

# Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

Paco Mora Caselles

14 de marzo de 2022

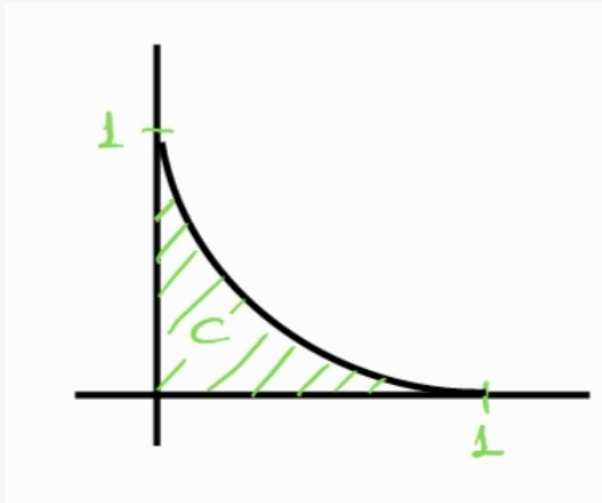
---

# Relación 1

---

**Ejercicio 1.**

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < (1-x)^2\}$$



*Dejamos por ahora  $f$  en función de  $k$ , más tarde calculamos su valor:*

$$f(x, y) = \begin{cases} k & (x, y) \in C \\ 0 & (x, y) \notin C \end{cases}$$

*Para  $x \in (0, 1)$ :*

$$f_1(x) = \int f(x, y) dy = \int_0^{(1-x)^2} k dy = k(1-x)^2$$

*Entonces tenemos:*

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a  $f_2(y)$ , cuando  $y \in (0, 1)$ :

$$f_2(y) = \int f(x, y) dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0, 1) \\ 0 & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Calculamos ahora  $E(X^n(1-X)^m)$  usamos  $f_1(x)$ :

$$\begin{aligned} E(X^n(1-X)^m) &= \int x^n(1-x)^m f_1(x) dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k \int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} dx \\ &= kB(n+1, m+3) = k \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k \frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!} \end{aligned}$$

Los momentos de orden  $n$  respecto del origen, la esperanza y la varianza de  $X$  las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos  $m = 0$  y para la varianza podemos usar que  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \quad E(X) = \frac{1}{4} \quad E(X^2) = \frac{1}{10} \quad \text{Var}(X) = \frac{3}{80}$$

Calculamos  $f_{2|1}(y|x)$ , si  $x \in (0, 1)$ :

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{3}{3(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} & y \in (0, (1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0, (1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora  $f_{2|1}(y|x = 1/2)$ :

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \frac{1}{4}) \\ 0 & y \notin (0, \frac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular  $F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$  nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por  $k$ :



$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3^3}{2^6}$$

Para  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) + 3 \cdot \text{Area } T$ , siendo  $T$  la intersección con  $C$ . Sabemos entonces que:

$$\int_{1/4}^{1/2} (1-x)^2 dx = \int_{1/4}^{1/2} (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{19}{2^6 3}$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = \frac{3^3}{2^6} + 3 \cdot \frac{19}{2^6 3} = \frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de  $Y$  respecto de  $X$ :

$$y - \mu_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \mu_x)$$

$$\mu_y = E(Y) = \int_0^1 y 3(1 - y^{1/2}) dy = 3 \int_0^1 (y - y^{3/2}) = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} 3xy dy dx = 3 \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{(1-x)^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \\ &= B(2, 5) = \frac{3}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{3}{2} \frac{1!4!}{6!} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Recordemos que  $\mu_X = E(X) = \frac{1}{4}$ , entonces:

$$\sigma_{XY} \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2^2 \cdot 5} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{2-3}{2^3 \cdot 5} = -\frac{1}{2^3 \cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que  $\sigma_X = \frac{3}{80}$ ):

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora  $E(Y|X = x) = m_{2|1}(x)$ :

$$E(Y|X = x) = \int y f_{2|1}(y|x) dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

### Ejercicio 2.

$$E(X) = 2, \text{ Var}(X) = 3 \text{ } X \text{ simétrica}$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 \cdot 2 + 3(X-2) \cdot 2^2 + 2^3) =$$

$$= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6\text{Var}(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26$$

### Ejercicio 3.

El número de de posibilidades totales es claramente  $\binom{N}{n}$ , la distribución de probabilidad es entonces:

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos  $n \leq N$ ,  $r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora  $\alpha_{(3)}$ :

$$E(X_1^{(3)}) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2) \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$r_1(r_1-1)(r_1-2) \binom{N_1}{r_1} = r_1(r_1-1)(r_1-2) \frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2) \cdots 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \binom{N_1-3}{r_1-3}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = r_1) &= \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3} \binom{N_2}{r_2} \binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = \\
 N_1(N_1-1)(N_1-2) &\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3} \binom{N_2}{r_2} \binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} = \\
 &= N_1(N_1-1)(N_2-2) \frac{(N-3)^{(n-3)} n!}{(n-3)! N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)} n^{(3)}}{N^{(3)}}
 \end{aligned}$$

