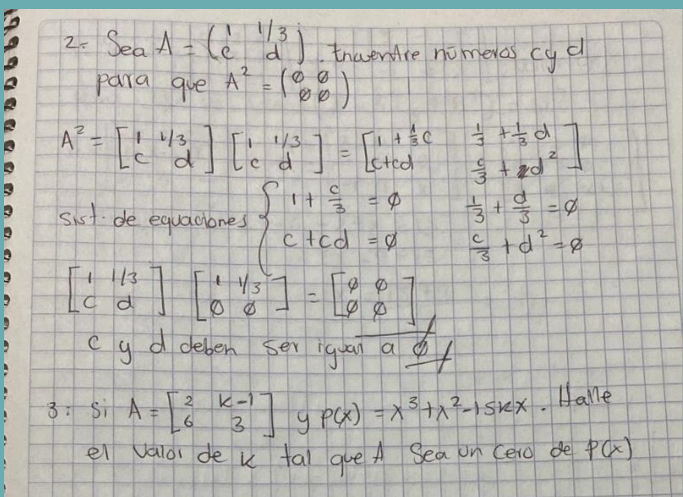
** Para resolver este ejercicio y encontrar B:

$B = A^{-1} \cdot AB$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Comprobamos

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$



2: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{pmatrix}$. Encuentre números c y d para que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{3}c & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}d \\ c+cd & \frac{c}{3}+d^2 \end{bmatrix}$

Sist. de equaciones $\begin{cases} 1+\frac{c}{3} = 0 & \frac{1}{3}+\frac{d}{3} = 0 \\ c+cd = 0 & \frac{c}{3}+d^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c y d deben ser igual a 0

3: Si $A = \begin{bmatrix} 2 & k-1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $p(x) = x^3+x^2-15kx$. Halle el valor de k tal que A sea un cero de $p(x)$

4: Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & x & \emptyset \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \emptyset & -3 & 1 \\ -2 & \emptyset & x \end{bmatrix}$; Valor de x para que la $Traza(A - 3I_3 + B^T) = 13$?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & x-3 & \emptyset \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} ; \; B^T = \begin{bmatrix} 3 & \emptyset & -2 \\ -1 & -3 & \emptyset \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \emptyset \\ \emptyset & x-6 & \emptyset \\ 1 & 4 & -2+x \end{bmatrix}$$

$$Traza = -1 + x - 6 - 2 + x = 13$$

$$2x - 9 = 13$$

$$x = \frac{13+9}{2} = 11$$

= Determinantes =

1: Calcular valor de x para que el det. de $A = \begin{bmatrix} x & x \\ 6 & 3x \end{bmatrix}$ sea 72

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x \\ 6 & 3x \end{vmatrix} = 3x^2 - 6x = 72$$

$$3x^2 - 6x - 72 = \emptyset$$

// factorizar $\quad 3\,(x^2 - 2x - 24) = \emptyset$

$x_1 = -4$
$x_2 = 6$

Esto debe valer x para que el det valga 72.

2: $V = |(u \times v) \cdot w|$ -> Se obtiene el determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(-14) + \overset{28}{2(-1)(-14)} + (1)(14)$$

$= \emptyset$

3: Hallar una matriz $A_{4\times 4}$ tal que $a_{ij} = i + j$

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & 4+4 \end{bmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = |A| = 2

4: Investigar propiedades matriz de rotación

- Matriz que representa una rotación en el espacio euclideo.

Ejemplo:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \rightarrow$$ Representa la rotación de θ grados del plano en sentido antihorario.

Rotación plano xy (2D) $45°$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix}$$

- Matriz Ortogonal de determinante uno.

$R^T = R^{-1}$ y $\det R = 1$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

5: Demostrar el determinante de Vandermonde tam 3x3

si: $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (c-a)(c-b)(a-b)$$

$$\cancel{1[ab^2 - ba^2] - 1} \; 1[bc^2 - cb^2] - 1[ac^2 - ca^2] + 1[ab^2 - ba^2]$$

$$6 + 30 \quad -30$$

$$= 6$$

$$(-2)(1)(3) = -6$$

$\therefore$ El det. de Vandermonde de tam 3x3 si se cumple

6: Det. con propiedades

a) ~~Tiene~~ la primer renglón es el doble del segundo renglón $\therefore$ su det $= \emptyset$

b) Tiene columna de $\emptyset$ $\therefore$ su det $= \emptyset$

c)

d) Matriz triangulo Inferior $\therefore$ su det = Producto ~~Suma~~ de la diagonal principal $= -8$

Aplicaciones

1.- Suponga que se administra un negocio de venta de productos electrónicos. La tienda vende tres tipos de productos: teléfonos móviles (A), tabletas (B) y laptops (C). La información sobre las ventas y los ingresos se presenta de la siguiente manera:

Por cada teléfono móvil vendido, la tienda obtiene $300 de beneficio.

