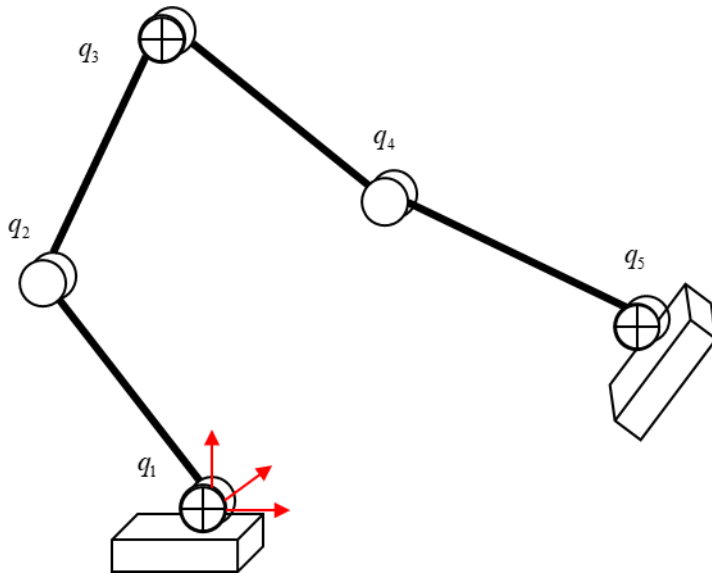


人形机器人运动学分析

一、下肢运动分析

1. 机器人运动学正解：



$$x_1 = 0, y_1 = 0$$

$$x_2 = x_1 + l \cos q_1, y_2 = y_1 + l \sin q_1$$

...

$$x_5 = x_4 + l \cos q_4, y_5 = y_4 + l \sin q_4$$

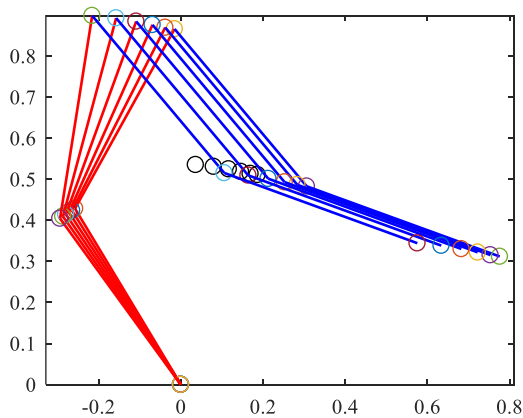
机器人重心位置：

$$x_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 x_1 + m_2 x_3 + m_3 x_5),$$

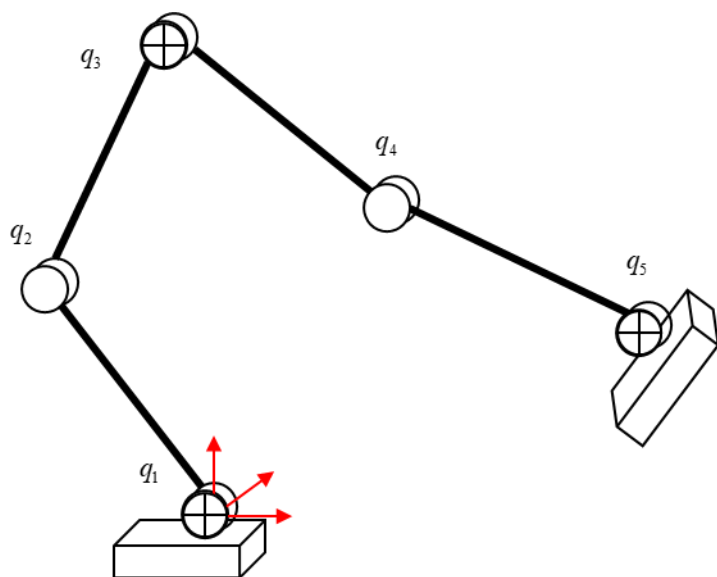
$$y_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 y_1 + m_2 y_3 + m_3 y_5)$$

机器人平衡位置判断：

$$x_m \in [-\Delta x, +\Delta x]$$



2. 机器人运动学逆解:



基于静平衡的步态分析: 原则, 在每一个位置, 机器人的重心都是过脚板的, 从而保证机器人的平衡。

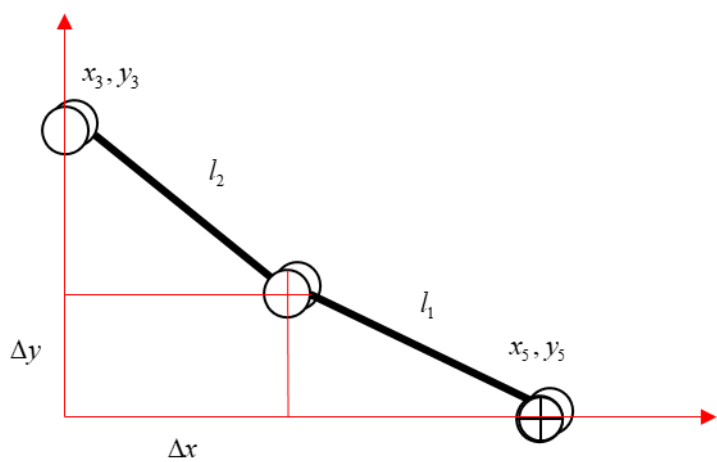
$$(m_1 + m_2 + m_3)x_m = m_2x_3 + m_3x_5(t),$$

$$x_m \in [-\Delta x, +\Delta x]$$

可解得:

$$x_m = 0 \in [-\Delta x, +\Delta x],$$

$$x_3 = -\frac{1}{m_2} [m_3x_5(t) - (m_1 + m_2 + m_3)x_m],$$



$$(x_5 - x_3 - \Delta x)^2 + \Delta y^2 = l_1^2,$$

$$(y_5 - y_3 - \Delta y)^2 + \Delta x^2 = l_2^2$$

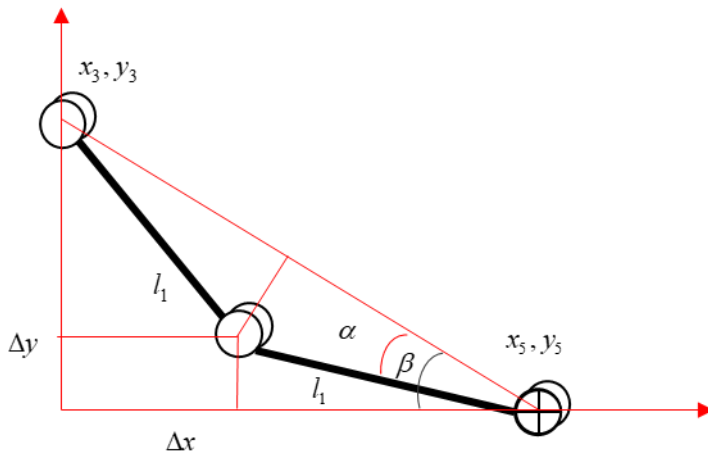
给定 y_3 ，即可求解出 Dx 与 Dy 的数值。由此可见，为了保证机器人重心平衡， x_3 是根据 x_5 求解出来的。而 y_3 有一定的变化范围，为了简单起见，我们假设 y_3 与上一时刻 y_3 不变，但当三角关系不满足时， y_3 进行调整，保证三角关系。

简单起见，也可以将判断条件写为，

$$(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 \leq l_1^2 + l_2^2,$$

当上式满足条件时，则 y_3 保留原来数值，否则， y_3 向 y_5 逼近。

为了进一步简化计算，我们可以假设 $l_1 = l_2$ ，此时有，

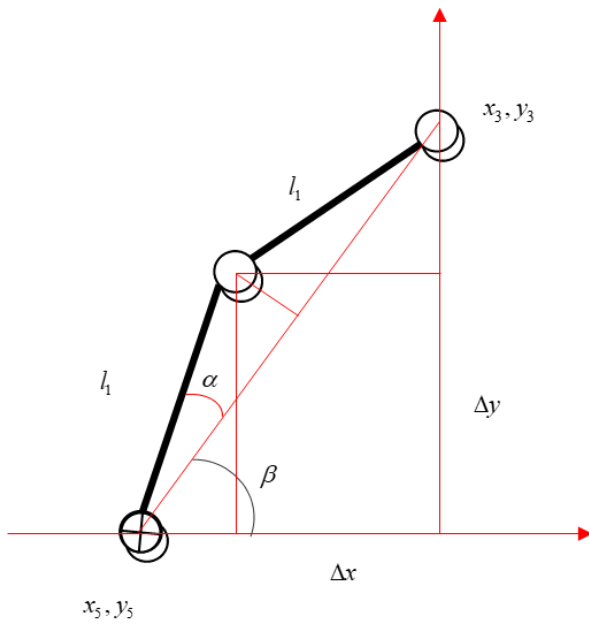


当 $x_5 > x_3$ 时，有

$$\cos \alpha = \frac{0.5 \sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}{l}$$

$$\cos \beta = \frac{x_5 - x_3}{\sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}$$

$$\Delta y = l \sin(\beta - \alpha), \Delta x = x_5 - x_3 - l \cos(\beta - \alpha)$$

