Ejercicios MNED

Paco Mora Caselles

13 de diciembre de 2021

CAPÍTULO 1

Tema 1

Ejercicio 1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \to \sigma(A) = \{0{,}5 + i, 0{,}5 - i\}$$

x, y son combinaciones lineales de $e^{(0{,}5 \pm i)t}$ es decir de $\{e^{0{,}5t} e^{i}, e^{0{,}5} e^{-i}\}$

Ejercicio 5.

$$\begin{cases} x'''(t) = \cos(x(t)) + \sin(x'(t)) - e^{x''(t)} + t^2 \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = 7 \\ x''(0) = 13 \end{cases}$$

Consideramos

$$\begin{cases} x(t) \\ u(t) = x'(t) \\ v(t) = x''(t) \end{cases}$$

Entonces la ecuación queda:

$$v'(t) = (x'''(t)) = (\cos(x(t))) + \sin(u(t)) - e^{v(t)} + t^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En versión matricial:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(x) + \sin(u) - e^{v} + t^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.

$$e^{at}(y' + ay) = e^{at}y' + ae^{at}y = \frac{d}{/dt}(e^{at}y(t))$$

$$e^{\int_0^t a(s)ds}\left(y'(t) - a(t)y(t)\right) = e^{\int_0^t a(s)ds}y'(t) + a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}y(t)\right) \frac{d}{dt}(e^{\int_0^t a(s)ds}y(t))$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = e^{at}y(t)|_{t=0}^{(t=t)}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = de^{at-bt}$$

CAPÍTULO 2

Tema 2

Ejercicio 8. *a)*

$$y_n = \frac{1-h}{1+(n-1)h} \; n = 0, .., N = \frac{1}{h}$$

b)
Utilizando que es una ecuación de variables separables, llegamos a:

$$y(t) = \frac{1}{1+t}$$

Dado $t_* = nh$ *fijo, calculamos el límite estacionario:*

$$\lim_{h\to 0}\lim_{n\to+\infty}{}_{hn=t_*} y_n^h = \lim \frac{1-h}{1+nh-h} = \lim \frac{1-h}{1+t_*-h} = \frac{1}{1+t_*} = y(t_*)$$

Es decir la solución exacta que hemos calculado.
c)
El resultado es:

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1+t_*^2+2t_*-h-ht_*} = O(h)_{h\to 0}$$

con $hn = t_*$.
Que el error sea una $O(h)$ *significa que* $|y(t_* - y_n^h| \leq_{h\to 0} kh$ *Con* k *independiente de* h.
Comprobaremos que el error sea una $O(h)$*:*

$$|y(t_* - y_n^h| = h\frac{t_*}{|1+t_*^2+2t_*-h-ht_*|}$$

Teniendo:

$$\frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*-h-ht_*} \sim_{h\to 0} \frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Luego el error lo podemos acotar por hk *con* $k=1$ *cuando* $h \to 0$.

Comprobaremos la optimalidad de esta cota.

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \leq ?kh^2$$

$$\frac{1}{h^2} y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \to_{h\to 0} \infty$$

Luego el error es mayor o igual que h y menor que h^2.

Ejercicio 6.

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = \dfrac{t^2}{2}$ *El método de Euler explícito queda:*

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, g_n) = y_n + ht_n \end{cases}$$

Entonces:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = y_0 + ht_0 = 0 + 0h = 0$$

$$y_2 = 0 + hh = h^2 \qquad y_3 = h^2 + 2h^2 = 3h^2$$

$$y_4 = (1 + 2 + 3) = 6h^2 \qquad y_5 = (1 + 2 + 3 + 4)h^2 = 10h^2$$

En general:

$$y_n = (1 + 2 + ... + n - 1)h^2 = \frac{(n-1)n}{2} h^2 = \frac{n^2 - n}{2} h^2 = \frac{1}{2} n^2 h^2 - \frac{1}{2} nhh = \frac{1}{2} t_*^2 - \frac{1}{2} t_* h \to \frac{1}{2} t_*^2$$

Con lo que tenemos un error del orden de $O(h)$

Variación del ejercicio

$$\begin{cases} y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = t$ El método de Euler explícito queda:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h \end{cases}$$

Con lo que:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = h \qquad y_2 = 2h \; ...$$

$$y_n = nh = t_* = y(t_*)$$

Con lo que hemos obtenido la solución exacta, $\forall t_* = nh$ $y(t_*) - y_n^h = 0$. ¿Por qué no hay error en el método de Euler en este caso? Porque la segunda derivada de la solución exacta, $y'' \equiv 0$ y porque hemos tomado un t_0 que forma parte de la solución.

