Demostración. Veamos la primera parte. Dado $p \in V$, sabemos que, si $t \in [0,1]$, $\gamma_p(t) = \gamma_v(t) = \exp_{p_0}(t\mathbf{v})$ es la geodésica maximal para el (único) vector $\mathbf{v}$ tal que $\exp_{p_0}(\mathbf{v}) = p$. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow V$ con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$ otra curva cualquiera.

$$L_0^1(\gamma_p) = \int_0^1 \left|\gamma_p'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(0)\right| dt = |\mathbf{v}|.$$

Vamos a demostrar que $L_a^b(\alpha) \geq |\mathbf{v}|$. Para ello, distinguimos dos casos.

i) Supongamos en primer lugar que $p = p_0$. En tal caso, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo que, trivialmente, $L_a^b(\alpha) \geq 0 = |\mathbf{v}|$. Además, si $L_a^b(\alpha) = 0$, entonces α es constante; y como $\alpha(a) = p_0$, podemos concluir que $\alpha \equiv p_0 \equiv \gamma_p$.

ii) Supongamos por tanto que $p \neq p_0$. Por comodidad, reparametrizamos α de manera que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Como $\alpha(0) = p_0 \neq p = \alpha(1)$, existirá un $t_0 \geq 0$ tal que $\alpha(t_0) = p_0$ y $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > t_0$. Tomamos entonces $\alpha|_{[t_0,1]}$. Claramente, $L_0^1(\alpha) \geq L_{t_0}^1\big(\alpha|_{[t_0,1]}\big)$, por lo que es suficiente trabajar con el trozo de curva $\alpha|_{[t_0,1]}$ y ver que $L_{t_0}^1\big(\alpha|_{[t_0,1]}\big) \geq |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p)$. Hemos «suprimido» así un posible intervalo en el que, o bien α es constantemente igual a p_0, o bien α es un lazo, esto es, sale de p_0 y vuelve a pasar por dicho punto más adelante. Volvemos entonces a reparametrizar $\alpha|_{[t_0,1]}$ para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Ahora se verifica además la condición adicional de que $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > 0$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"'] & V \subset S \arrow[d, shift left, "(\exp_{p_0}|_U)^{-1}"] \\
& U \subset D_{p_0} \arrow[u, shift left, "\exp_{p_0}|_U"]
\end{tikzcd}$$

Como V es entorno normal de p_0, sabemos que $V = \exp_{p_0}(U)$, siendo $U \subset D_{p_0}$ el entorno estrellado del origen $\mathbf{0}$ de $T_{p_0}S$ para el cual $\exp_{p_0}|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Tomamos entonces la curva en el tangente

$$\widetilde{\alpha}(t) = \big(\exp_{p_0}|_U\big)^{-1}\big(\alpha(t)\big) \in U \subset D_{p_0}.$$

Obsérvese en primer lugar que $\widetilde{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$ si $t > 0$; en efecto, si $\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{0}$ para algún $t > 0$, se tendría que $\alpha(t) = \exp_{p_0}(\mathbf{0}) = p_0$, una contradicción. Definimos entonces las funciones

$$\begin{cases} r(t) := \left|\widetilde{\alpha}(t)\right| > 0 & \text{si } t > 0, \\ r(0) := 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad V(t) = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{\left|\widetilde{\alpha}(t)\right|} = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{r(t)} \quad \text{si } t > 0.$$

Claramente, $\left|V(t)\right| = 1$, por lo que $\big\langle V'(t), V(t)\big\rangle = 0$; esto es, $V(t)$ y $V'(t)$ son ortogonales. Además, $\alpha(t) = \exp_{p_0}\big|_U\big(\widetilde{\alpha}(t)\big) = \exp_{p_0}\big(r(t)V(t)\big)$. Derivando esta expresión se tiene

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(r'(t)V(t) + r(t)V'(t)\big) \\ &= r'(t)d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big) + r(t)d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big), \end{aligned}$$

y finalmente, tomando módulos y aplicando el lema de Gauss 5.3.6, obtenemos

$$\begin{aligned} \left|\alpha'(t)\right|^2 &= r'(t)^2\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big)\right|^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 \\ &\quad + 2r(t)r'(t)\big\langle d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big), d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\big\rangle \\ &= r'(t)^2\left|V(t)\right|^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 + 0 \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 \geq r'(t)^2, \ \text{para todo } t \in (0,1]. \end{aligned}$$

