Ecuaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier

Colaboración estelar entre Paco Mora  y Chito Belmonte 

25 de abril de 2022

Índice general

En el caso de detección de errores o erratas, agradecemos el contacto a la dirección *eduardo.belmonteg@um.es*

CAPÍTULO 1

Qué chuchas es una ecuación en derivadas parciales

1.0.1. Introducción a EDP

Hemos visto teoría sobre *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Su característica de *Ordinaria* es que sólo se deriva con respecto a una variable.

$$x'(t) = f(t) \to x(t) = \int f + K$$

La familia de soluciones en este caso depende de un parámetro real. Otros tipos de EDO's tienen otro métodos de resolución, como ya vimos.

Por contra, las ecuaciones en derivadas parciales tienen un aspecto distinto.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \to \int f(x, y)dx + g(y)$$

La familia de soluciones depende en este caso de un parámetro que es una función.

La teoría de *Ecuaciones en Derivadas Parciales* consiste en el estudio de algunas funciones, que cumplen determinadas condiciones que nos facilitan su estudio. En muchas ocasiones, nos encontraremos con casos en los que no podamos determinar nada sobre la solución.

La teoría para ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es bastante sencilla. Se reduce a un sistema de lineas a partir de las cuales se puede construir la superficie solución de la ecuación. Este caso de estudio es poco útil, por eso casi siempre nos encontraremos ecuaciones de orden dos o superior.

No vamos a representar en este texto la bonita charla que está dando Matías sobre la primera EDO de la historia y su relación con Sir Isaac Newton, Francisco Misco y el holocausto judío pero es bastante interesante.

1.0.2. Ejemplos de EDPs

Ecuación de ondas

Nos está dando una bonita charla sobre muchas ecuaciones y todavía no ha hablado de ondas... Ya han pasado 25 minutos, auxilio.

Esta modelando como se deforma una cuerda en un punto cuando se le aplica una pequeña fuerza para ello coje un incremento en el eje x, (Δx) y calcula el angulo en el punto x y en $x+\Delta x$, y esto lo pone en funcion de la curva $U(x,t)$:

$$tg(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) \qquad tg(\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Como trabajar con tangentes es muy complicado aproximamos la tangente mediante el angulo: $tg(\alpha) \sim \alpha$. Ahora simplemente restamos estos dos ángulos y multiplicamos por la tensión (T), y esto debe ser una fuerza que como sabemos es masa por aceleración. La masa viene dada por $\rho\Delta x$ donde ρ es la densidad de masa por longitud (constante). La aceleracion es la derivada segunda de $U(x,t)$ respecto de t quedando por tanto la siguiente ecuacion:

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = F = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

$$T\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\partial x}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Tomando el limite $\Delta x \to 0$

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Llegamos a la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Cuya solución podemos calcular haciendo $\rho/T = 1/c^2$, la ecuación queda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, entonces algunas soluciones son:

$$u(x,t) = f(x+ct) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+ct) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t} = c^2 f''(x+ct)$$

$$u(x,t) = f(x+ct) - g(x-ct)$$

Sabemos que $u(0,t) = u(2,t) = 0$ y entonces:

$$f(ct) + g(-ct) = 0\forall t \implies f(x) = -g(-x)\ \forall x$$
$$f(1+ct) + g(1-ct) = 0\forall t \implies f(x+2) = -g(-x)\ \forall x$$

Por tanto, $f(x) = f(x+2)$ y f es 2-periódica.

Coje un muelle le pone una masa gorda al final, desde esa masa saca otro muelle hacia delante y le pone otra masa y asi continuamente, y llama al desplazamiento de la masa n $U(n,t)$ donde la n es un numero natural que indica cual de las masas estamos cogiendo y la t es como siempre el tiempo. Ahora cogemos y restamos una masa con la anterior para aplicar la ley de hook a un solo muelle entre dos masas "contiguas", $F = K \cdot x$, de forma que se nos queda la siguiente ecuacion:

$$k(U(n-1,t) - U(n,t)) - k(U(n,t).U(n+1,t)) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n,t)$$

donde la k es la constante del muelle, m es la masa y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n,t)$ es la aceleracion.

$$U(n+1,t) - 2U(n,t) + U(n-1,t) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n,t)$$

Tomando límites, el primer miembro nos recuerda a la segunda derivada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = f''(x)$$

Volviendo a nuestra ecuación:

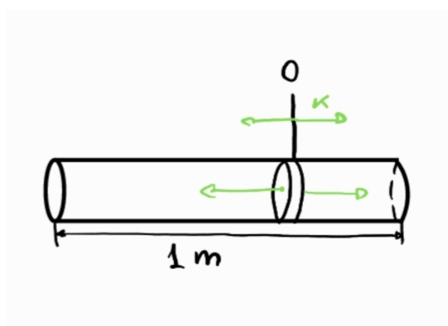
$$k\frac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 = \rho\Delta x\frac{\partial^2(x,t)}{\partial t^2}$$

La constante del muelle (k) depende de la longitud del muelle por tanto le afecta el incremento de x (Δx):

$$\frac{k}{\cancel{\Delta x}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\cancel{(\Delta x)^2} = \rho\cancel{\Delta x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Con lo que nos queda la ecuación de ondas que vimos anteriormente.

Para ilustrar la ecuación de ondas que acabamos de estudiar creamos un modelo de un recipiente en el que se puede desplazar una barra. La P es la presión y V es el volumen del recipiente.



$$\cancel{P} = (P - \Delta P)(1 + x) = \cancel{P} - \Delta P + xP - \underbrace{\Delta P}_{\sim 0}$$

$$\Delta P = -xP$$

Seguimos con las introducciones físicas que no sabemos de dónde vienen ni a dónde van.

Tenemos un cilindro con un fluido, queremos calcular la presión en función de la altura de un fluido contenido en un cilindro vertical. Para ello calculamos las fuerzas que se ejercen. La primera es la generada por la presión atmosférica que se encuentra en el eje vertical, la segunda es (no se cual es la que va hacia arriba tiene que ser otra presión) y luego el peso del fluido. La suma de estas fuerzas tiene que ser 0 pues el fluido esta en reposo por tanto tenemos que la diferencia de presión entre dos puntos(z y Δz) multiplicada por la superficie del agua superficial (que nos da una fuerza), y el peso es $g\rho\Delta x$ donde g es la gravedad y ρ la densidad han de ser iguales.

