

Ecuaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier

Colaboración estelar entre Paco Mora  y Chito Belmonte 

15 de febrero de 2022

Índice general

1	Qué chuchas es una ecuación en derivadas parciales	3
1.0.1	Introducción a EDP	3
1.0.2	Ejemplos de EDPs	4
1.0.3	Ecuación de calor.Procesos de difusión	6
1.1	Qué es una EDP	7

En el caso de detección de errores o erratas, agradecemos el contacto a la dirección
eduardo.belmonteg@um.es

Qué chuchas es una ecuación en derivadas parciales

1.0.1. Introducción a EDP

Hemos visto teoría sobre *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Su característica de *Ordinaria* es que sólo se deriva con respecto a una variable.

$$x'(t) = f(t) \rightarrow x(t) = \int f + K$$

La familia de soluciones en este caso depende de un parámetro real. Otros tipos de EDO's tienen otro métodos de resolución, como ya vimos.

Por contra, las ecuaciones en derivadas parciales tienen un aspecto distinto.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \rightarrow \int f(x, y)dx + g(y)$$

La familia de soluciones depende en este caso de un parámetro que es una función.

La teoría de *Ecuaciones en Derivadas Parciales* consiste en el estudio de algunas funciones, que cumplen determinadas condiciones que nos facilitan su estudio. En muchas ocasiones, nos encontraremos con casos en los que no podamos determinar nada sobre la solución.

La teoría para ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es bastante sencilla. Se reduce a un sistema de líneas a partir de las cuales se puede construir la superficie solución de la ecuación. Este caso de estudio es poco útil, por eso casi siempre nos encontraremos ecuaciones de orden dos o superior.



No vamos a representar en este texto la bonita charla que está dando Matías sobre la primera EDO de la historia y su relación con Sir Isaac Newton, Francisco Misco y el holocausto judío pero es bastante interesante.

1.0.2. Ejemplos de EDPs

Ecuación de ondas



Nos está dando una bonita charla sobre muchas ecuaciones y todavía no ha hablado de ondas... Ya han pasado 25 minutos, auxilio.

Esta modelando como se deforma una cuerda en un punto cuando se le aplica una pequeña fuerza para ello coje un incremento en el eje x , (Δx) y calcula el angulo en el punto x y en $x + \Delta x$, y esto lo pone en funcion de la curva $U(x, t)$:

$$tg(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \quad tg(\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

Como trabajar con tangentes es muy complicado aproximamos la tangente mediante el angulo: $tg(\alpha) \sim \alpha$. Ahora simplemente restamos estos dos ángulos y multiplicamos por la tensión (T), y esto debe ser una fuerza que como sabemos es masa por aceleración. La masa viene dada por $\rho \Delta x$ donde ρ es la densidad de masa por longitud (constante). La aceleracion es la derivada segunda de $U(x, t)$ respecto de t quedando por tanto la siguiente ecuacion:

$$T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = F = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$T \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Tomando el limite $\Delta x \rightarrow 0$

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Llegamos a la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Cuya solución podemos calcular haciendo $\rho/T = 1/c^2$, la ecuación queda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, entonces algunas soluciones son:

$$u(x, t) = f(x + ct) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x + ct) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x + ct)$$

$$u(x, t) = f(x + ct) - g(x - ct)$$

Sabemos que $u(0, t) = u(2, t) = 0$ y entonces:

$$f(ct) + g(-ct) = 0 \forall t \implies f(x) = -g(-x) \forall x$$

$$f(1 + ct) + g(1 - ct) = 0 \forall t \implies f(x + 2) = -g(-x) \forall x$$

Por tanto, $f(x) = f(x + 2)$ y f es 2-periódica.

Coje un muelle le pone una masa gorda al final, desde esa masa saca otro muelle hacia delante y le pone otra masa y asi continuamente, y llama al desplazamiento de la masa n $U(n, t)$ donde la n es un

numero natural que indica cual de las masas estamos cogiendo y la t es como siempre el tiempo. Ahora cogemos y restamos una masa con la anterior para aplicar la ley de hook a un solo muelle entre dos masas "contiguas", $F = K \cdot x$, de forma que se nos queda la siguiente ecuacion:

$$k(U(n-1, t) - U(n, t)) - k(U(n, t) - U(n+1, t)) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n, t)$$

donde la k es la constante del muelle, m es la masa y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n, t)$ es la aceleracion.

$$U(n+1, t) - 2U(n, t) + U(n-1, t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n, t)$$

Tomando límites, el primer miembro nos recuerda a la segunda derivada:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} = \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = f''(x)$$

