

# Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

Paco Mora Caselles

14 de febrero de 2022

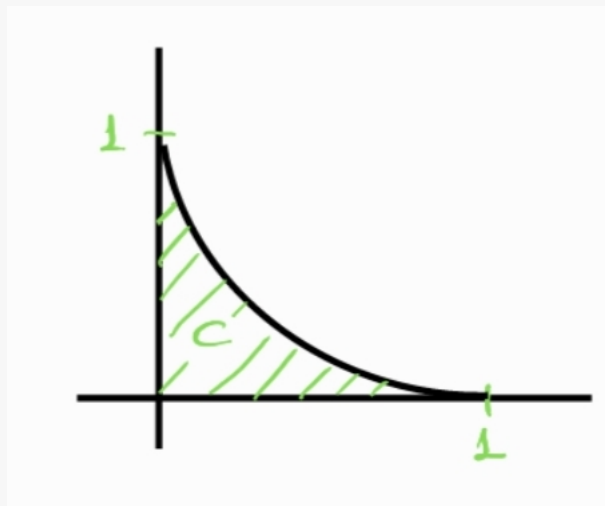
---

# Relación 1

---

**Ejercicio 1.**

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < (1-x)^2\}$$



*Dejamos por ahora  $f$  en función de  $k$ , más tarde calculamos su valor:*

$$f(x, y) = \begin{cases} k & (x, y) \in C \\ 0 & (x, y) \notin C \end{cases}$$

*Para  $x \in (0, 1)$ :*

$$f_1(x) = \int f(x, y) dy = \int_0^{(1-x)^2} k dy = k(1-x)^2$$

*Entonces tenemos:*

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a  $f_2(y)$ , cuando  $y \in (0, 1)$ :

$$f_2(y) = \int f(x, y) dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0, 1) \\ 0 & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Calculamos ahora  $E(X^n(1-X)^m)$  usamos  $f_1(x)$ :

$$\begin{aligned} E(X^n(1-X)^m) &= \int x^n(1-x)^m f_1(x) dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k \int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} dx \\ &= kB(n+1, m+3) = k \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k \frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!} \end{aligned}$$

Los momentos de orden  $n$  respecto del origen, la esperanza y la varianza de  $X$  las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos  $m = 0$  y para la varianza podemos usar que  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \quad E(X) = \frac{1}{4} \quad E(X^2) = \frac{1}{10} \quad \text{Var}(X) = \frac{3}{80}$$

Calculamos  $f_{2|1}(y|x)$ , si  $x \in (0, 1)$ :

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{3}{3(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} & y \in (0, (1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0, (1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora  $f_{2|1}(y|x = 1/2)$ :

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \frac{1}{4}) \\ 0 & y \notin (0, \frac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular  $F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$  nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por  $k$ :



$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3^3}{2^6}$$

Para  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) + 3 \cdot \text{Area } T$ , siendo  $T$  la intersección con  $C$ . Sabemos entonces que:

$$\int_{1/4}^{1/2} (1-x)^2 dx = \int_{1/4}^{1/2} (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{19}{2^6 3}$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = \frac{3^3}{2^6} + 3 \cdot \frac{19}{2^6 3} = \frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de  $Y$  respecto de  $X$ :

$$y - \mu_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \mu_x)$$

$$\mu_y = E(Y) = \int_0^1 y 3(1 - y^{1/2}) dy = 3 \int_0^1 (y - y^{3/2}) = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} 3xy dy dx = 3 \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{(1-x)^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \\ &= B(2, 5) = \frac{3}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{3}{2} \frac{1!4!}{6!} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Recordemos que  $\mu_X = E(X) = \frac{1}{4}$ , entonces:

$$\sigma_{XY} \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2^2 \cdot 5} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{2-3}{2^3 \cdot 5} = -\frac{1}{2^3 \cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que  $\sigma_X = \frac{3}{80}$ ):

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora  $E(Y|X = x) = m_{2|1}(x)$ :

$$\begin{aligned} E(Y|X = x) &= \int y f_{2|1}(y|x) dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy = \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2} \end{aligned}$$

### Ejercicio 2.

$$E(X) = 2, \text{ Var}(X) = 3 \text{ } X \text{ simétrica}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 \cdot 2 + 3(X-2) \cdot 2^2 + 2^3) = \\ &= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6\text{Var}(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26 \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.** El número de de posibilidades totales es claramente  $\binom{N}{n}$ , la distribución de probabilidad es entonces:

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos  $n \leq N$ ,  $r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora  $\alpha_{(3)}$ :

$$E(X_1^{(3)}) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2) \frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$\begin{aligned} r_1(r_1-1)(r_1-2) \binom{N_1}{r_1} &= r_1(r_1-1)(r_1-2) \frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2) \cdots 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \binom{N_1-3}{r_1-3} \end{aligned}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = r_1) &= \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3} \binom{N_2}{r_2} \binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = \\
 N_1(N_1-1)(N_1-2) &\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1-3}{r_1-3} \binom{N_2}{r_2} \binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2) \frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} = \\
 &= N_1(N_1-1)(N_2-2) \frac{(N-3)^{(n-3)} n!}{(n-3)! N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)} n^{(3)}}{N^{(3)}}
 \end{aligned}$$