#### Ejercicio 4.

##### Aparado a)

Observemos primero que no hay dos pares de la forma  $(a, b)$ ,  $(a, c)$  de forma que ambos tengan probabilidad no nula. Igual forma, no hay pares  $(b, a)$ ,  $(c, a)$  tales que se tomen ambos valores con probabilidad no nula. Por tanto, para ver la distribución marginal de  $X$  podemos omitir los valores que toma  $Y$ :

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$$

De forma análoga para la v.a.  $Y$ :

$$P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3}$$

Las esperanzas entonces de estas vvaas son:

$$E(X) = (0 + 1 + 2) \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$E(Y) = (1 + 2 + 3) \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Hacemos también los cálculos necesarios para hacer la recta de regresión:

$$E(XY) = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = (0 + 1 + 4) \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

La recta de regresión de  $Y$  sobre  $X$  es entonces:

$$y - 2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}(x - 1) \implies y - 2 = x - 1 \implies y = x + 1$$

Calculamos ahora el coeficiente de correlación para poder ver  $\text{Var}(Y - X^*)$ :

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}}} = 1$$

Este valor de  $\rho$  nos indica que  $X$  y  $Y$  son dependientes linealmente. Calculamos ahora  $\text{Var}(Y - X^*)$

$$\text{Var}(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = 0$$

**Aparado b)**

Para calcular las vvaas marginales solo tenemos que sumar los elementos de la misma fila o columna. Por ejemplo:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Obtenemos así:

$$P(X = 0) = \frac{11}{18} \quad P(X = 1) = \frac{5}{18} \quad P(X = 2) = \frac{2}{18}$$

$$P(Y = 0) = \frac{11}{18} \quad P(Y = 1) = \frac{5}{18} \quad P(Y = 2) = \frac{2}{18}$$

También podemos obtener  $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ ,  $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) = \frac{17}{36}$  y  $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{5}{36}$ .

Entonces la recta de regresión de  $X$  sobre  $Y$  es:

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-\frac{5}{36}}{\frac{17}{36}} \left( x - \frac{1}{2} \right)$$

$$y = -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}$$

Como las esperanzas y las varianzas son iguales, obtenemos que el cálculo de la recta de regresión de  $Y$  sobre  $X$  es igual:

$$x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}$$

Calcularemos ahora  $\text{Var}(Y - X^*)$ :

$$\text{Var}(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = \frac{17}{36} \left( 1 - \frac{25/36^2}{17^2/36} \right) = \frac{17}{36} \left( \frac{17^2 - 25}{17^2} \right) = \frac{11}{3 \cdot 17}$$

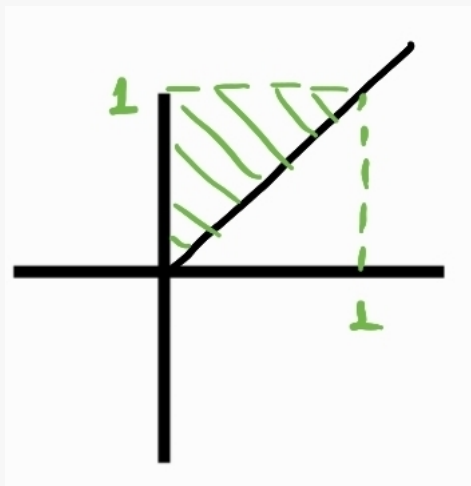
*Para la varianza residual de  $X$  sobre  $Y$ , vemos que es igual porque coinciden sus esperanzas y sus varianzas.*



## Relación 2

**Ejercicio 1.**

Vemos en primer lugar cómo es el recinto del ejercicio:



$$\begin{aligned}\alpha_{n,m} &= E(X^n Y^m) = \int x^n y^m \cdot \frac{1}{y} = \int_0^1 \int_0^y x^n x^{m-1} dx dy = \\ &= \int_0^1 y^{m-1} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^y dy = \frac{1}{n+1} \int_0^1 y^{m-1} y^{n+1} dy = \frac{1}{n+1} \frac{1}{m+n+1}\end{aligned}$$

Con este resultado podemos obtener los valores:

$$E(Y) = \frac{1}{2} \quad E(Y^3) = \frac{1}{3} \quad E(XY) = \frac{1}{6} \quad E(X) = \frac{1}{4}$$

Entonces tenemos que  $\text{Var}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  y  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

Para calcular la recta de regresión obtenemos primero:

$$\beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{1/24}{1/12} = \frac{1}{2}$$

Y la recta de regresión que nos piden queda:

$$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left( y - \frac{1}{2} \right)$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

Calcularemos ahora la curva de regresión de  $X$  sobre  $Y$ :

$$x = m_{1|2}(y) \quad m_{1|2}(y) = E(X|Y = y) = \int x f_{1|2}(x|y) dx$$

Entonces, para los valores de  $y$  para los que  $f_2(y) > 0$  tendremos:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

