Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

13 de diciembre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1,2,3\}$*, los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y* $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ *(recordemos que* $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$*).*

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1-\alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ *entonces:*

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in [0,1) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{3} & x \in [1,2) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{6}{24} = \frac{2}{3} & x \in [2,3) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{9}{24} = 1 & x \in [3,+\infty) \end{cases}$$

Pasando a la parte continua, $P_c(B) = \frac{1}{1-\alpha}P(B \cap D^c)$ *y* $F_c(x) = P_c((-\infty, x])$
$= \frac{1}{1-\alpha}P((-\infty, x] \cap D^c)$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{24}{24} \frac{9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Hoja 4

Ejercicio 1.

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

a) *$Y = aX - b$ con $a \neq 0$*

La función usada es la $g(x) = ax - b$, esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de a. Si $h(y) = g^{-1}(x) = \dfrac{y+b}{a}$, recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \qquad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos $h'(y) = \dfrac{1}{a}$ y $g((0,1))$:

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right)\frac{1}{a} = 2\frac{a-y-b}{a^2}I_{(-b,a-b)}$$

$$a < 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right) - \frac{1}{a} = 2\frac{y+b-a}{a^2}I_{(a-b,-b)}$$

b) *$Z = 3X^2 - X$*

Usaremos la función $g(x) = 3x^2 - x$, esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos E_1, E_2 para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en $x = \dfrac{1}{6}$, con lo que tenemos los *conjuntos* $E_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, $E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$, *tenemos que:*

$$E_1 \to \left(-\frac{1}{12}, 0\right) = F_1 \qquad E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 2\right) = F_2$$

Para cada intervalo, definimos g_i*:*

$$g_1 = g|_{(0,\frac{1}{6})} : \left(0, \frac{1}{6}\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \qquad g_2 = g|_{(\frac{1}{6},1)} : \left(\frac{1}{6}, 1\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 2\right)$$

Entonces tenemos que:

$$f_Z(z) = \sum_r f_X(h_r(z))|h_r'(z)|$$

Siendo $h_r(z)$ *la inversa de* $g_r(z)$*, las calculamos:*

$$z = 3x^2 - x \iff 3x^2 - x - z = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12z}}{6} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{1+12z}}{6} = h_2(z) & (creciente) \\ \dfrac{1-\sqrt{1+12z}}{6} = h_1(z) & (decreciente) \end{cases}$$

$$h_1'(z) = -\frac{12}{26\sqrt{1+12z}} = -\frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

$$h_2'(z) = \frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

Entonces tenemos que:

$$z \in \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \implies f_Z(z) = 2\left(1 - \frac{1-\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}} + 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}} =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{1+12z}}\left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2 \cdot 10}{6\sqrt{1+12z}} = \frac{10}{3\sqrt{1+12z}}$$

$$z \in (0,2) \implies f_Z(z) = 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

Ejercicio 2.

$$f(x,y) = \frac{2}{(2-x-y)^3} I_E(x,y) \qquad \textit{con } E \textit{ el cuadrilátero de vértices } (0,0),(1,0),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),(0,1)$$

Y los cambios de variable:

$$\begin{cases} U = \dfrac{X}{2-X-Y} \\ V = \dfrac{Y}{2-X-Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{2-x-y} \\ v(x,y) = \dfrac{y}{2-x-y} \end{cases}$$

Esta transformación es biyectiva.

Como comentario, recordar que los cambios de variable de la forma:

$$u = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \qquad v = \frac{a'x+b'y+c'}{dx+ey+f}$$

Además de ser biyectivos transforman rectas en rectas.

Entonces tenemos que:

$$f_{U,V}(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

Vemos en qué se transforman los vértices del cuadrilátero con estas transformaciones:

1. $(0,0) \to (0,0)$
2. $(1,0) \to (1,0)$
3. $(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) \to (1,1)$
4. $(0,1) \to (0,1)$

Calculamos ahora las inversas:

$$u(2-x-y) = x \iff -2u+ux+uy+x = 0 \iff (1+u)x+uy-2u = 0$$
$$v(2-x-y) = v \iff -2v+vx+vy+y = 0 \iff (1+v)y+ux-2v = 0$$

Espectacular sistema de ecuaciones lineales del que sacamos que $x = \dfrac{2u}{1+u+v}$ *y* $= \dfrac{2v}{1+u+v}$

