

Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

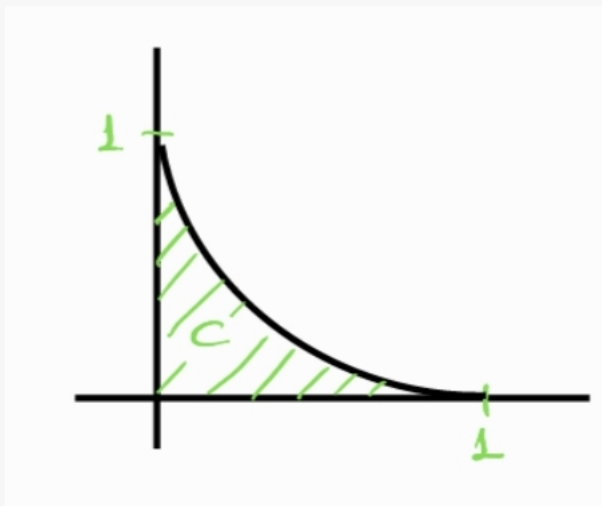
Paco Mora Caselles

7 de febrero de 2022

Relación 1

Ejercicio 1.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < (1-x)^2\}$$



Dejamos por ahora f en función de k , más tarde calculamos su valor:

$$f(x, y) = \begin{cases} k & (x, y) \in C \\ 0 & (x, y) \notin C \end{cases}$$

Para $x \in (0, 1)$:

$$f_1(x) = \int f(x, y) dy = \int_0^{(1-x)^2} k dy = k(1-x)^2$$

Entonces tenemos:

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a $f_2(y)$, cuando $y \in (0, 1)$:

$$f_2(y) = \int f(x, y) dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0, 1) \\ 0 & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Calculamos ahora $E(X^n(1-X)^m)$ usamos $f_1(x)$:

$$\begin{aligned} E(X^n(1-X)^m) &= \int x^n(1-x)^m f_1(x) dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k \int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} dx \\ &= kB(n+1, m+3) = k \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k \frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!} \end{aligned}$$

Los momentos de orden n respecto del origen, la esperanza y la varianza de X las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos $m = 0$ y para la varianza podemos usar que $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \quad E(X) = \frac{1}{4} \quad E(X^2) = \frac{1}{10} \quad \text{Var}(X) = \frac{3}{80}$$

Calculamos $f_{2|1}(y|x)$, si $x \in (0, 1)$:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{3}{3(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} & y \in (0, (1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0, (1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora $f_{2|1}(y|x = 1/2)$:

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \frac{1}{4}) \\ 0 & y \notin (0, \frac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular $F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por k :



$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3^3}{2^6}$$

Para $F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) + 3 \cdot \text{Area } T$, siendo T la intersección con C . Sabemos entonces que:

$$\int_{1/4}^{1/2} (1-x)^2 dx = \int_{1/4}^{1/2} (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{19}{2^6 3}$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = \frac{3^3}{2^6} + 3 \cdot \frac{19}{2^6 3} = \frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de Y respecto de X :

$$y - \mu_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \mu_x)$$

$$\mu_y = E(Y) = \int_0^1 y 3(1 - y^{1/2}) dy = 3 \int_0^1 (y - y^{3/2}) = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} 3xy dy dx = 3 \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{(1-x)^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \\ &= B(2, 5) = \frac{3}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{3}{2} \frac{1!4!}{6!} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Recordemos que $\mu_X = E(X) = \frac{1}{4}$, entonces:

$$\sigma_{XY} \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2^2 \cdot 5} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{2-3}{2^3 \cdot 5} = -\frac{1}{2^3 \cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que $\sigma_X = \frac{3}{80}$):

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora $E(Y|X = x) = m_{2|1}(x)$:

$$E(Y|X = x) = \int y f_{2|1}(y|x) dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Ejercicio 2.

$$E(X) = 2, \text{ Var}(X) = 3 \text{ } X \text{ simétrica}$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 \cdot 2 + 3(X-2) \cdot 2^2 + 2^3) =$$

$$= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6\text{Var}(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26$$

Ejercicio 3. El número de de posibilidades totales es claramente $\binom{N}{n}$, la distribución de probabilidad es entonces:

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos $n \leq N$, $r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora $\alpha_{(3)}$:

$$E(X_1^3) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2) \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$r_1(r_1-1)(r_1-2) \binom{N_1}{r_1} = r_1(r_1-1)(r_1-2) \frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2) \cdots 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \binom{N_1-3}{r_1-3}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = r_1) &= \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3} \binom{N_2}{r_2} \binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = \\
 N_1(N_1-1)(N_1-2) &\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3} \binom{N_2}{r_2} \binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} = \\
 &= N_1(N_1-1)(N_2-2) \frac{(N-3)^{(n-3)} n!}{(n-3)! N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)} n^{(3)}}{N^{(3)}}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Aparado b)

Para calcular las vvaas marginales solo tenemos que sumar los elementos de la misma fila o columna. Por ejemplo:

$$P(X=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Obtenemos así:

$$\begin{aligned}
 P(X=0) &= \frac{11}{18} & P(X=1) &= \frac{5}{18} & P(X=2) &= \frac{2}{18} \\
 P(Y=0) &= \frac{11}{18} & P(Y=1) &= \frac{5}{18} & P(Y=2) &= \frac{2}{18}
 \end{aligned}$$

También podemos obtener $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, $Var(X), Var(Y) = \frac{17}{36}$ y $Cov(X, Y) = -\frac{5}{36}$.

Entonces la recta de regresión de X sobre Y es:

$$\begin{aligned}
 Y - \mu_Y &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} (x - \mu_X) \\
 y - \frac{1}{2} &= \frac{-\frac{5}{36}}{\frac{17}{36}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \\
 y &= -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}
 \end{aligned}$$

Como las esperanzas y las varianzas son iguales, obtenemos que el cálculo de la recta de regresión de Y sobre X es igual:

$$x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}$$

Calcularemos ahora $Var(Y - X^*)$:

$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = \frac{17}{36} \left(1 - \frac{25/36^2}{17^2/36} \right) = \frac{17}{36} \left(\frac{17^2 - 25}{17^2} = \frac{11}{3 \cdot 17} \right)$$

Para la varianza residual de X sobre Y , vemos que es igual porque coinciden sus esperanzas y sus varianzas.

Relación 2

Ejercicio 3. Sabemos que, para X, Y, Z tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Entonces $E(X) = E(Y) = E(Z)$ es:

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \int_0^1 x^2 = \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces:

$$E(U) = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Como las variables son independientes:

$$\text{Var}(U) = \text{Var}(aX) + \text{Var}(bY) + \text{Var}(cZ) = (a^2 + b^2 + c^2) \frac{1}{12}$$

Nos piden también los momentos de orden 3 y 4 respecto de la media. Utilizamos el subapartado de **Momentos de sumas**. Siguiendo un procedimiento como el de este subapartado llegamos a que

solo necesitamos expresiones como $\mu_3(aX) = E\left(aX - \frac{a}{2}\right) = 0$ ya que estas vvaas son simétricas respecto de su media. En definitiva:

$$E((U - E(U))^3) = \mu_3(aX) + \mu_3(bY) + \mu_3(cZ) = 0$$