Por cada tableta vendida, la tienda obtiene $500 de beneficio.

Por cada laptop vendida, la tienda obtiene $800 de beneficio.

Durante un mes, se vendieron un total de 100 dispositivos y se obtuvo un beneficio total de $45,000.

Además, se sabe que las ventas de teléfonos móviles superaron a las tabletas en 10 unidades, y las ventas de laptops fueron el doble de las tabletas.

a) Escriba un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que represente la información proporcionada.

- $A + B + C = 100$

$300A + 500B + 800C = 4500$

$A = B + 10$

b) Plantee el sistema completo de ecuaciones lineales y resuélvelo para determinar cuántos teléfonos móviles, tabletas y laptops se vendieron en ese mes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 300 & 500 & 800 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 4500 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 300 & 500 & 800 & 45000 \\ 1 & -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 - 300R_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 200 & 500 & 15000 \\ 1 & -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 200 & 500 & 15000 \\ 0 & -2 & -1 & -90 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \to R_3 + 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + 2R_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 200 & 500 & 15000 \\ 0 & 0 & 1 & 110 \end{bmatrix} \to C = 110$$

$\to 200B + 500(110) = 15000$

$B = -200$

$\to A + B + C = 100$

$A - 200 + 110 = 100$

$A = 190$

R = Se vendieron 190 teléfonos, 200 tabletas y 110 laptops

2.- Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de cada uno de estos tipos necesitó ciertas unidades de madera, plástico y aluminio, tal como se indica en la tabla siguiente. La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

	MADERA	PLÁSTICO	ALUMINIO
SILLA	1 unidad	1 unidad	2 unidades
MECEDORA	1 unidad	1 unidad	3 unidades
SOFÁ	1 unidad	2 unidades	5 unidades

- $x + y + z = 400$
  $x + y + 2z = 600$
  $2x + 3y + 5z = 1500$ $\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 1500 \end{bmatrix}$

$A \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(5-6) - 1(5-4) + 1(3+2) = -1 - 1 + 6 = 4$

- Cofactores

$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -1$ $\quad C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 2$ $\quad C_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -1$

$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1$ $\quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -3$ $\quad C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$

$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -1$ $\quad C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 1$ $\quad C_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$

- $A = \begin{matrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \longrightarrow A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -1200 & 1500 \\ -400 & 1800 & -1500 \\ 400 & -600 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ -1600 \\ -600 \end{bmatrix}$

R = 700 sillas, 1600 mecedoras y 600 sofas

3.- Una empresa tiene 100 empleados divididos en tres categorías: A, B y C. Como se muestra en la tabla siguiente, cada empleado realiza una aportación diferente a un fondo de jubilación. Después de la negociación de un nuevo contrato, la aportación mensual de los empleados aumenta según el porcentaje indicado. El total de \$4 450 en aportaciones mensuales de todos los empleados aumenta entonces a \$5 270 a causa del nuevo contrato. Use el concepto de matriz aumentada para determinar el número de empleados en cada categoría.

	A	B	C	Total de aportaciones mensuales
Aportación mensual al fondo de pensiones por empleado	\$20	\$30	\$50	\$4 450
Aumento porcentual al mes por empleado	10%	10%	20%	\$5 270

$$x + y + z = 100$$
$$20x + 30y + 50z = 4450$$
$$22x + 33y + 60z = 5270$$

$20(1+0.1)$ $30(1+0.1)$ $50(1+0.2)$

• $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 20 & 30 & 50 & 4450 \\ 22 & 33 & 60 & 5270 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 20R_1 \\ R_3 \to R_3 - 22R_1 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 10 & 30 & 2450 \\ 0 & 11 & 38 & 3070 \end{array}\right] R_2 \to R_2/10 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 245 \\ 0 & 11 & 38 & 3075 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 - 11R_2 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -145 \\ 0 & 1 & 3 & 245 \\ 0 & 0 & 5 & 380 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} x = -145 + 2z \\ y = 245 + 3z \\ z = 76 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 473 \end{array}$

• R: Categoría A = 7 empleados, categoría B = 473 y en la categoría C = 76

4.- Encuentre la ecuación de la parábola $y = ax2 + bx - 5$ que pasa por los puntos (1,1) y (2, -3).

