Demostraciones de Geometría Global de Superficies

Paco Mora y Chito Belmonte
Apuntes PaChito™

22 de febrero de 2022

Pequeño inciso: Estos apuntes apoyan algunas de sus demostraciones en el libro *Un curso de Geometría Diferencial*, con lo cual puede que algunas demostraciones no coincidan con lo visto en clase.

Índice general

Capítulo 1

Proposición 1.4, la derivada covariante es intrínseca.

Demostración

Desde luego, $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α, la derivada covariante puede verse como un operador, D/dt, de la forma

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{D}{dt}: & \mathfrak{X} & \to & \mathfrak{X} & & \\ & V & \sim & \dfrac{DV}{dt}: & I & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & & & t & \sim & V'(t) < V'(t), N(t) > N(t) \end{array}$$

Este operador es independiente de la orientación elegida para la superficie, pues estamos tomando sólo la parte tangente de V' (obsérvese que si cambiamos N por $-N$ en la fórmula, el resultado es el mismo).

Por otro lado, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental, afirmación que vamos a probar a continuación.

Para ello, sea (U, X) una parametrización de la superficie S y, como viene siendo habitual, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Si $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, por lo que puede expresarse de la forma

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Ahora, calculamos $V'(t)$, utilizando las fórmulas de Gauss para expresar X_{uu}, X_{uv} y X_{vv} en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$:

$$\begin{aligned} V' =& a'X_u + a\left(X_{uu}u' + X_{uv}v'\right) + b'X_v + b\left(X_{vu}u' + X_{vv}v'\right) \\ =& a'X_u + a\left[\left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN\right)u' + \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)v'\right] \\ & + b'X_v + b\left[\left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)u' + \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN\right)v'\right] \\ =& \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right)X_u \\ & + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)X_v + \left(aeu' + afv' + bfu' + bgv'\right)N. \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada covariante $DV/dt = (V')^{\top}$ se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \left(a' + au'\Gamma_{11}^{1} + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^{1} + bv'\Gamma_{22}^{1}\right) X_u \\ &\quad + \left(b' + au'\Gamma_{11}^{2} + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^{2} + bv'\Gamma_{22}^{2}\right) X_v\end{aligned}$$

Obsérvese que DV/dt depende sólo de los símbolos de Christoffel y, por tanto, de la primera forma fundamental exclusivamente. En otras palabras, la derivada covariante es algo intrínseco; sus propiedades permanecen invariantes por isometrías.

□

Proposición 1.5, linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante.

Demostración

Las tres propiedades se demuestran trivialmente [1] :

I

$\frac{D}{dt}(V+W) = [(V+W)']^{\top} = (V'+W')^{\top} = (V')^{\top} + (W')^{\top} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

II

$\frac{D}{dt}(fV) = [(fV)']^{\top} = (f'V + fV')^{\top} = (f'V)^{\top} + (fV')^{\top} = f'V + f\frac{DV}{dt}$, pues $V^{\top} = V$, ya que $V \in \mathcal{X}(\alpha)$.

III

La propiedad se prueba de forma similar: como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $\left\langle (V')^{\perp}, W \right\rangle = \left\langle V, (W')^{\perp} \right\rangle = 0$, de donde

$$\begin{aligned}\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle &= \left\langle (V')^{\top} + (V')^{\perp}, W \right\rangle + \left\langle V, (W')^{\top} + (W')^{\perp} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle\end{aligned}$$

□

Proposición 1.7

Demostración

La parte I es trivial [2]

II

Al ser $DV/dt = \mathbf{0}$, sabemos que $V'(t)$ está en la dirección del normal a la superficie, y análogamente $W'(t)$. En consecuencia, como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene que $\langle V, W'\rangle = \langle V', W\rangle = 0$ y, por tanto, $\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0$.

Esto demuestra que $\langle V, W\rangle$ es constante.

□

Proposición 1.8, la ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

[1] Tu puta madre por si acaso.
[2] Cada vez que lea 'es trivial' voy a meter un 'tu puta madre por si acaso'.