$$p\omega = g\rho S\Delta z$$

$$(P(z) - P(z+\Delta z))\cancel{S} = g\rho\cancel{S}\Delta z$$

Si pasamos el Δx dividiendo y hacemos el limite obtenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

$$\nabla p = (0, 0, -\rho g)$$

Vamos a resolver la ecuacion:

$$\rho \sim cp$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = cp(z)$$

$$-p'(z) = cp(z) \qquad \frac{p'}{p} = -c \qquad p(z) = p_0\rho^{-cz}$$

Ecuación de los fluidos

Tenemos una corriente en un fluido no compresible y nos fijamos en una seccion (S) orientada (tenemos un vector normal) y queremos medir que cantidad de fluido atraviesa S. Tenemos que la velocidad del fluido (v) depende de la posicion (x,y,z) y del tiempo. Y para modelar la masa que atraviesa la seccion (masa saliente de la seccion) por unidad de tiempo hacemos este calculo:

$$\underbrace{\rho\overrightarrow{S}\,\overrightarrow{v}\,\Delta t}_{\text{masa saliente}} \;\rightarrow\; \underbrace{\iint\limits_{\partial D} \rho\overrightarrow{v}\,d\overrightarrow{S}}_{\text{integral de flujo}}$$

Podemos aplicar el teorema de Gauss-Ostrogadsky para convertir esta integral en una integral triple.

$$\iint\limits_{\partial D} \rho\overrightarrow{v}\,d\overrightarrow{S} = \iiint\limits_{D} \rho dV$$

1.0.3. Ecuación de calor.Procesos de difusión

Tomemos una región confinada de moléculas que se mueven de manera caótica, cada partícula tiene una trayectoria propia. Seguimos de forma estadística las trayectorias.

Sean X, Y una variables aleatorias. Cuando son independientes sus funciones de densidad $f(x), g(y)$ cumplen que $f(x) \cdot g(y)$ el densidad conjunta. Como consecuencia, si tenemos un conjunto

$$P((X, Y \in A)) = \iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$$

Para calcular la función de distribución de $X + Y$ (es decir, $P(X + Y \leq Z)$ se procede de este modo:

$$P(X+Y \leq z) = \iint\limits_{x+y\leq z} f(x)g(y)dxdy$$

Para calcular esta integral podemos hacer el cambio de variable $x = s,\ x+y = z$, de forma que la integral queda:

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(z-s)ds \right)}_{\text{densidad de } X+Y\text{, la convolución}} dz$$

Cuando apliquemos esto a una función $f(x,t)$ que represente una eucación diferencial, usando una v.a. densidad ϕ con varianza proporcional al incremento del tiempo obtenemos lo siguiente:

$$f(x,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} = f(x+\xi,t)\phi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\xi \right) \phi(\xi)d\xi$$

$$\simeq f(x,t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)c\tau \implies \frac{\partial f}{\partial t} = c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Ahora olvidaos de toda la **bullshit** que hemos visto que comienza el espectáculo, empieza el temario.

1.1 - Qué es una EDP

Definición 1.1.1. ***Ecuación en Derivadas Parciales***

*Una **EDP** es una ecuación de la forma*

$$F\left(x_1, x_2, x_3, ..., \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^n u}{??}\right)$$

Con u una función doblemente derivable.

Su diferencia fundamental con las $EDOs$ es... [a]

La expresión general de una EDP es

$$f(x,u) = u'$$

Si se le añade una condición inicial, estamos ante un problema de Cauchy, pero tal cual está expresado sus soluciones no son únicas. Aquí aparecen lo que se llaman 'soluciones singulares'.

Definición 1.1.2. ***EDP de Primer Orden***

$$F\left(x_1, x_2, ..., \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., u\right) = 0$$

Dice Matías que no le gusta esta ecuación así que en su lugar nos va a explicar otra

Definición 1.1.3. ***Ecuación quasi-lineal en dos variables***

$$A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x,y,u)$$

Estas son las primeras que vamos a resolver y, a partir de estas, veremos las soluciones de una EDP de primer orden. Para una EDP de segundo orden, pueden aparecer derivadas mixtas (cosa que no aparece en los ejemplos), y la teoría nos dice que con los cambios oportunos de variable se pueden hacer desaparecer las derivadas mixtas de problemas de cierta generalidad, y hacerlos semejante a las soluciones de una EDP de primer orden con la que ya estamos familiarizados.

Han sido unos maravillosos 24 minutos de lucidez de Matías. Ahora ha vuelto a hablar de curvas y dibujitos y está sufriendo una embolia en la pizarra. Aprovecho para contaros un chiste: Un matemático, un físico y un biólogo están mirando una casa. En la casa entran dos personas y salen tres. El físico dice 'Ha debido de ser un error en la medición'. El biólogo dice 'No, es probable que se hayan reproducido'. El matemático dice 'Si entra una persona más, la casa se queda vacía'.

Definición 1.1.4. *Llamamos ecuaciones cuasi-lineales a las que son de la forma:*

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = C$$

Donde $A, B, C : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^1 *(*A, B, C *son de la forma* $A(x,y,u)$ *y* u *es de la forma* $u(x,y)$*)*

Teorema 1. *Consideremos el sistema autónomo de Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = A(x,y,z) \\ y' = B(x,y,z) \\ z' = C(x,y,z) \\ (x(0), y(0), z(0)) = P \end{cases}$$

definido en $S = \{(x,y,z) \ : \ z = u(x,y)\}$ *Entonces si* $p \in S$*, toda la órbita solución* $(x(t), y(t), z(t)) \in S$ *donde* u *es solución del sistema.*

Dada la ecuación:

$$\begin{cases} x' = A(x,y,z) \\ y' = B(x,y,z) \\ z' = C(x,y,z) \\ (x(0), y(0), z(0)) = P \end{cases}$$

Dada $\Gamma(t,s)$ a la solución de la ecuación y que pasa por $\gamma(s)$, es decir, $\Gamma(0,s) = \gamma(s)$, al ser Γ solución sabemos también que:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s) = A(\Gamma(t,s)) \forall s, \forall t^1$$

[1]que estén dentro de un cierto entorno

Ejemplo 1. ***Resolución de ecuación lineal en coeficientes constantes***

Si tomamos la ecuación lineal de coeficientes constantes:

$$\begin{cases} u_Y + cu_X = 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Esta ecuación, transformada a un sistema es:

$$\begin{cases} x' = c \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Si tomamos la condición de que la solución pase por la curva $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$, es decir, $x(0) = s,\ y(0) = 0, z(0) = h(s)$. La solución la podemos encontrar de forma inmediata:

$$\begin{cases} x = ct + cte & \rightarrow & x(t,s) = ct + s \\ y = t + cte & \rightarrow & y(t,s) = t \\ z(t) = cte & \rightarrow & z(t,s) = h(s) \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que $s = x - cy \implies z = h(x - cy)$ y la solución es $u(x,y) = h(x - cy)$

Ejemplo 2. *Resolvemos un problema de la forma*

$$\begin{cases} xu_Y - yu_X = u \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Escribimos el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$$

Fácilmente llegamos a la solución:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(t) \\ y(t) = c_1 \sin(t) \\ z(t) = c_2 e^t \end{cases}$$

