continua (en V, donde es un difeomorfismo), $\exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0)$ es un cerrado verificando $U_0 \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0) \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(V) = U$, y por tanto, $\mathrm{cl}\,U_0 \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0) \subset U$.

Si $\mathbf{w} \notin U_0$, dado que $\mathrm{cl}\,U_0 \subset U$, ambos U_0, U son conexos y U es estrellado respecto a $\mathbf{0}$, podríamos asegurar la existencia de $t_0 \leq 1$ tal que $t_0\mathbf{w} \notin U_0$ pero $t_0\mathbf{w} \in U$. En tal caso, $\exp_{p_0}(t_0\mathbf{w}) = \gamma_w(t_0) = \alpha(t_0)$. Ahora bien, tal y como hemos definido la curva $\widetilde{\alpha}$, sabemos que $\alpha(t_0) = \exp_{p_0}\big(\widetilde{\alpha}(t_0)\big)$, donde $\widetilde{\alpha}(t_0) \in U_0$ por la construcción de U_0. Habríamos llegado así a que $\exp_{p_0}\big(\widetilde{\alpha}(t_0)\big) = \exp_{p_0}(t_0\mathbf{w})$ con $t_0\mathbf{w} \neq \widetilde{\alpha}(t_0)$, lo que contradiría la inyectividad de $\exp_{p_0}$ (dentro de U).

Por lo tanto, $\mathbf{w} \in U_0 \subset U$. Tenemos entonces que $\exp_{p_0}(\mathbf{v}) = p = \exp_{p_0}(\mathbf{w})$, con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$, lo que nos permite concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ por la inyectividad de $\exp_{p_0}$. En consecuencia, $\alpha = \gamma_w|_{[0,1]} = \gamma_v|_{[0,1]} = \gamma_p$, tal y como se quería demostrar. □

5.3.1. El lema de Gauss

Sean S una superficie regular y $p \in S$. Elegimos un vector cualquiera $\mathbf{v} \in D_p$, para el que vamos a estudiar la diferencial $d(\exp_p)_{\mathbf{v}} : T_{\mathbf{v}}D_p \equiv T_pS \longrightarrow T_{\exp_p(\mathbf{v})}S$. Sea $\mathbf{w} \in T_pS$. Nos preguntamos entonces qué se puede decir de $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$. El lema de Gauss nos da la respuesta. Desde luego, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ya sabemos que $d(\exp_p)_{\mathbf{0}} = 1_{T_pS}$, por lo que vamos a suponer que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Lema 5.3.6 (de Gauss –primera versión). *Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in D_p$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Sea además $\mathbf{w} \in T_pS$.*

i) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, entonces $\big|d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\big| = |\mathbf{w}|$.

ii) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$, $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ son ortogonales.

Demostración. Supongamos primero que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, esto es, $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para un cierto $\lambda > 0$. Entonces, tomando la curva $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w} = (1 + \lambda t)\mathbf{v}$, que está contenida en D_p y verifica $\alpha(0) = \mathbf{v}$, $\alpha'(0) = \mathbf{w}$, se tiene que

$$d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p\big((1+\lambda t)\mathbf{v}\big) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_v(1+\lambda t) = \lambda\gamma_v'(1),$$

donde, como es usual, $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$ es la geodésica maximal con $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = \mathbf{v}$. Tomando módulos, $\big|d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\big| = |\lambda|\,\big|\gamma_v'(1)\big| = |\lambda|\,\big|\gamma_v'(0)\big| = |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$.

Estudiemos ahora el segundo caso, y supongamos por tanto que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales. Definimos $\varphi(s,t) = \exp_p\big(s(\mathbf{v} + t\mathbf{w})\big)$. ¿Cuál es su dominio de definición?

Sea $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Claramente, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w} \in D_p$ (véase la figura 5.6). En consecuencia, al ser D_p estrellado respecto al origen $\mathbf{0} \in T_pS$, si $s \in [0,1]$, se tiene que $s\alpha(t) = s(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) \in D_p$.

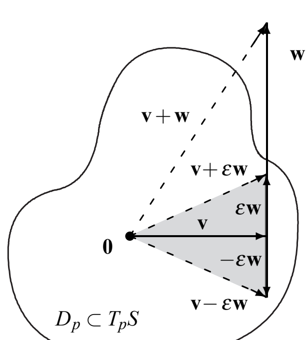

Figura 5.6: Dominio de φ.

Ahora bien, como D_p es un abierto, podemos asegurar la existencia de un $\varepsilon' > 0$ (independiente de t), verificando que para todo $s \in (-\varepsilon', 1 + \varepsilon')$, $s\alpha(t) \in D_p$. En efecto, si $D_p = T_pS$ el resultado es trivial. Si $D_p \subset T_pS$ estrictamente y representamos por τ el triángulo con vértices $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}+\varepsilon\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}-\varepsilon\mathbf{w}$, que es un compacto (véase la figura 5.6), es evidente que la distancia (euclídea, en T_pS) $\rho = \operatorname{dist}(\tau, T_pS\backslash D_p) > 0$; basta tomar entonces $\varepsilon' > 0$ verificando $\varepsilon' < \rho/2$. Así pues, la aplicación

$$\varphi : (-\varepsilon', 1+\varepsilon') \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S, \quad \text{dada por} \quad \varphi(s,t) = \exp_{\mathrm{p}}\big(s\alpha(t)\big)$$

está bien definida. Además, es claro que,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(1,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}),$$

y por lo tanto, es suficiente demostrar que $\langle \partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial s\rangle\,\big|_{(t,s)=(1,0)} = 0$. Para ello, definimos la función

$$f(s) := \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle, \quad \text{con } s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon').$$

Claramente se tiene que $f(0) = 0$, ya que $(\partial\varphi/\partial t)(0,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, siendo además su derivada

$$f'(s) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s,0) \right\rangle. \tag{5.14}$$

Estudiemos los dos sumandos de (5.14) separadamente, comenzando por el segundo. Por un lado,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s,0) = \frac{d^2}{ds^2}\big(\exp_{\mathrm{p}}(s\mathbf{v})\big) = \gamma_v''(s).$$

Como γ_v es una geodésica, el campo velocidad γ_v' es paralelo, y por tanto, $\gamma_v''(s)$ está en la dirección del normal a la superficie en el punto $\varphi(s,0)$. Por otro lado, si $\beta_s : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ representa la curva $\beta_s(t) = \varphi(s,t)$, entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(s,t) = \beta_s'(0) \in T_{\beta_s(0)}S = T_{\varphi(s,0)}S$$

es un vector tangente a S. En consecuencia, $\big\langle (\partial\varphi/\partial t)(s,0), (\partial^2\varphi/\partial s^2)(s,0)\big\rangle = 0$.

Finalmente, estudiamos el primer sumando de (5.14).

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle &= \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t)\right), \left.\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t)\right|_{t=0} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \right\rangle = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t)\right|^2.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\exp_{\mathrm{p}}\big(s\alpha(t)\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\big(\gamma_{\alpha(t)}(s)\big) = \gamma_{\alpha(t)}'(s),$$

por lo que

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t)\right|^2 = \left|\gamma_{\alpha(t)}'(s)\right|^2 = \left|\gamma_{\alpha(t)}'(0)\right|^2 = \left|\alpha(t)\right|^2 = |\mathbf{v}+t\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + 2t\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + t^2\,|\mathbf{w}|^2.$$