□

Proposición 1.9, la ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

□

Teorema 1.10, existencia y unicidad de campos paralelos[3]

Demostración

Hay que encontrar $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $DV/dt = \mathbf{0}$.

Sea (U, X) una parametrización de S con $\alpha(t_0) \in X(U)$, y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Utilizando la expresión de la demostración de la proposición 1.4 para la derivada covariante de un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, como $DV/dt = \mathbf{0}$, los coeficientes de los vectores X_u y X_v tienen que anularse; luego si representamos V como $V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, se verificará que

$$\left\{ \begin{array}{l} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0 \end{array} \right.$$

En otras palabras, se prueba que siempre es posible 'fijar un rumbo' en la superficie. Una vez fijado, ya se puede hablar de si se mantiene o no constante la dirección de cualquier otro campo.

Tenemos por tanto un sistema de ecuaciones diferenciales cuya condición inicial es

$$V(t_0) = V_0 = (a(t_0), b(t_0))$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones para tales sistemas establece el resultado buscado (además, se puede obtener la solución de forma explícita al resolverlo, siempre y cuando esto sea posible).

$\square$

[3] Hay una demostración extrínseca y otra intrínseca en el libro. He decidido copiar la intrínseca porque leyéndola en diagonal he determinado que sería más sencilla, si queréis buscar la otra (fruto de vuestra curiosidad o esquizofrenia paranoide), está en el libro.

Capítulo 2

Proposición 2.0.1. ***Proposición exclusiva de Apuntes PaChito ™***

Sea $\alpha : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización. Son equivalentes:

1. *α es pregeodésica*
2. *$\exists \beta(u) = \alpha(h(u))$ una reparametrización de α / β es geodésica.*
3. *La reparametrización parametrizada por el arco de α es geodésica.*

Demostración

$$1 \implies 2$$

Directo por la definición

$$3 \implies 1$$

Por la definición directo

$$2 \implies 3$$

¿Te imaginas que es directo por la definición? Pues no. Mala suerte.

Tomamos una reparametrización de I:

$$I \to^{\alpha} S$$
$$J \to^{h(u)} I$$
$$J \to^{\beta(u)=\alpha(h(u)) \text{ que es geodésica}} S$$

Esto es un triangulito si lo dibujáis... Estaría bien que yo también lo hiciera pero soy un *vago*.

$$||\beta'(u)|| = c = h'(u) \cdot ||\alpha'(h(u))||$$

Si $c = 1 \rightarrow \beta(u)$ es la reparametrizavión por arco de α

Si $c \neq 1 \rightarrow$ Tomo $\underbrace{\gamma(s) = \beta(\frac{u}{c})}_{GEODESICA} = \alpha(h(\frac{u}{c}))$

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c} \cdot \beta'\left(\frac{s}{c}\right)$$

$\square$

Capítulo 3

Lema 3.2, Lema de homogeneidad de las geodésicas

Lo más importante del lema son las fórmulas que aparecen centradas en su enunciado.

Demostración

Sea $p \in S$ y sea un vector tangente $v \in T_pS$. Entonces, $\exists \gamma_v \ : \ I_v \to S$. Como $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda v \in T_pS$.

Defino ahora $\alpha(t) = \gamma_v(\lambda t)$.

$$I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} \ : \ \lambda t \in I_v\}$$

$$t \in I_\alpha \iff \lambda t \in I_v \iff t \in \frac{1}{\lambda} \cdot I_v$$

Luego otenemos que $\frac{1}{\lambda} I_v = I_\alpha$. De esto deducimos que $\alpha(0) = p = \gamma_v(0)$.

$$\alpha'(t) = \lambda \gamma_v'(\lambda t) \implies \alpha'(0) = \lambda \gamma_v'(0() = \lambda v$$

Y se obtiene que α es una geodésica, por ser reparametrización afín de una geométrica.

$$\begin{cases} \alpha(t) = \gamma_v(\alpha t) \\ I_\alpha = \frac{1}{\lambda} I_v \end{cases} \in \mathcal{J}_{p,\lambda v} = \{(I_{\alpha,\alpha}), ...\} \implies \frac{1}{\lambda} I_v \subseteq I_{\alpha v}$$

$$\forall t \in \frac{1}{\lambda} I_v, \ \gamma_{\lambda v}(t) = \lambda_v(\lambda t)$$

Llamo ahora $w = \lambda v$.