Calcularemos ahora  $f_2(y)$ :

$$\text{Si } y \in (0, 1): f_2(y) = \int f(x, y) dx = \int_0^y \frac{1}{y} dx = \frac{1}{y} x \Big|_0^y = 1$$

$$f_2(y) = I_{(0,1)}(y)$$

Volvemos ahora al cálculo de  $f_{1|2}(x|y)$ . Dado  $y \in (0, 1)$ :

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1/y}{1} = \frac{1}{y} \quad x \in (0, y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = 0 \quad x \notin (0, y)$$

Podemos calcular ahora  $m_{1|2}(y)$ :

$$E(X|Y = y) = \int_0^y x \frac{1}{y} dx = \frac{1}{y} \frac{x^2}{2} \Big|_0^y = \frac{y}{2}$$

Entonces la curva de regresión es  $x = \frac{y}{2}$ . Notemos que es una recta, en este caso **necesariamente coincidirá con la recta de regresión**. Entonces, si hubiéramos calculado primero la curva de regresión, no tendríamos que calcular la recta porque sabemos que coincidiría.

## Ejercicio 2.

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3) = E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} t_3^{X_3}) = \sum p_{i_1 i_2 i_3} t_1^{i_1} t_2^{i_2} t_3^{i_3}$$

De este último término, en cada sumando,  $p_{i_1 i_2 i_3}$  representa  $P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3)$

Viendo el valor de  $f$ , sabemos que la vva  $(X_1, X_2, X_3)$  toma los valores  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$  con probabilidad de  $\frac{1}{4}$  en cada una de ellas.

Vamos a comprobar si  $X_1, X_2$  son independientes. Para ello, vemos si  $f_{12}(t_1, t_2) = f_1(t_1) \cdot f_2(t_2)$ . Estas funciones no las conocemos, pero como sabemos que  $f$  se puede representar como  $E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} t_3^{X_3})$ , si hacemos  $t_3 = 1$ :

$$f_{12}(t_1, t_2) = E(t_1^{X_1} t_2^{X_2}) = E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} 1^{X_3}) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + 1 + t_1 t_2)$$

De igual forma podemos hacer:

$$f_1(t_1) = E(t_1^{X_1}) = E(t_1^{X_1} 1^{X_2} 1^{X_3}) = \frac{1}{4}(t_1 + 1 + 1 + t_1) = \frac{1 + t_1}{2}$$

$$f_2(t_2) = \frac{1 + t_2}{2}$$

Para comprobar la independencia solo tenemos que ver si  $f_{12} = f_1 f_2$ :

$$f_1 f_2 = \frac{1}{2}(1 + t_1) \cdot \frac{1}{2}(1 + t_2) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + 1 + t_1 t_2) = f_{12}$$

Luego  $X_1, X_2$  son independientes y de forma análoga:  $X_2, X_3$  son independientes y  $X_1, X_3$  son independientes. Es decir, son independientes dos a dos.

Para comprobar que son independientes, tendremos que ver si  $f(t_1, t_2, t_3) = f_1(t_1) \cdot f_2(t_2) \cdot f_3(t_3)$ :

$$\begin{aligned} f_1 f_2 f_3 &= \frac{1}{2^3}(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_3) = \frac{1}{2^3}(1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2)(1 + t_3) = \\ &= \frac{1}{2^3}(1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2 + t_3 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3) \neq f(t_1, t_2, t_3) \end{aligned}$$

Por tanto, las vva no son independientes.

Para calcular el apartado c), haremos las parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 t_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}(1, 1, 1) = E(X_1) = \frac{1}{2}$$

Por la simetría de  $f$ ,  $E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{2}$ . Vamos ahora con las varianzas, que de nuevo bastará con calcular la de  $X_1$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = E(X_1^{(2)}) = E(X_1^2 - X_1) = 0 = E(X_1^2) - E(X_1) \implies E(X_1^2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}(X_2) = \text{Var}(X_3) = \text{Var}(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El cálculo de la covarianza es rápido, como  $X_1, X_2, X_3$  son independientes **por parejas**, tenemos que:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, X_3) = \text{Cov}(X_2, X_3) = 0$$

En el caso general, es decir, si no fueran independientes:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{1}{4} t_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1 \partial t_2}(1, 1) = E(X_1 X_2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

**Anotación importante)**

Es importante notar las diferencias entre  $X + Y + Z$  y  $(X, Y, Z)$ :

Sean  $X_1, X_2, X_3$  independientes con funciones:

$$f_1(t) = \frac{1}{2}(1 + t)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{3}(1 + t + t^2)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}(1 + t)$$

Entonces la vva  $Z = X_1 + X_2 + X_3$  es unidimensional, y además  $f_Z(t) = \frac{1}{2}(1 + t) \frac{1}{3}(1 + t + t^2) \frac{1}{2}(1 + t)$  **con un solo parámetro**.

