Demostraciones de Geometría Global de Superficies

Paco Mora y Chito Belmonte
Apuntes PaChito™

28 de febrero de 2022

Pequeño inciso: Estos apuntes apoyan algunas de sus demostraciones en el libro *Un curso de Geometría Diferencial*, con lo cual puede que algunas demostraciones no coincidan con lo visto en clase.

Índice general

1 Capítulo 1 **3**

2 Capítulo 2 **7**

3 Capítulo 3 **12**

Capítulo 1

Proposición 1.4, la derivada covariante es intrínseca.

Demostración

Desde luego, $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α, la derivada covariante puede verse como un operador, D/dt, de la forma

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{D}{dt}: & \mathfrak{X} & \to & \mathfrak{X} & & \\ & V & \sim & \dfrac{DV}{dt}: & I & \to \mathbb{R}^3 \\ & & & & t & \sim V'(t) - < V'(t), N(t) > N(t) \end{array}$$

Este operador es independiente de la orientación elegida para la superficie, pues estamos tomando sólo la parte tangente de V' (obsérvese que si cambiamos N por $-N$ en la fórmula, el resultado es el mismo).

Por otro lado, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental, afirmación que vamos a probar a continuación.

Para ello, sea (U, X) una parametrización de la superficie S y, como viene siendo habitual, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Si $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, por lo que puede expresarse de la forma

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Ahora, calculamos $V'(t)$, utilizando las fórmulas de Gauss para expresar X_{uu}, X_{uv} y X_{vv} en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$:

$$\begin{aligned} V' =& a'X_u + a\left(X_{uu}u' + X_{uv}v'\right) + b'X_v + b\left(X_{vu}u' + X_{vv}v'\right) \\ =& a'X_u + a\left[\left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN\right)u' + \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)v'\right] \\ & + b'X_v + b\left[\left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)u' + \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN\right)v'\right] \\ =& \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right)X_u \\ & + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)X_v + \left(aeu' + afv' + bfu' + bgv'\right)N. \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada covariante $DV/dt = (V')^\top$ se escribe como

$$\frac{DV}{dt} = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u$$
$$+ \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v$$

Obsérvese que DV/dt depende sólo de los símbolos de Christoffel y, por tanto, de la primera forma fundamental exclusivamente. En otras palabras, la derivada covariante es algo intrínseco; sus propiedades permanecen invariantes por isometrías.

□

Proposición 1.5, linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante.

Demostración

Las tres propiedades se demuestran trivialmente [1] :

I

$\frac{D}{dt}(V+W) = [(V+W)']^\top = (V'+W')^\top = (V')^\top + (W')^\top = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

II

$\frac{D}{dt}(fV) = [(fV)']^\top = (f'V + fV')^\top = (f'V)^\top + (fV')^\top = f'V + f\frac{DV}{dt}$, pues $V^\top = V$, ya que $V \in \mathcal{X}(\alpha)$.

III

La propiedad se prueba de forma similar: como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $\left\langle (V')^\perp, W\right\rangle = \left\langle V, (W')^\perp\right\rangle = 0$, de donde

$$\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = \left\langle (V')^\top + (V')^\perp, W\right\rangle + \left\langle V, (W')^\top + (W')^\perp\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

□

Proposición 1.7

Demostración

La parte I es trivial [2]

II

Al ser $DV/dt = \mathbf{0}$, sabemos que $V'(t)$ está en la dirección del normal a la superficie, y análogamente $W'(t)$. En consecuencia, como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene que $\langle V, W'\rangle = \langle V', W\rangle = 0$ y, por tanto, $\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0$.

Esto demuestra que $\langle V, W\rangle$ es constante.

□

[1] Tu puta madre por si acaso.
[2] Cada vez que lea 'es trivial' voy a meter un 'tu puta madre por si acaso'.

Proposición 1.8, la ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos

Demostración

Como $\dfrac{DV}{dt}(t) = V'(t) - < V'(t), N(t) > N(t)$, se tiene:

$$\frac{DV}{dt}(t) = 0 \iff V'(t) =< V'(t), N(t) > N(t)$$

Por otro lado, como V y N son ortogonales, $< V(t), N(t) >= 0$ y derivando esta expresión obtenemos

RESULTADO IMPORTANTE

$$< V'(t), N(t) >= - < V(t), N'(t) >$$

Por lo tanto,

$$\frac{DV}{dt}(t) = 0 \iff V'(t) + < V(t), N'(t) > N(t) = 0$$

$\square$

Proposición 1.9, la ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos

Demostración

Utilizando la fórmula que vimos en la primera proposición del tema,

$$V' = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v$$

Para la derivada covariante de un campo $V \in \mathfrak{X}$, los coeficientes de los vectores X_u y X_v tienen que anularse si queremos que sea paralelo; luego si representamos V como $V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, se verificará que

$$\begin{cases} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

$\square$

Teorema 1.10, existencia y unicidad de campos paralelos[3]

Demostración

Escribiendo $V = (V_1, V_2, V_3)$ y $N = (N_1, N_2, N_3)$, la ecuación

$$V'(t) + < V(t), N'(t) > N(t) = 0$$

se traduce en

$$0 = V_i'(t) + \left(\sum_{j=1}^{3} V_j(t) N_j'(t) \right) N_i(t) = V_i'(t) + \sum_{j=1}^{3} N_j'(t) N_i(t) V_j(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Si representamos por $M(t)$ la matriz $M(t) = \left(N_j'(t) N_i(t) \right)_{i,j=1}^{3}$, la expresión anterior se reescribe $V' + MV = 0$. Entonces, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden garantiza la existencia de un único campo de vectores diferenciable V, solución de dicha ecuación (y por tanto de nuestra ecuación oroginal) con condición inicial $V(t_0) = V_0$.

Desde luego, V es un campo paralelo ya que satisface $V'(t) + < V(t), N'(t) > N(t) = 0$. Para concluir la demostración tenemos que probar que V es tangente a S a lo largo de α; es decir, hay que ver que $\langle V(t), N(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.

Como $V_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$, claramente $\langle V_0, N(t_0) \rangle = 0$. Por otro lado, dado que V verifica la ecuación original, se tiene que $\langle V'(t), N(t) \rangle + \langle V(t), N'(t) \rangle = 0$. Derivando entonces $\langle V(t), N(t) \rangle$ y utilizando dicha expresión obtenemos

$$\langle V(t), N(t) \rangle' = \langle V'(t), N(t) \rangle + \langle V(t), N'(t) \rangle = 0.$$

En consecuencia, $\langle V(t), N(t) \rangle$ es constante y se anula en t_0, lo que demuestra que, en efecto, $\langle V(t), N(t) \rangle = 0$.

□

Teorema 1.12[4]

Demostración. Veamos en primer lugar que es una aplicación lineal. Para ello, sean $V_0, W_0 \in T_pS$, y sean $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ los únicos campos paralelos tales que $V(t_0) = V_0$ y $W(t_0) = W_0$. Entonces $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0) = V(t_1)$ y $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0) = W(t_1)$. Queremos calcular $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0 + W_0)$. Consideremos el campo $V + W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, que también es paralelo. Además $(V + W)(t_0) = V_0 + W_0$. Entonces, por el teorema 5.1.6 sabemos que $V + W$ es el único campo paralelo que en t_0 vale $V_0 + W_0$. Por tanto,

$$P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0 + W_0) = (V + W)(t_1) = V(t_1) + W(t_1) = P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0) + P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0).$$

Finalmente, demostrar que $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)$ es una isometría es sencillo:

$$\left\langle P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0), P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0) \right\rangle = \left\langle V(t_1), W(t_1) \right\rangle = \left\langle V(t_0), W(t_0) \right\rangle = \langle V_0, W_0 \rangle,$$

ya que, por ser V y W paralelos, su producto escalar es constante. □

[3]Hay una demostración extrínseca y otra intrínseca en el libro. He decidido copiar la extrínseca porque es la que hizo en clase, si queréis buscar la otra (fruto de vuestra curiosidad o esquizofrenia paranoide), está en el libro.

