Apuntes de Grafos

Paco Mora
Manuel Franco

5 de noviembre de 2021

CAPÍTULO 1

Tema 3. Árboles

Definición 1.0.1. *Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es un árbol si es conexo y no tiene ciclos.*
Un árbol generador de un grafo $G = (V, E)$ es un subgrafo parcial conexo y sin ciclos.
Un bosque es un grafo $G = (V, E)$ sin ciclos.

Definición 1.0.2. *En un árbol, los nodos con grado de incidencia 1 se denominan hojas.*

Teorema 1. *Teorema de caracterización de árboles Sea $G = (V, E)$. Son equivalentes:*

- *G es conexo y sin ciclos*
- *Entre cada par de vértices distintos de V, existe una única cadena.*
- *G es conexo y $m = n - 1$*
- *G no contiene ciclos y $m = n - 1$*
- *G está minimalmente conectado*
- *G no contiene ciclos y su añadimos una arista entre dos vértices no adyacentes cualesquiera de V, el grafo que se obtiene contiene un único ciclo.*

Demostración

$1 \implies 2$

G es conexo sin nodos $\implies \forall u \neq v \exists!$ cadena u v. Existe una cadena por ser conexo, la yuxtaposición de dos cadenas diferentes u v, Gcontendría al menos un ciclo.
$2 \implies 3$

Suponemos que existe una única cadena entre cada par de vértices u, v. Como existe una cadena entre cada par de vértices, G es conexo. Veamos que $m = n - 1$. Recordemos una proposición que decía:

"Si G es conexo $m \geq n - 1$"

Veamos la igualdad ahora por inducción sobre el número de nodos, el caso $n = 1, 2$ es directo.
Si $n > 2$, eliminamos una arista cualquiera del grafo: $e = (u, v)$. Dado que esa cadena $(u, (u, v), v)$ era la única que conectaba u, v, ahora estos vértices están en componentes conexas distintas, con n_1, n_2 nodos y m_1, m_2 aristas respectivamente, que siguen cumpliendo la hipótesis de inducción, luego $m_1 = n_1 - 1$

y $m_2 = n_2 - 1$. En G, $n = n_1 + n_2 = m_1 + 1 + m_2 + 1 = (m_1 + m_2 + 1) + 1 = m + 1$
$3 \implies 4$

G conexo y $m = n - 1 \implies G$ no contiene ciclos y $m = n - 1$

Supongamos que G contiene un ciclo y retiráramos una arista cualquiera e no desconectaría el grafo y tendría un grafo conexo con n nodos y $(n-1)-1$ aristas, por la proposición que hemos recordado antes, G no sería conexo, lo que contradice (3)
$4 \implies 5$

G no tiene ciclos y $m = n - 1 \implies G$ está minimalmente conectado. Por la proposición que hemos recordado antes, basta demostrar que G es conexo.

Supongamos que G contiene s componentes conexas : $(V_1, E_1), ..., (V_s, E_s)$ con n_i nodos y m_i aristas, tengo ahora que G es acíclico, por lo que cada cc es acíclica y conexa por lo que cumple 1, y por tanto 3, y por tanto cada $m_i = n_i - 1$

$$(3) \implies m_i = ni - 1 \forall i \; n = \sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{s} (m_i + 1) = \sum_{i=1}^{s} m_i + s = m + s$$

Como partiamos de que $n = m + 1$ y tenemos $n = m + s$, entonces $s = 1$ y hay solo una c^3.

$5 \implies 6$

□

Teorema 2. ***Algoritmo de Kruskal***

Paso 1

Ordenar las aristas de E en orden ascendente de su peso:

$$V = \{v_1, ..., v_n\}, \; T^* = (V, \emptyset)$$

$$E := \{e_1, ..., e_m\} : \; \updownarrow \leq \updownarrow (e_i + 1) \forall i < m$$

Paso 2

Añadir $n - 1$ aristas a T^* sucesivamente (en el orden de sus pesos) sin que se formen ciclos.

Teorema 3. ***Algoritmo de Prim***

Paso 1

Elegir un vértice $r \in V$ y hacer $V_1 = \{r\}, \; V_2 = V \setminus \{r\}$.

Paso 2

Añadir al árbol la arista de menor peso de $w(V_1)$, digamos (v_1, v_2) con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Añadir v_2 a V_1 y borrar v_2 de V_2.

Paso 3

Si $|V_1| = n$ parar. Si no, volver al Paso 2.