Si en vez de tomar 0 tomamos $t_0 = \varepsilon$:

$$y_0 = \varepsilon \qquad y_1 = \varepsilon + h \qquad y_2 = \varepsilon + 2h$$

$$y_n = \varepsilon + nh$$

En este caso al no tomar un y_0 exacto el error se desvía por ε

$$(1+hL)^n \sim ? e^{Lt}$$

con $t = nh$ O equivalentemente, que $\lim_{t=nh}(1+hL)^n = e^{Lt}$

$$(1+hL)^n = e^{n\log(1+hL)} = e^{hn\dfrac{\log(1+hL)}{h}} \to e^{Lt}$$

c)

$$(1+O(h^{p+1}))^n = exp(n\log(1+O(h^{p+1}))) = exp(hn\frac{\log(1+O(h^{p+1}))}{n}) = e^{t\dfrac{\log(1+O(h^{p+1}))}{n}} = ...$$

Hacemos el desarrollo de Taylor en el exponente y nos queda $= exp(t(O(h^p)+...))$

Ejercicio 10. *Calculamos primero la solución exacta aunque no nos lo pida el ejercicio.*

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) + \beta \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y' = -\alpha y = \beta$$

$$e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t} y = e^{-\alpha t} y$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t})y = e^{-\alpha t}\beta$$

$$e^{-\alpha t}y - y_0 = \int_0^t e^{-\alpha s}\beta ds$$

$$y(t) = e^{-\alpha t}y_0 - \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{\alpha t})$$

Hacemos ahora Euler explícito:

$$\begin{cases} u_{n+1} = y_n + hf(t_n, u_n) & n = 0, ..., \dfrac{N}{T} - 1 \\ u_0 = A & \textit{podemos asumir } A = y_0 \end{cases}$$

Recordemos que cada u_n es una aproximación a $y(t_n)$. También podemos usar y_n como aproximación a $y(t_n)$
Es importante saber que $y_n \neq y(t_n)$.
En nuestro caso, $f(t,y) = \alpha y + \beta$, luego $u_{n+1} = u_n + h(\alpha y_n + \beta)$
Tenemos entonces dos opciones:

- $u_1 = u_0 + h(\alpha u_0 + \beta)$
  $u_2 = u_1 h\alpha(u_1 + \beta) = u_1 + h\alpha(u_0 + h(\alpha u_0 + \beta) + \beta) =$
  $= u_1 + u_0(h\alpha(h\alpha)^2 + \beta(h^2 alfah\alpha)) = u_1 + h\alpha(1 + h\alpha)u_0 + h\alpha(h+1)\beta$
- $u_{n+1} = (1+h\alpha)u_n + \beta h$, *lo que nos queda:* $u_1 = (1+h\alpha)u_0 + \beta h$
  $u_2 = (1+h\alpha)u_1 + \beta h(1+h\alpha)u_0 + \beta h(1 + (1+h\alpha))$
  $u_3 = (1+h\alpha)u_2 + \beta h = (1+h\alpha)((1+h\alpha)^2 u_0 + \beta h(1 + (1+h\alpha))) + \beta h = (1+h\alpha)^3 + \beta h(1(1+h\alpha) + (1+h\alpha)^2)$

$$u_n = (1+h\alpha)^n u_0 + \beta h(1 + (1+h\alpha) + ... + (1+h\alpha)^{n-1})$$
$$= (1+h\alpha)^n u_0 + \frac{\beta}{\alpha}[(1+h\alpha)^n - 1]$$

Podemos observar que la convergencia del segundo método es mejor.

Vamos a comprobar que $u_n \to_{h\to 0,\ n\to+\infty,\ hn=t} y(t)$ *cuando* $t = hn$ *fijo.*

Sabemos que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right) = e^a$. *Entonces,* $(1+h\alpha)^n(1+\frac{hn}{n}\alpha) \to e^{t\alpha}$, *el valor que toma la solución exacta en el punto* t_0.

Calculemos ahora el error, sabemos que:

$$\int \frac{1}{1+x} = 1 - x + x + x^2 - x^3 + ...$$

$$\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \quad \textit{Desarrollo de Taylor de } \log 1 + x \textit{ alrededor de } x = 0$$

El desarrollo de $\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2)$ *con* $|x| \to 0$

Tomando entonces una x *adecuada:*

$$(1+h\alpha)^n = e^{n\log(1+h\alpha)} = e^{nh\alpha\frac{\log(1+h\alpha)}{h\alpha}} = e^{t\alpha(1-\frac{h\alpha}{2}+O(h^2))} = e^{t\alpha}e^{-\frac{h\alpha^2 t}{2}+O(h^2)}$$

Entonces, $(1+h\alpha)^n = -e^{t\alpha} = e^{t\alpha}e^{\cdots} - e^{t\alpha} = e^{t\alpha}(e^{\cdots} - 1) = e^{t\alpha}(... + \frac{[...]^2}{2!} + ...) = e^{\alpha t}(-\frac{h\alpha^2 t}{2}) + O(h^2)$

Hemos llegado a:

$$(1+h\alpha)^n - e^{t\alpha} = -\frac{h\alpha^2 t}{2}e^{\alpha t} + O(h^2)$$

Y el error es:

$$u_n - y_n = ((1+h\alpha)^n - e^{\alpha t})u_0 + \frac{\beta}{\alpha}((1+h\alpha)^n - e^{\alpha t}) = -\frac{h\alpha^2 t}{2}(u_0 + \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t} + O(h^2) \quad h \to 0$$

