Así pues, la resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales conduce a la determinación de todas las geodésicas de una superficie regular S.

Teorema 5.2.2 (de existencia y unicidad de geodésicas maximales). *Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$. Entonces, existe una única geodésica $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$, con I_v abierto, verificando las siguientes condiciones:*

i) $0 \in I_v$, $\gamma_v(0) = p$ *y* $\gamma_v'(0) = \mathbf{v}$;

ii) *si* $\alpha : J \longrightarrow S$ *es otra geodésica con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, *entonces* $J \subset I_v$ *y* $\alpha \equiv \gamma_v|_J$.

La geodésica γ_v se denomina la *geodésica maximal con condiciones iniciales p y* $\mathbf{v}$, e I_v es el *intervalo maximal* de existencia.

Demostración. Para $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$ fijos, definimos el conjunto

$$\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}} = \{\gamma : I \longrightarrow S \text{ geodésica} : 0 \in I,\ \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \mathbf{v}\}.$$

Vamos a dividir la demostración en tres partes.

PASO 1. Veamos en primer lugar que $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}} \neq \emptyset$.

Sean (U, X) una parametrización de S con $p = X(u_0, v_0) \in X(U)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en la base de las parciales: $\mathbf{v} = v_1X_u(u_0, v_0) + v_2X_v(u_0, v_0)$. Para esta parametrización (U, X), consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales (5.9) sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} u'(0) = v_1, \\ v'(0) = v_2. \end{cases}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales, sabemos que existe una única curva $\widetilde{\gamma}(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ en el abierto U, que es solución de (5.9) con las condiciones iniciales fijadas. Entonces, $\gamma(t) = X\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) = X\big(u(t), v(t)\big)$ es una geodésica en S, ya que su expresión en coordenadas satisface el sistema (5.9). Además,

$$\begin{aligned} &\gamma(0) = X\big(\widetilde{\gamma}(0)\big) = X(u_0, v_0) = p \quad \text{y} \\ &\gamma'(0) = u'(0)X_u(u_0, v_0) + v'(0)X_v(u_0, v_0) = v_1X_u(u_0, v_0) + v_2X_v(u_0, v_0) = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, que no es vacío.

PASO 2. Ya sabemos lo que sucede en el entorno coordenado $X(U)$. Pero, ¿qué pasa fuera de él? Vamos a demostrar que esta geodésica γ puede «extenderse» más allá de $X(U)$, sin que tengan lugar situaciones, digamos, «extrañas».

Supongamos que $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow S$ y $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow S$ son dos geodésicas de $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$. Entonces, $0 \in I_1 \cap I_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = \mathbf{v}$. Vamos a probar que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ y $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$ en todo $t \in I_1 \cap I_2$. Para ello, definimos

$$A = \{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \text{ y } \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)\}.$$

Claramente, $A \neq \emptyset$, pues $0 \in A$. Si demostramos además que A es abierto y cerrado, como $I_1 \cap I_2$ es conexo, entonces podremos concluir que $A = I_1 \cap I_2$.

Probar que A es cerrado es fácil; basta usar un sencillo argumento topológico: definimos las funciones $f, g : I_1 \cap I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ dadas por $f(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)\big)$, $g(t) = \big(\gamma_2(t), \gamma_2'(t)\big)$; entonces $A = \big\{t \in I_1 \cap I_2 : f(t) = g(t)\big\}$, que es cerrado.

Demostremos ahora que A es abierto. Para ello, sea $t_0 \in A$, y buscamos $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$. Como $t_0 \in A$, entonces $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) =: \overline{p} \in S$ y $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0) =: \mathbf{w} \in T_{\overline{p}}S$. Elegimos una parametrización $(\overline{U}, \overline{X})$ de S de forma que $\overline{p} = \overline{X}(\overline{u}_0, \overline{v}_0) \in \overline{X}(\overline{U})$, y sean

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = \overline{X}^{-1}\big(\gamma_1(t)\big) = \big(u_1(t), v_1(t)\big), \quad \widetilde{\gamma}_2(t) = \overline{X}^{-1}\big(\gamma_2(t)\big) = \big(u_2(t), v_2(t)\big).$$

Así, tenemos dos soluciones $\big(u_1(t), v_1(t)\big)$ y $\big(u_2(t), v_2(t)\big)$ del sistema (5.9) con las mismas condiciones iniciales, pues

$$\begin{cases} u_1(t_0) = u_2(t_0) = \overline{u}_0, \\ v_1(t_0) = v_2(t_0) = \overline{v}_0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} u_1'(t_0) = u_2'(t_0) = w_1, \\ v_1'(t_0) = v_2'(t_0) = w_2, \end{cases}$$

donde $\mathbf{w} = w_1 \overline{X}_u(\overline{u}_0, \overline{v}_0) + w_2 \overline{X}_v(\overline{u}_0, \overline{v}_0)$. Por la unicidad de soluciones para este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales, podemos asegurar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $u_1(t) = u_2(t)$ y $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Luego

$$\gamma_1(t) = \overline{X}\big(u_1(t), v_1(t)\big) = \overline{X}\big(u_2(t), v_2(t)\big) = \gamma_2(t) \quad \text{y} \quad \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$$

si $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Esto prueba que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$; es decir, A es abierto.

PASO 3. Finalmente, construimos la geodésica maximal y su intervalo maximal de existencia. Sea

$$I_v = \bigcup_{\substack{\gamma : I \longrightarrow S \\ \gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}}} I.$$

Desde luego, $0 \in I_v$, pues $0 \in I$ para todo I, por la definición de $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$. Definimos la curva $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$ del siguiente modo: dado $t \in I_v$, existe una geodésica $\gamma : I \longrightarrow S$, $\gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, tal que $t \in I$; entonces, tomamos $\gamma_v(t) := \gamma(t)$. Ésta es una buena definición, pues si hubiese otra geodésica $\overline{\gamma} : \overline{I} \longrightarrow S$, $\overline{\gamma} \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, con $t \in \overline{I}$, entonces, por lo demostrado en el PASO 2, $\gamma \equiv \overline{\gamma}$ en la intersección de sus dominios, $I \cap \overline{I}$. Además, cumple las propiedades requeridas en el teorema. □

En resumidas cuentas, este resultado expresa que, en cada dirección del plano tangente T_pS, existe una única geodésica que pasa por p con la dirección prefijada, y que dicha geodésica está completamente determinada por tales condiciones iniciales. Esta demostración también es un ejemplo de la clase de dificultades que se pueden encontrar a la hora de demostrar resultados para superficies cuando éstos están apoyados en lo local: la extensión a la globalidad de la superficie puede presentar problemas inesperados que no se dan a nivel local.

Otro concepto relacionado con el resultado anterior es el de completitud (geodésica), que presentamos a continuación.