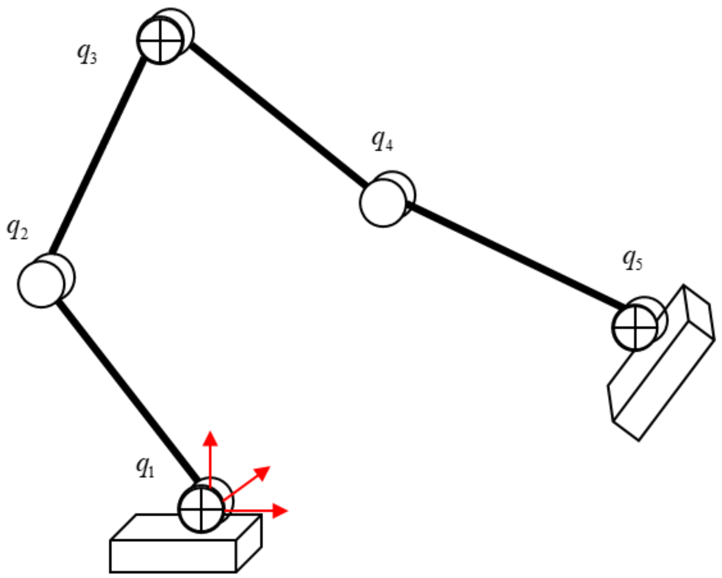
人形机器人运动学分析

一、下肢运动分析

1. 机器人运动学正解:



$$
\begin{aligned}
&x_1 = 0, y_1 = 0 \\
&x_2 = x_1 + l\cos q_1, y_2 = y_1 + l\sin q_1 \\
&\ldots \\
&x_5 = x_4 + l\cos q_4, y_5 = y_4 + l\sin q_4
\end{aligned}
$$

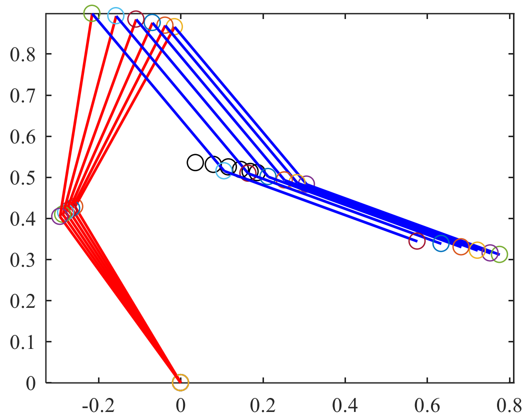
机器人重心位置:

$$
x_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1 x_1 + m_2 x_3 + m_3 x_5\right),
$$

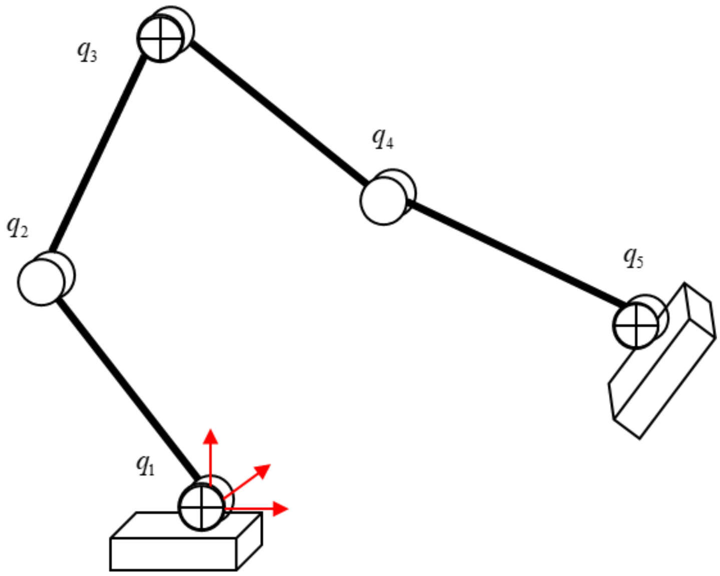
$$
y_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1 y_1 + m_2 y_3 + m_3 y_5\right)
$$

机器人平衡位置判断:

$$
x_m \in \left[-\Delta x, +\Delta x\right]
$$



2. 机器人运动学逆解:

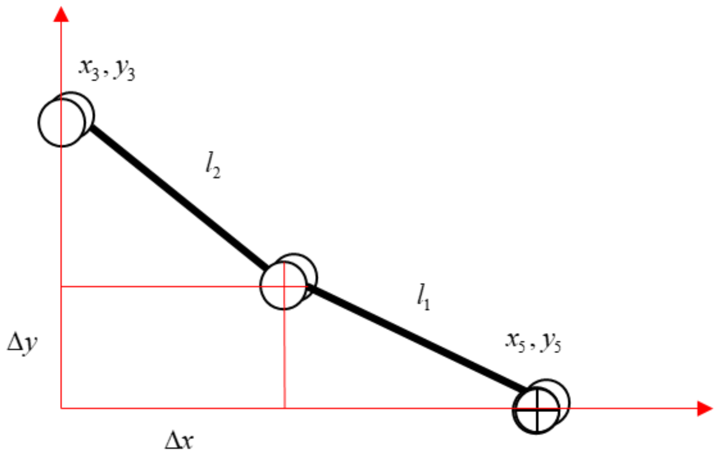


基于静平衡的步态分析:原则,在每一个位置,机器人的重心都是过脚板的,从而保证机器人的平衡。

$$
\begin{aligned}
&(m_1+m_2+m_3)x_m = m_2x_3 + m_3x_5(t),\\
&x_m \in [-\Delta x, +\Delta x]
\end{aligned}
$$

可解得:

$$
\begin{aligned}
&x_m = 0 \in [-\Delta x, +\Delta x],\\
&x_3 = -\frac{1}{m_2}\left[m_3x_5(t) - (m_1+m_2+m_3)x_m\right],
\end{aligned}
$$



$$\left(x_5 - x_3 - \Delta x\right)^2 + \Delta y^2 = l_1^2,$$
$$\left(y_5 - y_3 - \Delta y\right)^2 + \Delta x^2 = l_2^2$$

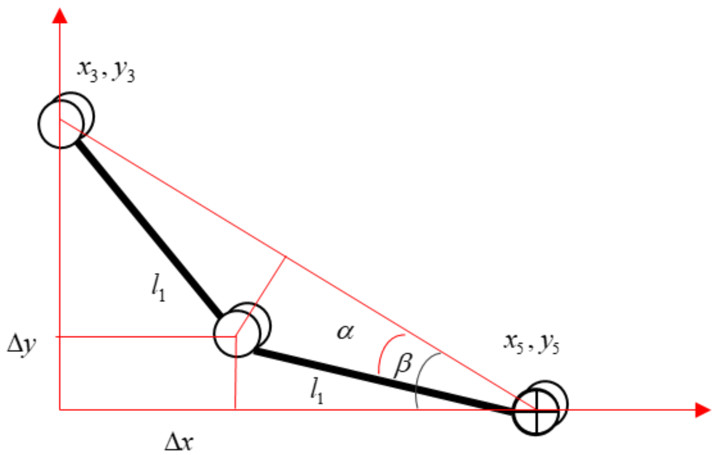
给定 y3，即可求解出 Dx 与 Dy 的数值。由此可见，为了保证机器人重心平衡，x3 是根据 x5 求解出来的。而 y3 有一定的变化范围，为了简单起见，我们假设 y3 与上一时刻 y3 不变，但当三角关系不满足时，y3 进行调整，保证三角关系。

简单起见，也可以将判断条件写为，

$$\left(x_5 - x_3\right)^2 + \left(y_5 - y_3\right)^2 \le l_1^2 + l_2^2,$$

当上式满足条件时，则 y3 保留原来数值，否则，y3 向 y5 逼近。

为了进一步简化计算，我们可以假设 l1=l2,此时有，

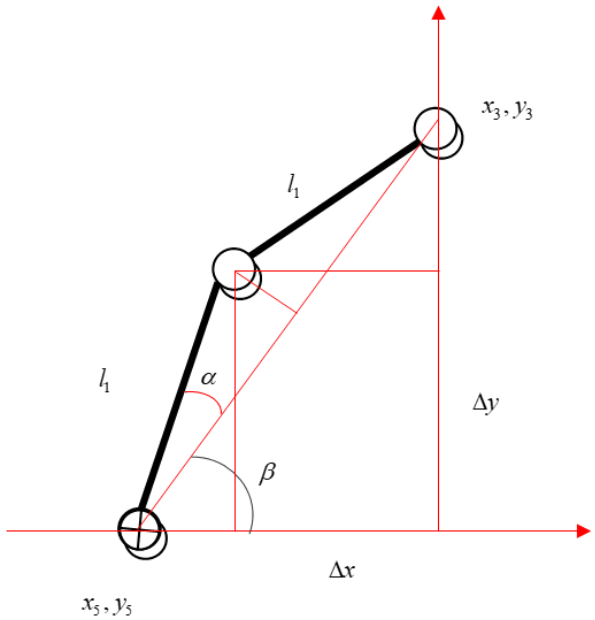


当 x5>x3 时，有

$$\cos\alpha = \frac{0.5\sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}{l}$$

$$\cos\beta = \frac{x_5 - x_3}{\sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}$$

$$\Delta y = l\sin(\beta - \alpha), \Delta x = x_5 - x_3 - l\cos(\beta - \alpha)$$

