Ejercicios de Geometría de Curvas y Superficies

Paco Mora Caselles

3 de noviembre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 2

Ejercicio 2.

$$f(p) = d(p, p_0) = |p - p_0|$$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \; F(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

F es diferenciable salvo si $p = p_0$*, entonces* $f = F|_S$ *es* C^∞ *en todo* $p \neq p_0$*.*

Sea $p \in S, \; p \neq p_0$

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{f(\alpha(t))}_{|\alpha(t)-p| = <\alpha(t)-p_0, \alpha(t)-p_0>^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} < \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 >^{-\frac{1}{2}} 2 < \alpha'(t), \alpha(t) - p_0 > |_{t=0}$$

$$= \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|}$$

Ejercicio 3. ***i)***

Es un difeomorfismo ya que es diferenciable, biyectiva y la inversa es diferenciable (es ella misma).

$$dA_p(v) = -v \qquad \textit{(lo vimos en un ejemplo)}$$

Como comentario, se puede ver que las diferenciales de las funciones lineales son ellas mismas.

ii)

$$C = \{x^2 + y^2 = 1\} \longrightarrow_F H = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \qquad F(x, y, z) = (\sqrt{1 + z^2}x, \sqrt{1 + z^2}y, z)$$

$$\widetilde{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ \mathcal{C}^\infty \implies F|_C : C\to\mathbb{R}^3\ \mathcal{C}^\infty \implies F\ \mathcal{C}^\infty$$

donde $\widetilde{F}|_C = i\circ F$, *con* i *la inclusión canónica.*

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in H \iff \overline{x}^2+\overline{y}^2-\overline{z}^2=(1+z^2)x^2+(1+z^2)y^2-z^2=(1+z^2)\underbrace{(x^2+y^2)}_{1}-z^2=1$$

$$F^{-1}:H\to C\ \ F^{-1}(u,v,w)=(\frac{u}{\sqrt{1+w^2}},\frac{v}{\sqrt{1+w^2}},w)$$

Con lo que la inversa es también diferenciable.

iii)

Vemos primero la expresión de F*:*

$$p=(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}\to F(p)\in H$$

La recta con la que definimos F *es* $r(t)=(0,0,z)+t(z,y,0)=(tx,ty,z)\in H$ *para* $t>0$.

$$1=(tx)^2+(ty)^2-z^2=t^2(x^2+y^2)-z^2 \qquad t^2=\frac{1+z^2}{x^2+y^2}=\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

Entonces, $F(x,y,z)=\left(x\sqrt{\dfrac{1+z^2}{1-z^2}},y\sqrt{\dfrac{1+z^2}{1-z^2}},z\right)$

Tomamos un abierto de $W\subset\mathbb{R}^3$ *abierto donde exista* $\widetilde{F}$, *entonces:*

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ -1<z<1\}\equiv\mathbb{R}^2_x(-1,1)$$

$$\widetilde{F}(x,y,z)=\left(x\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}},y\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}},z\right)\ \ (x,y,z)\in W$$

$$\widetilde{F}\ \mathcal{C}^\infty\ \ y\ \widetilde{F}|_{\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}}=F \implies F\ es\ \mathcal{C}^\infty$$

Tomamos $H_1=H\cap W=F(\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\})$, $H_1\subset H$ *es abierto* $\implies$ H_1 *es una superficie.*

$$G:\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}\to H_1,\ G(x,y,z)=F(x,y,z)$$

$$G^{-1}(x,y,z)=\left(x\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}},y\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}},z\right)\implies G\ \text{es un difeomorfismo}$$

Ejercicio 4. *El argumento para ver que* F *es diferenciable seguiremos el mismo procedimiento de* *los dos ejercicios anteriores, obtendremos que es diferenciable en todo punto menos en p_0.*

$$\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\} \to \mathbb{R}^3 \ \widetilde{F}(p) = \widetilde{F}(x, y, z) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|} \ \widetilde{F}|_S \ es \ \mathcal{C}^\infty$$

$$dFp(v) = (F \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} |\alpha(t) - p_0|^{-1}(\alpha(t) - p_0) =$$

$$= -\frac{1}{2} < \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 >^{-\frac{3}{2}} 2 < \alpha'(t), \alpha(t) - p_0 > (\alpha(t) - p_0) + \frac{1}{|\alpha(t) - p_0|}\alpha'(t)|_{t=0} =$$

$$\frac{v}{|p - p_0|} - \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|^3}(p - p_0)$$

Veamos la caracterización del núcleo:

$$\frac{v}{|p - p_0|} - \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|^3}(p - p_0) = 0 \iff v = \lambda(p - p_0)$$

$$\Longleftarrow \quad \textit{Directo}$$

$$\Longrightarrow$$

$$v = \frac{< c, p - p_0 >}{|p - p_0|^2}(p - p_0)$$

Con lo que $Ker(dFp) =< p - p_0 >$

Ejercicio 5.

