Demostraciones de Geometría Global de Superficies

Paco Mora y Chito Belmonte
Apuntes PaChito™

9 de febrero de 2022

Pequeño inciso: Estos apuntes apoyan algunas de sus demostraciones en el libro *Un curso de Geometría Diferencial*, con lo cual puede que algunas demostraciones no coincidan con lo visto en clase.

Índice general

1 **Capítulo 1** 3

2 **Capítulo 2** 7

3 **Capítulo 3** 9

Capítulo 1

Proposición 1.4, la derivada covariante es intrínseca.

Demostración

Desde luego, $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α, la derivada covariante puede verse como un operador, D/dt, de la forma

$$\begin{array}{llll} \dfrac{D}{dt}: & \mathfrak{X} & \to & \mathfrak{X} \\ & V & \sim & \dfrac{DV}{dt}: \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \sim & V'(t) < V'(t), N(t) > N(t) \end{array} \end{array}$$

Este operador es independiente de la orientación elegida para la superficie, pues estamos tomando sólo la parte tangente de V' (obsérvese que si cambiamos N por $-N$ en la fórmula, el resultado es el mismo).

Por otro lado, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental, afirmación que vamos a probar a continuación.

Para ello, sea (U, X) una parametrización de la superficie S y, como viene siendo habitual, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Si $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, por lo que puede expresarse de la forma

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Ahora, calculamos $V'(t)$, utilizando las fórmulas de Gauss para expresar X_{uu}, X_{uv} y X_{vv} en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$:

$$\begin{aligned} V' =& a'X_u + a\left(X_{uu}u' + X_{uv}v'\right) + b'X_v + b\left(X_{vu}u' + X_{vv}v'\right) \\ =& a'X_u + a\left[\left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN\right)u' + \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)v'\right] \\ &+ b'X_v + b\left[\left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)u' + \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN\right)v'\right] \\ =& \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right)X_u \\ &+ \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)X_v + \left(aeu' + afv' + bfu' + bgv'\right)N. \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada covariante $DV/dt = (V')^{\top}$ se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u \\ &+ \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v\end{aligned}$$

Obsérvese que DV/dt depende sólo de los símbolos de Christoffel y, por tanto, de la primera forma fundamental exclusivamente. En otras palabras, la derivada covariante es algo intrínseco; sus propiedades permanecen invariantes por isometrías.

□

Proposición 1.5, linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante.

Demostración

Las tres propiedades se demuestran trivialmente [1] :

I

$\frac{D}{dt}(V+W) = [(V+W)']^{\top} = (V'+W')^{\top} = (V')^{\top} + (W')^{\top} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

II

$\frac{D}{dt}(fV) = [(fV)']^{\top} = (f'V + fV')^{\top} = (f'V)^{\top} + (fV')^{\top} = f'V + f\frac{DV}{dt}$, pues $V^{\top} = V$, ya que $V \in \mathcal{X}(\alpha)$.

III

La propiedad se prueba de forma similar: como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $\left\langle (V')^{\perp}, W \right\rangle = \left\langle V, (W')^{\perp} \right\rangle = 0$, de donde

$$\begin{aligned}\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle &= \left\langle (V')^{\top} + (V')^{\perp}, W \right\rangle + \left\langle V, (W')^{\top} + (W')^{\perp} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle\end{aligned}$$

□

Proposición 1.7

Demostración

La parte I es trivial [2]

II

Al ser $DV/dt = \mathbf{0}$, sabemos que $V'(t)$ está en la dirección del normal a la superficie, y análogamente $W'(t)$. En consecuencia, como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene que $\langle V, W'\rangle = \langle V', W\rangle = 0$ y, por tanto, $\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0$.

Esto demuestra que $\langle V, W\rangle$ es constante.

□

Proposición 1.8, la ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

[1] Tu puta madre por si acaso.
[2] Cada vez que lea 'es trivial' voy a meter un 'tu puta madre por si acaso'.

□

Proposición 1.9, la ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

□

Teorema 1.10, existencia y unicidad de campos paralelos[3]

Demostración

Hay que encontrar $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $DV/dt = \mathbf{0}$.

Sea (U, X) una parametrización de S con $\alpha(t_0) \in X(U)$, y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Utilizando la expresión de la demostración de la proposición 1.4 para la derivada covariante de un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, como $DV/dt = \mathbf{0}$, los coeficientes de los vectores X_u y X_v tienen que anularse; luego si representamos V como $V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, se verificará que

$$\left\{ \begin{array}{l} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0 \end{array} \right.$$

En otras palabras, se prueba que siempre es posible 'fijar un rumbo' en la superficie. Una vez fijado, ya se puede hablar de si se mantiene o no constante la dirección de cualquier otro campo.

Tenemos por tanto un sistema de ecuaciones diferenciales cuya condición inicial es

$$V(t_0) = V_0 = (a(t_0), b(t_0))$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones para tales sistemas establece el resultado buscado (además, se puede obtener la solución de forma explícita al resolverlo, siempre y cuando esto sea posible).

$\square$

[3]Hay una demostración extrínseca y otra intrínseca en el libro. He decidido copiar la intrínseca porque leyéndola en diagonal he determinado que sería más sencilla, si queréis buscar la otra (fruto de vuestra curiosidad o esquizofrenia paranoide), está en el libro.

Capítulo 2

Proposición 2.0.1. ***Proposición exclusiva de Apuntes PaChito ™***

Sea $\alpha : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización. Son equivalentes:

1. *α es pregeodésica*
2. *$\exists \beta(u) = \alpha(h(u))$ una reparametrización de α/β es geodésica.*
3. *La reparametrización parametrizada por el arco de α es geodésica.*

Demostración

$$1 \implies 2$$

Directo por la definición

$$3 \implies 1$$

Por la definición directo

$$2 \implies 3$$

¿Te imaginas que es directo por la definición? Pues no. Mala suerte.

Tomamos una reparametrización de I:

$$I \to^{\alpha} S$$
$$J \to^{h(u)} I$$
$$J \to^{\beta(u)=\alpha(h(u)) \text{ que es geodésica}} S$$

Esto es un triangulito si lo dibujáis... Estaría bien que yo también lo hiciera pero soy un *vago*.

$$||\beta'(u)|| = c = h'(u) \cdot ||\alpha'(h(u))||$$

Si $c = 1 \to \beta(u)$ es la reparametrizavión por arco de α

Si $c \neq 1 \to$ Tomo $\underbrace{\gamma(s) = \beta(\frac{u}{c})}_{GEODESICA} = \alpha(h(\frac{u}{c}))$

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c} \cdot \beta'\left(\frac{s}{c}\right)$$

$\square$

Capítulo 3