1.1 - Problemas de optimización sobre grafos

Ejercicio 1. ***El problema del árbol generador del peso mínimo***

$$x_e = 1 \text{ si la arista } e \text{ pertenece al árbol } \forall e \in E$$

$$min \sum_{e \in E} l_e x_e$$

$$\begin{cases} s.a. & x_e \in \{0,1\} \forall e \in E \\ & \sum\limits_{e \in E} x_e = n-1 \\ & \sum\limits_{e \in E(V^3)} x_e \leq 2 \qquad \forall V^3 \subset V \qquad |V^3| = 3 \\ & \sum\limits_{e \in E(V^4)} x_e \leq 3 \qquad \forall V^4 \subset V \qquad |V^4| = 4 \\ & \vdots \\ & \sum\limits_{e \in E(S} x_e \leq |S|-1 \quad \forall S \subset V \quad 3 \leq |S| \leq n-1 \end{cases}$$

Haremos ahora la llamada formulación MTZ, que utiliza "una especie de árbol dirigido" comenzamos definiendo las variables:

$$u_i = \text{algo parecido al nivel del nodo } i \text{ en la arborescencia}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es el predecesor inmediato de } j \text{ en el árbol con raíz en 1} \\ 0 & oc \end{cases}$$

$$\begin{cases} min & \sum\limits_{i} \sum\limits_{j=(i,j) \in E} l_{ij} x_{ij} & \\ s.a. & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i,j : (i,j) \in E \\ & \sum\limits_{i} x_{ij} = 1 & \forall j \neq 1 \\ & x_{ij} + x_{ji} \leq 1 & \forall (i,j) \in E \\ & u_i \in \mathbb{Z}^+ & \forall i \\ & u_1 = 0 & \\ & u_j \geq u_i + 1 - M(1 - x_{ij}) & \forall i,j : (i,j) \in E \quad (x_{ij} = 1 \implies u_j \geq u_i + 1) \end{cases}$$

Podemos cambiar la M por $n-1$ ya que $u_j \leq n-1$ $\forall j$, creando una mejor formulación del problema.

Ejercicio 2. ***El problema del camino más corto entre dos vértices s y j***

Usaremos longitudes no negativas, y sea $x_{ij} = 1$ si el camino atraviesa el nodo i y a continuación *el j.*

$$\begin{cases} Min & \sum_{i\in V}\sum_{j\in V:(i,j)\in E} l_{ij}x_{ij} & \\ s.a. & x_{ij}\in\{0,1\} & \forall i,j:(i,j)\in E \\ & \sum_{j:(j,s)\in E} x_{sj}=1 & \\ & x_{js}=0 & \forall j:(j,s)\in E \\ & \sum_{j:(j,t)\in E} x_{jt}=1 & \\ & x_{tj}=0 & \forall j:(j,t)\in E \\ & \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ji} & \forall j\neq s,t \quad \text{Para todo nodo por el que entres, sales} \end{cases}$$

Podemos ver que la tercera y la cuarta restricción no son necesarias ya que se obtienen de las otras.

Veamos ahora otra formulación, si tenemos la estructura de árbol con raíz en s que contiene los caminos más cortos, supongamos que tenemos que enviar canicas desde la raíz de forma que llegue una a cada nodo. Las variables serán las canicas que pasan por cada arista.

$$x_{ij} = n^{o} \text{ de items (canicas) que circulan desde } i \text{ hasta } j \equiv$$

$$\equiv n^{o} \text{ de caminos más cortos desde } s=1 \text{ que contienen el subcamino } i,(i,j),j$$

$$\begin{cases} min & \sum_{i}\sum_{j:(i,j)\in E} l_{ij}x_{ij} & \\ s.a. & \sum_{j:(1,j)\in E} x_{1j}=n-1 & \\ & \sum_{j:(i,j)} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}-1 & \forall i\neq 1 \\ & x_{ij},x_{ji}\in\mathbb{Z}^{+} & \forall (i,j)\in E i<j \end{cases}$$

Vamos a modificar esta formulación un poco para obtener otra equivalente que tendrá una matriz de restricciones totalmente unimodular.