[4]El teorema 5.1.6 al que se refiere es el de existencia y unicidad de campos paralelos.

Capítulo 2

Proposición 2.2, la ecuación diferencial extrínseca de las geodésicas

Demostración

Tenemos la descomposición, por la fórmula extrínseca del campo paralelo,

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) + < \alpha''(t), N(t) > N(t)^1$$

Además, como $\langle \alpha'(t), N(t) \rangle = 0$, se tiene $\langle \alpha''(t), N(t) \rangle = -\langle \alpha'(t), N'(t) \rangle$. Luego

$$\frac{D\alpha}{dt}(t) = \alpha''(t) + \langle \alpha'(t), N'(t) \rangle N(t).$$

Por lo tanto,

$$\alpha \text{ geodésica} \iff \alpha''(t) + < \alpha'(t), N'(t) > N(t) = \mathbf{0}$$

□

Proposición 2.6, ecuación diferencial intrínseca de las geodésicas

Demostración

Utilizando la fórmula que vimos en la primera proposición del tema,

$$V' = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v$$

Ahora, si en lugar de utilizar V' utilizamos α', se tiene $a = u'$ y $b = v'$, y por lo tanto

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

□

Teorema 2.7, existencia y unicidad de geodésicas

En palabras del sensei Alías, 'Hay mejores cosas que preguntar en un examen a parte de este resultado'. Igualmente, os dejo su demostración:

[1] La manera de obtener esto es considerar α' en lugar de V.

Así pues, la resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales conduce a la determinación de todas las geodésicas de una superficie regular S.

Teorema 5.2.2 (de existencia y unicidad de geodésicas maximales). *Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$. Entonces, existe una única geodésica $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$, con I_v abierto, verificando las siguientes condiciones:*

i) $0 \in I_v$, $\gamma_v(0) = p$ *y* $\gamma_v'(0) = \mathbf{v}$*;*

ii) *si* $\alpha : J \longrightarrow S$ *es otra geodésica con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = \mathbf{v}$*, entonces* $J \subset I_v$ *y* $\alpha \equiv \gamma_v|_J$.

La geodésica γ_v se denomina la *geodésica maximal con condiciones iniciales p y* $\mathbf{v}$, e I_v es el *intervalo maximal* de existencia.

Demostración. Para $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$ fijos, definimos el conjunto

$$\mathfrak{I}_{p,\mathbf{v}} = \big\{\gamma : I \longrightarrow S \text{ geodésica} : 0 \in I,\ \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \mathbf{v}\big\}.$$

Vamos a dividir la demostración en tres partes.

PASO 1. Veamos en primer lugar que $\mathfrak{I}_{p,\mathbf{v}} \neq \emptyset$.

Sean (U,X) una parametrización de S con $p = X(u_0,v_0) \in X(U)$ y $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$ en la base de las parciales: $\mathbf{v} = v_1X_u(u_0,v_0) + v_2X_v(u_0,v_0)$. Para esta parametrización (U,X), consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales (5.9) sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} u'(0) = v_1, \\ v'(0) = v_2. \end{cases}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales, sabemos que existe una única curva $\widetilde{\gamma}(t) = \big(u(t),v(t)\big)$ en el abierto U, que es solución de (5.9) con las condiciones iniciales fijadas. Entonces, $\gamma(t) = X\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) = X\big(u(t),v(t)\big)$ es una geodésica en S, ya que su expresión en coordenadas satisface el sistema (5.9). Además,

$$\begin{aligned} &\gamma(0) = X\big(\widetilde{\gamma}(0)\big) = X(u_0,v_0) = p \quad \text{y} \\ &\gamma'(0) = u'(0)X_u(u_0,v_0) + v'(0)X_v(u_0,v_0) = v_1X_u(u_0,v_0) + v_2X_v(u_0,v_0) = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma \in \mathfrak{I}_{p,\mathbf{v}}$, que no es vacío.

PASO 2. Ya sabemos lo que sucede en el entorno coordenado $X(U)$. Pero, ¿qué pasa fuera de él? Vamos a demostrar que esta geodésica γ puede «extenderse» más allá de $X(U)$, sin que tengan lugar situaciones, digamos, «extrañas».

Supongamos que $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow S$ y $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow S$ son dos geodésicas de $\mathfrak{I}_{p,\mathbf{v}}$. Entonces, $0 \in I_1 \cap I_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = \mathbf{v}$. Vamos a probar que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ y $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$ en todo $t \in I_1 \cap I_2$. Para ello, definimos

$$A = \big\{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \ \text{ y } \ \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)\big\}.$$

Claramente, $A \neq \emptyset$, pues $0 \in A$. Si demostramos además que A es abierto y cerrado, como $I_1 \cap I_2$ es conexo, entonces podremos concluir que $A = I_1 \cap I_2$.

Probar que A es cerrado es fácil; basta usar un sencillo argumento topológico: definimos las funciones $f, g : I_1 \cap I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ dadas por $f(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)\big)$, $g(t) = \big(\gamma_2(t), \gamma_2'(t)\big)$; entonces $A = \big\{t \in I_1 \cap I_2 : f(t) = g(t)\big\}$, que es cerrado.

Demostremos ahora que A es abierto. Para ello, sea $t_0 \in A$, y buscamos $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$. Como $t_0 \in A$, entonces $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) =: \overline{p} \in S$ y $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0) =: \mathbf{w} \in T_{\overline{p}}S$. Elegimos una parametrización $(\overline{U}, \overline{X})$ de S de forma que $\overline{p} = \overline{X}(\overline{u}_0, \overline{v}_0) \in \overline{X}(\overline{U})$, y sean

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = \overline{X}^{-1}\big(\gamma_1(t)\big) = \big(u_1(t), v_1(t)\big), \quad \widetilde{\gamma}_2(t) = \overline{X}^{-1}\big(\gamma_2(t)\big) = \big(u_2(t), v_2(t)\big).$$

Así, tenemos dos soluciones $\big(u_1(t), v_1(t)\big)$ y $\big(u_2(t), v_2(t)\big)$ del sistema (5.9) con las mismas condiciones iniciales, pues

$$\left\{\begin{array}{l} u_1(t_0) = u_2(t_0) = \overline{u}_0, \\ v_1(t_0) = v_2(t_0) = \overline{v}_0, \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{l} u_1'(t_0) = u_2'(t_0) = w_1, \\ v_1'(t_0) = v_2'(t_0) = w_2, \end{array}\right.$$

donde $\mathbf{w} = w_1\overline{X}_u(\overline{u}_0, \overline{v}_0) + w_2\overline{X}_v(\overline{u}_0, \overline{v}_0)$. Por la unicidad de soluciones para este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales, podemos asegurar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $u_1(t) = u_2(t)$ y $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Luego

$$\gamma_1(t) = \overline{X}\big(u_1(t), v_1(t)\big) = \overline{X}\big(u_2(t), v_2(t)\big) = \gamma_2(t) \quad \text{y} \quad \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$$

si $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Esto prueba que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$; es decir, A es abierto.

PASO 3. Finalmente, construimos la geodésica maximal y su intervalo maximal de existencia. Sea

$$I_v = \bigcup_{\substack{\gamma: I \longrightarrow S \\ \gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}}} I.$$

Desde luego, $0 \in I_v$, pues $0 \in I$ para todo I, por la definición de $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$. Definimos la curva $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$ del siguiente modo: dado $t \in I_v$, existe una geodésica $\gamma : I \longrightarrow S$, $\gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, tal que $t \in I$; entonces, tomamos $\gamma_v(t) := \gamma(t)$. Ésta es una buena definición, pues si hubiese otra geodésica $\overline{\gamma} : \overline{I} \longrightarrow S$, $\overline{\gamma} \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, con $t \in \overline{I}$, entonces, por lo demostrado en el PASO 2, $\gamma \equiv \overline{\gamma}$ en la intersección de sus dominios, $I \cap \overline{I}$. Además, cumple las propiedades requeridas en el teorema. □

En resumidas cuentas, este resultado expresa que, en cada dirección del plano tangente T_pS, existe una única geodésica que pasa por p con la dirección prefijada, y que dicha geodésica está completamente determinada por tales condiciones iniciales. Esta demostración también es un ejemplo de la clase de dificultades que se pueden encontrar a la hora de demostrar resultados para superficies cuando éstos están apoyados en lo local: la extensión a la globalidad de la superficie puede presentar problemas inesperados que no se dan a nivel local.