#### Ejercicio 4.

**Aparado b)**

Para calcular las vvaas marginales solo tenemos que sumar los elementos de la misma fila o columna. Por ejemplo:

$$P(X=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Obtenemos así:

$$\begin{aligned}
 P(X=0) &= \frac{11}{18} & P(X=1) &= \frac{5}{18} & P(X=2) &= \frac{2}{18} \\
 P(Y=0) &= \frac{11}{18} & P(Y=1) &= \frac{5}{18} & P(Y=2) &= \frac{2}{18}
 \end{aligned}$$

También podemos obtener  $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ ,  $Var(X), Var(Y) = \frac{17}{36}$  y  $Cov(X, Y) = -\frac{5}{36}$ .

Entonces la recta de regresión de  $X$  sobre  $Y$  es:

$$\begin{aligned}
 Y - \mu_Y &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} (x - \mu_X) \\
 y - \frac{1}{2} &= \frac{-\frac{5}{36}}{\frac{17}{36}} \left( x - \frac{1}{2} \right) \\
 y &= -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}
 \end{aligned}$$

Como las esperanzas y las varianzas son iguales, obtenemos que el cálculo de la recta de regresión de  $Y$  sobre  $X$  es igual:

$$x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}$$

Calcularemos ahora  $Var(Y - X^*)$ :

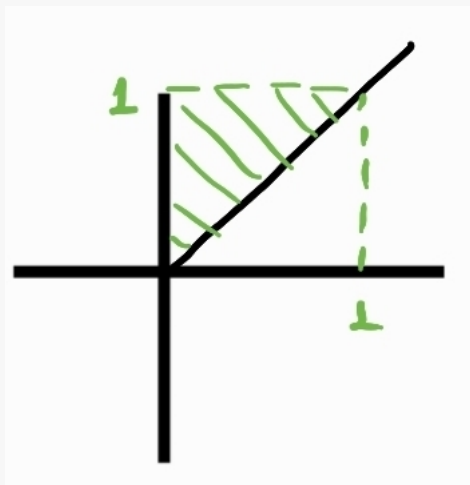
$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = \frac{17}{36} \left( 1 - \frac{25/36^2}{17^2/36} \right) = \frac{17}{36} \left( \frac{17^2 - 25}{17^2} = \frac{11}{3 \cdot 17} \right)$$

---

*Para la varianza residual de  $X$  sobre  $Y$ , vemos que es igual porque coinciden sus esperanzas y sus varianzas.*

## Relación 2

**Ejercicio 1.** *Vemos en primer lugar cómo es el recinto del ejercicio:*



$$\begin{aligned}\alpha_{n,m} &= E(X^n Y^m) = \int x^n y^m \cdot \frac{1}{y} = \int_0^1 \int_0^y x^n x^{m-1} dx dy = \\ &= \int_0^1 y^{m-1} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^y dy = \frac{1}{n+1} \int_0^1 y^{m-1} y^{n+1} dy = \frac{1}{n+1} \frac{1}{m+n+1}\end{aligned}$$

*Con este resultado podemos obtener los valores:*

$$E(Y) = \frac{1}{2} \quad E(Y^3) = \frac{1}{3} \quad E(XY) = \frac{1}{6} \quad E(X) = \frac{1}{4}$$



Entonces tenemos que  $\text{Var}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  y  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

Para calcular la recta de regresión obtenemos primero:

$$\beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{1/24}{1/12} = \frac{1}{2}$$

Y la recta de regresión que nos piden queda:

$$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left( y - \frac{1}{2} \right)$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

Calcularemos ahora la curva de regresión de  $X$  sobre  $Y$ :

$$x = m_{1|2}(y) \quad m_{1|2}(y) = E(X|Y = y) = \int x f_{1|2}(x|y) dx$$

Entonces, para los valores de  $y$  para los que  $f_2(y) > 0$  tendremos:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

Calcularemos ahora  $f_2(y)$ :

$$\text{Si } y \in (0, 1): f_2(y) = \int f(x, y) dx = \int_0^y \frac{1}{y} dx = \frac{1}{y} x \Big|_0^y = 1$$

$$f_2(y) = I_{(0,1)}(y)$$

Volvemos ahora al cálculo de  $f_{1|2}(x|y)$ . Dado  $y \in (0, 1)$ :

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1/y}{1} = \frac{1}{y} \quad x \in (0, y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = 0 \quad x \notin (0, y)$$

Podemos calcular ahora  $m_{1|2}(y)$ :

$$E(X|Y = y) = \int_0^y x \frac{1}{y} dx = \frac{1}{y} \frac{x^2}{2} \Big|_0^y = \frac{y}{2}$$

Entonces la curva de regresión es  $x = \frac{y}{2}$ . Notemos que es una recta, en este caso **necesariamente coincidirá con la recta de regresión**. Entonces, si hubiéramos calculado primero la curva de regresión, no tendríamos que calcular la recta porque sabemos que coincidiría.

