Demostraciones de Geometría Global de Superficies

Paco Mora y Chito Belmonte
Apuntes PaChito™

4 de mayo de 2022

Pequeño inciso: Estos apuntes apoyan algunas de sus demostraciones en el libro *Un curso de Geometría Diferencial*, con lo cual puede que algunas demostraciones no coincidan con lo visto en clase.

Índice general

ASIGNATURA

Parte 1

Capítulo 1

Proposición 1.4, la derivada covariante es intrínseca.

Demostración

Desde luego, $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α, la derivada covariante puede verse como un operador, D/dt, de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{D}{dt}: & \mathfrak{X} & \rightarrow & \mathfrak{X} & & & \\ & V & \sim & \dfrac{DV}{dt}: & I & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & & & t & \sim & V'(t) - < V'(t), N(t) > N(t) \end{array}$$

Este operador es independiente de la orientación elegida para la superficie, pues estamos tomando sólo la parte tangente de V' (obsérvese que si cambiamos N por $-N$ en la fórmula, el resultado es el mismo).

Por otro lado, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental, afirmación que vamos a probar a continuación.

Para ello, sea (U, X) una parametrización de la superficie S y, como viene siendo habitual, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Si $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, por lo que puede expresarse de la forma

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Ahora, calculamos $V'(t)$, utilizando las fórmulas de Gauss para expresar X_{uu}, X_{uv} y X_{vv} en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$:

$$\begin{aligned} V' =& a'X_u + a\left(X_{uu}u' + X_{uv}v'\right) + b'X_v + b\left(X_{vu}u' + X_{vv}v'\right) \\ =& a'X_u + a\left[\left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN\right)u' + \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)v'\right] \\ & + b'X_v + b\left[\left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)u' + \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN\right)v'\right] \\ =& \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right)X_u \\ & + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)X_v + \left(aeu' + afv' + bfu' + bgv'\right)N. \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada covariante $DV/dt = (V')^{\top}$ se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \left(a' + au'\Gamma_{11}^{1} + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^{1} + bv'\Gamma_{22}^{1}\right) X_u \\ &+ \left(b' + au'\Gamma_{11}^{2} + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^{2} + bv'\Gamma_{22}^{2}\right) X_v\end{aligned}$$

Obsérvese que DV/dt depende sólo de los símbolos de Christoffel y, por tanto, de la primera forma fundamental exclusivamente. En otras palabras, la derivada covariante es algo intrínseco; sus propiedades permanecen invariantes por isometrías.

$\square$

Proposición 1.5, linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante.

Demostración

Las tres propiedades se demuestran trivialmente [1] :

I

$\frac{D}{dt}(V+W) = [(V+W)']^{\top} = (V'+W')^{\top} = (V')^{\top} + (W')^{\top} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$

II

$\frac{D}{dt}(fV) = [(fV)']^{\top} = (f'V + fV')^{\top} = (f'V)^{\top} + (fV')^{\top} = f'V + f\frac{DV}{dt}$, pues $V^{\top} = V$, ya que $V \in \mathcal{X}(\alpha)$.

III

La propiedad se prueba de forma similar: como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $\left\langle (V')^{\perp}, W \right\rangle = \left\langle V, (W')^{\perp} \right\rangle = 0$, de donde

$$\begin{aligned}\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle &= \left\langle (V')^{\top} + (V')^{\perp}, W \right\rangle + \left\langle V, (W')^{\top} + (W')^{\perp} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.7

Demostración

La parte I es trivial [2]

II

Al ser $DV/dt = \mathbf{0}$, sabemos que $V'(t)$ está en la dirección del normal a la superficie, y análogamente $W'(t)$. En consecuencia, como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene que $\langle V, W'\rangle = \langle V', W\rangle = 0$ y, por tanto, $\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0$.

Esto demuestra que $\langle V, W\rangle$ es constante.

$\square$

[1] Tu puta madre por si acaso.
[2] Cada vez que lea 'es trivial' voy a meter un 'tu puta madre por si acaso'.

Proposición 1.8, la ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos

Demostración

Como $\dfrac{DV}{dt}(t) = V'(t) - < V'(t), N(t) > N(t)$, se tiene:

$$\frac{DV}{dt}(t) = 0 \iff V'(t) =< V'(t), N(t) > N(t)$$

Por otro lado, como V y N son ortogonales, $< V(t), N(t) >= 0$ y derivando esta expresión obtenemos

RESULTADO IMPORTANTE

$$< V'(t), N(t) >= - < V(t), N'(t) >$$

Por lo tanto,

$$\frac{DV}{dt}(t) = 0 \iff V'(t) + < V(t), N'(t) > N(t) = 0$$

□

Proposición 1.9, la ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos

Demostración

Utilizando la fórmula que vimos en la primera proposición del tema,

$$V' = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v$$

Para la derivada covariante de un campo $V \in \mathfrak{X}$, los coeficientes de los vectores X_u y X_v tienen que anularse si queremos que sea paralelo; luego si representamos V como $V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, se verificará que

$$\begin{cases} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

□

Teorema 1.10, existencia y unicidad de campos paralelos[3]

Demostración

Escribiendo $V=(V_1,V_2,V_3)$ y $N=(N_1,N_2,N_3)$, la ecuación

$$V'(t)+<V(t),N'(t)>N(t)=0$$

se traduce en

$$0=V_i'(t)+\left(\sum_{j=1}^{3}V_j(t)N_j'(t)\right)N_i(t)=V_i'(t)+\sum_{j=1}^{3}N_j'(t)N_i(t)V_j(t),\quad i=1,2,3.$$

Si representamos por $M(t)$ la matriz $M(t)=\left(N_j'(t)N_i(t)\right)_{i,j=1}^{3}$, la expresión anterior se reescribe $V'+MV=0$. Entonces, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden garantiza la existencia de un único campo de vectores diferenciable V, solución de dicha ecuación (y por tanto de nuestra ecuación oroginal) con condición inicial $V(t_0)=V_0$.

Desde luego, V es un campo paralelo ya que satisface $V'(t)+<V(t),N'(t)>N(t)=0$. Para concluir la demostración tenemos que probar que V es tangente a S a lo largo de α; es decir, hay que ver que $\langle V(t),N(t)\rangle=0$ para todo $t\in I$.

Como $V_0\in T_{\alpha(t_0)}S$, claramente $\langle V_0,N(t_0)\rangle=0$. Por otro lado, dado que V verifica la ecuación original, se tiene que $\langle V'(t),N(t)\rangle+\langle V(t),N'(t)\rangle=0$. Derivando entonces $\langle V(t),N(t)\rangle$ y utilizando dicha expresión obtenemos

$$\langle V(t),N(t)\rangle'=\langle V'(t),N(t)\rangle+\langle V(t),N'(t)\rangle=0.$$

En consecuencia, $\langle V(t),N(t)\rangle$ es constante y se anula en t_0, lo que demuestra que, en efecto, $\langle V(t),N(t)\rangle=0$.

□

Teorema 1.12[4]

Demostración. Veamos en primer lugar que es una aplicación lineal. Para ello, sean $V_0,W_0\in T_pS$, y sean $V,W\in\mathfrak{X}(\alpha)$ los únicos campos paralelos tales que $V(t_0)=V_0$ y $W(t_0)=W_0$. Entonces $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0)=V(t_1)$ y $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0)=W(t_1)$. Queremos calcular $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0+W_0)$. Consideremos el campo $V+W\in\mathfrak{X}(\alpha)$, que también es paralelo. Además $(V+W)(t_0)=V_0+W_0$. Entonces, por el teorema 5.1.6 sabemos que $V+W$ es el único campo paralelo que en t_0 vale V_0+W_0. Por tanto,

$$P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0+W_0)=(V+W)(t_1)=V(t_1)+W(t_1)=P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0)+P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0).$$

Finalmente, demostrar que $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)$ es una isometría es sencillo:

$$\left\langle P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0),P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0)\right\rangle=\left\langle V(t_1),W(t_1)\right\rangle=\left\langle V(t_0),W(t_0)\right\rangle=\langle V_0,W_0\rangle,$$

ya que, por ser V y W paralelos, su producto escalar es constante. □

[3]Hay una demostración extrínseca y otra intrínseca en el libro. He decidido copiar la extrínseca porque es la que hizo en clase, si queréis buscar la otra (fruto de vuestra curiosidad o esquizofrenia paranoide), está en el libro.

[4]El teorema 5.1.6 al que se refiere es el de existencia y unicidad de campos paralelos.

Capítulo 2

Proposición 2.2, la ecuación diferencial extrínseca de las geodésicas

Demostración

Tenemos la descomposición, por la fórmula extrínseca del campo paralelo,

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) + < \alpha''(t), N(t) > N(t)^1$$

Además, como $\langle \alpha'(t), N(t) \rangle = 0$, se tiene $\langle \alpha''(t), N(t) \rangle = -\langle \alpha'(t), N'(t) \rangle$. Luego

$$\frac{D\alpha}{dt}(t) = \alpha''(t) + \langle \alpha'(t), N'(t) \rangle N(t).$$

Por lo tanto,

$$\alpha \text{ geodésica} \iff \alpha''(t) + < \alpha'(t), N'(t) > N(t) = \mathbf{0}$$

$\square$

Proposición 2.6, ecuación diferencial intrínseca de las geodésicas

Demostración

Utilizando la fórmula que vimos en la primera proposición del tema,

$$V' = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right) X_u + \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right) X_v$$

Ahora, si en lugar de utilizar V' utilizamos α', se tiene $a = u'$ y $b = v'$, y por lo tanto

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

$\square$

Teorema 2.7, existencia y unicidad de geodésicas

En palabras del sensei Alías, 'Hay mejores cosas que preguntar en un examen a parte de este resultado'. Igualmente, os dejo su demostración:

[1] La manera de obtener esto es considerar α' en lugar de V.

Así pues, la resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales conduce a la determinación de todas las geodésicas de una superficie regular S.

Teorema 5.2.2 (de existencia y unicidad de geodésicas maximales). *Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$. Entonces, existe una única geodésica $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$, con I_v abierto, verificando las siguientes condiciones:*

i) $0 \in I_v$, $\gamma_v(0) = p$ *y* $\gamma_v'(0) = \mathbf{v}$;

ii) *si* $\alpha : J \longrightarrow S$ *es otra geodésica con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, *entonces* $J \subset I_v$ *y* $\alpha \equiv \gamma_v|_J$.

La geodésica γ_v se denomina la *geodésica maximal con condiciones iniciales p y* $\mathbf{v}$, e I_v es el *intervalo maximal* de existencia.

Demostración. Para $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$ fijos, definimos el conjunto

$$\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}} = \left\{\gamma : I \longrightarrow S \text{ geodésica} : 0 \in I,\ \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \mathbf{v}\right\}.$$

Vamos a dividir la demostración en tres partes.

PASO 1. Veamos en primer lugar que $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}} \neq \emptyset$.

Sean (U,X) una parametrización de S con $p = X(u_0,v_0) \in X(U)$ y $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$ en la base de las parciales: $\mathbf{v} = v_1X_u(u_0,v_0) + v_2X_v(u_0,v_0)$. Para esta parametrización (U,X), consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales (5.9) sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} u'(0) = v_1, \\ v'(0) = v_2. \end{cases}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales, sabemos que existe una única curva $\widetilde{\gamma}(t) = \big(u(t),v(t)\big)$ en el abierto U, que es solución de (5.9) con las condiciones iniciales fijadas. Entonces, $\gamma(t) = X\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) = X\big(u(t),v(t)\big)$ es una geodésica en S, ya que su expresión en coordenadas satisface el sistema (5.9). Además,

$$\gamma(0) = X\big(\widetilde{\gamma}(0)\big) = X(u_0,v_0) = p \quad \text{y}$$
$$\gamma'(0) = u'(0)X_u(u_0,v_0) + v'(0)X_v(u_0,v_0) = v_1X_u(u_0,v_0) + v_2X_v(u_0,v_0) = \mathbf{v}.$$

Por lo tanto, $\gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, que no es vacío.

PASO 2. Ya sabemos lo que sucede en el entorno coordenado $X(U)$. Pero, ¿qué pasa fuera de él? Vamos a demostrar que esta geodésica γ puede «extenderse» más allá de $X(U)$, sin que tengan lugar situaciones, digamos, «extrañas».

Supongamos que $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow S$ y $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow S$ son dos geodésicas de $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$. Entonces, $0 \in I_1 \cap I_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = \mathbf{v}$. Vamos a probar que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ y $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$ en todo $t \in I_1 \cap I_2$. Para ello, definimos

$$A = \left\{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \ \text{ y } \ \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)\right\}.$$

Claramente, $A \neq \emptyset$, pues $0 \in A$. Si demostramos además que A es abierto y cerrado, como $I_1 \cap I_2$ es conexo, entonces podremos concluir que $A = I_1 \cap I_2$.

Probar que A es cerrado es fácil; basta usar un sencillo argumento topológico: definimos las funciones $f, g : I_1 \cap I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ dadas por $f(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)\big)$, $g(t) = \big(\gamma_2(t), \gamma_2'(t)\big)$; entonces $A = \big\{t \in I_1 \cap I_2 : f(t) = g(t)\big\}$, que es cerrado.