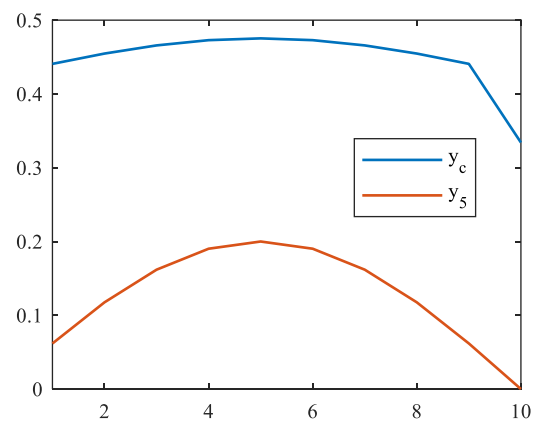
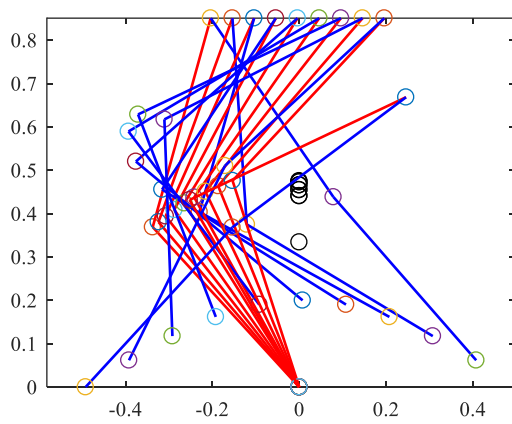


当 $x_5 < x_3$ 时，有

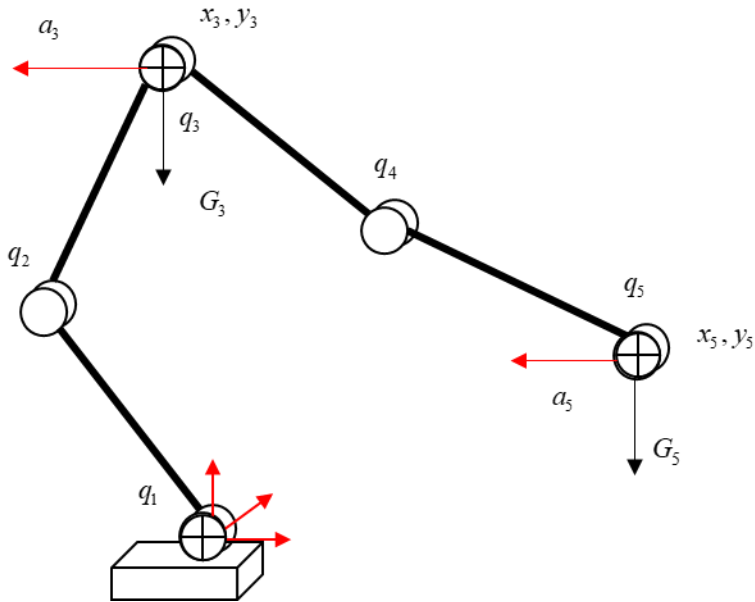
$$\cos \alpha = \frac{0.5 \sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}{l}$$

$$\cos \beta = \frac{x_3 - x_5}{\sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}$$

$$\Delta y = l \sin(\beta + \alpha), \Delta x = x_3 - x_5 - l \cos(\beta + \alpha)$$



关节力矩分析：



静平衡力矩：

$$\tau_{1x} = (x_3 - x_1)m_2g + (x_5 - x_1)m_3g$$

$$\tau_{2x} = (x_3 - x_2)m_2g + (x_5 - x_2)m_3g$$

$$\tau_{3x} = (x_5 - x_3)m_3g$$

$$\tau_{4x} = (x_5 - x_4)m_3g$$

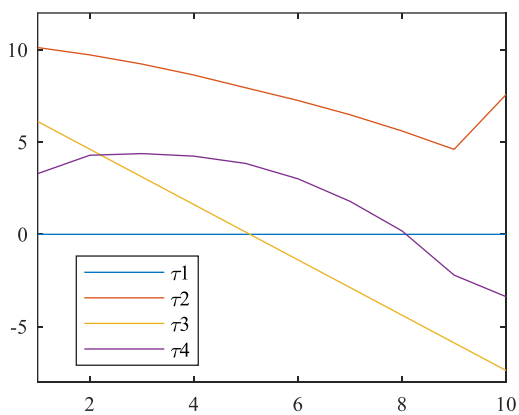
加速度力矩：

$$\tau_{1y} = (y_3 - y_1)m_2a_3 + (y_5 - y_1)m_3a_5$$

$$\tau_{2y} = (y_3 - y_2)m_2a_3 + (y_5 - y_2)m_3a_5$$

$$\tau_{3y} = (y_5 - y_3)m_3a_5$$

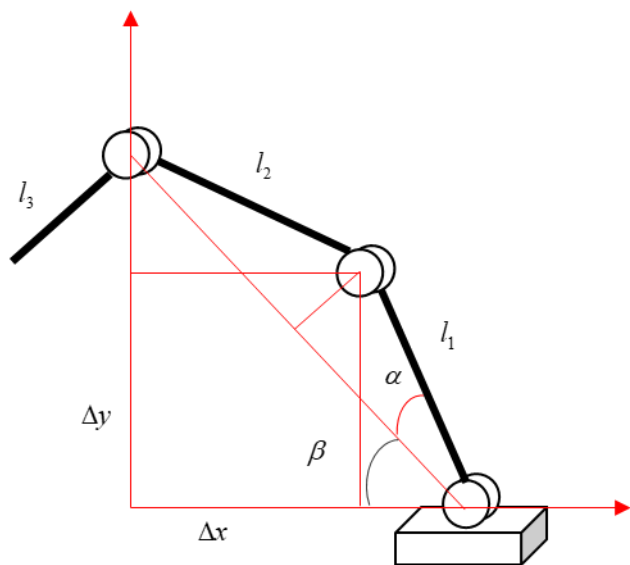
$$\tau_{4y} = (y_5 - y_4)m_3a_5$$



在静平衡条件下，脚踝关节不受力矩，力矩主要有膝关节提供。

二、上肢运动分析

运动学逆解：



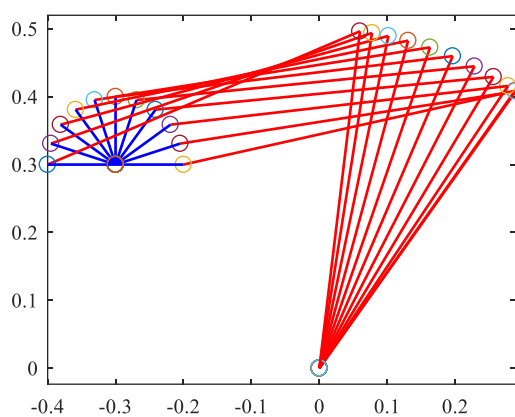
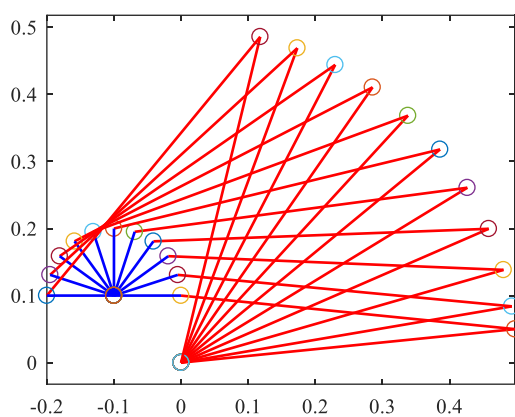
$$\cos \alpha = \frac{0.5\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}{l}$$

$$\cos \beta = \frac{-x_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}$$

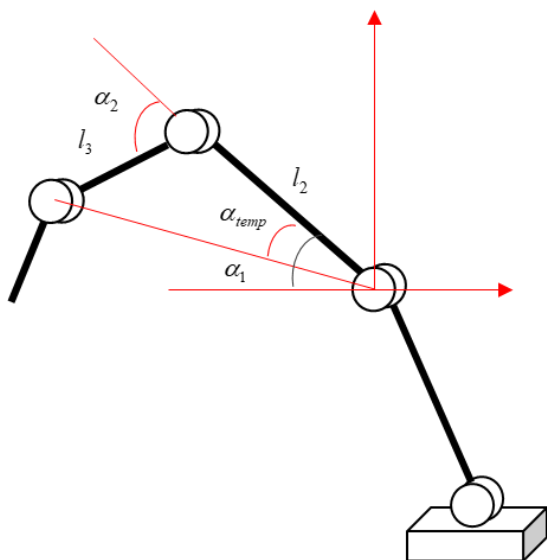
$$y_2 = l \sin(\pi - \beta - \alpha), x_2 = l \cos(\pi - \beta - \alpha)$$