Volviendo a nuestra ecuación:

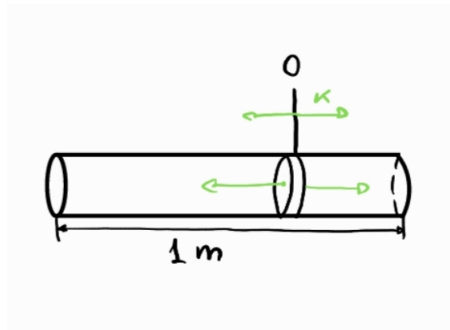
$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

La constante del muelle (k) depende de la longitud del muelle por tanto le afecta el incremento de x (Δx):

$$\frac{k}{\Delta x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Con lo que nos queda la ecuación de ondas que vimos anteriormente.

Para ilustrar la ecuación de ondas que acabamos de estudiar creamos un modelo de un recipiente en el que se puede desplazar una barra. La P es la presión y V es el volumen del recipiente.



$$P = (P - \Delta P)(1 + x) = P - \Delta P + xP - \underbrace{\Delta P}_{\sim 0}$$

$$\Delta P = -xP$$



Seguimos con las introducciones físicas que no sabemos de dónde vienen ni a dónde van.

Tenemos un cilindro con un fluido, queremos calcular la presión en función de la altura de un fluido contenido en un cilindro vertical. Para ello calculamos las fuerzas que se ejercen. La primera es la generada por la presión atmosférica que se encuentra en el eje vertical, la segunda es (no se cual es la que va hacia arriba tiene que ser otra presión) y luego el peso del fluido. La suma de estas fuerzas

tiene que ser 0 pues el fluido esta en reposo por tanto tenemos que la diferencia de presión entre dos puntos (z y Δz) multiplicada por la superficie del agua superficial (que nos da una fuerza), y el peso es $g\rho\Delta x$ donde g es la gravedad y ρ la densidad han de ser iguales.

$$p\omega = g\rho S\Delta z$$

$$(P(z) - P(z + \Delta z))S = g\rho S\Delta z$$

Si pasamos el Δx dividiendo y hacemos el limite obtenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

$$\nabla p = (0, 0, -\rho g)$$

Vamos a resolver la ecuacion:

$$\begin{aligned} \rho &\sim cp \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= cp(z) \\ -p'(z) &= cp(z) \quad \frac{p'}{p} = -c \quad p(z) = p_0 \rho^{-cz} \end{aligned}$$

Ecuación de los fluidos

Tenemos una corriente en un fluido no compresible y nos fijamos en una seccion (S) orientada (tenemos un vector normal) y queremos medir que cantidad de fluido atraviesa S. Tenemos que la velocidad del fluido (\vec{v}) depende de la posicion (x, y, z) y del tiempo. Y para modelar la masa que atraviesa la seccion (masa saliente de la seccion) por unidad de tiempo hacemos este calculo:

$$\underbrace{\rho \vec{S} \vec{v} \Delta t}_{\text{masa saliente}} \rightarrow \underbrace{\iint_{\partial D} \rho \vec{v} d\vec{S}}_{\text{integral de flujo}}$$

Podemos aplicar el teorema de Gauss-Ostrogadsky para convertir esta integral en una integral triple.

$$\iint_{\partial D} \rho \vec{v} d\vec{S} = \iiint_D \rho dV$$

1.0.3. Ecuación de calor. Procesos de difusión

Tomemos una región confinada de moléculas que se mueven de manera caótica, cada partícula tiene una trayectoria propia. Seguimos de forma estadística las trayectorias.

Sean X, Y una variables aleatorias. Cuando son independientes sus funciones de densidad $f(x), g(y)$ cumplen que $f(x) \cdot g(y)$ el densidad conjunta. Como consecuencia, si tenemos un conjunto

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Para calcular la función de distribución de $X + Y$ (es decir, $P(X + Y \leq Z)$) se procede de este modo:

$$P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x)g(y) dx dy$$

Para calcular esta integral podemos hacer el cambio de variable $x = s$, $x + y = z$, de forma que la integral queda:

$$= \int_{-\infty}^z \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(z-s)ds \right)}_{\text{densidad de } X+Y, \text{ la convolución}} dz$$

Cuando apliquemos esto a una función $f(x, t)$ que represente una ecuación diferencial, usando una v.a. densidad ϕ con varianza proporcional al incremento del tiempo obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \xi, t) \phi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \xi^2 \right) \phi(\xi) d\xi \\ &\simeq f(x, t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) c\tau \implies \frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$



Ahora olvidaos de toda la **bullshit** que hemos visto que comienza el espectáculo, empieza el temario.