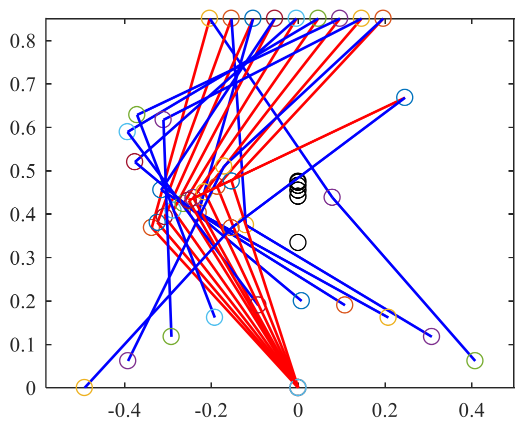


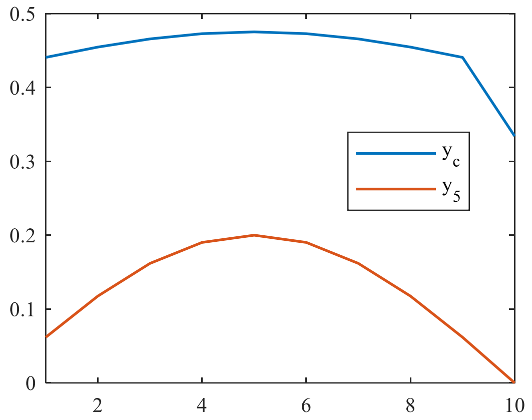
当 x5<x3 时，有

$$\cos\alpha = \frac{0.5\sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}{l}$$

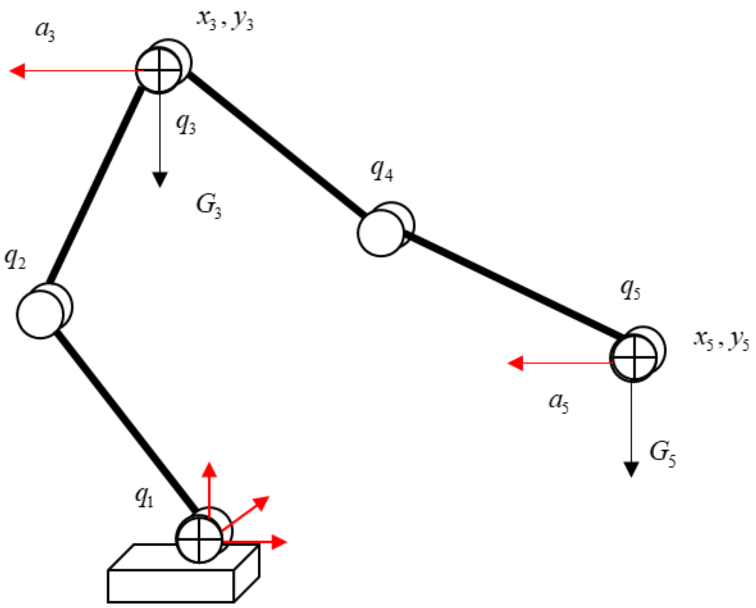
$$\cos\beta = \frac{x_3 - x_5}{\sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}}$$

$$\Delta y = l\sin(\beta + \alpha), \Delta x = x_3 - x_5 - l\cos(\beta + \alpha)$$





关节力矩分析:

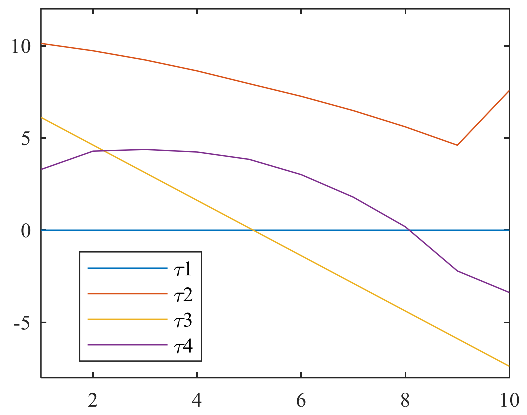


静平衡力矩:

$$\tau_{1x} = (x_3 - x_1) m_2 g + (x_5 - x_1) m_3 g$$
$$\tau_{2x} = (x_3 - x_2) m_2 g + (x_5 - x_2) m_3 g$$
$$\tau_{3x} = (x_5 - x_3) m_3 g$$
$$\tau_{4x} = (x_5 - x_4) m_3 g$$

加速度力矩:

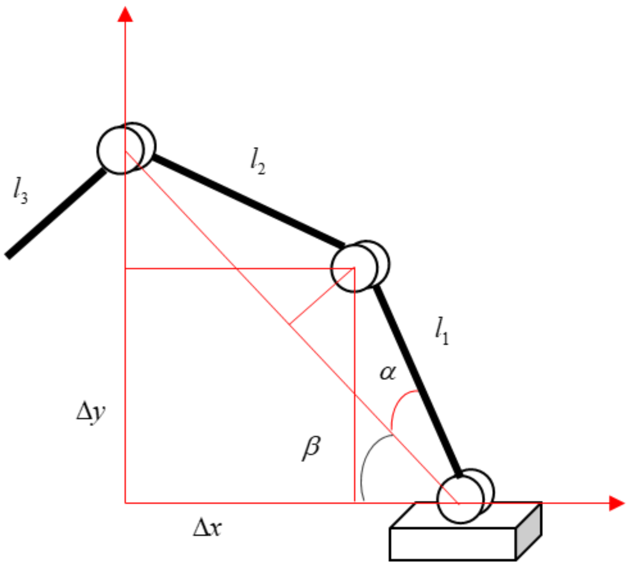
$$\tau_{1y} = (y_3 - y_1) m_2 a_3 + (y_5 - y_1) m_3 a_5$$
$$\tau_{2y} = (y_3 - y_2) m_2 a_3 + (y_5 - y_2) m_3 a_5$$
$$\tau_{3y} = (y_5 - y_3) m_3 a_5$$
$$\tau_{4y} = (y_5 - y_4) m_3 a_5$$



在静平衡条件下，脚踝关节不受力矩，力矩主要有膝关节提供。

二、上肢运动分析

运动学逆解:



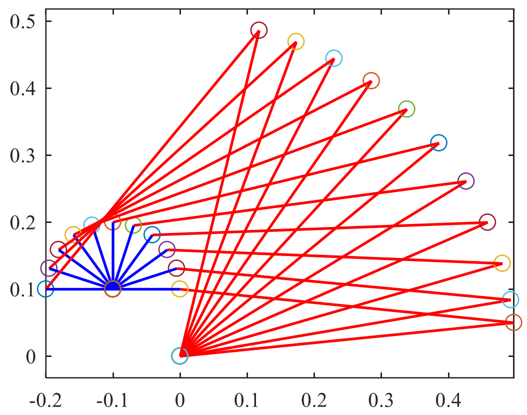
$$\cos\alpha = \frac{0.5\sqrt{x_3^{\ 2} + y_3^{\ 2}}}{l}$$

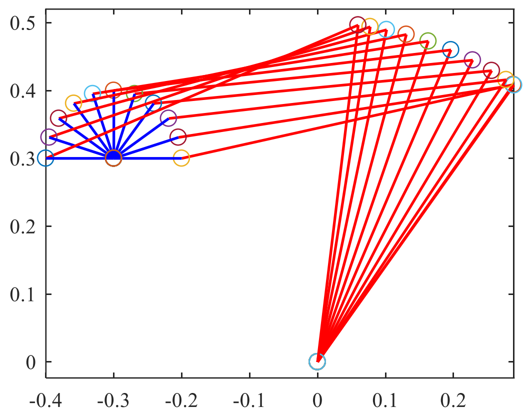
$$\cos\beta = \frac{-x_3}{\sqrt{x_3^{\ 2} + y_3^{\ 2}}}$$