Demostremos ahora que A es abierto. Para ello, sea $t_0 \in A$, y buscamos $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$. Como $t_0 \in A$, entonces $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) =: \overline{p} \in S$ y $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0) =: \mathbf{w} \in T_{\overline{p}}S$. Elegimos una parametrización $(\overline{U}, \overline{X})$ de S de forma que $\overline{p} = \overline{X}(\overline{u}_0, \overline{v}_0) \in \overline{X}(\overline{U})$, y sean

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = \overline{X}^{-1}\big(\gamma_1(t)\big) = \big(u_1(t), v_1(t)\big), \quad \widetilde{\gamma}_2(t) = \overline{X}^{-1}\big(\gamma_2(t)\big) = \big(u_2(t), v_2(t)\big).$$

Así, tenemos dos soluciones $\big(u_1(t), v_1(t)\big)$ y $\big(u_2(t), v_2(t)\big)$ del sistema (5.9) con las mismas condiciones iniciales, pues

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(t_0) = u_2(t_0) = \overline{u}_0, \\ v_1(t_0) = v_2(t_0) = \overline{v}_0, \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1'(t_0) = u_2'(t_0) = w_1, \\ v_1'(t_0) = v_2'(t_0) = w_2, \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{w} = w_1\overline{X}_u(\overline{u}_0, \overline{v}_0) + w_2\overline{X}_v(\overline{u}_0, \overline{v}_0)$. Por la unicidad de soluciones para este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales, podemos asegurar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $u_1(t) = u_2(t)$ y $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Luego

$$\gamma_1(t) = \overline{X}\big(u_1(t), v_1(t)\big) = \overline{X}\big(u_2(t), v_2(t)\big) = \gamma_2(t) \quad \text{y} \quad \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$$

si $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Esto prueba que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$; es decir, A es abierto.

PASO 3. Finalmente, construimos la geodésica maximal y su intervalo maximal de existencia. Sea

$$I_v = \bigcup_{\substack{\gamma : I \longrightarrow S \\ \gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}}} I.$$

Desde luego, $0 \in I_v$, pues $0 \in I$ para todo I, por la definición de $\mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$. Definimos la curva $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$ del siguiente modo: dado $t \in I_v$, existe una geodésica $\gamma : I \longrightarrow S$, $\gamma \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, tal que $t \in I$; entonces, tomamos $\gamma_v(t) := \gamma(t)$. Ésta es una buena definición, pues si hubiese otra geodésica $\overline{\gamma} : \overline{I} \longrightarrow S$, $\overline{\gamma} \in \mathfrak{J}_{p,\mathbf{v}}$, con $t \in \overline{I}$, entonces, por lo demostrado en el PASO 2, $\gamma \equiv \overline{\gamma}$ en la intersección de sus dominios, $I \cap \overline{I}$. Además, cumple las propiedades requeridas en el teorema. □

En resumidas cuentas, este resultado expresa que, en cada dirección del plano tangente T_pS, existe una única geodésica que pasa por p con la dirección prefijada, y que dicha geodésica está completamente determinada por tales condiciones iniciales. Esta demostración también es un ejemplo de la clase de dificultades que se pueden encontrar a la hora de demostrar resultados para superficies cuando éstos están apoyados en lo local: la extensión a la globalidad de la superficie puede presentar problemas inesperados que no se dan a nivel local.

Otro concepto relacionado con el resultado anterior es el de completitud (geodésica), que presentamos a continuación.

Proposición 2.10

Demostración. La curvatura geodésica $k_g(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = 0$ si, y sólo si, $\alpha''(s)$ y $J\alpha'(s)$ son ortogonales. Ahora bien, como $\langle \alpha''(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ siempre, la condición anterior es equivalente a su vez a que el vector aceleración $\alpha''(s)$ se encuentre en la dirección del normal a la superficie $N(s)$. Y esto se verifica si, y sólo si, $\alpha''(s)^{\top} = (D\alpha'/ds)(s) = \mathbf{0}$. Es decir, si, y solamente si, α es una geodésica. □

Lema 2.11

Demostración

Sea β una reparametrización de α que cumpla

$$\begin{cases} \beta(s) = \alpha(t(s)) \\ \alpha(t) = \beta(s(t)) \end{cases}$$

$$k_g^\alpha(t) = k_g^\beta(s(t)) \qquad k_g^\beta(t) =< \beta'', J\beta' >= det(\beta'', N, \beta')$$
$$\beta(s) = \alpha(t(s)) \to \beta'(s) = t'(s)\alpha'(t(s))$$

Como β está parametrizado por la longitud de arco, entonces

$$1 = ||\beta'(s)|| = t'(s) \cdot ||\alpha'(t(s))|| \qquad t'(s) = \frac{1}{||\alpha'||}$$

$$\beta'' = t''(s)\alpha'(t(s)) + (t'(s))^2\alpha''(t(s))$$

Por lo tanto, $N(s) = N(\beta(s)) = N(\alpha(t(s)))$.

$$k_g^\beta(s) = (t'(s))^3 \cdot det(\alpha''(t(s)), N(\alpha(t(s))), \alpha'(t(s)))$$

$$k_g^\beta(s) = \frac{det(\alpha'', N\alpha, \alpha')}{||\alpha'||^3}(t(s))$$

$$k_g^\alpha(t) = k_g^\beta(s(t)) = \frac{det(\alpha'', N, \alpha')}{||\alpha'||^3}(t)$$

No entiendo un carajo pero espero que ustedes lo hagan, un saludo.

□

2.13

Demostración

Esta queda por hacer...

□

Proposición 2.0.1. ***Proposición exclusiva de Apuntes PaChito ™***

Sea $\alpha : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización. Son equivalentes:

1. *α es pregeodésica*

2. $\exists \beta(u)=\alpha(h(u))$ *una reparametrización de* α / β *es geodésica.*
3. *La reparametrización parametrizada por el arco de* α *es geodésica.*

Demostración

$$1 \implies 2$$

Directo por la definición

$$3 \implies 1$$

Por la definición directo

$$2 \implies 3$$

¿Te imaginas que es directo por la definición? Pues no. Mala suerte.

Tomamos una reparametrización de I:

$$I \to^{\alpha} S$$
$$J \to^{h(u)} I$$
$$J \to^{\beta(u)=\alpha(h(u)) \text{ que es geodésica}} S$$

Esto es un triangulito si lo dibujáis... Estaría bien que yo también lo hiciera pero soy un *vago*.

$$||\beta'(u)|| = c = h'(u) \cdot ||\alpha'(h(u))||$$

Si $c=1 \to \beta(u)$ es la reparametrizavión por arco de α

Si $c \neq 1 \to$ Tomo $\underbrace{\gamma(s)=\beta(\frac{u}{c})}_{GEODESICA} = \alpha(h(\frac{u}{c}))$

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c} \cdot \beta' \left(\frac{s}{c}\right)$$

□

Capítulo 3

Lema 3.2, Lema de homogeneidad de las geodésicas

Lo más importante del lema son las fórmulas que aparecen centradas en su enunciado.

Demostración. Definimos una nueva curva $\alpha : I_\alpha \longrightarrow S$ de la forma $\alpha(t) := \gamma_v(\lambda t)$, donde el intervalo de definición $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \lambda t \in I_v\}$. Entonces, $\alpha(0) = \gamma_v(0) = p$ y $\alpha'(0) = \lambda \gamma_v'(0) = \lambda \mathbf{v}$. Además,

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \big(\alpha''(t)\big)^\top = \big[\lambda^2 \gamma_v''(\lambda t)\big]^\top = \lambda^2 \frac{D\gamma_v'}{dt}(\lambda t) = \mathbf{0},$$

ya que γ_v es una geodésica. En consecuencia, α es también una geodésica en la superficie S con condiciones iniciales $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \lambda \mathbf{v}$, y por el teorema de existencia y unicidad de geodésicas maximales (véase el teorema 5.2.2), podemos asegurar que $I_\alpha \subset I_{\lambda v}$ y que $\alpha \equiv \gamma_{\lambda v}|_{I_\alpha}$; luego

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \alpha(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Falta demostrar que $\big(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/|\lambda|\big) \subset I_{\lambda v}$. Concretamente, vamos a probar que $\big(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/|\lambda|\big) \subset I_\alpha$, y como ya sabemos que $I_\alpha \subset I_{\lambda v}$, tendremos el resultado. Sea $t \in \big(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/|\lambda|\big)$, lo cual implica que $-\varepsilon/|\lambda| < t < \varepsilon/|\lambda|$, es decir, que $-\varepsilon < |\lambda| t < \varepsilon$. Entonces, $-\varepsilon < \lambda t < \varepsilon$, independientemente de que λ sea positivo o negativo, lo que demuestra que $\lambda t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$. Por lo tanto, $t \in I_\alpha$. $\square$

Teorema 3.3, Propiedades de la aplicación exponencial

Primero tenemos que demostrar esta propiedad

$$p \in S,\ v \in T_pS \implies iv \in \mathcal{D}_p,\ \forall t \in I_v \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Demostración

$$\begin{cases} t = 0 \to OK \\ t \neq 0, \qquad tv \in \mathcal{D}_p \iff 1 \in I_{tv} = \dfrac{1}{t} \cdot I_v \ si\ 1 = \dfrac{1}{t}t \end{cases}$$

$$exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),\ \forall t \in I_v$$

□

Fin de la demostración inciso, comenzamos a demostrar el teorema.

Demostración

$$I$$

Que sea estrellado nos dice que el segmento que une cualquier punto con el origen no se sale del conjunto. En otras palabras,

$$\forall \underbrace{v \in \mathcal{D}_p}_{1 \in I_v \implies [0,1] \subset I\ \forall t \in [0,1]},\ [0, v] = \{tv,\ 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{D}_p$$

Del inciso se deduce que $t \in I_v \implies tv \in \mathcal{D}_p$. Notamos lo siguiente:

$$\forall v \in T_pS,\ \exists(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$$

Y justo debajo ha escrito

$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall |t| < \varepsilon,\ tv \in \mathcal{D}_p$$

$$II$$

Este dice el sensei Alías que nos lo creamos y yo **me lo creo.**

$$III$$

$$\exists \underbrace{U}_{\text{entorno de } 0}{}^{1} \in \mathcal{D}_p\ :\ exp_{p|\mathcal{U}}\ :\ \underbrace{\mathcal{U}}_{\subset T_pS} \to \underbrace{V}_{\subset S} \text{ es difeomorfismo}$$

Para comprobar si es un difeomorfismo, tenemos que ver que la diferencial es un isomorfismo lineal. Vamos a ver si esto es así:

$$\forall v \in \mathcal{D}_p \to d(exp_p)_v\ :\ \underbrace{T_v(\mathcal{D}_p)}_{T_v(T_pS)} \to T_{exp_p(v)}S$$

$$\forall w \in T_pS \qquad \alpha(t) = v + tw$$

$$\alpha\ :\ I \to \mathcal{D}_p \subset T_pS$$

$$\alpha(0) = v \qquad \alpha'(0) = w \qquad \to \qquad w \in T_v(T_pS)$$

Vamos al caso particular $v = 0$.

$$d(exp_p)_0\ :\ T_0(TpS) = T_pS \to T_{exp_p(v)}S = T_pS$$

[1] Para el sensei Alías, decir entorno implica que es abierto

$$\forall w \in T_pS = T_0(T_pS)$$

$$d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t))$$

Tenemos que encontrar una curva que cumpla

$$\forall \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = 0 \\ \alpha'(0) = w \end{array}\right\} \alpha(t) = tw$$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1) = \gamma_w(t)$$

$$d(exp_p)_0(w) = \gamma'_w(0) = w \implies d(exp_p)_0 = Id$$

□

Lema 3.6, El lema de Gauss

Vamos a demostrar una versión más general de lo que viene en los apuntes. En nuestra versión demostraremos

$$\forall w \in T_pS \qquad < d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w) >=< v, w >$$

Demostración

Procedo a copiar lo que ponga el sensei en la pizarra. Para demostrar esta propiedad, debemos hacer una cuenta.

Caso fácil:

Supongamos $w = \lambda v$. Entonces, $d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t)),\ \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{D}_p$. Tomamos $\alpha(t) = v + tw = v + t\lambda v = (1 + \lambda t)v$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p((1 + \lambda t)v) = \gamma_v(1 + \lambda t)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma_v((1 + \lambda t)v) = \lambda\gamma'_v(1 + \lambda t)$$

$$\implies {}_{t=0} d(exp_p)_v(w) = \lambda\gamma'_v(1)$$

Ahora, vamos a utilizar que el módulo es constante.

$$< d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w) >=< \gamma'_v(1), \lambda\gamma'_v(1) >= \lambda||\gamma'_v(1)||^2 = \lambda||\gamma'_v(0)|| = \lambda||v||^2 =$$

$$=< v, \lambda v >=< v, w >$$

Caso chungo:

Supongamos ahora que v y w son linealmente independientes, que es una condición más general a que sean ortogonales. Este tiene un poco más de miga.

Consideramos $\phi(s, t) \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to T_pS$ tal que

$$\phi(s, t) = s(v + tw) = s\alpha(t)$$

En este caso,

$$\phi(0,t) = 0 \ \ \forall t \qquad \phi(1,t) = \alpha(t) \ \ \forall t^2$$

Si $\alpha \in \mathcal{D}_p$ entonces

$$\phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall s \in [0,1]$$
$$\phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon')$$
$$\alpha(0) \in \mathcal{D}_p \to \exists \varepsilon > 0 | \alpha(t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall |t| < \varepsilon$$

Por compacidad, $\exists \varepsilon > 0 \mid \phi(s,t) \in \mathcal{D}_p, \ \forall (s,t) \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ahora, considero la siguiente aplicación

$$\psi(s,t) = exp_p(\phi(s,t)) = exp_p(s\alpha(t))$$
$$\alpha(t) = v + tw$$
$$\psi \ : \ (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to^{\phi} \mathcal{D}_p \to^{exp_p} S, \text{ que es bien definida y } C^\infty$$
$$exp_p(s\alpha(t)) = \gamma_{\alpha(t)}(s)$$

La derivada fácil de ψ es con respecto de s y por ella vamos a comenzar.