1.1 - Qué es una EDP

Definición 1.1.1. *Ecuación en Derivadas Parciales*

Una **EDP** es una ecuación de la forma

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \dots\right)$$

Con u una función doblemente derivable.

Su diferencia fundamental con las *EDOs* es... ^a

La expresión general de una EDP es

$$f(x, u) = u'$$

Si se le añade una condición inicial, estamos ante un problema de Cauchy, pero tal cual está expresado sus soluciones no son únicas. Aquí aparecen lo que se llaman 'soluciones singulares'.

Definición 1.1.2. *EDP de Primer Orden*

$$F\left(x_1, x_2, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, u\right) = 0$$

Dice Matías que no le gusta esta ecuación así que en su lugar nos va a explicar otra

Definición 1.1.3. *Ecuación quasi-lineal en dos variables*

$$A(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y, u)$$

Estas son las primeras que vamos a resolver y, a partir de estas, veremos las soluciones de una EDP de primer orden. Para una EDP de segundo orden, pueden aparecer derivadas mixtas (cosa que no aparece en los ejemplos), y la teoría nos dice que con los cambios oportunos de variable se pueden hacer desaparecer las derivadas mixtas de problemas de cierta generalidad, y hacerlos semejante a las soluciones de una EDP de primer orden con la que ya estamos familiarizados.



Han sido unos maravillosos 24 minutos de lucidez de Matías. Ahora ha vuelto a hablar de curvas y dibujitos y está sufriendo una embolia en la pizarra. Aprovecho para contaros un chiste: Un matemático, un físico y un biólogo están mirando una casa. En la casa entran dos personas y salen tres. El físico dice 'Ha debido de ser un error en la medición'. El biólogo dice 'No, es probable que se hayan reproducido'. El matemático dice 'Si entra una persona más, la casa se queda vacía'.

Definición 1.1.4. Llamamos ecuaciones cuasi-lineales a las que son de la forma:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = C$$

Donde $A, B, C : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \ C^1$ (A, B, C son de la forma $A(x, y, u)$ y u es de la forma $u(x, y)$)

Teorema 1. Consideremos el sistema autónomo de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = A(x, y, z) \\ y' = B(x, y, z) \\ z' = C(x, y, z) \\ (x(0), y(0), z(0)) = P \end{cases}$$

definido en $S = \{(x, y, z) : z = u(x, y)\}$ Entonces si $p \in S$, toda la órbita solución $(x(t), y(t), z(t)) \in S$ donde u es solución del sistema.

Dada la ecuación:

$$\begin{cases} x' = A(x, y, z) \\ y' = B(x, y, z) \\ z' = C(x, y, z) \\ (x(0), y(0), z(0)) = P \end{cases}$$

Dada $\Gamma(t, s)$ a la solución de la ecuación y que pasa por $\gamma(s)$, es decir, $\Gamma(0, s) = \gamma(s)$, al ser Γ solución sabemos también que:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) = A(\Gamma(t, s)) \forall s, \forall t^1$$

Ejemplo 1. Resolución de ecuación lineal en coeficientes constantes

Si tomamos la ecuación lineal de coeficientes constantes:

¹que estén dentro de un cierto entorno

$$\begin{cases} u_Y + cu_X = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Esta ecuación, transformada a un sistema es:

$$\begin{cases} x' = c \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Si tomamos la condición de que la solución pase por la curva $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$, es decir, $x(0) = s$, $y(0) = 0$, $z(0) = h(s)$. La solución la podemos encontrar de forma inmediata:

$$\begin{cases} x = ct + cte & \rightarrow & x(t, s) = ct + s \\ y = t + cte & \rightarrow & y(t, s) = t \\ z(t) = cte & \rightarrow & z(t, s) = h(s) \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que $s = x - cy \implies z = h(x - cy)$ y la solución es $u(x, y) = h(x - cy)$

Ejemplo 2. Resolvemos un problema de la forma

$$\begin{cases} xu_Y - yu_X = u \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Escribimos el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$$

Fácilmente llegamos a la solución:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(t) \\ y(t) = c_1 \sin(t) \\ z(t) = c_2 e^t \end{cases}$$

Si tomamos la condición inicial $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$ tenemos la solución del sistema:

$$\begin{cases} x(t, s) = s \cos(t) \\ y(t, s) = s \sin(t) \\ z(t, s) = h(s) e^t \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = s^2 \implies s = \sqrt{x^2 + y^2}$, tomamos $t = \frac{y}{x} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t) \implies t = \arctan(\frac{y}{x})$.

