

Demostraciones de Geometría Global de Superficies

Paco Mora y Chito Belmonte
Apuntes PaChito™

17 de febrero de 2022

Pequeño inciso: Estos apuntes apoyan algunas de sus demostraciones en el libro *Un curso de Geometría Diferencial*, con lo cual puede que algunas demostraciones no coincidan con lo visto en clase.

Índice general

1	Capítulo 1	3
2	Capítulo 2	7
3	Capítulo 3	9

Capítulo 1

Proposición 1.4, la derivada covariante es intrínseca.

Demostración

Desde luego, $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α , la derivada covariante puede verse como un operador, D/dt , de la forma

$$\begin{array}{rcl} \frac{D}{dt} : \mathfrak{X} & \rightarrow & \mathfrak{X} \\ V & \sim & \frac{DV}{dt} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \sim & V'(t) < V'(t), N(t) > N(t) \end{array}$$

Este operador es independiente de la orientación elegida para la superficie, pues estamos tomando sólo la parte tangente de V' (obsérvese que si cambiamos N por $-N$ en la fórmula, el resultado es el mismo).

Por otro lado, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental, afirmación que vamos a probar a continuación.

Para ello, sea (U, X) una parametrización de la superficie S y, como viene siendo habitual, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Si $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, por lo que puede expresarse de la forma

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Ahora, calculamos $V'(t)$, utilizando las fórmulas de Gauss para expresar X_{uu} , X_{uv} y X_{vv} en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$:

$$\begin{aligned} V' &= a'X_u + a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b'X_v + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') \\ &= a'X_u + a[(\Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + eN)u' + (\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN)v'] \\ &\quad + b'X_v + b[(\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN)u' + (\Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + gN)v'] \\ &= (a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{11}^2 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{12}^2)X_u \\ &\quad + (b' + au'\Gamma_{12}^1 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{22}^1 + bv'\Gamma_{22}^2)X_v + (aeu' + afv' + bfu' + bgv')N. \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada covariante $DV/dt = (V')^\top$ se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= (a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1) X_u \\ &\quad + (b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2) X_v \end{aligned}$$

Obsérvese que DV/dt depende sólo de los símbolos de Christoffel y, por tanto, de la primera forma fundamental exclusivamente. En otras palabras, la derivada covariante es algo intrínseco; sus propiedades permanecen invariantes por isometrías.

□

Proposición 1.5, linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante.

Demostración

Las tres propiedades se demuestran trivialmente ¹:

I

$$\frac{D}{dt}(V + W) = [(V + W)']^\top = (V' + W')^\top = (V')^\top + (W')^\top = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

II

$$\frac{D}{dt}(fV) = [(fV)']^\top = (f'V + fV')^\top = (f'V)^\top + (fV')^\top = f'V + f\frac{DV}{dt}, \text{ pues } V^\top = V, \text{ ya que } V \in \mathcal{X}(\alpha).$$

III

La propiedad se prueba de forma similar: como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $\langle (V')^\perp, W \rangle = \langle V, (W')^\perp \rangle = 0$, de donde

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle' &= \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle = \langle (V')^\top + (V')^\perp, W \rangle + \langle V, (W')^\top + (W')^\perp \rangle \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

□

Proposición 1.7

Demostración

La parte *I* es trivial ²

II

Al ser $DV/dt = \mathbf{0}$, sabemos que $V'(t)$ está en la dirección del normal a la superficie, y análogamente $W'(t)$. En consecuencia, como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene que $\langle V, W' \rangle = \langle V', W \rangle = 0$ y, por tanto, $\langle V, W \rangle' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle = 0$.

Esto demuestra que $\langle V, W \rangle$ es constante.

□

Proposición 1.8, la ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

¹Tu puta madre por si acaso.

²Cada vez que lea 'es trivial' voy a meter un 'tu puta madre por si acaso'.



Proposición 1.9, la ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC



Teorema 1.10, existencia y unicidad de campos paralelos³
Demostración

Hay que encontrar $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $DV/dt = \mathbf{0}$.