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \implies \mu w = v$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot I_w \subseteq I_{\mu w} \ y \ \forall t \in \underbrace{\frac{1}{\mu} I_w}_{\lambda I_{\lambda v}}$$

$$\gamma_{\mu w}(t) = \gamma_w(\mu t) \qquad \frac{1}{\mu} \cdot I_w = \lambda I_\lambda v \subseteq I_v$$

$$I_{\lambda v} \subseteq \frac{1}{\lambda} I_v$$

Al final he tenido que copiar tal cual lo que pone en la pizarra y no tengo ni idea de si he demostrado algo o no.

□

Teorema 3.3, Propiedades de la aplicación exponencial

Primero tenemos que demostrar esta propiedad

$$p \in S,\ v \in T_pS \implies iv \in \mathcal{D}_p,\ \forall t \in I_v \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Demostración

$$\begin{cases} t = 0 \to OK \\ t \neq 0, \qquad tv \in \mathcal{D}_p \iff 1 \in I_{tv} = \frac{1}{t} \cdot I_v \ si \ 1 = \frac{1}{t}t \end{cases}$$

$$exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),\ \forall t \in I_v$$

□

Fin de la demostración inciso, comenzamos a demostrar el teorema.

Demostración

$$I$$

Que sea estrellado nos dice que el segmento que une cualquier punto con el origen no se sale del conjunto. En otras palabras,

$$\forall \underbrace{v \in \mathcal{D}_p}_{1 \in I_v \implies [0,1] \subset I \ \forall t \in [0,1]},\ [0, v] = \{tv,\ 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{D}_p$$

Del inciso se deduce que $t \in I_v \implies tv \in \mathcal{D}_p$. Notamos lo siguiente:

$$\forall v \in T_pS,\ \exists(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$$

Y justo debajo ha escrito

$$\exists \varepsilon > 0 \ :\ \forall |t| < \varepsilon,\ tv \in \mathcal{D}_p$$

$$II$$

Este dice el sensei Alías que nos lo creamos y yo **me lo creo.**

$$III$$

$$\exists \underbrace{U}_{\text{entorno de } 0}{}^{1} \in \mathcal{D}_p \ :\ exp_{p|\mathcal{U}} \ :\ \underbrace{\mathcal{U}}_{\subset T_pS} \to \underbrace{V}_{\subset S} \text{ es difeomorfismo}$$

Para comprobar si es un difeomorfismo, tenemos que ver que la diferencial es un isomorfismo lineal. Vamos a ver si esto es así:

$$\forall v \in \mathcal{D}_p \to d(exp_p)_v \ :\ \underbrace{T_v(\mathcal{D}_p)}_{T_v(T_pS)} \to T_{exp_p(v)}S$$

$$\forall w \in T_pS \qquad \alpha(t) = v + tw$$

[1] Para el sensei Alías, decir entorno implica que es abierto

$$\alpha \ : \ I \to \mathcal{D}_p \subset T_pS$$
$$\alpha(0) = v \qquad \alpha'(0) = w \qquad \to \qquad w \in T_v(T_pS)$$

Vamos al caso particular $v = 0$.

$$d(exp_p)_0 \ : \ T_0(TpS) = T_pS \to T_{exp_p(v)}S = T_pS$$
$$\forall w \in T_pS = T_0(T_pS)$$
$$d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t))$$

Tenemos que encontrar una curva que cumpla

$$\forall \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = 0 \\ \alpha'(0) = w \end{array}\right\} \alpha(t) = tw$$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1) = \gamma_w(t)$$
$$d(exp_p)_0(w) = \gamma'_w(0) = w \implies d(exp_p)_0 = Id$$

□

Lema 3.6, El lema de Gauss

Vamos a demostrar una versión más general de lo que viene en los apuntes. En nuestra versión demostraremos

$$\forall w \in T_pS \qquad < d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w) > = < v, w >$$

Demostración

Procedo a copiar lo que ponga el sensei en la pizarra. Para demostrar esta propiedad, debemos hacer una cuenta.