Si definimos ahora la vva  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , es de tres dimensiones con función generatriz:

$$f_X(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{2}(1 + t_1) \frac{1}{3}(1 + t_2 + t_2^2) \frac{1}{2}(1 + t_3)$$

### Ejercicio 3.

Sabemos que, para  $X, Y, Z$  tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Entonces  $E(X) = E(Y) = E(Z)$  es:

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \int_0^1 x^2 = \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces:

$$E(U) = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Como las variables son independientes:

$$Var(U) = Var(aX) + Var(bY) + Var(cZ) = (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{12}$$

Nos piden también los momentos de orden 3 y 4 respecto de la media. Utilizamos el subapartado de **Momentos de sumas**. Siguiendo un procedimiento como el de este subapartado llegamos a que solo necesitamos expresiones como  $\mu_3(aX) = E\left(aX - \frac{a}{2}\right) = 0$  ya que estas vvaas son simétricas respecto de su media. En definitiva:

$$E((U - E(U))^3) = \mu_3(aX) + \mu_3(bY) + \mu_3(cZ) = a\mu_3(X) + b\mu_3(Y) + c\mu_3(Z) = 0$$

$$\mu_4(U) = \mu_4(aX) + \mu_4(bY) + \mu_4(cZ) + 6(\mu_2(aX)\mu_2(bY) + \mu_2(aX)\mu_2(cZ) + \mu_2(bY)\mu_2(cZ))$$

Vamos a hacer el cálculo para un  $n$  general de:

$$\begin{aligned} \mu_n(X) &= E\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^n\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx = \frac{(x - 1/2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1/2)^{n+1}}{n+1} = \\ &= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}(1 + (-1)^n) \end{aligned}$$

Luego:

$$\mu_4(X) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$\mu_2(X) = \frac{1}{12} \quad (\text{como ya habíamos calculado antes})$$

Volviendo ahora a  $\mu_4(U)$ :

$$\mu_4(U) = (a^4 + b^4 + c^4) \frac{1}{5 \cdot 2^4} + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \frac{1}{3^2 2^4}$$

Calculamos ahora la función generatriz de momentos (recordemos que la función generatriz no está definida porque  $X, Y, Z$  toman valores no enteros). Usaremos la independencia de las vva:

$$E(e^{tU}) = E(e^{atX})E(e^{btY})E(e^{ctZ})$$

Tendremos que calcular la función generatriz de momentos de cada vva (son todas iguales):

$$E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^{tx}}{t} \Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

En el caso de  $aX$  (análogamente para  $bY, cZ$ ):

$$g_{aX}(t) = E(e^{taX}) = \frac{e^{at} - 1}{at}$$

Entonces volviendo a la vva  $U$ :

$$g_U(t) = \frac{e^{at} - 1}{at} \cdot \frac{e^{bt} - 1}{bt} \cdot \frac{e^{ct} - 1}{ct}$$

La función característica de  $U$  será entonces:

$$\varphi_U(t) = \frac{(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{i \cdot a \cdot b \cdot ct^3} = \frac{-i(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{a \cdot b \cdot c \cdot t^3}$$

Nos piden comprobar si es simétrica:

$$\begin{aligned} E(e^{itU}) &= E(e^{it(aX+bY+cZ)}) = E(e^{iatX})E(e^{ibtY})E(e^{ictZ}) = \frac{e^{iat} - 1}{iat} \cdot \frac{e^{ibt} - 1}{ibt} \cdot \frac{e^{ict} - 1}{ict} = \\ &= e^{iat/2} e^{ibt/2} e^{ict/2} 2^3 \end{aligned}$$

#### Ejercicio 4.

Para calcular  $A$ :

$$1 = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{(2r)!} = A \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(2r)!} = A \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = A \frac{1}{2} (e + e^{-1}) \implies A = \frac{2}{e + e^{-1}}$$

$B$  se saca de forma análoga:

$$1 = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{B}{(2r+1)!} = B \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = B \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \implies B = \frac{2}{e - e^{-1}}$$

Calculamos ahora las funciones generatrices:

$$f_X(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{(2r)!} t^{2r} = \frac{2}{e + e^{-1}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{t^{2r}}{(2r)!} = \frac{2}{e + e^{-1}} \cdot (e^t + e^{-t})$$

Igualmente:

$$f_Y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$$

Como  $X, Y$  son independientes:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= f_X(t) \cdot f_Y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e + e^{-1}} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^2 - e^{-2}} = \\ &= \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{k!} \right) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2(2t)^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{1}{e^2 e^{-2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 2^{r+1}}{(2r+1)!} t^{2r+1} \end{aligned}$$

Luego tenemos que, para  $r = 0, 1, 2, \dots$ :

$$P(Z = 2r + 1) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \frac{2 \cdot 2^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

El último apartado lo haremos derivando la expresión sin desarrollar las exponenciales:

$$E(Z) = 2 \frac{e^2 + e^{-2}}{e^2 - e^{-2}}$$

$$E(Z(Z-1)) = f_Z''(1) = 4$$

$$\text{Var}(Z) = 2 \frac{e^4 - 8 - e^{-4}}{(e^2 - e^{-2})^2}$$

### Ejercicio 5.

**Apartado a)**

$$\alpha(t) = \frac{1 + \cos(t) + \cos(2t)}{3}$$

Comprobemos que es función característica. Si conseguimos expresar  $\alpha$  de la forma  $\sum p_n e^{itx_n}$  ( $\sum p_n = 1$ ), tendríamos que  $\alpha$  es función característica de una vva. discreta.