• Para el punto (1,1)

$1 = a(1)^2 + b(1) - 5$

$1 = a + b - 5$

• Para el punto (2,-3)

$-3 = a(2)^2 + b(2) - 5$

$-3 = 4a + 2b - 5$

• $(a + b = 6)\cdot -4 \longrightarrow -4a - 4b = -24$

$4a + 2b = 2$

$$\begin{array}{r} 4a + 2b = 2 \\ \hline / \; -2b = -22 \end{array} \longrightarrow b = 11$$

• $a + 11 = 6$

$a = -5$

R $\to$ $y = -5x^2 + 11x - 5$

5.- Escriba una expresión que represente un polinomio de tercer grado $P3(x)$ del tal forma que cumpla que $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 2$, $P(-2) = -6$.

• $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

• $Ax = b$ $\longrightarrow A^{-1} \longrightarrow A^{-1}b$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

• $x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \therefore \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 5/2 \\ c = -4 \end{array} \longrightarrow \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5x^2}{2} - 4x$

6.- La descomposición en fracciones parciales de una función racional se desarrolla y queda de la siguiente manera: $22x2 + 28x + 32 = (A - 2B + 3C)x2 + (2A + B - 3C)x + (3A - B - 2C)$

Determine los valores de A, B y C.

• $A - 2B + 3C = 22$

$2A + B - 3C = 28$

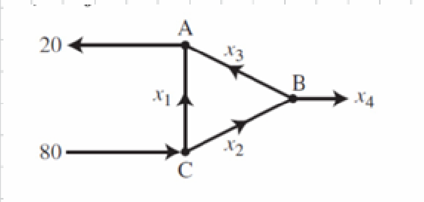
$3A - B - 2C = 32$

- $\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & -3 & 28 \\ 3 & -1 & -2 & 32 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 22 \\ 0 & 5 & -9 & -16 \\ 0 & 3 & -8 & -12 \end{array}\right] R_2 \to R_2/6 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 22 \\ 0 & 1 & -9/5 & -16/5 \\ 0 & 3 & -8 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{array}$

$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3/5 & 78/5 \\ 0 & 1 & -9/5 & -16/5 \\ 0 & 0 & -13/5 & -12/5 \end{array}\right] \longrightarrow -13/5\,C = -12/5 \longrightarrow B = -16/5 + 9/5\,C \longrightarrow A = 78/5 + 3/5\,C$

$C = 12/13$ $\quad B = -20/13$ $\quad A = 210/13$

7.- El siguiente esquema representa flujo de tráfico en una red. Suponiendo que todos los flujos son no negativos. ¿Cuál es el máximo valor posible para $x3$?



$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \end{array}\right] R_3 \to R_3 - R_2 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \end{array}\right] R_4 \to R_3$

$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] R_3 \to -R_3 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] R_3 \to R_3 + R_4 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] R_2 \to R_2 + R_3$

$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] R_1 \to R_1 - R_3 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 80 \\ x_3 = 20 \\ x_4 = 60 \end{array}$

R= Valor máximo $X_3 = 20$

x

Examen Parcial

Actividad 1.1 Sistemas de ecuaciones lineales y reducción de matrices

2. Determine si las matrices siguientes están en la forma escalonada reducida. Si una matriz no está en la forma escalonada reducida, de una razón.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ sí es escalonada reducida

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ no, en las columnas 4 y 5 los números arribade los 1`s deberían ser cero

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ no, el renglón de ceros debe estar hasta abajo

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sí es escalonada reducida

3. Cada una de las matrices siguientes está en la forma escalonada reducida, dé la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones. Dé la solución (si existe) de cada uno de los sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

x = 2

y = 4

z = -2

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

no tiene solución

f) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

$x_1 = 2 - 3x_2$

$x_3 = 4$

$x_4 = 5$

$x_2 \in R$

4. Cada una de las matrices siguientes está en la forma escalonada reducida, dé la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones. Dé la solución (si existe) de cada uno de los sistemas de ecuaciones.

b) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$x_1 = 4 + 3x_2 - 2x_3$

$x_4 = -7$

$x_2, x_3 \in R$

e) $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{13} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$