Ejercicio 12. *Otra vez.*
$y(x) = -2(1-x)^{1/2} + 2$ *es solución del problema. No está definida en* $x = 1$. *La expresión del método de Euler explícito es:*

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

Iterar esto puede ser un dolor de cabeza. Como sabemos la solución exacta y que $\ell(t,y) = \frac{1}{2}y''(x)h^2$ *calculamos:*

$$y''(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$

Entonces

$$\ell(x,h) = \frac{1}{2}\frac{1}{2(1-x)^{3/2}}h^2$$

y el error está acotado si $x < 1$.

Tomando $x < 1 - \delta$:

$$\ell(x;h) = C_\delta h^2$$

no acotado cuando $\delta \to 0$

Ejercicio 13. $n \geq N-1$
$0 < \theta < 1,\ h = \dfrac{T}{N}$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_n + \theta f(t_n, y_n)) \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Los pasos ahora son:

1. *Obtenemos* $f(t_n, y_n)$
2. *Avanzamos desde* (t_n, y_n) *con pendiente* $f(t_n, y_n)$ *hasta el punto* $t_{n+\theta} = t_n + \theta h$ *y obtenemos la abscisa* $y_{n+\theta} = y_n + \theta h f(t_n, y_n)$
3. *Sobre el punto* $(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$ *obtenemos una nueva pendiente* $f(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$
4. *Aquí disponemos ya de dos pendientes, lo ideal es tomar* $k = b_1k_1 + b_2k_2$ *con* $b_1 + b_2 = 1$ *promedio y entonces avanzar desde* t_n *a* t_{n+1} *con esta pendiente:*

$$y_{n+1} = y_n + hk \qquad \text{con } k = b_1k_1 + b_2 + k_2$$

5. *en el caso de este ejercicio es* $b_1 = 0,\ b_2 = 1$

Ejercicio 16.

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Usando el método

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n + \dfrac{h^2}{2}f_n \\ z_{n+1} = z_n + hf_n \\ y_0 = x_0 \\ z_0 = v_0 \end{cases}$$

Se aproxima entonces $y_n \sim x(t_n)$ *y* $z_n \sim x'(t_n)$.

Tomamos $y(t) = x(t)$ *y* $z(t)$. *El sistema se escribe entonces como:*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ f(t, y(t), z(t)) \end{bmatrix}$$

con $y(0) = x_0,\ z(0) = v_0$.

Si usamos la notación $X = \binom{y(t)}{z(t)}$ *tenemos:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = F(t, X(t)) \\ X(0) = X_0 = \binom{x_0}{v_0} \end{cases}$$

con

$$F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ f(t, X_1(t), X_2(t)) \end{pmatrix}$$

Si usamos, por ejemplo, Euler explícito sería:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + hF(t_n, X_n) \to \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + h\underbrace{f(t_n, y_n, z_n)}_{f_n} \end{cases} \\ X_0 \text{ dado} \end{cases}$$

En el caso de nuestro ejercicio, la parte de z_{n+1} *es igual a Euler explícito, mientras que* y_{n+1} *sí cambia. Tendremos un error de segundo orden en* y *uno de primer orden en* z

$$\ell(t; h) = \begin{pmatrix} \ell_y(t; h) \\ \ell_z(t; h) \end{pmatrix}$$

Para calcular ℓ *suponemos la hipótesis de localización* $z_n = z(t),\ y_n = y(t),\ z(t) = y'(t)$*:*

$$\ell_y(t; h) = y(t+h) - y(t) - hz(t) - \frac{h^2}{2}f(t, y(t), z(t)) = y(t+h) - y(t) - hy'(t) - \frac{h^2}{2}y''(t) =$$

$$= \frac{h^3}{3!}y'''(\xi)$$

Y utilizando el desarrollo de la primera derivada:

$$\ell_z(t; h) = z(t+h) - z(t) - hf(t, y(t), z(t)) = y'(t+h) - y'(t) - hy''(t) = \frac{h^2}{2}y'''(\eta)$$

Por tanto el orden del error local del método será el mínimo entre estos dos:

$$||\ell||_\infty = \text{máx}\{|\ell_y|, |\ell_z|\} = O(h^2)$$

Y el método será de orden 1 (uno menor que su error local).

Vemos ahora la estabilidad del método, recordemos que $||\ell||_1 = \dfrac{h^3}{6}||y'''||_\infty + \dfrac{h^2}{2}||y''||_\infty$*:*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n + \dfrac{h^2}{2}f_n \\ z_{n+1} = z_n + hf_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}n + h\tilde{z}_n + \dfrac{h^2}{2}f_n \\ \tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + hf_n \end{cases}$$

$$y_{n+1} - \widetilde{y}_{n+1} = y_n - \widetilde{y}_n + h(z_n - \widetilde{z}_n) + \frac{h^2}{2}(f_n - \widetilde{f}_n)$$

$$z_{n+1} - \widetilde{z}_{n+1} = z_n - \widetilde{z}_n h(f_n - \widetilde{f}_n)$$

Suponemos que:

$$|f(t,y,z) - f(t,\widetilde{y},\widetilde{z}| \leq L(|y-\widetilde{y}| + |z - \widetilde{z}|)$$

equivale a tener $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ *acotadas por* L.