Si tomamos la condición inicial $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$ tenemos la solución del sistema:

$$\begin{cases} x(t,s) = s\cos(t) \\ y(t,s) = s\sin(t) \\ z(t,s) = h(s)e^t \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = s^2 \implies s = \sqrt{x^2+y^2}$, tomamos $t = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t) \implies t = \arctan(\dfrac{y}{x})$. La solución es entonces:

$$u(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})e^{\arctan(y/x)}$$

Ejemplo 3.

$$\begin{cases} u_Y + uu_X = 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

El sistema autónomo es:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

La condición inicial que tenemos es $(x(0), y(0), z(0)) = (s, 0, h(s))$, con lo que obtenemos:

$$\begin{cases} z = h(s) \\ x = h(s)t + s \\ y = t \end{cases}$$

Tendemos que eliminar ahora los parámetros t, s para encontrar la función u:

$$s = x - h(s)t = x - yu$$

$$u = h(s) = h(x - yu)$$

Para tratar de encontrar h, tomamos dos puntos s_1, s_2:

$$x = h(s_1)y + s_1 \qquad x = h(s_2)y + s_2$$

$$h(s_1)y + s_1 = h(s_2)y + s_2$$

$$(h(s_1) - h(s_2))y = s_2 - s_1$$

$$y = \frac{s_2 - s_1}{h(s_1) - h(s_2)}$$

Y aquí ya no se qué hacemos, un saludo.

¿Qué esta haciendo? Yo que sé.

Tratamos de parametrizar los planos que son tangentes a la esfera unidad. En primer lugar, parametrizamos la esfera como $(\cos(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\phi))$ $\theta \in [0, 2\pi]$ $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Para parametrizar el plano, notemos que un punto (x, y, z) está en el plano si: (consideremos que el punto en el que el plano es tangente es $(\cos(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\phi))$):

$$(x - \cos(\theta)\cos(\phi), y - \sin(\theta)\cos(\phi), z - \sin(\phi)) \cdot (\cos(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\phi)) = 0$$

O equivalentemente:

$$(\cos(\theta)\cos(\phi))x + (\sin(\theta)\cos(\phi))y + \sin(\phi)z - 1 = 0$$

Si ahora fijamos el parámetro ϕ fijo y derivamos en función de θ:

$$-(\sin(\theta)\cos(\phi_0))x + (\cos(\theta)\cos(\phi_0))y = 0$$

Nos queda la siguiente envolvente:

$$\begin{cases} (\cos(\theta)\cos(\phi_0))x + (\sin(\theta)\cos(\phi_0))y + \sin(\phi_0)z = 1 \\ -(\sin(\theta)\cos(\phi_0))x + (\cos(\theta)\cos(\phi_0))y = 0 \\ \text{objetivo: eliminar } \theta \end{cases}$$

Vamos a suponer que $\cos(\phi_0) \neq 0$, entonces:

$$\sin(\theta)x = \cos(\theta)y \iff \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan(\theta)^2}} = \frac{y/x}{\sqrt{1+(y/x)^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Entonces volviendo a las ecuaciones que teníamos:

$$(x^2+y^2)\cos(\phi_0) + z\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi_0) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi_0) + z\sin(\phi_0) = 1$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi_0) = 1 - z\sin(\phi_0)$$

$$(x^2+y^2)\cos^2(\phi_0) = 1 - 2z\sin(\phi_0) + z^2\sin^2(\phi_0)$$

Estas ecuaciones definen un cono doble con el vértice desplazado.

Volvemos ahora a la ecuación inicial sin tomar un parámetro fijo. Trataremos de encontrar la EDP que modeliza nuestro problema. Ahora, $z = z(x,y),\ p = \dfrac{\partial z}{\partial x},\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Derivamos ahora respecto de x y respecto de y:

$$(\cos(\theta)\cos(\phi))x + (\sin(\theta)\cos(\phi))y + \sin(\phi)z - 1 = 0$$

$$\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)p = 0$$

$$\sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\phi)q = 0$$

Nuestro objetivo será eliminar θ, ϕ.

$$\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) = p^2\sin^2(\phi)$$

$$\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) = q^2\sin^2(\phi)$$

$$\cos^2(\phi) = (p^2+q^2)\sin^2(\phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

Entonces en nuestra ecuación:

$$-px\sin(\phi) - qy\sin(\phi) + z\sin(\phi) = 1$$

$$(z - px - qy)\sin(\phi) = 1$$

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = 1$$

$$\sin(\phi) = \frac{\tan(\phi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi)}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{p^2 + q^2}}} = \frac{1}{p^2 + q^2 + 1}$$

Después de todo esto para nada confuso, tenemos la EDP siguiente por algún motivo totalmente claro para el lector:

$$\frac{u - xu_x - yu_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = 1$$

Podemos comprobar que la esfera $u(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es solución de esta EDP, queda aquí sin desarrollar pero solo es calcular u_x, u_y y comprobar que se cumple la EDP escrita anteriormente.

1.1.1. Factor integrante en 3 variables

Tratamos de resolver el problema:

$$A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz = 0 \tag{1.1}$$

Es decir, encontrar una superficie de nivel en la que $F(x, y, z) = c$ constante y en la que se cumpla 1.1

Suponemos una 2-forma $\omega = \mu dF$ y la 3-forma:

$$d\omega = d\mu \wedge dF + \underbrace{\mu d^2 F}_{=0}$$

$$\omega \wedge d\omega = \omega \wedge (d\mu dF) = \omega \wedge (d\mu \wedge (\frac{1}{\mu}\omega)) =$$

$$= d\mu \wedge \underbrace{\left(\frac{1}{\mu}\omega \wedge \omega\right)}_{=0}$$

Luego $\omega \wedge d\omega = 0$.

Recordemos que $d\omega \sim rot(A, B, C)$ que se calculaba como:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\omega \wedge d\omega \sim A\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.2}$$

Esta será una condición suficiente y necesaria para que obtener la solución.

El caso particular en el que tenemos

$$A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy - dz = 0$$

Podemos reescribir la condición 1.2 como

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}A$$

Método 2. *Resolución $F(x,y,z,p,q) = 0$ apoyándonos en $G(x,y,z,p,q) = C_1$*

Tratamos de encontrar esa función G para poder eliminar las variables p, q de la ecuación.

