Apuntes de Grafos

Paco Mora
Manuel Franco

22 de octubre de 2021

CAPÍTULO 1

Tema 3. Árboles

Definición 1.0.1. *Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es un árbol si es conexo y no tiene ciclos.*
Un árbol generador de un grafo $G = (V, E)$ es un subgrafo parcial conexo y sin ciclos.
Un bosque es un grafo $G = (V, E)$ sin ciclos.

Definición 1.0.2. *En un árbol, los nodos con grado de incidencia 1 se denominan hojas.*

Teorema 1. *Teorema de caracterización de árboles Sea $G = (V, E)$. Son equivalentes:*

- *G es conexo y sin ciclos*
- *Entre cada par de vértices distintos de V, existe una única cadena.*
- *G es conexo y $m = n - 1$*
- *G no contiene ciclos y $m = n - 1$*
- *G está minimalmente conectado*
- *G no contiene ciclos y su añadimos una arista entre dos vértices no adyacentes cualesquiera de V, el grafo que se obtiene contiene un único ciclo.*

Demostración

$1 \implies 2$

G es conexo sin nodos $\implies \forall u \neq v \exists!$ cadena u v. Existe una cadena por ser conexo, la yuxtaposición de dos cadenas diferentes u v, Gcontendría al menos un ciclo.
$2 \implies 3$

Suponemos que existe una única cadena entre cada par de vértices u, v. Como existe una cadena entre cada par de vértices, G es conexo. Veamos que $m = n - 1$. Recordemos una proposición que decía:

"Si G es conexo $m \geq n - 1$"

Veamos la igualdad ahora por inducción sobre el número de nodos, el caso $n = 1, 2$ es directo.
Si $n > 2$, eliminamos una arista cualquiera del grafo: $e = (u, v)$. Dado que esa cadena $(u, (u, v), v)$ era la única que conectaba u, v, ahora estos vértices están en componentes conexas distintas, con n_1, n_2 nodos y m_1, m_2 aristas respectivamente, que siguen cumpliendo la hipótesis de inducción, luego $m_1 = n_1 - 1$

y $m_2 = n_2 - 1$. En G, $n = n_1 + n_2 = m_1 + 1 + m_2 + 1 = (m_1 + m_2 + 1) + 1 = m + 1$
$3 \implies 4$

G conexo y $m = n - 1 \implies G$ no contiene ciclos y $m = n - 1$

Supongamos que G contiene un ciclo y retiráramos una arista cualquiera e no desconectaría el grafo y tendría un grafo conexo con n nodos y $(n-1)-1$ aristas, por la proposición que hemos recordado antes, G no sería conexo, lo que contradice (3)
$4 \implies 5$

G no tiene ciclos y $m = n - 1 \implies G$ está minimalmente conectado. Por la proposición que hemos recordado antes, basta demostrar que G es conexo.

Supongamos que G contiene s componentes conexas : $(V_1, E_1), ..., (V_s, E_s)$ con n_i nodos y m_i aristas, tengo ahora que G es acíclico, por lo que cada cc es acíclica y conexa por lo que cumple 1, y por tanto 3, y por tanto cada $m_i = n_i - 1$

$$(3) \implies m_i = ni - 1 \forall i \; n = \sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{s} (m_i + 1) = \sum_{i=1}^{s} m_i + s = m + s$$

Como partiamos de que $n = m + 1$ y tenemos $n = m + s$, entonces $s = 1$ y hay solo una c^3.

$5 \implies 6$

□

Teorema 2. ***Algoritmo de Kruskal***

Paso 1

Ordenar las aristas de E en orden ascendente de su peso:

$$V = \{v_1, ..., v_n\}, \; T^* = (V, \emptyset)$$

$$E := \{e_1, ..., e_m\} : \; \updownarrow \leq \updownarrow (e_i + 1) \forall i < m$$

Paso 2

Añadir $n-1$ aristas a T^* sucesivamente (en el orden de sus pesos) sin que se formen ciclos.

Teorema 3. ***Algoritmo de Prim***

Paso 1

Elegir un vértice $r \in V$ y hacer $V_1 = \{r\}, \; V_2 = V \setminus \{r\}$.

Paso 2

Añadir al árbol la arista de menor peso de $w(V_1)$, digamos (v_1, v_2) con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Añadir v_2 a V_1 y borrar v_2 de V_2.

Paso 3

Si $|V_1| = n$ parar. Si no, volver al Paso 2.

1.1 - Problemas de optimización sobre grafos

Ejercicio 1. ***El problema del árbol generador del peso mínimo***

$$x_e = 1 \text{ si la arista } e \text{ pertenece al árbol } \forall e \in E$$

$$min \sum_{e\in E} l_e x_e$$

$$\begin{cases} s.a. & x_e \in \{0,1\} \forall e \in E \\ & \sum_{e\in E} x_e = n-1 \\ & \sum_{e\in E(V^3)} x_e \leq 2 \qquad \forall V^3 \subset V \qquad |V^3| = 3 \\ & \sum_{e\in E(V^4)} x_e \leq 3 \qquad \forall V^4 \subset V \qquad |V^4| = 4 \\ & \vdots \\ & \sum_{e\in E(S} x_e \leq |S|-1 \quad \forall S \subset V \quad 3 \leq |S| \leq n-1 \end{cases}$$

Haremos ahora la llamada formulación MTZ, que utiliza "una especie de árbol dirigido" comenzamos definiendo las variables:

$$u_i = \text{algo parecido al nivel del nodo } i \text{ en la arborescencia}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es el predecesor inmediato de } j \text{ en el árbol con raíz en 1} \\ 0 & oc \end{cases}$$

$$\begin{cases} min & \sum_i \sum_{j=(i,j)\in E} l_{ij} x_{ij} \\ s.a. & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i,j : (i,j) \in E \\ & \sum_i x_{ij} = 1 & \forall j \neq 1 \\ & x_{ij} + x_{ji} \leq 1 & \forall (i,j) \in E \\ & u_i \in \mathbb{Z}^+ & \forall i \\ & u_1 = 0 \\ & u_j \geq u_i + 1 - M(1-x_{ij}) & \forall i,j : (i,j) \in E \quad (x_{ij} = 1 \implies u_j \geq u_i + 1) \end{cases}$$

Podemos cambiar la M por $n-1$ ya que $u_j \leq n-1 \ \forall j$, creando una mejor formulación del problema.

CAPÍTULO 2

Caminos más cortos. Recorridos por artistas y vértices

Demostración

Si hubiera un camino más corto P_1 entre v_i y v_j que el subcamino P_2 entre v_i, v_j, reemplazando P_2 por P_1 obtenemos o bien 1. o 2.:

1. Un camino más corto que el camino más corto con lo que tenemos una contradicción.
2. Un paseo que contiene ciclos, la eliminación de estos ciclos nos deja un camino más corto que el camino más corto, de nuevo una contradicción.

$\square$

Demostración

$\Longrightarrow$

Supongamos $d_j > d_i + l_{ij}$, entonces, podemos crear un camino más corto a j yuxtaponiendo el camino a i y la arista que i con j si no se forman ciclos, si se formaran, basta con quitarlo y aún así tendríamos un camino más corto a j. En ambos casos tenemos una contradicción.

$\square$