Entonces:

$$|y_{n+1} - \widetilde{y}_{n+1}| \leq |y_n - \widetilde{y}_n| + h|z_n - \widetilde{z}_n| + \frac{h^2}{2}L(|y_n - \widetilde{y}_n| + |z_n - \widetilde{z}_n|)$$

$$\leq (1 + \frac{h^2}{2}L)|y_n - \widetilde{y}_n| + h(1 + \frac{h}{2}L)|z_n - \widetilde{z}_n|$$

$$|z_{n+1} - \widetilde{z}_{n+1}| \leq |z_n - \widetilde{z}_n| + hL(|y_n - \widetilde{y}_n| + |z_n - \widetilde{z}_n|) \leq (1+hL)|z_n - \widetilde{z}_n| + hL|y_n - \widetilde{y}_n|$$

Entonces tendremos que:

$$\underbrace{|y_{n+1} - \widetilde{y}_{n+1}| + |z_{n+1} - \widetilde{z}_{n+1}|}_{\tilde{\theta}_{n+1}} \leq (1 + hL + \frac{h^2}{2}L)|y_n - \widetilde{y}_n| + (1 + h + \frac{h}{2}L + hL)|z_n - \widetilde{z}_n|$$

$$\tilde{\theta}_{n+1} \leq (1 + h\Lambda)\tilde{\theta}_n \ (\textit{con } \Lambda = O(1) \ \textit{y } \Lambda = \text{máx}\{1 + \frac{h}{2}L, \frac{h}{2}L\})$$

Iterando llegamos a $\tilde{\theta}_n \leq (1+h\Lambda)^n \tilde{\theta}_0 \leq e^{t_n \Lambda}\tilde{\theta}_0$

Vamos ahora al error global del método:

$$\theta_n = |y(t_n) - y_n| + |z(t_n) - z_n|$$

Usamos:

$$\begin{cases} \widetilde{y}_n = y(t_n) + hz(t_n) + hf(t_n, y(t_n), z(t_n)) \\ \widetilde{z}_n = z(t_n) + hf(t_n, y(t_n), z(t_n)) \end{cases}$$

Tendremos entonces:

$$\theta_n = |y(t_n) + \widetilde{y}_n + \widetilde{y}_n - y_n| + |z(t_n) - \widetilde{z}_n + \widetilde{z}_n + z_n| \leq |y(t_n) - \widetilde{y}_n| + |z(t_n) - \widetilde{z}_n| + |\widetilde{y}_n - y_n| + |\widetilde{z}_n - z_n| \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{h^3}{6}||y'''||_\infty + \frac{h^2}{2}||y'''||_\infty}_{\ell(h)} + (1 + h\Lambda)\theta_{n+1}$$

$$\theta_n \leq \ell(h) + (1 + h\Lambda)\theta_{n-1}$$

Iterando:

$$\theta_n \leq (1+h\Lambda)^n\theta_0 + \frac{(1+h\Lambda)^n - 1}{1 + h\Lambda - 1}\ell(h) \leq e^{T\Lambda}\theta_0 + \frac{e^{T\Lambda} - 1}{\Lambda}\frac{\ell(h)}{h} = O(1)$$

CAPÍTULO 3

Tema 4

Ejercicio 4.

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6}
\end{array}$$

Las condiciones para obtener un orden 3 son:

1. $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ *(lo tenemos)*
2. $b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2}$ *(también se cumple)*
3. $b_2 + c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3}$

La última condición no se cumple, luego el método no es de orden 3, $\ell(h) = O(h^{p+1})$ *para* $p \leq 2$ *(recordemos que el orden del error local es uno más que el método).*

Si usamos $y' = y$ *puede que la solución sea más precisa, pero esto no va a ocurrir en general. Con lo que no contradecimos con lo que hemos dicho para el orden del método:*

$$f(t,y) = y \implies \begin{cases} k_1 = y_n \\ k_2 = y_n + hy_n = (1+h)y_n \\ k_3 = y_n + \dfrac{h}{2}(y_n + hy_n) = y_n + hy_n + \dfrac{h^2}{2}y_n = y_n\left(1 + h + \dfrac{h^2}{2}\right) \end{cases}$$

Entonces $y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{6}y_n + \frac{1}{6}(1+h)y_n + \frac{2}{6}\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right)y_n\right) = y_n\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}\right).$

Con lo que $y_n = T_3(h)^n$ *donde* $T_3(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}$ *y* $e^h = T_3(h) + O(h^4)$ *y* $T_3(h) = e^h(1 + O(h^4))$ *Entonces:*

$$T_3(h)^n = e^{t_n}(1 + O(h^4))^n = e^{t_n}(1 + O(h^3)) \implies y_n - e^{t_n} = O(h^3)$$

Ejercicio 10.