Sea (U, X) una parametrización de S con $\alpha(t_0) \in X(U)$, y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Utilizando la expresión de la demostración de la proposición 1.4 para la derivada covariante de un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, como $DV/dt = \mathbf{0}$, los coeficientes de los vectores X_u y X_v tienen que anularse; luego si representamos V como $V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, se verificará que

$$\begin{cases} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

En otras palabras, se prueba que siempre es posible 'fijar un rumbo' en la superficie. Una vez fijado, ya se puede hablar de si se mantiene o no constante la dirección de cualquier otro campo.

Tenemos por tanto un sistema de ecuaciones diferenciales cuya condición inicial es

$$V(t_0) = V_0 = (a(t_0), b(t_0))$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones para tales sistemas establece el resultado buscado (además, se puede obtener la solución de forma explícita al resolverlo, siempre y cuando esto sea posible).

□

³Hay una demostración extrínseca y otra intrínseca en el libro. He decidido copiar la intrínseca porque leyéndola en diagonal he determinado que sería más sencilla, si queréis buscar la otra (fruto de vuestra curiosidad o esquizofrenia paranoide), está en el libro.

Capítulo 2

Proposición 2.0.1. *Proposición exclusiva de Apuntes PaChito™*

Sea $\alpha : I \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización. Son equivalentes:

1. α es pregeodésica
2. $\exists \beta(u) = \alpha(h(u))$ una reparametrización de α/β es geodésica.
3. La reparametrización parametrizada por el arco de α es geodésica.

Demostración

$$1 \implies 2$$

Directo por la definición

$$3 \implies 1$$

Por la definición directo

$$2 \implies 3$$

¿Te imaginas que es directo por la definición? Pues no. Mala suerte.

Tomamos una reparametrización de I :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha} & S \\ J & \xrightarrow{h(u)} & I \\ J & \xrightarrow{\beta(u)=\alpha(h(u))} & \text{que es geodésica } S \end{array}$$

Esto es un triangulito si lo dibujáis... Estaría bien que yo también lo hiciera pero soy un *vago*.

$$||\beta'(u)|| = c = h'(u) \cdot ||\alpha'(h(u))||$$

Si $c = 1 \rightarrow \beta(u)$ es la reparametrización por arco de α

Si $c \neq 1 \rightarrow$ Tomo $\underbrace{\gamma(s) = \beta\left(\frac{u}{c}\right)}_{\text{GEODESICA}} = \alpha\left(h\left(\frac{u}{c}\right)\right)$

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c} \cdot \beta' \left(\frac{s}{c} \right)$$

□

Capítulo 3

Lema 3.2, Lema de homogeneidad de las geodésicas

Lo más importante del lema son las fórmulas que aparecen centradas en su enunciado.

Demostración

Sea $p \in S$ y sea un vector tangente $v \in T_p S$. Entonces, $\exists \gamma_v : I_v \rightarrow S$. Como $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda v \in T_p S$.

Defino ahora $\alpha(t) = \gamma_v(\lambda t)$.

$$I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \lambda t \in I_v\}$$

$$t \in I_\alpha \iff \lambda t \in I_v \iff t \in \frac{1}{\lambda} \cdot I_v$$

Luego obtenemos que $\frac{1}{\lambda} I_v = I_\alpha$. De esto deducimos que $\alpha(0) = p = \gamma_v(0)$.

$$\alpha'(t) = \lambda \gamma'_v(\lambda t) \implies \alpha'(0) = \lambda \gamma'_v(0) = \lambda v$$

Y se obtiene que α es una geodésica, por ser reparametrización afín de una geométrica.

$$\begin{cases} \alpha(t) = \gamma_v(\lambda t) \\ I_\alpha = \frac{1}{\lambda} I_v \end{cases} \in \mathcal{J}_{p, \lambda v} = \{(I_{\alpha, \alpha}), \dots\} \implies \frac{1}{\lambda} I_v \subseteq I_{\alpha v}$$

$$\forall t \in \frac{1}{\lambda} I_v, \gamma_{\lambda v}(t) = \lambda v(\lambda t)$$

Llamo ahora $w = \lambda v$.

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \implies \mu w = v$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot I_w \subseteq I_{\mu w} \text{ y } \forall t \in \underbrace{\frac{1}{\mu} I_w}_{\lambda I_{\lambda v}}$$

$$\gamma_{\mu w}(t) = \gamma_w(\mu t) \quad \frac{1}{\mu} \cdot I_w = \lambda I_{\lambda v} \subseteq I_v$$

$$I_{\lambda v} \subseteq \frac{1}{\lambda} I_v$$

Al final he tenido que copiar tal cual lo que pone en la pizarra y no tengo ni idea de si he demostrado algo o no.

