Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

Paco Mora Caselles

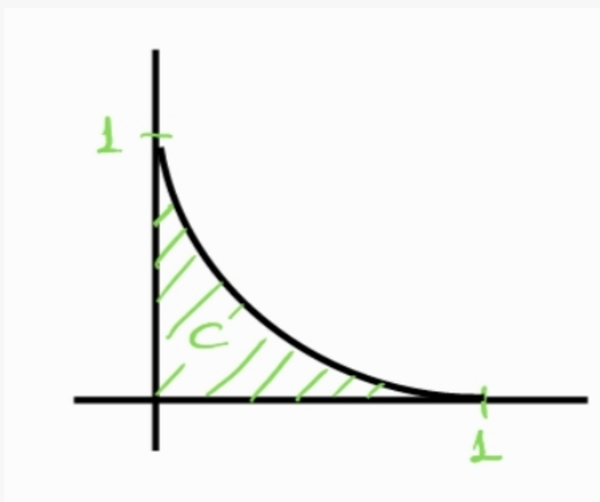
11 de febrero de 2022

CAPÍTULO 1

Relación 1

Ejercicio 1.

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \ y < (1-x)^2\}$$



Dejamos por ahora f en función de k, más tarde calculamos su valor:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in C \\ 0 & (x,y) \notin C \end{cases}$$

Para $x \in (0,1)$:

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy = \int_0^{(1-x)^2} kdy = k(1-x)^2$$

Entonces tenemos:

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a $f_2(y)$, cuando $y \in (0,1)$:

$$f_2(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

Calculamos ahora $E(X^n(1-X)^m)$ usamos $f_1(x)$:

$$E(X^n(1-X)^m) = \int x^n(1-x)^m f_1(x)dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k\int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} =$$

$$= kB(n+1, m+3) = k\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k\frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!}$$

Los momentos de orden n respecto del origen, la esperanza y la varianza de X las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos $m = 0$ y para la varianza podemos usar que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \qquad E(X) = \frac{1}{4} \qquad E(X^2) = \frac{1}{10} \qquad Var(X) = \frac{3}{80}$$

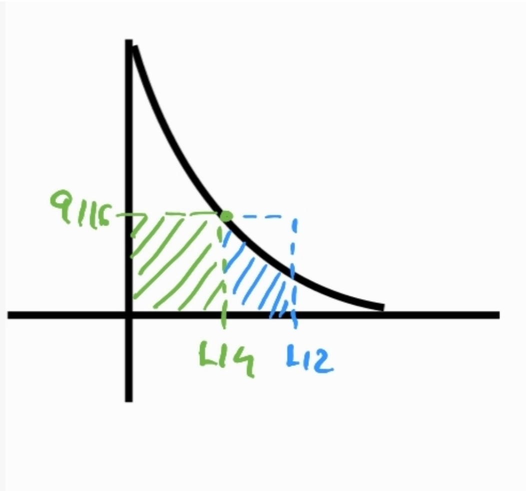
Calculamos $f_{2|1}(y|x)$, si $x \in (0,1)$:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{3}{3(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & y \in (0,(1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0,(1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora $f_{2|1}(y|x = 1/2)$:

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \dfrac{1}{4}) \\ \\ 0 & y \notin (0, \dfrac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular $F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por k:



$$F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right) = 3\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} = \frac{3^3}{2^6}$$

Para $F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right) = F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right) + 3\cdot$ *Area* T*, siendo* T *la intersección con* C*. Sabemos entonces que:*

$$\int_{1/4}^{1/2}(1-x)^2dx = \int_{1/4}^{1/2}(x^2-2x+1)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{19}{2^6 3}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right) = \frac{3^3}{2^6} + 3\frac{19}{2^6 3} = \frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de Y *respecto de* X*:*

$$y - \mu_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)$$

$$\mu_y = E(Y) = \int_0^1 y3(1-y^{1/2})dy = 3\int_0^1(y-y^{3/2}) = \frac{3}{10}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^{(1-x)^2} 3xydydx = 3\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(1-x)^2} d = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^4dx =$$

$$= B(2,5) = \frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{3}{2}\frac{1!4!}{6!} = \frac{1}{20}$$

Recordemos que $\mu_X = E(X) = \frac{1}{4}$*, entonces:*

$$\sigma_{XY}Cov(X,Y) = \frac{1}{2^2\cdot 5} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2\cdot 5} = \frac{2-3}{2^3\cdot 5} = -\frac{1}{2^3\cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que $\sigma_X = \dfrac{3}{80}$*):*

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora $E(Y|X=x) = m_{2|1}(x)$*:*

$$E(Y|X=x) = \int y f_{2|1}(y|x)dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Ejercicio 2.

$$E(X) = 2, \ Var(X) = 3 \ X \ \textit{simétrica}$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 2 + 3(X-2)2^2 + 2^3) =$$
$$= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6Var(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26$$

Ejercicio 3. *El número de de posibilidades totales es claramente* $\binom{N}{n}$*, la distribución de probabilidad es entonces:*

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos $n \leq N, \ r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora $\alpha_{(3)}$*:*

$$E(X_1^{(3)}) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$r_1(r_1-1)(r_1-2)\binom{N_1}{r_1} = r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2)\cdots 2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\binom{N_1-3}{r_1-3}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$P(X_1 = r_1) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$N_1(N_1-1)(N_1-2)\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= N_1(N_1-1)(N_2-2)\frac{(N-3)^{(n-3)}n!}{(n-3)!N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)}n^{(3)}}{N^{(3)}}$$

Ejercicio 4.