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) = \frac{d}{ds}_{t=cte}(\gamma_{\alpha(t)}(s)) = \gamma'_{\alpha(t)}(s) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2}(s,t) = \gamma'' \alpha(t)(s) \text{ normal}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}(exp_p(s\alpha(t))) = d(exp_p)_{s(\alpha(t))}(\alpha(t))$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,0) = d(exp_p)_{s,v}(v) = \begin{cases} d(exp_p)_0(v) = v, \ s = 0 \\ d(exp_p)_v(v), \ s = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(1,0) = d(exp_p)_v(v)$$

Bueno si este ha sido el caso fácil agárrate de los pelos que vamos a derivar con respecto de t.

$$s = 0 \to \psi(0,t) = exp_p(0) = p$$
$$s = 1 \to \psi(1,t) = exp_p(\alpha(t)) \to \frac{\partial p}{\partial t}(1,t) = d(exp_p)_{\alpha(t)}(\alpha(t)) = d(exp_p)_{\alpha(t)}(w)$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(1,0) = d(exp_p)_v(w)$$
$$< \frac{\partial \psi}{\partial s}(1,0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(1,0) >=??$$
$$f(s) =< \frac{\partial p}{\partial s}(s,0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,0) >, \ \forall s \in [0,1]$$

Mi objetivo es calcular $f(1)$.

$$f'(s) = \underbrace{< \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(s,0), \ \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,0) >}_{A} + \underbrace{< \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}(s,0) >}_{B}$$

[2] Luis está haciendo un dibujo bastante ilustrativo en la pizarra (hoy es 17 de Febrero, por si os queréis ver la clase). El caso es que el hijo de puta de Paco aún no se ha puesto a tomar apuntes conmigo (es cuestión de tiempo, siempre se mete el jodido) y no me da tiempo a copiar lo que dice y el dibujo, así que... Lector, good luck.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''_v \text{ normal a } S \text{ en } \gamma_v(s)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(s,t)\right) = \beta'_s(0) \in TS = T$$

A tomar por culo, os lo copio del libro:

$\square$

continua (en V, donde es un difeomorfismo), $\exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0)$ es un cerrado verificando $U_0 \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0) \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(V) = U$, y por tanto, $\mathrm{cl}\,U_0 \subset \exp_{p_0}{}^{-1}(\mathrm{cl}\,V_0) \subset U$.

Si $\mathbf{w} \notin U_0$, dado que $\mathrm{cl}\,U_0 \subset U$, ambos U_0, U son conexos y U es estrellado respecto a $\mathbf{0}$, podríamos asegurar la existencia de $t_0 \leq 1$ tal que $t_0\mathbf{w} \notin U_0$ pero $t_0\mathbf{w} \in U$. En tal caso, $\exp_{p_0}(t_0\mathbf{w}) = \gamma_w(t_0) = \alpha(t_0)$. Ahora bien, tal y como hemos definido la curva $\widetilde{\alpha}$, sabemos que $\alpha(t_0) = \exp_{p_0}\big(\widetilde{\alpha}(t_0)\big)$, donde $\widetilde{\alpha}(t_0) \in U_0$ por la construcción de U_0. Habríamos llegado así a que $\exp_{p_0}\big(\widetilde{\alpha}(t_0)\big) = \exp_{p_0}(t_0\mathbf{w})$ con $t_0\mathbf{w} \neq \widetilde{\alpha}(t_0)$, lo que contradiría la inyectividad de $\exp_{p_0}$ (dentro de U).

Por lo tanto, $\mathbf{w} \in U_0 \subset U$. Tenemos entonces que $\exp_{p_0}(\mathbf{v}) = p = \exp_{p_0}(\mathbf{w})$, con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$, lo que nos permite concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ por la inyectividad de $\exp_{p_0}$. En consecuencia, $\alpha = \gamma_w|_{[0,1]} = \gamma_v|_{[0,1]} = \gamma_p$, tal y como se quería demostrar. □

5.3.1. El lema de Gauss

Sean S una superficie regular y $p \in S$. Elegimos un vector cualquiera $\mathbf{v} \in D_p$, para el que vamos a estudiar la diferencial $d(\exp_p)_{\mathbf{v}} : T_{\mathbf{v}}D_p \equiv T_pS \longrightarrow T_{\exp_p(\mathbf{v})}S$. Sea $\mathbf{w} \in T_pS$. Nos preguntamos entonces qué se puede decir de $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$. El lema de Gauss nos da la respuesta. Desde luego, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ya sabemos que $d(\exp_p)_{\mathbf{0}} = 1_{T_pS}$, por lo que vamos a suponer que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Lema 5.3.6 (de Gauss –primera versión). *Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in D_p$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Sea además $\mathbf{w} \in T_pS$.*

i) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, entonces $\big|d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\big| = |\mathbf{w}|$.

ii) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$, $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ son ortogonales.

Demostración. Supongamos primero que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, esto es, $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para un cierto $\lambda > 0$. Entonces, tomando la curva $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w} = (1+\lambda t)\mathbf{v}$, que está contenida en D_p y verifica $\alpha(0) = \mathbf{v}$, $\alpha'(0) = \mathbf{w}$, se tiene que

$$d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p\big((1+\lambda t)\mathbf{v}\big) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_v(1+\lambda t) = \lambda\gamma_v'(1),$$

donde, como es usual, $\gamma_v : I_v \longrightarrow S$ es la geodésica maximal con $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = \mathbf{v}$. Tomando módulos, $\big|d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\big| = |\lambda|\,\big|\gamma_v'(1)\big| = |\lambda|\,\big|\gamma_v'(0)\big| = |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$.

Estudiemos ahora el segundo caso, y supongamos por tanto que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales. Definimos $\varphi(s,t) = \exp_p\big(s(\mathbf{v} + t\mathbf{w})\big)$. ¿Cuál es su dominio de definición?

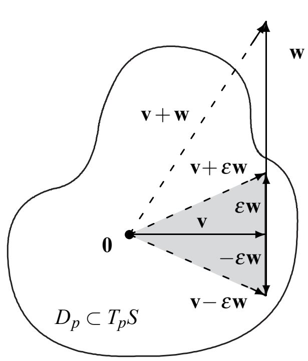

Figura 5.6: Dominio de φ.

Sea $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Claramente, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $\alpha(t) = \mathbf{v} + t\mathbf{w} \in D_p$ (véase la figura 5.6). En consecuencia, al ser D_p estrellado respecto al origen $\mathbf{0} \in T_pS$, si $s \in [0,1]$, se tiene que $s\alpha(t) = s(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) \in D_p$.

Ahora bien, como D_p es un abierto, podemos asegurar la existencia de un $\varepsilon' > 0$ (independiente de t), verificando que para todo $s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon')$, $s\alpha(t) \in D_p$. En efecto, si $D_p = T_pS$ el resultado es trivial. Si $D_p \subset T_pS$ estrictamente y representamos por τ el triángulo con vértices $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}+\varepsilon\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}-\varepsilon\mathbf{w}$, que es un compacto (véase la figura 5.6), es evidente que la distancia (euclídea, en T_pS) $\rho = \operatorname{dist}(\tau, T_pS\backslash D_p) > 0$; basta tomar entonces $\varepsilon' > 0$ verificando $\varepsilon' < \rho/2$. Así pues, la aplicación

$$\varphi : (-\varepsilon', 1+\varepsilon') \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S, \quad \text{dada por} \quad \varphi(s,t) = \exp_{\mathrm{p}}\big(s\alpha(t)\big)$$

está bien definida. Además, es claro que,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}),$$

y por lo tanto, es suficiente demostrar que $\langle \partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial s\rangle\big|_{(t,s)=(1,0)} = 0$. Para ello, definimos la función

$$f(s) := \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle, \quad \text{con } s \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon').$$

Claramente se tiene que $f(0) = 0$, ya que $(\partial\varphi/\partial t)(0,0) = d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, siendo además su derivada

$$f'(s) = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,0) \right\rangle. \tag{5.14}$$

Estudiemos los dos sumandos de (5.14) separadamente, comenzando por el segundo. Por un lado,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(s,0) = \frac{d^2}{ds^2}\big(\exp_{\mathrm{p}}(s\mathbf{v})\big) = \gamma_v''(s).$$

Como γ_v es una geodésica, el campo velocidad γ_v' es paralelo, y por tanto, $\gamma_v''(s)$ está en la dirección del normal a la superficie en el punto $\varphi(s,0)$. Por otro lado, si $\beta_s : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ representa la curva $\beta_s(t) = \varphi(s,t)$, entonces

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(s,t) = \beta_s'(0) \in T_{\beta_s(0)}S = T_{\varphi(s,0)}S$$

es un vector tangente a S. En consecuencia, $\big\langle (\partial\varphi/\partial t)(s,0), (\partial^2\varphi/\partial s^2)(s,0)\big\rangle = 0$.

Finalmente, estudiamos el primer sumando de (5.14).

$$\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(s,0), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\bigg|_{t=0} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \right\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right|^2.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\exp_{\mathrm{p}}\big(s\alpha(t)\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\big(\gamma_{\alpha(t)}(s)\big) = \gamma_{\alpha(t)}'(s),$$

por lo que

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right|^2 = \left|\gamma_{\alpha(t)}'(s)\right|^2 = \left|\gamma_{\alpha(t)}'(0)\right|^2 = |\alpha(t)|^2 = |\mathbf{v}+t\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + 2t\,\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + t^2\,|\mathbf{w}|^2.$$

Geodésicas en superficies

Entonces, se tiene finalmente que

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0) \right\rangle = \frac{1}{2}\left(2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + 2t\,|\mathbf{w}|^2\right)\Big|_{t=0} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0,$$

ya que, por hipótesis, los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales. En resumen, dado que ambos sumandos en la expresión (5.14) se anulan, entonces $f'(s) = 0$, lo cual implica que f es constante. Como además $f(0) = 0$, podemos concluir que $f \equiv 0$, lo que termina la demostración. $\square$

Teorema 3.8, Propiedad minimizante de las geodésicas

Es bastante difícil poner con palabras cuán horrenda, larga y desagradable es esta demostración. Por esto, he decidido meter aquí su equivalente en el libro tal cual y sin ningún tipo de respeto. Por si os surgen dudas y queréis consultar la fuente, es el teorema 5.3.9 del curso de Hernández Pastor. Comienza en la siguiente página.

Os animo a hacer un dibujo libre en lo que queda de página y enviármelo por twitter al user @chitobelm.

Demostración. Veamos la primera parte. Dado $p \in V$, sabemos que, si $t \in [0,1]$, $\gamma_p(t) = \gamma_v(t) = \exp_{\mathrm{p}_0}(t\mathbf{v})$ es la geodésica maximal para el (único) vector $\mathbf{v}$ tal que $\exp_{\mathrm{p}_0}(\mathbf{v}) = p$. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow V$ con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$ otra curva cualquiera.

$$L_0^1(\gamma_p) = \int_0^1 \left|\gamma_p'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|\gamma_v'(0)\right| dt = |\mathbf{v}|\,.$$

Vamos a demostrar que $L_a^b(\alpha) \geq |\mathbf{v}|$. Para ello, distinguimos dos casos.

i) Supongamos en primer lugar que $p = p_0$. En tal caso, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo que, trivialmente, $L_a^b(\alpha) \geq 0 = |\mathbf{v}|$. Además, si $L_a^b(\alpha) = 0$, entonces α es constante; y como $\alpha(a) = p_0$, podemos concluir que $\alpha \equiv p_0 \equiv \gamma_p$.

ii) Supongamos por tanto que $p \neq p_0$. Por comodidad, reparametrizamos α de manera que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Como $\alpha(0) = p_0 \neq p = \alpha(1)$, existirá un $t_0 \geq 0$ tal que $\alpha(t_0) = p_0$ y $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > t_0$. Tomamos entonces $\alpha|_{[t_0,1]}$. Claramente, $L_0^1(\alpha) \geq L_{t_0}^1\big(\alpha|_{[t_0,1]}\big)$, por lo que es suficiente trabajar con el trozo de curva $\alpha|_{[t_0,1]}$ y ver que $L_{t_0}^1\big(\alpha|_{[t_0,1]}\big) \geq |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p)$. Hemos «suprimido» así un posible intervalo en el que, o bien α es constantemente igual a p_0, o bien α es un lazo, esto es, sale de p_0 y vuelve a pasar por dicho punto más adelante. Volvemos entonces a reparametrizar $\alpha|_{[t_0,1]}$ para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Ahora se verifica además la condición adicional de que $\alpha(t) \neq p_0$, para todo $t > 0$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"'] & V \subset S \arrow[d, shift left, "(\exp_{\mathrm{p}_0}|_U)^{-1}"] \\
 & U \subset D_{p_0} \arrow[u, shift left, "\exp_{\mathrm{p}_0}|_U"]
\end{tikzcd}$$

Como V es entorno normal de p_0, sabemos que $V = \exp_{\mathrm{p}_0}(U)$, siendo $U \subset D_{p_0}$ el entorno estrellado del origen $\mathbf{0}$ de $T_{p_0}S$ para el cual $\exp_{\mathrm{p}_0}|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Tomamos entonces la curva en el tangente

$$\widetilde{\alpha}(t) = \big(\exp_{\mathrm{p}_0}|_U\big)^{-1}\big(\alpha(t)\big) \in U \subset D_{p_0}.$$

Obsérvese en primer lugar que $\widetilde{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$ si $t > 0$; en efecto, si $\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{0}$ para algún $t > 0$, se tendría que $\alpha(t) = \exp_{\mathrm{p}_0}(\mathbf{0}) = p_0$, una contradicción. Definimos entonces las funciones

$$\begin{cases} r(t) := \left|\widetilde{\alpha}(t)\right| > 0 & \text{si } t > 0, \\ r(0) := 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad V(t) = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{\left|\widetilde{\alpha}(t)\right|} = \frac{\widetilde{\alpha}(t)}{r(t)} \quad \text{si } t > 0.$$