精细运动：当机器人末端围绕一个固定的调整姿态。

在精细运动的模式下，由于满自由度只有唯一运动解，因此，大臂不得不随着姿态的改变而摆动。从而造成操作存在较大能量消耗与运动误差。



当存在冗余自由度时，



以大臂运动幅度最小为原则，先动前三轴。

$$p_x = x_3, p_y = y_3$$

$$-2l_2l_3 \cos(\pi - \alpha_2) = p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2$$

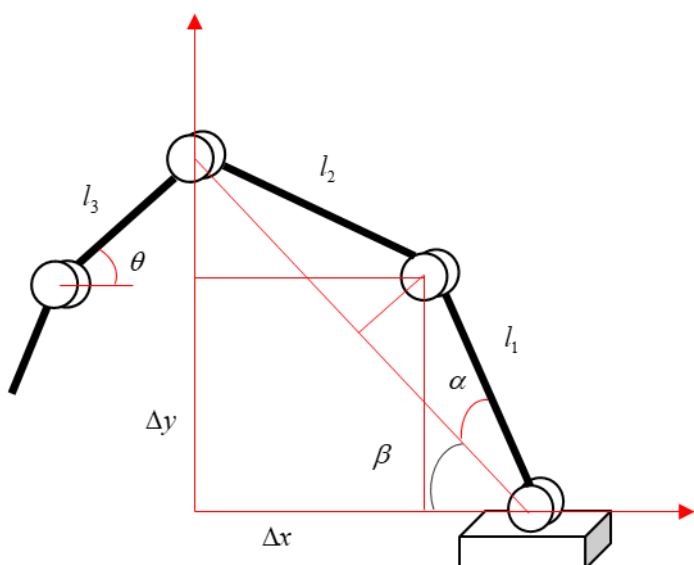
$$\alpha_2 = \pm \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)$$

$$\alpha_{temp} = \arccos\left(\frac{l_3^2 - l_2^2 - (p_x^2 + p_y^2)}{-2l_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha_1 = \text{atan2}(p_y, -p_x) + \alpha_{temp}$$

$$y_3 = l_2 \sin(\pi - \alpha_1), x_3 = l_2 \cos(\pi - \alpha_1)$$

当前三轴的运动不满足工作空间需求时，则运动第一轴，此时，第三轴不动。X3,y3 则根据与第四轴的相对位置关系不变进行计算，

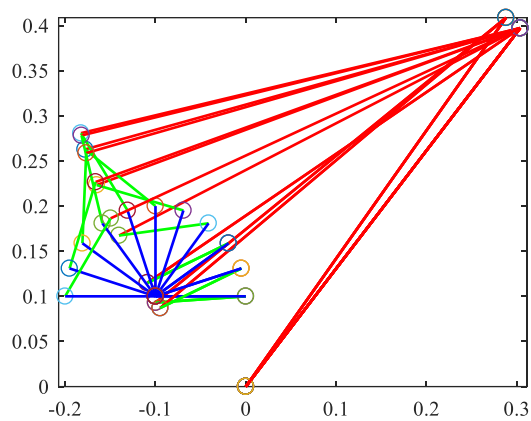
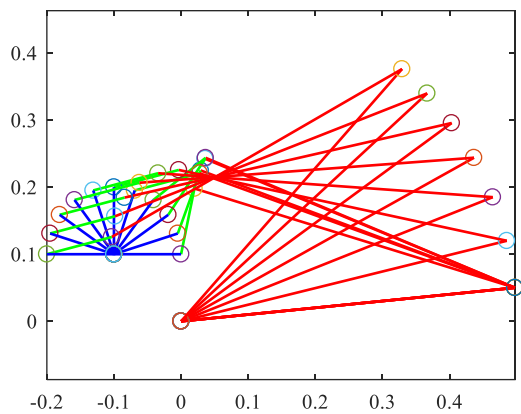


$$x_3 = x_4 + l_3 \cos \theta, y_3 = y_4 + l_3 \sin \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{0.5\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}{l}$$

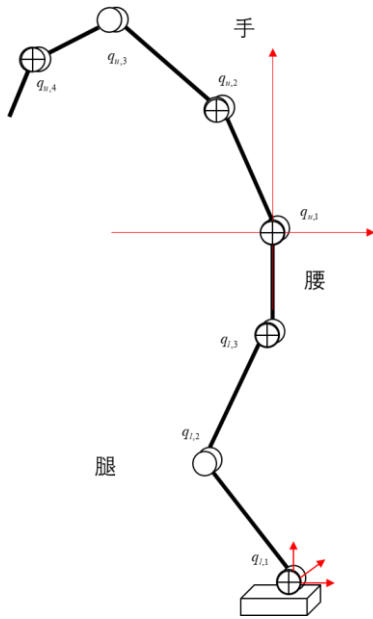
$$\cos \beta = \frac{-x_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}$$

$$y_2 = l \sin(\pi - \beta - \alpha), x_2 = l \cos(\pi - \beta - \alpha)$$



结论：通过增加冗余自由度（绿色的杆），在精细运动中，可以减小大臂的摆动。对于狭窄空间的操作更有益。

三、人形机器人运动分析



人形机器人操作时需要同时考虑操作精度与平衡性的问题。区别于传统的 AGV 移动机器人，重心能够较好的分布在移动平台上。人形机器人的承力点在脚板的范围。

运动学正解：

$$\begin{aligned}
 x_{l,1} &= 0, y_{l,1} = 0 \\
 x_{l,2} &= x_{l,1} + l_{l,1} \cos q_{l,1}, y_{l,2} = y_{l,1} + l_{l,1} \sin q_{l,1} \\
 x_{l,3} &= x_{l,2} + l_{l,2} \cos q_{l,2}, y_{l,3} = y_{l,2} + l_{l,2} \sin q_{l,2} \\
 x_{u,1} &= x_{l,3} + l_{l,3} \cos q_{l,3}, y_{u,1} = y_{l,3} + l_{l,3} \sin q_{l,3} \\
 x_{u,2} &= x_{u,1} + l_{u,1} \cos q_{u,1}, y_{u,2} = y_{u,1} + l_{u,1} \sin q_{u,1} \\
 &\dots \\
 x_{u,4} &= x_{u,3} + l_{u,3} \cos q_{u,3}, y_{u,4} = y_{u,1} + l_{u,3} \sin q_{u,3}
 \end{aligned}$$

运动学逆解：

根据末端从前往后计算，在手臂阶段，按照精细操作原则，其运动学逆解为，

$$\begin{aligned}
 p_x &= x_3, p_y = y_3 \\
 -2l_2l_3 \cos(\pi - \alpha_2) &= p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2 \\
 \alpha_2 &= \pm \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right) \\
 \alpha_{temp} &= \arccos\left(\frac{l_3^2 - l_2^2 - (p_x^2 + p_y^2)}{-2l_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \\
 \alpha_1 &= \text{atan2}(p_y, -p_x) + \alpha_{temp} \\
 y_3 &= l_2 \sin(\pi - \alpha_1), x_3 = l_2 \cos(\pi - \alpha_1)
 \end{aligned}$$

