7.1.2. La segunda fórmula de variación para la longitud de arco

Antes de calcular la segunda variación, veamos una nueva definición.

Definición 7.1.6. *Sea $\alpha : [0,\ell] \longrightarrow S$ una curva regular a trozos en una superficie regular S. Una variación de α se dice **normal** si su campo variacional Z es normal a α, esto es, $\langle Z(s), \alpha'(s) \rangle = 0$.*

Obsérvese que el teorema 7.1.5 que nos da la caracterización variacional de las geodésicas podría enunciarse también para variaciones normales de α; esto es, se puede probar que:

Corolario 7.1.7. *Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ una curva regular p.p.a. en una superficie regular S. Entonces α es un segmento de geodésica de S si, y sólo si, $L'(0) = 0$ para toda variación normal ϕ de la curva α.*

Para demostrarlo, basta observar que, en la prueba del recíproco, la variación ϕ construida es, de hecho, una variación normal: en efecto, como α es una curva p.p.a., $\langle \alpha'(s), (D\alpha'/ds)(s) \rangle = 0$, y por tanto, $\langle \alpha'(s), Z(s) \rangle = \langle \alpha'(s), f(s)(D\alpha'/ds)(s) \rangle = 0$.

Vamos a presentar ya el cálculo de la segunda derivada para este tipo de variaciones. Resulta conveniente precisar que no es restrictivo suponer que la variación es normal cuando además suponemos que es propia. El motivo es el siguiente: si los extremos están fijos y Z es el campo variacional de una variación cualquiera, entonces la parte tangente de Z no contribuye a cambiar la longitud de la curva α, sino que sólo lo hace su parte normal. Por tanto, basta considerar variaciones normales para estudiar el comportamiento del funcional longitud.[3]

Teorema 7.1.8 (Segunda fórmula de variación). *Sea ϕ una variación propia y normal de un segmento de geodésica $\gamma : [0,\ell] \longrightarrow S$ que está p.p.a., y sea Z su campo variacional. Entonces*

$$L''(0) = \int_0^\ell \left[\left| \frac{DZ}{ds}(s) \right|^2 - K\big(\gamma(s)\big) \big|Z(s)\big|^2 \right] ds \tag{7.3}$$

donde, como ya es habitual, K representa la curvatura de Gauss de la superficie.

Demostración. En lo que sigue, y para una mayor brevedad en la notación, vamos a suprimir el par (s,t) de las sucesivas expresiones cuando las funciones que aparezcan estén evaluadas en un punto genérico.

Como γ es geodésica, en particular es regular, por lo que la primera derivada de la función $L(t)$ se escribe (véase la demostración del teorema 7.1.3)

$$L'(t) = \int_0^\ell \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^{-1/2} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle ds.$$

[3] Esta sección es análoga a la caracterización variacional de las superficies minimales. En aquella tomábamos directamente variaciones normales a la superficie. La razón era la misma: una variación tangente a la superficie no modifica su área y no tiene consecuencias en el funcional área, que era el estudiado en dicha ocasión.

Entonces,

$$L''(t) = \int_0^\ell \left[-\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle^{-3/2} \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle^{-1/2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle \right] ds.$$

En $t=0$, $(\partial\phi/\partial s)(s,0) = \gamma'(s)$, por lo que $\big|(\partial\phi/\partial s)(s,0)\big| = 1$. Además,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle\Big|_{t=0} &= \left[\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} \right\rangle \right]_{t=0} \\ &= \frac{d}{ds} \big\langle Z(s), \gamma'(s) \big\rangle - \big\langle Z(s), \gamma''(s) \big\rangle = 0 \end{aligned}$$

pues, por un lado, al ser ϕ una variación normal, $\big\langle Z(s), \gamma'(s) \big\rangle = 0$, y por otro, al ser γ geodésica, $\big\langle Z(s), \gamma''(s) \big\rangle = 0$. Así,