Caso fácil:

Supongamos $w = \lambda v$. Entonces, $d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t)), \ \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{D}_p$. Tomamos $\alpha(t) = v + tw = v + t\lambda v = (1 + \lambda t)v$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p((1 + \lambda t)v) = \gamma_v(1 + \lambda t)$$
$$\frac{d}{dt}\gamma_v((1 + \lambda t)v) = \lambda\gamma'_v(1 + \lambda t)$$
$$\implies {}_{t=0} d(exp_p)_v(w) = \lambda\gamma'_v(1)$$

Ahora, vamos a utilizar que el módulo es constante.

$$< d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w) > = < \gamma'_v(1), \lambda\gamma'_v(1) > = \lambda||\gamma'_v(1)||^2 = \lambda||\gamma'_v(0)|| = \lambda||v||^2 =$$
$$= < v, \lambda v > = < v, w >$$

Caso chungo:

Supongamos ahora que v y w son linealmente independientes, que es una condición más general a que sean ortogonales. Este tiene un poco más de miga.

Consideramos $\phi(s,t) \ : \ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to T_pS$ tal que

$$\phi(s,t) = s(v+tw) = s\alpha(t)$$

En este caso,

$$\phi(0,t) = 0 \ \ \forall t \qquad \phi(1,t) = \alpha(t) \ \ \forall t^2$$

Si $\alpha \in \mathcal{D}_p$ entonces

$$\phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall s \in [0,1]$$

$$\phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon')$$

$$\alpha(0) \in \mathcal{D}_p \to \exists \varepsilon > 0 | \alpha(t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall |t| < \varepsilon$$

Por compacidad, $\exists \varepsilon > 0 \mid \phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall (s,t) \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$. Ahora, considero la siguiente aplicación

$$\psi(s,t) = exp_p(\phi(s,t)) = exp_p(s\alpha(t))$$

$$\alpha(t) = v + tw$$

$$\psi \ : \ (-\varepsilon, 1+\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to^{\phi} \mathcal{D}_p \to^{exp_p} S, \text{ que es bien definida y } C^\infty$$

$$exp_p(s\alpha(t)) = \gamma_{\alpha(t)}(s)$$

La derivada fácil de ψ es con respecto de s y por ella vamos a comenzar.

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) = \frac{d}{ds}_{t=cte}(\gamma_{\alpha(t)}(s)) = \gamma'_{\alpha(t)}(s) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''\alpha(t)(s) \text{ normal}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}(exp_p(s\alpha(t))) = d(exp_p)_{s(\alpha(t))}(\alpha(t))$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,0) = d(exp_p)_{s,v}(v) = \begin{cases} d(exp_p)_0(v) = v, \ s = 0 \\ d(exp_p)_v(v), \ s = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(1,0) = d(exp_p)_v(v)$$

Bueno si este ha sido el caso fácil agárrate de los pelos que vamos a derivar con respecto de t.

$$s = 0 \to \psi(0,t) = exp_p(0) = p$$

$$s = 1 \to \psi(1,t) = exp_p(\alpha(t)) \to \frac{\partial p}{\partial t}(1,t) = d(exp_p)_{\alpha(t)}(\alpha(t)) = d(exp_p)_{\alpha(t)}(w)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(1,0) = d(exp_p)_v(w)$$

$$< \frac{\partial \psi}{\partial s}(1,0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(1,0) >=??$$

$$f(s) =< \frac{\partial p}{\partial s}(s,0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,0) >, \ \forall s \in [0,1]$$

[2] Luis está haciendo un dibujo bastante ilustrativo en la pizarra (hoy es 17 de Febrero, por si os queréis ver la clase). El caso es que el hijo de puta de Paco aún no se ha puesto a tomar apuntes conmigo (es cuestión de tiempo, siempre se mete el jodido) y no me da tiempo a copiar lo que dice y el dibujo, así que... Lector, good luck.