La ecuación que tenemos es de la forma $dz = pdx + qdy \to f(x,y,z) = C_2$. Con lo que acabamos de ver se nos queda

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p$$

En primer lugar derivamos con respecto de y

$$\begin{cases} F_y + F_p\dfrac{\partial p}{\partial y} + F_q\dfrac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ G_y + G_p\dfrac{\partial p}{\partial y} + G_q\dfrac{\partial q}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Utilizando la regla de Cramer:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{G_yF_q - G_qF_y}{F_pG_q - F_qG_p}$$

De forma análoga obtenemos:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{F_xG_p - F_pG_x}{F_pG_q - F_qG_p}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{G_zF_q - G_qF_z}{F_pG_q - F_qG_p}$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{F_zG_p - F_pG_z}{F_pG_q - F_qG_p}$$

Volviendo a la ecuación que teníamos (y quitando los denominadores porque son iguales):

$$G_yF_q - G_qF_y + (G_2F_q - G_qF_z)q = F_xG_p - F_pG_x + (F_zG_p - F_pG_z)p$$

$$F_p\frac{\partial G}{\partial x} + F_q\frac{\partial G}{\partial y} + (F_qq + F_pp)\frac{\partial G}{\partial z} - (F_x + F_zp)\frac{\partial G}{\partial p} - (F_y + F_zq)\frac{\partial G}{\partial q} = 0$$

Esto es una ecuación lineal en G de 5 variables con sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = F_p \\ y' = F_q \\ z' = qF_q + pF_p \\ p' = -F_x - pF_z \\ q' = -F_y - qF_z \end{cases}$$

Aplicación de este método a las ecuaciones cuasi-lineales

Dada la ecuación $A(x,y,z)p + B(x,y,z)q - C(x,y,z) = 0$, si aplicamos el procedimiento que acabamos de ver obtenemos el sistema (teniendo en cuenta que $x' = A$ $y' = B$ $z' = C$):

$$\begin{cases} F_p = A \\ F_q = B \\ qF_q + pF_p = qB + pA = C \end{cases}$$

De esta forma podemos obtener una solución general para la ecuación cuasi lineal.

Ejemplo 4. *Comprobar que la siguiente ecuación es integrable e integrar:*

$$(x-r)dx + (y-r)dy + (z-r)dz = 0$$

Donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Llamamos $F = (A,B,C) = (x-r, y-r, z-r)$ *al campo de vectores. Recordemos que:*

$$rotF = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

Para calcularlo primero obtenemos:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Entonces el rotacional es:

$$rotF = \left(-\frac{y}{r} + \frac{z}{r}, -\frac{z}{r} + \frac{x}{r}, -\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r}(z-y, x-z, y-x)$$

Calculamos ahora $F \cdot rotF$ *para comprobar que se anule y que por tanto se cumple la condición de Frobenius:*

$$F \cdot rotF = \frac{1}{r}[(x-r)(z-y) + (y-r)(x-z) + (z-r)(y-x)] = 0 \iff$$

$$(x-r)(z-y) + (y-r)(x-z) + (z-r)(y-x) = 0 \iff$$

$$\underbrace{x(z-y) + y(x-z) + z(y-x)}_{=0} - r[\underbrace{(z-y) + (x-z) + (y-x)}_{=0}] = 0$$

Luego $F \cdot rotF = 0$, *sí se cumple la condición de Frobenius, y el sistema podrá resolverse.*

Buscamos un factor integrante, supongamos $z = cte$. *En este caso:*

$$(x-r)dx + (y-r)dy = 0$$

$$\left(\frac{x}{r} - 1\right)dx + \left(\frac{y}{r} - 1\right)dy = 0$$

Encontrar una solución puede ser directo, en este caso vemos que $f(x,y) = r - x - y$ *es solución:* $f_x = r - x,\ f_y = r - y$

Volviendo a nuestro caso, supongamos que la solución es de la forma $r - x - y - C(z) = F(x,y,z)$. Entonces si escribimos la ecuación de la forma:

$$\left(\frac{x}{r} - 1\right) dx + \left(\frac{y}{r} - 1\right) dy + \left(\frac{z}{r} - c'(z)\right) dz$$

Tendremos que $\cancel{z} - rC'(z) = \cancel{z} - r$, luego $C'(z) = 1 \to C(z) = z + cte$

1.2 - EDP's de segundo orden

Las ecuaciones de la forma:

$$A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{01}\frac{\partial}{\partial x} + A_{02}\frac{\partial}{\partial y} + A_0$$

Las trataremos de ver como polinomios:

$$A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + A_{01}x + A_{02}y + A_0$$

Por ejemplo, la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Método 3. ***Cambio de variable***

A partir de la ecuación en $u(x,y)$, haremos los cambios de variable de la forma:

$$\begin{cases} t = \alpha x + \beta y \\ s = \gamma x + \delta y \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

Este cambio nos proporciona las siguientes ecuaciones en $\overline{u}(s,t)$:[a]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \alpha\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \gamma\frac{\partial \overline{u}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ... = \beta\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \delta\frac{\partial \overline{u}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial s}\right) = \alpha\left(\alpha\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s^2}\right) = \alpha^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} + 2alfa\gamma\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t \partial s} + \gamma^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t \partial s} + \delta^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha\left(\beta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} + \delta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t \partial s}\right) + \gamma\left(\beta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t \partial s} + \delta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s^2}\right) = \alpha\beta\frac{\partial \overline{u}}{\partial t^2} + (\alpha\delta + \gamma\beta)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t \partial s} + \gamma\delta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s^2}$$

Sustituyendo en $Au_{xx} + Bu_{yy} + Cu_{xy}$ tenemos:

$$(A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2)\overline{u}_{tt} + (A_2\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C2\beta\delta)\overline{u}_{ts} + (A\gamma^2 + B\gamma\delta + C\delta^2)\overline{u}_{ss}$$

Tomando el coeficiente de $\overline{u}_{tt}$ *y suponiendo* $\beta \neq 0$ *nos queda al igualar a 0 una ecuación de segundo grado:*

$$A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + B\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + C = 0$$

$$Az^2 + Bz + C = 0 \implies \begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ z_2 = \dfrac{\gamma}{\delta} \quad \textit{(al hacer lo mismo en } \overline{u}_{ss}\textit{)} \end{cases}$$

Aquí me reperdí, copio:

$$\gamma(2A\alpha + B\beta) = 0$$

$$\gamma(\underbrace{B\alpha + 2C\beta})_0$$

[a]Las erratas en estas cuentas no son probables, son seguras

CAPÍTULO 2

Fourier

2.1 - Serie trigonométrica

Definición 2.1.1. *Una* ***serie trigonométrica*** *es de la forma:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Estas series son $2\pi-$*periódicas y las definimos en* $[-\pi, \pi]$ *o* $[0, 2\pi]$.