当前三轴的运动不满足工作空间需求时，则运动第一轴，此时，第三轴不动。

$$x_3 = x_4 + l_3 \cos \theta, y_3 = y_4 + l_3 \sin \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{0.5\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}{l}$$

$$\cos \beta = \frac{-x_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}$$

$$y_2 = l \sin(\pi - \beta - \alpha), x_2 = l \cos(\pi - \beta - \alpha)$$

则腿部的运动要求为了保持平衡，需要满足平衡条件：

$$x_m = \frac{1}{m_{l,1} + m_{l,3} + m_{u,1} + m_{u,2} + m_{u,4}} (m_{l,1}x_{l,1} + m_{l,3}x_{l,3} + m_{u,1}x_{u,1} + m_{u,2}x_{u,2} + m_{u,4}x_{u,4}),$$

$$x_m = 0$$

由此可见，为了保证躯体平衡，同时，上半身由于操作需要也不能动，因此，只能同步调节膝关节与髋关节，保持重心的平衡。则有，

$$x_{l,3} = -\frac{1}{m_{l,3}} (m_{u,1}x_{u,1} + m_{u,2}x_{u,2} + m_{u,4}x_{u,4})$$

由于杆长的约束，可以直接求出 $y_{l,3}$,

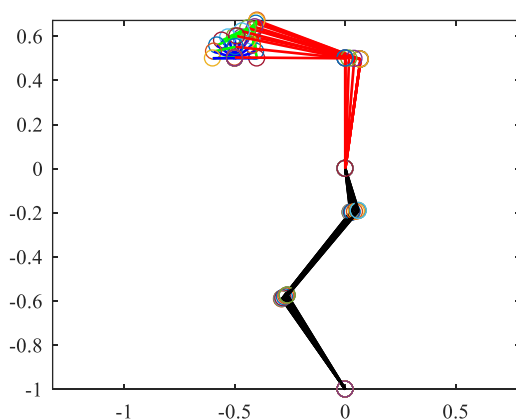
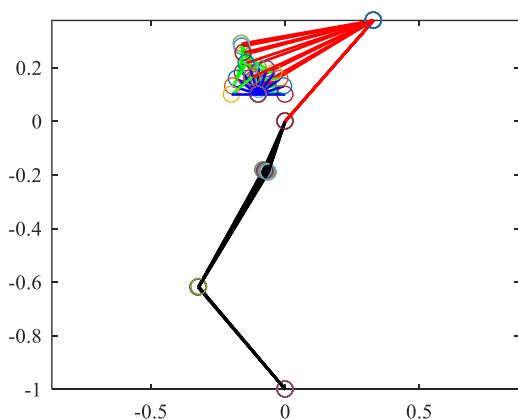
$$y_{l,3} = -\sqrt{l_3^2 - x_{l,3}^2}$$

进一步的，求解出 $x_{u,2}, y_{u,2}$

$$\cos \alpha = \frac{0.5\sqrt{(x_{u,3} - x_{u,1})^2 + (y_{u,3} - y_{u,1})^2}}{l}$$

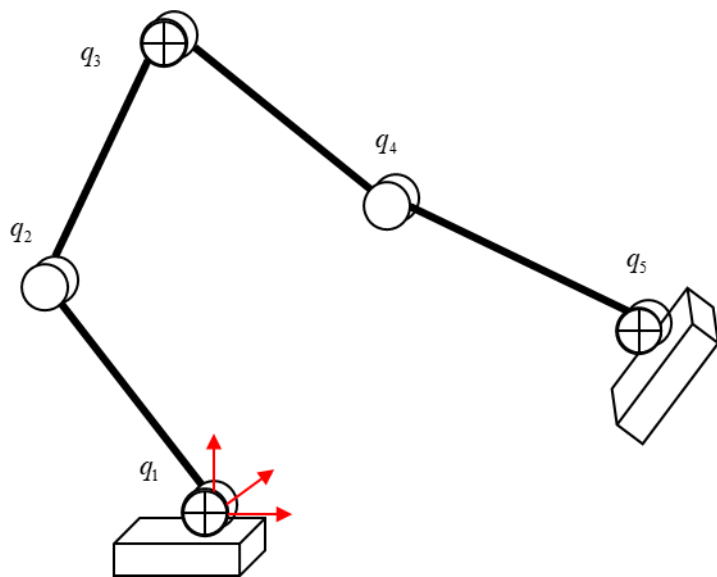
$$\cos \beta = \frac{x_{u,1} - x_{u,3}}{\sqrt{(x_{u,3} - x_{u,1})^2 + (y_{u,3} - y_{u,1})^2}}$$

$$\Delta y = l \sin(\beta + \alpha), \Delta x = x_3 - x_5 - l \cos(\beta + \alpha)$$



由此可见，在人形机器人手臂运动时，臀部也需要做相应的调整，以此保证静平衡，增加了控制的困难。

四、人形机器人下肢控制



$$x_1 = 0, y_1 = 0$$

$$x_2 = x_1 + l_1 \cos q_1, y_2 = y_1 + l_1 \sin q_1$$

$$x_3 = x_2 + l_2 \cos q_2, y_3 = y_2 + l_2 \sin q_2$$

...

$$x_5 = x_4 + l_4 \cos q_4, y_5 = y_4 + l_4 \sin q_4$$

则机器人的雅克比矩阵为,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 - l_3 \sin q_3 \dot{q}_3 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 - l_3 \sin q_3 \dot{q}_3 - l_4 \sin q_4 \dot{q}_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + l_3 \cos q_3 \dot{q}_3 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + l_3 \cos q_3 \dot{q}_3 + l_4 \cos q_4 \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_y \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{x} = [x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$$

$$\mathbf{y} = [y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5]^T$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T$$

为了让机器人能行走，其 x_5, y_5 需要跟随目标轨迹

$$x_{r,5} = g_x(t), y_{r,5} = g_y(t)$$

同时，机器人行走过程中，重心要求平衡，有：

$$x_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 x_1 + m_2 x_3 + m_3 x_5),$$

$$y_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 y_1 + m_2 y_3 + m_3 y_5)$$

当 x_m 在 0 位时,

$$x_{r,3}(t) = -\frac{1}{m_2} m_3 x_5(t),$$

则运动位置与目标位置的偏差为,

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix}$$

为了设计控制器, 我们先需要重构输入输出的雅克比矩阵,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 - l_3 \sin q_3 \dot{q}_3 - l_4 \sin q_4 \dot{q}_4 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + l_3 \cos q_3 \dot{q}_3 + l_4 \cos q_4 \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 & -l_3 \sin q_3 & -l_4 \sin q_4 \\ l_1 \cos q_1 & l_2 \cos q_2 & l_3 \cos q_3 & l_4 \cos q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{out} = \mathbf{J} \mathbf{q}$$

则控制器为,

$$\mathbf{q} = -\mathbf{J}^\dagger \mathbf{e}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix}$$

$()^\dagger$ 代表违逆。

稳定性证明:

设计李亚普洛夫函数为,

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

其导数为,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) - \dot{x}_{r,3}(t) \\ \dot{x}_5(t) - \dot{x}_{r,5}(t) \\ \dot{y}_5(t) - \dot{y}_{r,5}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) - \dot{x}_{r,3}(t) \\ \dot{x}_5(t) - \dot{x}_{r,5}(t) \\ \dot{y}_5(t) - \dot{y}_{r,5}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

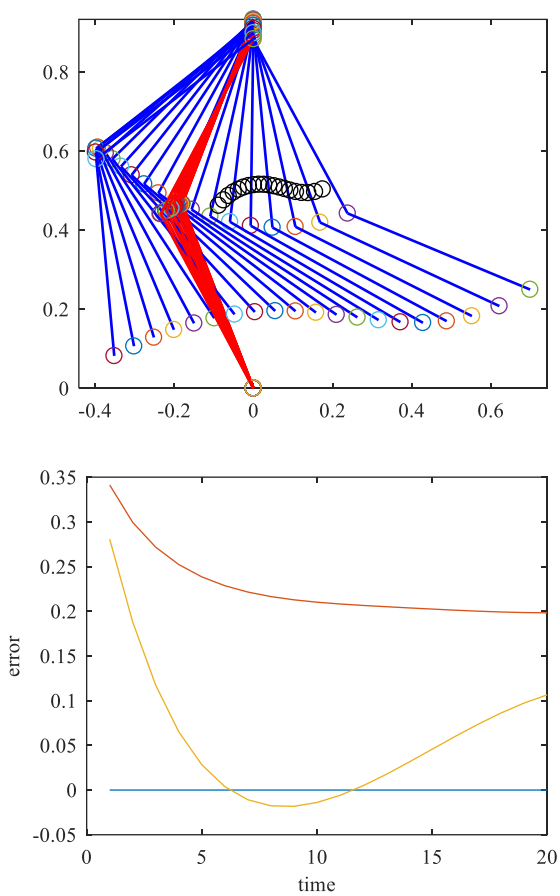
假设机器人的目标轨迹为准静态的,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{y}_5(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{y}_5(t) \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{J}\mathbf{q})^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{J}\mathbf{q}\end{aligned}$$