Usaremos que:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \\ \cos(2t) &= \frac{1}{2}(e^{i2t} + e^{-i2t})\end{aligned}$$

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) = \\ &= \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{-it} + \frac{1}{6}e^{2it} + \frac{1}{6}e^{-2it}\end{aligned}$$

Entonces todas las constantes que multiplican a exponenciales son no negativas y suman 1. Entonces  $\alpha$  es la función característica de la vva que toma valores  $\{0, 1, -1, 2, -2\}$  con probabilidades:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \quad P(X = 1) = P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{6}$$

**Apartado b)**

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+t^3}$$

Esta función no está acotada en -1 por lo que no puede ser función característica.

**Apartado c)**

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+t^4}$$

Recordemos la relación entre la existencia de los momentos de orden  $n$  y la existencia de la derivada de orden  $n$  en el origen.

$$\alpha'(t) = -(1+t^4)^{-2}4t^3 \quad \alpha'(0) = 0$$

$$\alpha''(t) = \dots \quad \alpha''(0) = 0$$

Entonces si existe  $X$ ,  $E(X) = 0$ ,  $E(X^2) = i^2\alpha''(0) = 0$ , entonces la varianza sería nula y la función sería constante, pero la función característica de una distribución uniforme no es  $\alpha$ .



# Relación 3

**Ejercicio 1.**

$$f(x, y) = kyI_D \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

*Apartado a)*

Dejamos el cálculo de  $k$  para luego. Vamos con  $f_2$ :

$$f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \int_y^1 ky dx = ky(1 - y) \quad y \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} E(Y^n(1 - y)^m) &= \int_0^1 ky^m(1 - y)^n y(1 - y) dy = kB(m + 2, n + 2) = k \frac{\Gamma(m + 2)\Gamma(n + 2)}{\Gamma(m + n + 4)} = \\ &= k \frac{(m + 1)!(n + 1!)}{(m + n + 3)!} \end{aligned}$$

Haciendo  $n = 0$  obtenemos  $\alpha_r = E(Y^r)$

$$\alpha_r = k \frac{(r + 1)!}{(r + 3)!} = \frac{k}{(r + 3)(r + 2)}$$

Para obtener el valor de  $k$  podemos haciendo  $m = n = 0$ :

$$m = n = 0 \implies \int_0^1 k f_2(y) dy = k \frac{1}{3!} = \frac{k}{6} = 1 \implies k = 6$$

Como  $Y$  es acotada entre 0 y 1,  $E(e^{aY}) = E(e^{-aY})$  son finitos, con lo que podemos expresar  $g(t)$  como la siguiente serie que será convergente:

$$g(t) = 6 \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+3)(r+2)r!} t^r$$

**Apartado b)**

$$x = m_{1|2}(y) = E(X|Y = y) = \int x f_{1|2}(x|y) dx$$

Dado  $y \in (0, 1)$

$$f_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \frac{6y}{6y(1-y)} = \frac{1}{1-y} & x \in (y, 1) \\ 0 & x \notin (y, 1) \end{cases}$$

$$\int x f_{1|2}(x|y) dx = \int_y^1 \frac{x}{1-y} dx = \frac{1}{2} \frac{1-y^2}{1+y} = \frac{1}{2} (1+y)$$

**Apartado c)**

Ambas rectas se cortan en el punto  $(E(X), E(Y))$ , calculando la intersección obtenemos que las rectas se cortan en el punto  $(E(X), E(Y)) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ . Otra forma de calcularlo sería utilizar que ya sabemos  $E(Y)$  entonces podemos ver qué valor toma la recta  $x = \frac{1}{2}(1+y)$  para calcular  $E(X)$ .

Utilizando las dos anteriores rectas tenemos las pendientes  $\beta_{X/Y}$ ,  $\beta_{Y/X}$ , con esto podemos calcular  $\rho$  despejando.

$$\beta_{Y/X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \quad \beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}$$

Entonces, como  $\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ , tenemos que  $\rho^2 = \beta_{Y/X} \beta_{X/Y}$ :

$$\rho^2 = \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \implies \rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**Ejercicio 2. Apartado a)**

$$X = (X_1, X_2, X_3) \quad f(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3} (t_1^2 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_2 t_3)$$

