

Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

10 de diciembre de 2021

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1, 2, 3\}$, los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ (recordemos que $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$).

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ entonces:

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{9}{24} \cdot 0 = 0 & x \in [0, 1) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = \frac{2}{3} & x \in [2, 3) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = 1 & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Pasando a la parte continua, $P_c(B) = \frac{1}{1-\alpha}P(B \cap D^c)$ y $F_c(x) = P_c((-\infty, x])$
 $= \frac{1}{1-\alpha}P((-\infty, x] \cap D^c)$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{24-9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Hoja 4

Ejercicio 1.

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

a) $Y = aX - b$ con $a \neq 0$

La función usada es la $g(x) = ax - b$, esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de a . Si $h(y) = g^{-1}(x) = \frac{y+b}{a}$, recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \quad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos $h'(y) = \frac{1}{a}$ y $g((0,1))$:

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \quad f_Y(y) = 2 \left(1 - \frac{y+b}{a}\right) \frac{1}{a} = 2 \frac{a-y-b}{a^2} I_{(-b, a-b)}$$

$$a < 0 \quad f_Y(y) = 2 \left(1 - \frac{y+b}{a}\right) - \frac{1}{a} = 2 \frac{y+b-a}{a^2} I_{(a-b, -b)}$$

b) $Z = 3X^2 - X$

Usaremos la función $g(x) = 3x^2 - x$, esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos E_1, E_2 para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en $x = \frac{1}{6}$, con lo que tenemos los

conjuntos $E_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, $E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$, tenemos que:

$$E_1 \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 0\right) = F_1 \quad E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 2\right) = F_2$$

Para cada intervalo, definimos g_i :

$$g_1 = g|_{(0, \frac{1}{6})} : \left(0, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \quad g_2 = g|_{(\frac{1}{6}, 1)} : \left(\frac{1}{6}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 2\right)$$

Entonces tenemos que:

$$f_Z(z) = \sum_r f_X(h_r(z)) |h'_r(z)|$$

Siendo $h_r(z)$ la inversa de $g_r(z)$, las calculamos:

$$z = 3x^2 - x \iff 3x^2 - x - z = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12z}}{6} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6} = h_2(z) & (\text{creciente}) \\ \frac{1 - \sqrt{1 + 12z}}{6} = h_1(z) & (\text{decreciente}) \end{cases}$$

$$h'_1(z) = -\frac{12}{26\sqrt{1 + 12z}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 12z}}$$

$$h'_2(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} z \in \left(-\frac{1}{12}, 0\right) &\implies f_Z(z) = 2 \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} + 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} = \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} \left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2 \cdot 10}{6\sqrt{1 + 12z}} = \frac{10}{3\sqrt{1 + 12z}} \\ z \in (0, 2) &\implies f_Z(z) = 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

$$f(x, y) = \frac{2}{(2 - x - y)^3} I_E(x, y) \quad \text{con } E \text{ el cuadrilátero de vértices } (0, 0), (1, 0), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), (0, 1)$$

Y los cambios de variable:

$$\begin{cases} U = \frac{X}{2 - X - Y} \\ V = \frac{Y}{2 - X - Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{2 - x - y} \\ v(x, y) = \frac{y}{2 - x - y} \end{cases}$$

Esta transformación es biyectiva.

Como comentario, recordar que los cambios de variable de la forma:

$$u = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \quad v = \frac{a'x + b'y + c'}{dx + ey + f}$$

Además de ser biyectivos transforman rectas en rectas.