Claramente, $\left|V(t)\right| = 1$, por lo que $\big\langle V'(t), V(t)\big\rangle = 0$; esto es, $V(t)$ y $V'(t)$ son ortogonales. Además, $\alpha(t) = \exp_{\mathrm{p}_0}\big|_U\big(\widetilde{\alpha}(t)\big) = \exp_{\mathrm{p}_0}\big(r(t)V(t)\big)$. Derivando esta expresión se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(r'(t)V(t) + r(t)V'(t)\big) \\
&= r'(t)d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big) + r(t)d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big),
\end{aligned}$$

y finalmente, tomando módulos y aplicando el lema de Gauss 5.3.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\alpha'(t)\right|^2 &= r'(t)^2 \left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big)\right|^2 + r(t)^2 \left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 \\
&\quad + 2r(t)r'(t)\left\langle d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V(t)\big), d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right\rangle \\
&= r'(t)^2 \left|V(t)\right|^2 + r(t)^2 \left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 + 0 \\
&= r'(t)^2 + r(t)^2 \left|d(\exp_{\mathrm{p}_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right|^2 \geq r'(t)^2, \ \text{para todo } t \in (0,1].
\end{aligned}$$

Por tanto, $\left|\alpha'(t)\right| \geq \left|r'(t)\right| \geq r'(t)$ para todo $t \in (0,1]$. Si ahora calculamos la longitud de α, usando la desigualdad anterior se obtiene el resultado buscado:

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 \left|\alpha'(t)\right| dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left|\alpha'(t)\right| dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 r'(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(r(1)-r(\varepsilon)\big)$$
$$= r(1)-r(0) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}\big(\alpha(1)\big)\right| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p)\right| = |\mathbf{v}|.$$

Para concluir la demostración de la primera parte del teorema falta caracterizar la igualdad. Si $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p) = |\mathbf{v}|$, debe darse la igualdad en todas las desigualdades anteriores. Así, $L_0^1(\alpha) = L_0^1(\gamma_p)$ si, y sólo si, $\left|r'(t)\right| = r'(t)$ y $\left|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big)\right| = 0$, lo cual es equivalente a su vez a que $r'(t) > 0$ y $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$. Como $\exp_{p_0}|_U$ es un difeomorfismo en U y $r(t)V(t) \in U$, entonces $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}$ es un isomorfismo lineal. Luego $d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}\big(V'(t)\big) = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $V'(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (0,1]$, es decir, si $V(t)$ es constante, siendo $V(t) = V(1) = \widetilde{\alpha}(1)/\left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Así,

$$\alpha(t) = \exp_{p_0}\big(r(t)V(t)\big) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_v\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{|\mathbf{v}|}\right),$$

donde, recordemos, $r(0) = 0$ y $r(1) = \left|\widetilde{\alpha}(1)\right| = |\mathbf{v}|$. Por tanto, $\alpha(t)$ es una reparametrización monótona (pues $r'(t) \geq 0$) del segmento de geodésica γ_p.

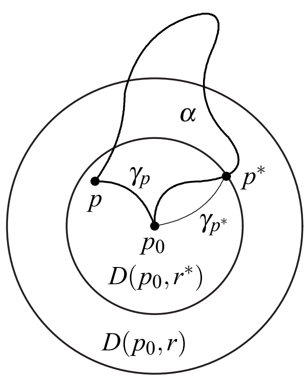

Figura 5.8: γ_p minimiza la longitud en los discos geodésicos.

Probamos ahora la segunda parte del teorema. Sea $r > 0$ de forma que el disco $D(p_0,r) \subset V(p_0)$, y sea $p \in D(p_0,r)$. Tenemos que demostrar que $L_0^1(\gamma_p) \leq L_a^b(\alpha)$, para $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ uniendo p_0 y p. Reparametrizamos de nuevo la curva α para que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$. Si $\alpha\big([0,1]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, entonces la primera parte del teorema nos asegura que $L_0^1(\alpha) \geq L_0^1(\gamma_p)$. Vamos a suponer, por tanto, que la imagen de la curva α se sale del disco $D(p_0,r)$. Sea de nuevo $\mathbf{v} \in U$ el (único) vector verificando que $p = \exp_{p_0}(\mathbf{v})$.

Como el punto $p \in D(p_0,r) = \exp_{p_0}\big(D(\mathbf{0},r)\big)$, se tiene que $\mathbf{v} \in D(\mathbf{0},r)$, es decir, $|\mathbf{v}| < r$. Sea entonces $r^* > 0$ tal que $|\mathbf{v}| < r^* < r$, lo que nos asegura que $p \in D(p_0,r^*)$. Representamos por t_0 el primer valor del parámetro en el que la curva α se sale del disco $D(p_0,r^*)$, esto es,

$$t_0 = \inf\big\{t \in [0,1] : \alpha(t) \notin D(p_0,r^*)\big\}.$$

Entonces, $\alpha\big([0,t_0]\big) \subset D(p_0,r) \subset V$, y además, en los extremos α verifica $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(t_0) =: p^* \in S(p_0,r^*) \subset D(p_0,r)$ (véase la figura 5.8). Bajo tales condiciones, la primera parte del teorema asegura que $L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*})$, donde, como ya es habitual, γ_{p^*} representa el segmento de geodésica radial que une $p_0 = \gamma_{p^*}(0)$ con $p^* = \gamma_{p^*}(1)$, (véase la figura 5.8). Denotemos por $\mathbf{v}^* = \gamma'_{p^*}(0)$. Entonces,

$$L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq L_0^1(\gamma_{p^*}) = \int_0^1 \left|\gamma'_{p^*}(t)\right| dt = \int_0^1 |\mathbf{v}^*|\, dt = |\mathbf{v}^*| = \left|\left(\exp_{p_0}|_U\right)^{-1}(p^*)\right| = r^*;$$

por lo tanto,

$$L_0^1(\alpha) \geq L_0^{t_0}\big(\alpha|_{[0,t_0]}\big) \geq r^* > |\mathbf{v}| = L_0^1(\gamma_p),$$

como se quería demostrar. □

Teorema 3.9

Inciso, más adelante se hace referencia a 4.2, se refiere a esto

Tenemos por tanto que demostrar que

$$\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big| = \sqrt{EG-F^2}(u,v). \qquad (4.2)$$

Veámoslo. Sea $q=(u,v)\in X^{-1}(V)\subset U$. Entonces $p=X(q)=\overline{X}\big(\phi(q)\big)$. Disponemos de dos bases de T_pS, $\{X_u(q),X_v(q)\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big),\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\}$, y podemos expresar los elementos de una de ellas como combinación lineal de los de la otra:

$$X_u(q)=\big(\overline{X}\circ\phi\big)_u(q)=\frac{\partial}{\partial u}\overline{X}\big(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)\big)=\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}+\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{v}}{\partial u},$$
$$X_v(q)=\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}+\overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{EG-F^2}(q)=|X_u\wedge X_v|(q)=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\\ \frac{\partial\overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\end{pmatrix}\right|\big|\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big|\big(\phi(q)\big)$$
$$=\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big|;$$

Demostración. Obsérvese que $X(r,\theta)=\exp_{p_0}(\mathbf{v}_{r,\theta})=\exp_{p_0}(r\mathbf{v}_\theta)=\gamma_{v_\theta}(r)$. En consecuencia, $X_r=\gamma'_{v_\theta}(r)$ y $E=\langle X_r,X_r\rangle=\big\langle\gamma'_{v_\theta}(r),\gamma'_{v_\theta}(r)\big\rangle=\langle\mathbf{v}_\theta,\mathbf{v}_\theta\rangle=1$.

Ahora bien, $X_\theta=d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(r\mathbf{v}'_\theta(\theta)\big)$, mientras que X_r se puede escribir como $X_r=d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(\mathbf{v}_\theta(\theta)\big)$. Además, al ser $|\mathbf{v}_\theta|=1$, entonces $\big\langle\mathbf{v}'_\theta(\theta),\mathbf{v}_\theta(\theta)\big\rangle=0$, es decir, $\mathbf{v}_\theta$ y $\mathbf{v}'_\theta$ son ortogonales. Por lo tanto, el lema de Gauss nos asegura que

$$F=\langle X_r,X_\theta\rangle=\big\langle d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(\mathbf{v}_\theta(\theta)\big),d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\big(r\mathbf{v}'_\theta(\theta)\big)\big\rangle=0.$$

Finalmente, $G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2 \left| d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|^2 > 0$. Tan sólo resta calcular el límite de las funciones G y $\left(\sqrt{G}\right)_r$ cuando $r \to 0$. Por la dependencia diferenciable respecto a las condiciones iniciales de las geodésicas como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos calcular el límite

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left|d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right| &= \left|d(\exp_{p_0})_{\mathbf{0}}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right| = \left|\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right| \\ &= \left|-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2\right| = 1.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\left|d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|$ es una función acotada, por lo que

$$\lim_{r\to 0} G = \lim_{r\to 0} r^2 \left|d(\exp_{p_0})_{r\mathbf{v}_\theta}\left(\mathbf{v}'_\theta(\theta)\right)\right|^2 = 0.$$

Por último, para calcular el límite $\lim_{r\to 0}\left(\sqrt{G}\right)_r$, vamos a utilizar las coordenadas normales ya estudiadas en la sección anterior. Elegimos pues la parametrización dada por un sistema de coordenadas normales $\overline{X}(u,v)$ en p_0 de suerte que el cambio de coordenadas $\phi(r,\theta) = (u,v)$ viene dado por $u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$. Si representamos por $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ los coeficientes de su primera forma fundamental, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{G}(r,\theta) &= \sqrt{EG-F^2}(r,\theta) = \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\left|\det(J\phi)(r,\theta)\right| \\ &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\end{aligned}$$

(véase (4.2)), y un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{G}\right)_r(r,\theta) &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right)\right) \\ &= \sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\left(\phi(r,\theta)\right) \\ &\quad + r\frac{(\overline{G}\circ\phi)(\overline{E}\circ\phi)_r + (\overline{E}\circ\phi)(\overline{G}\circ\phi)_r - 2(\overline{F}\circ\phi)(\overline{F}\circ\phi)_r}{2\left(\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\right)\circ\phi}(r,\theta).\end{aligned}$$

Obsérvese que $(u,v) \to (0,0)$ cuando $r \to 0$, por lo que en el límite obtenemos el punto $p_0 = \overline{X}(0,0)$, en el que las coordenadas normales están bien definidas y valen $\overline{E}(0,0) = \overline{G}(0,0) = 1$ y $\overline{F}(0,0) = 0$.

Además, las primeras derivadas de $\overline{E}, \overline{F}$ y $\overline{G}$ (respecto a u y v) también se anulan en el $(0,0)$ (véase el ejercicio 5.26). Luego

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left(\overline{E}\circ\phi\right)_r(r,\theta) &= \lim_{r\to 0}\left[\overline{E}_u\big(\phi(r,\theta)\big)\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)+\overline{E}_v\big(\phi(r,\theta)\big)\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\right]\\ &= \overline{E}_u(0,0)\cos\theta+\overline{E}_v(0,0)\operatorname{sen}\theta = 0.\end{aligned}$$

Análogamente $\lim_{r\to 0}\left(\overline{F}\circ\phi\right)_r(r,\theta) = \lim_{r\to 0}\left(\overline{G}\circ\phi\right)_r(r,\theta) = 0$ y, en consecuencia, se obtiene que

$$\lim_{r\to 0}\big(\sqrt{G}\big)_r = \lim_{r\to 0}\sqrt{\overline{E}\overline{G}-\overline{F}^2}\big(\phi(r,\theta)\big) = 1,$$

lo que concluye la prueba. □

Teorema de Minding

Teorema 5.3.11 (de Minding). *Sean S y $\overline{S}$ dos superficies regulares con igual curvatura de Gauss constante. Entonces, S y $\overline{S}$ son localmente isométricas.*

Demostración. Sean $p\in S$ y $\overline{p}\in\overline{S}$ cualesquiera. Tenemos que demostrar que existen entornos $V(p)\subset S$ de p, $\overline{V}(\overline{p})\subset\overline{S}$ de $\overline{p}$ y un difeomorfismo $\varphi : V\longrightarrow\overline{V}$, tal que φ es una isometría. Tomemos para ello $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ y $\{\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2\}$ bases ortonormales de los planos tangentes T_pS y $T_{\overline{p}}\overline{S}$, respectivamente y construimos una isometría lineal entre los espacios vectoriales T_pS y $T_{\overline{p}}\overline{S}$ de la manera natural:

$$\widetilde{\varphi} : T_pS\longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{S}\quad \text{dada por}\quad \widetilde{\varphi}(u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2) = u\overline{\mathbf{e}}_1+v\overline{\mathbf{e}}_2,$$

para la que, claramente, $\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_1)=\overline{\mathbf{e}}_1$, $\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_2)=\overline{\mathbf{e}}_2$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pS & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & T_{\overline{p}}\overline{S}\\ {\scriptstyle \exp_p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\overline{p}}}\\ S & \longrightarrow & \overline{S}\end{array}$$

Sean V_0 y $\overline{V}_0$ entornos normales de p y $\overline{p}$, respectivamente, y denotemos por $U_0\subset D_p$ y $\overline{U}_0\subset D_{\overline{p}}$ los abiertos estrellados, entornos de $\mathbf{0}_p\in T_pS$ y $\mathbf{0}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{S}$, respectivamente, tales que $\exp_p : U_0 \longrightarrow V_0$ y $\exp_{\overline{p}} : \overline{U}_0 \longrightarrow \overline{V}_0$ son difeomorfismos. Tomemos además los abiertos $U := \widetilde{\varphi}^{-1}\big(\overline{U}_0 \cap \widetilde{\varphi}(U_0)\big) \subset U_0$ y $\overline{U} := \overline{U}_0 \cap \widetilde{\varphi}(U_0) \subset \overline{U}_0$ (obsérvese que $\overline{U} = \widetilde{\varphi}(U)$, véase la figura 5.10). Finalmente, representamos por V y $\overline{V}$ los entornos (de p y $\overline{p}$, respectivamente) $V := \exp_p(U) \subset V_0$ y $\overline{V} := \exp_{\overline{p}}(\overline{U}) \subset \overline{V}_0$, y definimos la aplicación φ como la composición

$$\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi} \circ \exp_p{}^{-1} : V \longrightarrow \overline{V}.$$

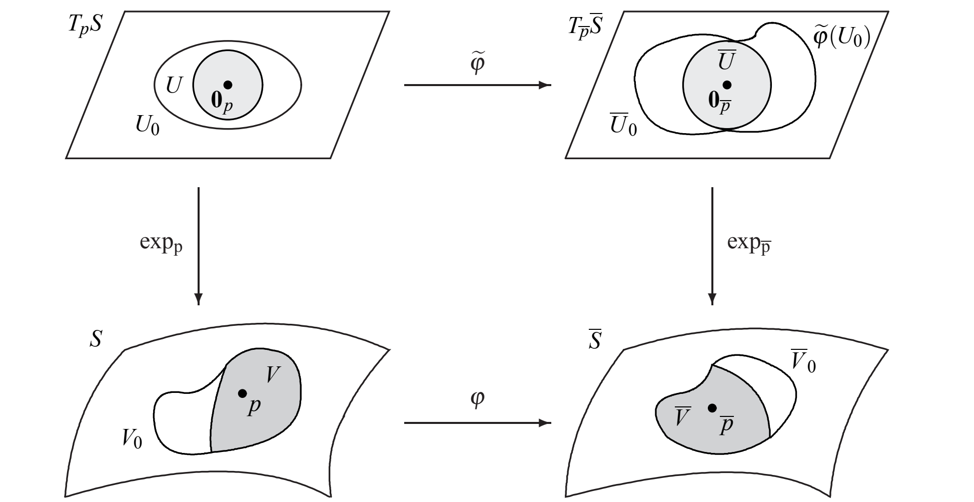

Figura 5.10: Construyendo la isometría φ entre V y $\overline{V}$.