Otro concepto relacionado con el resultado anterior es el de completitud (geodésica), que presentamos a continuación.

Proposición 2.10

Demostración. La curvatura geodésica $k_g(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = 0$ si, y sólo si, $\alpha''(s)$ y $J\alpha'(s)$ son ortogonales. Ahora bien, como $\langle \alpha''(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ siempre, la condición anterior es equivalente a su vez a que el vector aceleración $\alpha''(s)$ se encuentre en la dirección del normal a la superficie $N(s)$. Y esto se verifica si, y sólo si, $\alpha''(s)^\top = (D\alpha'/ds)(s) = \mathbf{0}$. Es decir, si, y solamente si, α es una geodésica. □

Lema 2.11

Demostración

Sea β una reparametrización de α que cumpla

$$\begin{cases} \beta(s) = \alpha(t(s)) \\ \alpha(t) = \beta(s(t)) \end{cases}$$

$$k_g^\alpha(t) = k_g^\beta(s(t)) \qquad k_g^\beta(t) =< \beta'', J\beta' >= det(\beta'', N, \beta')$$
$$\beta(s) = \alpha(t(s)) \to \beta'(s) = t'(s)\alpha'(t(s))$$

Como β está parametrizado por la longitud de arco, entonces

$$1 = ||\beta'(s)|| = t'(s) \cdot ||\alpha'(t(s))|| \qquad t'(s) = \frac{1}{||\alpha'||}$$

$$\beta'' = t''(s)\alpha'(t(s)) + (t'(s))^2\alpha''(t(s))$$

Por lo tanto, $N(s) = N(\beta(s)) = N(\alpha(t(s)))$.

$$k_g^\beta(s) = (t'(s))^3 \cdot det(\alpha''(t(s)), N(\alpha(t(s))), \alpha'(t(s)))$$

$$k_g^\beta(s) = \frac{det(\alpha'', N\alpha, \alpha')}{||\alpha'||^3}(t(s))$$

$$k_g^\alpha(t) = k_g^\beta(s(t)) = \frac{det(\alpha'', N, \alpha')}{||\alpha'||^3}(t)$$

No entiendo un carajo pero espero que ustedes lo hagan, un saludo.

□

2.13

Demostración. La curvatura geodésica $k_g(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = 0$ si, y sólo si, $\alpha''(s)$ y $J\alpha'(s)$ son ortogonales. Ahora bien, como $\langle \alpha''(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ siempre, la condición anterior es equivalente a su vez a que el vector aceleración $\alpha''(s)$ se encuentre en la dirección del normal a la superficie $N(s)$. Y esto se verifica si, y sólo si, $\alpha''(s)^\top = (D\alpha'/ds)(s) = \mathbf{0}$. Es decir, si, y solamente si, α es una geodésica. □

Proposición 2.0.1. ***Proposición exclusiva de Apuntes PaChito ™***

Sea $\alpha : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización. Son equivalentes:

1. *α es pregeodésica*
2. *$\exists \beta(u) = \alpha(h(u))$ una reparametrización de α / β es geodésica.*
3. *La reparametrización parametrizada por el arco de α es geodésica.*

Demostración

$$1 \implies 2$$

Directo por la definición

$$3 \implies 1$$

Por la definición directo

$$2 \implies 3$$

¿Te imaginas que es directo por la definición? Pues no. Mala suerte.

Tomamos una reparametrización de I:

$$I \to^{\alpha} S$$
$$J \to^{h(u)} I$$
$$J \to^{\beta(u)=\alpha(h(u)) \text{ que es geodésica}} S$$

Esto es un triangulito si lo dibujáis... Estaría bien que yo también lo hiciera pero soy un *vago*.

$$||\beta'(u)|| = c = h'(u) \cdot ||\alpha'(h(u))||$$

Si $c = 1 \to \beta(u)$ es la reparametrizavión por arco de α

Si $c \neq 1 \to$ Tomo $\underbrace{\gamma(s) = \beta(\frac{u}{c})}_{GEODESICA} = \alpha(h(\frac{u}{c}))$

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c} \cdot \beta' \left(\frac{s}{c}\right)$$

□

Capítulo 3

Lema 3.2, Lema de homogeneidad de las geodésicas

Lo más importante del lema son las fórmulas que aparecen centradas en su enunciado.

Demostración. Definimos una nueva curva $\alpha : I_\alpha \longrightarrow S$ de la forma $\alpha(t) := \gamma_v(\lambda t)$, donde el intervalo de definición $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \lambda t \in I_v\}$. Entonces, $\alpha(0) = \gamma_v(0) = p$ y $\alpha'(0) = \lambda \gamma_v'(0) = \lambda \mathbf{v}$. Además,

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \big(\alpha''(t)\big)^\top = \big[\lambda^2 \gamma_v''(\lambda t)\big]^\top = \lambda^2 \frac{D\gamma_v'}{dt}(\lambda t) = \mathbf{0},$$

ya que γ_v es una geodésica. En consecuencia, α es también una geodésica en la superficie S con condiciones iniciales $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \lambda \mathbf{v}$, y por el teorema de existencia y unicidad de geodésicas maximales (véase el teorema 5.2.2), podemos asegurar que $I_\alpha \subset I_{\lambda v}$ y que $\alpha \equiv \gamma_{\lambda v}|_{I_\alpha}$; luego

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \alpha(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Falta demostrar que $\big(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/|\lambda|\big) \subset I_{\lambda v}$. Concretamente, vamos a probar que $\big(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/|\lambda|\big) \subset I_\alpha$, y como ya sabemos que $I_\alpha \subset I_{\lambda v}$, tendremos el resultado. Sea $t \in \big(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/|\lambda|\big)$, lo cual implica que $-\varepsilon/|\lambda| < t < \varepsilon/|\lambda|$, es decir, que $-\varepsilon < |\lambda| t < \varepsilon$. Entonces, $-\varepsilon < \lambda t < \varepsilon$, independientemente de que λ sea positivo o negativo, lo que demuestra que $\lambda t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$. Por lo tanto, $t \in I_\alpha$. $\square$

Teorema 3.3, Propiedades de la aplicación exponencial

Primero tenemos que demostrar esta propiedad

$$p \in S,\ v \in T_pS \implies iv \in \mathcal{D}_p,\ \forall t \in I_v \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Demostración

$$\begin{cases} t = 0 \to OK \\ t \neq 0, \qquad tv \in \mathcal{D}_p \iff 1 \in I_{tv} = \dfrac{1}{t} \cdot I_v \ si\ 1 = \dfrac{1}{t}t \end{cases}$$

$$exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),\ \forall t \in I_v$$

□

Fin de la demostración inciso, comenzamos a demostrar el teorema.