Mi objetivo es calcular $f(1)$.

$$f'(s) = \underbrace{< \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,0), \ \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,0) >}_{A} + \underbrace{< \frac{\partial\psi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial s}(s,0) >}_{B}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''_v \text{ normal a } S \text{ en } \gamma_v(s)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(s,t)\right) = \beta'_s(0) \in TS = T$$

A tomar por culo, 17 de Febrero y 18 de Febrero, os la veis cracks.

□

Teorema 3.8, Propiedad minimizante de las geodésicas

Es bastante difícil poner con palabras cuán horrenda, larga y desagradable es esta demostración. Por esto, he decidido meter aquí su equivalente en el libro tal cual y sin ningún tipo de respeto. Por si os surgen dudas y queréis consultar la fuente, es el teorema 5.3.9 del curso de Hernández Pastor. Comienza en la siguiente página.

Os animo a hacer un dibujo libre en lo que queda de página y enviármelo por twitter al user @chitobelm.

Demostración. Veamos la primera parte. Dado $p \in V$, sabemos que, si $t \in [0,1]$, $\gamma_p(t) = \gamma_v(t) = \exp_{p_0}(t\mathbf{v})$ es la geodésica maximal para el (único) vector $\mathbf{v}$ tal que $\exp_{p_0}(\mathbf{v}) = p$. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow V$ con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$ otra curva cualquiera.

$$L_0^1(\gamma_p) = \int_0^1 \left|\gamma_p'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(0)\right| dt = |\mathbf{v}|.$$

Vamos a demostrar que $L_a^b(\alpha) \geq |\mathbf{v}|$. Para ello, distinguimos dos casos.

i) Supongamos en primer lugar que $p = p_0$. En tal caso, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo que, trivialmente, $L_a^b(\alpha) \geq 0 = |\mathbf{v}|$. Además, si $L_a^b(\alpha) = 0$, entonces α es constante; y como $\alpha(a) = p_0$, podemos concluir que $\alpha \equiv p_0 \equiv \gamma_p$.

ii) Supongamos por tanto que $p \neq p_0$. Por comodidad, reparametrizamos α de manera que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Como $\alpha(0) = p_0 \neq p = \alpha(1)$, existirá un $t_0 \geq 0$ tal que $\alpha(t_0) = p_0$ y $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > t_0$. Tomamos entonces $\alpha|_{[t_0,1]}$. Claramente, $L_0^1(\alpha) \geq L_{t_0}^1\big(\alpha|_{[t_0,1]}\big)$, por lo que es suficiente trabajar con el trozo de curva $\alpha|_{[t_0,1]}$ y ver que $L_{t_0}^1\big(\alpha|_{[t_0,1]}\big) \geq |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p)$. Hemos «suprimido» así un posible intervalo en el que, o bien α es constantemente igual a p_0, o bien α es un lazo, esto es, sale de p_0 y vuelve a pasar por dicho punto más adelante. Volvemos entonces a reparametrizar $\alpha|_{[t_0,1]}$ para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Ahora se verifica además la condición adicional de que $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > 0$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"'] & V \subset S \arrow[d, shift left, "(\exp_{p_0}|_U)^{-1}"] \\
& U \subset D_{p_0} \arrow[u, shift left, "\exp_{p_0}|_U"]
\end{tikzcd}$$