Aparado b)

Para calcular las vvaa marginales solo tenemos que sumar los elementos de la misma fila o columna. Por ejemplo:

$$P(X=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Obtenemos así:

$$P(X=0) = \frac{11}{18} \quad P(X=1) = \frac{5}{18} \quad P(X=2) = \frac{2}{18}$$

$$P(Y=0) = \frac{11}{18} \quad P(Y=1) = \frac{5}{18} \quad P(Y=2) = \frac{2}{18}$$

También podemos obtener $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, $Var(X), Var(Y) = \frac{17}{36}$ *y* $Cov(X,Y) = -\frac{5}{36}$.

Entonces la recta de regresión de X sobre Y es:

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-\frac{5}{36}}{\frac{17}{36}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}$$

Como las esperanzas y las varianzas son iguales, obtenemos que el cálculo de la recta de regresión de Y sobre X es igual:

$$x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}$$

Calcularemos ahora $Var(Y - X^*)$:

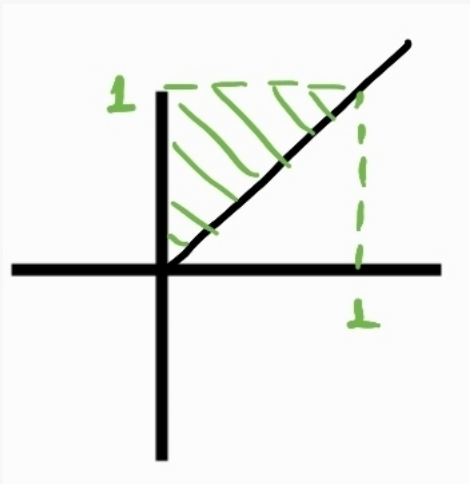
$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1-\rho^2) = \frac{17}{36}\left(1 - \frac{25/36^2}{17^2/36}\right) = \frac{17}{36}\left(\frac{17^2 - 25}{17^2} = \frac{11}{3 \cdot 17}\right)$$

Para la varianza residual de X sobre Y, vemos que es igual porque coinciden sus esperanzas y sus varianzas.

CAPÍTULO 2

Relación 2

Ejercicio 1. *Vemos en primer lugar cómo es el recinto del ejercicio:*



$$\alpha_{n.m} = E(X^n Y^m) = \int x^n y^m \cdot \frac{1}{y} = \int_0^1 \int_0^y =$$

$$= x^n x^{m-1} dx dy = \int_0^1 y^{m-1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_0^y dy = \frac{1}{n+1} \int_0^1 y^{m-1} y^{n+1} dy = \frac{1}{n+1} \frac{1}{m+n+1}$$

Los resultados son

$$E(Y) = \frac{1}{2} \qquad E(Y^3) = \frac{1}{3} \qquad E(XY) = \frac{1}{6} \qquad E(X) = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 3. *Sabemos que, para X, Y, Z tenemos:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Entonces $E(X) = E(Y) = E(Z)$ es:

$$\int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \int_0^1 x^2 = \left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces:

$$E(U) = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Como las variables son independientes:

$$Var(U) = Var(aX) + Var(bY) + Var(cZ) = (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{12}$$

Nos piden también los momentos de orden 3 y 4 respecto de la media. Utilizamos el subapartado de ***Momentos de sumas****. Siguiendo un procedimiento como el de este subapartado llegamos a que solo necesitamos expresiones como $\mu_3(aX) = E\left(aX - \frac{a}{2}\right) = 0$ ya que estas vvaa son simétricas respecto de su media. En definitiva:*

$$E((U - E(U))^3) = \mu_3(aX) + \mu_3(bY) + \mu_3(cZ) = a\mu_3(X) + b\mu_3(Y) + c\mu_3(Z) = 0$$

$$\mu_4(U) = \mu_4(aX) + \mu_4(bY) + \mu_4(cZ) + 6(\mu_2(aX)\mu_2(bY) + \mu_2(aX)\mu_2(cZ) + \mu_2(bY)\mu_2(cZ))$$

Vamos a hacer el cálculo para un n general de:

$$\mu_n(X) = E\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx = \left.\frac{(x-1/2)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1/2)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}(1 + (-1)^n)$$

Luego:

$$\mu_4(X) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$\mu_2(X) = \frac{1}{12} \qquad \textit{(como ya habíamos calculado antes)}$$

Volviendo ahora a $\mu_4(U)$*:*

$$\mu_4(U) = (a^4 + b^4 + c^4)\frac{1}{5 \cdot 2^4} + 6\Big(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\Big)\frac{1}{3^2 2^4}$$

Calculamos ahora la función generatriz de momentos (recordemos que la función generatriz no está definida porque X, Y, Z *toman valores no enteros). Usaremos la independencia de las vvaa:*

$$E(e^{tU}) = E(e^{atX})E(e^{btY})E(e^{ctZ})$$

Tendremos que calcular la función generatriz de momentos de cada vvaa (son todas iguales):

$$E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx}dx = \frac{e^{tx}}{t}\Bigg|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

En el caso de aX *(análogamente para* bY, cZ*):*

$$g_{aX}(t) = E(e^{taX}) = \frac{e^{at} - 1}{at}$$

Entonces volviendo a la vvaa U*:*

$$g_U(t) = \frac{e^{at} - 1}{at} \cdot \frac{e^{bt} - 1}{bt} \cdot \frac{e^{ct} - 1}{ct}$$

La función característica de U *será entonces:*

$$\varphi_U(t) = \frac{(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{i \cdot a \cdot b \cdot ct^3} = \frac{-i(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{\cdot a \cdot b \cdot ct^3}$$