$$y_2 = l\sin(\pi - \beta - \alpha), x_2 = l\cos(\pi - \beta - \alpha)$$

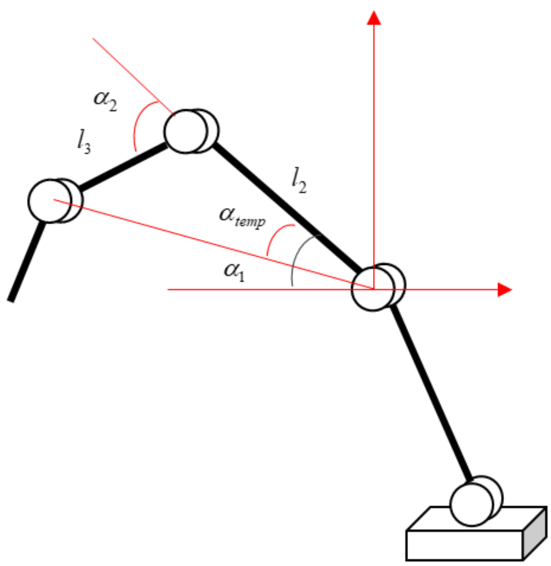
精细运动：当机器人末端围绕一个固定的调整姿态。

在精细运动的模式下，由于满自由度只有唯一运动解，因此，大臂不得不随着姿态的改变而摆动。从而造成操作存在较大能量消耗与运动误差。





当存在冗余自由度时，

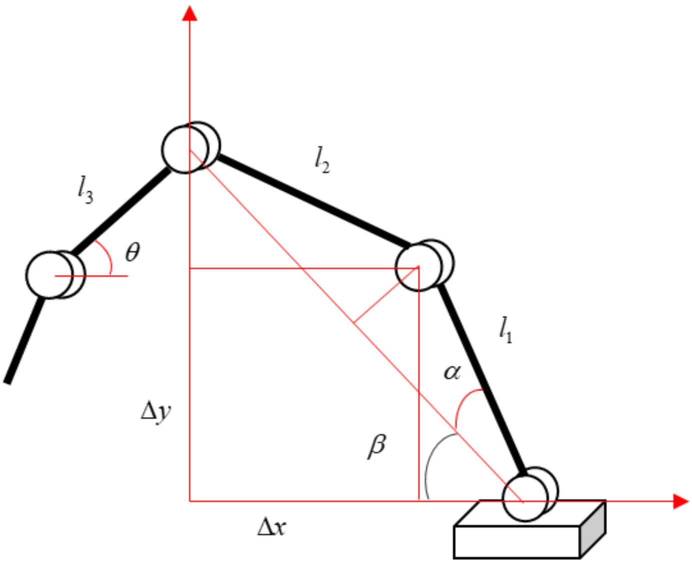


以大臂运动幅度最小为原则，先动前三轴。

$$p_x = x_3, p_y = y_3$$
$$-2l_2l_3\cos(\pi-\alpha_2) = p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2$$
$$\alpha_2 = \pm\arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)$$
$$\alpha_{temp} = \arccos\left(\frac{l_3^2 - l_2^2 - (p_x^2 + p_y^2)}{-2l_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$
$$\alpha_1 = \text{atan}2(p_y, -p_x) + \alpha_{temp}$$
$$y_3 = l_2\sin(\pi-\alpha_1), x_3 = l_2\cos(\pi-\alpha_1)$$

当前三轴的运动不满足工作空间需求时，则运动第一轴，此时，第三轴不动。X3,y3

则根绝与第四轴的相对位置关系不变进行计算，

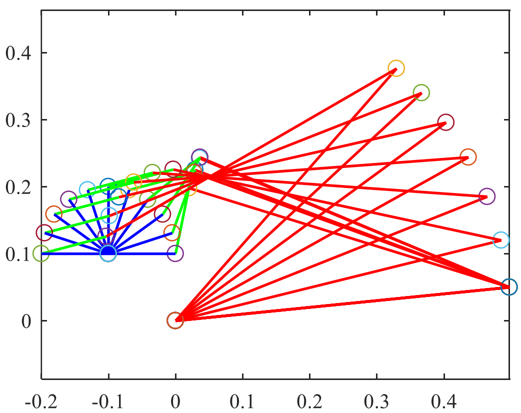


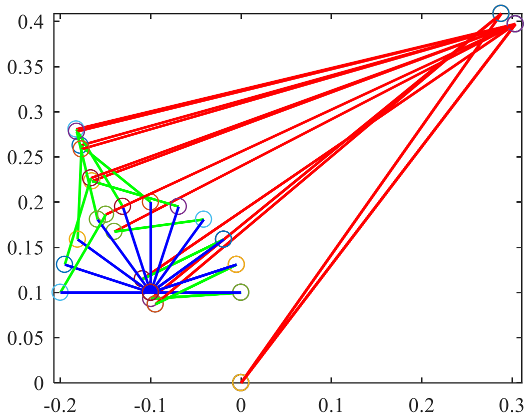
$$x_3 = x_4 + l_3 \cos\theta, y_3 = y_4 + l_3 \sin\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{0.5\sqrt{x_3{}^2 + y_3{}^2}}{l}$$

$$\cos\beta = \frac{-x_3}{\sqrt{x_3{}^2 + y_3{}^2}}$$

$$y_2 = l\sin(\pi - \beta - \alpha), x_2 = l\cos(\pi - \beta - \alpha)$$

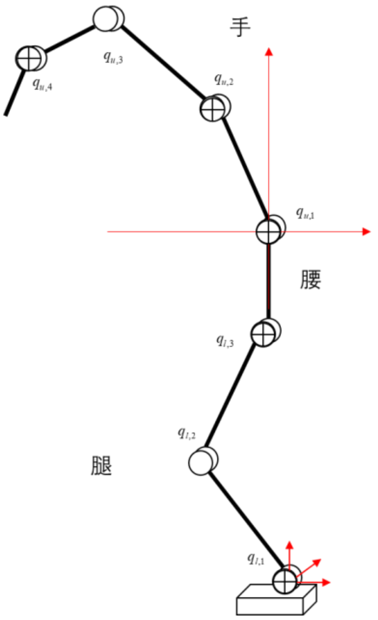




结论：通过增加冗余自由度（绿色的杆），在精细运动中，可以减小大臂的摆动。

对于狭窄空间的操作更有益。

三、人形机器人运动分析



人形机器人操作时需要同时考虑操作精度与平衡性的问题。区别于传统的 AGV 移动机器人，重心能够较好的分布在移动平台上。人形机器人的承力点在脚板的范围。

运动学正解：

$$
\begin{aligned}
&x_{l,1}=0, y_{l,1}=0 \\
&x_{l,2}=x_{l,1}+l_{l,1}\cos q_{l,1}, y_{l,2}=y_{l,1}+l_{l,1}\sin q_{l,1} \\
&x_{l,3}=x_{l,2}+l_{l,2}\cos q_{l,2}, y_{l,3}=y_{l,2}+l_{l,2}\sin q_{l,2} \\
&x_{u,1}=x_{l,3}+l_{l,3}\cos q_{l,3}, y_{u,1}=y_{l,3}+l_{l,3}\sin q_{l,3} \\
&x_{u,2}=x_{u,1}+l_{u,1}\cos q_{u,1}, y_{u,2}=y_{u,1}+l_{u,1}\sin q_{u,1} \\
&\ldots \\
&x_{u,4}=x_{u,3}+l_{u,3}\cos q_{u,3}, y_{u,4}=y_{u,1}+l_{u,3}\sin q_{u,3}
\end{aligned}
$$

运动学逆解：

根据末端从前往后计算，在手臂阶段，按照精细操作原则，其运动学逆解为，

$$p_x = x_3, p_y = y_3$$
$$-2l_2 l_3 \cos(\pi - \alpha_2) = p_x^2 + p_y^2 - {l_2}^2 - {l_3}^2$$
$$\alpha_2 = \pm \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2 l_3}\right)$$
$$\alpha_{temp} = \arccos\left(\frac{{l_3}^2 - {l_2}^2 - \left(p_x^2 + p_y^2\right)}{-2l_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$
$$\alpha_1 = \operatorname{atan2}\left(p_y, -p_x\right) + \alpha_{temp}$$
$$y_3 = l_2 \sin(\pi - \alpha_1), x_3 = l_2 \cos(\pi - \alpha_1)$$

当前三轴的运动不满足工作空间需求时，则运动第一轴，此时，第三轴不动。

$$x_3 = x_4 + l_3 \cos\theta, y_3 = y_4 + l_3 \sin\theta$$
$$\cos\alpha = \frac{0.5\sqrt{{x_3}^2 + {y_3}^2}}{l}$$
$$\cos\beta = \frac{-x_3}{\sqrt{{x_3}^2 + {y_3}^2}}$$
$$y_2 = l\sin(\pi - \beta - \alpha), x_2 = l\cos(\pi - \beta - \alpha)$$

则腿部的运动要求为了保持平衡，需要满足平衡条件：

$$x_m = \frac{1}{m_{l,1} + m_{l,3} + m_{u,1} + m_{u,2} + m_{u,4}}\left(m_{l,1}x_{l,1} + m_{l,3}x_{l,3} + m_{u,1}x_{u,1} + m_{u,2}x_{u,2} + m_{u,4}x_{u,4}\right),$$
$$x_m = 0$$

由此可见，为了保证躯体平衡，同时，上半身由于操作需要也不能动，因此，只能同步调节膝关节与髋关节，保持重心的平衡。则有，

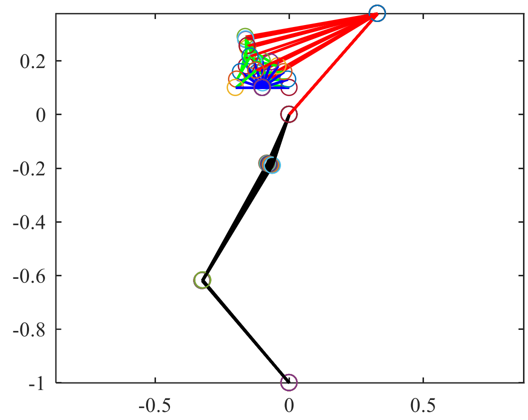
$$x_{l,3} = -\frac{1}{m_{l,3}}\left(m_{u,1}x_{u,1} + m_{u,2}x_{u,2} + m_{u,4}x_{u,4}\right)$$