Ahora,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1+u+v)-2u}{(1+u+v)^2} = \frac{2(1+v)}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2u}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2v}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1+u)}{(1+u+v)^2}$$

El Jacobiano entonces es $\frac{4}{(1+u+v)^3}$*, con lo que la función de densidad* $f_{(U,V)}$ *es:*

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2 - \frac{2u}{1+u+v}\right)^3} \frac{4}{(1+u+v)^3} = 1 \quad Si\ (u,v) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = 0\ Si(u,v) \notin (0,1) \times (0,1)$$

Recordemos que $E\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0,\ y > 0,\ 2x + y < 2,\ x + 2y < 2\}$*, utilizando las inversas que hemos calculado antes vemos que los elementos de* F *cumplen:*

$$\frac{2u}{1+u+v} > 0 \implies u > 0 \qquad \frac{2v}{1+u+v} > 0 \implies v > 0$$
$$\frac{2 \cdot 2u}{1+u+v} + \frac{2v}{1+u+v} < 2 \implies u < 1 \qquad ... \implies v < 1$$

Lo que nos coincide con lo que habíamos calculado previamente sabiendo que la transformación llevaba rectas a rectas.

Calculamos ahora también $f_1(x) = \int f(x,y)dy$*:*

$$\begin{cases} Si\ x \in (0, \frac{2}{3}) & f_1(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \\ Si\ x \in (\frac{2}{3}, 1) & f_1(x) = \int_0^{2-2x} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \end{cases}$$

Ejercicio 3. *Vemos los puntos para los que* $p((i,j)) = cte$*:*

1. $p((i,j)) = k \cdot 2 \to (i,j) = (1,1)$
2. $p((i,j)) = k \cdot 3 \to (i,j) = (1,2),(2,1)$

$$\vdots$$

3. $p((i,j)) = k \cdot h \to (i,j) = (i, h-i)$

Para cada caso hay $h-1$ *parejas.*

Entonces,

$$\sum p(i,j) = \sum k(i+j) = \sum_{h=2}^{n} \sum_{i=1}^{h-1} k \cdot h = \sum_{h=2}^{n} k(h-1)h = k \sum_{h=2}^{n} (h^2 - h) =$$

$$= k(\sum_{h=2}^{n} h^2 - \sum_{h=2}^{n} h) = k\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \cancel{1} - \frac{n(n+1)}{2} + \cancel{1}\right) = k\frac{n(n+1)(2n-2)}{6} =$$

$$= k\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = 1 \iff k = \frac{3}{n(n-1)(n+1)}$$

Calcularemos ahora $p_1(i)$*:*

$$p_1(i) = \sum_j p((i,j)) = \sum_{j=1}^{n-i} k(i+j) = k\left(\sum_{j=1}^{n-1} i + \sum_{j=1}^{n-1} j\right) = k\left(i(n-i) + \frac{(n-i+1)(n-i)}{2}\right)$$

$$p_1(i) = k\frac{(n-i)(n+i+1)}{2}$$

Vemos ahora la familia de distribuciones $p_{2|1}(j|i)$*:*

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i,j))}{p_1(i)} = \frac{k(i+j)}{\frac{k(n-i)(n+i+1)}{2}} = 2\frac{i+j}{(n-i)(n+i+1)} \ si \ j = 1, 2, ..., n-i$$

Ejercicio 4.

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-x-y) & (x,y) \in T \\ 0 & (x,y) \notin T \end{cases}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 0, x+y < 1\}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \int\limits_0^{1-x} k(1-x-y)dy & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{1-x} k(1-x-y)dy = k(1-x)y - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = k\frac{(1-x)^2}{2}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} k\frac{(1-x)^2}{2} & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Con esto podemos calcular el valor de k*:*

$$\int\limits_0^1 k\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{k}{6} = 1 \iff k = 6$$

Sea $x \in (0,1)$*, calculemos* $f_{2|1}(y|x)$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{6(1-x-y)}{3(1-x^2)} = \frac{2(1-x-y)}{(1-x)^2} \ si \ y \in (0, 1-x)$$

$$f_{2|1}(y|x) = 0 \ si \ y \notin (0, 1-x)$$

Vemos ahora $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int\limits_0^x k\dfrac{(1-u)^2}{2} du = 1-(1-x)^3 & x \in (0,1) \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{2|1}(y|x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int\limits_0^y \dfrac{2(1-x-v)}{(1-x)^2} dv = 1 - \dfrac{(1-x-y)^2}{(1-x)^2} & y \in (0,1-x) \\ 1 & y > 1-x \end{cases}$$