Como V es entorno normal de p_0, sabemos que $V = \exp_{p_0}(U)$, siendo $U \subset D_{p_0}$ el entorno estrellado del origen $\mathbf{0}$ de $T_{p_0}S$ para el cual $\exp_{p_0}|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Tomamos entonces la curva en el tangente

$$\widetilde{\alpha}(t) = \big(\exp_{p_0}|_U\big)^{-1}\big(\alpha(t)\big) \in U \subset D_{p_0}.$$

Obsérvese en primer lugar que $\widetilde{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$ si $t > 0$; en efecto, si $\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{0}$ para algún $t > 0$, se tendría que $\alpha(t) = \exp_{p_0}(\mathbf{0}) = p_0$, una contradicción. Definimos entonces las funciones

$$\begin{cases} r(t) := \left|\widetilde{\alpha}(t)\right| > 0 & \text{si } t > 0, \\ r(0) := 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad V(t) = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{\left|\widetilde{\alpha}(t)\right|} = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{r(t)} \quad \text{si } t > 0.$$

Claramente, $\left|V(t)\right| = 1$, por lo que $\big\langle V'(t), V(t)\big\rangle = 0$; esto es, $V(t)$ y $V'(t)$ son ortogonales. Además, $\alpha(t) = \exp_{p_0}\big|_U\big(\widetilde{\alpha}(t)\big) = \exp_{p_0}\big(r(t)V(t)\big)$. Derivando esta expresión se tiene

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(r'(t)V(t) + r(t)V'(t)\big) \\ &= r'(t)d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big) + r(t)d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big), \end{aligned}$$

y finalmente, tomando módulos y aplicando el lema de Gauss 5.3.6, obtenemos

$$\begin{aligned} \left|\alpha'(t)\right|^2 &= r'(t)^2 \left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big)\right|^2 + r(t)^2 \left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 \\ &\quad + 2r(t)r'(t)\big\langle d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big), d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\big\rangle \\ &= r'(t)^2\left|V(t)\right|^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 + 0 \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 \geq r'(t)^2, \text{ para todo } t \in (0,1]. \end{aligned}$$

Por tanto, $\left|\alpha'(t)\right| \geq \left|r'(t)\right| \geq r'(t)$ para todo $t \in (0,1]$. Si ahora calculamos la longitud de α, usando la desigualdad anterior se obtiene el resultado buscado:

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 \left|\alpha'(t)\right| dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left|\alpha'(t)\right| dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 r'(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(r(1) - r(\varepsilon)\big)$$

$$= r(1) - r(0) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}\big(\alpha(1)\big)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p)\right| = |\mathbf{v}|.$$

Para concluir la demostración de la primera parte del teorema falta caracterizar la igualdad. Si $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p) = |\mathbf{v}|$, debe darse la igualdad en todas las desigualdades anteriores. Así, $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p)$ si, y sólo si, $\left|r'(t)\right| = r'(t)$ y $\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right| = 0$, lo cual es equivalente a su vez a que $r'(t) > 0$ y $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$. Como $\exp_{p_0}|_U$ es un difeomorfismo en U y $r(t)V(t) \in U$, entonces $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}$ es un isomorfismo lineal. Luego $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $V'(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$, es decir, si $V(t)$ es constante, siendo $V(t) = V(1) = \widetilde{\alpha}(1)/\left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Así,

$$\alpha(t) = \exp_{p_0}\big(r(t)V(t)\big) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_v\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right),$$

donde, recordemos, $r(0) = 0$ y $r(1) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = |\mathbf{v}|$. Por tanto, $\alpha(t)$ es una reparametrización monótona (pues $r'(t) \geq 0$) del segmento de geodésica γ_p.

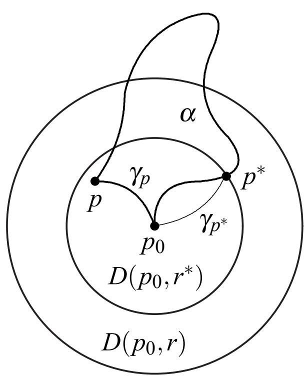

Figura 5.8: γ_p minimiza la longitud en los discos geodésicos.