Vamos a demostrar que φ es una isometría (global) entre V y $\overline{V}$. Desde luego, φ es un difeomorfismo, pues es composición de difeomorfismos. Para ver que es una isometría, utilizaremos el teorema 3.7.4: construiremos dos parametrizaciones X y $\overline{X} = \varphi \circ X$, de S y $\overline{S}$, respectivamente, con los mismos coeficientes de la primera forma fundamental.

Para ello, sean $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_pS$ y $\overline{\phi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{S}$ las aplicaciones dadas por

$$\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2 \quad \text{y} \quad \overline{\phi}(r,\theta) = r\cos\theta\,\overline{\mathbf{e}}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overline{\mathbf{e}}_2,$$

y consideremos $U' := \phi^{-1}(U) = \overline{\phi}^{-1}(\overline{U})$. Ésta es una buena definición pues, si el par $(r,\theta) \in \phi^{-1}(U)$, o lo que es lo mismo, si $\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2 \in U$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(r,\theta) &= r\cos\theta\,\overline{\mathbf{e}}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overline{\mathbf{e}}_2 = r\cos\theta\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_1) + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2) \in \widetilde{\varphi}(U) = \overline{U},\end{aligned}$$

de donde se deduce que $(r,\theta) \in \overline{\phi}^{-1}(\overline{U})$; el recíproco es análogo. Construimos finalmente las parametrizaciones buscadas para nuestras superficies S y $\overline{S}$ (véase la figura 5.11):

$$X = \exp_p \circ \phi \quad \text{y} \quad \overline{X} = \exp_{\overline{p}} \circ \overline{\phi},$$

respectivamente (en definitiva, no estamos haciendo otra cosa que considerar los sistemas de coordenadas geodésicas polares para cada una de las superficies).

$$\begin{tikzcd}
& U' \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\overline{\phi}"] \arrow[ddl, bend right, "X"'] \arrow[ddr, bend left, "\overline{X}"] & \\
U \arrow[rr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\exp_p"] & & \overline{U} \arrow[d, "\exp_{\overline{p}}"] \\
V \arrow[rr, "\varphi"] & & \overline{V}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.11: Construyendo las parametrizaciones X y $\overline{X} = \varphi \circ X$.

Es muy sencillo comprobar que el nuevo diagrama (véase la figura 5.11) es conmutativo, es decir, que $\overline{X} = \varphi \circ X$. En efecto:

$$\begin{aligned}\overline{X}(r,\theta) &= (\exp_{\overline{p}} \circ \overline{\phi})(r,\theta) = \exp_{\overline{p}}(r\cos\theta\overline{\mathbf{e}}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\overline{\mathbf{e}}_2)\\ &= (\exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi})(r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_2) = (\varphi \circ \exp_p)(r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_2)\\ &= (\varphi \circ \exp_p \circ \phi)(r,\theta) = (\varphi \circ X)(r,\theta).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi = \overline{X} \circ X^{-1}$. El teorema 3.7.4 nos asegura entonces que si los coeficientes de la primera forma fundamental de X y $\overline{X}$ coinciden, la aplicación φ es una isometría. Ahora bien, en el ejemplo 5.11 hemos calculado los coeficientes E, F y G correspondientes a los sistemas de coordenadas geodésicas polares, cuando la curvatura de Gauss es constante, relaciones (5.19), (5.20) y (5.21). Así, se tiene que $E = 1 = \overline{E}$ y $F = 0 = \overline{F}$. Además, como por hipótesis $K = \overline{K}$,

$$G = \left\{\begin{array}{ll} r^2 & \text{si } K = \overline{K} = 0\\ \dfrac{1}{K}\,\mathrm{sen}^2\big(\sqrt{K}\,r\big) = \dfrac{1}{\overline{K}}\,\mathrm{sen}^2\big(\sqrt{\overline{K}}\,r\big) & \text{si } K = \overline{K} > 0\\ \dfrac{-1}{K}\,\mathrm{senh}^2\big(\sqrt{-K}\,r\big) = \dfrac{-1}{\overline{K}}\,\mathrm{senh}^2\big(\sqrt{-\overline{K}}\,r\big) & \text{si } K = \overline{K} < 0 \end{array}\right\} = \overline{G}.$$

Luego $\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_p}^{-1}$ es una isometría. $\square$

Observación 5.6. Obsérvese que, para la aplicación $\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_p}^{-1}$ definida en la demostración del teorema de Minding, se tiene además que $d\varphi_p \equiv \widetilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}d\varphi_p(\mathbf{v}) &= d\big(\exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_p}^{-1}\big)_p(\mathbf{v}) = d(\exp_{\overline{p}})_{(\widetilde{\varphi}\circ{\exp_p}^{-1})(p)}\Big(d\big(\widetilde{\varphi} \circ {\exp_p}^{-1}\big)_p(\mathbf{v})\Big)\\ &= d(\exp_{\overline{p}})_{\mathbf{0}_p}\Big(d\widetilde{\varphi}_{{\exp_p}^{-1}(p)}\big(d({\exp_p}^{-1})_p(\mathbf{v})\big)\Big) = \big(d\widetilde{\varphi}_{\mathbf{0}_p} \circ d({\exp_p}^{-1})_p\big)(\mathbf{v})\\ &= \Big(\widetilde{\varphi} \circ \big(d(\exp_p)_{\mathbf{0}_p}\big)^{-1}\Big)(\mathbf{v}) = \widetilde{\varphi}(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in T_pS$. En particular, $d\varphi_p(\mathbf{e}_i) = \overline{\mathbf{e}}_i$, para $i = 1,2$. $\diamondsuit$

ASIGNATURA

Parte 2

Capítulo 4

Lema 4.3

Enunciado I

Si $p \in D(p_0, r) = \exp_{p_0}\big(D(\mathbf{0}, r)\big)$, podemos escribir $p = \exp_{p_0}(\mathbf{v})$, con $|\mathbf{v}| < r$. Consideremos la geodésica $\gamma_v(t) = \exp_{p_0}(t\mathbf{v})$, que une $p_0 = \gamma_v(0)$ y $p = \gamma_v(1)$. Claramente

$$d(p_0, p) \leq L_0^1(\gamma_v) = \int_0^1 \left|\gamma_v'(t)\right| dt = |\mathbf{v}| < r,$$

de donde se deduce que $p \in B_d(p_0, r)$.

Enunciado II

Si $p \in B_d(p_0, r) \subset D(p_0, R)$, entonces (teoremas 5.3.5 y 5.3.9) el segmento de geodésica radial $\gamma_p : [0,1] \longrightarrow D(p_0, R)$, $\gamma_p(t) = \exp_{p_0}(t\mathbf{v})$, es la única curva de menor longitud uniendo p_0 y p, con $\mathbf{v} = \gamma_p'(0)$. Luego $d(p_0, p) = L_0^1(\gamma_p) = |\mathbf{v}|$. Como $p \in B_d(p_0, r)$, se tiene que $|\mathbf{v}| = d(p_0, p) < r$, de donde se deduce que $p = \exp_{p_0}(\mathbf{v}) \in \exp_{p_0}\big(D(\mathbf{0}, r)\big) = D(p_0, r)$. La otra inclusión siempre se da. $\diamondsuit$

Inciso: los teoremas que se mencionan se refieren a la existencia y unicidad de geodésicas radiales.

Corolario 4.4

En la demostración, τ_d es la topología inducida por la distancia intrínseca. Yo, personalmente, supongo que τ_u es la topología de la superficie S, pero qué voy a saber yo, si sólo soy un Pokémon de tipo Normal...

Demostración. Obsérvese que las intersecciones de abiertos de $\mathbb{R}^3$ con la propia superficie son abiertos de τ_u; en particular, si (U,X) es una parametrización de S, entonces $V = X(U)$ es abierto en τ_u. Así, los abiertos básicos para la topología τ_u son las intersecciones de las bolas euclídeas con la superficie. Por otra parte, al cumplirse que $d(p,q) \geq |p-q|$ para dos puntos cualesquiera $p,q \in S$, se demuestra que la bola en la distancia intrínseca $B_d(p,r)$ de centro p y radio r está siempre contenida en la intersección de S con la bola euclídea de centro p y radio r, $B_{|\cdot|}(p,r) \cap S$. Esto implica que $\tau_u \subset \tau_d$, es decir, la topología τ_d es más fina que τ_u.

Veamos que coinciden. Dados un punto $p \in S$ y un disco geodésico $D(p,R)$ que es entorno normal de p, la observación 7.2 ii) nos asegura que siempre podemos encontrar una bola $B_d(p,r) \subset D(p,R)$, para $r > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, $B_d(p,r) = D(p,r)$ (véase la observación 7.2 iii)), lo que permite considerar la parametrización X de S (en p) dada por las coordenadas normales (5.16), para la cual $X\big(D(\mathbf{0},r)\big) = \exp_{\mathrm{p}}\big(D(\mathbf{0},r)\big) = D(p,r) = B_d(p,r)$. En consecuencia, $B_d(p,r)$ es un entorno coordenado de una parametrización, y por tanto, un abierto en S con la topología inducida: $B_d(p,r) = W \cap S$, siendo W un abierto euclídeo. Esto demuestra que la bola en la distancia d es un abierto en la topología τ_u, lo que concluye la prueba. $\square$

Capítulo 5

La demostración que está apuntada aquí abajo está tomada por mi compa el Paco en clase. Como no está extraída del libro, ninguno de los autores se hace responsable de cuán caótica o sinsentido pueda resultar. Como decía mi padre: haber estudiao.

Propiedad del corolario 5.4

Demostración

Quiero demostrar que si $\alpha \in [a,b] \to V$ es un segmento de geodésica tal que $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$, entonces α es una reparametrización de γ_p.

Reparametrizamos α para que esté definida entre 0 y 1, en primer lugar. Defino

$$\beta(t) = \alpha((1-t)a + tb) : [0,1] \to V \qquad \begin{cases} \beta(0) = p_0 \\ \beta(1) = p \end{cases}$$

Sabemos que $\gamma_p(t) = exp_{p_0}(tv_p)$. Definimos $w = \beta'(0) \in T_{p_0}S$. Existe entonces $\gamma_w : I_w \to S$ una geodésica maximal.

¿Cómo se relacionan β y γ_w? Hasta ahora, sabemos:

$$\begin{cases} \gamma_w(0) = p_0 = \beta(0) \\ \gamma_w'(0) = w = \beta(0) \end{cases} \implies [0,1] \subset I_w \text{ y además } \beta(t) = \gamma_w(t)\ \forall t \in [0,1]$$

Tenemos tres sucesos elementales ahora:

$$exp_0(v_p) = p \qquad exp_{p_0}(w) = \beta(1) = p \qquad exp_{p_0|\mathcal{U}} : U \to V \text{ es un difeomorfismo.}$$

Nos falta demostrar que $w \in \mathcal{U}$. Vamos a probarlo.

Prueba de que w está en U

Sé que $\beta(t) \in V,\ \forall t \in [0,1]$. Tenemos $\overline{\beta}(t) = \left(exp_{p_0|\mathcal{U}}\right)^{-1}(\beta(t)) : [0,1] \to \mathcal{U}$.

$$\beta(t) = exp_{p_0}(\overline{\beta}(t)),\ \forall t \in [0,1]$$

Mi objetivo es demostrar que $\overline{\beta}(t) = tw, \ \forall t \in [0,1]$. Entonces, podría argumentar que $\overline{\beta}(1) = w \in \mathcal{U}$.

Llamo $A = \{t \in [0,1) \ : \ \overline{\beta}(t) = tw\}$.

1. $0 \in A$, luego $A \neq \emptyset$, $\overline{\beta}'(0) = 0 = 0 \cdot w$.
2. A es cerrado, $f(t) = ||\overline{\beta}(t) - tw||, \ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ A = f^{-1}(0)$.
3. A es abierto, esto es más complicado.
   Dado $t_0 \in A$, ¿$\exists \varepsilon > 0 | (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$?

$$t_0 \in A \implies \overline{\beta}(t_0) = t_0 w \in \mathcal{U}$$
$$\exists \varepsilon > 0 \mid tw \in \mathcal{U}, \ \forall t \in (t_0 \pm \varepsilon)$$
$$\beta(t) = exp_{p_0}(tw) = exp_{p_0}(\overline{\beta}(t)) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in (t_0 \pm \varepsilon) \implies$$
$$\implies \overline{\beta}(t) = tw \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

□

Corolario 5.4

TODO: CONSULTAR KARBAJOAPUNTES

Demostración

Tomo W un entorno convexo de p. Tenemos garantizado que $\exists a < b \ : \ \gamma(a) \in W$. W es también, ahora, un entorno normal de $\gamma(a)$.

