Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

25 de octubre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1,2,3\}$*, los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y* $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ *(recordemos que* $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$*).*

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1-\alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ *entonces:*

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in [0,1) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{3} & x \in [1,2) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{6}{24} = \frac{2}{3} & x \in [2,3) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{9}{24} = 1 & x \in [3,+\infty) \end{cases}$$

Pasando a la parte continua, $P_c(B) = \frac{1}{1-\alpha}P(B \cap D^c)$ *y* $F_c(x) = P_c((-\infty, x])$
$= \frac{1}{1-\alpha}P((-\infty, x] \cap D^c)$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{24}{24} \frac{9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Hoja 4

Ejercicio 1.

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

a) *$Y = aX - b$ con $a \neq 0$*

La función usada es la $g(x) = ax - b$, esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de a. Si $h(y) = g^{-1}(x) = \dfrac{y+b}{a}$, recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \qquad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos $h'(y) = \dfrac{1}{a}$ y $g((0,1))$:

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right)\frac{1}{a} = 2\frac{a-y-b}{a^2}I_{(-b,a-b)}$$

$$a < 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right) - \frac{1}{a} = 2\frac{y+b-a}{a^2}I_{(a-b,-b)}$$

b) *$Z = 3X^2 - X$*

Usaremos la función $g(x) = 3x^2 - x$, esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos E_1, E_2 para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en $x = \dfrac{1}{6}$, con lo que tenemos los *conjuntos* $E_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, $E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$, *tenemos que:*

$$E_1 \to \left(-\frac{1}{12}, 0\right) = F_1 \qquad E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 2\right) = F_2$$

Para cada intervalo, definimos g_i*:*

$$g_1 = g|_{(0,\frac{1}{6})} : \left(0, \frac{1}{6}\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \qquad g_2 = g|_{(\frac{1}{6},1)} : \left(\frac{1}{6}, 1\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 2\right)$$

Entonces tenemos que:

$$f_Z(z) = \sum_r f_X(h_r(z))|h_r'(z)|$$

Siendo $h_r(z)$ *la inversa de* $g_r(z)$*, las calculamos:*

$$z = 3x^2 - x \iff 3x^2 - x - z = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12z}}{6} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6} = h_2(z) & (\textit{creciente}) \\ \frac{1-\sqrt{1+12z}}{6} = h_1(z) & (\textit{decreciente}) \end{cases}$$

$$h_1'(z) = -\frac{12}{26\sqrt{1+12z}} = -\frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$
$$h_2'(z) = \frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

Entonces tenemos que:

$$z \in \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \implies f_Z(z) = 2\left(1 - \frac{1-\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}} + 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}} =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{1+12z}}\left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2 \cdot 10}{6\sqrt{1+12z}} = \frac{10}{3\sqrt{1+12z}}$$

$$z \in (0, 2) \implies f_Z(z) = 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

Ejercicio 2.

$$f(x,y) = \frac{2}{(2-x-y)^3} I_E(x,y) \qquad \textit{con } E \textit{ el cuadrilátero de vértices } (0,0),(1,0),(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),(0,1)$$

Y los cambios de variable:

$$\begin{cases} U = \dfrac{X}{2-X-Y} \\ V = \dfrac{Y}{2-X-Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{2-x-y} \\ v(x,y) = \dfrac{y}{2-x-y} \end{cases}$$

Esta transformación es biyectiva.

Como comentario, recordar que los cambios de variable de la forma:

$$u = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \qquad v = \frac{a'x+b'y+c'}{dx+ey+f}$$

Además de ser biyectivos transforman rectas en rectas.

Entonces tenemos que:

$$f_{U,V}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

Vemos en qué se transforman los vértices del cuadrilátero con estas transformaciones:

1. $(0,0) \to (0,0)$
2. $(1,0) \to (1,0)$
3. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \to (1,1)$
4. $(0,1) \to (0,1)$

Calculamos ahora las inversas:

$$u(2-x-y) = x \iff -2u + ux + uy + x = 0 \iff (1+u)x + uy - 2u = 0$$
$$v(2-x-y) = v \iff -2v + vx + vy + y = 0 \iff (1+v)y + ux - 2v = 0$$

Espectacular sistema de ecuaciones lineales del que sacamos que $x = \dfrac{2u}{1+u+v}$ $y = \dfrac{2v}{1+u+v}$

Ahora,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1+u+v) - 2u}{(1+u+v)^2} = \frac{2(1+v)}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2u}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2v}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1+u)}{(1+u+v)^2}$$

El Jacobiano entonces es $\dfrac{4}{(1+u+v)^3}$, *con lo que la función de densidad* $f_{(U,V)}$ *es:*

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2 - \dfrac{2u}{1+u+v}\right)^3} \frac{4}{(1+u+v)^3} = 1 \qquad Si\ (u,v) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = 0\ Si(u,v) \notin (0,1) \times (0,1)$$