

Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

27 de octubre de 2021

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1, 2, 3\}$, los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ (recordemos que $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$).

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ entonces:

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{9}{24} \cdot 0 = 0 & x \in [0, 1) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = \frac{2}{3} & x \in [2, 3) \\ \frac{9}{24} \cdot \frac{24}{9} = 1 & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Pasando a la parte continua, } P_c(B) &= \frac{1}{1 - \alpha}P(B \cap D^c) \text{ y } F_c(x) = P_c((-\infty, x]) \\ &= \frac{1}{1 - \alpha}P((-\infty, x] \cap D^c) \end{aligned}$$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{24-9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Hoja 4

Ejercicio 1.

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

a) $Y = aX - b$ con $a \neq 0$

La función usada es la $g(x) = ax - b$, esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de a . Si $h(y) = g^{-1}(x) = \frac{y+b}{a}$, recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \quad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos $h'(y) = \frac{1}{a}$ y $g((0,1))$:

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \quad f_Y(y) = 2 \left(1 - \frac{y+b}{a}\right) \frac{1}{a} = 2 \frac{a-y-b}{a^2} I_{(-b, a-b)}$$

$$a < 0 \quad f_Y(y) = 2 \left(1 - \frac{y+b}{a}\right) - \frac{1}{a} = 2 \frac{y+b-a}{a^2} I_{(a-b, -b)}$$

b) $Z = 3X^2 - X$

Usaremos la función $g(x) = 3x^2 - x$, esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos E_1, E_2 para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en $x = \frac{1}{6}$, con lo que tenemos los

conjuntos $E_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, $E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$, tenemos que:

$$E_1 \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 0\right) = F_1 \quad E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 2\right) = F_2$$

Para cada intervalo, definimos g_i :

$$g_1 = g|_{(0, \frac{1}{6})} : \left(0, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \quad g_2 = g|_{(\frac{1}{6}, 1)} : \left(\frac{1}{6}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{12}, 2\right)$$

Entonces tenemos que:

$$f_Z(z) = \sum_r f_X(h_r(z)) |h'_r(z)|$$

Siendo $h_r(z)$ la inversa de $g_r(z)$, las calculamos:

$$z = 3x^2 - x \iff 3x^2 - x - z = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12z}}{6} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6} = h_2(z) & (\text{creciente}) \\ \frac{1 - \sqrt{1 + 12z}}{6} = h_1(z) & (\text{decreciente}) \end{cases}$$

$$h'_1(z) = -\frac{12}{26\sqrt{1 + 12z}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 12z}}$$

$$h'_2(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} z \in \left(-\frac{1}{12}, 0\right) &\implies f_Z(z) = 2 \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} + 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} = \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} \left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2 \cdot 10}{6\sqrt{1 + 12z}} = \frac{10}{3\sqrt{1 + 12z}} \\ z \in (0, 2) &\implies f_Z(z) = 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 12z}}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 12z}} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

$$f(x, y) = \frac{2}{(2 - x - y)^3} I_E(x, y) \quad \text{con } E \text{ el cuadrilátero de vértices } (0, 0), (1, 0), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), (0, 1)$$

Y los cambios de variable:

$$\begin{cases} U = \frac{X}{2 - X - Y} \\ V = \frac{Y}{2 - X - Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{2 - x - y} \\ v(x, y) = \frac{y}{2 - x - y} \end{cases}$$

Esta transformación es biyectiva.

Como comentario, recordar que los cambios de variable de la forma:

$$u = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \quad v = \frac{a'x + b'y + c'}{dx + ey + f}$$

Además de ser biyectivos transforman rectas en rectas.

Entonces tenemos que:

$$f_{U,V}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Vemos en qué se transforman los vértices del cuadrilátero con estas transformaciones:

1. $(0, 0) \rightarrow (0, 0)$
2. $(1, 0) \rightarrow (1, 0)$
3. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \rightarrow (1, 1)$
4. $(0, 1) \rightarrow (0, 1)$

Calculamos ahora las inversas:

$$u(2 - x - y) = x \iff -2u + ux + uy + x = 0 \iff (1 + u)x + uy - 2u = 0$$

$$v(2 - x - y) = y \iff -2v + vx + vy + y = 0 \iff (1 + v)y + vx - 2v = 0$$

Espectacular sistema de ecuaciones lineales del que sacamos que $x = \frac{2u}{1 + u + v}$ $y = \frac{2v}{1 + u + v}$

Ahora,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1 + u + v) - 2u}{(1 + u + v)^2} = \frac{2(1 + v)}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2u}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2v}{(1 + u + v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1 + u)}{(1 + u + v)^2}$$

El Jacobiano entonces es $\frac{4}{(1+u+v)^3}$, con lo que la función de densidad $f_{(U,V)}$ es:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2 - \frac{2u}{1+u+v}\right)^3} \frac{4}{(1+u+v)^3} = 1 \quad \text{Si } (u,v) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = 0 \quad \text{Si } (u,v) \notin (0,1) \times (0,1)$$

Recordemos que $E\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 2x+y < 2, x+2y < 2\}$, utilizando las inversas que hemos calculado antes vemos que los elementos de F cumplen:

$$\frac{2u}{1+u+v} > 0 \implies u > 0 \quad \frac{2v}{1+u+v} > 0 \implies v > 0$$

$$\frac{2 \cdot 2u}{1+u+v} + \frac{2v}{1+u+v} < 2 \implies u < 1 \quad \dots \implies v < 1$$

Lo que nos coincide con lo que habíamos calculado previamente sabiendo que la transformación llevaba rectas a rectas.

Calculamos ahora también $f_1(x) = \int f(x,y)dy$:

$$\begin{cases} \text{Si } x \in (0, \frac{2}{3}) & f_1(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \\ \text{Si } x \in (\frac{2}{3}, 1) & f_1(x) = \int_0^{2-2x} \frac{2}{(2-x-y)^3} dy \end{cases}$$