Programación Lineal

1.- Una empresa manufactura dos tipos de circuitos impresos. La empresa cuenta con un stock de 200 resistencias, 120 transistores y 150 capacitores para producirlos. La siguiente tabla indica la cantidad necesaria para fabricar una unidad del circuito impreso tipo A y una unidad del circuito impreso tipo B

	Resistencias	Capacitores	Transistores
Tipo A	20	10	10
Tipo B	10	30	20

Si el circuito tipo A lo vende en 5 USD y el tipo B en 12 USD, ¿cuántos circuitos impresos de cada tipo debe fabricar para obtener las máxima utilidad?

2.- Una compañía fabrica dos productos, *A* y *B*. El volumen de ventas de *A* es por lo menos 80% de las ventas totales de *A* y *B*. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 100 unidades de *A* por día. Ambos productos utilizan una materia prima, cuya disponibilidad diaria máxima es de 240 kg. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 kg por unidad de *A* y de 4 kg por unidad de *B*. Las utilidades de *A* y *B* son de $20 y $50, respectivamente. Determine la combinación óptima de productos para la compañía.

3.- Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones consecutivas produce dos modelos de radio: HiFi-1 y HiFi-2. La siguiente tabla muestra los tiempos de ensamble de las tres estaciones de trabajo.

	Minutos por unidad	
Estación de trabajo	*HiFi-1*	*HiFi-2*
1	6	4
2	5	5
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por cada estación por día. Determine la combinación de productos óptima que minimizará el tiempo ocioso (o no utilizado) en las tres estaciones de trabajo.

4.- Una compañía está planeando fabricar un producto para marzo, abril, mayo y junio del próximo año. Las cantidades demandadas son 520, 720, 520 y 620 unidades, respectivamente. La compañía tiene una fuerza de trabajo permanente de 10 empleados pero puede satisfacer las necesidades producción fluctuantes contratando y despidiendo trabajadores temporales. Los costos adicionales de contratar y despedir un trabajador temporal en cualquier mes son de $200 y $400, respectivamente. Un trabajador de planta produce 12 unidades por mes; y uno temporal, que no tiene la misma experiencia, produce 10. La compañía puede producir más de lo necesario en cualquier mes y guardar el excedente para el mes subsiguiente a un costo de retención de $50 por unidad por mes. Desarrolle una política óptima de contratación y despido durante el horizonte de planificación de 4 meses.

Subespacios Vectoriales

1.- Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales:

a) $V = M_{22}; H = \left\{A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\right\}$

b) $V = M_{22}; H = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

c) $V = P_4;\ H = \{p \in P_4 : p(0) = 0\}$

d) $V = R^3;\ H = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2\right\}$

e) $V = R^4;\ H = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ vt \end{pmatrix},\ x^2 + y^2 + z^2 - (vt)^2 = 1\right\}$

Combinación Lineal

1.- Dados los vectores $u = (2,1,4)$ $v = (1,-1,3)$ y $w = (3,2,5)$. Exprese los siguientes vectores como combinaciones lineales de u, v y w.

a) $(5,9,5)$ b) $(2,0,6)$ c) $(2,2,3)$ d) $(-1,3,\frac{1}{2})$

2.- Si $p_1 = 2 + x + 4x^2$, $p_2 = 1 - x + 3x^2$ y $p_3 = 3 + 2x + 5x^2$. Exprese los siguientes polinomios como una combinación de p_1, p_2 y p_3.

a) $9x + 5 - 5x^2$ b) $2 + 6x^2$ c) $3 - 2^{-1}x^2 + x$ d) $7x - 2x^2 + 1$

3.- Escriba a B como una combinación lineal del conjunto de vectores A

(a) $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

(b) $B = -x^2 + 2x$, $A = \{x^2 - 1,\ x^2 + 1, x^2 - x - 1, x^2 + 5x\}$

Vectores Linealmente Independientes y Dependiente

1.- Determine los valores de k para que el conjunto $H = \left\{\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2k \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ sea linealmente independiente.

2.- Sea V el espacio vectorial de todas las funciones con valor real definidas sobre la recta real completa. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en V son linealmente dependientes?

a) $\{2, 4sen^2 x, cos^2 x\}$ b) $\{x, \cos x\}$ c) $\{1, sen\ x, sen\ 2x\}$ d) $\{\cos 2x, sen^2 x, cos^2 x\}$

3.- Para que valores de k, las siguientes matrices son linealmente independientes en M_{22}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4.- Construya un conjunto de vectores $H = \{v_1, v_2, v_3\} \in R^3$ tal que sean linealmente independientes y $v_1^T v_2 = v_2^T v_3 = 0$.

5.- Sea $H = \{v_1, v_2, v_3\} \in R^3$. Demuestre que si $\det(H) = \det[v_1, v_2, v_3] = 0$, entonces H es linealmente independiente.

Bases y cambios de base

1.- Determine una base para el espacio de funciones que satisface

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

2.- Considera las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{u'_1, u'_2\}$ para $\mathbb{R}^2$, donde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, u'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz de transición de B' hacia B
b) Calcula la matriz de transición de B hacia B'
c) Dado el vector $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, calcula w_B y $w_{B'}$

3.- Sean los polinomios $p_1 = x^2 + x - 2$ y $p_2 = 3x^2 - x$, realiza los siguientes ejercicios:
a) $p_3 = 2p_1 - p_2$.
c) El conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$, ¿forman una base? Justifica.

4.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

$$\begin{aligned} -x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Determina la base (si es que existe) del conjunto solución del sistema.

5.- Dados los vectores y bases siguientes:

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, Z = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Calcula $(v)_W$
b) Calcula la matriz de transición de W hacia Z
c) Calcula $(v)_Z$ utilizando la matriz de transición del inciso anterior.

6.- Dado el siguiente conjunto de vectores: $\left(\frac{1}{2}, -7,\ 0\right), \left(-\frac{1}{3},\ 0,\ 2\right), \left(0, -7,\ \frac{1}{5}\right)$
a) Determine si el conjunto genera a $\mathbb{R}^3$
b) Genere un espacio vectorial de 3 elementos usando el conjunto de vectores.

c) Con los vectores, construya un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y determine la base de las soluciones del sistema.

7.- Sea $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $(v)_w = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ determine la base W, sabiendo que $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ -3x \end{pmatrix} \right\}$

8.- Sea $(v)_S = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $(v)_W = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, sabiendo que $W = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ y $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, determine: (a) W, (b) Matriz de transición de la base S hacia W, (c) Matriz de transición de la base W hacia S.

9.- Calcular las coordenadas de $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en téminos de la base $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Calcule $||v||$ y $||v_H||$. ¿Porqué $||v|| \neq ||v_H||$?

Rango y nulidad de una matriz

1.- Determine el valor de k para que la matriz M tenga $\nu = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3k & 1 \\ 5 & -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

2.- Encuentre todos los valores posibles del rango de la matriz A, $\rho(A)$, si k es una variable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -2 & 4k & 2 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Calcular el rango y nulidad asociado al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 2x + 4y - 2z + 2w = 8 \\ -3x + 2y + 5z - 2w = 5 \\ x + 10y + y + 2w = 21 \end{gathered}$$

Explique el significado del rango con las variables independientes del sistema