

Problem 16: Zabawa z wielomianami

Punkty: 45

Autor: Kelly Reust, Denver, Kolorado, Stany Zjednoczone

Wprowadzenie

Jeśli chodziliście na zajęcia z algebry, to najpewniej zaznajomiliście się z wielomianami. Te wyrażenia zwykle wyglądają jak niżej:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

Litery w tym wyrażeniu (z wyjątkiem x) oznaczają współczynniki każdego składnika równania. Małe liczby pojawiające się nad większością x to potęgi każdego składnika. Duże równania tego typu są często używane w fizyce; przykładowo, poniższego równania można użyć do obliczenia odległości przebytej przez przyspieszający obiekt.

$$d(t) = x + vt + 0.5at^2$$

Od czasu do czasu trzeba pomnożyć wyrażenie wielomianowe przez siebie, tworząc jeszcze większe wyrażenie. Mnożenie małych wielomianów można bez problemów wykonać ręcznie, ale te większe mogą się okazać problematyczne. Napiszmy program, który zrobi to za nas.

Opis problemu

Mnożąc wyrażenia wielomianowe należy każdy składnik pierwszego wyrażenia pomnożyć przez każdy składnik drugiego wyrażenia. W szkole być może uczono was metody „FOIL”, która służy do mnożenia wielomianów dwuskładnikowych. Dla celów demonstracji przemnożmy wyrażenia $(2x + 3x^2)$ i $(4x + x^2)$.

Litery w nazwie metody Foil oznaczają First (pierwszy), Outer (zewnątrzny), Inner (wewnętrzny) i Last (ostatni), wskazując, jak należy mnożyć przez siebie składniki. Zaczynamy od pierwszego składnika w każdym wyrażeniu:

$$2x * 4x = 8x^2$$

Mnożymy ze sobą współczynniki, jak w normalnym mnożeniu. Wykładniki nad x (równe 1, co można poznać po tym, że nie są widoczne) są do siebie dodawane; pamiętajcie jednak, że $x \times x = x^2$.

Powtarzamy tę czynność z trzema pozostałymi parami składników; zewnętrznymi (pierwszy składnik pierwszego wyrażenia i drugi składnik drugiego), wewnętrznymi (drugi składnik pierwszego wyrażenia i pierwszy składnik drugiego) oraz ostatnimi (z obydwu wyrażeń).

$$\begin{aligned} 2x * x^2 &= 2x^3 \\ 3x^2 * 4x &= 12x^3 \end{aligned}$$

$$3x^2 * x^2 = 3x^4$$

Wszystkie nowe składniki są do siebie dodawane, tworząc nowe wyrażenie wielomianowe z czterema składnikami:

$$(2x + 3x^2) * (4x + x^2) = 8x^2 + 2x^3 + 12x^3 + 3x^4$$

Jednak jeszcze nie skończyliśmy. Jak widzicie, dwa składniki mają wykładnik 3; $2x^3$ i $12x^3$. Ponieważ mają ten sam wykładnik, możemy uprościć wyrażenie dodając ich współczynniki do siebie. To daje w rezultacie odpowiedź końcową:

$$(2x + 3x^2) * (4x + x^2) = 8x^2 + 14x^3 + 3x^4$$

Metoda FOIL w szczególny sposób nadaje się do dwuskładnikowych wyrażeń wielomianowych, ale te same zasady obowiązują wobec wielomianów z większą liczbą składników. Każdy składnik pierwszego wyrażenia mnoży się przez każdy składnik drugiego wyrażenia; mnożąc współczynniki i dodając wykładniki. Po pomnożeniu wszystkich składników upraszcza się wyrażenie dodając współczynniki o tym samym wykładniku.

Przykładowe dane wejściowe

Pierwszy wiersz danych wejściowych programu, otrzymanych przez **standardowy kanał wejściowy**, będzie zawierać dodatnią liczbę całkowitą oznaczającą liczbę przypadków testowych. Każdy przypadek testowy będzie zawierać dwa wiersze odpowiadające wyrażeniom wielomianowym. Każdy wiersz będzie zawierać od 2 do 9 (włącznie) liczb całkowitych oddzielonych spacjami, odpowiadających współczynnikom wyrażenia wielomianowego. Pierwsza liczba całkowita to współczynnik przy wykładniku 0; drugi to współczynnik przy wykładniku 1 itd.

```
2
0 2 3
0 4 1
1 2 3 4
0 5 6
```

Przykładowe dane wyjściowe

W każdym przypadku testowym wasz program musi wyświetlić pojedynczy wiersz zawierający wyrażenie wielomianowe uzyskane przez przemnożenie zadanych wyrażeń. Składniki wielomianów mające niezerowy współczynnik powinny być wyświetlane według rosnącego wykładnika. Te składniki powinny być oddzielone od innych składników znakiem plus (+) lub minus (-) (należy użyć minusa, gdy współczynnik jest ujemny) i powinny zawierać:

- Współczynnik całkowity. Współczynnik nie powinien być wyświetlany, jeśli jego wartość bezwzględna jest równa 1 ORAZ jego wykładnik nie jest równy 0.

- Mała litera x, kareta (^) i wykładnik całkowity. Kareta i wykładnik nie powinny być wyświetlane, jeśli wykładnik jest równy 1 lub mniejszy od 1. Litera x nie powinna być wyświetlana, jeśli wykładnik jest równy 0.

$$8x^2+14x^3+3x^4$$

$$5x+16x^2+27x^3+38x^4+24x^5$$