

# Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

2 de noviembre de 2021

# Hoja 3

## Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea  $D = \{1, 2, 3\}$ , los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y  $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$  (recordemos que  $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$ ).

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue:  $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que  $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$  entonces:

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{9}{24} \cdot 0 = 0 & x \in [0, 1) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = \frac{2}{3} & x \in [2, 3) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = 1 & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Pasando a la parte continua, } P_c(B) &= \frac{1}{1 - \alpha}P(B \cap D^c) \text{ y } F_c(x) = P_c((-\infty, x]) \\ &= \frac{1}{1 - \alpha}P((-\infty, x] \cap D^c) \end{aligned}$$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left( \frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left( \frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left( \frac{24-9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

# Hoja 4

**Ejercicio 1.**

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

**a)**  $Y = aX - b$  con  $a \neq 0$

La función usada es la  $g(x) = ax - b$ , esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de  $a$ . Si  $h(y) = g^{-1}(x) = \frac{y+b}{a}$ , recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \quad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos  $h'(y) = \frac{1}{a}$  y  $g((0,1))$ :

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \quad f_Y(y) = 2 \left(1 - \frac{y+b}{a}\right) \frac{1}{a} = 2 \frac{a-y-b}{a^2} I_{(-b, a-b)}$$

$$a < 0 \quad f_Y(y) = 2 \left(1 - \frac{y+b}{a}\right) - \frac{1}{a} = 2 \frac{y+b-a}{a^2} I_{(a-b, -b)}$$

**b)**  $Z = 3X^2 - X$

Usaremos la función  $g(x) = 3x^2 - x$ , esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos  $E_1, E_2$  para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en  $x = \frac{1}{6}$ , con lo que tenemos los

conjuntos  $E_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$ ,  $E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$ , tenemos que:

$$E_1 \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 0\right) = F_1 \quad E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 2\right) = F_2$$

Para cada intervalo, definimos  $g_i$ :

$$g_1 = g|_{(0, \frac{1}{6})} : \left(0, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \quad g_2 = g|_{(\frac{1}{6}, 1)} : \left(\frac{1}{6}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 2\right)$$

Entonces tenemos que:

$$f_Z(z) = \sum_r f_X(h_r(z)) |h'_r(z)|$$

Siendo  $h_r(z)$  la inversa de  $g_r(z)$ , las calculamos:

$$z = 3x^2 - x \iff 3x^2 - x - z = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12z}}{6} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6} = h_2(z) & (\text{creciente}) \\ \frac{1 - \sqrt{1 + 12z}}{6} = h_1(z) & (\text{decreciente}) \end{cases}$$

$$h'_1(z) = -\frac{12}{26\sqrt{1 + 12z}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 12z}}$$

$$h'_2(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} z \in \left(-\frac{1}{12}, 0\right) &\implies f_Z(z) = 2 \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} + 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} = \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} \left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2 \cdot 10}{6\sqrt{1 + 12z}} = \frac{10}{3\sqrt{1 + 12z}} \\ z \in (0, 2) &\implies f_Z(z) = 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} \end{aligned}$$

## Ejercicio 2.

$$f(x, y) = \frac{2}{(2 - x - y)^3} I_E(x, y) \quad \text{con } E \text{ el cuadrilátero de vértices } (0, 0), (1, 0), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), (0, 1)$$

Y los cambios de variable:

$$\begin{cases} U = \frac{X}{2 - X - Y} \\ V = \frac{Y}{2 - X - Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{2 - x - y} \\ v(x, y) = \frac{y}{2 - x - y} \end{cases}$$

Esta transformación es biyectiva.

Como comentario, recordar que los cambios de variable de la forma:

$$u = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \quad v = \frac{a'x + b'y + c'}{dx + ey + f}$$

Además de ser biyectivos transforman rectas en rectas.

Entonces tenemos que:

$$f_{U,V}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Vemos en qué se transforman los vértices del cuadrilátero con estas transformaciones:

1.  $(0, 0) \rightarrow (0, 0)$
2.  $(1, 0) \rightarrow (1, 0)$
3.  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \rightarrow (1, 1)$
4.  $(0, 1) \rightarrow (0, 1)$

Calculamos ahora las inversas:

$$u(2 - x - y) = x \iff -2u + ux + uy + x = 0 \iff (1 + u)x + uy - 2u = 0$$

$$v(2 - x - y) = y \iff -2v + vx + vy + y = 0 \iff (1 + v)y + vx - 2v = 0$$

Espectacular sistema de ecuaciones lineales del que sacamos que  $x = \frac{2u}{1 + u + v}$   $y = \frac{2v}{1 + u + v}$

