Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

Paco Mora Caselles

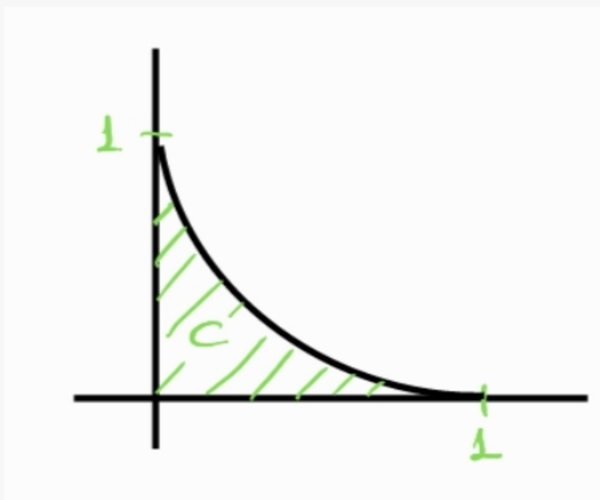
31 de enero de 2022

CAPÍTULO 1

Relación 1

Ejercicio 1.

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ y < (1-x)^2\}$$



Dejamos por ahora f en función de k, más tarde calculamos su valor:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in C \\ 0 & (x,y) \notin C \end{cases}$$

Para $x \in (0,1)$:

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy = \int_0^{(1-x)^2} kdy = k(1-x)^2$$

Entonces tenemos:

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a $f_2(y)$, cuando $y \in (0,1)$:

$$f_2(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

Calculamos ahora $E(X^n(1-X)^m)$ usamos $f_1(x)$:

$$E(X^n(1-X)^m) = \int x^n(1-x)^m f_1(x)dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k\int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} =$$

$$= kB(n+1, m+3) = k\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k\frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!}$$

Los momentos de orden n respecto del origen, la esperanza y la varianza de X las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos $m = 0$ y para la varianza podemos usar que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \qquad E(X) = \frac{1}{4} \qquad E(X^2) = \frac{1}{10} \qquad Var(X) = \frac{3}{80}$$

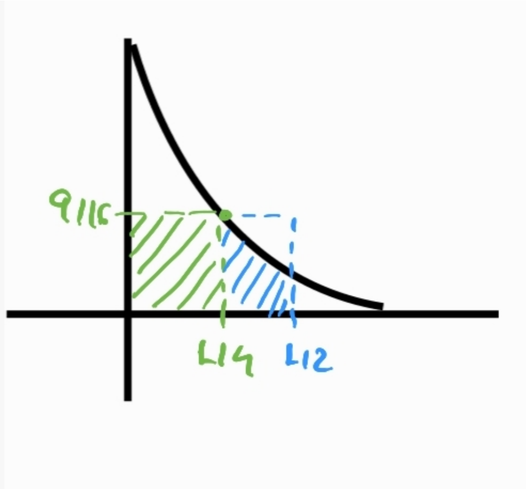
Calculamos $f_{2|1}(y|x)$, si $x \in (0,1)$:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{3}{3(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & y \in (0,(1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0,(1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora $f_{2|1}(y|x = 1/2)$:

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \dfrac{1}{4}) \\ \\ 0 & y \notin (0, \dfrac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular $F\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{16}\right)$ nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por k:



$$F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)=3\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=\frac{3^3}{2^6}$$

Para $F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right)=F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)+3\cdot Area\ T$*, siendo* T *la intersección con* C*. Sabemos entonces que:*

$$\int_{1/4}^{1/2}(1-x)^2dx=\int_{1/4}^{1/2}(x^2-2x+1)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x\Bigg|_{1/4}^{1/2}=\frac{19}{2^6 3}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right)=\frac{3^3}{2^6}+3\frac{19}{2^6 3}=\frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de Y *respecto de* X*:*

$$y-\mu_y=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)$$

$$\mu_y=E(Y)=\int_0^1 y3(1-y^{1/2})dy=3\int_0^1(y-y^{3/2})=\frac{3}{10}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{(1-x)^2}3xydydx=3\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(1-x)^2}d=\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^4dx=$$

$$=B(2,5)=\frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)}=\frac{3}{2}\frac{1!4!}{6!}=\frac{1}{20}$$

Recordemos que $\mu_X=E(X)=\frac{1}{4}$*, entonces:*

$$\sigma_{XY}Cov(X,Y)=\frac{1}{2^2\cdot 5}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{2-3}{2^3\cdot 5}=-\frac{1}{2^3\cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que $\sigma_X = \frac{3}{80}$*):*

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora $E(Y|X = x) = m_{2|1}(x)$*:*

$$E(Y|X = x) = \int y f_{2|1}(y|x) dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Ejercicio 2.

$$E(X) = 2,\ Var(X) = 3\ X\ \textit{simétrica}$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 2 + 3(X-2)2^2 + 2^3) =$$
$$= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6Var(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26$$

Ejercicio 3. *El número de de posibilidades totales es claramente* $\binom{N}{n}$*, la distribución de probabilidad es entonces:*

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos $n \leq N,\ r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora $\alpha_{(3)}$*:*

$$E(X_1^{(3)}) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$r_1(r_1-1)(r_1-2)\binom{N_1}{r_1} = r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2)\cdots 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\binom{N_1-3}{r_1-3}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$P(X_1 = r_1) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$N_1(N_1-1)(N_1-2)\sum_{r_1+r_2+r_3=n}\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= N_1(N_1-1)(N_2-2)\frac{(N-3)^{(n-3)}n!}{(n-3)!N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)}n^{(3)}}{N^{(3)}}$$