Tomamos una reparametrización $\alpha = \gamma|_{[a,b]} : [0,1] \to W$, que es un segmento de geodésica que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

Definamos ahora $\gamma_p : [0, 1+\varepsilon) \to W$ segmento de geodésica radial que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

□

Lema 5.6

Este es el lema 7.2.3 del libro de la bibliografía. Su longitud excede lo que considero oportuno para que un ser humano sufra en una convocatoria. No sólo eso: ***El mismísimo Luis Alías dijo en su clase que «Tenía mejores cosas que preguntar en un examen.»***

El resto de corolarios y lemas de este tema están en los apuntes que proporciona Luis o bien su demostración no es materia de examen.

ASIGNATURA

Parte 3

Capítulo 6

Lema 6.4 y Teorema 6.5

Demostración. Consideremos el segmento de curva regular $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1},s_i]}$. En este intervalo la función $L_i : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ que da la longitud de las curvas $\alpha_t|_{[s_{i-1},s_i]}$,

$$L_i(t) = L_{s_{i-1}}^{s_i}\left(\alpha_t|_{[s_{i-1},s_i]}\right) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left|\frac{\partial\phi}{\partial s}(s,t)\right| ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle^{1/2}(s,t)\,ds,$$

es diferenciable. Así, podemos calcular su derivada:

$$L_i'(t) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle}{\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle^{1/2}}(s,t)\,ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial s}\right|}(s,t)\,ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle(s,t)}{\left|\alpha_t'(s)\right|}\,ds.$$

Ahora bien,

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle(s,t) = \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle(s,t) + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\right\rangle(s,t),$$

de donde, utilizando que las segundas derivadas conmutan, se deduce que

$$L_i'(t) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{1}{\left|\alpha_t'(s)\right|}\left[\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\right\rangle\right](s,t)\,ds.$$

Sustituyendo en $t = 0$ (obsérvese que $\alpha_0'(s) = \alpha'(s)$, vector que es unitario ya que α está p.p.a.),

$$\begin{aligned} L_i'(0) &= \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left[\frac{d}{ds}\left\langle Z(s), \alpha'(s)\right\rangle - \left\langle Z(s), \alpha''(s)\right\rangle\right] ds \\ &= \left\langle Z(s_i), \alpha_-'(s_i)\right\rangle - \left\langle Z(s_{i-1}), \alpha_+'(s_{i-1})\right\rangle - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle Z(s), \alpha''(s)\right\rangle ds \\ &= \left\langle Z(s_i), \alpha_-'(s_i)\right\rangle - \left\langle Z(s_{i-1}), \alpha_+'(s_{i-1})\right\rangle - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s)\right\rangle ds, \end{aligned}$$

pues como Z es un campo tangente, entonces $\left\langle Z(s), \alpha''(s)^{\perp} \right\rangle = 0$. Finalmente, sumando en i y reagrupando convenientemente, obtenemos el resultado buscado:

$$
\begin{aligned}
L'(0) &= \sum_{i=1}^{k} \left\langle Z(s_i), \alpha'_-(s_i) \right\rangle - \sum_{i=1}^{k} \left\langle Z(s_{i-1}), \alpha'_+(s_{i-1}) \right\rangle - \sum_{i=1}^{k} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right\rangle ds \\
&= \left\langle Z(\ell), \alpha'_-(\ell) \right\rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle Z(s_i), \alpha'_-(s_i) \right\rangle - \left\langle Z(0), \alpha'_+(0) \right\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle Z(s_i), \alpha'_+(s_i) \right\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right\rangle ds \\
&= \left[\left\langle Z(s), \alpha'(s) \right\rangle \right]_0^{\ell} - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle Z(s_i), \Delta_i \alpha' \right\rangle - \int_0^{\ell} \left\langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right\rangle ds.
\end{aligned}
$$

La segunda afirmación es evidente. □

Teorema 6.6

Primera parte

$$\alpha \text{ segmento de geodésica} \iff L'(0) = 0 \text{ en variación propia}$$

Demostración. Si α es una geodésica, entonces, en particular, es una curva regular (no tiene vértices). Además, $D\alpha'/ds = \mathbf{0}$, y por tanto, la primera fórmula de variación (7.1) se reduce a

$$L'(0) = \left[\left\langle Z(s), \alpha'(s) \right\rangle \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \left\langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right\rangle ds = \left[\left\langle Z(s), \alpha'(s) \right\rangle \right]_0^{\ell};$$

como además la variación ϕ es propia, $Z(0) = Z(\ell) = \mathbf{0}$, de donde $L'(0) = 0$.

Recíprocamente, suponemos que $L'(0) = 0$ para toda variación propia ϕ de α. Si α no fuese geodésica, existiría $s_0 \in (0, \ell)$ con $(D\alpha'/ds)(s_0) \neq \mathbf{0}$. Sea $f : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable verificando $f(0) = f(\ell) = 0$, $f \geq 0$ y $f(s_0) > 0$, y consideremos el campo vectorial tangente dado por $Z(s) = f(s)(D\alpha'/ds)$. Para dicho $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, tomamos una variación ϕ de α de forma que Z sea su campo variacional (la definida mediante la aplicación (7.2)). Como $Z(0) = Z(\ell) = \mathbf{0}$, la variación ϕ es propia, y utilizando la primera fórmula de variación se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 = L'(0) &= -\int_0^{\ell} \left\langle Z(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right\rangle ds = -\int_0^{\ell} \left\langle f(s) \frac{D\alpha'}{ds}(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right\rangle ds \\
&= -\int_0^{\ell} f(s) \left| \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Dado que el integrando en la ecuación anterior es siempre positivo, podemos asegurar que $L'(0) = 0$ si, y sólo si, $f(D\alpha'/ds) \equiv \mathbf{0}$. En particular, debería verificarse $f(s_0)(D\alpha'/ds)(s_0) = \mathbf{0}$; pero $(D\alpha'/ds)(s_0) \neq \mathbf{0}$ y $f(s_0) > 0$, una contradicción. □

Para la implicación que falta, la bibliografía dice esto:[1]

Obsérvese que el teorema 7.1.5 que nos da la caracterización variacional de las geodésicas podría enunciarse también para variaciones normales de α; esto es, se puede probar que:

Corolario 7.1.7. *Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ una curva regular p.p.a. en una superficie regular S. Entonces α es un segmento de geodésica de S si, y sólo si, $L'(0) = 0$ para toda variación normal ϕ de la curva α.*

Para demostrarlo, basta observar que, en la prueba del recíproco, la variación ϕ construida es, de hecho, una variación normal: en efecto, como α es una curva p.p.a., $\langle \alpha'(s), (D\alpha'/ds)(s) \rangle = 0$, y por tanto, $\langle \alpha'(s), Z(s) \rangle = \langle \alpha'(s), f(s)(D\alpha'/ds)(s) \rangle = 0$.

Lema 6.7

Demostración. Para todo $s \in [0,\ell]$, $Z(s) \in T_{\alpha(s)}S$. Luego podemos tomar la geodésica $\gamma(t)$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = \alpha(s)$ y $\gamma'(0) = Z(s)$, que verifica

$$\gamma(t) = \gamma_{Z(s)}(t) = \gamma_{tZ(s)}(1) = \exp_{\alpha(s)}\big(tZ(s)\big).$$

Además, para cada $s \in [0,\ell]$, existe $\varepsilon(s) > 0$ tal que $\exp_{\alpha(s)}$ está definida (o lo que es lo mismo, $\gamma(t)$ está definida) si $|t| < \varepsilon(s)$. Sea entonces $\varepsilon = \min\{\varepsilon(s) : s \in [0,\ell]\}$ (el mínimo existe al ser $[0,\ell]$ un compacto), y definimos

$$\begin{aligned} \phi : [0,\ell] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow S \\ (s,t) &\longrightarrow \phi(s,t) = \exp_{\alpha(s)}\big(tZ(s)\big), \end{aligned} \tag{7.2}$$

que es una aplicación continua en $[0,\ell]$ y diferenciable en cada intervalo $[s_{i-1}, s_i]$, siendo $\phi(s,0) = \exp_{\alpha(s)}(\mathbf{0}) = \alpha(s)$. Luego ϕ es una variación de la curva α. Además, para cada $s \in [0,\ell]$ fijo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,0) = d\big(\exp_{\alpha(s)}\big)_{tZ(s)}\big(Z(s)\big)\Big|_{t=0} = d\big(\exp_{\alpha(s)}\big)_{\mathbf{0}}\big(Z(s)\big) = Z(s),$$

lo que demuestra que Z es el campo variacional de la variación construida ϕ. Finalmente, si $Z(0) = \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha_t(0) = \phi(0,t) = \exp_{\alpha(0)}\big(tZ(0)\big) = \exp_{\alpha(0)}(\mathbf{0}) = \alpha(0), \quad \text{para todo } t,$$

y, análogamente, $\alpha_t(\ell) = \alpha(\ell)$ para todo t, si $Z(\ell) = \mathbf{0}$; luego ϕ sería propia. $\square$

Teorema 6.8 y Corolario 6.9 (nice)

Como es larguísimo de putos cojones, os lo planto aquí.

[1] El teorema 7.1.5 se refiere al resultado de α segmento de geodésica $\iff$ $L'(0) = 0$ en variación propia

7.1.2. La segunda fórmula de variación para la longitud de arco

Antes de calcular la segunda variación, veamos una nueva definición.

Definición 7.1.6. *Sea $\alpha : [0,\ell] \longrightarrow S$ una curva regular a trozos en una superficie regular S. Una variación de α se dice **normal** si su campo variacional Z es normal a α, esto es, $\langle Z(s), \alpha'(s) \rangle = 0$.*

Obsérvese que el teorema 7.1.5 que nos da la caracterización variacional de las geodésicas podría enunciarse también para variaciones normales de α; esto es, se puede probar que:

Corolario 7.1.7. *Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ una curva regular p.p.a. en una superficie regular S. Entonces α es un segmento de geodésica de S si, y sólo si, $L'(0) = 0$ para toda variación normal ϕ de la curva α.*

Para demostrarlo, basta observar que, en la prueba del recíproco, la variación ϕ construida es, de hecho, una variación normal: en efecto, como α es una curva p.p.a., $\langle \alpha'(s), (D\alpha'/ds)(s) \rangle = 0$, y por tanto, $\langle \alpha'(s), Z(s) \rangle = \langle \alpha'(s), f(s)(D\alpha'/ds)(s) \rangle = 0$.

Vamos a presentar ya el cálculo de la segunda derivada para este tipo de variaciones. Resulta conveniente precisar que no es restrictivo suponer que la variación es normal cuando además suponemos que es propia. El motivo es el siguiente: si los extremos están fijos y Z es el campo variacional de una variación cualquiera, entonces la parte tangente de Z no contribuye a cambiar la longitud de la curva α, sino que sólo lo hace su parte normal. Por tanto, basta considerar variaciones normales para estudiar el comportamiento del funcional longitud.[3]

Teorema 7.1.8 (Segunda fórmula de variación). *Sea ϕ una variación propia y normal de un segmento de geodésica $\gamma : [0,\ell] \longrightarrow S$ que está p.p.a., y sea Z su campo variacional. Entonces*

$$L''(0) = \int_0^\ell \left[\left| \frac{DZ}{ds}(s) \right|^2 - K\big(\gamma(s)\big) \left| Z(s) \right|^2 \right] ds \tag{7.3}$$

donde, como ya es habitual, K representa la curvatura de Gauss de la superficie.

Demostración. En lo que sigue, y para una mayor brevedad en la notación, vamos a suprimir el par (s,t) de las sucesivas expresiones cuando las funciones que aparezcan estén evaluadas en un punto genérico.

Como γ es geodésica, en particular es regular, por lo que la primera derivada de la función $L(t)$ se escribe (véase la demostración del teorema 7.1.3)

$$L'(t) = \int_0^\ell \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle^{-1/2} \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle ds.$$

[3] Esta sección es análoga a la caracterización variacional de las superficies minimales. En aquella tomábamos directamente variaciones normales a la superficie. La razón era la misma: una variación tangente a la superficie no modifica su área y no tiene consecuencias en el funcional área, que era el estudiado en dicha ocasión.