Para calcular la función generatriz de  $X_{13} = (X_1, X_3)$ , que es  $E(t_1^{X_1} t_3^{X_3})$  usamos  $f(t_1, 1, t_3)$ :

$$f_{13}(t_1, t_3) = \frac{1}{3} (t_1^2 + 2t_1 t_3)$$

La distribución de  $X$  y la de  $X_{13}$  es fácil de expresar teniendo la función generatriz de probabilidad:

$$p(2, 1, 0) = p(1, 0, 1) = p(1, 1, 1) = \frac{1}{3} \quad p(i, j, k) = 0 \text{ resto}$$

$$p_{13}(2, 0) = \frac{1}{3} \quad p_{13}(1, 1) = \frac{2}{3}$$

Para estudiar la independencia entre  $X_1$  y  $X_3$  tendremos que calcular las funciones generatrices de probabilidad de esas vvaas:

$$f_1(t_1) = f_{13}(t_1, 1) = \frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1)$$

$$f_3(t_3) = f_{13}(1, t_3) = \frac{1}{3}(1 + 2t_3)$$

Para demostrar la dependencia vemos que  $f_1 f_3 \neq f_{13}$

**Apartado b)**

Por la independencia de los  $Z_i$  tenemos que la función generatriz de probabilidad de  $Z$  es:

$$g(t_1, t_3) = \left(\frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1 t_3)\right)^n = \frac{1}{3^n}(t_1^2 + 2t_1 t_3)^n$$

Tratamos de expresar esto como una serie o una suma finita para ver cómo es la distribución de  $Z$ . Para ello, utilizaremos el Binomio de Newton.

$$\begin{aligned} g(t_1, t_3) &= \frac{1}{3^n} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t_1^{2r} (2t_1 t_3)^{n-r} = \sum_{r=0}^n \frac{1}{3^n} \binom{n}{r} t_1^{2r} 2^{n-r} t_1^{n-r} t_3^{n-r} = \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{2^{n-r}}{3^n} \binom{n}{r} t_1^{n+r} t_3^{n-r} \end{aligned}$$

Por tanto tenemos la distribución de  $Z$ :

$$P(X_1 = n + r, X_3 = n - r) = \frac{2^{n-r}}{3^n} \binom{n}{r} \text{ con } r = 0, 1, 2, \dots, n$$

**Ejercicio 3. Apartado a)**

Lo haces tú en tu casita crack.

**Apartado b)**

Calcularemos los  $P(Z = r)$ , primero tomemos  $r \geq 0$ :

$$P(Z = r) = P(X - Y = r) = \sum_{s=r}^{+\infty} P(X = s, Y = s + r) = \sum_{s=r}^{+\infty} P(X = s)P(Y = sr) =$$

$$= pq^s pq^{s-r} = \sum_{s=0}^{+\infty} p^2 q^{2s-r} = p^2 \sum_{s=r}^{+\infty} q^{2s-r}$$

Esto es una geométrica de razón  $q^2$ :

$$P(Z = r) = \frac{p^2 q^r}{1 - q^2} = \frac{p^2 q^r}{\underbrace{(1 - q)(1 + q)}_{=p}} = \frac{pq^r}{1 + q}$$

Para calcular el caso  $r < 0$  y como  $X$  e  $Y$  tienen la misma distribución:

$$P(Z = r) = P(X - Y = r) = P(Y - X = -r) = \frac{p^{q^{-r}}}{1 + q}$$

$Y$  en general:

$$P(Z = r) = \frac{pq^{|r|}}{1 + q}$$

#### Ejercicio 4. Este ejercicio está incompleto

Veamos la distribución que corresponde a  $\psi_n(t)$ . Después, intentaremos expresar  $\phi_n$  en función de  $\psi_n$

Nos fijamos primero en que la parte  $\frac{1 - e^{2it}}{1 - e^{2it/n}}$  se puede ver como la suma de una progresión geométrica en la que el primer término es 1 y de razón  $e^{2it/n}$ :

$$\psi_n(t) = \frac{1 - e^{2it}}{n(1 - e^{2it/n})} \frac{1}{n} (1 + e^{2it/n} + e^{2 \cdot 2it/n} + \dots + e^{(n-1)2it/n}) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{it \frac{2r}{n}} = E(e^{itT_n})$$

Por tanto, la distribución de  $T_n$  es de la forma:

$$P(T_n = \frac{2r}{n}) = \frac{1}{n}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

Para  $\phi_n$  hacemos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \frac{\sin(t)}{n \sin(\frac{t}{n})} = \frac{1}{n} \frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it/n} - e^{-it/n}} = \frac{1}{n} \frac{e^{-it} - e^{it}}{e^{-it/n} - e^{it/n}} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{e^{-it}}{e^{-it/n}} \cdot \frac{1 - e^{2it}}{1 - e^{2it/n}} = e^{it(1/n-1)} \frac{1}{n} \frac{1 - e^{2it}}{1 - e^{2it/n}} = e^{it(\frac{1-n}{n})} \psi_n(t) \end{aligned}$$

Como sabemos que dada una vva  $X$  y otra vva  $Y$  tal que  $Y = aX + b$ , se cumple que:

$$\phi_Y(t) = e^{ibt} \phi_X(at)$$

En nuestro caso podemos llegar a que  $S_n = T_n + \frac{1-n}{n}$ , por tanto, llegamos a la siguiente distribución para  $S_n$ :

$$\begin{aligned} P(S_n = \frac{2r+1-n}{n}) &= P(T_n = \frac{2r}{n}) = \frac{1}{n} & r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ P(S_n = \frac{k}{n}) &= \frac{1}{n} & k = 1-n, 3-n, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Donde cada  $k$  es de la forma  $2 \cdot r + 1 - n$  con  $r = 0, 1, \dots, n-1$