Por tanto, $\left|\alpha'(t)\right| \geq \left|r'(t)\right| \geq r'(t)$ para todo $t \in (0,1]$. Si ahora calculamos la longitud de α, usando la desigualdad anterior se obtiene el resultado buscado:

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 \left|\alpha'(t)\right| dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left|\alpha'(t)\right| dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 r'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(r(1)-r(\varepsilon)\big)$$

$$= r(1)-r(0) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}\big(\alpha(1)\big)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p)\right| = |\mathbf{v}|.$$

Para concluir la demostración de la primera parte del teorema falta caracterizar la igualdad. Si $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p) = |\mathbf{v}|$, debe darse la igualdad en todas las desigualdades anteriores. Así, $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p)$ si, y sólo si, $\left|r'(t)\right| = r'(t)$ y $\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right| = 0$, lo cual es equivalente a su vez a que $r'(t) > 0$ y $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$. Como $\exp_{p_0}|_U$ es un difeomorfismo en U y $r(t)V(t) \in U$, entonces $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}$ es un isomorfismo lineal. Luego $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $V'(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$, es decir, si $V(t)$ es constante, siendo $V(t) = V(1) = \widetilde{\alpha}(1)/\left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Así,

$$\alpha(t) = \exp_{p_0}\big(r(t)V(t)\big) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_v\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right),$$

donde, recordemos, $r(0) = 0$ y $r(1) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = |\mathbf{v}|$. Por tanto, $\alpha(t)$ es una reparametrización monótona (pues $r'(t) \geq 0$) del segmento de geodésica γ_p.

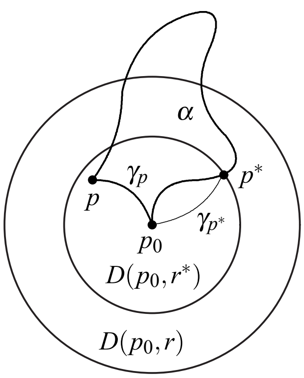

Figura 5.8: γ_p minimiza la longitud en los discos geodésicos.

Probamos ahora la segunda parte del teorema. Sea $r > 0$ de forma que el disco $D(p_0,r) \subset V(p_0)$, y sea $p \in D(p_0,r)$. Tenemos que demostrar que $L_0^1(\gamma_p) \leq L_a^b(\alpha)$, para $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ uniendo p_0 y p. Reparametrizamos de nuevo la curva α para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Si $\alpha\big([0,1]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, entonces la primera parte del teorema nos asegura que $L_0^1(\alpha) \geq L_0^1(\gamma_p)$. Vamos a suponer, por tanto, que la imagen de la curva α se sale del disco $D(p_0,r)$. Sea de nuevo $\mathbf{v} \in U$ el (único) vector verificando que $p = \exp_{p_0}(\mathbf{v})$.

Como el punto $p \in D(p_0,r) = \exp_{p_0}\big(D(\mathbf{0},r)\big)$, se tiene que $\mathbf{v} \in D(\mathbf{0},r)$, es decir, $|\mathbf{v}| < r$. Sea entonces $r^* > 0$ tal que $|\mathbf{v}| < r^* < r$, lo que nos asegura que $p \in D(p_0,r^*)$. Representamos por t_0 el primer valor del parámetro en el que la curva α se sale del disco $D(p_0,r^*)$, esto es,

$$t_0 = \inf\big\{t \in [0,1] : \alpha(t) \notin D(p_0,r^*)\big\}.$$

Entonces, $\alpha\big([0,t_0]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, y además, en los extremos α verifica $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(t_0) =: p^* \in S(p_0,r^*) \subset D(p_0,r)$ (véase la figura 5.8). Bajo tales condiciones, la primera parte del teorema asegura que $L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*})$, donde, como ya es habitual, γ_{p^*} representa el segmento de geodésica radial que une $p_0 = \gamma_{p^*}(0)$ con $p^* = \gamma_{p^*}(1)$, (véase la figura 5.8). Denotemos por $\mathbf{v}^* = \gamma'_{p^*}(0)$. Entonces,

$$L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*}) = \int_0^1 \left|\gamma'_{p^*}(t)\right| dt = \int_0^1 |\mathbf{v}^*|\,dt = |\mathbf{v}^*| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p^*)\right| = r^*;$$

por lo tanto,

$$L_0^1(\alpha) \geq L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq r^* > |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p),$$

como se quería demostrar. □