将控制输入带入

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= (-\mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger \mathbf{e})^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger \mathbf{e} \\ &= -\mathbf{e}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger)^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger \mathbf{e} \\ &= -2\mathbf{e}^T \mathbf{e} \leq 0\end{aligned}$$

根据李雅普诺夫定理，则 V 趋近于 0，则控制误差趋近于 0。代表重心将落于支撑脚中心，同时，脚步跟随步态轨迹。



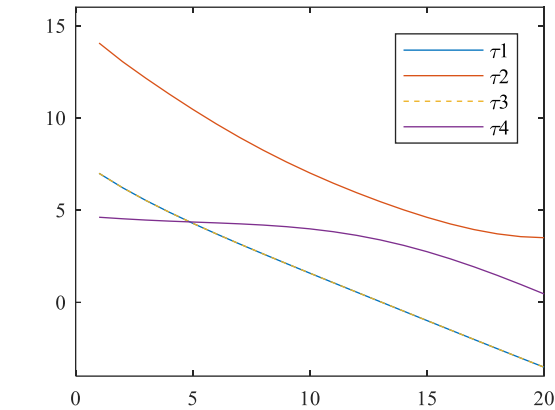
结论：采用控制的方法，可以不用求解逆解。其核心原因是，通过雅克比矩阵逼近，求解逆解（此方法即为牛顿欧拉法通过数值解求解逆解）。同时，通过控制的方法，相对于直接求解逆解，步态变化更加平滑，步态没有跳变的出现。但同样也存在问题，由于控制过程中存在误差，因此，重心不能实时落在支撑脚正上方，因此，脚腕需要提供力矩保持机器人不倾倒。根据静平衡，每个关节角提供的克服重力的力矩为，

$$\tau_{1x} = (x_3 - x_1)m_2g + (x_5 - x_1)m_3g$$

$$\tau_{2x} = (x_3 - x_2)m_2g + (x_5 - x_2)m_3g$$

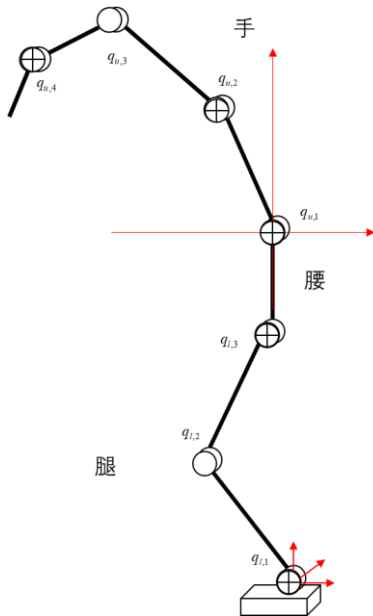
$$\tau_{3x} = (x_5 - x_3)m_3g$$

$$\tau_{4x} = (x_5 - x_4)m_3g$$



此时，踝关节与髋关节的力相同。

五、人形机器人运动控制



运动学正解：

$$\begin{aligned}
 x_{l,1} &= 0, y_{l,1} = 0 \\
 x_{l,2} &= x_{l,1} + l_{l,1} \sin q_{l,1}, y_{l,2} = y_{l,1} + l_{l,1} \cos q_{l,1} \\
 x_{l,3} &= x_{l,2} + l_{l,2} \sin q_{l,2}, y_{l,3} = y_{l,2} + l_{l,2} \cos q_{l,2} \\
 x_{u,1} &= x_{l,3} + l_{l,3} \sin q_{l,3}, y_{u,1} = y_{l,3} + l_{l,3} \cos q_{l,3} \\
 x_{u,2} &= x_{u,1} + l_{u,1} \sin q_{u,1}, y_{u,2} = y_{u,1} + l_{u,1} \cos q_{u,1} \\
 &\dots \\
 x_{u,5} &= x_{u,4} + l_{u,4} \sin q_{u,4}, y_{u,5} = y_{u,4} + l_{u,4} \cos q_{u,4}
 \end{aligned}$$

则机器人的雅克比矩阵为，

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{l,2} \\ \dot{x}_{l,3} \\ \dot{x}_{u,1} \\ \dot{x}_{u,2} \\ \dot{x}_{u,3} \\ \dot{x}_{u,4} \\ \dot{x}_{u,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} - l_{u,1} \sin q_{u,1} \dot{q}_{u,1} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} - l_{u,1} \sin q_{u,1} \dot{q}_{u,1} - l_{u,2} \sin q_{u,2} \dot{q}_{u,2} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} - l_{u,1} \sin q_{u,1} \dot{q}_{u,1} - l_{u,2} \sin q_{u,2} \dot{q}_{u,2} - l_{u,3} \sin q_{u,3} \dot{q}_{u,3} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} - l_{u,1} \sin q_{u,1} \dot{q}_{u,1} - l_{u,2} \sin q_{u,2} \dot{q}_{u,2} - l_{u,3} \sin q_{u,3} \dot{q}_{u,3} - l_{u,4} \sin q_{u,4} \dot{q}_{u,4} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{l,2} \\ \dot{y}_{l,3} \\ \dot{y}_{u,1} \\ \dot{y}_{u,2} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{l,1} \cos q_{l,1} \dot{q}_{l,1} \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} \dot{q}_{l,1} + l_{l,2} \cos q_{l,2} \dot{q}_{l,2} \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} \dot{q}_{l,1} + l_{l,2} \cos q_{l,2} \dot{q}_{l,2} + l_{l,3} \cos q_{l,3} \dot{q}_{l,3} \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} \dot{q}_{l,1} + l_{l,2} \cos q_{l,2} \dot{q}_{l,2} + l_{l,3} \cos q_{l,3} \dot{q}_{l,3} + l_{u,1} \cos q_{u,1} \dot{q}_{u,1} \\ \dots \end{bmatrix}$$

已知目标位置为 x_{u5}, y_{u5} 以及最后一个轴的姿态，则上肢第 4 轴 q_{u4} 的位置为，

$$x_{u,4} = x_{u,5} + l_{u,4} \cos \theta_5, y_{u,4} = y_{u,5} + l_{u,4} \sin \theta_5$$

根据机器人末端目标构造的目标函数为,

$$x_{r,u,5}(t) = g_{x,u,5}(t), y_{r,u,5}(t) = g_{y,u,5}(t), \theta_{r,5}(t) = g_{\theta,5}(t)$$

$$x_{r,u,4}(t) = x_{r,u,5} + l_{u,4} \cos \theta_{r,5}, y_{r,u,4}(t) = y_{r,u,5} + l_{u,4} \sin \theta_{r,5}$$

根据平衡条件有:

$$x_m = \frac{1}{m_{l,1} + m_{l,3} + m_{u,1} + m_{u,2} + m_{u,4}} (m_{l,1}x_{l,1} + m_{l,3}x_{l,3} + m_{u,1}x_{u,1} + m_{u,2}x_{u,2} + m_{u,4}x_{u,4}),$$

$$x_m = 0$$

上半身的运动由操作需求决定。重心调节主要依靠髋关节调节, 有,

$$x_{r,l,3}(t) = -\frac{1}{m_{l,3}} (m_{u,1}x_{u,1} + m_{u,2}x_{u,2} + m_{u,4}x_{u,4})$$

则运动位置与目标位置的偏差为,

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_{l,3}(t) - x_{r,l,3}(t) \\ x_{u,4}(t) - x_{r,u,4}(t) \\ y_{u,4}(t) - y_{r,u,4}(t) \\ x_{u,5}(t) - x_{r,u,5}(t) \\ y_{u,5}(t) - y_{r,u,5}(t) \end{bmatrix}$$