Si  $n$  es impar, la vva  $S_n$  toma el valor 0, y los valores de  $k$  son de la forma  $0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm n-1$

Si  $n$  es par,  $k$  toma los valores  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm n-1$

### Ejercicio 5.

Nos fijamos primero en que  $\phi$  debe de ser continua para  $t \in \mathbb{R}$ , incluido en los puntos en los que se anule el denominador (en estos puntos, definiremos  $\phi$  por continuidad). Por tanto, cuando el denominador se anula, el numerador se ha de anular también para que exista el límite y sea finito.

Los puntos en los que se anula el denominador son:

$$\sin\left(\frac{t}{a}\right) = 0 \iff \frac{t}{a} = k\pi \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En estos puntos se tiene que cumplir también que:

$$\sin(t) = \sin(ka\pi) = 0 \iff k \cdot a \in \mathbb{Z} \text{ (para cualquier } a) \iff a \in \mathbb{Z}$$

### Ejercicio 6.

Utilizaremos que  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ . Entonces podemos escribir:

$$\sin\left(\frac{2^n t}{2^n}\right) = \sin\left(2 \frac{2^{n-1} t}{2^n}\right) = 2 \sin\left(\frac{2^{n-1} t}{2^n}\right) \cos\left(\frac{2^{n-1} t}{2^n}\right) = 2^2 \sin\left(\frac{2^{n-2} t}{2^n}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2^2}\right)$$

Iterando llegamos a:

$$\sin(t) = 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^j}\right)$$

$$\text{Por tanto, } \phi_n(t) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

Para saber la distribución de la vva seguimos un procedimiento como en el ejercicio 4:

$$P\left(X_n = \frac{k}{n'}\right) = \frac{1}{n'}$$

Donde  $n' = 2^n$  es par, con lo que  $k$  toma los valores  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm n - 1$ :

$$P\left(Z_n = \frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm 2^n - 1$$

#### Otra forma de aproximarnos al problema

Sabemos que para una función característica  $\phi$ , si existe  $t_0 \neq 0$  tal que  $\phi(t_0) = e^{i\alpha}$  ( $\iff |\phi(t_0)| = 1$ ), la va asociada a esa función característica,  $X$ , será discreta y tomará valores dentro del conjunto:

$$\left\{ \frac{\alpha + 2k\pi}{t_0} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

En nuestro caso, tomando  $t_0 = 2^n \pi$  tenemos que :

$$\phi_n(2^n \pi) = \cos(2^{n-1} \pi) \cdots \cos(\pi) = -1 = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

Por tanto, tenemos que la va  $X$  valores en el conjunto

$$\left\{ \frac{\pi + 2k\pi}{2^n \pi} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} = \left\{ \frac{1 + 2k}{2^n} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} = \left\{ \pm \frac{1}{2^n}, \pm \frac{3}{2^n}, \pm \frac{5}{2^n}, \dots \right\}$$

Que no es tan restrictivo como al conjunto en el que llegamos de la otra manera, pero es una manera interesante de abordar el problema.

#### Ejercicio 7.

Intentaremos ver si la va buscada es suma de vvaas independientes. Buscaremos que cada elemento del producto sea función característica:

$$\prod_{r=1}^n \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{t}{3^r} \right) \right) = \prod_{r=1}^n \frac{1}{3} \left( 1 + e^{i \frac{t}{3^r}} + e^{-i \frac{t}{3^r}} \right)$$

Luego  $g_r(t)$  es la f. característica de una v.a.  $Z_r$  que toma los valores  $0, \frac{1}{3^r}, -\frac{1}{3^r}$  con probabilidad  $\frac{1}{3}$  en cada una de ellas.

Sabemos además que la función  $\psi_n$ :

$$\psi_n(t) = \frac{\sin(t)}{n \sin \left( \frac{t}{n} \right)}$$

es función característica de una v.a. que toma los valores ( $n$  impar)

$$0, \pm \frac{2}{n}, \pm \frac{4}{n}, \dots, \pm \frac{n-1}{n}$$

Cada uno con probabilidad  $\frac{1}{n}$ .

