Ejercicios MNED

Paco Mora Caselles

27 de octubre de 2021

CAPÍTULO 1

Tema 1

Ejercicio 1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \to \sigma(A) = \{0{,}5 + i, 0{,}5 - i\}$$

x, y son combinaciones lineales de $e^{(0{,}5 \pm i)t}$ es decir de $\{e^{0{,}5t} e^{i}, e^{0{,}5} e^{-i}\}$

Ejercicio 5.

$$\begin{cases} x'''(t) = \cos(x(t)) + \sin(x'(t)) - e^{x''(t)} + t^2 \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = 7 \\ x''(0) = 13 \end{cases}$$

Consideramos

$$\begin{cases} x(t) \\ u(t) = x'(t) \\ v(t) = x''(t) \end{cases}$$

Entonces la ecuación queda:

$$v'(t) = (x'''(t)) = (\cos(x(t))) + \sin(u(t)) - e^{v(t)} + t^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En versión matricial:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(x) + \sin(u) - e^{v} + t^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.

$$e^{at}(y' + ay) = e^{at}y' + ae^{at}y = \frac{d}{/dt}(e^{at}y(t))$$

$$e^{\int_0^t a(s)ds}\left(y'(t) - a(t)y(t)\right) = e^{\int_0^t a(s)ds}y'(t) + a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}y(t)\right)\frac{d}{dt}(e^{\int_0^t a(s)ds}y(t))$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = e^{at}y(t)|_{t=0}^{(t=t)}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = de^{at-bt}$$

CAPÍTULO 2

Tema 2

Ejercicio 8. *a)*

$$y_n = \frac{1-h}{1+(n-1)h} \; n = 0, .., N = \frac{1}{h}$$

b)
Utilizando que es una ecuación de variables separables, llegamos a:

$$y(t) = \frac{1}{1+t}$$

Dado $t_* = nh$ fijo, calculamos el límite estacionario:

$$\lim_{h\to 0} \; \lim_{n\to+\infty} \; \lim_{hn=t_*} y_n^h = \lim \frac{1-h}{1+nh-h} = \lim \frac{1-h}{1+t_*-h} = \frac{1}{1+t_*} = y(t_*)$$

Es decir la solución exacta que hemos calculado.
c)
El resultado es:

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1+t_*^2+2t_*-h-ht_*} = O(h)_{h\to 0}$$

con $hn = t_*$.
Que el error sea una $O(h)$ significa que $|y(t_* - y_n^h| \leq_{h\to 0} kh$ Con k independiente de h.
Comprobaremos que el error sea una $O(h)$:

$$|y(t_* - y_n^h| = h\frac{t_*}{|1+t_*^2+2t_*-h-ht_*|}$$

Teniendo:

$$\frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*-h-ht_*} \sim_{h\to 0} \frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Luego el error lo podemos acotar por hk con $k=1$ cuando $h \to 0$.

Comprobaremos la optimalidad de esta cota.

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \leq ?kh^2$$

$$\frac{1}{h^2} y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \to_{h\to 0} \infty$$

Luego el error es mayor o igual que h y menor que h^2.

Ejercicio 6.

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = \frac{t^2}{2}$ *El método de Euler explícito queda:*

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, g_n) = y_n + ht_n \end{cases}$$

Entonces:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = y_0 + ht_0 = 0 + 0h = 0$$

$$y_2 = 0 + hh = h^2 \qquad y_3 = h^2 + 2h^2 = 3h^2$$

$$y_4 = (1 + 2 + 3) = 6h^2 \qquad y_5 = (1 + 2 + 3 + 4)h^2 = 10h^2$$

En general:

$$y_n = (1 + 2 + ... + n - 1)h^2 = \frac{(n-1)n}{2} h^2 = \frac{n^2 - n}{2} h^2 = \frac{1}{2} n^2 h^2 - \frac{1}{2} nhh = \frac{1}{2} t_*^2 - \frac{1}{2} t_* h \to \frac{1}{2} t_*^2$$

Con lo que tenemos un error del orden de $O(h)$

Variación del ejercicio

$$\begin{cases} y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = t$ *El método de Euler explícito queda:*

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h \end{cases}$$

Con lo que:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = h \qquad y_2 = 2h \; ...$$

$$y_n = nh = t_* = y(t_*)$$

Con lo que hemos obtenido la solución exacta, $\forall t_* = nh$ $y(t_*) - y_n^h = 0$. *¿Por qué no hay error en el método de Euler en este caso? Porque la segunda derivada de la solución exacta,* $y'' \equiv 0$ *y porque hemos tomado un* t_0 *que forma parte de la solución.*

Si en vez de tomar 0 tomamos $t_0 = \varepsilon$:

$$y_0 = \varepsilon \qquad y_1 = \varepsilon + h \qquad y_2 = \varepsilon + 2h$$

$$y_n = \varepsilon + nh$$

En este caso al no tomar un y_0 exacto el error se desvía por ε

$$(1+hL)^n \sim ? e^{Lt}$$

con $t = nh$ O equivalentemente, que $\lim_{t=nh}(1+hL)^n = e^{Lt}$

$$(1+hL)^n = e^{n\log(1+hL)} = e^{hn\dfrac{\log(1+hL)}{h}} \to e^{Lt}$$

c)

$$(1+O(h^{p+1}))^n = exp(n\log(1+O(h^{p+1}))) = exp(hn\frac{\log(1+O(h^{p+1}))}{n}) = e^{t\dfrac{\log(1+O(h^{p+1}))}{n}} = ...$$

Hacemos el desarrollo de Taylor en el exponente y nos queda $= exp(t(O(h^p)+...))$