CAPÍTULO 3

Hoja 5

Ejercicio 1.

a) *Al ser la distribución uniforme, podemos calcular* k *como* $\dfrac{1}{V(C)}$*. Como* C *es medio cubo de lado 1, su volumen es* $\dfrac{1}{2}$*, con lo que* $k = 2$*.*

b)

$$f_{12}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)dz = \int_0^1 kdz = 2 \ si (x,y) \in T_1{}^a$$

$$f_{12}(x,y) = 0 \ si \ (x,y) \notin T_1$$

$$f_{13}(x,z) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)dy = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x) \ si(x,y) \in C_1{}^b$$

$$f_{13}(x,z) = 0 \ si \ (x,z) \notin C_1$$

Análogamente tenemos que:

$$f_{23}(y,z) = 2(1-y) \ si \ y \in C_2$$

$$f_{23}(y,z) = 0 \ si \ (y,z) \notin C_2$$

Para obtener las unidimensionales, integramos a partir de las que hemos calculado:

$$f_1(x) = \int f(x,y,z)dydz = \int f_{12}(x,y)dy = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x) \ si \ x \in (0,1)$$

$$f_1(x) = 0 \ x \notin (0,1)$$

$$f_3(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{13}(x,z)dx = \int_0^1 2(1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \ si \ z \in (0,1)$$

$$f_3(z) = 0 \ z \notin (0,1)$$

El que queda te lo imaginas, un saludo.

c)

Observamos en este apartado que partimos de una distribución uniforme en el triangulo T_1.

Para el primer punto, observamos que el punto está dentro del triángulo, luego:

$$F(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = 2 \cdot A(rect) = 2\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Para el segundo caso, sin embargo, el punto está fuera del triángulo, luego tendremos que calcular el área de la intersección del rectángulo formado por este punto con el triángulo T_1.

Esta región está formada por un rectángulo y un triángulo, tendremos que:

$$F(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = 2\left(\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\right)$$

d)

*Importante notar que **no** nos piden la función de distribución, es suficiente con la de densidad en este caso (al ser continuo).*

Sea $y \in (0,1)$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y} \ si \ x \in (0, 1-y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = 0 \ x \notin (0, 1-y)$$

[a] $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}$
[b] $C_1 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, 0 < z < 1\}$

Ejercicio 2.

$$F_x(t) = P(x \leq t) = P(x + y \leq t)$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \textit{área del triangulo con catetos } t = \dfrac{t^2}{2} & 0 < t < 1 \\ 1 - \ \textit{área triánglo cateto } (2-t) = 1 - \dfrac{(2-t)^2}{2} = \dfrac{2-(2-t)^2}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

Derivando obtenemos que:

$$f_x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Este problema lo podríamos ver de otra forma: Sean U, V variables aleatorias independientes ambas con distribución uniforme en $(0, 1)$. Calcular la función de densidad de $U + V$. En este caso podremos usar las convoluciones.

$$f_U(u) = I_{(0,1)}(u) \qquad f_V(v) = I_{(0,1)}(v)$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u & 0 < u < 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases} \qquad F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ v & 0 < v < 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases}$$

Si $Z = U + V$

$$f_Z(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_u(z-t) f_V(t) dt = \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(0,1)}(z-t) I_{(0,1)}(t) dt = \int\limits_0^1 I_{(0,1)}(z-t) dt$$

Como $0 < z - t < 1 \implies z - 1 < t < z$, luego tendremos:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int\limits_0^z dt = z & 0 < z < 1 \\ \int\limits_{z-1}^1 dt = 1 - (z-1) = 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

Lo que es igual a lo que hemos calculado antes.