Si consiguiéramos demostrar que las series de Fourier son convergentes de manera uniforme:

Fijamos un n y multiplicamos por $\cos(nx)$

$$f(x)\cos(nx) = \frac{a_0}{2}\cos(nx) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx)$$

Integrando ahora:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\cos(nx)dx}_{\substack{\text{si } n=0 \implies \pi a_0 \\ \text{si } n\neq 0 \implies 0}} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_k \cos(kx)\cos(nx)dx + \int_0^{2\pi} b_k \sin(kx)\cos(nx)dx$$

Usando identidades trigonométricas podemos ver que:

$$\int_0^{2\pi} a_k \cos(kx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 2\pi & k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} b_k \sin(kx)\cos(nx)dx = 0$$

Luego podremos despejar a_n como:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

Con cuentas análogas podemos hacer:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Definición 2.1.2. ***Espacio de Hilbert***
Definimos H el espacio de Hilbert como un espacio vectorial con producto escalar que cumple las siguientes propiedades:

- *Es simétrico*
- $< x, x > \geq 0$
- $< x, x >= 0 \implies x = 0$
- *Es* $\mathbb{R}-$*lineal*
- *Es* $\mathbb{C}-$*hermítico*

Esto último quiere decir que se cumple:

$$< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$$

$$< x, \lambda y >= \overline{\lambda} < x, y >$$

$$< x, y >= \overline{< y, x >}$$

Con esta definición de producto escalar podemos llegar a esta propiedad:

$$< x+y, x+y >= \underbrace{< x, x >}_{\geq 0} + \underbrace{< x, y > + < y, x >}_{\substack{<x,y>+\overline{<x,y>} \\ 2Re(<x,y>)}} + \underbrace{< y, y >}_{\geq 0}$$

Otras propiedades de este producto son:

- $\sqrt{< x, x >}$ define una norma $\|x\|$ que cumple $\begin{cases} \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \\ \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$| < x, y > |^2 \leq < x, x >< y, y >$$

Definición 2.1.3. ***Polinomio trigonométrico***

Llamamos ***polinomios trigonométricos*** *a las sumas de la forma:*

$$\frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Teorema 1. ***Stone-Weierstrass*** *($\mathbb{R}$)*

Sea K compacto y $A \subset C(K)$ una álgebra (subespacio vectorial tal que $f, g \in A \implies fg \in A$) tal que A contiene las constantes y A separa puntos de K, es decir, $\forall t, s \in K,\ t \neq s,\ \exists f \in A f(t) \neq f(s)$. Entonces A es denso en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

Definición 2.1.4.
Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, denotamos a $\mathcal{L}^2(\mu)$ a:

$$\mathcal{L}^2(\mu) = \{f : \Omega \to [-\infty, +\infty] \text{ medible } \int_\Omega |f|^2 d\mu < +\infty\}$$

En este conjunto podemos definir la relación de equivalencia coincidir en casi todo punto:

$$f \sim g \iff \mu(\{t : \ f(t) = g(t)\}) = 0$$

Definimos $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\sim$

Proposición 2.1.1. *$L^2(\mu)$ es un espacio vectorial en el que se define $< f, g >= \int fg d\mu$ y se cumple que:*

- $0 \leq |f + g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$
- $|fg| \leq \frac{1}{4}((f + g)^2 + (f - g)^2)$
- $\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >}$ *es una norma*
- $(L^2(\mu), \|\cdot\|_2)$ *es completo*

La demostración del último punto puede encontrarse en el segundo apéndice de los apuntes de FVV3

Proposición 2.1.2. *Sea X un espacio normado, $F \subset X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces para cada $x \in X$ existe $y \in F$ tal que:*

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| \ : \ z \in F\} = d(x, F)$$

Es decir, el ínfimo es un mínimo.

Además, si la norma es convexa, y es único.

Demostración

Si el punto x está en F, tomaremos $y = x$.

Si $x \notin F$, la bola $B[x, \|x\|]$ corta a F ya que $0 \in F$. Por tanto sabemos que $d(x, F) \leq \|x\|$.

Además, si $z \notin B[x, \|x\|] \implies \|x - z\| \geq \|x\|$, y no lo tendremos en cuenta para calcular el ínfimo.

Al tener F dimensión finita es completo, lo que implica que:

$$A \subset F \text{ con } A \text{ cerrado relativo a } F \implies A \text{ cerrado en } X$$

Entonces si $s \in \overline{A},\ \exists (s_n) \subset A \|s_n - s\| \to 0 \implies (s_n)$ es de Cauchy. Lo cual implica que también es de Cauchy en F y al ser F completo, (s_n) converge en F:

$$\exists r \in F \mid \|s_n - r\| \to 0 \implies r = s \implies s \in F$$

Luego si A fuera cerrado, $s \in A$

Si $z_n \in B[x, \|x\|] \cap F$, entonces $\|x - z_n\| \to d(x, F)$, luego podemos encontrar una subsucesión convergente (z_{n_k}), $z_{n_k} \to y$, de forma que:

$$\|x - z_{n_k}\| \to \|x - y\|$$

Con esto tenemos probado que si $x \in \overline{X}$ existe una "mejor aproximación" $y \in Y$ de forma que $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| \ : \ z \in F\}$

Veamos ahora la unicidad si X es estrictamente convexo.

Como tenemos un producto escalar y F tiene dimensión n, podemos tomar $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal de F. Definimos entonces $y = \sum\limits_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

Comprobaremos que $x - y \perp F$:

$$< x - y, e_k >=< x, e_k > - < y, e_k >=< x, e_k > - < \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j, e_k >=$$

$$=< x, e_k > - \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > \underbrace{< e_j, e_k >}_{\delta_{jk}} =< x, e_k > - < x, e_k >= 0$$

La mejor aproximación es entonces la proyección ortogonal por el teorema de Pitágoras.

□

Lema 2.1.1.

La norma $\|\cdot\|_2$ da una mejor aproximación que $\|\cdot\|_\infty$

Demostración

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2 dt = 2\pi \|f\|_\infty^2$$

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty$$

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar Stone-Weierstrass:

Demostración

DISCLAIMER: no tengo ni idea de lo que he copiado a continuación

Demostración del Teorema de Stone-Weierstrass

$$f \in C(\pi)$$

$$F_n = span\{e^{ik} : |k| \leq n\}$$

$$\text{ínf}\{\|f-g\|_\infty \ : \ g \in F_n\} = d_n \downarrow 0$$

$$\text{ínf}\{\|f-g\|_2 : \ g \in F_n\} \leq \sqrt{2\pi} d_n \downarrow 0$$

Si tomamos $\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} : \ |k| \leq n \right\}$ una base ortonormal de F_n:

$$\sum_{|k|\leq n} < f, \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} > \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \to_{\|\cdot\|_2} f$$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < f, \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} > \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt}$$

□

Teorema 2.
Si $f \in C(\pi)$, su serie de Fourier

$$\sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt}$$

converge en sentido de la norma $\|\cdot\|_2$

Demostración

Cada término es de la forma:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f t e^{-int} dt$$

Integrando por partes:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) = \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt$$

De nuevo integramos por partes:

$$a_n = \frac{1}{2\pi in} \left(f'(t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) = -\frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2\pi} f''(t) e^{-int}$$

Luego tenemos convergencia. Necesitamos que f sea dos veces derivable, esto quizás es 'pedir demasiado'. Vamos a intentar aplicar Weierstrass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \implies \text{Serie de Fourier converge unif.}$$

De la cadena de igualdades anteriores, sabemos que:

$$b_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f'(t)e^{-int}dt \implies |a_n| = \frac{|b_n|}{n}$$

Entonces:

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| = |b_1| + \frac{1}{2}|b_2| + ... + \frac{1}{n}|b_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} \to \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\|f'\|_2}$$

Luego hemos eliminado la hipótesis de que sea dos veces derivable, ahora solo necesitamos que sea derivable una vez.