**Ejercicio 3.** Sabemos que, para  $X, Y, Z$  tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Entonces  $E(X) = E(Y) = E(Z)$  es:

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \int_0^1 x^2 = \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces:

$$E(U) = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Como las variables son independientes:

$$\text{Var}(U) = \text{Var}(aX) + \text{Var}(bY) + \text{Var}(cZ) = (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{12}$$

Nos piden también los momentos de orden 3 y 4 respecto de la media. Utilizamos el subapartado de **Momentos de sumas**. Siguiendo un procedimiento como el de este subapartado llegamos a que solo necesitamos expresiones como  $\mu_3(aX) = E\left(aX - \frac{a}{2}\right) = 0$  ya que estas vvaas son simétricas respecto de su media. En definitiva:

$$E((U - E(U))^3) = \mu_3(aX) + \mu_3(bY) + \mu_3(cZ) = a\mu_3(X) + b\mu_3(Y) + c\mu_3(Z) = 0$$

$$\mu_4(U) = \mu_4(aX) + \mu_4(bY) + \mu_4(cZ) + 6(\mu_2(aX)\mu_2(bY) + \mu_2(aX)\mu_2(cZ) + \mu_2(bY)\mu_2(cZ))$$

Vamos a hacer el cálculo para un  $n$  general de:

$$\mu_n(X) = E\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^n\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx = \frac{(x - 1/2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1/2)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} (1 + (-1)^n)$$

Luego:

$$\mu_4(X) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$\mu_2(X) = \frac{1}{12} \quad (\text{como ya habíamos calculado antes})$$

Volviendo ahora a  $\mu_4(U)$ :

$$\mu_4(U) = (a^4 + b^4 + c^4) \frac{1}{5 \cdot 2^4} + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \frac{1}{3^2 2^4}$$

Calculamos ahora la función generatriz de momentos (recordemos que la función generatriz no está definida porque  $X, Y, Z$  toman valores no enteros). Usaremos la independencia de las vvaas:

$$E(e^{tU}) = E(e^{aX})E(e^{bY})E(e^{cZ})$$

Tendremos que calcular la función generatriz de momentos de cada vvaas (son todas iguales):

$$E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx} dx = \left. \frac{e^{tx}}{t} \right|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

En el caso de  $aX$  (análogamente para  $bY, cZ$ ):

$$g_{aX}(t) = E(e^{taX}) = \frac{e^{at} - 1}{at}$$

Entonces volviendo a la vvaas  $U$ :

$$g_U(t) = \frac{e^{at} - 1}{at} \cdot \frac{e^{bt} - 1}{bt} \cdot \frac{e^{ct} - 1}{ct}$$

La función característica de  $U$  será entonces:

$$\varphi_U(t) = \frac{(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{i \cdot a \cdot b \cdot ct^3} = \frac{-i(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{a \cdot b \cdot ct^3}$$

## Ejercicio 5.

**Apartado a)**

$$\alpha(t) = \frac{1 + \cos(t) + \cos(2t)}{3}$$

Comprobemos que es función característica. Si conseguimos expresar  $\alpha$  de la forma  $\sum p_n e^{itx_n}$

( $\sum p_n = 1$ ), tendríamos que  $\alpha$  es función característica de una vva discreta.

Usaremos que:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \\ \cos(2t) &= \frac{1}{2}(e^{i2t} + e^{-i2t})\end{aligned}$$

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) = \\ &= \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{-it} + \frac{1}{6}e^{2it} + \frac{1}{6}e^{-2it}\end{aligned}$$

Entonces todas las constantes que multiplican a exponenciales son no negativas y suman 1. Entonces  $\alpha$  es la función característica de la vva que toma valores  $\{0, 1, -1, 2, -2\}$  con probabilidades:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \quad P(X = 1) = P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{6}$$

**Apartado b)**

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+t^3}$$

Esta función no está acotada en -1 por lo que no puede ser función característica.

**Apartado c)**

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+t^4}$$

Recordemos la relación entre la existencia de los momentos de orden  $n$  y la existencia de la derivada de orden  $n$  en el origen.

$$\alpha'(t) = -(1+t^4)^{-2}4t^3 \quad \alpha'(0) = 0$$

$$\alpha''(t) = \dots \quad \alpha''(0) = 0$$

Entonces si existe  $X$ ,  $E(X) = 0$ ,  $E(X^2) = i^2\alpha''(0) = 0$ , entonces la varianza sería nula y la función sería constante, pero la función característica de una distribución uniforme no es  $\alpha$