□

Teorema 3.3, Propiedades de la aplicación exponencial

Primero tenemos que demostrar esta propiedad

$$p \in S, v \in T_p S \implies iv \in \mathcal{D}_p, \forall t \in I_v \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Demostración

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow OK \\ t \neq 0, & tv \in \mathcal{D}_p \iff 1 \in I_{tv} = \frac{1}{t} \cdot I_v \text{ si } 1 = \frac{1}{t}t \\ \exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t), \forall t \in I_v \end{cases}$$

□

Fin de la demostración inciso, comenzamos a demostrar el teorema.

Demostración

I

Que sea estrellado nos dice que el segmento que une cualquier punto con el origen no se sale del conjunto. En otras palabras,

$$\forall \underbrace{v \in \mathcal{D}_p}_{1 \in I_v \implies [0,1] \subset I} , [0, v] = \{tv, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{D}_p$$

Del inciso se deduce que $t \in I_v \implies tv \in \mathcal{D}_p$. Notamos lo siguiente:

$$\forall v \in T_p S, \exists (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$$

Y justo debajo ha escrito

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall |t| < \varepsilon, tv \in \mathcal{D}_p$$

II

Este dice el sensei Alías que nos lo creamos y yo **me lo creo**.

III

$$\exists \underbrace{U}_{\text{entorno de } 0}^1 \in \mathcal{D}_p : \exp_p|_U : \underbrace{U}_{\subset T_p S} \rightarrow \underbrace{V}_{\subset S} \text{ es difeomorfismo}$$

Para comprobar si es un difeomorfismo, tenemos que ver que la diferencial es un isomorfismo lineal. Vamos a ver si esto es así:

$$\forall v \in \mathcal{D}_p \rightarrow d(\exp_p)_v : \underbrace{T_v(\mathcal{D}_p)}_{T_v(T_p S)} \rightarrow T_{\exp_p(v)} S$$

$$\forall w \in T_p S \quad \alpha(t) = v + tw$$

¹Para el sensei Alías, decir entorno implica que es abierto

$$\begin{aligned} \alpha &: I \rightarrow \mathcal{D}_p \subset T_p S \\ \alpha(0) = v \quad \alpha'(0) = w &\rightarrow w \in T_v(T_p S) \end{aligned}$$

Vamos al caso particular $v = 0$.

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_0 &: T_0(T_p S) = T_p S \rightarrow T_{\exp_p(0)} S = T_p S \\ \forall w \in T_p S &= T_0(T_p S) \\ d(\exp_p)_v(w) &= \frac{d}{dt}_{t=0} \exp_p(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Tenemos que encontrar una curva que cumpla

$$\begin{aligned} \forall \alpha(t) &: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p S \\ \left. \begin{aligned} \alpha(0) &= 0 \\ \alpha'(0) &= w \end{aligned} \right\} \alpha(t) &= tw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp_p(\alpha(t)) &= \exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1) = \gamma_w(t) \\ d(\exp_p)_0(w) &= \gamma'_w(0) = w \implies d(\exp_p)_0 = Id \end{aligned}$$

□

Lema 3.6, El lema de Gauss

Vamos a demostrar una versión más general de lo que viene en los apuntes. En nuestra versión demostraremos

$$\forall w \in T_p S \quad \langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Demostración

Procedo a copiar lo que ponga el sensei en la pizarra. Para demostrar esta propiedad, debemos hacer una cuenta.

Caso fácil:

Supongamos $w = \lambda v$. Entonces, $d(\exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} \exp_p(\alpha(t))$, $\alpha(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}_p$. Tomamos $\alpha(t) = v + tw = v + t\lambda v = (1 + \lambda t)v$

$$\begin{aligned} \exp_p(\alpha(t)) &= \exp_p((1 + \lambda t)v) = \gamma_v(1 + \lambda t) \\ \frac{d}{dt} \gamma_v((1 + \lambda t)v) &= \lambda \gamma'_v(1 + \lambda t) \\ \implies \frac{d}{dt}_{t=0} \exp_p(\alpha(t)) &= \lambda \gamma'_v(1) \end{aligned}$$

Ahora, vamos a utilizar que el módulo es constante.

$$\begin{aligned} \langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle &= \langle \gamma'_v(1), \lambda \gamma'_v(1) \rangle = \lambda \|\gamma'_v(1)\|^2 = \lambda \|\gamma'_v(0)\|^2 = \lambda \|v\|^2 = \\ &= \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Caso chungo:

Supongamos ahora que v y w son linealmente independientes, que es una condición más general a que sean ortogonales. Este tiene un poco más de miga.