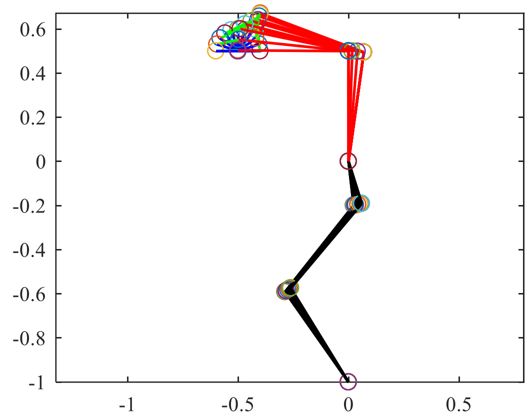
由于杆长的约束，可以直接求出 yl3，

$$y_{l,3} = -\sqrt{{l_3}^2 - x_{l,3}^2}$$

进一步的，求解出 xu2,yu2

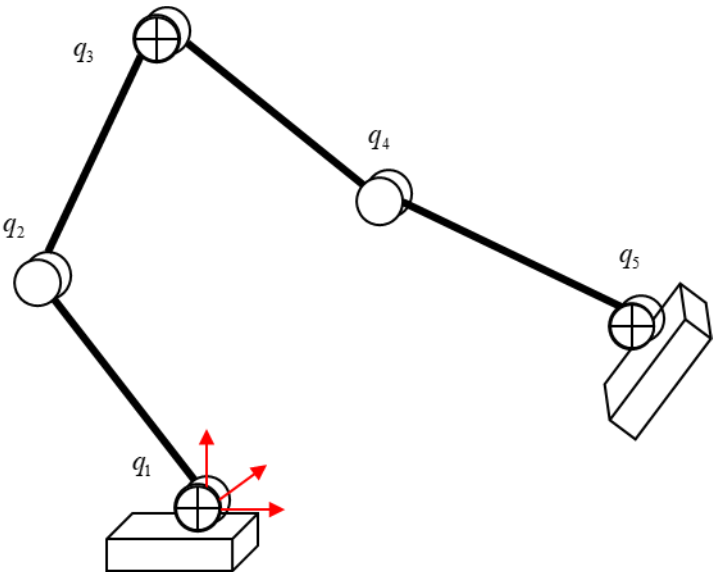
$$\cos\alpha = \frac{0.5\sqrt{\left(x_{u,3} - x_{u,1}\right)^2 + \left(y_{u,3} - y_{u,1}\right)^2}}{l}$$
$$\cos\beta = \frac{x_{u,1} - x_{u,3}}{\sqrt{\left(x_{u,3} - x_{u,1}\right)^2 + \left(y_{u,3} - y_{u,1}\right)^2}}$$
$$\Delta y = l\sin(\beta + \alpha), \Delta x = x_3 - x_5 - l\cos(\beta + \alpha)$$





由此可见，在人形机器人手臂运动时，臀部也需要做相应的调整，以此保证静平衡，增加了控制的困难。

四、人形机器人下肢控制



$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0, y_1 = 0 \\
& x_2 = x_1 + l_1 \cos q_1, y_2 = y_1 + l_1 \sin q_1 \\
& x_3 = x_2 + l_2 \cos q_2, y_3 = y_2 + l_2 \sin q_2 \\
& \cdots \\
& x_5 = x_4 + l_4 \cos q_4, y_5 = y_4 + l_4 \sin q_4
\end{aligned}
$$

则机器人的雅克比矩阵为，

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 - l_3 \sin q_3 \dot{q}_3 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 - l_3 \sin q_3 \dot{q}_3 - l_4 \sin q_4 \dot{q}_4 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + l_3 \cos q_3 \dot{q}_3 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + l_3 \cos q_3 \dot{q}_3 + l_4 \cos q_4 \dot{q}_4 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
& \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}_x \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{J}_y \dot{\boldsymbol{q}} \\
& \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T \\
& \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix}^T \\
& \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

为了让机器人能行走，其 x5,y5 需要跟随目标轨迹

$$
x_{r,5} = g_x(t), y_{r,5} = g_y(t)
$$

同时，机器人行走过程中，重心要求平衡，有：

$$x_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1 x_1 + m_2 x_3 + m_3 x_5\right),$$
$$y_m = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1 y_1 + m_2 y_3 + m_3 y_5\right)$$

当 xm 在 0 位时，

$$x_{r,3}\left(t\right) = -\frac{1}{m_2} m_3 x_5\left(t\right),$$

则运动位置与目标位置的偏差为，

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} x_3\left(t\right) - x_{r,3}\left(t\right) \\ x_5\left(t\right) - x_{r,5}\left(t\right) \\ y_5\left(t\right) - y_{r,5}\left(t\right) \end{bmatrix}$$

为了设计控制器，我们先需要重构输入输出的雅克比矩阵，

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 - l_3 \sin q_3 \dot{q}_3 - l_4 \sin q_4 \dot{q}_4 \\ l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + l_3 \cos q_3 \dot{q}_3 + l_4 \cos q_4 \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 & -l_3 \sin q_3 & -l_4 \sin q_4 \\ l_1 \cos q_1 & l_2 \cos q_2 & l_3 \cos q_3 & l_4 \cos q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_{out} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{q}$$

则控制器为，

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{J}^{\dagger}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} x_3\left(t\right) - x_{r,3}\left(t\right) \\ x_5\left(t\right) - x_{r,5}\left(t\right) \\ y_5\left(t\right) - y_{r,5}\left(t\right) \end{bmatrix}$$

$(\ )^{\dagger}$ 代表违逆。

稳定性证明：

设计李亚普洛夫函数为，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{e}$$

其导数为，

$$\dot{V} = \dot{e}^T e + e^T \dot{e}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) - \dot{x}_{r,3}(t) \\ \dot{x}_5(t) - \dot{x}_{r,5}(t) \\ \dot{y}_5(t) - \dot{y}_{r,5}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) - \dot{x}_{r,3}(t) \\ \dot{x}_5(t) - \dot{x}_{r,5}(t) \\ \dot{y}_5(t) - \dot{y}_{r,5}(t) \end{bmatrix}$$

假设机器人的目标轨迹为准静态的，

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{y}_5(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3(t) - x_{r,3}(t) \\ x_5(t) - x_{r,5}(t) \\ y_5(t) - y_{r,5}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{y}_5(t) \end{bmatrix}$$

$$= (Jq)^T e + e^T Jq$$

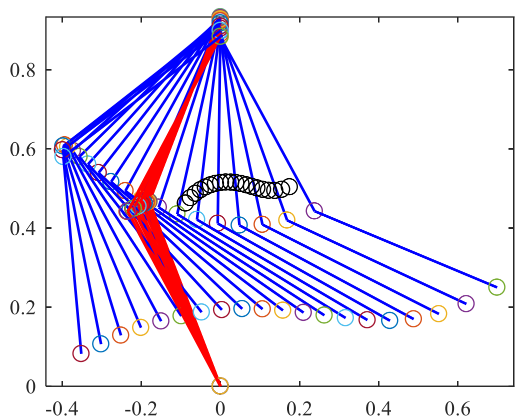
将控制输入带入

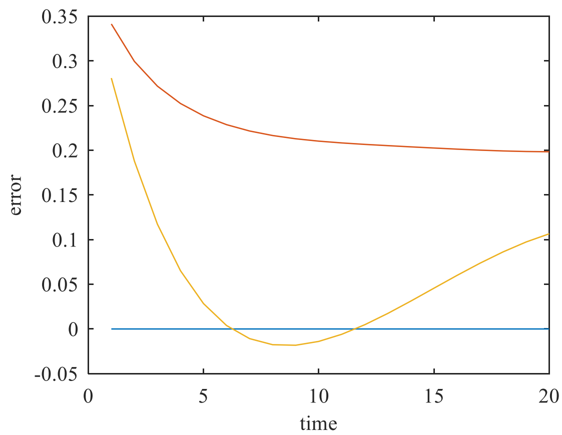
$$\dot{V} = \left(-JJ^{\dagger}e\right)^T e - e^T JJ^{\dagger} e$$

$$= -e^T \left(JJ^{\dagger}\right)^T e - e^T JJ^{\dagger} e$$

$$= -2e^T e \le 0$$

根据李雅普诺夫定理，则 V 趋近于 0，则控制误差趋近于 0.代表重心将落于支撑脚中心，同时，脚步跟随步态轨迹。

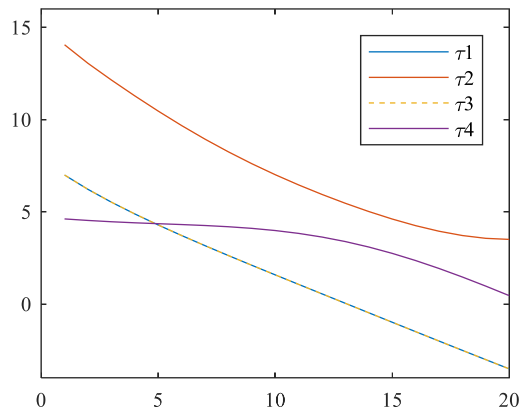




结论：采用控制的方法，可以不用求解逆解。其核心原因是，通过雅克比矩阵逼近，求解逆解（此方法即为牛顿欧拉法通过数值解求解逆解）。同时，通过控制的方法，相对于直接求解逆解，步态变化更加平滑，步态没有跳变的出现。

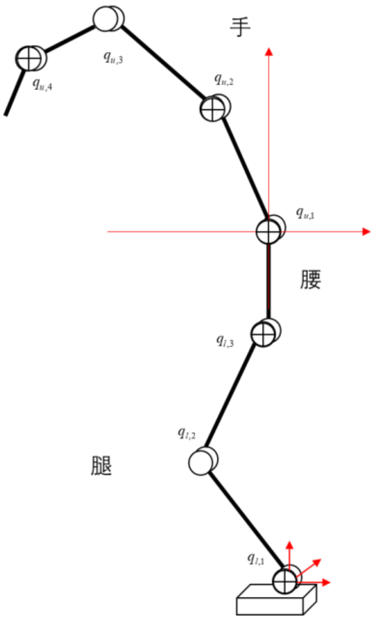
但同样也存在问题，由于控制过程中存在误差，因此，重心不能实时落在支撑脚正上方，因此，脚腕需要提供力矩保持机器人不倾倒。根据静平衡，每个关节角提供的克服重力的力矩为，

$$\tau_{1x}=(x_3-x_1)m_2g+(x_5-x_1)m_3g$$
$$\tau_{2x}=(x_3-x_2)m_2g+(x_5-x_2)m_3g$$
$$\tau_{3x}=(x_5-x_3)m_3g$$
$$\tau_{4x}=(x_5-x_4)m_3g$$