为了设计控制器, 我们先需要重构输入输出的雅克比矩阵,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{l,3} \\ \dot{x}_{u,4} \\ \dot{y}_{u,4} \\ \dot{x}_{u,5} \\ \dot{y}_{u,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} - l_{u,1} \sin q_{u,1} \dot{q}_{u,1} - l_{u,2} \sin q_{u,2} \dot{q}_{u,2} - l_{u,3} \sin q_{u,3} \dot{q}_{u,3} \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} \dot{q}_{l,1} + l_{l,2} \cos q_{l,2} \dot{q}_{l,2} + l_{l,3} \cos q_{l,3} \dot{q}_{l,3} + l_{u,1} \cos q_{u,1} \dot{q}_{u,1} + l_{u,2} \cos q_{u,2} \dot{q}_{u,2} + l_{u,3} \cos q_{u,3} \dot{q}_{u,3} \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} \dot{q}_{l,1} - l_{l,2} \sin q_{l,2} \dot{q}_{l,2} - l_{l,3} \sin q_{l,3} \dot{q}_{l,3} - l_{u,1} \sin q_{u,1} \dot{q}_{u,1} - l_{u,2} \sin q_{u,2} \dot{q}_{u,2} - l_{u,3} \sin q_{u,3} \dot{q}_{u,3} - l_{u,4} \sin q_{u,4} \dot{q}_{u,4} \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} \dot{q}_{l,1} + l_{l,2} \cos q_{l,2} \dot{q}_{l,2} + l_{l,3} \cos q_{l,3} \dot{q}_{l,3} + l_{u,1} \cos q_{u,1} \dot{q}_{u,1} + l_{u,2} \cos q_{u,2} \dot{q}_{u,2} + l_{u,3} \cos q_{u,3} \dot{q}_{u,3} + l_{u,4} \cos q_{u,4} \dot{q}_{u,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{l,3} \\ \dot{x}_{u,4} \\ \dot{y}_{u,4} \\ \dot{x}_{u,5} \\ \dot{y}_{u,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{l,1} \sin q_{l,1} & -l_{l,2} \sin q_{l,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} & -l_{l,2} \sin q_{l,2} & -l_{l,3} \sin q_{l,3} & -l_{u,1} \sin q_{u,1} & -l_{u,2} \sin q_{u,2} & -l_{u,3} \sin q_{u,3} & 0 \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} & l_{l,2} \cos q_{l,2} & l_{l,3} \cos q_{l,3} & l_{u,1} \cos q_{u,1} & l_{u,2} \cos q_{u,2} & l_{u,3} \cos q_{u,3} & 0 \\ -l_{l,1} \sin q_{l,1} & -l_{l,2} \sin q_{l,2} & -l_{l,3} \sin q_{l,3} & -l_{u,1} \sin q_{u,1} & -l_{u,2} \sin q_{u,2} & -l_{u,3} \sin q_{u,3} & -l_{u,4} \sin q_{u,4} \\ l_{l,1} \cos q_{l,1} & l_{l,2} \cos q_{l,2} & l_{l,3} \cos q_{l,3} & l_{u,1} \cos q_{u,1} & l_{u,2} \cos q_{u,2} & l_{u,3} \cos q_{u,3} & l_{u,4} \cos q_{u,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{l,1} \\ \dot{q}_{l,2} \\ \dot{q}_{l,3} \\ \dot{q}_{u,1} \\ \dot{q}_{u,2} \\ \dot{q}_{u,3} \\ \dot{q}_{u,4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{out} = \mathbf{J}\mathbf{q}$$

则控制器为,

$$\mathbf{q} = -\mathbf{J}^\dagger \mathbf{e}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_{l,3}(t) - x_{r,l,3}(t) \\ x_{u,4}(t) - x_{r,u,4}(t) \\ y_{u,4}(t) - y_{r,u,4}(t) \\ x_{u,5}(t) - x_{r,u,5}(t) \\ y_{u,5}(t) - y_{r,u,5}(t) \end{bmatrix}$$

$(\cdot)^\dagger$ 代表伪逆。

稳定性证明：

设计李亚普洛夫函数为，

$$V = e^T e$$

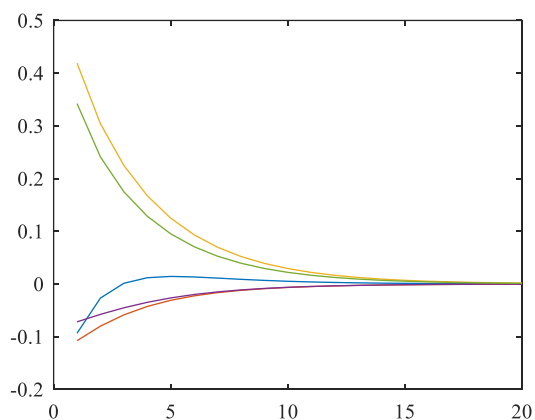
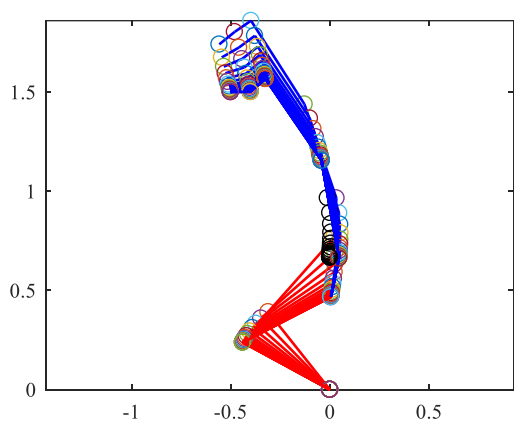
其导数为，

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{e}^T e + e^T \dot{e} \\ &= (Jq)^T e + e^T Jq\end{aligned}$$

将控制输入带入

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (-JJ^\dagger e)^T e - e^T JJ^\dagger e \\ &= -e^T (JJ^\dagger)^T e - e^T JJ^\dagger e \\ &= -2e^T e \leq 0\end{aligned}$$

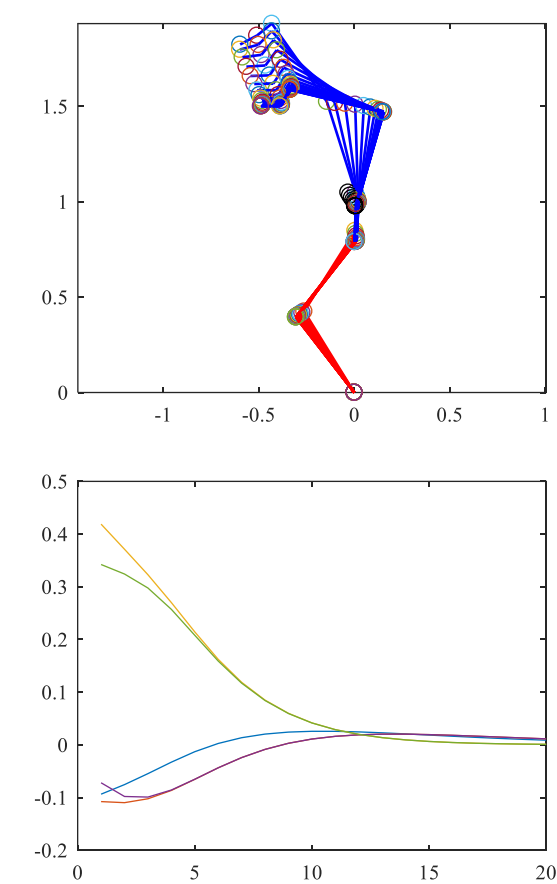
根据李雅普诺夫定理，则 V 趋近于 0，则控制误差趋近于 0。代表重心将落于支撑脚中心，同时，末端跟随指定轨迹。



此时，为了让末端到达位置，机器人的腿部也进行了较大运动调节。这跟实际上人操作的习惯不同。为此，我们修改控制权重，

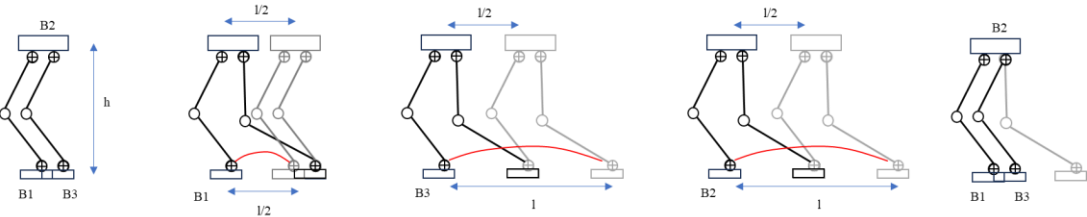
$$\mathbf{q} = -\mathbf{W}\mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{e}, \mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} w_{l,1} & w_{l,2} & w_{l,3} & w_{u,1} & w_{u,2} & w_{u,3} & w_{u,4} \end{bmatrix} \right\}$$