Entonces tenemos que:

$$f_{U,V}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Vemos en qué se transforman los vértices del cuadrilátero con estas transformaciones:

1. $(0, 0) \rightarrow (0, 0)$
2. $(1, 0) \rightarrow (1, 0)$
3. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \rightarrow (1, 1)$
4. $(0, 1) \rightarrow (0, 1)$

Calculamos ahora las inversas:

$$u(2 - x - y) = x \iff -2u + ux + uy + x = 0 \iff (1 + u)x + uy - 2u = 0$$

$$v(2 - x - y) = y \iff -2v + vx + vy + y = 0 \iff (1 + v)y + vx - 2v = 0$$

Espectacular sistema de ecuaciones lineales del que sacamos que $x = \frac{2u}{1 + u + v}$ $y = \frac{2v}{1 + u + v}$

Ahora,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1 + u + v) - 2u}{(1 + u + v)^2} = \frac{2(1 + v)}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2u}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2v}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1 + u)}{(1 + u + v)^2}$$

El Jacobiano entonces es $\frac{4}{(1+u+v)^3}$, con lo que la función de densidad $f_{(U,V)}$ es:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2 - \frac{2u}{1+u+v}\right)^3} \frac{4}{(1+u+v)^3} = 1 \quad \text{Si } (u,v) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = 0 \quad \text{Si } (u,v) \notin (0,1) \times (0,1)$$

Recordemos que $E\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 2x+y < 2, x+2y < 2\}$, utilizando las inversas que hemos calculado antes vemos que los elementos de F cumplen:

$$\frac{2u}{1+u+v} > 0 \implies u > 0 \quad \frac{2v}{1+u+v} > 0 \implies v > 0$$

$$\frac{2 \cdot 2u}{1+u+v} + \frac{2v}{1+u+v} < 2 \implies u < 1 \quad \dots \implies v < 1$$

Lo que nos coincide con lo que habíamos calculado previamente sabiendo que la transformación llevaba rectas a rectas.

Calculamos ahora también $f_1(x) = \int f(x,y)dy$:

$$\begin{cases} \text{Si } x \in (0, \frac{2}{3}) & f_1(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \\ \text{Si } x \in (\frac{2}{3}, 1) & f_1(x) = \int_0^{2-2x} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \end{cases}$$

Ejercicio 3. Vemos los puntos para los que $p((i,j)) = \text{cte}$:

1. $p((i,j)) = k \cdot 2 \rightarrow (i,j) = (1,1)$
2. $p((i,j)) = k \cdot 3 \rightarrow (i,j) = (1,2), (2,1)$
- \vdots
3. $p((i,j)) = k \cdot h \rightarrow (i,j) = (i, h-i)$

Para cada caso hay $h-1$ parejas.

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum p(i,j) &= \sum k(i+j) = \sum_{h=2}^n \sum_{i=1}^{h-1} k \cdot h = \sum_{h=2}^n k(h-1)h = k \sum_{h=2}^n (h^2 - h) = \\ &= k \left(\sum_{h=2}^n h^2 - \sum_{h=2}^n h \right) = k \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \cancel{1} - \frac{n(n+1)}{2} + \cancel{1} \right) = k \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \\ &= k \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = 1 \iff k = \frac{3}{n(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

Calcularemos ahora $p_1(i)$:

$$p_1(i) = \sum_j p((i, j)) = \sum_{j=1}^{n-i} k(i+j) = k \left(\sum_{j=1}^{n-i} i + \sum_{j=1}^{n-i} j \right) = k \left(i(n-i) + \frac{(n-i+1)(n-i)}{2} \right)$$

$$p_1(i) = k \frac{(n-i)(n+i+1)}{2}$$

Vemos ahora la familia de distribuciones $p_{2|1}(j|i)$:

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i, j))}{p_1(i)} = \frac{k(i+j)}{\frac{k(n-i)(n+i+1)}{2}} = 2 \frac{i+j}{(n-i)(n+i+1)} \text{ si } j = 1, 2, \dots, n-i$$

Ejercicio 4.

$$f(x, y) = \begin{cases} k(1-x-y) & (x, y) \in T \\ 0 & (x, y) \notin T \end{cases}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x} k(1-x-y)dy & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$\int_0^{1-x} k(1-x-y)dy = k(1-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = k \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} k \frac{(1-x)^2}{2} & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Con esto podemos calcular el valor de k :

$$\int_0^1 k \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{k}{6} = 1 \iff k = 6$$