Ejercicio 10. *Calculamos primero la solución exacta aunque no nos lo pida el ejercicio.*

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) + \beta \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y' = -\alpha y = \beta$$

$$e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t} y = e^{-\alpha t} y$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t})y = e^{-\alpha t}\beta$$

$$e^{-\alpha t}y - y_0 = \int_0^t e^{-\alpha s}\beta ds$$

$$y(t) = e^{-\alpha t}y_0 - \frac{\beta}{\alpha}(1-e^{\alpha t})$$

Hacemos ahora Euler explícito:

$$\begin{cases} u_{n+1} = y_n + hf(t_n, u_n) & n = 0, ..., \frac{N}{T} - 1 \\ u_0 = A & \textit{podemos asumir } A = y_0 \end{cases}$$

Recordemos que cada u_n es una aproximación a $y(t_n)$. También podemos usar y_n como aproximación a $y(t_n)$
Es importante saber que $y_n \neq y(t_n)$.
En nuestro caso, $f(t,y) = \alpha y + \beta$, luego $u_{n+1} = u_n + h(\alpha y_n + \beta)$
Tenemos entonces dos opciones:

- $u_1 = u_0 + h(\alpha u_0 + \beta)$
  $u_2 = u_1 h\alpha(u_1 + \beta) = u_1 + h\alpha(u_0 + h(\alpha u_0 + \beta) + \beta) =$
  $= u_1 + u_0(h\alpha(h\alpha)^2 + \beta(h^2 alfa h\alpha)) = u_1 + h\alpha(1+h\alpha)u_0 + h\alpha(h+1)\beta$
- $u_{n+1} = (1+h\alpha)u_n + \beta h$, *lo que nos queda:* $u_1 = (1+h\alpha)u_0 + \beta h$
  $u_2 = (1+h\alpha)u_1 + \beta h(1+h\alpha)u_0 + \beta h(1+(1+h\alpha))$
  $u_3 = (1+h\alpha)u_2 + \beta h = (1+h\alpha)((1+h\alpha)^2 u_0 + \beta h(1+(1+h\alpha))) + \beta h = (1+h\alpha)^3 + \beta h(1(1+h\alpha) + (1+h\alpha)^2)$

$$u_n = (1+h\alpha)^n u_0 + \beta h(1 + (1+h\alpha) + ... + (1+h\alpha)^{n-1})$$
$$= (1+h\alpha)^n u_0 + \frac{\beta}{\alpha}[(1+h\alpha)^n - 1]$$

Podemos observar que la convergencia del segundo método es mejor.

Vamos a comprobar que $u_n \to_{h\to 0,\ n\to+\infty,\ hn=t} y(t)$ *cuando* $t = hn$ *fijo.*

Sabemos que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right) = e^a$. *Entonces,* $(1+h\alpha)^n(1+\frac{hn}{n}\alpha) \to e^{t\alpha}$, *el valor que toma la solución exacta en el punto* t_0.

Calculemos ahora el error, sabemos que:

$$\int \frac{1}{1+x} = 1 - x + x + x^2 - x^3 + ...$$

$$\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \quad \textit{Desarrollo de Taylor de } \log 1+x \textit{ alrededor de } x = 0$$

El desarrollo de $\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2)$ *con* $|x| \to 0$

Tomando entonces una x *adecuada:*

$$(1+h\alpha)^n = e^{n\log(1+h\alpha)} = e^{nh\alpha\frac{\log(1+h\alpha)}{h\alpha}} = e^{t\alpha(1-\frac{h\alpha}{2}+O(h^2))} = e^{t\alpha}e^{-\frac{h\alpha^2 t}{2}+O(h^2)}$$

Entonces, $(1+h\alpha)^n = -e^{t\alpha} = e^{t\alpha}e^{\cdots} - e^{t\alpha} = e^{t\alpha}(e^{\cdots} - 1) = e^{t\alpha}(... + \frac{[...]^2}{2!} + ...) =$ $e^{\alpha t}(-\frac{h\alpha^2 t}{2}) + O(h^2)$

Hemos llegado a:

$$(1+h\alpha)^n - e^{t\alpha} = -\frac{h\alpha^2 t}{2}e^{\alpha t} + O(h^2)$$

Y el error es:

$$u_n - y_n = ((1+h\alpha)^n - e^{\alpha t})u_0 + \frac{\beta}{\alpha}((1+h\alpha)^n - e^{\alpha t}) = -\frac{h\alpha^2 t}{2}(u_0 + \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t} + O(h^2) \qquad h \to 0$$

Ejercicio 13. $n \geq N - 1$
$0 < \theta < 1,\ h = \frac{T}{N}$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_n + \theta f(t_n, y_n)) \\ y_0 \textit{ dado} \end{cases}$$

Los pasos ahora son:

1. *Obtenemos* $f(t_n, y_n)$
2. *Avanzamos desde* (t_n, y_n) *con pendiente* $f(t_n, y_n)$ *hasta el punto* $t_{n+\theta} = t_n + \theta h$ *y obtenemos la abscisa* $y_{n+\theta} = y_n + \theta hf(t_n, y_n)$

3. *Sobre el punto* $(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$ *obtenemos una nueva pendiente* $f(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$
4. *Aquí disponemos ya de dos pendientes, lo ideal es tomar* $k = b_1k_1 + b_2k_2$ *con* $b_1 + b_2 = 1$ *promedio y entonces avanzar desde* t_n *a* t_{n+1} *con esta pendiente:*

$$y_{n+1} = y_n + hk \qquad \text{con } k = b_1k_1 + b_2 + k_2$$

5. *en el caso de este ejercicio es* $b_1 = 0,\ b_2 = 1$