为了让手臂运动，而腿不动，wu>wl。此时，可以实现以手臂运动为主，而腿部运动为辅助。

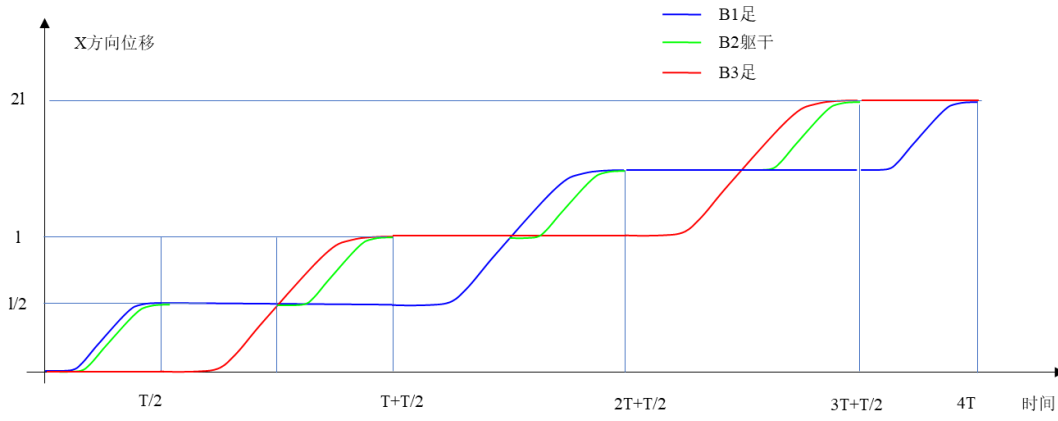


六、人形机器人步态分析

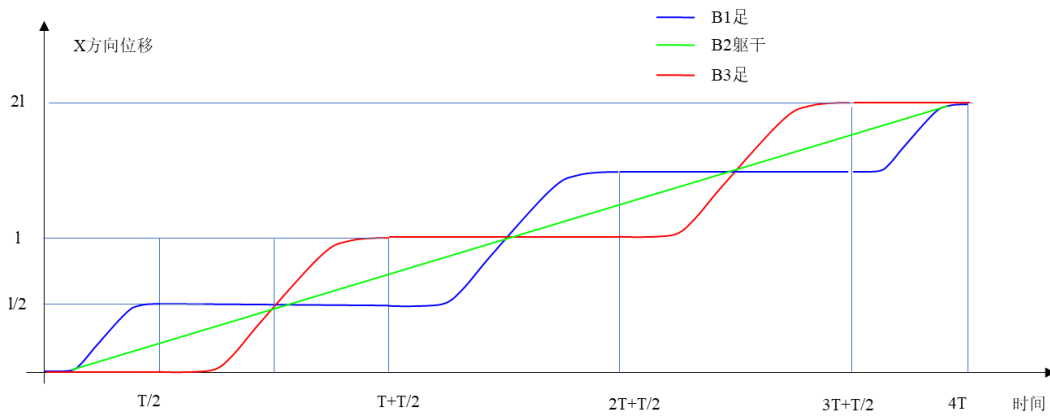
机器人步态对平稳运动非常重要。通过分析 ASIMO 的视频，可以得到 ASIMO 机器人运动的基本步态。一般而言，机器人运动都是从静止，运动，静止的流程。因此，下图给出了 ASIMO 运动的流程，



步骤可以表述为机器人静止；机器人迈出左脚半步，同时躯体向前半步；机器人迈出右脚一步，躯体向前移动半步；机器人迈出左脚一步，躯体向前移动半步；之后循环往复；最后，机器人右脚迈出半步，躯体不同，机器人停止。在 x 方向的双足与躯干的运动曲线如下。



从上图可以看出，双足交替运动，换支撑脚时，机器人的整体都是静止的。因此，从外部观察，其实机器人运动是一顿一顿的。因此，更加理想的步态是机器人的躯体保持匀速运动。



此时，躯体的运动一直位于两足之间，且整个运动过程中保持匀速运动。

为了描述双足机器人步态，我们设定足部运动函数与腰部运动函数。其中，腰部运动函数为，

$$x_3 = -L_{step}j + \frac{1}{2}L_{step} \cos\left(\frac{t}{T_{loop}\pi}\right)$$

$$y_3 = h$$

足部的运动函数为，

$$x_1 = \begin{cases} -L_{step}j + L_{step} \cos\left(\frac{t}{T_{loop}\pi}\right), & \text{if } j \text{ is even} \\ x_1, & \text{if } j \text{ is odd} \end{cases}$$

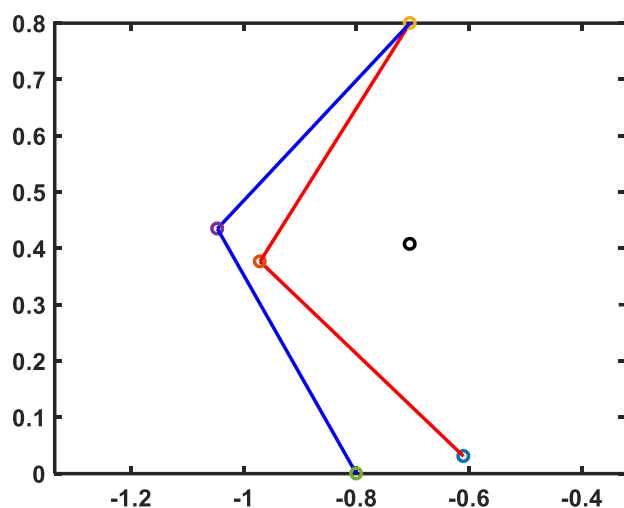
$$y_1 = \begin{cases} h \sin\left(\frac{t}{T_{loop}\pi}\right), & \text{if } j \text{ is even} \\ y_1, & \text{if } j \text{ is odd} \end{cases}$$

相对应的，另外一只足的运动函数为，

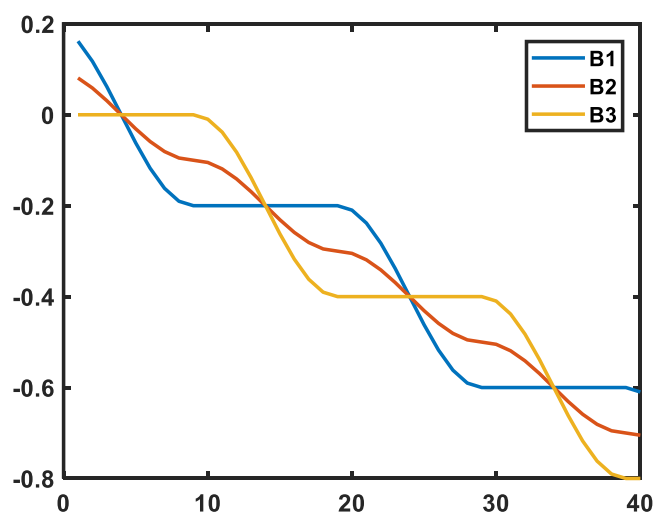
$$x_5 = \begin{cases} -L_{step}j + L_{step} \cos\left(\frac{t}{T_{loop}\pi}\right), & \text{if } j \text{ is odd} \\ x_5, & \text{if } j \text{ is even} \end{cases}$$

$$y_5 = \begin{cases} h \sin\left(\frac{t}{T_{loop}\pi}\right), & \text{if } j \text{ is odd} \\ y_5, & \text{if } j \text{ is even} \end{cases}$$