此时，踝关节与髋关节的力相同。

五、人形机器人运动控制



运动学正解:

$$x_{l,1}=0, y_{l,1}=0$$
$$x_{l,2}=x_{l,1}+l_{l,1}\sin q_{l,1}, y_{l,2}=y_{l,1}+l_{l,1}\cos q_{l,1}$$
$$x_{l,3}=x_{l,2}+l_{l,2}\sin q_{l,2}, y_{l,3}=y_{l,2}+l_{l,2}\cos q_{l,2}$$
$$x_{u,1}=x_{l,3}+l_{l,3}\sin q_{l,3}, y_{u,1}=y_{l,3}+l_{l,3}\cos q_{l,3}$$
$$x_{u,2}=x_{u,1}+l_{u,1}\sin q_{u,1}, y_{u,2}=y_{u,1}+l_{u,1}\cos q_{u,1}$$
$$\dots$$
$$x_{u,5}=x_{u,4}+l_{u,4}\sin q_{u,4}, y_{u,5}=y_{u,4}+l_{u,4}\cos q_{u,4}$$

则机器人的雅克比矩阵为,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{l,2}\\ \dot{x}_{l,3}\\ \dot{x}_{u,1}\\ \dot{x}_{u,2}\\ \dot{x}_{u,3}\\ \dot{x}_{u,4}\\ \dot{x}_{u,5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}\\ -l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}\\ -l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}\\ -l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}-l_{u,1}\sin q_{u,1}\dot{q}_{u,1}\\ -l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}-l_{u,1}\sin q_{u,1}\dot{q}_{u,1}-l_{u,2}\sin q_{u,2}\dot{q}_{u,2}\\ -l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}-l_{u,1}\sin q_{u,1}\dot{q}_{u,1}-l_{u,2}\sin q_{u,2}\dot{q}_{u,2}-l_{u,3}\sin q_{u,3}\dot{q}_{u,3}\\ -l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}-l_{u,1}\sin q_{u,1}\dot{q}_{u,1}-l_{u,2}\sin q_{u,2}\dot{q}_{u,2}-l_{u,3}\sin q_{u,3}\dot{q}_{u,3}-l_{u,4}\sin q_{u,4}\dot{q}_{u,4}\end{bmatrix}$$

,

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_{l,2}\\ \dot{y}_{l,3}\\ \dot{y}_{u,1}\\ \dot{y}_{u,2}\\ \dots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{l,1}\cos q_{l,1}\dot{q}_{l,1}\\ l_{l,1}\cos q_{l,1}\dot{q}_{l,1}+l_{l,2}\cos q_{l,2}\dot{q}_{l,2}\\ l_{l,1}\cos q_{l,1}\dot{q}_{l,1}+l_{l,2}\cos q_{l,2}\dot{q}_{l,2}+l_{l,3}\cos q_{l,3}\dot{q}_{l,3}\\ l_{l,1}\cos q_{l,1}\dot{q}_{l,1}+l_{l,2}\cos q_{l,2}\dot{q}_{l,2}+l_{l,3}\cos q_{l,3}\dot{q}_{l,3}+l_{u,1}\cos q_{u,1}\dot{q}_{u,1}\\ \dots\end{bmatrix}$$

已知目标位置为 xu5,yu5 以及最后一个轴的姿态，则上肢第 4 轴 qu4 的位置

为，

$$x_{u,4}=x_{u,5}+l_{u,4}\cos\theta_5, y_{u,4}=y_{u,5}+l_{u,4}\sin\theta_5$$

根据机器人末端目标构造的目标函数为，

$$\begin{aligned}&x_{r,u,5}(t)=g_{x,u,5}(t), y_{r,u,5}(t)=g_{y,u,5}(t), \theta_{r,5}(t)=g_{\theta,5}(t)\\&x_{r,u,4}(t)=x_{r,u,5}+l_{u,4}\cos\theta_{r,5}, y_{r,u,4}(t)=y_{r,u,5}+l_{u,4}\sin\theta_{r,5}\end{aligned}$$

根据平衡条件有：

$$\begin{aligned}&x_m=\frac{1}{m_{l,1}+m_{l,3}+m_{u,1}+m_{u,2}+m_{u,4}}\left(m_{l,1}x_{l,1}+m_{l,3}x_{l,3}+m_{u,1}x_{u,1}+m_{u,2}x_{u,2}+m_{u,4}x_{u,4}\right),\\&x_m=0\end{aligned}$$

上半身的运动由操作需求决定。重心调节主要依靠髋关节调节，有，

$$x_{r,l,3}(t)=-\frac{1}{m_{l,3}}\left(m_{u,1}x_{u,1}+m_{u,2}x_{u,2}+m_{u,4}x_{u,4}\right)$$

则运动位置与目标位置的偏差为，

$$\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}x_{l,3}(t)-x_{r,l,3}(t)\\x_{u,4}(t)-x_{r,u,4}(t)\\y_{u,4}(t)-y_{r,u,4}(t)\\x_{u,5}(t)-x_{r,u,5}(t)\\y_{u,5}(t)-y_{r,u,5}(t)\end{bmatrix}$$

为了设计控制器，我们先需要重构输入输出的雅克比矩阵，

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{l,3}\\\dot{x}_{u,4}\\\dot{y}_{u,4}\\\dot{x}_{u,5}\\\dot{y}_{u,5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}\\-l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}-l_{u,1}\sin q_{u,1}\dot{q}_{u,1}-l_{u,2}\sin q_{u,2}\dot{q}_{u,2}-l_{u,3}\sin q_{u,3}\dot{q}_{u,3}\\l_{l,1}\cos q_{l,1}\dot{q}_{l,1}+l_{l,2}\cos q_{l,2}\dot{q}_{l,2}+l_{l,3}\cos q_{l,3}\dot{q}_{l,3}+l_{u,1}\cos q_{u,1}\dot{q}_{u,1}+l_{u,2}\cos q_{u,2}\dot{q}_{u,2}+l_{u,3}\cos q_{u,3}\dot{q}_{u,3}\\-l_{l,1}\sin q_{l,1}\dot{q}_{l,1}-l_{l,2}\sin q_{l,2}\dot{q}_{l,2}-l_{l,3}\sin q_{l,3}\dot{q}_{l,3}-l_{u,1}\sin q_{u,1}\dot{q}_{u,1}-l_{u,2}\sin q_{u,2}\dot{q}_{u,2}-l_{u,3}\sin q_{u,3}\dot{q}_{u,3}-l_{u,4}\sin q_{u,4}\dot{q}_{u,4}\\l_{l,1}\cos q_{l,1}\dot{q}_{l,1}+l_{l,2}\cos q_{l,2}\dot{q}_{l,2}+l_{l,3}\cos q_{l,3}\dot{q}_{l,3}+l_{u,1}\cos q_{u,1}\dot{q}_{u,1}+l_{u,2}\cos q_{u,2}\dot{q}_{u,2}+l_{u,3}\cos q_{u,3}\dot{q}_{u,3}+l_{u,4}\cos q_{u,4}\dot{q}_{u,4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{l,3} \\ \dot{x}_{u,4} \\ \dot{y}_{u,4} \\ \dot{x}_{u,5} \\ \dot{y}_{u,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{l,1}\sin q_{l,1} & -l_{l,2}\sin q_{l,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{l,1}\sin q_{l,1} & -l_{l,2}\sin q_{l,2} & -l_{l,3}\sin q_{l,3} & -l_{u,1}\sin q_{u,1} & -l_{u,2}\sin q_{u,2} & -l_{u,3}\sin q_{u,3} & 0 \\ l_{l,1}\cos q_{l,1} & l_{l,2}\cos q_{l,2} & l_{l,3}\cos q_{l,3} & l_{u,1}\cos q_{u,1} & l_{u,2}\cos q_{u,2} & l_{u,3}\cos q_{u,3} & 0 \\ -l_{l,1}\sin q_{l,1} & -l_{l,2}\sin q_{l,2} & -l_{l,3}\sin q_{l,3} & -l_{u,1}\sin q_{u,1} & -l_{u,2}\sin q_{u,2} & -l_{u,3}\sin q_{u,3} & -l_{u,4}\sin q_{u,4} \\ l_{l,1}\cos q_{l,1} & l_{l,2}\cos q_{l,2} & l_{l,3}\cos q_{l,3} & l_{u,1}\cos q_{u,1} & l_{u,2}\cos q_{u,2} & l_{u,3}\cos q_{u,3} & l_{u,4}\cos q_{u,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{l,1} \\ \dot{q}_{l,2} \\ \dot{q}_{l,3} \\ \dot{q}_{u,1} \\ \dot{q}_{u,2} \\ \dot{q}_{u,3} \\ \dot{q}_{u,4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_{out} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{q}$$

则控制器为，

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{J}^{\dagger}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} x_{l,3}(t) - x_{r,l,3}(t) \\ x_{u,4}(t) - x_{r,u,4}(t) \\ y_{u,4}(t) - y_{r,u,4}(t) \\ x_{u,5}(t) - x_{r,u,5}(t) \\ y_{u,5}(t) - y_{r,u,5}(t) \end{bmatrix}$$