Probamos ahora la segunda parte del teorema. Sea $r > 0$ de forma que el disco $D(p_0,r) \subset V(p_0)$, y sea $p \in D(p_0,r)$. Tenemos que demostrar que $L_0^1(\gamma_p) \leq L_a^b(\alpha)$, para $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ uniendo p_0 y p. Reparametrizamos de nuevo la curva α para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Si $\alpha\big([0,1]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, entonces la primera parte del teorema nos asegura que $L_0^1(\alpha) \geq L_0^1(\gamma_p)$. Vamos a suponer, por tanto, que la imagen de la curva α se sale del disco $D(p_0,r)$. Sea de nuevo $\mathbf{v} \in U$ el (único) vector verificando que $p = \exp_{p_0}(\mathbf{v})$.

Como el punto $p \in D(p_0,r) = \exp_{p_0}\big(D(\mathbf{0},r)\big)$, se tiene que $\mathbf{v} \in D(\mathbf{0},r)$, es decir, $|\mathbf{v}| < r$. Sea entonces $r^* > 0$ tal que $|\mathbf{v}| < r^* < r$, lo que nos asegura que $p \in D(p_0,r^*)$. Representamos por t_0 el primer valor del parámetro en el que la curva α se sale del disco $D(p_0,r^*)$, esto es,

$$t_0 = \inf\big\{t \in [0,1] : \alpha(t) \notin D(p_0,r^*)\big\}.$$

Entonces, $\alpha\big([0,t_0]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, y además, en los extremos α verifica $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(t_0) =: p^* \in S(p_0,r^*) \subset D(p_0,r)$ (véase la figura 5.8). Bajo tales condiciones, la primera parte del teorema asegura que $L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*})$, donde, como ya es habitual, γ_{p^*} representa el segmento de geodésica radial que une $p_0 = \gamma_{p^*}(0)$ con $p^* = \gamma_{p^*}(1)$, (véase la figura 5.8). Denotemos por $\mathbf{v}^* = \gamma'_{p^*}(0)$. Entonces,

$$L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*}) = \int_0^1 \left|\gamma'_{p^*}(t)\right| dt = \int_0^1 |\mathbf{v}^*|\, dt = |\mathbf{v}^*| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p^*)\right| = r^*;$$

por lo tanto,

$$L_0^1(\alpha) \geq L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq r^* > |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p),$$

como se quería demostrar. $\square$

Teorema 3.9

Inciso, más adelante se hace referencia a 4.2, se refiere a esto

Tenemos por tanto que demostrar que

$$\sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big| = \sqrt{EG-F^2}(u,v). \tag{4.2}$$

Veámoslo. Sea $q=(u,v)\in X^{-1}(V)\subset U$. Entonces $p=X(q)=\overline{X}\big(\phi(q)\big)$. Disponemos de dos bases de T_pS, $\{X_u(q),X_v(q)\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big),\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\}$, y podemos expresar los elementos de una de ellas como combinación lineal de los de la otra:

$$X_u(q)=\big(\overline{X}\circ\phi\big)_u(q)=\frac{\partial}{\partial u}\overline{X}\big(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)\big)=\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}+\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{v}}{\partial u},$$
$$X_v(q)=\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}+\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{EG-F^2}(q)=|X_u\wedge X_v|(q)=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\\ \frac{\partial\overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\end{pmatrix}\right|\left|\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\right|\big(\phi(q)\big)$$
$$=\sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big|;$$

Demostración. Obsérvese que $X(r,\theta)=\exp_{p_0}(\mathbf{v}_{r,\theta})=\exp_{p_0}(r\mathbf{v}_\theta)=\gamma_{v_\theta}(r)$. En consecuencia, $X_r=\gamma'_{v_\theta}(r)$ y $E=\langle X_r,X_r\rangle=\big\langle\gamma'_{v_\theta}(r),\gamma'_{v_\theta}(r)\big\rangle=\langle\mathbf{v}_\theta,\mathbf{v}_\theta\rangle=1$.