仿真结果如下图所示



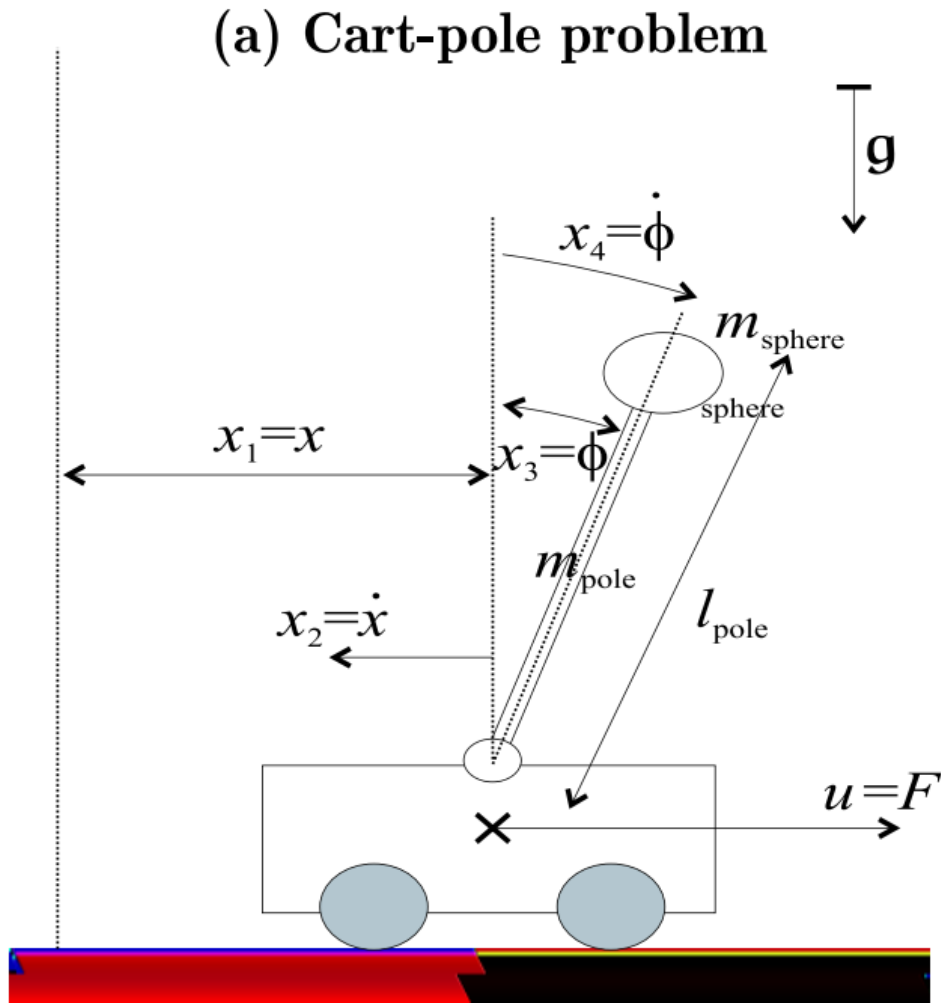
Matlab 步态仿真



步态 x 方向变化。

七、倒立摆稳定性分析

人形机器人稳定控制的原理与倒立摆控制类似。为此，首先分析倒立摆的稳定控制原理。



倒立摆的模型如上图所示，通过线性化，可以得到其状态方程为，

$$x_{t+1} = Ax_t + bu_t$$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & \nu\tau & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ 0 \\ \nu\tau/g \end{bmatrix}$$

其控制器的真值为， $K \approx [5.71, 11.3, -82.1, -21.6]^T$ ，

则控制器可以由强化学习进行学习获得。其表达式为，

$$u = KX$$

$$Q = \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}$$

通过 Actor-critic 学习，可以得到控制器 K。然而，此时机器人的状态需要已知，即小车的位置与速度，倒立摆的角度与角速度都要一致。然而，当我们限于硬件系统，小车的位置与速度未知时，传统的状态控制则会失效。因此，我们会利用历史数据进行状态的扩充。

举例：原系统为

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

当我们只能测量位置时，系统输出为，

$$y_k = x_k$$

通过对位移求差我们有，

$$y_k - y_{k-1} = \tau \dot{x}_k$$

则原系统可以变化为，

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A_{22} & 1 + \tau A_{21} + A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

因此，通过对变化后的系统进行强化学习即可。

同理，对于倒立摆系统而言，我们如果只关心倒立摆的角度，我们发现倒立摆与小车的运动其实是解耦的，也就是倒立摆是否倾倒，与小车状态无关。则倒立摆公式可以简化为，

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t+1} \\ \dot{\alpha}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ v\tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \dot{\alpha}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v\tau / g \end{bmatrix} u_t$$

由此，可以获得倒立摆的运动控制。

八、人形机器人稳定性分析

当系统变为双足系统后，可以将双足也转化为倒立摆。

首先，利用双杆动力学模型：

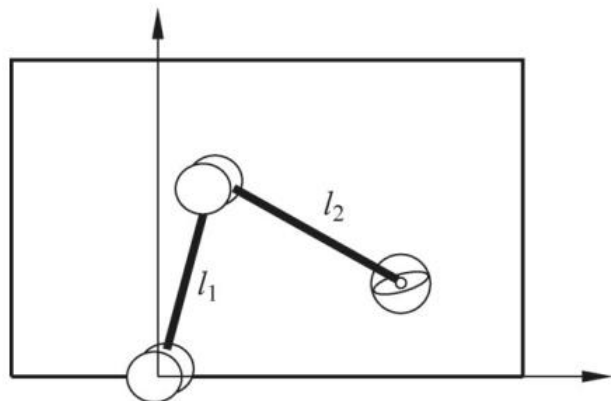


图 3-1 平面运动的理想机器人

$$M(q)\ddot{q} + C(q) + G(q) = \tau$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} l^2 m + 2lM \cos q_2 + l^2 (m + M) & l^2 m + l^2 M \cos q_2 \\ l^2 m + l^2 M \cos q_2 & l^2 m \end{bmatrix}$$

$$C(q) = \begin{bmatrix} -ml^2 \sin q_2 \dot{q}_2^2 - 2ml^2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ ml^2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} mlg \cos(q_1 + q_2) + (m + M)lg \cos q_1 \\ mlg \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

根据情况进行简化，平衡位置在 $q_1=90$ ， $q_2=180$ 。有， $d_{q1}=d_{q2}=0$

$$M(q)\ddot{q} + C(q) + G(q) = \tau$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} l^2 M & 0 \\ 0 & l^2 m \end{bmatrix}$$

$$C(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} lmg \cos(q_1 + q_2) + l(m + M)g \cos q_1 \\ lmg \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

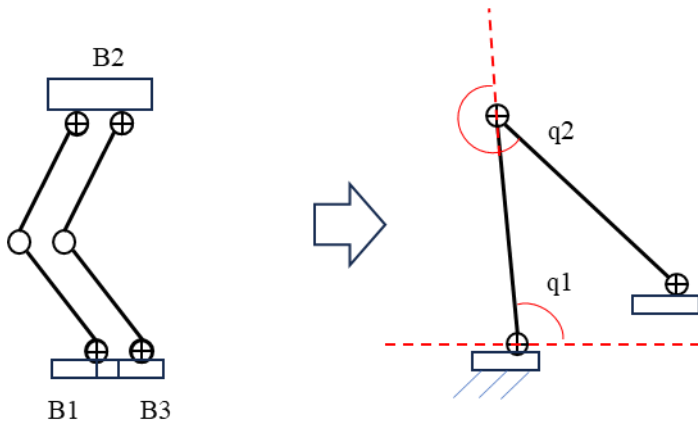
简化后为

$$l^2 M \ddot{q}_1 = lmg \cos(q_1 + q_2) + l(m + M)g \cos q_1$$

$$l^2 m \ddot{q}_2 = lmg \cos(q_1 + q_2) + \tau$$

(详情见协作机器人教材 P41 页)

双足机器人可以视为两杆模型的一种特殊状态，如下图所示：



$$l^2 M \ddot{q}_1 = lmg \cos(q_1 + q_2) + l(m + M)g \cos q_1$$

$$l^2 m \ddot{q}_2 = lmg \cos(q_1 + q_2) + \tau$$

将上式线性化并写成状态方程有，

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Ml^2}l(m+M)g \sin q_1 & 0 & -\frac{1}{Ml^2}lmg \sin(q_1 + q_2) & 0 \\ -\frac{1}{Ml^2}lmg \sin(q_1 + q_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{ml^2}lmg \sin(q_1 + q_2) & 0 & -\frac{1}{ml^2}lmg \sin(q_1 + q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u$$

当位于初始位置时， q_1 为 90， q_2 都为 180，有，

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Ml^2}lMg & 0 & \frac{1}{Ml^2}lmg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{ml^2}lmg & 0 & \frac{1}{ml^2}lmg & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u$$

其离散化的系统为，

$$\begin{bmatrix} q_{1,k+1} \\ \dot{q}_{1,k+1} \\ q_{2,k+1} \\ \dot{q}_{2,k+1} \end{bmatrix} = (I + \Delta t A) \begin{bmatrix} q_{1,k} \\ \dot{q}_{1,k} \\ q_{2,k} \\ \dot{q}_{2,k} \end{bmatrix} + \Delta t B u_k$$

其控制目标为 α 位于平衡位置，即，

$$u_k = K \begin{bmatrix} q_{1,k} & \dot{q}_{1,k} & q_{2,k} & \dot{q}_{2,k} \end{bmatrix}^T, q_1 \rightarrow q_{1,ref}, q_2 \rightarrow q_{2,ref}$$

对于上述控制问题，可以看成是一个欠约束的控制问题。