Entonces,

$$L''(t) = \int_0^{\ell} \left[-\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^{-3/2} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^{-1/2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \right] ds.$$

En $t = 0$, $(\partial \phi/\partial s)(s,0) = \gamma'(s)$, por lo que $\big|(\partial \phi/\partial s)(s,0)\big| = 1$. Además,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0} &= \left[\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right\rangle \right]_{t=0} \\ &= \frac{d}{ds} \big\langle Z(s), \gamma'(s) \big\rangle - \big\langle Z(s), \gamma''(s) \big\rangle = 0\end{aligned}$$

pues, por un lado, al ser ϕ una variación normal, $\big\langle Z(s), \gamma'(s) \big\rangle = 0$, y por otro, al ser γ geodésica, $\big\langle Z(s), \gamma''(s) \big\rangle = 0$. Así,

$$\begin{aligned}L''(0) &= \int_0^{\ell} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle ds = \int_0^{\ell} \left[\left\langle \frac{\partial^3 \phi}{\partial s \partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} \right\rangle \right]_{t=0} ds \\ &= \int_0^{\ell} \Big[(A)\big|_{t=0} + (B)\big|_{t=0} \Big] ds. \qquad (7.4)\end{aligned}$$

Calculemos el valor del integrando anterior, para lo cual, comenzamos estudiando el segundo sumando, (B). Desde luego, $(\partial \phi/\partial t)(s,t) \in T_{\phi(s,t)}S$ y, en consecuencia, $\big\langle (\partial \phi/\partial t)(s,t), N\big(\phi(s,t)\big) \big\rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}, N \circ \phi \right\rangle (N \circ \phi) \\ &= \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial (N \circ \phi)}{\partial s} \right\rangle (N \circ \phi),\end{aligned}$$

pues $\big\langle (\partial^2 \phi/\partial t \partial s), N \circ \phi \big\rangle + \langle \partial \phi/\partial t, \partial (N \circ \phi)/\partial s \rangle = 0$. Como además se tiene que $\partial (N \circ \phi)/\partial s = dN_{\phi(s,t)}(\partial \phi/\partial s)$, entonces

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \mathrm{A}_{\phi(s,t)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right) \right\rangle (N \circ \phi).$$

En definitiva,

$$(B) = \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} \right|^2 = \left| \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \right|^2 + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \mathrm{A}_{\phi(s,t)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right) \right\rangle^2,$$

y evaluando en $t = 0$,

$$(B)\big|_{t=0} = \left| \frac{DZ}{ds}(s) \right|^2 + \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big) \big\rangle^2.$$

Estudiamos a continuación el primer sumando, (A), de (7.4). Claramente,

$$(A) = \left\langle \frac{\partial^3 \phi}{\partial s \partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle = \frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right\rangle.$$

Veamos cuánto vale el producto escalar $\langle \partial^2\phi/\partial t^2, \partial^2\phi/\partial s^2\rangle$ en $t=0$. Un cálculo análogo al realizado en el estudio de (B) permite concluir que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \mathrm{A}_{\phi(s,t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right\rangle (N\circ\phi),$$

que, evaluado en $t=0$, da

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(s,0) = \frac{D}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s)\right) + \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\big\rangle N\big(\gamma(s)\big).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''(s) &= \frac{D\gamma'}{ds}(s) + \big\langle \gamma''(s), N\big(\gamma(s)\big)\big\rangle N\big(\gamma(s)\big)\\ &= -\big\langle \gamma'(s), (N\circ\gamma)'(s)\big\rangle N\big(\gamma(s)\big) = -\big\langle \gamma'(s), dN_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle N\big(\gamma(s)\big)\\ &= \big\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle N\big(\gamma(s)\big),\end{aligned}$$

vector que está en la dirección del normal a la superficie. Por lo tanto,

$$\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\right\rangle\Big|_{t=0} = \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\big\rangle \big\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle.$$

Sustituyendo los valores obtenidos para $(A)\big|_{t=0}$ y $(B)\big|_{t=0}$ en (7.4), llegamos a que

$$\begin{aligned}L''(0) &= \int_0^\ell \left[\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle\Big|_{t=0} - \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\big\rangle \big\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle\right.\\ &\qquad\left. + \left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 + \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle^2\right] ds\\ &= \int_0^\ell \left[\left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 - \Big(\big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\big\rangle \big\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle\right.\\ &\qquad\left. - \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\big\rangle^2\Big)\right] ds + \left[\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle (s,0)\right]_0^\ell\\ &= \int_0^\ell \left[\left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 - (C)\right] ds + \left[\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle (s,0)\right]_0^\ell.\end{aligned}$$

Obsérvese que, como la variación ϕ es propia, $\phi(\ell,t) = \gamma(\ell)$ para todo t, luego

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(\ell,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(\ell,t)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\gamma(\ell)\right) = \mathbf{0};$$

análogamente, $(\partial^2\phi/\partial t^2)(0,0) = \mathbf{0}$. Luego el último sumando en la expresión anterior se anula. Sólo resta calcular el valor del término que hemos denominado (C).

Para ello, tengamos en cuenta que, como $Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ y $\langle Z(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, entonces $Z(s)$ está en la dirección de $\mathrm{J}\gamma'(s)$ para todo s. Luego $Z = |Z|\,\mathrm{J}\gamma'$. Por otro lado, podemos calcular la matriz de $\mathrm{A}_{\gamma(s)}$ en función de la base $\{\gamma'(s), \mathrm{J}\gamma'(s)\}$: dado que

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big) &= \big\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big), \gamma'(s)\big\rangle \gamma'(s) + \big\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big), \mathrm{J}\gamma'(s)\big\rangle \mathrm{J}\gamma'(s),\\ \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\mathrm{J}\gamma'(s)\big) &= \big\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\mathrm{J}\gamma'(s)\big), \gamma'(s)\big\rangle \gamma'(s) + \big\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\mathrm{J}\gamma'(s)\big), \mathrm{J}\gamma'(s)\big\rangle \mathrm{J}\gamma'(s),\end{aligned}$$

se tiene que

$$\mathrm{A}_{\gamma(s)} \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \gamma'(s)\rangle & \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s)), \gamma'(s)\rangle \\ \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \mathrm{J}\gamma'(s)\rangle & \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s)), \mathrm{J}\gamma'(s)\rangle \end{pmatrix}.$$

Así, reescribiendo (C) como un determinante, concluimos finalmente que

$$\begin{aligned}
(C) &= \begin{vmatrix} \langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(Z(s))\rangle & \langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \\ \langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle & \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} |Z(s)|^2 \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s))\rangle & |Z(s)| \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \\ |Z(s)| \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle & \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \end{vmatrix} \\
&= |Z(s)|^2 \begin{vmatrix} \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s))\rangle & \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \\ \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s))\rangle & \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \end{vmatrix} \\
&= |Z(s)|^2 \det\left(\mathrm{A}_{\gamma(s)}\right) = |Z(s)|^2 K(\gamma(s)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Observación 7.1. Si la superficie es *llana* ($K \equiv 0$), entonces toda variación de una geodésica (con Z no paralelo) da como resultado $L''(0) > 0$, y la geodésica es un mínimo del funcional longitud.

7.2. COMPLETITUD. EL TEOREMA DE HOPF-RINOW

Hasta ahora hemos hablado de medidas en la superficie en lo que se refiere a longitudes de curvas, ángulos y áreas. No obstante, todavía está en el aire la siguiente pregunta: ¿es una superficie un espacio topológico metrizable? Esto es, ¿es posible definir una distancia en una superficie regular que sea «coherente» con la topología que tenemos como subespacio del espacio euclídeo? La respuesta a esta cuestión es afirmativa. La manera de construir dicha función distancia no es trivial, y consiste en definirla mediante la curva que «mejor» conecta dos puntos dados, donde por «mejor» entendemos la curva de menor longitud (usualmente se dice que esta curva «realiza» la distancia entre esos dos puntos; obsérvese también que dicha curva puede no existir, aunque esto no será problema en nuestra definición). Se demuestra entonces que esta función es una distancia y que, además, la topología que generan sus bolas métricas coincide con la topología de la superficie como subespacio euclídeo.

En capítulos previos hemos estudiado la relación entre el concepto de geodésica y sus propiedades como curva que minimiza la longitud. De esta forma, parece natural pensar que las curvas que «realizan la distancia» entre dos puntos, puesto que son claramente un mínimo del funcional longitud, deben estar relacionadas de alguna manera con el concepto de geodésica. Así es, y se puede demostrar que, si una curva es, lo que denominaremos en breve *minimizante*, entonces es una geodésica. Este resultado, junto con un lema técnico que presentamos posteriormente, constituyen la base para la prueba del teorema de Hopf-Rinow. En éste se relacionan propiedades

Teorema 6.10

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Así pues, supongamos que $D(S) > \pi/\sqrt{\delta}$. Entonces, existen puntos p,q en S tales que $d(p,q) =: \ell > \pi/\sqrt{\delta}$. Por otro lado, como la superficie es completa, podemos asegurar la existencia de un segmento de geodésica minimizante $\gamma : [0,\ell] \longrightarrow S$ de forma que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(\ell) = q$, cuya longitud $L_0^\ell(\gamma) = \ell > \pi/\sqrt{\delta}$. Consideremos el vector velocidad de la geodésica

en p, $\gamma'(0) \in T_pS$, y sea $\mathbf{v}_0 \in T_pS$ tal que $|\mathbf{v}_0| = 1$ y $\langle \mathbf{v}_0, \gamma'(0)\rangle = 0$. Tomamos entonces el transporte paralelo a lo largo de γ de $\mathbf{v}_0$, $P_0^s(\gamma)(\mathbf{v}_0) = V(s)$, el cual verifica que $\big|V(s)\big| = |\mathbf{v}_0|$ para todo s, siendo $V(0) = \mathbf{v}_0$. Además, como γ es una geodésica, su campo velocidad es paralelo, por lo que $\big\langle V(s), \gamma'(s)\big\rangle = \big\langle \mathbf{v}_0, \gamma'(0)\big\rangle = 0$. En consecuencia, $V(s)$ y $\gamma'(s)$ son ortogonales, para todo $s \in [0,\ell]$.

Consideremos ahora el campo de vectores tangente $Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ dado por

$$Z(s) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) V(s),$$

el cual verifica que

$$Z(0) = \mathbf{0}, \quad Z(\ell) = \operatorname{sen}\pi V(\ell) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \big\langle Z(s), \gamma'(s)\big\rangle = 0.$$

En consecuencia, Z determina una variación propia y normal ϕ de la geodésica γ, de la cual Z es su campo variacional. Se satisfacen entonces las condiciones del teorema 7.1.8, por lo que podemos utilizar la segunda fórmula de variación; como V es paralelo (y por tanto, unitario),

$$\frac{DZ}{ds}(s) = \frac{\pi}{\ell}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)V(s) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)\frac{DV}{ds}(s) = \frac{\pi}{\ell}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)V(s);$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^\ell \left[\left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 - K\big(\gamma(s)\big)\big|Z(s)\big|^2\right] ds \\ &= \int_0^\ell \left[\frac{\pi^2}{\ell^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - K\big(\gamma(s)\big)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)\right] ds. \end{aligned}$$

Ahora bien, como estamos suponiendo que $\ell > \pi/\sqrt{\delta}$, lo cual es equivalente a que $\delta > \pi^2/\ell^2$, tenemos la desigualdad estricta $K\big(\gamma(s)\big) \geq \delta > \pi^2/\ell^2$. Entonces,

$$L''(0) < \int_0^\ell \frac{\pi^2}{\ell^2}\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)\right] ds = \frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^\ell \cos\left(2\frac{\pi}{\ell}s\right) ds = 0,$$

una contradicción, ya que al ser γ un segmento de geodésica minimizante, su longitud va a ser menor (o igual) que la de cualquier otra curva que una p con q, y por tanto, cualquier variación de γ debe verificar que $L'(0) = 0$ y $L''(0) \geq 0$.

Hemos demostrado así que el diámetro $D(s) \leq \pi/\sqrt{\delta}$. Esto implica además que la superficie es d-acotada. Como, de forma obvia, S es cerrada en S y estamos suponiendo que es completa, el teorema de Hopf-Rinow nos asegura que S es compacta, lo que concluye la prueba. $\square$

Capitulo 7

Lema 7.2

Demostración. Sea $\overline{X}:\overline{U}\longrightarrow S$ otra parametrización de S con $R\subset\overline{X}(\overline{U})$. Consideramos el cambio de coordenadas $h=\overline{X}^{-1}\circ X$, el cual podemos expresar de la forma $h(u,v)=\big(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)\big)$ de suerte que

$$X(u,v)=\overline{X}\big(h(u,v)\big)=\overline{X}\big(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)\big);$$

entonces,

$$X_u=\overline{X}_{\overline{u}}\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}+\overline{X}_{\overline{v}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial u},\qquad \text{y}\qquad X_v=\overline{X}_{\overline{u}}\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}+\overline{X}_{\overline{v}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}.$$

Multiplicando estos vectores (vectorialmente) y utilizando la antisimetría del producto vectorial, se tiene que

$$\begin{aligned}X_u\wedge X_v&=\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\big(\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big)+\frac{\partial\overline{v}}{\partial u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\big(\overline{X}_{\overline{v}}\wedge\overline{X}_{\overline{u}}\big)=\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}-\frac{\partial\overline{v}}{\partial u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\right)\big(\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big)\\&=\det(Jh)\big(\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big).\end{aligned}$$

Luego

$$\big|\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big|=\big|\det(Jh)\big|^{-1}|X_u\wedge X_v|=\big|\det(Jh^{-1})\big|\,|X_u\wedge X_v|.$$

Por tanto, al introducir esta expresión bajo el signo de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_{\overline{X}^{-1}(R)}\big|\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\big|\,d\overline{u}d\overline{v}&=\iint_{\overline{X}^{-1}(R)}|X_u\wedge X_v|\,\big|\det(Jh^{-1})\big|\,d\overline{u}d\overline{v}\\&=\iint_{X^{-1}(R)}|X_u\wedge X_v|\,dudv,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el teorema del cambio de variable. Esto concluye la demostración. $\square$

Corolario 7.3

Según la bibliografía, es una consecuencia directa de la implicación anterior.

Lema 7.4

En la bibliografía es una definición, aquí pongo el razonamiento inmediatamente posterior que razona por qué está bien definida. El apunte al pie que hace al final es que, cuando un número no depende de la parametrización elegida, generalmente tiene un significado geométrico.

