

Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

18 de octubre de 2021

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1, 2, 3\}$, los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ (recordemos que $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$).

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ entonces:

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{9}{24} \cdot 0 = 0 & x \in [0, 1) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = \frac{2}{3} & x \in [2, 3) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = 1 & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Pasando a la parte continua, $P_c(B) = \frac{1}{1 - \alpha}P(B \cap D^c)$ y $F_c(x) = P_c((-\infty, x])$
 $= \frac{1}{1 - \alpha}P((-\infty, x] \cap D^c)$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{24-9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$