$\square$

CAPÍTULO 3

La ecuación de ondas

3.1 - La ecuación de ondas en una dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad c > 0$$

Hay varias formas de resolver este tipo de ecuaciones, algunas de ellas son el método de D'Alembert y el de Bernoulli-Fourier. La primera consiste en expresar $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ y en el segundo usaremos $s(x) = u(x,0),\ v(x) = u_t(x,0)$

Podemos buscar una relación entre estos dos métodos:

$$f(x) + g(x) = s(x)$$

$$u_t(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct) \implies cf'(x) - cg'(x) = v(x)$$

Y derivando en la primera igualdad nos queda el sistema:

$$\begin{cases} f'(x) - g'(x) = \dfrac{v(x)}{c} \\ f'(x) + g'(x) = s'(x) \end{cases}$$

Que nos lleva a:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{v(x)/c + s'(x)}{2} \\ g'(x) = \dfrac{cs'(x) - v(x)}{2c} \end{cases}$$

Usando Barrow tenemos entonces que:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{v(z)}{c} + s'(z)\right) dz = \frac{1}{2c}\int_0^x v(z)dz + \frac{s(x) - s(0)}{2}$$

Análogamente:

$$g(x) - g(0) = \int_0^x g'(z)dz = -\frac{1}{2c}\int_0^x v(z)dz + \frac{s(x) - s(0)}{2}$$

Si evaluamos estas igualdades en $x + ct$ y $x - ct$:

$$f(x + ct) - f(0) = \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} + \frac{s(x + ct) - s(0)}{2}$$

$$g(x - ct) - g(0) = -\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} v(z)dz + \frac{s(x - ct) - s(0)}{2}$$

Al sumar estas dos expresiones, como $f(0) + g(0) = s(0)$, se cancelarán estos términos. Cambiaremos también la segunda integral para 'darle la vuelta' a los extremos. La suma queda:

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(z)dz + \frac{s(x + ct) + s(x - ct)}{2}$$

3.2 - La ecuación de ondas en varias dimensiones

Recordemos que en el caso unidimensional tenemos la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Para pasar al caso de varias dimensiones tendremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = 0$$

Para el caso de dimensión 3 recordemos que podemos tomar la media de los puntos en una circunferencia como:

$$M_f(x, r) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S^2} f(x + ry)dS(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(M_f(x, r)) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S^2}\frac{\partial}{\partial r}(f(x + ry))dS(y)$$

El integrando de la última expresión lo podemos desarrollar como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x + ry)y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + ry)y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x + ry)y_3$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial r}(M_f(x, r)) = \frac{1}{4\pi}\oiint \nabla f(x + ry)ydS(y) = \frac{1}{4\pi}\iiint_B \Delta f(x + ry)dV$$

Donde la última igualdad se consigue con Gauss-Ostrogadsky. Además:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B}\Delta f(x+ry)dV=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B(x,1)}\Delta f(ry)dV=\frac{1}{4r^3\pi}\iiint_{B(x,r)}\Delta f(y)dV$$

Integramos ahora por secciones circulares:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B}\Delta f(x+ry)dV=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^r\rho^2\left(\iint_{S^2}\underbrace{\Delta f(x+\rho y)}_{\substack{M_{\Delta f}(x,\rho)\\ \Delta M_f(x,\rho)}}dS(y)\right)d\rho=\int\limits_0^r\rho^2\Delta M_f(x,\rho)d\rho$$

De nuevo, no sé qué es esto

Método 1. *Separación de variables en la Ecuación del Calor*

Vamos a tomar una ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Con solución $u(x,t)$ *y suponemos* $u(0,t)=u(\pi,t)=0\forall t$ *y* $u(x,0)=f(x)$

Veamos el método de separación de variables. Si la ecuación la podemos expresar de la forma:

$$u(x,t)=A(x)B(t)$$

Tendremos que

$$u_t(x,t)=A(x)B'(t)$$
$$u_{(x)}(x,t)=A''(x)B(t)$$

Entonces igualando ambas ecuaciones (por al ecuación del calor que las relaciona)

$$\frac{A''(x)}{A(x)}=\frac{B'(x)}{B(x)}=cte<0$$

Entonces podemos obtener que

$$A(x)=cte\sin(nx)$$

De donde obtenemos que $cte=-n^2$

Tenemos ahora una EDO que podemos resolver:

$$B'(t)=-n^2B(t)\implies B(t)=ctee^{-n^2t}$$

Nos preguntamos ahora si $u(x,t)$ lo podemos poner como una combinación de estas funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\sin(nx) \overset{?}{=} u(x,t)$$

En concreto, sabemos que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

Usaremos esta proposición:

Proposición 3.2.1. *Si tenemos la siguiente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = G(x)$$

Su derivada resulta ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x) = H(x)$$

Demostración

$$\int_a^x H(s)ds = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x g_n'(s)ds$$

$$G(x) - G(a) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty}(g_n(x) - g_n(a))$$

Luego la G es derivable con $G'(x) = H(x)$

□

El final te lo imaginas, un saludo.

3.3 - Resolución de la Ecuación del Calor

Ni idea del origen de esto.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

La solución viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{(x-s)^2}{4kt}} f(s)ds$$

CAPÍTULO 4

Ecuación de Laplace

Definición 4.0.1. *La ecuación de Laplace es de la forma*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & x \in D \\ u(x) = f(x) & \forall x \in \partial D \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo 1. *En dimensión 1, D será de la forma* $[a, b]$ *y su frontera será* $\{a, b\}$*. Entonces el problema es:*

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ u(a) = f(a) \ u(b) = f(b) \end{cases}$$

Y la solución general sera de la forma $u(x) = \alpha x + \beta$

Recordemos ahora que el Laplaciano es independiente por rotaciones. Hacemos entonces:

$$u(x) = \phi(r) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \qquad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{d\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \phi'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = ... = \phi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \phi'(r)\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$$

$$\triangle u = \phi''(r)\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{r^2} + \phi'(r)\frac{nr^2 - (x_1^2 + ... + x_n^2)}{r^3} = \phi''(r) + \frac{n-1}{r}\phi(r)$$

Como este Laplaciano tiene que anularse,

$$\phi''(r) + \frac{n-1}{r}\phi(r) = 0$$

$$\begin{cases} y = \phi'(r) \\ y' = -\dfrac{n-1}{r} y \end{cases}$$

$$\int \frac{y'}{y} = - \int_{n-1}^{r}$$

$$\log y = (1-n)\log r + cte$$

$$y = cte\ r^{1-n}$$

$$\phi(r) = cte \int r^{1-n} dr + cte_2$$

Entonces ϕ es de la forma:

$$\begin{array}{ll} n = 2 & \phi(r) = \alpha \log r + \beta \\ n = 3 & \phi(r) = \alpha e^{2-n} + \beta \end{array}$$

etc.