Ahora bien, $X_\theta=d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(r\mathbf{v}'_\theta(\theta)\big)$, mientras que X_r se puede escribir como $X_r=d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(\mathbf{v}_\theta(\theta)\big)$. Además, al ser $|\mathbf{v}_\theta|=1$, entonces $\big\langle\mathbf{v}'_\theta(\theta),\mathbf{v}_\theta(\theta)\big\rangle=0$, es decir, $\mathbf{v}_\theta$ y $\mathbf{v}'_\theta$ son ortogonales. Por lo tanto, el lema de Gauss nos asegura que

$$F=\langle X_r,X_\theta\rangle=\big\langle d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(\mathbf{v}_\theta(\theta)\big),d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(r\mathbf{v}'_\theta(\theta)\big)\big\rangle=0.$$

Finalmente, $G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2 \left| d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|^2 > 0$. Tan sólo resta calcular el límite de las funciones G y $\left(\sqrt{G}\right)_r$ cuando $r \to 0$. Por la dependencia diferenciable respecto a las condiciones iniciales de las geodésicas como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos calcular el límite

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left| d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right| &= \left| d(\exp_{p_0})_{\mathbf{0}}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right| = \left|\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right| \\ &= \left| -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2\right| = 1.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\left| d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|$ es una función acotada, por lo que

$$\lim_{r\to 0} G = \lim_{r\to 0} r^2 \left| d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|^2 = 0.$$

Por último, para calcular el límite $\lim_{r\to 0}\left(\sqrt{G}\right)_r$, vamos a utilizar las coordenadas normales ya estudiadas en la sección anterior. Elegimos pues la parametrización dada por un sistema de coordenadas normales $\overline{X}(u,v)$ en p_0 de suerte que el cambio de coordenadas $\phi(r,\theta) = (u,v)$ viene dado por $u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$. Si representamos por $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ los coeficientes de su primera forma fundamental, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{G}(r,\theta) &= \sqrt{EG-F^2}(r,\theta) = \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\left|\det(J\phi)(r,\theta)\right| \\ &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\end{aligned}$$

(véase (4.2)), y un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{G}\right)_r(r,\theta) &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\right) \\ &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right) \\ &\quad + r\frac{(\overline{G}\circ\phi)(\overline{E}\circ\phi)_r + (\overline{E}\circ\phi)(\overline{G}\circ\phi)_r - 2(\overline{F}\circ\phi)(\overline{F}\circ\phi)_r}{2\left(\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\right)\circ\phi}(r,\theta).\end{aligned}$$

Obsérvese que $(u,v) \to (0,0)$ cuando $r \to 0$, por lo que en el límite obtenemos el punto $p_0 = \overline{X}(0,0)$, en el que las coordenadas normales están bien definidas y valen $\overline{E}(0,0) = \overline{G}(0,0) = 1$ y $\overline{F}(0,0) = 0$.

Además, las primeras derivadas de $\overline{E}, \overline{F}$ y $\overline{G}$ (respecto a u y v) también se anulan en el $(0,0)$ (véase el ejercicio 5.26). Luego

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left(\overline{E}\circ\phi\right)_r(r,\theta) &= \lim_{r\to 0}\left[\overline{E}_u\big(\phi(r,\theta)\big)\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)+\overline{E}_v\big(\phi(r,\theta)\big)\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\right]\\ &= \overline{E}_u(0,0)\cos\theta+\overline{E}_v(0,0)\operatorname{sen}\theta = 0.\end{aligned}$$

Análogamente $\text{lím}_{r\to 0}\left(\overline{F}\circ\phi\right)_r(r,\theta) = \text{lím}_{r\to 0}\left(\overline{G}\circ\phi\right)_r(r,\theta) = 0$ y, en consecuencia, se obtiene que

$$\lim_{r\to 0}\big(\sqrt{G}\big)_r = \lim_{r\to 0}\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(r,\theta)\big) = 1,$$

lo que concluye la prueba. □