Problem 07: Wejdź do matriksa

Punkty: 20

Autor: dr Francis Manning, Owego, Nowy Jork, Stany Zjednoczone

Wprowadzenie

W naukach przyrodniczych, inżynierskich i technologii zasady działania wielu produktów i projektów opierają się na pewnych operacjach matematycznych. Doskonałym przykładem tego zjawiska są macierze (*matrices*); stosuje się je w grafice komputerowej, inżynierii lotniczej i kosmicznej oraz mechanice kwantowej. Macierz (*matrix*) to prostokątny układ liczb, zwykle oznaczany dwoma dużymi nawiasami kwadratowymi.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1p} & \cdots & m_{np} \end{bmatrix}$$

Opis problemu

Lockheed Martin pracuje z marynarką wojenną Stanów Zjednoczonych nad testami nowego podwodnego układu napędowego. Układ ten zawiera dwa silniki, z których każdy ma ustawiać okręt podwodny w innym kierunku. W trakcie testów okręt podwodny wykonuje wielokrotnie dwa manewry, które w różny sposób oddziałują na silniki, zgodnie z tabelą:

Zużycie paliwa	Manewr 1	Manewr 2
Silnik 1	2 baryłki	5 baryłek
Silnik 2	3 baryłki	2 baryłki

Na podstawie zużycia paliwa przez każdy silnik musimy ustalić, ile razy użyto każdego silnika. Możemy rozwiązać problem korzystając z macierzy.

Do rozmieszczenia potrzebnych informacji potrzebujemy trzech macierzy. Najpierw nasze rozwiązanie: ile razy uruchomiono silniki. To będzie Macierz E:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix}$$

Następnie, powyższą tabelę przedstawiamy jako Macierz C, która wskazuje, ile paliwa zużył każdy silnik podczas danego manewru:

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Na koniec potrzebujemy informacji, ile paliwa zużyto w trakcie każdego manewru. Te informacje zawrzemy w Macierzy F.

$$F = [F_1 \quad F_2]$$

Jeśli mamy do czynienia z jednym silnikiem i jednym manewrem, wystarczy pomnożyć liczbę uruchomień danego silnika przez jednostkowe zużycie paliwa, by dowiedzieć, ile paliwa w sumie zużyto. Macierze mają tę zaletę, że korzystając z nich można zastosować takie samo postępowanie do kilku silników i kilku manewrów:

$$E \times C = F$$

$$[E_1 \quad E_2] \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [F_1 \quad F_2]$$

Spróbujmy rozwiązać przykład. W jednym teście zużyto 49 baryłek na Manewr 1 (F_1) i 73 baryłki na manewr 2 (F_2). Ile razy uruchomiono każdy silnik?

W normalnym zagadnieniu algebraicznym podzielilibyśmy F przez C, by otrzymać wartość E. Ale macierzy dzielić nie wolno. Zamiast tego możemy je odwrócić, a następnie pomnożyć taką odwrotność przez macierz, a uzyskamy taki sam wynik.

Do obliczenia odwrotności macierzy używamy poniższego równania:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{(ad - bc)} & \frac{-b}{(ad - bc)} \\ \frac{-c}{(ad - bc)} & \frac{a}{(ad - bc)} \end{bmatrix}$$

W skrócie, zbudowaliśmy nową macierz na podstawie wartości zachowanych w pierwotnej macierzy; następnie każdą z nowych wartości dzielimy przez *wyznacznik* pierwotnej macierzy. Aby odwrócenie było możliwe, macierz musi być kwadratowa i musi mieć niezerowy wyznacznik (ponieważ dzielenie przez zero jest niedozwolone). W tym problemie odwrócimy macierz C, która jest kwadratowa; w przykładzie wyznacznik C to $|C| = (2 \times 2) - (5 \times 3) = 4 - 15 = -11$ i jest on niezerowy, zatem odwrócenie C jest możliwe. We wszystkich przypadkach testowych C będzie mieć niezerowy wyznacznik.

Gdy odwrócimy C, możemy pomnożyć C^{-1} przez F w celu określenia wartości w E. Zgodnie z naszym przykładem powyżej:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-11} & \frac{-5}{-11} \\ \frac{-3}{-11} & \frac{2}{-11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.1818 & .4545 \\ .2727 & -.1818 \end{bmatrix}$$

$$E = F \times C^{-1}$$

$$E = [49 \quad 73] \times \begin{bmatrix} -.1818 & .4545 \\ .2727 & -.1818 \end{bmatrix}$$

$$E = \left[\left(C^{-1}{}_{1,1}F_1 + C^{-1}{}_{1,2}F_2\right) \quad \left(C^{-1}{}_{2,1}F_1 + C^{-1}{}_{2,2}F_2\right)\right]$$

$$E = \left[\left((-.1818 \times 49) + (.2727 \times 73)\right) \quad \left((.4545 \times 49) + (-.1818 \times 73)\right)\right]$$

$$E = [10.9989 \quad 8.9991] \approx [11 \quad 9]$$

I mamy odpowiedź! Ponieważ $E = [11 \quad 9]$ (po zaokrągleniu do najbliższej liczby całkowitej), w trakcie testu silnik 1 uruchomiono 11 razy, a silnik 2 uruchomiono 9 razy.

W celu zautomatyzowania tego ćwiczenia wasz zespół poproszono o napisanie programu, który jest w stanie obliczyć wartości w E mając dane wartości C i F.

Przykładowe dane wejściowe

Pierwszy wiersz danych wejściowych programu, otrzymanych przez standardowy kanał wejściowy, będzie zawierać dodatnią liczbę całkowitą oznaczającą liczbę przypadków testowych. Każdy przypadek testowy będzie zawierać trzy wiersze, zawierające podane niżej informacje. W każdym wierszu wartości są oddzielane spacjami. Wszystkie wartości są dodatnimi liczbami całkowitymi.

- Pierwszy wiersz zawiera wartości $C_{1,1}$ i $C_{2,1}$; odpowiednio, paliwo zużywane przez Silnik 1 podczas Manewru 1 i Manewru 2.
- Drugi wiersz zawiera wartości $C_{1,2}$ i $C_{2,2}$; odpowiednio, paliwo zużywane przez Silnik 2 podczas Manewru 1 i Manewru 2.
- Trzeci wiersz zawiera wartości F_1 i F_2; odpowiednio, ilość paliwa zużywaną przez obydwa silniki podczas Manewru 1 i Manewru 2.

```
2
2 5
3 2
49 73
7 3
4 5
193 155
```

Przykładowe dane wyjściowe

W każdym przypadku testowym wasz program musi wyświetlić pojedynczy wiersz zawierający wartości E_1 i E_2. Oznaczają one, odpowiednio, ile razy w trakcie testu uruchomiono Silnik 1 i Silnik 2. Obydwie wartości powinny być zaokrąglone do najbliższej liczby całkowitej i oddzielone spacjami.

```
11 9
15 22
```