Ahora,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1 + u + v) - 2u}{(1 + u + v)^2} = \frac{2(1 + v)}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2u}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2v}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1 + u)}{(1 + u + v)^2}$$

El Jacobiano entonces es  $\frac{4}{(1+u+v)^3}$ , con lo que la función de densidad  $f_{(U,V)}$  es:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2 - \frac{2u}{1+u+v}\right)^3} \frac{4}{(1+u+v)^3} = 1 \quad \text{Si } (u,v) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = 0 \quad \text{Si } (u,v) \notin (0,1) \times (0,1)$$

Recordemos que  $E\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 2x+y < 2, x+2y < 2\}$ , utilizando las inversas que hemos calculado antes vemos que los elementos de  $F$  cumplen:

$$\frac{2u}{1+u+v} > 0 \implies u > 0 \quad \frac{2v}{1+u+v} > 0 \implies v > 0$$

$$\frac{2 \cdot 2u}{1+u+v} + \frac{2v}{1+u+v} < 2 \implies u < 1 \quad \dots \implies v < 1$$

Lo que nos coincide con lo que habíamos calculado previamente sabiendo que la transformación llevaba rectas a rectas.

Calculamos ahora también  $f_1(x) = \int f(x,y)dy$ :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in (0, \frac{2}{3}) & f_1(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \\ \text{Si } x \in (\frac{2}{3}, 1) & f_1(x) = \int_0^{2-2x} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** Vemos los puntos para los que  $p((i,j)) = \text{cte}$ :

1.  $p((i,j)) = k \cdot 2 \rightarrow (i,j) = (1,1)$
2.  $p((i,j)) = k \cdot 3 \rightarrow (i,j) = (1,2), (2,1)$
- $\vdots$
3.  $p((i,j)) = k \cdot h \rightarrow (i,j) = (i, h-i)$

Para cada caso hay  $h-1$  parejas.

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum p(i,j) &= \sum k(i+j) = \sum_{h=2}^n \sum_{i=1}^{h-1} k \cdot h = \sum_{h=2}^n k(h-1)h = k \sum_{h=2}^n (h^2 - h) = \\ &= k \left( \sum_{h=2}^n h^2 - \sum_{h=2}^n h \right) = k \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) = k \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \\ &= k \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = 1 \iff k = \frac{3}{n(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

Calcularemos ahora  $p_1(i)$ :

$$p_1(i) = \sum_j p((i, j)) = \sum_{j=1}^{n-i} k(i+j) = k \left( \sum_{j=1}^{n-i} i + \sum_{j=1}^{n-i} j \right) = k \left( i(n-i) + \frac{(n-i+1)(n-i)}{2} \right)$$

$$p_1(i) = k \frac{(n-i)(n+i+1)}{2}$$

Vemos ahora la familia de distribuciones  $p_{2|1}(j|i)$ :

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i, j))}{p_1(i)} = \frac{k(i+j)}{k \frac{(n-i)(n+i+1)}{2}} = 2 \frac{i+j}{(n-i)(n+i+1)} \text{ si } j = 1, 2, \dots, n-i$$

#### Ejercicio 4.

$$f(x, y) = \begin{cases} k(1-x-y) & (x, y) \in T \\ 0 & (x, y) \notin T \end{cases}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x} k(1-x-y)dy & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$\int_0^{1-x} k(1-x-y)dy = k(1-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = k \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} k \frac{(1-x)^2}{2} & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Con esto podemos calcular el valor de  $k$ :

$$\int_0^1 k \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{k}{6} = 1 \iff k = 6$$

Sea  $x \in (0, 1)$ , calculemos  $f_{2|1}(y|x)$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{6(1-x-y)}{3(1-x)^2} = \frac{2(1-x-y)}{(1-x)^2} \text{ si } y \in (0, 1-x)$$

$$f_{2|1}(y|x) = 0 \text{ si } y \notin (0, 1-x)$$



Vemos ahora  $F_1(x)$ :

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x k \frac{(1-u)^2}{2} du = 1 - (1-x)^3 & x \in (0, 1) \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{2|1}(y|x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int_0^y \frac{2(1-x-v)}{(1-x)^2} dv = 1 - \frac{(1-x-y)^2}{(1-x)^2} & y \in (0, 1-x) \\ 1 & y > 1-x \end{cases}$$

## Hoja 5

---

### Ejercicio 4. a)

Los valores que se pueden tomar son los que cumplen que  $i \leq j$ . El caso  $(i, j)$  con  $i < j$  se cumple cuando se saca ese par en el orden  $(i, j)$  o en el orden  $(j, i)$ . Para el caso  $i = j$ , solo hay un modo de sacarlo. Entonces:

$$p(i, j) = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & i < j \\ \frac{1}{n^2} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$$