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2)$$

Con:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1)) \end{cases}$$

Podemos observar que la expresión anidada en k_2 *parece una nueva* k_i*, cambiamos nuestras* $k's$ *para que el problema sea más intuitivo:*

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2) \\ y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3) \end{cases}$$

b)

El tablero de Butcher es:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

c)

Comprobamos el orden:

1. $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ *(Se cumple)*
2. $b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2}$ *(Se cumple)*
3. $b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3}$ *(Se cumple)*
4. $b_3c_2c_3 = \frac{1}{6}$ *(Se cumple)*

Por tanto, el método es de orden máximo y en nuestro caso, es de orden 3.

a)

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(t_n, y_n; h) \text{ donde } \Phi_f(t_n, y_n; h) = \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3$$

$$k_1 = f(t_n, y_n) \implies k_1 \text{ es Lips con respecto al segundo argumento}$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1)$$

$$k_2(y_n) = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1(y_n))$$

$$k_2(z_n) = f(t_n + \frac{1}{3}h, z_n + \frac{1}{3}hk_1(z_n))$$

$$|k_2(y_n) - k_2(z_n)| \leq L_f|y_n + \frac{1}{3}hk_1(y_n) - (z_n + \frac{1}{3}hk_1(z_n))| \leq L_f(|y_n - z_n| + \frac{1}{3}h(k_1(y_n) - k_1(z_n))) \leq$$

$$\leq L_f(|y_n - z_n| + \frac{1}{3}h|y_n - z_n|L_f) = (L_f + \frac{1}{3}hL_f^2)|y_n - z_n| = L'_f|y_n - z_n|$$

$$|k_3(y_n) - k_3(z_n)| \leq L_f(|y_n - z_n|\frac{2}{3}h|k_2(y_n) - k_2(z_n)|) \leq L_f(1 + \frac{2}{3}hL_fL'_f)|y_n - z_n|$$

En general:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(t_n, y_n; h)$$

$$z_{n+1} = z_n + h\Phi_f(t_n, z_n; h)$$

$$|y_n - z_n| \leq (1 + h\Lambda_{\Phi_f})|y_n - z_n|$$

con $\Lambda_f = O(1)$ *con lo que:*

$$|y_n - z_n| \leq (1 + h\Lambda_{\phi_f})^n|y_0 - z_0| \leq e^{hn\Lambda\phi_f}$$

CAPÍTULO 4

Tema 5

4.1 - Indicaciones sobre los métodos multipaso

Hay principalmente tres tipos de ejercicios en este tema:

1. Polinomio característico $\rho(z)$ de segundo o tercer orden. Recordamos que $\rho(1) = 0, \rho'(1) \neq 0 \implies \rho(z) = (z-1)\widetilde{\rho}(t)$. Normalmente hay un parámetro en los coeficientes de $\rho(z)$, a y se piden condiciones sobre a para que se cumplan las condiciones de Dahlquist.
2. Usar $\rho(z)$ y $\sigma(z)$ para determinar el orden del método. Recordemos que $\ell(h) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 \frac{h^2}{2} y^{(2)}(t) + C_3 \frac{h^3}{3} y'''(t) + ...$ y se tiene $\ell(h) = O(h^2) \implies C_0 = C_1 = 0$ ya que $C_0 = \rho(1) = 0,\ C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ y $C_q = \sum_{j=0}^{k} j^q a_j - q \sum_{j=0}^{k} j^{q-1} b_j$
3. Usando fórmulas de interpolación determinar un método multipaso. Dado y_0, y_1, y_2 obtener $\ell(s)$ usando $L'(t) = hf(t_n, y_n)$.

4.2 - Ejercicios

Ejercicio 1.

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(4f_{n+2} + 8f_{n+1}f_n)$$

Aplicarlo a:

$$\begin{cases} y'(t) = t = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(la solución es $y(t) = \frac{t^2}{2}$*)*

Al aplicar el esquema obtenemos:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(4t_{n+2} + 8t_{n+1} - t_n)$$

Como $t_n = nh$:

$$y_{n+2} = y_{n+1} = \frac{h}{12}(4(n+2)h + 8h(n+1) - hn) = \frac{h^2}{12}(4n + 8 + 8n + 8 - n) =$$

$$= \frac{h^2}{12}(11n + 16)$$

Tratamos de obtener la ecuación en diferencias:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h^2}{12}(11n + 16)$$

$$\begin{aligned} n = 0 \qquad & y_2 - y_1 = \frac{h^2}{12}(11 \cdot 0 + 16) \\ n = 1 \qquad & y_3 - y_2 = \frac{h^2}{12}(11 \cdot 1 + 16) \\ n = 1 \qquad & y_4 - y_3 = \frac{h^2}{12}(11 \cdot 2 + 16) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{N-2}(y_{n+2} - y_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{h^2}{12}(11n + 16)$$

$$y_N - y_1 = \frac{h^2}{12}\left(11\sum_{n=0}^{N-2} n + 16(N-1)\right)$$

$$y_N - y_1 = \frac{h^2}{12}\left(11\frac{(N-2)(N-1)}{2} + 16N - 16\right)$$

$$y_N = y_1 + \frac{h^2}{24}(11N^2 - 33N + 22 + 32N - 32) = y_1 + \frac{h^2}{24}(11N^2 - N - 10)$$