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle ds = \int_0^\ell \left[\left\langle \frac{\partial^3\phi}{\partial s\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t} \right\rangle \right]_{t=0} ds \\ &= \int_0^\ell \Big[(A)\big|_{t=0} + (B)\big|_{t=0} \Big] ds. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Calculemos el valor del integrando anterior, para lo cual, comenzamos estudiando el segundo sumando, (B). Desde luego, $(\partial\phi/\partial t)(s,t) \in T_{\phi(s,t)}S$ y, en consecuencia, $\big\langle (\partial\phi/\partial t)(s,t), N\big(\phi(s,t)\big) \big\rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial s}, N\circ\phi \right\rangle (N\circ\phi) \\ &= \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial(N\circ\phi)}{\partial s} \right\rangle (N\circ\phi), \end{aligned}$$

pues $\big\langle (\partial^2\phi/\partial t\partial s), N\circ\phi \big\rangle + \langle \partial\phi/\partial t, \partial(N\circ\phi)/\partial s \rangle = 0$. Como además se tiene que $\partial(N\circ\phi)/\partial s = dN_{\phi(s,t)}(\partial\phi/\partial s)$, entonces

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \mathrm{A}_{\phi(s,t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right) \right\rangle (N\circ\phi).$$

En definitiva,

$$(B) = \left| \frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t} \right|^2 = \left| \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \right|^2 + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \mathrm{A}_{\phi(s,t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right) \right\rangle^2,$$

y evaluando en $t=0$,

$$(B)\big|_{t=0} = \left| \frac{DZ}{ds}(s) \right|^2 + \big\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big) \big\rangle^2.$$

Estudiamos a continuación el primer sumando, (A), de (7.4). Claramente,

$$(A) = \left\langle \frac{\partial^3\phi}{\partial s\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle = \frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} \right\rangle.$$

Veamos cuánto vale el producto escalar $\left\langle \partial^2\phi/\partial t^2, \partial^2\phi/\partial s^2 \right\rangle$ en $t=0$. Un cálculo análogo al realizado en el estudio de (B) permite concluir que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \mathrm{A}_{\phi(s,t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right\rangle (N\circ\phi),$$

que, evaluado en $t=0$, da

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(s,0) = \frac{D}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s)\right) + \left\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\right\rangle N\big(\gamma(s)\big).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''(s) &= \frac{D\gamma'}{ds}(s) + \left\langle \gamma''(s), N\big(\gamma(s)\big)\right\rangle N\big(\gamma(s)\big)\\ &= -\left\langle \gamma'(s), (N\circ\gamma)'(s)\right\rangle N\big(\gamma(s)\big) = -\left\langle \gamma'(s), dN_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle N\big(\gamma(s)\big)\\ &= \left\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle N\big(\gamma(s)\big),\end{aligned}$$

vector que está en la dirección del normal a la superficie. Por lo tanto,

$$\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\right\rangle\bigg|_{t=0} = \left\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\right\rangle \left\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle.$$

Sustituyendo los valores obtenidos para $(A)\big|_{t=0}$ y $(B)\big|_{t=0}$ en (7.4), llegamos a que

$$\begin{aligned}L''(0) &= \int_0^\ell \left[\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle\bigg|_{t=0} - \left\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\right\rangle \left\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle\right.\\ &\qquad\qquad \left. + \left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 + \left\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle^2\right] ds\\ &= \int_0^\ell \left[\left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 - \Big(\left\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(Z(s)\big)\right\rangle \left\langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle\right.\\ &\qquad\qquad \left. - \left\langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\right\rangle^2\Big)\right] ds + \left[\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle(s,0)\right]_0^\ell\\ &= \int_0^\ell \left[\left|\frac{DZ}{ds}(s)\right|^2 - (C)\right] ds + \left[\left\langle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \frac{\partial\phi}{\partial s}\right\rangle(s,0)\right]_0^\ell.\end{aligned}$$

Obsérvese que, como la variación ϕ es propia, $\phi(\ell,t) = \gamma(\ell)$ para todo t, luego

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(\ell,0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(\ell,t)\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\frac{d}{dt}\gamma(\ell)\right) = \mathbf{0};$$

análogamente, $(\partial^2\phi/\partial t^2)(0,0) = \mathbf{0}$. Luego el último sumando en la expresión anterior se anula. Sólo resta calcular el valor del término que hemos denominado (C).