La restricción 1 la podemos intercambiar por $\sum_{j} x_{1j}-x_{j_1}=n-1$, *entonces esta restricción* $R_1=-\sum_{i=2}^{n} R_i$, *con lo que la podemos eliminar. Ahora, por un razonamiento análogo al visto en teoría para la matriz de incidencia del grafo bipartito, A es TU y, como b es entero, podemos eliminar la restricción de integridad. Es equivalente solucionar su problema dual:*

$$\begin{cases} Max & \sum_{j\neq 1} d_j & \\ s.a. & d_j\le l_{1j} & \forall j:(1,j)\in E \\ & d_j-d_i\le l_{ij} & \forall i,\forall j\neq 1 \ :(i,j)\in E \end{cases}$$

Ejercicio 3. ***El problema de convertir un grafo en euleriano***

$$x_e \equiv \text{número de veces que se recorre la arista } e$$

$$\begin{cases} min & \sum\limits_{e \in E} \updownarrow_e x_e & \\ s.a. & x_e \in \mathbb{Z}^+ & \forall e \in E \\ & x_e \geq 1 & \forall e \in E \\ & \sum\limits_{e \in E \ : \ e=(i,-)} x_e = 2z_i & \forall i \in V \\ & z_i \in \mathbb{Z}^+ & \forall i \\ & z_i \leq 2g(i) & \qquad \textit{Opcional, es para tener una mejor formulación} \end{cases}$$

Ejercicio 4. ***El problema del viajante de comercio***

$$x_e = 1 \ \textit{si la arista e pertenece al ciclo}$$

$$\begin{cases} min & \sum\limits_{e \in E} l_e x_e & \\ s.a. & \sum\limits_{e \in w(v)} x_e = 2 & \forall v \in V \\ & \sum\limits_{e \in w(S)} x_e \geq 2 & \forall S \subset V \quad 2 \leq |S| \leq n-1 \\ & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Caminos más cortos. Recorridos por artistas y vértices

Demostración

Si hubiera un camino más corto P_1 entre v_i y v_j que el subcamino P_2 entre v_i, v_j, reemplazando P_2 por P_1 obtenemos o bien 1. o 2.:

1. Un camino más corto que el camino más corto con lo que tenemos una contradicción.
2. Un paseo que contiene ciclos, la eliminación de estos ciclos nos deja un camino más corto que el camino más corto, de nuevo una contradicción.

$\square$

Demostración

$\Longleftarrow$

Supongamos $d_j > d_i + l_{ij}$, entonces, podemos crear un camino más corto a j yuxtaponiendo el camino a i y la arista que une i con j si no se forman ciclos, si se formaran, basta con quitarlo y aún así tendríamos un camino más corto a j. En ambos casos tenemos una contradicción.

$\Longrightarrow$

Sea $j \in V$ cualquiera, sea P un camino cualquiera de s a j, ¿se cumple que $l(p) \geq d_j$? Si $P = (s = i_0, i_1, ..., i_q = j)$ tenemos que:

$$d_{i_1} - d_{i_0} \leq l_{i_0 i_1} \qquad d_{i_2} - d_{i_1} \leq l_{i_1 i_2} \qquad ...$$

Sumando todo obtenemos que $d_j - \underbrace{d_s}_{0} = d_{i_q} - d_{i_0} \leq \sum_k l_{i_k i_{k+1}} = l(P)$

$\square$

Demostración

Sea P camino entre s y j, ¿ $l(p) \geq d_j$? De este camino $(v_s, v_a, v_b, ..., v_j)$ sabemos que:

- $v_s \notin V'$
- $v_j \in V'$

Si P_2 es el subcamino desde s hasta el primer nodo de V' con último coste $(v_{i_1}, v_{i_2}) \in w(V')$, entonces:

$$l(P) \geq l(P_2) = \underbrace{l(P_1)}_{\text{longitud del subcamino que une } s \text{ y } v_{ij}} + l_{i_1 i_2} \geq d_{i_1} + l_{i_1} l_{i_2} \geq_{(c)} d_{i_2} \geq d_j$$

□

Demostración

$\Longrightarrow$

Como G es conexo, $|g(v)| \geq 1 \forall v$, el paseo no repite aristas y atraviesa cada nodo añadiéndole grado 2 hasta cerrarse por lo que todos los nodos tienen grado par.

$\Longleftarrow$

Iniciamos un tour en $v_1, (v_1, v_2)$ (la arista existe porque el grafo tiene que ser conexo). Como $g(v_2) = \dot{2},\ \exists v_3,\ (v_2, v_3) \in E$, así podemos construir la sucesión $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), ..., (v_i, v_k)$. Solo se detiene el proceso si se encuentra la arista v_t, v_1 y no existen más aristas incidentes en v_1 que no estén en el paseo. En este caso pueden haber pasado dos cosas:

1. Si ya hemos recorrido todas las aristas hemos terminado.
2. No hemos recorrido todas las aristas. Como G es conexo, $\exists$ arista que no está en el paseo (v_s, v_x) con v_s en el paseo. En este caso, podemos empezar un nuevo paseo empezando en v_s formado por la concatenación del que hemos formado antes reordenado para que empiece y acabe en el v_s y el que se genera de la misma forma que antes pero comenzando en (v_s, v_x). Iteramos hasta agotar las aristas

□

Teorema 1. ***Bondy-Chvatal***

Demostración

$\Longrightarrow$

Directo.