Sea $x \in (0, 1)$, calculemos $f_{2|1}(y|x)$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{6(1-x-y)}{3(1-x)^2} = \frac{2(1-x-y)}{(1-x)^2} \text{ si } y \in (0, 1-x)$$

$$f_{2|1}(y|x) = 0 \text{ si } y \notin (0, 1-x)$$

Vemos ahora $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x k \frac{(1-u)^2}{2} du = 1 - (1-x)^3 & x \in (0, 1) \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{2|1}(y|x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int_0^y \frac{2(1-x-v)}{(1-x)^2} dv = 1 - \frac{(1-x-y)^2}{(1-x)^2} & y \in (0, 1-x) \\ 1 & y > 1-x \end{cases}$$

Hoja 5

Ejercicio 1.

a) Al ser la distribución uniforme, podemos calcular k como $\frac{1}{V(C)}$. Como C es medio cubo de lado 1, su volumen es $\frac{1}{2}$, con lo que $k = 2$.

b)

$$f_{12}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z) dz = \int_0^1 k dz = 2 \text{ si } (x, y) \in T_1^a$$

$$f_{12}(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) \notin T_1$$

$$f_{13}(x, z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z) dy = \int_0^{1-x} 2 dy = 2(1-x) \text{ si } (x, z) \in C_1^b$$

$$f_{13}(x, z) = 0 \text{ si } (x, z) \notin C_1$$

Análogamente tenemos que:

$$f_{23}(y, z) = 2(1-y) \text{ si } y \in C_2$$

$$f_{23}(y, z) = 0 \text{ si } (y, z) \notin C_2$$

Para obtener las unidimensionales, integramos a partir de las que hemos calculado:

$$f_1(x) = \int f(x, y, z) dy dz = \int f_{12}(x, y) dy = \int_0^{1-x} 2 dy = 2(1-x) \text{ si } x \in (0, 1)$$

$$f_1(x) = 0 \text{ si } x \notin (0, 1)$$

$$f_3(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{13}(x, z) dx = \int_0^1 2(1-x) dx = 2 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 \text{ si } z \in (0, 1)$$

$$f_3(z) = 0 \text{ } z \notin (0, 1)$$

El que queda te lo imaginas, un saludo.

c)

Observamos en este apartado que partimos de una distribución uniforme en el triángulo T_1 .

Para el primer punto, observamos que el punto está dentro del triángulo, luego:

$$F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot A(\text{rect}) = 2 \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Para el segundo caso, sin embargo, el punto está fuera del triángulo, luego tendremos que calcular el área de la intersección del rectángulo formado por este punto con el triángulo T_1 .

Esta región está formada por un rectángulo y un triángulo, tendremos que:

$$F\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \right)$$

d)

Importante notar que **no** nos piden la función de distribución, es suficiente con la de densidad en este caso (al ser continuo).

Sea $y \in (0, 1)$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y} \text{ si } x \in (0, 1-y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = 0 \text{ } x \notin (0, 1-y)$$

$$^a T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}$$

$$^b C_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < z < 1\}$$

Ejercicio 2.

$$F_x(t) = P(x \leq t) = P(x + y \leq t)$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \text{área del triángulo con catetos } t = \frac{t^2}{2} & 0 < t < 1 \\ 1 - \text{área triángulo cateto } (2-t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2} = \frac{2 - (2-t)^2}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

Derivando obtenemos que:

$$f_x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Este problema lo podríamos ver de otra forma: Sean U, V variables aleatorias independientes ambas con distribución uniforme en $(0, 1)$. Calcular la función de densidad de $U + V$. En este caso podremos usar las convoluciones.

$$f_U(u) = I_{(0,1)}(u) \quad f_V(v) = I_{(0,1)}(v)$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u & 0 < u < 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases} \quad F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ v & 0 < v < 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases}$$

Si $Z = U + V$

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_U(z-t)f_V(t)dt = \int_{\mathbb{R}} I_{(0,1)}(z-t)I_{(0,1)}(t)dt = \int_0^1 I_{(0,1)}(z-t)dt$$

Como $0 < z-t < 1 \implies z-1 < t < z$, luego tendremos:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int_0^z dt = z & 0 < z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dt = 1 - (z-1) = 2-z & 1 < z < 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

Lo que es igual a lo que hemos calculado antes.