Demostración

$$I$$

Que sea estrellado nos dice que el segmento que une cualquier punto con el origen no se sale del conjunto. En otras palabras,

$$\forall \underbrace{v \in \mathcal{D}_p}_{1 \in I_v \implies [0,1] \subset I\ \forall t \in [0,1]},\ [0, v] = \{tv,\ 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{D}_p$$

Del inciso se deduce que $t \in I_v \implies tv \in \mathcal{D}_p$. Notamos lo siguiente:

$$\forall v \in T_pS,\ \exists(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$$

Y justo debajo ha escrito

$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall |t| < \varepsilon,\ tv \in \mathcal{D}_p$$

$$II$$

Este dice el sensei Alías que nos lo creamos y yo **me lo creo.**

$$III$$

$$\exists \underbrace{U}_{\text{entorno de } 0}{}^{1} \in \mathcal{D}_p\ :\ exp_{p|\mathcal{U}}\ :\ \underbrace{\mathcal{U}}_{\subset T_pS} \to \underbrace{V}_{\subset S} \text{ es difeomorfismo}$$

Para comprobar si es un difeomorfismo, tenemos que ver que la diferencial es un isomorfismo lineal. Vamos a ver si esto es así:

$$\forall v \in \mathcal{D}_p \to d(exp_p)_v\ :\ \underbrace{T_v(\mathcal{D}_p)}_{T_v(T_pS)} \to T_{exp_p(v)}S$$

$$\forall w \in T_pS \qquad \alpha(t) = v + tw$$

$$\alpha\ :\ I \to \mathcal{D}_p \subset T_pS$$

$$\alpha(0) = v \qquad \alpha'(0) = w \qquad \to \qquad w \in T_v(T_pS)$$

Vamos al caso particular $v = 0$.

$$d(exp_p)_0\ :\ T_0(TpS) = T_pS \to T_{exp_p(v)}S = T_pS$$

[1] Para el sensei Alías, decir entorno implica que es abierto

$$\forall w \in T_pS = T_0(T_pS)$$

$$d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t))$$

Tenemos que encontrar una curva que cumpla

$$\forall \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = 0 \\ \alpha'(0) = w \end{array}\right\} \alpha(t) = tw$$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1) = \gamma_w(t)$$

$$d(exp_p)_0(w) = \gamma'_w(0) = w \implies d(exp_p)_0 = Id$$

□

Lema 3.6, El lema de Gauss

Vamos a demostrar una versión más general de lo que viene en los apuntes. En nuestra versión demostraremos

$$\forall w \in T_pS \qquad < d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w) >=< v, w >$$

Demostración

Procedo a copiar lo que ponga el sensei en la pizarra. Para demostrar esta propiedad, debemos hacer una cuenta.

Caso fácil:

Supongamos $w = \lambda v$. Entonces, $d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t)),\ \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{D}_p$. Tomamos $\alpha(t) = v + tw = v + t\lambda v = (1 + \lambda t)v$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p((1 + \lambda t)v) = \gamma_v(1 + \lambda t)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma_v((1 + \lambda t)v) = \lambda\gamma'_v(1 + \lambda t)$$

$$\implies {}_{t=0} d(exp_p)_v(w) = \lambda\gamma'_v(1)$$

Ahora, vamos a utilizar que el módulo es constante.

$$< d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w) >=< \gamma'_v(1), \lambda\gamma'_v(1) >= \lambda||\gamma'_v(1)||^2 = \lambda||\gamma'_v(0)|| = \lambda||v||^2 =$$

$$=< v, \lambda v >=< v, w >$$

Caso chungo:

Supongamos ahora que v y w son linealmente independientes, que es una condición más general a que sean ortogonales. Este tiene un poco más de miga.

Consideramos $\phi(s, t) \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to T_pS$ tal que

$$\phi(s, t) = s(v + tw) = s\alpha(t)$$

En este caso,

$$\phi(0,t) = 0 \ \ \forall t \qquad \phi(1,t) = \alpha(t) \ \ \forall t^2$$

Si $\alpha \in \mathcal{D}_p$ entonces

$$\phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall s \in [0,1]$$
$$\phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon')$$
$$\alpha(0) \in \mathcal{D}_p \to \exists \varepsilon > 0 | \alpha(t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall |t| < \varepsilon$$

Por compacidad, $\exists \varepsilon > 0 \mid \phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall (s,t) \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ahora, considero la siguiente aplicación

$$\psi(s,t) = exp_p(\phi(s,t)) = exp_p(s\alpha(t))$$
$$\alpha(t) = v + tw$$
$$\psi \ : \ (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to^{\phi} \mathcal{D}_p \to^{exp_p} S, \text{ que es bien definida y } C^\infty$$
$$exp_p(s\alpha(t)) = \gamma_{\alpha(t)}(s)$$

La derivada fácil de ψ es con respecto de s y por ella vamos a comenzar.

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) = \frac{d}{ds}_{t=cte}(\gamma_{\alpha(t)}(s)) = \gamma'_{\alpha(t)}(s) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''\alpha(t)(s) \text{ normal}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}(exp_p(s\alpha(t))) = d(exp_p)_{s(\alpha(t))}(\alpha(t))$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,0) = d(exp_p)_{s,v}(v) = \begin{cases} d(exp_p)_0(v) = v, \ s = 0 \\ d(exp_p)_v(v), \ s = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(1,0) = d(exp_p)_v(v)$$

Bueno si este ha sido el caso fácil agárrate de los pelos que vamos a derivar con respecto de t.

$$s = 0 \to \psi(0,t) = exp_p(0) = p$$
$$s = 1 \to \psi(1,t) = exp_p(\alpha(t)) \to \frac{\partial p}{\partial t}(1,t) = d(exp_p)_{\alpha(t)}(\alpha(t)) = d(exp_p)_{\alpha(t)}(w)$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(1,0) = d(exp_p)_v(w)$$
$$< \frac{\partial \psi}{\partial s}(1,0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(1,0) > = ??$$
$$f(s) = < \frac{\partial p}{\partial s}(s,0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,0) >, \ \forall s \in [0,1]$$

Mi objetivo es calcular $f(1)$.

$$f'(s) = \underbrace{< \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s,0), \ \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,0) >}_{A} + \underbrace{< \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}(s,0) >}_{B}$$

[2] Luis está haciendo un dibujo bastante ilustrativo en la pizarra (hoy es 17 de Febrero, por si os queréis ver la clase). El caso es que el hijo de puta de Paco aún no se ha puesto a tomar apuntes conmigo (es cuestión de tiempo, siempre se mete el jodido) y no me da tiempo a copiar lo que dice y el dibujo, así que... Lector, good luck.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''_v \text{ normal a } S \text{ en } \gamma_v(s)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(s,t)\right) = \beta'_s(0) \in TS = T$$

A tomar por culo, os lo copio del libro:

$\square$

continua (en V, donde es un difeomorfismo), $\exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0)$ es un cerrado verificando $U_0 \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0) \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(V) = U$, y por tanto, $\mathrm{cl}\,U_0 \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0) \subset U$.

Si $\mathbf{w} \notin U_0$, dado que $\mathrm{cl}\,U_0 \subset U$, ambos U_0, U son conexos y U es estrellado respecto a $\mathbf{0}$, podríamos asegurar la existencia de $t_0 \leq 1$ tal que $t_0\mathbf{w} \notin U_0$ pero $t_0\mathbf{w} \in U$. En tal caso, $\exp_{p_0}(t_0\mathbf{w}) = \gamma_w(t_0) = \alpha(t_0)$. Ahora bien, tal y como hemos definido la curva $\widetilde{\alpha}$, sabemos que $\alpha(t_0) = \exp_{p_0}\big(\widetilde{\alpha}(t_0)\big)$, donde $\widetilde{\alpha}(t_0) \in U_0$ por la construcción de U_0. Habríamos llegado así a que $\exp_{p_0}\big(\widetilde{\alpha}(t_0)\big) = \exp_{p_0}(t_0\mathbf{w})$ con $t_0\mathbf{w} \neq \widetilde{\alpha}(t_0)$, lo que contradiría la inyectividad de $\exp_{p_0}$ (dentro de U).