Para ello, tengamos en cuenta que, como $Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ y $\left\langle Z(s), \gamma'(s)\right\rangle = 0$, entonces $Z(s)$ está en la dirección de $\mathrm{J}\gamma'(s)$ para todo s. Luego $Z = |Z|\,\mathrm{J}\gamma'$. Por otro lado, podemos calcular la matriz de $\mathrm{A}_{\gamma(s)}$ en función de la base $\left\{\gamma'(s), \mathrm{J}\gamma'(s)\right\}$: dado que

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big) &= \left\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big), \gamma'(s)\right\rangle \gamma'(s) + \left\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big), \mathrm{J}\gamma'(s)\right\rangle \mathrm{J}\gamma'(s),\\ \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\mathrm{J}\gamma'(s)\big) &= \left\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\mathrm{J}\gamma'(s)\big), \gamma'(s)\right\rangle \gamma'(s) + \left\langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}\big(\mathrm{J}\gamma'(s)\big), \mathrm{J}\gamma'(s)\right\rangle \mathrm{J}\gamma'(s),\end{aligned}$$

se tiene que

$$\mathrm{A}_{\gamma(s)} \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \gamma'(s)\rangle & \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s)), \gamma'(s)\rangle \\ \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \mathrm{J}\gamma'(s)\rangle & \langle \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s)), \mathrm{J}\gamma'(s)\rangle \end{pmatrix}.$$

Así, reescribiendo (C) como un determinante, concluimos finalmente que

$$\begin{aligned}
(C) &= \begin{vmatrix} \langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(Z(s))\rangle & \langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \\ \langle Z(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle & \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} |Z(s)|^2 \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s))\rangle & |Z(s)| \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \\ |Z(s)| \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle & \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \end{vmatrix} \\
&= |Z(s)|^2 \begin{vmatrix} \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s))\rangle & \langle \mathrm{J}\gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \\ \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\mathrm{J}\gamma'(s))\rangle & \langle \gamma'(s), \mathrm{A}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\rangle \end{vmatrix} \\
&= |Z(s)|^2 \det(\mathrm{A}_{\gamma(s)}) = |Z(s)|^2 K(\gamma(s)).
\end{aligned}$$

□

Observación 7.1. Si la superficie es *llana* ($K \equiv 0$), entonces toda variación de una geodésica (con Z no paralelo) da como resultado $L''(0) > 0$, y la geodésica es un mínimo del funcional longitud.

7.2. COMPLETITUD. EL TEOREMA DE HOPF-RINOW

Hasta ahora hemos hablado de medidas en la superficie en lo que se refiere a longitudes de curvas, ángulos y áreas. No obstante, todavía está en el aire la siguiente pregunta: ¿es una superficie un espacio topológico metrizable? Esto es, ¿es posible definir una distancia en una superficie regular que sea «coherente» con la topología que tenemos como subespacio del espacio euclídeo? La respuesta a esta cuestión es afirmativa. La manera de construir dicha función distancia no es trivial, y consiste en definirla mediante la curva que «mejor» conecta dos puntos dados, donde por «mejor» entendemos la curva de menor longitud (usualmente se dice que esta curva «realiza» la distancia entre esos dos puntos; obsérvese también que dicha curva puede no existir, aunque esto no será problema en nuestra definición). Se demuestra entonces que esta función es una distancia y que, además, la topología que generan sus bolas métricas coincide con la topología de la superficie como subespacio euclídeo.

En capítulos previos hemos estudiado la relación entre el concepto de geodésica y sus propiedades como curva que minimiza la longitud. De esta forma, parece natural pensar que las curvas que «realizan la distancia» entre dos puntos, puesto que son claramente un mínimo del funcional longitud, deben estar relacionadas de alguna manera con el concepto de geodésica. Así es, y se puede demostrar que, si una curva es, lo que denominaremos en breve *minimizante*, entonces es una geodésica. Este resultado, junto con un lema técnico que presentamos posteriormente, constituyen la base para la prueba del teorema de Hopf-Rinow. En éste se relacionan propiedades