Otra forma análoga)

Sea (U, V) uniforme, se obtiene una nueva variable (X, Y) mediante la siguiente transformación:

$$\begin{cases} X = U + V \\ Y = V \end{cases}$$

Calcular la función de distribución marginal de la v.a. X

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{(U,V)}(u(x, y), v(x, y)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Y luego calcularíamos f_X

Ejercicio 3.

$$f_X(t) = I_{(0,1)}(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \\ 0 & t \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int f_X(z-t)dF_Y(t) = \int I_{(0,1)}(z-t)dF_Y(t) =$$

Como Y es discreta y toma valores en $t = 0, 1$, la integral la podemos calcular como:

$$= I_{(0,1)}(z) \frac{1}{2} + I_{(0,1)}(z-1) \frac{1}{2} = I_{(0,1)}(z) \frac{1}{2} + I_{(1,2)}(z) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(I_{(0,1)}(z) + I_{(1,2)}(z)) = I_{(0,2)}(z) \frac{1}{2}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & z \in (0, 2) \\ 0 & z \notin (0, 2) \end{cases}$$

Integrando llegamos a:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}z & 0 < z < 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.

a)

Los valores que se pueden tomar son los que cumplen que $i \leq j$. El caso (i, j) con $i < j$ se cumple cuando se saca ese par en el orden (i, j) o en el orden (j, i) . Para el caso $i = j$, solo hay un modo de sacarlo. Entonces:

$$p((i, j)) = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & i < j \\ \frac{1}{n^2} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

b)

$$p_1(i) = \sum_{j=1}^n p((i, j)) = \sum_{j=i}^n p((i, j)) = p(i, i) + \sum_{j=i+1}^n p((i, j)) = \frac{1}{n^2}(n-i) \frac{2}{n^2} \quad \forall i$$

$$p_1(i) = \frac{2n - 2i + 1}{n^2}$$

c)

$$p_2(j) = \sum_{i=1}^j p((i, j)) = \sum_{i=1}^{j-1} p((i, j)) + p((j, j)) = (j-1) \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \quad \forall j$$

$$p_2(j) = \frac{2j - 1}{n^2}$$

d)

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i,j))}{p_1(i)}$$

Sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 Si $j = i + 1, \dots, n$

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{2/n^2}{(2n - 2i + 1)/n^2} = \frac{2}{2(n - i) + 1}$$

Si $j = i$

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{1/n^2}{(2n - 2i + 1)/n^2} = \frac{1}{2(n - i) + 1}$$

En el resto de casos

$$p_{2|1}(j|i) = 0$$

e)

Sea $j \in \{1, 2, \dots, n\}$
 Si $i = 1, \dots, j - 1$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{((i,j))}{p_2(j)} = \frac{2/n^2}{(2j - 1)/n^2} = \frac{2}{2j - 1}$$

Si $i = j$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{((i,j))}{p_2(j)} = \frac{1}{2j - 1}$$

En el resto de casos

$$p_{1|2}(i|j) = 0$$

Ejercicio 5.

$$E(X) = \sum x_i P(A_i) = \sum i P(\{i\}) = \sum i C_i$$

Calculamos el valor de C :

$$\sum_{i=1}^n C \cdot i = C \frac{n(n+1)}{2} = 1 \implies C = \frac{2}{n(n+1)}$$

Luego tenemos que:

$$E(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

Ejercicio 6.