La solución exacta es $y(t) = \dfrac{t^2}{2}$ entonces $y(t_N) = \dfrac{N^2h^2}{2}$. Siempre comparamos y_n con $y(t_n)$. Siendo y_n la aproximación en t_n:

$$E(t_N) = y(t_N) - y_N = \frac{N^2h^2}{2} - \frac{11}{24}h^2N^2 + \frac{1}{24}h^2N^2 - \frac{h^2}{12}$$

En el límite estacionario:

$$\lim_{N\to\infty \ h\to 0 \ Nh=t_N} E(t_N) = \frac{t_N^2}{2} - \frac{11}{24}t_N^2 + \underbrace{\frac{1}{24}ht_N - \frac{h^2}{12}}_{\to 0} = \frac{1}{24}t_N^2 \neq 0$$

Entonces $y_N = \dfrac{11}{24}h^2N^2 - \dfrac{h^2N^2}{24} + \dfrac{h^2}{12}$ converge en el límite estacionario pero no a la solución exacta. y_N converge a $z(t) \neq y(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

¿Qué le sucede al esquema numérico para que haga esto?

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(4f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

Método de 2 pasos. Hace falta conocer y_0, y_1 para obtener y_2. Es un método de dos pasos ***implícito*** *(para calcular y_2 usamos f_2). Los polinomios son:*

$$\rho(z) = z^2 - z \qquad \sigma(z) = \frac{1}{12}(4z^2 + 8z - 1)$$

Se cumple la condición de estabilidad ($\rho(1) = 0,\ \rho'(1) \neq 0$). Se debe cumplir que $\sigma(1) = \rho'(1)$ para la consistencia:

$$\sigma(1) = \frac{1}{12}(4 + 8 - 1) = \frac{11}{12} \neq \rho'(1) = 1$$

.

Por tanto, el método no es consistente.

Una forma de solucionar esto es cambiando el 12 del denominador por un 11.

Comentario extra

En el cálculo de y_N hemos usado una suma telescópica. Esto es algo que en principio no lo vamos a poder usar en cualquier problema, vamos a usar otro método más general ahora:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h^2}{12}(1(n+2) + 8(n+1) - n) = \frac{h^2}{12}(11n + 16)$$

Hacemos $y_n = An^2 + Bn$ para buscar una solución particular del problema no homogéneo.

Nota: *en el caso de tener el problema $y_{n+2} - y_{n+1} = 0$, tendríamos $y_n = A0^n + B1^n$ para que el método tenga sentido obviamente necesitamos $y_0 = y_1 = B$ y tendremos $y_n = B$*

Volviendo al no homogéneo:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = A(n+2)^2 + B(n+2) - A(n+1)^2 - B(n+1) =$$

$$= An^2 + 2An + 4A + Bn + 2B - An^2 - 2An - A - Bn - B = 2An + 3A + B$$

Entonces tendremos:

$$2An + 3A + B = \frac{h^2}{12}(11n + 16) = \frac{11}{12}h^2 n + \frac{16}{12}h^2 \implies$$

$$A = 11\frac{h^2}{24} \qquad B = \frac{16h^2}{12} - \frac{33}{24}h^2 = -\frac{1}{24}h^2$$

Con lo que llegamos a:

$$y_n^{(P)} = \frac{11}{24}h^2 n^2 - \frac{1}{24}h^2 n$$

A lo que tenemos que sumar aún la parte homogénea, hemos llegado a la solución particular para el no homogéneo solamente.

$$y_1^{(P)} = \frac{11}{24}h^2 - \frac{1}{24}h^2 = \frac{10}{24}h^2 \neq y_1 = \frac{h^2}{2}$$

La solución de la homogénea es $y_n^{(H)} = \dfrac{h^2}{2}$

La solución general es entonces la suma de ambas partes:

$$y_n = y_n^{(P)} y_n^{(H)} = \frac{11}{24}h^2n^2 - \frac{1}{24}h^2n + \frac{h^2}{2}$$

Ejercicio 5.