CAPÍTULO 5

Ejercicios Resueltos

5.1 - Hoja 1

Ejercicio 2. ***Apartado inventado)***

Esferas de radio 1 con centro en el plano XY.

Las ecuaciones de estas esferas son de la forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} & 2(x-a)+2zp=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & 2(y-b)+2zq=0 \end{cases}$$

$$x-a=-zp \qquad y-b=-zq$$

$$z^2p^2+z^2q^2+z^2=1 \qquad z^2\underbrace{(p^2+q^2+1)}_{\geq 1}=1 \implies z^2\leq 1$$

Apartado d)

$$z=xy+A(x^2-y^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} & p=y+A'(x^2-y^2)2x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & q=x+A'(x^2-y^2)2y \end{cases}$$

$$yp=y^2+2xyA'(^2-y^2)$$

$$xq = x^2 + 2xyA'(^2 - y^2)$$

Restando ambas:

$$yp - xq = y^2 - x^2$$

Y tendremos una ecuación lineal

Ejercicio 9. *Recordemos el procedimiento, tenemos la ecuación de primer orden no lineal $u_x u_y - u$. El método dado para resolver esto consiste en un sistema de bandas características en 5 variables. En este sistema encontraremos una solución que dependa de un parámetro para poder expresar p, q en función de ese parámetro e integrar la igualdad $dz = pdx + qdy$ y llegar a una función de la forma $f(x, y, z, c_1, c_2)$.*

Primero definimos $F(x, y, z, p, q) = pq - z = 0$ y tomamos el sistema:

$$\begin{cases} x' = F_p \\ y' = F_q \\ z' = pF_p + qF_q \\ p' = -F_x + pF_z \\ q' = -F_y - qF_z \end{cases}$$

Este será el sistema autónomo que tenemos que resolver:

$$\begin{cases} x' = F_p & = q & \\ y' = F_q & = p & \\ z' = pF_p + qF_q & = 2pq & \\ p' = -F_x + pF_z & = p & \to p(t) = \alpha e^t \\ q' = -F_y - qF_z & = q & \to q(t) = \beta e^t \end{cases}$$

Con las dos últimas líneas podemos solucionar las tres primeras:

$$\begin{cases} x' = \beta e^t & x = \beta e^t \delta \\ y' = \alpha e^t & y = \alpha e^t + \delta \\ z' = 2\alpha\beta e^{2t} & z = \alpha\beta e^{2t} + \eta \end{cases}$$

Tenemos que encontrar una relación $H(x, y, z, p, q, c_1) = 0$. Podemos tomar que $x - q = c_1$, $H(x, y, z, p, q, c_1) = x - q - x_1 = 0$. Despejamos ahora p, q de igualar F y H a 0:

$$\begin{cases} F = 0 & pq = z & p = \dfrac{z}{x - c_1} \\ H = 0 & x - q = c_1 & q = x - c_1 \end{cases}$$

Tenemos entonces la 3-forma:

$$dz = \frac{z}{x - c_1} dx + (x - c_1) dy$$

Podemos comprobar que esto es integrable viendo que $(\frac{z}{x - c_1}.x - c_1, -1)$ es ortogonal a su rotacional:

$$rot = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{z}{x-c_1} & x-c_1 & -1 \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{x-c_1}, 1\right)$$

Entonces estos dos campos sí son ortogonales, lo que nos indica que no nos hemos equivocado con las cuentas hasta ahora.

Para resolver la 3-forma tomamos $z = cte$, resolvemos y aplicamos el método de variación de las constantes.

$$\frac{z}{x-c_1}dx + (x-c_1)dy = 0$$
$$\frac{z}{(x-c_1)^2}dx + dy = 0$$
$$\int \frac{z}{(x-c_1)^2}dx + \int dy = 0$$
$$-\frac{z}{x-c_1} + y = g\ (cte)$$

Para usar variación de las constantes hacemos $g = g(z)$:

$$G(x,y,z) = -\frac{z}{x-c_1} + y - g(z)$$

Calculamos la derivadas parciales respecto de cada variable:

$$\frac{z}{(x-c_1)^2}dx + dy + \left(\frac{-1}{x-c_1} - g'(z)\right)dz$$

Multiplicamos por $(x-c_1)$ y comparamos el término de dz:

$$\frac{z}{(x-c_1)}dx + (x-c_1)dy + (-1 - g'(z)(x-c_1))\,dz$$

$$-1-(x-c_1)g'(z) = -1 \implies (x-c_1)g'(z) = 0 \implies g'(z) = 0 \implies g(z) = c_2$$

Entonces llegamos a la ecuación de la solución completa:

$$0 = f(x,y,z,c_1,c_2) = \frac{-z}{x-c_1} + y - c_2$$

O análogamente:

$$z = (x-c_1)(y-c_2) \qquad z-(x-c_1)(y-c_2) = 0$$

Buscamos ahora la solución que contiene a la recta $x = t,\ y = 1-t,\ z = 1$. Nos tiene que salir una familia que dependa de un solo parámetro λ en vez de c_1, c_2.

La solución tiene el vector normal $(y - c_2, x - c_1, -1)$ que sustituyendo con las ecuaciones de la recta queda $(1-t-c_2, t-c_1, -1)$. Este vector tendrá que ser normal al normal de la recta: $(1, -1, 0)$. El producto escalar deberá de anularse lo que nos queda:

$$1 - t - c_2 - t + c_1 = 0$$

$$1 - t - c_2 = t - c_1$$

$$1 = (t - c_1)(1 - t - c_2)$$

Dos números que son iguales cuyo producto es 1, ambos son 1 o -1, supongamos que son 1:

$$\begin{cases} t - c_1 = 1 \\ 1 - t - c_2 = 1 \end{cases}$$

$$1 - c_1 - c_2 = 2$$

$$c_1 + c_2 + 1 = 0 \implies \begin{cases} c_1 = \lambda \\ c_2 = -1 - \lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la solución que teníamos:

$$z = (x - \lambda)(y + \lambda + 1)$$

Derivando con respecto de λ:

$$0 = -(y + \lambda + 1) + x - \lambda = -y - \lambda - 1 + x - \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(x - y - 1)$$