$(\ )^{\dagger}$ 代表违逆。

稳定性证明：

设计李亚普洛夫函数为，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}$$

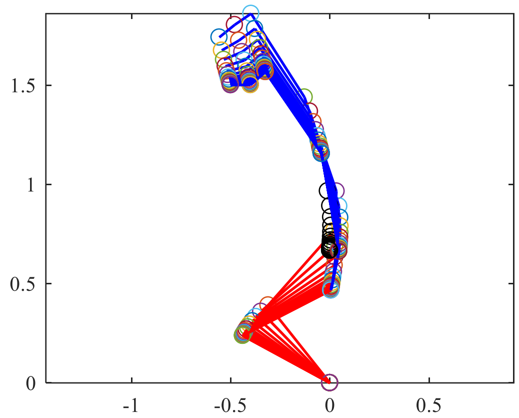
其导数为，

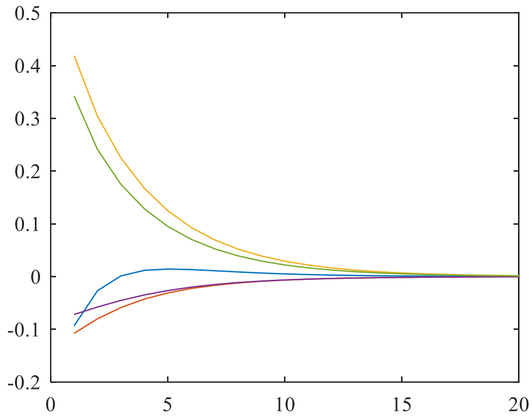
$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{V}} &= \dot{\boldsymbol{e}}^T\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^T\dot{\boldsymbol{e}} \\ &= (\boldsymbol{J}\boldsymbol{q})^T\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{q} \end{aligned}$$

将控制输入带入

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{V}} &= \left(-\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\dagger}\boldsymbol{e}\right)^T\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\dagger}\boldsymbol{e} \\ &= -\boldsymbol{e}^T\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\dagger}\right)^T\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\dagger}\boldsymbol{e} \\ &= -2\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} \le 0 \end{aligned}$$

根据李雅普诺夫定理，则 V 趋近于 0，则控制误差趋近于 0.代表重心将落于支撑脚中心，同时，末端跟随指定轨迹。

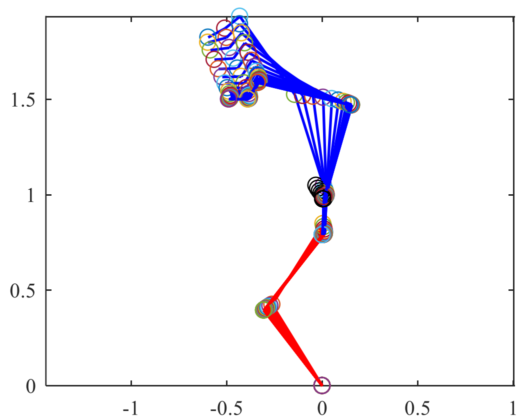


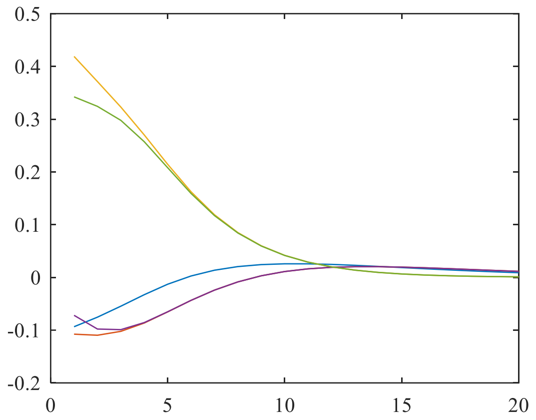


此时，为了让末端到达位置，机器人的腿部也进行了较大运动调节。这根实际上人操作的习惯不同。为此，我们修改控制权重，

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{W}\boldsymbol{J}^{\dagger}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{W} = diag\left\{\begin{bmatrix} w_{l,1} & w_{l,2} & w_{l,3} & w_{u,1} & w_{u,2} & w_{u,3} & w_{u,4} \end{bmatrix}\right\}$$

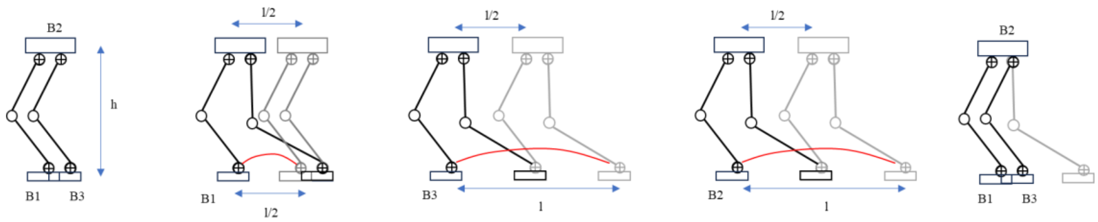
为了让手臂运动，而腿不动，wu>wl。此时，可以实现以手臂运动为主，而腿部运动为辅助。



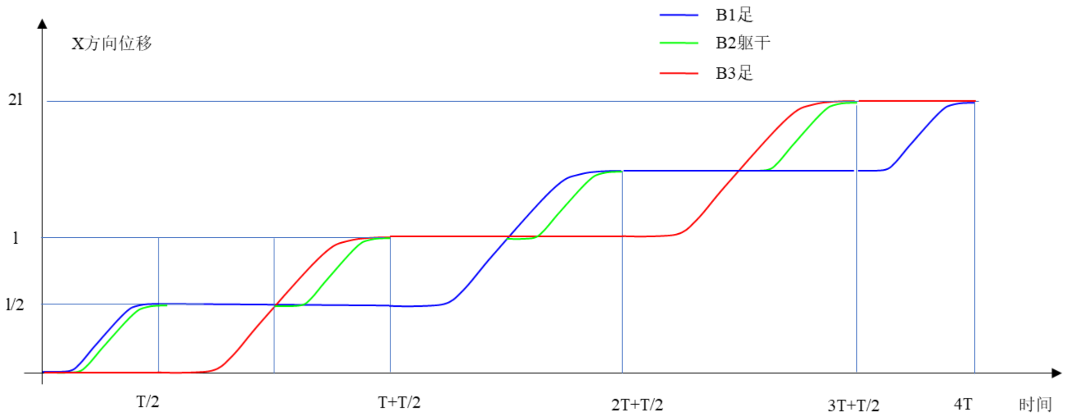


六、人形机器人步态分析

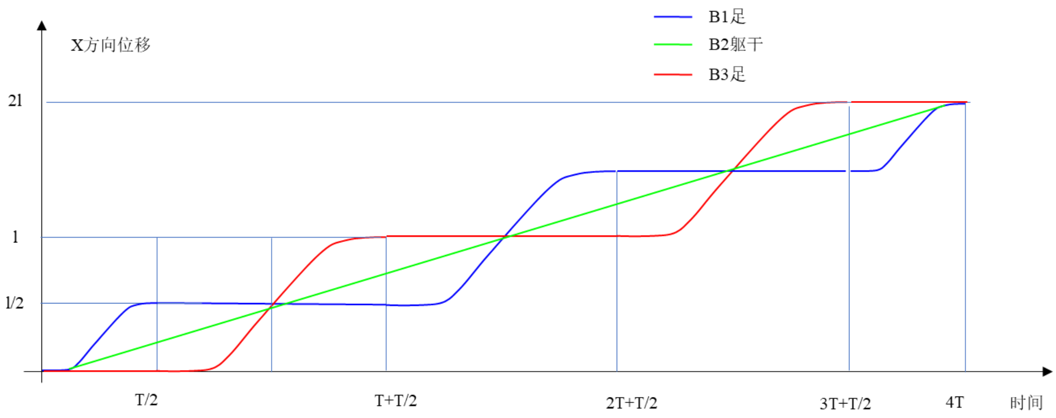
机器人步态对平稳运动非常重要。通过分析 ASIMO 的视频，可以得到 ASIMO 机器人运动的基本步态。一般而言，机器人运动都是从静止，运动，静止的流程。因此，下图给出了 ASIMO 运动的流程，



步骤可以表述为机器人静止；机器人迈出左脚半步，同时躯体向前半步；机器人迈出右脚一步，躯体向前移动半步；机器人迈出左脚一步，躯体向前移动半步；之后循环往复；最后，机器人右脚迈出半步，躯体不同，机器人停止。在 x 方向的双足与躯干的运动曲线如下。



从上图可以看出，双足交替运动，换支撑脚时，机器人的整体都是静止的。因此，从外部观察，其实机器人运动是一顿一顿的。因此，更加理想的步态是机器人的躯体保持匀速运动。



此时，躯体的运动一直位于两足之间，且整个运动过程中保持匀速运动。

为了描述双足机器人步态，我们设定足部运动函数与腰部运动函数。其中，腰部运动函数为，

$$x_3 = -L_{step} j + \frac{1}{2} L_{step} \cos\left(\frac{t}{T_{loop}\pi}\right)$$

$$y_3 = h$$

足部的运动函数为，

$$x_1=\begin{cases}-L_{step}j+L_{step}\cos\left(\dfrac{t}{T_{loop}\pi}\right), if\ \ j\text{ is even}\\ x_1, if\ \ j\text{ is odd}\end{cases}$$