Consideramos $\phi(s, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow T_p S$ tal que

$$\phi(s, t) = s(v + tw) = s\alpha(t)$$

En este caso,

$$\phi(0, t) = 0 \quad \forall t \quad \phi(1, t) = \alpha(t) \quad \forall t^2$$

Si $\alpha \in \mathcal{D}_p$ entonces

$$\begin{aligned} \phi(s, t) &\in \mathcal{D}_p, \quad \forall s \in [0, 1] \\ \phi(s, t) &\in \mathcal{D}_p, \quad \forall s \in (-\varepsilon', 1 + \varepsilon') \\ \alpha(0) &\in \mathcal{D}_p \rightarrow \exists \varepsilon > 0 | \alpha(t) \in \mathcal{D}_p, \quad \forall |t| < \varepsilon \end{aligned}$$

Por compacidad, $\exists \varepsilon > 0 \mid \phi(s, t) \in \mathcal{D}_p, \quad \forall (s, t) \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ahora, considero la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \psi(s, t) &= \exp_p(\phi(s, t)) = \exp_p(s\alpha(t)) \\ \alpha(t) &= v + tw \\ \psi &: (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}_p \xrightarrow{\exp_p} S, \text{ que es bien definida y } C^\infty \\ \exp_p(s\alpha(t)) &= \gamma_{\alpha(t)}(s) \end{aligned}$$

La derivada fácil de ψ es con respecto de s y por ella vamos a comenzar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) &= \frac{d}{ds}_{t=cte} (\gamma_{\alpha(t)}(s)) = \gamma'_{\alpha(t)}(s) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2}(s, t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s) \text{ normal} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s}(\exp_p(s\alpha(t))) = d(\exp_p)_{s(\alpha(t))}(\alpha(t)) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, 0) &= d(\exp_p)_{s,v}(v) = \begin{cases} d(\exp_p)_0(v) = v, & s = 0 \\ d(\exp_p)_v(v), & s = 1 \end{cases} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(1, 0) &= d(\exp_p)_v(v) \end{aligned}$$

Bueno si este ha sido el caso fácil agárrate de los pelos que vamos a derivar con respecto de t .

$$\begin{aligned} s = 0 &\rightarrow \psi(0, t) = \exp_p(0) = p \\ s = 1 &\rightarrow \psi(1, t) = \exp_p(\alpha(t)) \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t}(1, t) = d(\exp_p)_{\alpha(t)}(\alpha(t)) = d(\exp_p)_{\alpha(t)}(w) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(1, 0) &= d(\exp_p)_v(w) \\ < \frac{\partial \psi}{\partial s}(1, 0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(1, 0) > &= ?? \\ f(s) &= < \frac{\partial p}{\partial s}(s, 0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, 0) >, \quad \forall s \in [0, 1] \end{aligned}$$

²Luis está haciendo un dibujo bastante ilustrativo en la pizarra (hoy es 17 de Febrero, por si os queréis ver la clase). El caso es que el hijo de puta de Paco aún no se ha puesto a tomar apuntes conmigo (es cuestión de tiempo, siempre se mete el jodido) y no me da tiempo a copiar lo que dice y el dibujo, así que... Lector, good luck.

Mi objetivo es calcular $f(1)$.

$$f'(s) = \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s, 0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, 0) \right\rangle}_A + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, 0), \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}(s, 0) \right\rangle}_B$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s, t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s, 0) = \gamma''_v \text{ normal a } S \text{ en } \gamma_v(s)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(s, 0) = \frac{\partial}{\partial t}(\psi(s, t)) = \beta'_s(0) \in TS = T$$

A tomar por culo, 17 de Febrero y 18 de Febrero, os la veis cracks.

□