Otra forma análoga)

Sea (U, V) uniforme, se obtiene una nueva variable (X, Y) mediante la siguiente transformación:

$$\begin{cases} X = U + V \\ Y = V \end{cases}$$

Calcular la función de distribución marginal de la v.a. X

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{(U,V)}(u(x, y), v(x, y)) |\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}|$$

Y luego calcularíamos f_X

Ejercicio 3.

$$f_X(t) = I_{(0,1)}(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \\ 0 & t \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int f_X(z-t) dF_Y(t) = \int I_{(0,1)}(z-t) dF_Y(t) =$$

Como Y es discreta y toma valores en $t = 0, 1$, la integral la podemos calcular como:

$$= I_{(0,1)}(z)\frac{1}{2} + I_{(0,1)}(z-1)\frac{1}{2} = I_{(0,1)}(z)\frac{1}{2} + I_{(1,2)}(z)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(I_{(0,1)}(z) + I_{(1,2)}(z)) = I_{(0,2)}(z)\frac{1}{2}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & z \in (0,2) \\ 0 & z \notin (0,2) \end{cases}$$

Integrando llegamos a:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}z & 0 < z < 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.

a)

Los valores que se pueden tomar son los que cumplen que $i \leq j$. El caso (i,j) con $i < j$ se cumple cuando se saca ese par en el orden (i,j) o en el orden (j,i). Para el caso $i = j$, solo hay un modo de sacarlo. Entonces:

$$p((i,j)) = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & i < j \\ \frac{1}{n^2} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

b)

$$p_1(i) = \sum_{j=1}^{n} p((i,j)) = \sum_{j=i}^{n} p((i,j)) = p(i,i) + \sum_{j=i+1}^{n} p((i,j)) = \frac{1}{n^2}(n-i)\frac{2}{n^2} \qquad \forall i$$

$$p_1(i) = \frac{2n - 2i + 1}{n^2}$$

c)

$$p_2(j) = \sum_{i=1}^{j} p((i,j)) = \sum_{i=1}^{j-1} p((i,j)) + p((j,j)) = (j-1)\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \qquad \forall j$$

$$p_2(j) = \frac{2j-1}{n^2}$$

d)

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i,j))}{p_1(i)}$$

Sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$
Si $j = i + 1, ..., n$

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{2/n^2}{(2n - 2i + 1)/n^2} = \frac{2}{2(n-i)+1}$$

Si $j = i$

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{1/n^2}{(2n - 2i + 1)/n^2} = \frac{1}{2(n-i)+1}$$

En el resto de casos

$$p_{2|1}(j|i) = 0$$

e)

Sea $j \in \{1, 2, ..., n\}$
Si $i = 1, ..., j - 1$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{((i,j))}{p_2(j)} = \frac{2/n^2}{(2j-1)/n^2} = \frac{2}{2j-1}$$

Si $i = j$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{((i,j))}{p_2(j)} = \frac{1}{2j-1}$$

En el resto de casos

$$p_{1|2}(i|j) = 0$$

Ejercicio 5.

$$E(X) = \sum x_i P(A_i) = \sum iP(\{i\}) = \sum iCi$$

Calculamos el valor de C*:*

$$\sum_{i=1}^{n} C \cdot i = C\frac{n(n+1)}{2} = 1 \implies C = \frac{2}{n(n+1)}$$

Luego tenemos que:

$$E(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

Ejercicio 6.
Tenemos que:

$$\begin{cases} u = \arctan \dfrac{y}{x} \\ v = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \implies$$

$$\frac{y}{x} = \tan u \implies k' \sin(u) = y \;\; k' \cos(u) = x$$

$$v = \sqrt{k'^2 \sin^2(u) k'^2 \sin^2(u)} = k'$$

$$\begin{cases} y = v\sin(u) \\ x = v\cos(u) \end{cases}$$

Calculamos ahora el Jacobiano:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -v\sin(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v\cos(u)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \sin(u)$$

El Jacobiano entonces es $-v\sin^2(u) - v\cos^2(u) = -v$

Vemos ahora el conjunto imagen de E *por la transformación, que llamaremos* F. *Observamos en primer lugar que* u *es el ángulo formado por la recta que pasa por el origen y el punto* (x, y), *tendremos que* $u \in (0, \frac{\pi}{4})$. *Es fácil ver que* v *se moverá entre 0 y* $+\infty$. *Tendremos entonces que:*

$$f_{(U,V)}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}| \ (u, v) \in F$$

$$f_{(U,V)} = \begin{cases} ke^{-v^2}v & (u, v) \in F \\ 0 & (u, v) \notin F \end{cases}$$

Para calcular el valor de k, *integramos en la función que acabamos de obtener (porque en este caso es más fácil):*

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/4} e^{-v^2} v du dv = k\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} ve^{-v^2} = -k\frac{\pi}{4}\left.\frac{e^{-v^2}}{2}\right|_0^{+\infty} = k\frac{\pi}{8} = 1 \implies k = \frac{8}{\pi}$$

Ejercicio 7.