Por lo tanto, $\mathbf{w} \in U_0 \subset U$. Tenemos entonces que $\exp_{p_0}(\mathbf{v}) = p = \exp_{p_0}(\mathbf{w})$, con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$, lo que nos permite concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ por la inyectividad de $\exp_{p_0}$. En consecuencia, $\alpha = \gamma_w|_{[0,1]} = \gamma_v|_{[0,1]} = \gamma_p$, tal y como se quería demostrar. □

5.3.1. El lema de Gauss

Sean S una superficie regular y $p \in S$. Elegimos un vector cualquiera $\mathbf{v} \in D_p$, para el que vamos a estudiar la diferencial $d(\exp_p)_\mathbf{v} : T_\mathbf{v}D_p \equiv T_pS \longrightarrow T_{\exp_p(\mathbf{v})}S$. Sea $\mathbf{w} \in T_pS$. Nos preguntamos entonces qué se puede decir de $d(\exp_p)_\mathbf{v}(\mathbf{w})$. El lema de Gauss nos da la respuesta. Desde luego, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ya sabemos que $d(\exp_p)_\mathbf{0} = 1_{T_pS}$, por lo que vamos a suponer que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Lema 5.3.6 (de Gauss –primera versión). *Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in D_p$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Sea además $\mathbf{w} \in T_pS$.*

i) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, entonces $\big|d(\exp_p)_\mathbf{v}(\mathbf{w})\big| = |\mathbf{w}|$.

ii) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $d(\exp_p)_\mathbf{v}(\mathbf{v})$, $d(\exp_p)_\mathbf{v}(\mathbf{w})$ son ortogonales.

Demostración. Supongamos primero que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, esto es, $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para un cierto $\lambda > 0$. Entonces, tomando la curva $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w} = (1+\lambda t)\mathbf{v}$, que está contenida en D_p y verifica $\alpha(0) = \mathbf{v}$, $\alpha'(0) = \mathbf{w}$, se tiene que

$$d(\exp_p)_\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_p\big((1+\lambda t)\mathbf{v}\big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma_v(1+\lambda t) = \lambda\gamma_v'(1),$$

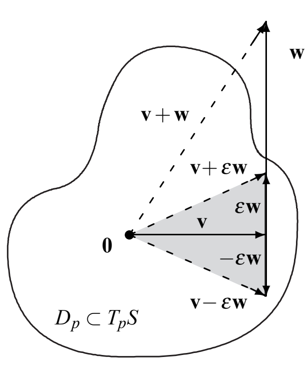

Figura 5.6: Dominio de φ.

donde, como es usual, $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$ es la geodésica maximal con $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = \mathbf{v}$. Tomando módulos, $\big|d(\exp_p)_\mathbf{v}(\mathbf{w})\big| = |\lambda|\,\big|\gamma_v'(1)\big| = |\lambda|\,\big|\gamma_v'(0)\big| = |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$.

Estudiemos ahora el segundo caso, y supongamos por tanto que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales. Definimos $\varphi(s,t) = \exp_p\big(s(\mathbf{v}+t\mathbf{w})\big)$. ¿Cuál es su dominio de definición?

Sea $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Claramente, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w} \in D_p$ (véase la figura 5.6). En consecuencia, al ser D_p estrellado respecto al origen $\mathbf{0} \in T_pS$, si $s \in [0,1]$, se tiene que $s\alpha(t) = s(\mathbf{v}+t\mathbf{w}) \in D_p$.

Ahora bien, como D_p es un abierto, podemos asegurar la existencia de un $\varepsilon' > 0$ (independiente de t), verificando que para todo $s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon')$, $s\alpha(t) \in D_p$. En efecto, si $D_p = T_pS$ el resultado es trivial. Si $D_p \subset T_pS$ estrictamente y representamos por τ el triángulo con vértices $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}+\varepsilon\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}-\varepsilon\mathbf{w}$, que es un compacto (véase la figura 5.6), es evidente que la distancia (euclídea, en T_pS) $\rho = \mathrm{dist}(\tau, T_pS\backslash D_p) > 0$; basta tomar entonces $\varepsilon' > 0$ verificando $\varepsilon' < \rho/2$. Así pues, la aplicación

$$\varphi : (-\varepsilon', 1+\varepsilon') \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S, \quad \text{dada por} \quad \varphi(s,t) = \exp_{\mathrm{p}}\big(s\alpha(t)\big)$$

está bien definida. Además, es claro que,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}),$$

y por lo tanto, es suficiente demostrar que $\langle \partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial s\rangle\,\big|_{(t,s)=(1,0)} = 0$. Para ello, definimos la función

$$f(s) := \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle, \quad \text{con } s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon').$$

Claramente se tiene que $f(0) = 0$, ya que $(\partial\varphi/\partial t)(0,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, siendo además su derivada

$$f'(s) = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,0) \right\rangle. \tag{5.14}$$

Estudiemos los dos sumandos de (5.14) separadamente, comenzando por el segundo. Por un lado,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,0) = \frac{d^2}{ds^2}\big(\exp_{\mathrm{p}}(s\mathbf{v})\big) = \gamma_v''(s).$$

Como γ_v es una geodésica, el campo velocidad γ_v' es paralelo, y por tanto, $\gamma_v''(s)$ está en la dirección del normal a la superficie en el punto $\varphi(s,0)$. Por otro lado, si $\beta_s : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ representa la curva $\beta_s(t) = \varphi(s,t)$, entonces

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(s,t) = \beta_s'(0) \in T_{\beta_s(0)}S = T_{\varphi(s,0)}S$$

es un vector tangente a S. En consecuencia, $\big\langle(\partial\varphi/\partial t)(s,0), (\partial^2\varphi/\partial s^2)(s,0)\big\rangle = 0$.

Finalmente, estudiamos el primer sumando de (5.14).

$$\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\bigg|_{t=0} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \right\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right|^2.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\exp_{\mathrm{p}}\big(s\alpha(t)\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\big(\gamma_{\alpha(t)}(s)\big) = \gamma_{\alpha(t)}'(s),$$

por lo que

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right|^2 = \left|\gamma_{\alpha(t)}'(s)\right|^2 = \left|\gamma_{\alpha(t)}'(0)\right|^2 = |\alpha(t)|^2 = |\mathbf{v}+t\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + 2t\,\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + t^2\,|\mathbf{w}|^2.$$

Geodésicas en superficies

Entonces, se tiene finalmente que

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle = \frac{1}{2}\left(2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + 2t\,|\mathbf{w}|^2\right)\Big|_{t=0} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0,$$

ya que, por hipótesis, los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales. En resumen, dado que ambos sumandos en la expresión (5.14) se anulan, entonces $f'(s) = 0$, lo cual implica que f es constante. Como además $f(0) = 0$, podemos concluir que $f \equiv 0$, lo que termina la demostración. □

Teorema 3.8, Propiedad minimizante de las geodésicas

Es bastante difícil poner con palabras cuán horrenda, larga y desagradable es esta demostración. Por esto, he decidido meter aquí su equivalente en el libro tal cual y sin ningún tipo de respeto. Por si os surgen dudas y queréis consultar la fuente, es el teorema 5.3.9 del curso de Hernández Pastor. Comienza en la siguiente página.

Os animo a hacer un dibujo libre en lo que queda de página y enviármelo por twitter al user @chitobelm.