Matriz reducida

$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

$\mathbf{x_1} = 2$

$\mathbf{x_2} = 3$

$\mathbf{x_3} = 1$

7. Resuelva (si es posible) cada uno de los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres variables usando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

c) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Matriz reducida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$x_1 = 3 - 2x_3$

$x_3 = 2$

$x_4 = 1$

$x_2 \in R$

Actividad 1.2 Operaciones de matrices

Reducción de matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$:
    1. Reduzca la matriz A a su forma escalonada.
    2. Calcule $|A|$ con las propiedades de los determinantes, considerando las operaciones elementales que se usaron en el inciso anterior.
2. En los siguientes ejercicios, determine los valores del parámetro s para los cuales el sistema tiene solución única:

$$\begin{aligned} 6sx_1 + 4x_2 &= 5 \\ 9x_1 + 2sx_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6sx_1 + 4x_2 &= 5 \\ 9x_1 + 2sx_2 &= -2 \\ A &= \begin{bmatrix} 6s & 4 \\ 9 & 2s \end{bmatrix} \\ |A| &= (6s \times 2s) - 49 = 12s^2 - 36 \\ s &\neq \pm\sqrt{3} \because |A| \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3xs_1 - 5x_2 &= 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3xs_1 - 5x_2 &= 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 &= 2 \\ A &= \begin{bmatrix} 3s & -5 \\ 9 & 5s \end{bmatrix} \\ |A| &= (3s \times 5s) - (9 \times -5) = 15s^2 + 45 \\ s &\neq \pm\sqrt{3} \because |A| \neq 0 \end{aligned}$$

3. Calcular el valor de k para que el sistema de ecuaciones tenga soluciones infinitas: $

$

$$\begin{aligned}
(k+2)x+2ky-z &= 1 \\
x-2y+kz &= -k \\
y+z &= k \\
A &= \begin{bmatrix} k+2 & 2k & -1 \\ 1 & -2 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
|A| &= -k^2-6k-5 \\
-k^2-6k-5 &\neq 0 \\
k &\neq -1,-5
\end{aligned}$$

4. Sea el sistema $\begin{matrix} 2x+y-3z=1 \\ -x+2y+z=2 \\ x+ay-2z=3 \end{matrix}$ Compruebe si CHATGPT determina los valores correctos para a de manera que el sistema:

$$\begin{matrix} 2x+y-3z=1 \\ -x+2y+z=2 \\ x+ay-2z=3 \end{matrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \therefore |A| = a-3$$

1. Tenga solución única: $a \neq 3$
2. No tenga solución: $a = 3$
3. Tenga soluciones infinitas: $a = 3$

4. Adjunte captura de pantalla de la respuesta de CHATGPT:

Para determinar los valores de a para los cuales el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución, necesitamos considerar el determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 2 \\ x + ay - 2z &= 3 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}$$

El determinante de A es:

$$\det(A) = 2(2 * -2 - a * 1) - 1(-1 * -2 - 1 * 1) - 3(-1 * a - 2 * 1)$$

- Si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene una **solución única**.
- Si $\det(A) = 0$ y los determinantes de las matrices ampliadas son también cero, entonces el sistema tiene **infinitas soluciones**.
- Si $\det(A) = 0$ y al menos uno de los determinantes de las matrices ampliadas es distinto de cero, entonces el sistema **no tiene solución**.

Por lo tanto, necesitas resolver la ecuación $\det(A) = 0$ para encontrar los valores de a que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones o ninguna solución. Para los demás valores de a, el sistema tendrá una solución única.

5. Para qué valor de a el sistema S_1 se resuelve por Cramer. Resuelva dicho sistema por este método.

$$S_1 = \begin{cases} 2x - 3y + z - aw = 2 \\ x - z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + z - w = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - aw &= 2 \\ x - z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ x - y + z - w &= -1 \end{aligned} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -a \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \therefore |A| = -5a - 6$$

Cramer: $a = \frac{|A_{a\leftrightarrow c}|}{|A|}$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ |A_{a\leftrightarrow c}| &= 7 \\ A_a &= \frac{7}{-5a-6} \\ a &\neq -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

6. Considere el sistema $\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. Encuentre la matriz inversa de la matriz de coeficientes del sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -2 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Utilizando la matriz inversa del inciso anterior, resuelva el sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -2 & 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -9 \end{cases}$$

3. Revise qué significa un sistema de ecuaciones planteado en forma vectorial. > Es una representación alternativa a un sistema de ecuaciones que utiliza vectores para expresar las ecuaciones.