Tenemos que:

$$\begin{cases} u = \arctan \frac{y}{x} \\ v = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \implies$$

$$\frac{y}{x} = \tan u \implies k' \sin(u) = y \quad k' \cos(u) = x$$

$$v = \sqrt{k'^2 \sin^2(u) k'^2 \sin^2(u)} = k'$$

$$\begin{cases} y = v \sin(u) \\ x = v \cos(u) \end{cases}$$

Calculamos ahora el Jacobiano:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -v \sin(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \cos(u)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \sin(u)$$

El Jacobiano entonces es $-v \sin^2(u) - v \cos^2(u) = -v$

Vemos ahora el conjunto imagen de E por la transformación, que llamaremos F . Observamos en primer lugar que u es el ángulo formado por la recta que pasa por el origen y el punto (x, y) , tendremos que $u \in (0, \frac{\pi}{4})$. Es fácil ver que v se moverá entre 0 y $+\infty$. Tendremos entonces que:

$$f_{(U,V)}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \quad (u, v) \in F$$

$$f_{(U,V)} = \begin{cases} ke^{-v^2} v & (u, v) \in F \\ 0 & (u, v) \notin F \end{cases}$$

Para calcular el valor de k , integramos en la función que acabamos de obtener (porque en este caso es más fácil):

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/4} e^{-v^2} v du dv = k \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} v e^{-v^2} dv = -k \frac{\pi}{4} \frac{e^{-v^2}}{2} \Big|_0^{+\infty} = k \frac{\pi}{8} = 1 \implies k = \frac{8}{\pi}$$

Ejercicio 7.

Observamos que el número total de posibilidades es 4^n (cada objeto tiene cuatro opciones).

a)

Para verlo, pensemos primero en la probabilidad de que un solo cajón quede vacío:

$$A_i = \{\text{el cajón } i \text{ quede vacío}\}$$

$$P(A_i) = \frac{3^n}{4^n}$$

Entonces la probabilidad de que tres cajones queden vacíos podría calcularse como la unión (usaríamos que $P(A_i \cap A_j) = \frac{2^n}{4^n}$ y $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{4^n}$).

La probabilidad de que tres cajones queden vacíos es:

$$P(\cup(A_i \cap A_j \cap A_k)) = \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{4}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}}$$

b)

Calcularemos primero $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c)$. Usando que $A \cap B = A - (A \cap B^c)$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c &= A_1 \cap A_2 \cap A_3^c - (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4) = \\ &= (A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_2 \cap A_3) - A_1 \cap A_2 \cap A_4 \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) = P(A_1 \cap A_2)P(-A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \frac{2^n}{4^n} - \frac{2}{4^n} = \frac{2^n - 2}{4^n}$$

Entonces la probabilidad de que dos cajones queden vacíos es $\binom{4}{2} \frac{2^n - 2}{4^n}$.

c)

El resultado es $\frac{3^{n-3} \cdot 2 \cdot 3}{4^{n-1}}$

Hoja 6

Ejercicio 1.

$$\begin{aligned}
 X &= 0, 1, 2, \dots, n & P(X = i) &= \frac{1}{n+1} \\
 E(X) &= \sum_{i=0}^n i \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2} \\
 E(X^2) &= \sum_{i=0}^n \frac{i^2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6} \\
 Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.*Primera parte*

Observamos primero que los números de la forma $i/3^n$ son:

$$\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}, \frac{4}{3^n}, \dots, \frac{3^{n-1}}{3^n}, \frac{3^n}{3^n}$$

Y vemos que los numeradores múltiplos de 3 en este conjunto son $3^{n-1} : 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3, \dots, 3^{n-1} \cdot 3$. Luego $|D| = 3^n - 3^{n-1} = 3^{n-1} \cdot 2$. Por tanto:

$$k = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{x_i \in D, x_i \leq 1/3} k$$

Observamos que el número de sumandos es $3^{n-1} - 3^{n-2}$ (quitamos los numeradores $3, 2 \cdot 3, \dots, 3^{n-2} \cdot 3$) para los casos $n > 1$. Por tanto:

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2 \cdot 3^{n-2}}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Si } n = 1, D = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \text{ y } F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Segunda parte

Para usar el ejercicio anterior, dividimos el sumatorio en dos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x_i \in D} \sum_{x_i = i/3^n} P(\{ \frac{i}{3^n} \}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x_i = i/3^n \text{ irred}} \frac{k}{6^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} \frac{k}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{n-1} 3} = \frac{k}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{3} k = 1 \implies k = \frac{3}{2} \end{aligned}$$