Demostración. Veamos la primera parte. Dado $p \in V$, sabemos que, si $t \in [0,1]$, $\gamma_p(t) = \gamma_v(t) = \exp_{\mathrm{p}_0}(t\mathbf{v})$ es la geodésica maximal para el (único) vector $\mathbf{v}$ tal que $\exp_{\mathrm{p}_0}(\mathbf{v}) = p$. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow V$ con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$ otra curva cualquiera.

$$L_0^1(\gamma_p) = \int_0^1 \left|\gamma_p'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(0)\right| dt = |\mathbf{v}|.$$

Vamos a demostrar que $L_a^b(\alpha) \geq |\mathbf{v}|$. Para ello, distinguimos dos casos.

i) Supongamos en primer lugar que $p = p_0$. En tal caso, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo que, trivialmente, $L_a^b(\alpha) \geq 0 = |\mathbf{v}|$. Además, si $L_a^b(\alpha) = 0$, entonces α es constante; y como $\alpha(a) = p_0$, podemos concluir que $\alpha \equiv p_0 \equiv \gamma_p$.

ii) Supongamos por tanto que $p \neq p_0$. Por comodidad, reparametrizamos α de manera que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Como $\alpha(0) = p_0 \neq p = \alpha(1)$, existirá un $t_0 \geq 0$ tal que $\alpha(t_0) = p_0$ y $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > t_0$. Tomamos entonces $\alpha|_{[t_0,1]}$. Claramente, $L_0^1(\alpha) \geq L_{t_0}^1\left(\alpha|_{[t_0,1]}\right)$, por lo que es suficiente trabajar con el trozo de curva $\alpha|_{[t_0,1]}$ y ver que $L_{t_0}^1\left(\alpha|_{[t_0,1]}\right) \geq |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p)$. Hemos «suprimido» así un posible intervalo en el que, o bien α es constantemente igual a p_0, o bien α es un lazo, esto es, sale de p_0 y vuelve a pasar por dicho punto más adelante. Volvemos entonces a reparametrizar $\alpha|_{[t_0,1]}$ para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Ahora se verifica además la condición adicional de que $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > 0$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"'] & V \subset S \arrow[d, shift left, "\left(\exp_{\mathrm{p}_0}|_U\right)^{-1}"] \\
& U \subset D_{p_0} \arrow[u, shift left, "\exp_{\mathrm{p}_0}|_U"]
\end{tikzcd}$$

Como V es entorno normal de p_0, sabemos que $V = \exp_{\mathrm{p}_0}(U)$, siendo $U \subset D_{p_0}$ el entorno estrellado del origen $\mathbf{0}$ de $T_{p_0}S$ para el cual $\exp_{\mathrm{p}_0}|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Tomamos entonces la curva en el tangente

$$\widetilde{\alpha}(t) = \left(\exp_{\mathrm{p}_0}|_U\right)^{-1}\left(\alpha(t)\right) \in U \subset D_{p_0}.$$

Obsérvese en primer lugar que $\widetilde{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$ si $t > 0$; en efecto, si $\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{0}$ para algún $t > 0$, se tendría que $\alpha(t) = \exp_{\mathrm{p}_0}(\mathbf{0}) = p_0$, una contradicción. Definimos entonces las funciones

$$\begin{cases} r(t) := \left|\widetilde{\alpha}(t)\right| > 0 & \text{si } t > 0, \\ r(0) := 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad V(t) = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{\left|\widetilde{\alpha}(t)\right|} = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{r(t)} \quad \text{si } t > 0.$$

Claramente, $\left|V(t)\right| = 1$, por lo que $\left\langle V'(t), V(t)\right\rangle = 0$; esto es, $V(t)$ y $V'(t)$ son ortogonales. Además, $\alpha(t) = \exp_{\mathrm{p}_0}\big|_U\left(\widetilde{\alpha}(t)\right) = \exp_{\mathrm{p}_0}\left(r(t)V(t)\right)$. Derivando esta expresión se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(r'(t)V(t) + r(t)V'(t)\right) \\
&= r'(t)d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V(t)\right) + r(t)d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V'(t)\right),
\end{aligned}$$

y finalmente, tomando módulos y aplicando el lema de Gauss 5.3.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\alpha'(t)\right|^2 &= r'(t)^2\left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V(t)\right)\right|^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V'(t)\right)\right|^2 \\
&\quad + 2r(t)r'(t)\left\langle d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V(t)\right), d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V'(t)\right)\right\rangle \\
&= r'(t)^2\left|V(t)\right|^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V'(t)\right)\right|^2 + 0 \\
&= r'(t)^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\left(V'(t)\right)\right|^2 \geq r'(t)^2, \text{ para todo } t \in (0,1].
\end{aligned}$$

Por tanto, $\left|\alpha'(t)\right| \geq \left|r'(t)\right| \geq r'(t)$ para todo $t \in (0,1]$. Si ahora calculamos la longitud de α, usando la desigualdad anterior se obtiene el resultado buscado:

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 \left|\alpha'(t)\right| dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left|\alpha'(t)\right| dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 r'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(r(1)-r(\varepsilon)\big)$$
$$= r(1)-r(0) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}\big(\alpha(1)\big)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p)\right| = |\mathbf{v}|.$$

Para concluir la demostración de la primera parte del teorema falta caracterizar la igualdad. Si $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p) = |\mathbf{v}|$, debe darse la igualdad en todas las desigualdades anteriores. Así, $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p)$ si, y sólo si, $\left|r'(t)\right| = r'(t)$ y $\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right| = 0$, lo cual es equivalente a su vez a que $r'(t) > 0$ y $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$. Como $\exp_{p_0}|_U$ es un difeomorfismo en U y $r(t)V(t) \in U$, entonces $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}$ es un isomorfismo lineal. Luego $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $V'(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$, es decir, si $V(t)$ es constante, siendo $V(t) = V(1) = \widetilde{\alpha}(1)/\left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Así,

$$\alpha(t) = \exp_{p_0}\big(r(t)V(t)\big) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_v\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right),$$

donde, recordemos, $r(0) = 0$ y $r(1) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = |\mathbf{v}|$. Por tanto, $\alpha(t)$ es una reparametrización monótona (pues $r'(t) \geq 0$) del segmento de geodésica γ_p.

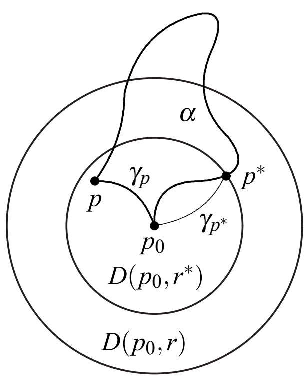

Figura 5.8: γ_p minimiza la longitud en los discos geodésicos.

Probamos ahora la segunda parte del teorema. Sea $r > 0$ de forma que el disco $D(p_0,r) \subset V(p_0)$, y sea $p \in D(p_0,r)$. Tenemos que demostrar que $L_0^1(\gamma_p) \leq L_a^b(\alpha)$, para $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ uniendo p_0 y p. Reparametrizamos de nuevo la curva α para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Si $\alpha\big([0,1]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, entonces la primera parte del teorema nos asegura que $L_0^1(\alpha) \geq L_0^1(\gamma_p)$. Vamos a suponer, por tanto, que la imagen de la curva α se sale del disco $D(p_0,r)$. Sea de nuevo $\mathbf{v} \in U$ el (único) vector verificando que $p = \exp_{p_0}(\mathbf{v})$.

Como el punto $p \in D(p_0,r) = \exp_{p_0}\big(D(\mathbf{0},r)\big)$, se tiene que $\mathbf{v} \in D(\mathbf{0},r)$, es decir, $|\mathbf{v}| < r$. Sea entonces $r^* > 0$ tal que $|\mathbf{v}| < r^* < r$, lo que nos asegura que $p \in D(p_0,r^*)$. Representamos por t_0 el primer valor del parámetro en el que la curva α se sale del disco $D(p_0,r^*)$, esto es,

$$t_0 = \inf\big\{t \in [0,1] : \alpha(t) \notin D(p_0,r^*)\big\}.$$

Entonces, $\alpha\big([0,t_0]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, y además, en los extremos α verifica $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(t_0) =: p^* \in S(p_0,r^*) \subset D(p_0,r)$ (véase la figura 5.8). Bajo tales condiciones, la primera parte del teorema asegura que $L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*})$, donde, como ya es habitual, γ_{p^*} representa el segmento de geodésica radial que une $p_0 = \gamma_{p^*}(0)$ con $p^* = \gamma_{p^*}(1)$, (véase la figura 5.8). Denotemos por $\mathbf{v}^* = \gamma'_{p^*}(0)$. Entonces,

$$L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*}) = \int_0^1 \left|\gamma'_{p^*}(t)\right| dt = \int_0^1 |\mathbf{v}^*|\,dt = |\mathbf{v}^*| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p^*)\right| = r^*;$$

por lo tanto,

$$L_0^1(\alpha) \geq L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq r^* > |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p),$$

como se quería demostrar. □

Teorema 3.9

Inciso, más adelante se hace referencia a 4.2, se refiere a esto

Tenemos por tanto que demostrar que

$$\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big| = \sqrt{EG-F^2}(u,v). \tag{4.2}$$