Vamos a ver que ésta sí es una buena definición. Supongamos que $(\overline{U},\overline{X})$ es otra parametrización de S, con $\mathrm{sop}(f) \subset \overline{X}(\overline{U})$. Luego $\mathrm{sop}(f) \subset X(U) \cap \overline{X}(\overline{U}) =: V$. Sea también $\phi = \overline{X}^{-1} \circ X : X^{-1}(V) \subset U \longrightarrow \overline{X}^{-1}(V) \subset \overline{U}$ el cambio de coordenadas, $\phi(u,v) = (\overline{u},\overline{v})$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\overline{X}^{-1}(V)} (f \circ \overline{X})(\overline{u},\overline{v}) \sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}(\overline{u},\overline{v})\, d\overline{u}d\overline{v} \\
&\quad = \iint_{\phi^{-1}(\overline{X}^{-1}(V))} (f \circ \overline{X})\big(\phi(u,v)\big) \sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big) \big|\det(J\phi)(u,v)\big|\, dudv \\
&\quad = \iint_{X^{-1}(V)} (f \circ X)(u,v) \sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big) \big|\det(J\phi)(u,v)\big|\, dudv.
\end{aligned}$$

Tenemos por tanto que demostrar que

$$\sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big| = \sqrt{EG-F^2}(u,v). \tag{4.2}$$

Veámoslo. Sea $q = (u,v) \in X^{-1}(V) \subset U$. Entonces $p = X(q) = \overline{X}\big(\phi(q)\big)$. Disponemos de dos bases de T_pS, $\{X_u(q), X_v(q)\}$ y $\{\overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big), \overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\}$, y podemos expresar los elementos de una de ellas como combinación lineal de los de la otra:

$$\begin{aligned}
X_u(q) &= \big(\overline{X} \circ \phi\big)_u(q) = \frac{\partial}{\partial u}\overline{X}\big(\overline{u}(u,v),\overline{v}(u,v)\big) = \overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial \overline{v}}{\partial u}, \\
X_v(q) &= \overline{X}_{\overline{u}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{X}_{\overline{v}}\big(\phi(q)\big)\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{EG-F^2}(q) = |X_u \wedge X_v|(q) &= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \big|\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}\big|\big(\phi(q)\big) \\
&= \sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}\big(\phi(u,v)\big)\big|\det(J\phi)(u,v)\big|;
\end{aligned}$$

luego es una buena definición, ya que no depende de la parametrización escogida.[1]

Corolario 7.5

Es fácil deducirlo del enunciado anterior, según la bibliografía. Aplicando el lema de Tomás Tadre, el enunciado es trivial. Si se desconoce el lema, pedir explicaciones al autor en twitter (@chitobelm).

Teorema 7.6

*Hay una nota al lado en los apuntes de Luis que dice que se corresponde con el teorema 4.2.5 de la bibliografía. Esto **no es cierto**, se corresponde con el teorema anterior, el **4.2.4***

Demostración. Supongamos en primer lugar que existe una parametrización $(U,\overline{X})$ de la superficie S_2 tal que $\operatorname{sop}(f) \subset \overline{X}(U)$. Como ϕ es un difeomorfismo, podemos considerar la composición $X = \phi^{-1} \circ \overline{X}$. Ya sabemos que, entonces, (U,X) es una parametrización de S_1 y vamos a demostrar que, en tal caso, $\operatorname{sop}(f\circ\phi) \subset X(U)$. En efecto, si $p \in \operatorname{sop}(f\circ\phi)$, por definición $f\big(\phi(p)\big) \neq 0$, y en consecuencia se tiene que $\phi(p) \in \operatorname{sop}(f) \subset \overline{X}(U) = \phi\big(X(U)\big)$; luego $p \in X(U)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{S_2} f\,dA_2 &= \iint_U (f\circ\overline{X})\sqrt{\overline{EG}-\overline{F}^2}(u,v)\,du\,dv\\ &= \iint_U (f\circ\phi\circ X)\big|\det\big(d\phi_{X(\cdot)}\big)\big|\sqrt{EG-F^2}(u,v)\,du\,dv\\ &= \int_{S_1} (f\circ\phi)\,\big|\det(d\phi)\big|\,dA_1,\end{aligned}$$

ya que (véase el ejercicio 3.27)

$$\big|\overline{X}_u\wedge\overline{X}_v\big| = \big|\det\big(d\phi_{X(\cdot)}\big)\big|\,|X_u\wedge X_v|.$$

Supongamos ahora que no existe ninguna parametrización $(U,\overline{X})$ de S_2 tal que $\operatorname{sop}(f) \subset \overline{X}(U)$. Sean entonces $(U_i,\overline{X}_i)$, $i=1,\dots,n$, parametrizaciones de S_2 de forma que $\operatorname{sop}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{V}_i$, donde $\overline{V}_i = \overline{X}_i(U_i)$. Claramente, $\big\{S_2\setminus\operatorname{sop}(f), \overline{V}_1,\dots,\overline{V}_n\big\}$ es un cubrimiento finito por abiertos de S_2. Tomamos entonces una partición (diferenciable) de la unidad $\{g,g_1,\dots,g_n\}$ subordinada a dicho cubrimiento, esto es, tal que

$$\operatorname{sop}(g) \subset S_2\setminus\operatorname{sop}(f) \quad \text{y} \quad \operatorname{sop}(g_i) \subset \overline{V}_i$$

para todo $i=1,\dots,n$. Sean finalmente $f_i = fg_i$, $i=1,\dots,n$, para las cuales se tiene que $f=\sum_{i=1}^n f_i$ y $\operatorname{sop}(f_i) \subset \overline{V}_i$, $i=1,\dots,n$. Aplicando el caso anterior a cada una de las funciones f_i obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{S_2} f\,dA_2 &= \sum_{i=1}^n \int_{S_2} f_i\,dA_2 = \sum_{i=1}^n \int_{S_1} (f_i\circ\phi)\,\big|\det(d\phi)\big|\,dA_1\\ &= \int_{S_1} \sum_{i=1}^n (f_i\circ\phi)\,\big|\det(d\phi)\big|\,dA_1 = \int_{S_1} (f\circ\phi)\,\big|\det(d\phi)\big|\,dA_1\end{aligned}$$

pues, claramente, para todo $p\in S_1$,

$$\left(\sum_{i=1}^n (f_i\circ\phi)\right)(p) = \sum_{i=1}^n f_i\big(\phi(p)\big) = f\big(\phi(p)\big) = (f\circ\phi)(p),$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Capítulo 8

Proposición 8.2

Tanto esta proposición como el corolario posterior salen como un ejercicio en la bibliografía

Solución al ejercicio 4.6. Si S es minimal, entonces $H(p) = 0$, y por tanto, las curvaturas principales verifican $k_2(p) = -k_1(p)$. Luego $K(p) = k_1(p)k_2(p) \leq 0$.

Si $K(p) = 0$ entonces p es parabólico o plano. En el primer caso, tendríamos $k_1(p) = 0$ y $k_2(p) \neq 0$ (por ejemplo) y, en consecuencia $H(p) = k_2(p)/2 \neq 0$: S no sería minimal. En definitiva, si $K(p) = 0$ entonces el punto p es plano. Una superficie minimal sólo tiene puntos hiperbólicos o planos.

Corolario 8.3

Solución al ejercicio 4.5. Como S es compacta, existe al menos un punto elíptico p (véase el ejercicio 3.6). Luego $K(p) = k_1(p)k_2(p) > 0$, de donde se deduce que $H(p) = \big(k_1(p) + k_2(p)\big)/2 \neq 0$ (ambas curvaturas principales tienen igual signo).

Los teoremas 8.7 y 8.8 vienen demostrados en las siguientes páginas extraídas de un enunciado (Teorema 4.4.3) del libro, y son los últimos de la asignatura.

Es sencillo ver que $\widetilde{g}$ es diferenciable. Sea ahora $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(x) = \frac{\widetilde{g}\big(\varepsilon^2 - |x|^2\big)}{\widetilde{g}\big(\varepsilon^2 - |x|^2\big) + \widetilde{g}\big(|x|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\big)}.$$

Obsérvese, por un lado, que el denominador de $g(x)$ nunca se anula, pues para ello deberían satisfacerse a la vez las desigualdades $\varepsilon^2 - |x|^2 \leq 0$ y $|x|^2 - \varepsilon^2/4 \leq 0$, lo que implicaría que $\varepsilon^2 \leq |x|^2 \leq \varepsilon^2/4$, un absurdo. Por lo tanto, g es diferenciable.

Además, $g(x) = 0$ si, y sólo si, $\varepsilon^2 - |x|^2 \leq 0$, es decir, cuando $x \notin D(\mathbf{0}, \varepsilon)$. En consecuencia, si $x \in D(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $g(x)$ es positivo. Esto demuestra que $\mathrm{sop}(g) \subset D(\mathbf{0}, \varepsilon)$, verificándose además que $0 \leq g \leq 1$. Por otro lado, si $0 \leq |x| \leq \varepsilon/2$, es decir, si $x \in D(\mathbf{0}, \varepsilon/2)$, entonces $g(x) \equiv 1$.

Finalmente, dado que la función g anterior cumple todas las condiciones de una función meseta, pero referidas al disco $D(\mathbf{0}, \varepsilon)$, basta tomar como la función meseta buscada una simple traslación de g: definimos

$$\widetilde{h} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \widetilde{h}(x) = g(x - q).$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 4.4.3 (Caracterización de las superficies minimales como puntos críticos del funcional área). *Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación tal que $X(U)$ es una superficie regular. Sea D un disco abierto en $\mathbb{R}^2$ cuya clausura $\mathrm{cl}\, D \subset U$. Entonces, $X(D)$ es superficie minimal si, y sólo si, $A'(0) = 0$ para cualquier variación normal ϕ de $X(D)$, donde $A(t)$ representa el área de la superficie $X^t(D)$.*

Demostración. El área $A(t)$ de la superficie $X^t(D)$ viene dada por

$$A(t) = \int_{X^t(D)} dA = \iint_D \sqrt{E_t G_t - F_t^2}(u,v)\, du dv.$$

Tenemos por tanto que calcular E_t, F_t y G_t para la parametrización X^t,

$$X^t(u,v) = \phi(u,v,t) = X(u,v) + t h(u,v) N\big(X(u,v)\big).$$

Dado que

$$X_u^t = X_u + t h_u N + t h N_u \quad \text{y} \quad X_v^t = X_v + t h_v N + t h N_v,$$

es sencillo comprobar que

$$\begin{cases} E_t = E - 2the + t^2\big(h_u^2 + h^2 \langle N_u, N_u\rangle\big) = E - 2the + t^2 R_1, \\ F_t = F - 2thf + t^2\big(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v\rangle\big) = F - 2thf + t^2 R_2, \\ G_t = G - 2thg + t^2\big(h_v^2 + h^2 \langle N_v, N_v\rangle\big) = G - 2thg + t^2 R_3, \end{cases}$$

para ciertas funciones R_1, R_2, R_3. Agrupando sumandos convenientemente se tiene

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= EG - F^2 - 2ht(gE + eG - 2fF) + t^2 R_4 \\ &= (EG - F^2)\left(1 - 2ht\frac{gE + eG - 2fF}{EG - F^2}\right) + t^2 R_4 = (EG - F^2)(1 - 4htH + t^2 R), \end{aligned}$$

con $R = R_4/(EG - F^2)$. En definitiva,

$$E_tG_t - F_t^2 = (EG - F^2)\left(1 - 4htH + \overline{R}\right),$$

donde $\overline{R} = t^2R$ satisface que $\lim_{t\to 0}(\overline{R}/t) = 0$. Por tanto, sustituyendo esta expresión en la fórmula del área,

$$A(t) = \iint_D \sqrt{E_tG_t - F_t{}^2}\, dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\sqrt{1 - 4htH + \overline{R}}\, dudv,$$

y derivando a continuación, obtenemos que

$$A'(t) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\frac{-4hH + \widetilde{R}}{2\sqrt{1 - 4htH + \overline{R}}}\, dudv,$$

donde ahora, $\lim_{t\to 0}\widetilde{R} = 0$. En particular, si $t = 0$,

$$A'(0) = -2\iint_D hH\sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Una vez obtenida la fórmula anterior para $A'(0)$, la implicación directa del teorema es evidente: si $X(D)$ es una superficie minimal, entonces $H \equiv 0$, por lo que $A'(0) = 0$. Veamos por tanto el recíproco.

Supongamos que $A'(0) = 0$, para cualquier variación normal de $X(D)$, pero que existe un punto $p \in X(D)$ para el cual $H(p) \neq 0$. Sea $p = X(q)$. Entonces, existe un cierto disco abierto $D(q, r_1) \subset D$ de forma que $(H \circ X)|_{D(q,r_1)} \not\equiv 0$, manteniendo además el mismo signo que $H(p)$ en todos los puntos. Podemos suponer, sin pérdida alguna de generalidad y cambiando la orientación si es necesario, que $H(p) > 0$.

Sea ahora $\widetilde{h} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función meseta para el disco $D(q, r_1)$ (que sabemos siempre existe, véase el lema 4.4.2), es decir, verificando que

- $\widetilde{h}$ es diferenciable,
- $\mathrm{sop}\left(\widetilde{h}\right) \subset D(q, r_1)$,
- $0 \leq \widetilde{h} \leq 1$,
- existe $r_2 < r_1$ tal que $\widetilde{h}|_{D(q,r_2)} \equiv 1$.

Como $A'(0) = 0$ para cualquier variación normal de $X(D)$, en particular se anulará para la variación determinada por la función $\widetilde{h}$ previamente definida; además, como $\mathrm{sop}\left(\widetilde{h}\right) \subset D(q, r_1)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} 0 = A'(0) &= -2\iint_D \widetilde{h}H\sqrt{EG - F^2}\, dudv = -2\iint_{D(q,r_1)} \widetilde{h}H\sqrt{EG - F^2}\, dudv \\ &= -2\iint_{D(q,r_1)\setminus D(q,r_2)} \widetilde{h}H\sqrt{EG - F^2}\, dudv - 2\iint_{D(q,r_2)} \widetilde{h}H\sqrt{EG - F^2}\, dudv. \end{aligned}$$

Obsérvese que, en la suma anterior, tanto H como $\sqrt{EG - F^2}$ son estrictamente positivos (en los dominios respectivos para cada una de las dos integrales); pero, mientras que en la primera integral $\widetilde{h} \geq 0$, en la segunda $\widetilde{h} \equiv 1$, lo que implica que esta última nunca se anula. Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción: $0 = A'(0) < 0$ estrictamente, lo que concluye la demostración. $\square$

Me gustaría cerrar estos apuntes con un mensaje de ánimo a todos los estudiantes que estén por enfrentarse a la convocatoria, recordad beber agua y descansar un poquito si estáis saturados, os quiero mucho <3<3