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + ay_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

En este caso tenemos un método de dos pasos explícito, necesitamos y_0, y_1. *Vamos a ver las condiciones para la convergencia.*

$$\rho(z) = z^2 - (1+a)z + a \qquad \sigma(z) = \beta_1 z + \beta_0$$

0-estabilidad: $\rho(1) = 1 - (1+a) + a = 0$, $\rho(z) = (z-1)(z-a)$. *Las raíces de* ρ *son 0 y* a. *Necesitamos por tanto que* $|a| < 1$ *o bien* $|a| = 1$ *con* $a \neq 1$ *ya que la multiplicad de a ha de ser 1.*

Valores posibles de a:

$$a = \begin{cases} -1 \\ e^{i\theta} \neq 1 \end{cases}$$

También necesitamos

$$\rho'(z) = 2z - (1+a) \implies \rho'(1) = 1 - a \neq 0 \implies a \neq 1$$

Consistencia:

$$\sigma(1) = \rho'(1) \iff \beta_1 + \beta_0 = 1 - a$$

Recordemos que:

$$\ell(t;h) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 \frac{h^2}{2} y''(t) + C_3 \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(t) + ...$$

Como $C_0 = 0 \;\; C_1 = 0$, *el error* $\ell(t;h) = O(h^2)\ \forall y$

Comprobemos cuando es el método de orden 2 ($C_2 = 0$*):*

$$C_2 = \sum_{j=0}^{2} (j^2 a_j - 2jb_j) = -(1+a) + 4 - 2\beta_1 = 3 - a + 2beta_1 = 0$$

Para el caso de un orden del error local con orden 4 (o orden del método 3) necesitamos:

$$C_3 = 0 \iff \sum_{j=0}^{3} (j^3 a_j - 3^2 b_j) = 7 - a - 3beta_1 = 0$$

Con las hipótesis que tenemos llegamos a

$$\begin{cases} \beta_0 = 2 \\ \beta_1 = 4 \\ a = -5 \end{cases}$$

Pero en este caso perderemos la 0-estabilidad.

Ejercicio 8.

$$y_{n+2} + (\alpha - 1)y_{n+1} - \alpha y_n = \frac{h}{4}((\alpha+3)f_{n+2} + (3\alpha+1)f_n)$$

$$\rho(z) = z^2 + (\alpha-1)z - \alpha \qquad \sigma(z) = (\alpha+3)\frac{z^2}{4} + 0 \cdot z + (3\alpha+1)$$

Sabemos para garantizar la convergencia de al menos orden 1:

- $\rho(1) = 0$
- $0 \neq \rho'(1) = \sigma(1)$

$$\ell(t;h) = c_0 y(t) + c_1 h y'(t) + c_2 \frac{h^2}{2} y''(t) + c_3 \frac{h^3}{3!} y'''(t)$$

$$\begin{cases} c_0 = \rho(1) \\ c_1 = \rho'(1) - \sigma(1) \\ c_2 = \sum\limits_{j=0}^{2} j^2 a_j - 2\sum\limits_{j=0}^{2} j b_j \end{cases}$$

Como tenemos:

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = \alpha - 1 \\ a_0 = \alpha \\ b_2 = (\alpha+3) \\ b_1 = 0 \\ b_0 = 3\alpha + 1 \end{cases}$$

Podemos comprobar que

$$\begin{cases} c_0 = \rho(1) = 1 + (\alpha-1)1 - \alpha = 0 \\ c_1 = \rho(1) - \sigma(1) = \alpha + 1 - \dfrac{4(\alpha+1)}{4} = 0 \\ c_2 = \sum\limits_{j=0}^{2} j^2 a_j - 2\sum\limits_{j=0}^{2} j b_j = \alpha - 1 + 4 - 4\dfrac{\alpha+3}{4} = \alpha + 3 - (\alpha+3) = 0 \\ c_3 = \sum\limits_{j=0}^{2} j^3 a_j - 3\sum\limits_{j=0}^{2} j^2 b_j = 8 + \alpha - 1 - 12\dfrac{\alpha+3}{4} = 7 + \alpha - 3\alpha - 9 = -2\alpha - 2 = 0 \iff \alpha = -1 \end{cases}$$

Entonces si $\alpha \neq -1 \implies c_3 \neq 0 \implies \ell(h) = O(h^3) \implies$ *el error del método es de orden 2. Y si* $\alpha = -1 \implies c_3 = 0 \implies \ell(h) = O(h^4)$ *al menos y el error del método sería de orden 3 al menos.*

Para comprobar que efectivamente el método es de orden 3 para $\alpha = -1$ calculamos c_4 y comprobamos que es distinto de 0:

$$c_4 = \sum_{j=0}^{2} j^4 - 4\sum_{j=0}^{2} j^3 b_j = -2 + 16 - 4(8 \cdot \frac{2}{4}) = -2 \neq 0$$

Para el caso de $\alpha = -1$ con $y' = 0 = f(t, y(t))$ el método es:

$$y_{n+2} = -2y_{n+1} + y_n = 0$$

Con $y_0 = 0,\ y_1 = h,\ y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ tomamos $y_n = r^n \to r^{n+2} - 2r^{n+1} + r^n = 0 \implies r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0 \to r_1 = 1$ raíz doble. Entonces:

$$y_n = r_1^n(An + B) \text{ con } A, B \text{ por determinar} \implies y_n = An + B$$

Y tomando los valores iniciales llegamos a:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \to B = 0 \\ y_1 = h \to A = h \end{cases}$$

Sin embargo, el problema $y'(t) = 0, y(0) = 0$ tiene solución $y(t) = 0$, lo que difiere con nuestros cálculos. ¿A qué se debe esto?