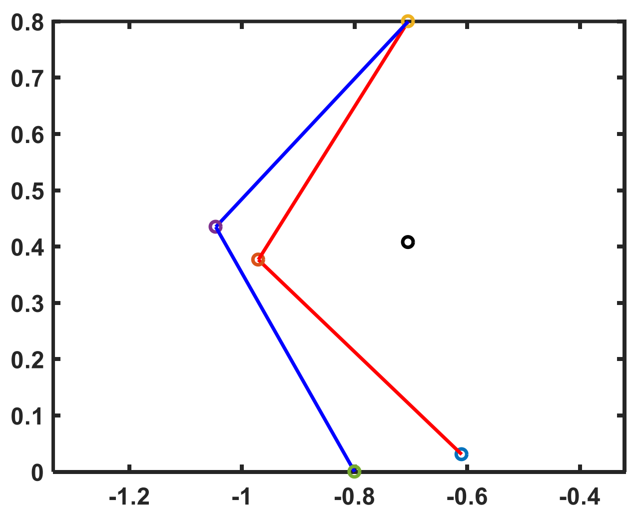
$$y_1=\begin{cases}h\sin\left(\dfrac{t}{T_{loop}\pi}\right), if\ \ j\text{ is even}\\ y_1, if\ \ j\text{ is odd}\end{cases}$$

相对应的，另外一只足的运动函数为，

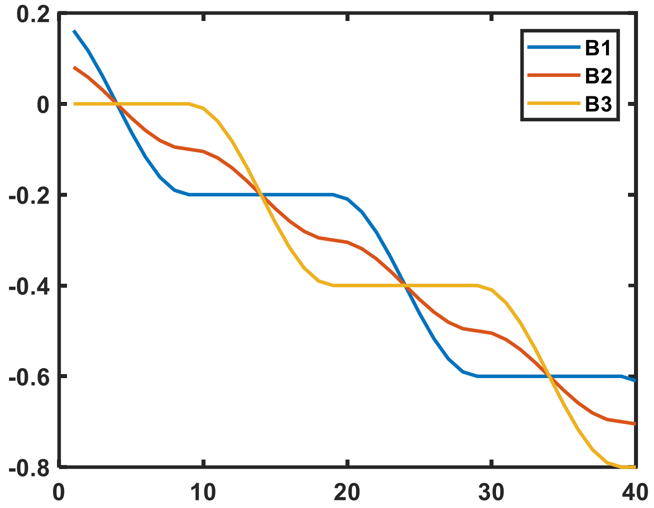
$$x_5=\begin{cases}-L_{step}j+L_{step}\cos\left(\dfrac{t}{T_{loop}\pi}\right), if\ \ j\text{ is odd}\\ x_5, if\ \ j\text{ is even}\end{cases}$$

$$y_5=\begin{cases}h\sin\left(\dfrac{t}{T_{loop}\pi}\right), if\ \ j\text{ is odd}\\ y_5, if\ \ j\text{ is even}\end{cases}$$

仿真结果如下图所示



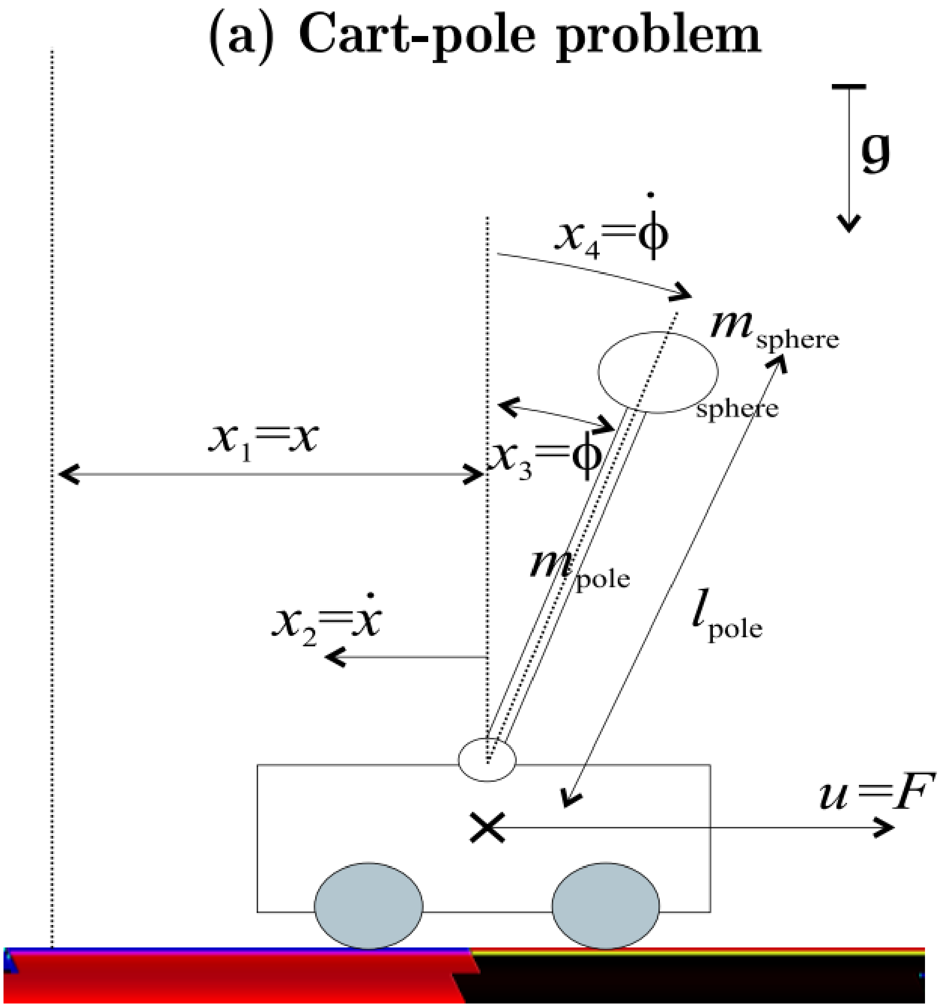
Matlab 步态仿真



步态 x 方向变化。

七、倒立摆稳定性分析

人形机器人稳定控制的原理与倒立摆控制类似。为此，首先分析倒立摆的稳定控制原理。



倒立摆的模型如上图所示，通过线性化，可以得到其状态方程为，

$$x_{t+1} = Ax_t + bu_t$$

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & \nu\tau & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ 0 \\ \nu\tau/g \end{bmatrix}$$

其控制器的真值为，

$$\boldsymbol{K} \approx [5.71, 11.3, -82.1, -21.6]^T,$$

则控制器可以由强化学习进行学习获得。其表达式为，

$$u = KX$$

$$Q = \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix}$$

通过 Actor-critic 学习，可以得到控制器 K。然而，此时机器人的状态需要已知，即小车的位置与速度，倒立摆的角度与角速度都要已知。然而，当我们有限于硬件系统，小车的位置与速度未知时，传统的状态控制则会失效。因此，我们会利用历史数据进行状态的扩充。

举例：原系统为

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

当我们只能测量位置时，系统输出为，

$$y_k = x_k$$

通过对位移求差我们有，

$$y_k - y_{k-1} = \tau \dot{x}_k$$

则原系统可以变化为，

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A_{22} & 1 + \tau A_{21} + A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

因此，通过对变化后的系统进行强化学习即可。

同理，对于倒立摆系统而言，我们如果只关心倒立摆的角度，我们发现倒立摆与小车的运动其实是解耦的，也就是倒立摆是否倾倒，与小车状态无关。则倒立摆公式可以简化为，

$$\begin{bmatrix}\alpha_{t+1}\\ \dot{\alpha}_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \tau\\ v\tau & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{t}\\ \dot{\alpha}_{t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ v\tau/g\end{bmatrix}u_t$$

由此，可以获得倒立摆的运动控制。

八、人形机器人稳定性分析

当系统变为双足系统后，可以将双足也转化为倒立摆。

首先，利用双杆动力学模型:

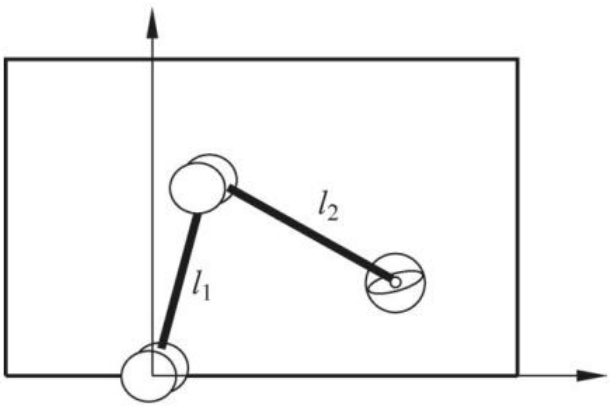


图 3-1 平面运动的理想机器人

$$
\begin{aligned}
&M(q)\ddot{q}+C(q)+G(q)=\tau \\
&M(q)=\begin{bmatrix} l^2m+2llm\cos q_2+l^2(m+M) & l^2m+l^2m\cos q_2 \\ l^2m+l^2m\cos q_2 & l^2m \end{bmatrix} \\
&C(q)=\begin{bmatrix} -ml^2\sin q_2\dot{q}_2^2-2ml^2\sin q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ ml^2\sin q_2\dot{q}_1 \end{bmatrix} \\
&G(q)=\begin{bmatrix} m\lg\cos(q_1+q_2)+(m+M)\lg\cos q_1 \\ m\lg\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

