Apuntes de Grafos

Paco Mora
Manuel Franco

18 de octubre de 2021

CAPÍTULO 1

Tema 3. Árboles

Definición 1.0.1. *Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es un árbol si es conexo y no tiene ciclos.*
Un árbol generador de un grafo $G = (V, E)$ es un subgrafo parcial conexo y sin ciclos.
Un bosque es un grafo $G = (V, E)$ sin ciclos.

Definición 1.0.2. *En un árbol, los nodos con grado de incidencia 1 se denominan hojas.*

Teorema 1. *Teorema de caracterización de árboles Sea $G = (V, E)$. Son equivalentes:*

- *G es conexo y sin ciclos*
- *Entre cada par de vértices distintos de V, existe una única cadena.*
- *G es conexo y $m = n - 1$*
- *G no contiene ciclos y $m = n - 1$*
- *G está minimalmente conectado*
- *G no contiene ciclos y su añadimos una arista entre dos vértices no adyacentes cualesquiera de V, el grafo que se obtiene contiene un único ciclo.*

Demostración

$1 \implies 2$

G es conexo sin nodos $\implies \forall u \neq v \exists!$ cadena u v. Existe una cadena por ser conexo, la yuxtaposición de dos cadenas diferentes u v, Gcontendría al menos un ciclo.
$2 \implies 3$

Suponemos que existe una única cadena entre cada par de vértices u, v. Como existe una cadena entre cada par de vértices, G es conexo. Veamos que $m = n - 1$. Recordemos una proposición que decía:

"Si G es conexo $m \geq n - 1$"

Veamos la igualdad ahora por inducción sobre el número de nodos, el caso $n = 1, 2$ es directo.
Si $n > 2$, eliminamos una arista cualquiera del grafo: $e = (u, v)$. Dado que esa cadena $(u, (u, v), v)$ era la única que conectaba u, v, ahora estos vértices están en componentes conexas distintas, con n_1, n_2 nodos y m_1, m_2 aristas respectivamente, que siguen cumpliendo la hipótesis de inducción, luego $m_1 = n_1 - 1$

y $m_2 = n_2 - 1$. En G, $n = n_1 + n_2 = m_1 + 1 + m_2 + 1 = (m_1 + m_2 + 1) + 1 = m + 1$
$3 \implies 4$

G conexo y $m = n - 1 \implies G$ no contiene ciclos y $m = n - 1$

Supongamos que G contiene un ciclo y retiráramos una arista cualquiera e no desconectaría el grafo y tendría un grafo conexo con n nodos y $(n-1)-1$ aristas, por la proposición que hemos recordado antes, G no sería conexo, lo que contradice (3)
$4 \implies 5$

G no tiene ciclos y $m = n - 1 \implies G$ está minimalmente conectado. Por la proposición que hemos recordado antes, basta demostrar que G es conexo.

Supongamos que G contiene s componentes conexas : $(V_1, E_1), ..., (V_s, E_s)$ con n_i nodos y m_i aristas, tengo ahora que G es acíclico, por lo que cada cc es acíclica y conexa por lo que cumple 1, y por tanto 3, y por tanto cada $m_i = n_i - 1$

$$(3) \implies m_i = ni - 1 \forall i \; n = \sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{s} (m_i + 1) = \sum_{i=1}^{s} m_i + s = m + s$$

Como partiamos de que $n = m + 1$ y tenemos $n = m + s$, entonces $s = 1$ y hay solo una c^3.

$5 \implies 6$

□

Teorema 2. ***Algoritmo de Kruskal***

Paso 1

Ordenar las aristas de E en orden ascendente de su peso:

$$V = \{v_1, ..., v_n\}, \; T^* = (V, \emptyset)$$

$$E := \{e_1, ..., e_m\} : \; \updownarrow \leq \updownarrow (e_i + 1) \forall i < m$$

Paso 2

Añadir $n - 1$ aristas a T^* sucesivamente (en el orden de sus pesos) sin que se formen ciclos.

Teorema 3. ***Algoritmo de Prim***

Paso 1

Elegir un vértice $r \in V$ y hacer $V_1 = \{r\}, \; V_2 = V \setminus \{r\}$.

Paso 2

Añadir al árbol la arista de menor peso de $w(V_1)$, digamos (v_1, v_2) con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Añadir v_2 a V_1 y borrar v_2 de V_2.

Paso 3

Si $|V_1| = n$ parar. Si no, volver al Paso 2.