Veámoslo. Sea $q=(u,v)\in X^{-1}(V)\subset U$. Entonces $p=X(q)=\overline{X}\big(\phi(q)\big)$. Disponemos de dos bases de T_pS, $\{X_u(q),X_v(q)\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big),\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\}$, y podemos expresar los elementos de una de ellas como combinación lineal de los de la otra:

$$X_u(q)=\big(\overline{X}\circ\phi\big)_u(q)=\frac{\partial}{\partial u}\overline{X}\big(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)\big)=\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}+\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{v}}{\partial u},$$

$$X_v(q)=\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}+\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}(q)=|X_u\wedge X_v|(q)&=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\\ \frac{\partial\overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\end{pmatrix}\right|\big|\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big|\big(\phi(q)\big)\\ &=\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big|;\end{aligned}$$

Demostración. Obsérvese que $X(r,\theta)=\exp_{p_0}(\mathbf{v}_{r,\theta})=\exp_{p_0}(r\mathbf{v}_\theta)=\gamma_{v_\theta}(r)$. En consecuencia, $X_r=\gamma'_{v_\theta}(r)$ y $E=\langle X_r,X_r\rangle=\big\langle\gamma'_{v_\theta}(r),\gamma'_{v_\theta}(r)\big\rangle=\langle\mathbf{v}_\theta,\mathbf{v}_\theta\rangle=1$.

Ahora bien, $X_\theta=d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(r\mathbf{v}'_\theta(\theta)\big)$, mientras que X_r se puede escribir como $X_r=d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(\mathbf{v}_\theta(\theta)\big)$. Además, al ser $|\mathbf{v}_\theta|=1$, entonces $\big\langle\mathbf{v}'_\theta(\theta),\mathbf{v}_\theta(\theta)\big\rangle=0$, es decir, $\mathbf{v}_\theta$ y $\mathbf{v}'_\theta$ son ortogonales. Por lo tanto, el lema de Gauss nos asegura que

$$F=\langle X_r,X_\theta\rangle=\big\langle d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(\mathbf{v}_\theta(\theta)\big),d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(r\mathbf{v}'_\theta(\theta)\big)\big\rangle=0.$$

Finalmente, $G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2 \left| d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|^2 > 0$. Tan sólo resta calcular el límite de las funciones G y $\left(\sqrt{G}\right)_r$ cuando $r \to 0$. Por la dependencia diferenciable respecto a las condiciones iniciales de las geodésicas como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos calcular el límite

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left|d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right| &= \left|d(\exp_{p_0})_{\mathbf{0}}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right| = \left|\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right| \\ &= \left|-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2\right| = 1.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\left|d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|$ es una función acotada, por lo que

$$\lim_{r\to 0} G = \lim_{r\to 0} r^2\left|d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|^2 = 0.$$

Por último, para calcular el límite $\lim_{r\to 0}\left(\sqrt{G}\right)_r$, vamos a utilizar las coordenadas normales ya estudiadas en la sección anterior. Elegimos pues la parametrización dada por un sistema de coordenadas normales $\overline{X}(u,v)$ en p_0 de suerte que el cambio de coordenadas $\phi(r,\theta) = (u,v)$ viene dado por $u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$. Si representamos por $\overline{E},\overline{F},\overline{G}$ los coeficientes de su primera forma fundamental, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{G}(r,\theta) &= \sqrt{EG-F^2}(r,\theta) = \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\left|\det(J\phi)(r,\theta)\right| \\ &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\end{aligned}$$

(véase (4.2)), y un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{G}\right)_r(r,\theta) &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\right) \\ &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right) \\ &\quad + r\frac{(\overline{G}\circ\phi)(\overline{E}\circ\phi)_r + (\overline{E}\circ\phi)(\overline{G}\circ\phi)_r - 2(\overline{F}\circ\phi)(\overline{F}\circ\phi)_r}{2\left(\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\right)\circ\phi}(r,\theta).\end{aligned}$$

Obsérvese que $(u,v) \to (0,0)$ cuando $r \to 0$, por lo que en el límite obtenemos el punto $p_0 = \overline{X}(0,0)$, en el que las coordenadas normales están bien definidas y valen $\overline{E}(0,0) = \overline{G}(0,0) = 1$ y $\overline{F}(0,0) = 0$.

Además, las primeras derivadas de $\overline{E},\overline{F}$ y $\overline{G}$ (respecto a u y v) también se anulan en el $(0,0)$ (véase el ejercicio 5.26). Luego

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left(\overline{E}\circ\phi\right)_r(r,\theta) &= \lim_{r\to 0}\left[\overline{E}_u\big(\phi(r,\theta)\big)\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)+\overline{E}_v\big(\phi(r,\theta)\big)\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\right]\\ &= \overline{E}_u(0,0)\cos\theta+\overline{E}_v(0,0)\operatorname{sen}\theta=0.\end{aligned}$$

Análogamente $\lim_{r\to 0}\left(\overline{F}\circ\phi\right)_r(r,\theta)=\lim_{r\to 0}\left(\overline{G}\circ\phi\right)_r(r,\theta)=0$ y, en consecuencia, se obtiene que

$$\lim_{r\to 0}\big(\sqrt{G}\big)_r=\lim_{r\to 0}\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(r,\theta)\big)=1,$$

lo que concluye la prueba. □

Teorema de Minding

Teorema 5.3.11 (de Minding). *Sean S y $\overline{S}$ dos superficies regulares con igual curvatura de Gauss constante. Entonces, S y $\overline{S}$ son localmente isométricas.*

Demostración. Sean $p\in S$ y $\overline{p}\in\overline{S}$ cualesquiera. Tenemos que demostrar que existen entornos $V(p)\subset S$ de p, $\overline{V}(\overline{p})\subset\overline{S}$ de $\overline{p}$ y un difeomorfismo $\varphi: V\longrightarrow\overline{V}$, tal que φ es una isometría. Tomemos para ello $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ y $\{\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2\}$ bases ortonormales de los planos tangentes T_pS y $T_{\overline{p}}\overline{S}$, respectivamente y construimos una isometría lineal entre los espacios vectoriales T_pS y $T_{\overline{p}}\overline{S}$ de la manera natural:

$$\widetilde{\varphi}: T_pS\longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{S}\quad\text{dada por}\quad\widetilde{\varphi}(u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2)=u\overline{\mathbf{e}}_1+v\overline{\mathbf{e}}_2,$$

para la que, claramente, $\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_1)=\overline{\mathbf{e}}_1$, $\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_2)=\overline{\mathbf{e}}_2$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pS & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & T_{\overline{p}}\overline{S}\\ {\scriptstyle \exp_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{\overline{p}}}\\ S & \longrightarrow & \overline{S}\end{array}$$