根据情况进行简化，平衡位置在 q1=90，q2=180.有，d_q1=d_q2=0

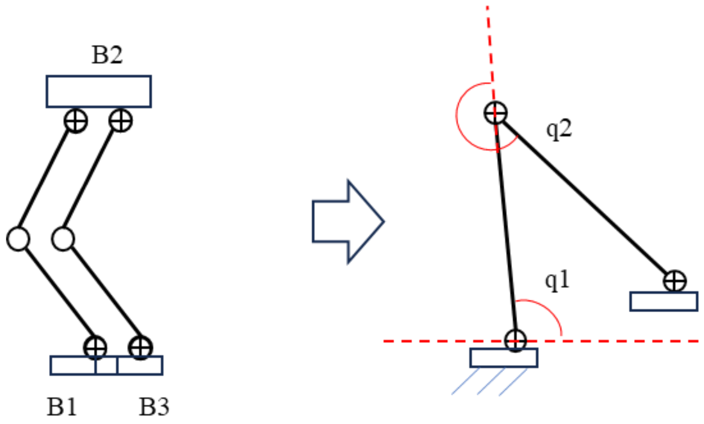
$$
\begin{aligned}
&M(q)\ddot{q}+C(q)+G(q)=\tau \\
&M(q)=\begin{bmatrix} l^2M & 0 \\ 0 & l^2m \end{bmatrix} \\
&C(q)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&G(q)=\begin{bmatrix} lmg\cos(q_1+q_2)+l(m+M)g\cos q_1 \\ lmg\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

简化后为

$$
\begin{aligned}
&l^2M\ddot{q}_1=lmg\cos(q_1+q_2)+l(m+M)g\cos q_1 \\
&l^2m\ddot{q}_2=lmg\cos(q_1+q_2)+\tau
\end{aligned}
$$

（详情见协作机器人教材 P41 页）

双足机器人可以视为两杆模型的一种特殊状态，如下图所示：



$$l^2 M\ddot{q}_1 = lmg\cos(q_1+q_2) + l(m+M)g\cos q_1$$
$$l^2 m\ddot{q}_2 = lmg\cos(q_1+q_2) + \tau$$

将上式线性化并写成状态方程有，

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \ddot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Ml^2}l(m+M)g\sin q_1 - \frac{1}{Ml^2}lmg\sin(q_1+q_2) & 0 & -\frac{1}{Ml^2}lmg\sin(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{ml^2}lmg\sin(q_1+q_2) & 0 & -\frac{1}{ml^2}lmg\sin(q_1+q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ \dot{q}_1\\ q_2\\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{ml^2}\end{bmatrix} u$$

当位于初始位置时，q1 为 90，q2 都为 180，有，

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \ddot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Ml^2}lMg & 0 & \frac{1}{Ml^2}lmg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{ml^2}lmg & 0 & \frac{1}{ml^2}lmg & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\\ \dot{q}_1\\ q_2\\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{ml^2}\end{bmatrix} u$$

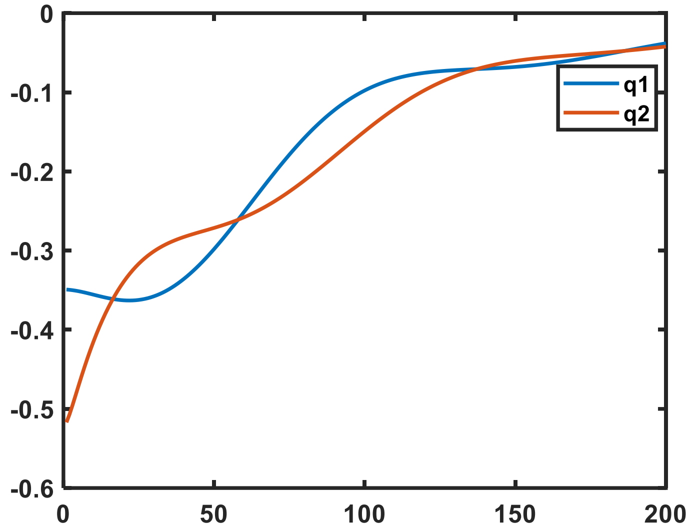
其离散化的系统为，

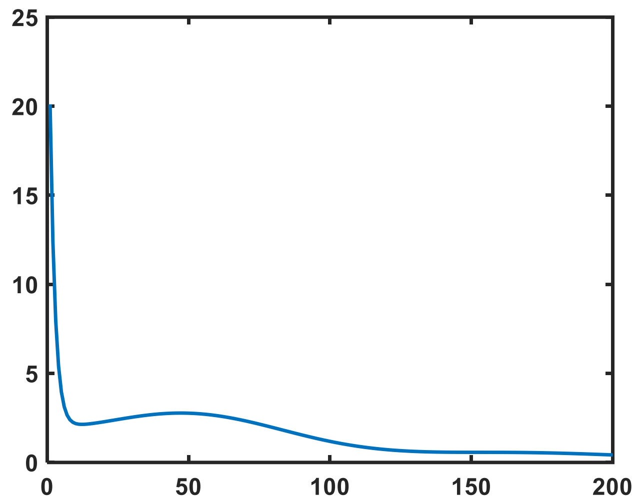
$$\begin{bmatrix} q_{1,k+1}\\ \dot{q}_{1,k+1}\\ q_{2,k+1}\\ \dot{q}_{2,k+1}\end{bmatrix} = (I+\Delta tA)\begin{bmatrix} q_{1,k}\\ \dot{q}_{1,k}\\ q_{2,k}\\ \dot{q}_{2,k}\end{bmatrix} + \Delta tBu_k$$

其控制目标为α位于平衡位置，即，

$$u_k = K\begin{bmatrix} q_{1,k} & \dot{q}_{1,k} & q_{2,k} & \dot{q}_{2,k} \end{bmatrix}^T, q_1 \to q_{1,ref}, q_2 \to q_{2,ref}$$

对于上述控制问题，可以看成一个欠约束的控制问题。





九、人形机器人强化学习控制

强化学习与经典的控制类似，只是在求解最优控制的时候，通过 critic- actor 的理论进行求解。

因此，装填方程采用第八章的系统方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \ddot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{Ml^2}lMg & 0 & \frac{1}{Ml^2}lmg & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{ml^2}lmg & 0 & \frac{1}{ml^2}lmg & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ \dot{q}_1\\ q_2\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{ml^2}\end{bmatrix}u$$

其离散化的系统为，

$$\begin{bmatrix}q_{1,k+1}\\ \dot{q}_{1,k+1}\\ q_{2,k+1}\\ \dot{q}_{2,k+1}\end{bmatrix}=\left(I+\Delta tA\right)\begin{bmatrix}q_{1,k}\\ \dot{q}_{1,k}\\ q_{2,k}\\ \dot{q}_{2,k}\end{bmatrix}+\Delta tBu_k$$

则强化学习的 Critic 构造为，（详情参见 zhao TIE 论文）

$$Q_v\left(k\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\left(k\right)\\ \boldsymbol{u}\left(k\right)\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\left(k\right)\\ \boldsymbol{u}\left(k\right)\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} vec\left(\boldsymbol{H}\right)$$

$$\text{with } \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{xx} & \boldsymbol{H}_{xu}\\ \boldsymbol{H}_{ux} & \boldsymbol{H}_{uu}\end{bmatrix},$$

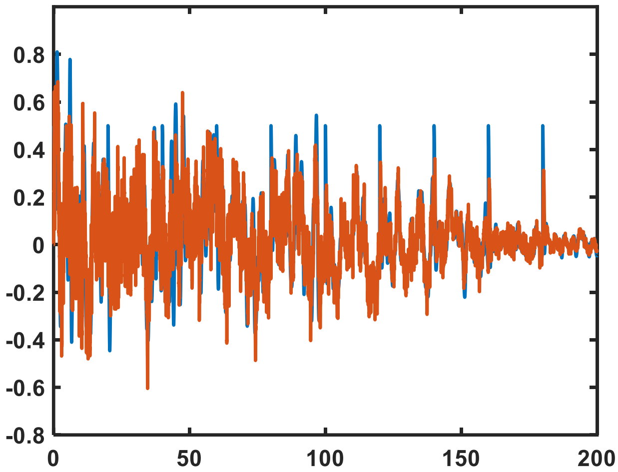
则 actor 的构造为，

$$\boldsymbol{K}^i=\boldsymbol{H}_{uu}{}^{-1}\boldsymbol{H}_{ux}$$

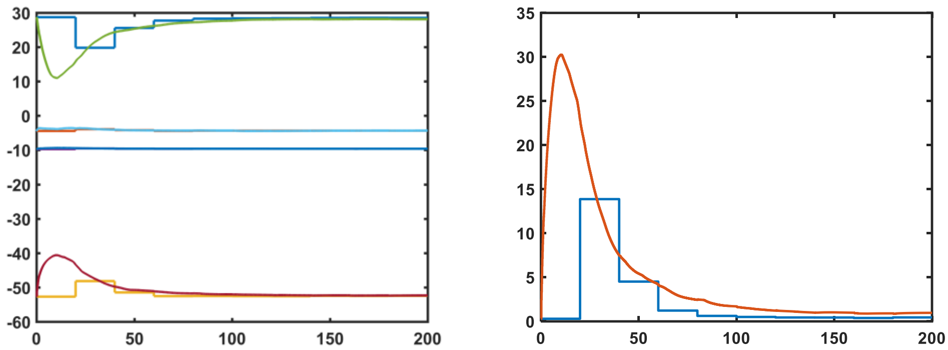
其迭代求解的表达式为，

$$\nabla\boldsymbol{K}^i=\frac{2\alpha}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\boldsymbol{H}_{ux}+H_{uu}\boldsymbol{K}^i\right)$$

以下为求解结果：



学习过程中的状态量 alpha1 与 alpha2



控制迭代过程（AC 学习与 Q 学习对比）

AC 学习在过程中即可学习。Q 学习在每个 episode 结束后进行跟新。由此可见，AC 学习与 Q 学习在学习结果上是一直的。但是在过程有所不同。可以根据实际需要选取。