Observamos que el número total de posibilidades es 4^n *(cada objeto tiene cuatro opciones).*

a)

Para verlo, pensemos primero en la probabilidad de que un solo cajón quede vacío:

$$A_i = \{\textit{el cajón } i \textit{ quede vacío}\}$$

$$P(A_i) = \frac{3^n}{4^n}$$

Entonces la probabilidad de que tres cajones queden vacíos podría calcularse como la unión (usaríamos que $P(A_i \cap A_j) = \frac{2^n}{4^n}$ *y* $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{4^n}$*).*

La probabilidad de que tres cajones queden vacíos es:

$$P(\cup(A_i \cap A_j \cap A_k)) = \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{4}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}}$$

b)

Calcularemos primero $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c)$. *Usando que* $A \cap B = A - (A \cap B^c)$ *tenemos que*

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c - (A_1 \cap A_2 \cap \cancel{A_3^c} \cap A_4) =$$

$$= (A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_2 \cap A_3) - A_1 \cap A_2 \cap A_4$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) = P(A_1 \cap A_2)P(-A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \frac{2^n}{4^n} - \frac{2}{4^n} = \frac{2^n - 2}{4^n}$$

Entonces la probabilidad de que dos cajones queden vacíos es $\binom{4}{2}\dfrac{2^n - 2}{4^n}$.

c)

El resultado es $\dfrac{3^{n-3} \cdot 2 \cdot 3}{4^{n-1}}$

CAPÍTULO 4

Hoja 6

Ejercicio 1.

$$X = 0, 1, 2, ..., n \qquad P(X = i) = \frac{1}{n+1}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}$$

Ejercicio 2.

Primera parte

Observamos primero que los números de la forma $i/3^n$ *son:*

$$\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}, \frac{4}{3^n}, ..., \frac{3^{n-1}}{3^n}, \frac{3^n}{3^n}$$

Y vemos que los numeradores múltiplos de 3 en este conjunto son $3^{n-1}: \; 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3, ..., 3^{n-1}3$. *Luego* $|D| = 3^n - 3^{n-1} = 3^{n-1} \cdot 2$. *Por tanto:*

$$k = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

$$F(\frac{1}{3}) = \sum_{x_i \in D \;\; x_i \leq 1/3} k$$

Observamos que el número de sumandos es $3^{n-1} - 3^{n-2}$ *(quitamos los numeradores* $3, 2\cdot 3, ..., 3^{n-2}\cdot 3$*) para los casos* $n > 1$*. Por tanto:*

$$F(\frac{1}{3}) = \frac{2\cdot 3^{n-2}}{2\cdot 3^{n-1}} = \frac{1}{3}$$

Si $n = 1$*,* $D = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ *y* $F(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$

Segunda parte

Para usar el ejercicio anterior, dividimos el sumatorio en dos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x_i \in D} \sum_{x_i = i/3^n} P(\{\frac{i}{3^n}\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x_i = i/3^n \ irred} \frac{k}{6^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{n-1} \frac{k}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{n-1}3} = \frac{k}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}k = 1 \implies k = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 3.

Integramos para calcular la constante C*:*

$$\int_a^b C(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx = C\int_a^b (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-e}dx$$

Esta integral nos recuerda a $B(p,q)$*, hacemos el cambio*

$$t = \frac{x-a}{b-a} \ x = (b-a)t + a \ dx = (b-a)dt \ b - x = b - (b-a)t - a = (b-a)(1-t)$$

con límites de integración 0 y 1

La integral entonces queda:

$$= C\int_0^1 (b-a)^{p-1}t^{p-1}(b-a)^{q-1}(1-t)^{q-1}(b-a)dt =$$

$$= C\int_0^1 (b-a)^{p+q-1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = C(b-a)^{p+q+1}B(p,q) = 1 \iff$$

$$\iff C = \frac{1}{(b-a)^{p+q+1}B(p,q)}$$

Calculamos ahora $E(X)$

$$E(X) = \int xf(x)dx = \int xC(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx =$$

$$= C\int_a^b (x-a+a)(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx = C\int (x-a)^p(b-x)^{q-1}dx + \underbrace{C\int_a^b a(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx}_{a\cdot 1}$$

$$= C(b-a)^{p+q}B(p+1,q) + a = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}B(p,q)}(b-a)^{p+q}B(p,q) + a =$$

Utilizando ahora la equivalencia de B y Γ, y usando que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$= a + \frac{(b-a)\Gamma(p+q)\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(p+q+1)} =$$

$$= a + \frac{(b-a)p}{p+q} = \frac{\cancel{ap} + aq + bp - \cancel{ap}}{p+q}$$

Ejercicio 4.