El esquema $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$ tiene como raíces de $\rho(z) = z^2 - 2z + 1,\ z = 1$ doble. Por tanto el esquema no es estable.

Dados $y_0, y_1,\ y_n = An + B \implies B = y_0,\ A = y_1 - y_0$ y el esquema será $y_n = (y_1 - y_0)n + y_0$. La convergencia implica que $h \to 0 \implies t_1 \to t_0$ que son fijos (y a su vez esto implica que $y_1^h \to y_0^h$)

Como en nuestro caso $y_0 = 0,\ y_1 = h$ tenemos que $y_1 - y_0 = h \implies y_n = nh \to$ No hay convergencia.

Tendríamos que tomar $y_1 = h\phi(h)$ con $\phi(h) \to 0$ tal que $y_1 - y_0 = t_n\phi(h) \to 0$.

Todo esto se debe a que $r_1 = 1$ es raíz doble y por tanto no se cumple la condición de Dahlquist.

Ejercicio 10.

$$\ell_y(t; h) = C_0 y(t) + C_1 y'(t)h + C_2 y''(t)\frac{h^2}{2} + ... + C_p y^{(p)}(t)\frac{h^p}{p!}$$

$$\ell = O(h^{p+1}) \iff C_0 = C_1 = ... = C_p = 0$$

Si $\ell = O(h^{p+1}) \implies C_0 = C_1 = ... = C_p = 0$ pero para $y(t) = t^r$ con $r \leq p$, $y^{(j+1)}(t) = 0\ \forall j \geq r \implies \ell_{t^r}(t; h) = 0$

Si $\ell(t; h) = 0 \implies \ell(t; h) = 0 + \underbrace{C_r}_{0}\frac{r!}{r!}h^r + ...$

CAPÍTULO 5

Control resuelto

Apartado a)

Ver las restricciones de los apuntes. Obtenemos que no es de orden 3.

Apartado b)

$$k_1 = y_n$$
$$k_2 = y_n(1 + \frac{1}{2}h)$$
$$k_3 = y_n(1 + \frac{1}{3}h + \frac{1}{6}h^2)$$
$$y_{n+1} = y_n + h(-\frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}y_n + y_n(1 + \frac{1}{3}h + \frac{1}{6}h^2)) = y_n(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3!}h^3) = y_nT_3(h)$$
$$y_n = T_3(h)^n$$

Entonces:
$$T_3(h) = e^h + O(h^4) = e^h(1 + O(h^4))$$

Para nh fijo:
$$T_3(h) = e^{nh}(1 + O(h^4))^n = e^{nh}(1 + O(h^3))$$
$$y_n - e^{t_n} = O(h^3)$$

Y el orden del problema es 3.

Apartado c)

Usando que $t_n = nh$
$$k_1 = t_n^2 = n^2h^2$$
$$k_2 = (t_n + \frac{1}{2}h)^2 = h^2(n + \frac{1}{2})^2$$

$$k_3 = (t_n + \frac{1}{3}h)^2 = h^2(n + \frac{1}{3})^2$$

$$-\frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + k_3 = ... = h^2\left(\frac{1}{12} + \frac{n}{3} + n^2 + \frac{1}{9} + \frac{2n}{3}\right) = h^2(\frac{7}{36} + n + n^2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + k_3\right) = y_n + h^3\left(\frac{7}{36} + n + n^2\right)$$

Haciendo la suma telescópica obtenemos:

$$y_N = y_0 + h^3(\frac{7}{36}N + \frac{N(N-1)}{2} + \frac{(N-1)N(2N-1)}{6})$$

Como la solución exacta es $y(t) = \frac{t^3}{3}$. Cambiamos la expresión haciendo $hN = t_N$ y reduciendo la expresión de y_N:

$$y_N = h^3\left(\frac{7}{36}N + \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} + \frac{N^3}{3} - \frac{N^2}{6} - \frac{2N^2}{6} + \frac{N}{6}\right) = y(t_N) + h^2t_N \implies O(h^2)$$

Apartado e)

$$k_1 = ay_n$$

$$k_2 = a(y_n + \frac{1}{2}hay_n) = y_na(1 + \frac{1}{2}ha)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy_na(1 + \frac{1}{2}ha) = y_n(1 + ah + \frac{a^2h^2}{2})$$

$$y_n = \left(1 + ah + \frac{(ah)^2}{2}\right)$$

$$y_n = p(ah)^n \qquad p(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$$

Estudiando $p(z)$ obtenemos que $|p(z)| < 1 \iff z \in (-2, 0) \iff h \in (0, -\frac{2}{a})$