Esta v.a. no nos coincide mucho con las  $g_r$  que tenemos. Sin embargo, si tomamos  $n = 3$  tenemos la v.a.  $X_3$  que toma los valores  $\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ . Ahora, tomamos la v.a.  $Z_1 = \frac{X_3}{3}$ . Esta v.a. toma los valores  $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$  con probabilidad  $\frac{1}{3}$  en cada una de ellos. Entonces la f. característica de  $Z_1$  es  $g_1$  y:

$$g_1(t) = \phi_{Z_1}(t) = E(e^{itZ_1}) = E(e^{itX_3/3}) = E(e^{it/3X_3}) = \psi_3\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{3}\right)}{3 \sin\left(\frac{t}{9}\right)}$$

Análogamente llegamos a que:

$$g_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2 \cdot 3^{r-1}}\right)}{3^r \sin\left(\frac{t}{2 \cdot 3^r}\right)}$$

Entonces,  $\phi_n(t)$  queda:

$$\phi_n(t) = \prod_{r=1}^n g_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{3 \sin\left(\frac{t}{6}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{t}{6}\right)}{3 \sin\left(\frac{t}{18}\right)} \cdots \frac{\sin\left(\frac{t}{2 \cdot 3^{n-1}}\right)}{3 \sin\left(\frac{t}{2 \cdot 3^n}\right)} = \frac{1}{3^n} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2 \cdot 3^n}\right)}$$

Sea  $Y$  la v.a. con f. característica  $\psi_{3^n}$  que toma los valores  $\{0, \pm \frac{2}{3^n}, \pm \frac{2 \cdot 2}{3^n}, \pm \frac{2 \cdot 3}{3^n}, \dots, \pm \frac{3^n - 1}{3^n}\}$  con probabilidad  $\frac{1}{3^n}$ .

Entonces  $\psi_n$  es la f. característica de  $Y/2$ . Por tanto, corresponde a una v.a. que toma los valores  $\{0, \pm \frac{1}{3^n}, \pm \frac{2}{3^n}, \pm \frac{3}{3^n}, \dots, \pm \frac{(3^n - 1)}{3^n}\}$ .

## Relación 4

### Ejercicio 4.

Calculamos en primer lugar  $f_1(x)$  para  $x > 0$ :

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$$

Hacemos el cambio  $\frac{y^2}{2} = t$ , con lo que tenemos  $y^2 = 2t$ , y  $dy = dt$ :

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-x^2/2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\pi} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

En el caso de  $x < 0$ :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2} (-du) = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Luego en ambos casos:  $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \implies X \sim \mathcal{N}(0,1)$ . Análogamente:  $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ .

Podríamos pensar en poner  $(X, Y)$  como una normal de algún tipo. Pero esto nos resultará imposible pues las funciones de densidad de las vvaas normales no se anulan en ningún punto y  $(X, Y)$  se anula en  $A^c$



**Ejercicio 5.** Notamos primero que:

$$P(X = 1) = 0$$

$$P(X = 2) = P(AA \text{ o } BB) = P(AA) + P(BB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad P(X > 2) = \frac{1}{2}$$

Para  $X = 3$  partimos de la situación  $AB$  o la  $BA$ . Independientemente de la situación inicial y de quien gane el partido, la competición no habrá terminado,  $P(X = 3) = 0$ . Para  $X = 4$ :

$$AB \left\{ \begin{array}{l} ABA \left\{ \begin{array}{l} ABAA \rightarrow \text{termina} \\ ABAB \rightarrow \text{sigue} \end{array} \right. \\ ABB \left\{ \begin{array}{l} ABBA \rightarrow \text{sigue} \\ ABBA \rightarrow \text{sigue} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$BA \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Con lo que tenemos:

$$P(X = 2 \cdot 2) = P(\text{empate de las 2 primeras})P(AA \text{ o } BB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$Y$  en general:

$$P(X = 2 \cdot n) = P(\text{empate en los } 2 \cdot (n-1) \text{ primeros partidos})P(AA \text{ o } BB) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Como la competición termina cuando haya una diferencia de dos puntos, los valores que toma  $(Y_1, Y_2)$  son de la forma  $(n, n+2)$  y  $(n+2, n)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Vemos además que:

$$P(Y_1 = n, Y_2 = n+2) = P(\text{empate en los } 2n \text{ primeros partidos})P(BB) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$P(Y_1 = n, Y_2 = n+2) = P(\text{empate en los } 2n \text{ primeros partidos})P(AA) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$P(Y_1 = i, Y_2 = j) = 0 \quad \text{en el resto de casos}$$

Para calcular la marginal de  $Y_1$ , vamos a orientarnos un poco viendo los valores más bajos para luego pasar al caso general:

$$P(Y_1 = 0) = P(BB) = \frac{1}{2^2}$$

$$P(Y_1 = 1) = P(ABBB) + P(BABB) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3}$$

$$P(Y_1 = n) = P(Y_1 = n, Y_2 = n+2) + P(Y_1 = n, Y_2 = n-2) = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^n} = \frac{5}{2^{n-2}} \quad (n \geq 2)$$

En el cálculo de la distribución de  $Z$  podemos usar la de  $X$ :

$$P(Z = n) = P(X = 2n - 2) = P(X = 2(n-1)) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Calculamos ahora la función generatriz de probabilidad de  $X$ :

$$g_x(t) = E(t^X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right)^n = \frac{\frac{t^2}{2}}{1 - \frac{t^2}{2}} = \frac{t^2}{2 - t^2}$$

Pero esto solo ocurre cuando converja la serie, es decir cuando  $|\frac{t^2}{2}| < 1 \iff |t| < \sqrt{2}$