Ejercicios de Geometría de Curvas y Superficies

Paco Mora Caselles

27 de octubre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 2

Ejercicio 2.

$$f(p) = d(p, p_0) = |p - p_0|$$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ F(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

F es diferenciable salvo si $p = p_0$*, entonces* $f = F|_S$ *es* C^∞ *en todo* $p \neq p_0$*.*

Sea $p \in S, \ p \neq p_0$

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{f(\alpha(t))}_{|\alpha(t)-p| = <\alpha(t)-p_0, \alpha(t)-p_0>^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} < \alpha(t)-p_0, \alpha(t)-p_0 >^{-\frac{1}{2}} 2 < \alpha'(t), \alpha(t)-p_0 > |_{t=0}$$

$$= \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|}$$

Ejercicio 3. ***i)***

Es un difeomorfismo ya que es diferenciable, biyectiva y la inversa es diferenciable (es ella misma).

$$dA_p(v) = -v \qquad \textit{(lo vimos en un ejemplo)}$$

Como comentario, se puede ver que las diferenciales de las funciones lineales son ellas mismas.

ii)

$$C = \{x^2 + y^2 = 1\} \longrightarrow_F H = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \qquad F(x, y, z) = (\sqrt{1+z^2}x, \sqrt{1+z^2}y, z)$$

$$\widetilde{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ \mathcal{C}^\infty \implies F|_C:C\to\mathbb{R}^3\ \mathcal{C}^\infty \implies F\ \mathcal{C}^\infty$$

donde $\widetilde{F}|_C = i\circ F$*, con* i *la inclusión canónica.*

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in H \iff \overline{x}^2+\overline{y}^2-\overline{z}^2=(1+z^2)x^2+(1+z^2)y^2-z^2=(1+z^2)\underbrace{(x^2+y^2)}_{1}-z^2=1$$

$$F^{-1}:H\to C\ \ F^{-1}(u,v,w)=(\frac{u}{\sqrt{1+w^2}},\frac{v}{\sqrt{1+w^2}},w)$$

Con lo que la inversa es también diferenciable.

iii)

Vemos primero la expresión de F*:*

$$p=(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}\to F(p)\in H$$

La recta con la que definimos F *es* $r(t)=(0,0,z)+t(z,y,0)=(tx,ty,z)\in H$ *para* $t>0$*.*

$$1=(tx)^2+(ty)^2-z^2=t^2(x^2+y^2)-z^2 \qquad t^2=\frac{1+z^2}{x^2+y^2}=\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

Entonces, $F(x,y,z)=\left(x\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}},y\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}},z\right)$

Tomamos un abierto de $W\subset\mathbb{R}^3$ *abierto donde exista* $\widetilde{F}$*, entonces:*

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ -1<z<1\}\equiv\mathbb{R}^2_x(-1,1)$$

$$\widetilde{F}(x,y,z)=\left(x\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}},y\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}},z\right)\ \ (x,y,z)\in W$$

$$\widetilde{F}\ \mathcal{C}^\infty\ y\ \widetilde{F}|_{\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}}=F\implies F\ es\ \mathcal{C}^\infty$$

Tomamos $H_1=H\cap W=F(\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\})$*,* $H_1\subset H$ *es abierto* $\implies$ H_1 *es una superficie.*

$$G:\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}\to H_1,\ \ G(x,y,z)=F(x,y,z)$$

$$G^{-1}(x,y,z)=\left(x\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}},y\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}},z\right)\implies\ G\ es\ un\ difeomorfismo$$

Ejercicio 4. *El argumento para ver que* F *es diferenciable seguiremos el mismo procedimiento de* *los dos ejercicios anteriores, obtendremos que es diferenciable en todo punto menos en p_0.*

$$\widetilde{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\} \to \mathbb{R}^3 \ \widetilde{F}(p) = \widetilde{F}(x, y, z) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|} \ \widetilde{F}|_S \ es \ \mathcal{C}^\infty$$

$$dFp(v) = (F \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} |\alpha(t) - p_0|^{-1}(\alpha(t) - p_0) =$$

$$= -\frac{1}{2} < \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 >^{-\frac{3}{2}} 2 < \alpha'(t), \alpha(t) - p_0 > (\alpha(t) - p_0) + \frac{1}{|\alpha(t) - p_0|}\alpha'(t)|_{t=0} =$$

$$\frac{v}{|p - p_0|} - \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|^3}(p - p_0)$$

Veamos la caracterización del núcleo:

$$\frac{v}{|p - p_0|} - \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|^3}(p - p_0) = 0 \iff v = \lambda(p - p_0)$$

$$\Longleftarrow \quad Directo$$

$$\Longrightarrow$$

$$v = \frac{< c, p - p_0 >}{|p - p_0|^2}(p - p_0)$$

Con lo que $Ker(dFp) = < p - p_0 >$