Volviendo a la solución de nuevo:

$$z = (x - \frac{1}{2}(x - y - 1))(y + \frac{1}{2}(x - y - 1) + 1)$$

$$4z = (2x - x + y + 1)(2y + x - y - 1 + 2) = (x + y + 1)(x + y + 1)$$

$$z = \frac{1}{4}(x + y + 1)^2$$

Alternativamente, podríamos haber tomado -1 en lugar de 1. En este caso habríamos llegado a una solución alternativa:

$$z = \frac{1}{4}(x + y - 3)^2$$

Ejercicio 4.
Si integramos respecto de y en la ecuación:

$$(1 + x)u_x + u = xy - y^2 + A(x)$$

Nuestra ecuación homogénea es entonces:

$$(1 + x)u_x + u = 0$$

Si tuviéramos una EDO, tendríamos la ecuación:

$$(1+x)z' + z = 0$$

$$(1+x)\frac{dz}{dx} = -z$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

$$\log z = -\log 1 + x + cte$$

$$z = \frac{cte}{1+x}$$

Volviendo a nuestro caso, nos queda que $u(x,y) = \dfrac{B(x,y)}{1+x}$

$$u_x = \frac{-B(x,y)}{(1+x)^2} + \frac{B_x(x,y)}{1+x}$$

$$(1+x)u_x + u = \frac{-B(x,y)}{1+x} + B_x(x,y) + \frac{B(x,y)}{1+x} = xy - y^2 + A(x)$$

Integrando ahora con respecto de x:

$$B(x,y) = \frac{x^2 y}{2} - xy^2 + \underbrace{\int A(x)dx}_{A(x)} + C(y)$$

$$u(x,y) = \frac{\dfrac{x^2}{y} - xy^2 + A(x) + C(y)}{1+x}$$

Para comprobar que vamos por el buen camino, vamos a ver que satisface la EDP que teníamos en primer lugar:

$$u_y = \frac{\dfrac{x^2}{2} - 2xy + C(y)}{1+x}$$

$$u_{yx} = -\frac{\dfrac{x^2}{2} - 2xy + C'(y)}{(1+x)^2} + \frac{x-2y}{1+x}$$

$$(1+x)u_{xy} = \frac{\dfrac{x^2}{2} - 2xy + C'(y)}{1+x} + x - 2y$$

$$(1+x)u_{xy} + u_y = x - 2y$$

Luego por ahora no nos hemos equivocado. Tratamos de encontrar ahora A y C.

$$u(x,0) = \frac{A(x) + C(0)}{1+x} = 1$$

$$u(0,y) = \frac{A(0)+C(y)}{1} = A(0)+C(y) = \cos(y)$$

$$\begin{cases} A(x) = x \\ C(y) = \cos(y) \end{cases}$$

Ejercicio 6.
La ecuación alternativa es:

$$xu_x + yu_y = 2(x^2+y^2)u$$

Tendremos el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = x & \alpha e^t \\ y' = y & \beta e^t \\ z' = 2(x^2+y^2) = 2(\alpha^2+\beta^2)e^{2t} & z = (\alpha^2+\beta^2)e^{2t}+\gamma \end{cases}$$

Como nuestra solución pasara por $\eta(s) = (1, s, e)$, tenemos que $\alpha = 1,\ \beta = s$ y:

$$(\alpha^2+\beta^2)+\gamma = e \implies (1+s^2)+\gamma = e$$

La solución queda entonces $(e^t, se^t, (1+s^2)e^{2t}+e-1-s^2)$. Para resolver el ejercicio nos queda eliminar los dos parámetros:

$$\begin{cases} t = \log x \\ s = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Entonces nos queda:

$$z = \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2 + e - 1 - \frac{y^2}{x^2}$$

$$u(x,y) = x^2+y^2-\frac{y^2}{x^2}+e-1$$

5.2 - Hoja 3

Ejercicio 7. *Este ejercicio no sé cuál es.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta t = 0 & (x,y)\in(0,\pi)^2 \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 & \forall (x,y)\in[0,\pi]^2\ \forall t \\ u(x,y,0) = xy(\pi-x)(\pi-y) \\ u_t(x,y,0) = 0 \end{cases}$$

Vamos a tratar de separar las tres variables para resolver la ecuación. Buscaremos una solución de la forma:

$$u(x,y,t) = A(x)B(y)C(t)$$

Entonces derivando por cada variable tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(x)B(y)C''(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A''(x)B(y)C(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A(x)B''(y)C(t)$$

Tenemos entonces la igualdad:

$$A(x)B(y)C''(t) = A''(x)B(y)C(t) + A(x)B''(y)C(t)$$

$$\frac{C''(t)}{C(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)}$$

Como tenemos una igualdad que depende de distintas variables, tenemos entonces que ambos miembros han de ser constantes. Por tanto, cada sumando del miembro derecho es constante también.

Por las condiciones de contorno que tenemos sabemos que esta constante será negativa. Podemos resolver el $A(x)$ y $B(y)$:

$$\begin{cases} A(x) = \sin(nx) \\ B(y) = \sin(my) \end{cases} \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

Tenemos entonces:

$$\frac{C''(t)}{C(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)} = -n^2 - m^2$$

Luego $C(t)$ es combinación de $\sin(\sqrt{n^2+m^2}t)$ y $\cos(\sqrt{n^2+m^2}t)$.

Esto sería una solución sin tomar las condiciones iniciales (solución general para las dos primeras igualdades del enunciado). Comprobamos que esta solución nos sirve para nuestras condiciones iniciales.

Usando que en $t = 0$, u_t se tiene que anular, usaremos como solución de C, $\cos(\sqrt{n^2+m^2}t)$. Entonces nuestra solución es de la forma:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m} a_{nm} \sin(nx)\sin(my)\cos(\sqrt{n^2+m^2}t)$$

Para simplificar el problema vemos que podemos separar a_{nm} en $a_n a_m$ por el caso en el que trabajamos:

$$u(x,y,0) = xy(\pi - x)(\pi - y) = x(\pi - x)y(\pi - y)$$

Vemos que en este caso las funciones en las que se separan son iguales, por eso escribimos $a_n a_m$ y no $a_n b_m$. En definitiva, tenemos la serie:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m} a_n a_m \sin(nx)\sin(my)\cos(\sqrt{n^2+m^2}t) =$$

$$= \left(\sum_n \sin(nx) \right) \left(\sum_m a_m \sin(mx) \right) \sum_{n,m} \cos(\sqrt{n^2 + m^2} t)$$

Definimos ahora $f \in \mathcal{C}^1$:

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & x \geq 0 \\ x(\pi + x) & x < 0 \end{cases}$$

Con esta f podemos calcular entonces los coeficientes de las series:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) = 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx =$$

$$= 2 \left(-x \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx) x}{dx} \right) \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = ...$$

Después de unas cuentas infumables llegamos a:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi n^3} & n \ impar \\ 0 & n \ par \end{cases}$$

Luego nuestras solución es:

$$u(x, y, t) = \sum_{\substack{n,m \\ impares}} \frac{64}{\pi^2 n^3 m^3} \sin(nx) \sin(mx) \cos(\sqrt{n^2 + m^2} t)$$