La solución es entonces:

$$u(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\arctan(y/x)}$$

Ejemplo 3.

$$\begin{cases} u_Y + uu_X = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

El sistema autónomo es:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

La condición inicial que tenemos es $(x(0), y(0), z(0)) = (s, 0, h(s))$, con lo que obtenemos:

$$\begin{cases} z = h(s) \\ x = h(s)t + s \\ y = t \end{cases}$$

Tendemos que eliminar ahora los parámetros t, s para encontrar la función u :

$$s = x - h(s)t = x - yu$$

$$u = h(s) = h(x - yu)$$

Para tratar de encontrar h , tomamos dos puntos s_1, s_2 :

$$x = h(s_1)y + s_1 \quad x = h(s_2)y + s_2$$

$$h(s_1)y + s_1 = h(s_2)y + s_2$$

$$(h(s_1) - h(s_2))y = s_2 - s_1$$

$$y = \frac{s_2 - s_1}{h(s_1) - h(s_2)}$$

Y aquí ya no se qué hacemos, un saludo.



¿Qué esta haciendo? Yo que sé.

Tratamos de parametrizar los planos que son tangentes a la esfera unidad. En primer lugar, parametrizamos la esfera como $(\cos(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\phi))$ $\theta \in [0, 2\pi]$ $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Para parametrizar el plano, notemos que un punto (x, y, z) está en el plano si: (consideremos que el punto en el que el plano es tangente es $(\cos(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\phi))$):

$$(x - \cos(\theta) \cos(\phi), y - \sin(\theta) \cos(\phi), z - \sin(\phi)) \cdot (\cos(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\phi)) = 0$$

O equivalentemente:

$$(\cos(\theta) \cos(\phi))x + (\sin(\theta) \cos(\phi))y + \sin(\phi)z - 1 = 0$$

Si ahora fijamos el parámetro ϕ fijo y derivamos en función de θ :

$$-(\sin(\theta) \cos(\phi_0))x + (\cos(\theta) \cos(\phi_0))y = 0$$

Nos queda la siguiente envolvente:

$$\begin{cases} (\cos(\theta) \cos(\phi_0))x + (\sin(\theta) \cos(\phi_0))y + \sin(\phi_0)z = 1 \\ -(\sin(\theta) \cos(\phi_0))x + (\cos(\theta) \cos(\phi_0))y = 0 \\ \text{objetivo: eliminar } \theta \end{cases}$$

Vamos a suponer que $\cos(\phi_0) \neq 0$, entonces:

$$\sin(\theta)x = \cos(\theta)y \iff \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1 + \tan(\theta)^2}} = \frac{y/x}{\sqrt{1 + (y/x)^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Entonces volviendo a las ecuaciones que teníamos:

$$(x^2 + y^2) \cos(\phi_0) + z \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\phi_0) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi_0) + z \sin(\phi_0) = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi_0) = 1 - z \sin(\phi_0)$$

$$(x^2 + y^2) \cos^2(\phi_0) = 1 - 2z \sin(\phi_0) + z^2 \sin^2(\phi_0)$$

Estas ecuaciones definen un cono doble con el vértice desplazado.

Volvemos ahora a la ecuación inicial sin tomar un parámetro fijo. Trataremos de encontrar la EDP que modeliza nuestro problema. Ahora, $z = z(x, y)$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Derivamos ahora respecto de x y respecto de y :

$$(\cos(\theta) \cos(\phi))x + (\sin(\theta) \cos(\phi))y + \sin(\phi)z - 1 = 0$$

$$\cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta)p = 0$$

$$\sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\phi)q = 0$$

Nuestro objetivo será eliminar θ, ϕ .

$$\cos^2(\theta) \cos^2(\phi) = p^2 \sin^2(\phi)$$

$$\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) = q^2 \sin^2(\phi)$$

$$\cos^2(\phi) = (p^2 + q^2) \sin^2(\phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Entonces en nuestra ecuación:

$$-px \sin(\phi) - qy \sin(\phi) + z \sin(\phi) = 1$$

$$(z - px - qy) \sin(\phi) = 1$$

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = 1$$
$$\sin(\phi) = \frac{\tan(\phi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2 + q^2}}} = \frac{1}{p^2 + q^2 + 1}$$



Después de todo esto para nada confuso, tenemos la EDP siguiente por algún motivo totalmente claro para el lector:

$$\frac{u - xu_x - yu_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = 1$$

Podemos comprobar que la esfera $u(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es solución de esta EDP, queda aquí sin desarrollar pero solo es calcular u_x, u_y y comprobar que se cumple la EDP escrita anteriormente.