Sean V_0 y $\overline{V}_0$ entornos normales de p y $\overline{p}$, respectivamente, y denotemos por $U_0\subset D_p$ y $\overline{U}_0\subset D_{\overline{p}}$ los abiertos estrellados, entornos de $\mathbf{0}_p\in T_pS$ y $\mathbf{0}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{S}$, respectivamente, tales que $\exp_p : U_0 \longrightarrow V_0$ y $\exp_{\overline{p}} : \overline{U}_0 \longrightarrow \overline{V}_0$ son difeomorfismos. Tomemos además los abiertos $U := \widetilde{\varphi}^{-1}\big(\overline{U}_0 \cap \widetilde{\varphi}(U_0)\big) \subset U_0$ y $\overline{U} := \overline{U}_0 \cap \widetilde{\varphi}(U_0) \subset \overline{U}_0$ (obsérvese que $\overline{U} = \widetilde{\varphi}(U)$, véase la figura 5.10). Finalmente, representamos por V y $\overline{V}$ los entornos (de p y $\overline{p}$, respectivamente) $V := \exp_p(U) \subset V_0$ y $\overline{V} := \exp_{\overline{p}}(\overline{U}) \subset \overline{V}_0$, y definimos la aplicación φ como la composición

$$\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_p}^{-1} : V \longrightarrow \overline{V}.$$

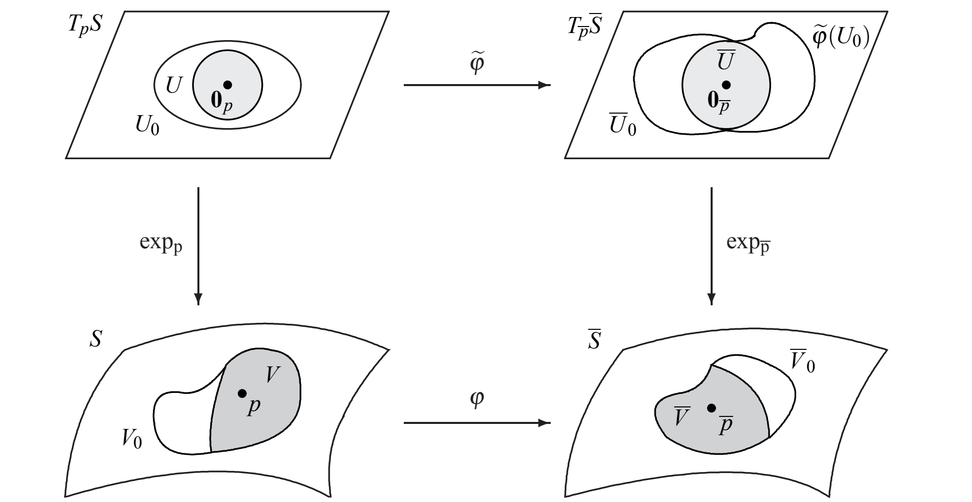

Figura 5.10: Construyendo la isometría φ entre V y $\overline{V}$.

Vamos a demostrar que φ es una isometría (global) entre V y $\overline{V}$. Desde luego, φ es un difeomorfismo, pues es composición de difeomorfismos. Para ver que es una isometría, utilizaremos el teorema 3.7.4: construiremos dos parametrizaciones X y $\overline{X} = \varphi \circ X$, de S y $\overline{S}$, respectivamente, con los mismos coeficientes de la primera forma fundamental.

Para ello, sean $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_pS$ y $\overline{\phi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{S}$ las aplicaciones dadas por

$$\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2 \quad \text{y} \quad \overline{\phi}(r,\theta) = r\cos\theta\,\overline{\mathbf{e}}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overline{\mathbf{e}}_2,$$

y consideremos $U' := \phi^{-1}(U) = \overline{\phi}^{-1}(\overline{U})$. Ésta es una buena definición pues, si el par $(r,\theta) \in \phi^{-1}(U)$, o lo que es lo mismo, si $\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2 \in U$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(r,\theta) &= r\cos\theta\,\overline{\mathbf{e}}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overline{\mathbf{e}}_2 = r\cos\theta\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_1) + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2) \in \widetilde{\varphi}(U) = \overline{U},\end{aligned}$$

de donde se deduce que $(r,\theta) \in \overline{\phi}^{-1}(\overline{U})$; el recíproco es análogo. Construimos finalmente las parametrizaciones buscadas para nuestras superficies S y $\overline{S}$ (véase la figura 5.11):

$$X = \exp_p \circ \phi \quad \text{y} \quad \overline{X} = \exp_{\overline{p}} \circ \overline{\phi},$$

respectivamente (en definitiva, no estamos haciendo otra cosa que considerar los sistemas de coordenadas geodésicas polares para cada una de las superficies).

$$\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\overline{\phi}"] \arrow[ddl, bend right, "X"'] \arrow[ddr, bend left, "\overline{X}"] & \\
U \arrow[rr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\exp_p"] & & \overline{U} \arrow[d, "\exp_{\overline{p}}"] \\
V \arrow[rr, "\varphi"] & & \overline{V}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.11: Construyendo las parametrizaciones X y $\overline{X} = \varphi \circ X$.

Es muy sencillo comprobar que el nuevo diagrama (véase la figura 5.11) es conmutativo, es decir, que $\overline{X} = \varphi \circ X$. En efecto:

$$\begin{aligned}\overline{X}(r,\theta) &= (\exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \overline{\phi})(r,\theta) = \exp_{\overline{\mathrm{p}}}(r\cos\theta\bar{\mathbf{e}}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\bar{\mathbf{e}}_2)\\ &= (\exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi})(r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_2) = (\varphi \circ \exp_{\mathrm{p}})(r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_2)\\ &= (\varphi \circ \exp_{\mathrm{p}} \circ \phi)(r,\theta) = (\varphi \circ X)(r,\theta).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi = \overline{X} \circ X^{-1}$. El teorema 3.7.4 nos asegura entonces que si los coeficientes de la primera forma fundamental de X y $\overline{X}$ coinciden, la aplicación φ es una isometría. Ahora bien, en el ejemplo 5.11 hemos calculado los coeficientes E, F y G correspondientes a los sistemas de coordenadas geodésicas polares, cuando la curvatura de Gauss es constante, relaciones (5.19), (5.20) y (5.21). Así, se tiene que $E = 1 = \overline{E}$ y $F = 0 = \overline{F}$. Además, como por hipótesis $K = \overline{K}$,

$$G = \left\{ \begin{array}{ll} r^2 & \text{si } K = \overline{K} = 0 \\ \dfrac{1}{K}\,\mathrm{sen}^2\big(\sqrt{K}\,r\big) = \dfrac{1}{\overline{K}}\,\mathrm{sen}^2\big(\sqrt{\overline{K}}\,r\big) & \text{si } K = \overline{K} > 0 \\ \dfrac{-1}{K}\,\mathrm{senh}^2\big(\sqrt{-K}\,r\big) = \dfrac{-1}{\overline{K}}\,\mathrm{senh}^2\big(\sqrt{-\overline{K}}\,r\big) & \text{si } K = \overline{K} < 0 \end{array} \right\} = \overline{G}.$$

Luego $\varphi = \exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}$ es una isometría. $\square$

Observación 5.6. Obsérvese que, para la aplicación $\varphi = \exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}$ definida en la demostración del teorema de Minding, se tiene además que $d\varphi_p \equiv \widetilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} d\varphi_p(\mathbf{v}) &= d\big(\exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}\big)_p(\mathbf{v}) = d(\exp_{\overline{\mathrm{p}}})_{(\widetilde{\varphi}\circ{\exp_{\mathrm{p}}}^{-1})(p)}\Big(d\big(\widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}\big)_p(\mathbf{v})\Big)\\ &= d(\exp_{\overline{\mathrm{p}}})_{\mathbf{0}_p}\Big(d\widetilde{\varphi}_{{\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}(p)}\big(d({\exp_{\mathrm{p}}}^{-1})_p(\mathbf{v})\big)\Big) = \big(d\widetilde{\varphi}_{\mathbf{0}_p} \circ d({\exp_{\mathrm{p}}}^{-1})_p\big)(\mathbf{v})\\ &= \Big(\widetilde{\varphi} \circ \big(d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{0}_p}\big)^{-1}\Big)(\mathbf{v}) = \widetilde{\varphi}(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in T_pS$. En particular, $d\varphi_p(\mathbf{e}_i) = \bar{\mathbf{e}}_i$, para $i = 1,2$. $\diamondsuit$