Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

19 de octubre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1, 2, 3\}$, *los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y* $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ *(recordemos que* $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$*).*

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1-\alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ *entonces:*

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{3} & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{6}{24} = \frac{2}{3} & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{9}{24} = 1 & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Pasando a la parte continua, $P_c(B) = \frac{1}{1-\alpha}P(B \cap D^c)$ *y* $F_c(x) = P_c((-\infty, x])$
$= \frac{1}{1-\alpha}P((-\infty, x] \cap D^c)$

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{15} \cdot \frac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+3}{24} - \underbrace{\frac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{5x+6}{24} - \frac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \frac{24}{15} \cdot \left(\frac{24}{24} \frac{9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Hoja 4

Ejercicio 1.

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

a) *$Y = aX - b$ con $a \neq 0$*

La función usada es la $g(x) = ax - b$, esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de a. Si $h(y) = g^{-1}(x) = \dfrac{y+b}{a}$, recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \qquad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos $h'(y) = \dfrac{1}{a}$ y $g((0,1))$:

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right)\frac{1}{a} = 2\frac{a-y-b}{a^2}I_{(-b,a-b)}$$

$$a < 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right)-\frac{1}{a} = 2\frac{y+b-a}{a^2}I_{(a-b,-b)}$$

b) *$Z = 3X^2 - X$*

Usaremos la función $g(x) = 3x^2 - x$, esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos E_1, E_2 para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en $x = \dfrac{1}{6}$, con lo que tenemos los conjuntos $E_1 = (0, \dfrac{1}{6})$, $E_2 = (\dfrac{1}{6}, 1)$, tenemos que:

$$E_1 \to (-\frac{1}{12}, 0) = F_1 \qquad E_2 = (\frac{1}{6}, 1) \to (-\frac{1}{12}, 2) = F_2$$