Apartado a)

Observamos primero que el área de C es $3/2$, luego $f(x,y) = 2/3 I_C(x,y)$:

Ahora:

$$f_2(y) = \int f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{2}{3}dx = \frac{2}{3}y & y \in (0,1) \\ \int_0^1 \frac{2}{3}dx = \frac{2}{3} & y \in (1,2) \\ 0 & resto \end{cases}$$

La condicionada se calcula como sigue:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Los valores de x donde esta expresión tiene sentido los calculamos ahora junto a $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^2 \frac{2}{3}dy = \frac{2}{3}(2-x) & x \in (0,1) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Volviendo a la distribución condicionada, fijado $x \in (0,1)$:

$$f_{2|1}(y|x) = \begin{cases} \frac{2/3}{2/3(2-x)} = \frac{1}{2x} & y \in (x,2) \\ 0 & y \notin (x,2) \end{cases}$$

Vamos a calcular también $f_{1|2}(x|y)$:

- *Sea* $y \in (0,1)$*:*

$$f_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2/3}{2/3y} = \dfrac{1}{y} & x \in (0,y) \\ 0 & x \notin (0,y) \end{cases}$$

- *Sea* $y \in (1,2)$*:*

$$f_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2/3}{2/3} = 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Apartado b)

Dada la transformación:

$$\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y-x}{2-y} \end{cases}$$

Nos sacamos de la manga su inversa:

$$\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{u+2v}{1+v} \end{cases}$$

Vemos el Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1 & \dfrac{\partial x}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = & \dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{2-u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{2-u}{(1+v)^2}$$

La imagen del recinto C*,* $C' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < u < 1, \ v > 0\} = (0,1) \times (0,+\infty)$

Solo queda ver el valor de $f_{U,V}$*:*

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{2-u}{(1+v)^2} & (u,v) \in C' \\ 0 & resto \end{cases}$$

Apartado c)

$$g_1(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{2-u}{(1+v)^2} dv = \dfrac{2}{3}(2-u)\left[-\dfrac{1}{1+v}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{3}(2-u) & u \in (0,1) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Buscaremos un punto m_e *tal que* $F(m_e^-) = \dfrac{1}{2} = F(m_e)$ *(ya que* $f_{(U,V)}$ *es continua).*

$$F(m_e) = \int\limits_0^{m_e} \frac{2}{3}(2-u)du = \frac{2}{3}\left(2m_e - \frac{m_e^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}m_e - \frac{1}{3}m_e^2 = \frac{1}{2}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$, *el valor* $2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \notin (0,1)$, *luego no nos sirve. El otro, sin embargo, sí esta entre 0 y 1, luego* $m_e = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

Apartado d)

$$g_2(v) = \begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{2}{3} \frac{2-u}{(1+v)^2} du = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+v)^2} \left[2u - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+v)^2} \frac{3}{2} = \frac{1}{(1+v)^2} & v \in (0, +\infty) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Para empezar, vemos que sí pueden ser independientes porque C' *es un producto de intervalos (y por tanto, rectangular). Además,* $f_{U,V} = f_U f_V$ *luego sí son independientes. De hecho, antes de ver las distribuciones marginales ya podemos saber que son independientes porque* $f_{U,V} = g(u)h(v)$ *con* g *una función que solo depende de* u *y* h *una función que solo depende de* v.

Además, X, Y ***no*** *son independientes porque* C *no es un rectángulo.*

Apartado e)

$$E(U^n) = \int\limits_0^1 u^n \frac{2}{3}(2-u) = \frac{2}{3} \left[\frac{2u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

En particular:

$$E(U) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9}$$

Vamos a calcular también la esperanza de V*:*

$$E(V) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{v}{(1+v)^2} dv = \int\limits_0^{+\infty} \frac{v+1}{(1+v)^2} dv - \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+v)^2} dv =$$

$$= \log(1+v) \Big|_0^{+\infty} + ... = +\infty$$