$\Longleftarrow$

Reducción al absurdo: supongamos que existe un grafo no hamiltonianos cuya clausura sí es hamiltoniana.

Sea $G_0, ..., G_k = [G]$ con j el primer índice tal que G_j no es hamiltoniano pero G_{j+1} sí lo es. La última arista añadida, digamos que es $(v_1, v_n) \notin E_j$ y $(v_1, v_n) \in E_{j+1}$, tiene que estar en el ciclo hamiltoniano de G_{j+1}. Sea este ciclo $v_1, ..., v_n, v_1$.

Retirando (v_1, v_n) de nuevo, se sigue que en G_j existía un camino hamiltoniano $(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Sean $Y = \{i \in \{3, ..., n-1\} : (v_1, v_i) \in E_j\}$ (algunos de los vecinos de v_1) y $X = \{i \in \{3, ..., n+1\} : (v_n, i) \in E_j\}$ (los nodos a la derecha de algunos de los vectores de v_n). Entonces $|Y| = g_{G_j}(v_1) - 1$ y $|X| = g_{Gj}(v_n) - 1$ y $|X| + |Y| \geq_{\text{por la contrucción de } G_{j+1}} n - 2$.

Como $X, Y \subset \{3, 4, ..., n-1\}_{\text{con cardinal } n-3}$ y sus cardinales suman $n - 2 \implies X \cap Y \neq \emptyset \implies \exists v_k \in X \cap Y \implies$

$$\implies \begin{cases} (v_k, v_1) \in E_j \\ (v_{k-1}, v_n) \in E_j \end{cases}$$

Y tenemos que $(v_1, .., v_{k-1}, v_n, v_{n-1}, ..., v_k, v_1)$ es un ciclo hamiltoniano.

□

Demostración

$\Longrightarrow$

Utilizaremos el contrarrecíproco, si tenemos un $i < \dfrac{n}{2}$ tal que $a_i \leq 1$ y $a_{n-1} < n - 1$

$\Longleftarrow$

Supongamos que no es hamiltoniano. Sea $G(V, E)$ un grafo con el mayor número posible de aristas que no es hamiltoniano con grafos $g_1 \leq ... \leq g_n$. Esta grafo satisface la condición

$$g_i \leq i \implies a_i \leq g_i \leq 1 \implies a_{n-i} \geq n - 1 \implies g_{n-i} \geq a_{n-i} \geq n - i$$

De todos los G en estas condiciones elegimos uno con número máximo de aristas. Sean $u, v \in V$ con $(u, v) \notin E$ con máxima suma de $g(u) + g(v)$. Sea u el de menor grado: $g(u) \leq g(v)$. Como G es maximal, al añadir la arista (u, v) pasa a ser hamiltoniano, luego $\exists$ camino hamiltoniano $u \sim v$ en G:

$$u = v_1 - v_2 - ... - v_n = v$$

Como vimos ayer si u es vecino de v_i, no puede darse que v sea vecino de v_j, $j < i$.

Consideremos el conjunto de vecinos de u ($N(u) \subset \{v_1, ..., v_{n-1}\}$) y el conjunto de nodos de v_i que preceden inmediatamente en el camino a un vecino de $u \subset \{v_1, .., v_{n-1}\}$. La existencia de un nodo en la intersección de estos 2 conjuntos implica la existencia de un ciclo ham. en G, luego son disjuntos.

La unión de estos dos conjuntos está incluida en $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$. Uno de los conjuntos tiene cardinal $g(u)$ y el otro $g(v)$, como la unión es disjunta el cardinal es $g(u) + g(v)$. Por tanto, tenemos que $g(u) + g(v) < n \implies g(u) < \dfrac{n}{2}$

Sea $x \in V$ un nodo que precede en el camino a un vecino de u (y que por tanto no es vecino de v). Como tomamos u, v que no fueran vecinos con máximo $g(u)+g(v)$, tenemos que $g(x) \leq g(u)$. En las condiciones de x tengo tantos nodos como $|N(u)| = g(u)$. Sea $i = g(u)$, entonces $i < \dfrac{n}{2}, g(i) \leq i \implies g_{n-i} \geq n - i$

Luego al menos hay $i + 1$ nodos con grado $\geq n - i$. Como $i = g(u)$ no todos estos nodos pueden ser vecinos de n. Sea $w \notin N(u)$ con hgrado $\geq n - i$.

$$g(w) \geq n - g(u) \implies \text{Contradicción con la elección de } v$$

□