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}, z \right)$$

i)

Sea $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, veamos que $F(x, y, z) \in C$:

$$\frac{x^2}{1 - z^2} + \frac{y^2}{1 - z^2} = \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} = \frac{1 - z^2}{1 - z^2} = 1$$

Para comprobar que F es diferenciable, tomamos $f : W \to \mathbb{R}^2$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ -1 < z < 1\}$ abierto. Como $F = f|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}} = f \circ i$ y f es diferenciable, F es diferenciable.

ii)

Tomamos $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, $v \in TpS$ y $\alpha : I \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

$$dFp(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(F \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\frac{x(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}}, \frac{y(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}}, z(t) \right) =$$

$$= \left(\frac{x'(t)(1 - z^2(t) + x(t)z'(t)z(t))}{(1 - z^2(t))^{1/2}}, \frac{y'(t)(1 - z^2(t) + y(t)z'(t)z(t))}{(1 - z^2(t))^{\frac{1}{2}}}, z'(t) \right)$$

=

$$\left(\frac{v_1(1-z^2)+zv_3}{(1-z^2)^{\frac{2}{3}}}, \frac{v_2(1-z^2)+zv_3}{(1-z^2)^{\frac{2}{3}}}, v_3\right)$$

Ejercicio 6. *Hay una errata en el enunciado, necesitamos la hipótesis $<p, e_3>=0$ para el segundo apartado.*

i)

Sea $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$ si $F : A-> \mathbb{R}$ tal que $F(p) = \dfrac{1}{|p \times (0,0,1|}$ y F diferenciable, con lo que f es diferenciable ya que $f = F|_S$.

$$dfp(v) = (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} < \frac{\alpha}{(}t) \wedge (0,0,1), \alpha(t) \wedge (0,0,1) >^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} 2 < \alpha(t) \wedge (0,0,1), \alpha(t)(0,0,1) > \frac{3}{2} < \alpha'(t) \wedge (0,0,1), \alpha(t) \wedge (0,0,1) >$$

$$= \frac{- < \alpha'(t) \wedge (0,0,1), \alpha(t) \wedge (0,0,1) >}{|\alpha(t) \wedge (0,0,1)|^3}|_{t=0} = \frac{- < v \wedge (0,0,1), p \wedge (0,0,1) >}{|p \wedge (0,0,1)|^3}$$

ii)

Probaremos que $<p, v>=0$

$$dfp = 0 \iff < v \wedge (0,0,1), p \wedge (0,0,1) >= 0$$

Si $p = (x, y, z), v = (a, b, c)$, entonces la expresión anterior es:

$$< (a,b,c) \wedge (0,0,1), (x,y,z) \wedge (0,0,1) >=< (b,a,,0), (y,x,0) >= by + ax = 0$$

Volviendo a lo que queríamos probar:

$$< p, v >= 0 \iff xa + by + zc = zc = 0$$

que es cierto ya que $<p, e_3>=0$

Ejercicio 7. ***i)***

$L =< n >$ n vector unitario base de L, $H_\lambda = \{p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :< p, n >= \lambda\}$

$S \subset H_\lambda$ para algún $\lambda \iff < p, n >$ cte Sea $f : S \to \mathbb{R}$ $f(p) =< p, n >$

Para comprobar que es constante, calculamos su diferencial.

$$df_p(v) =< v, n >=_{n||N(p)} = 0$$

ii)

Comprobaremos que $f(p) = |p|^2 - <p, e_3>^2$ *es constante en la superficie.*

$$df_p(v) = 2(<p, v> - <p, e_3><v, e_3>) = 2(<p, v> - << p, e_3 > e_3, v>) =$$
$$= 2 < \underbrace{p - <p, e_3> e_3}_{(x,y,0)||N(p)^a}, v >= 0$$

iii)

De nuevo comprobamos que $f(p) = |p - p_0|^2$ *es constante con la diferencial:*

$$df_p(v) = 2 < \underbrace{p - p_0}_{||N(p)}, v >= 0$$

[a] $p =< p, e_1 > e_1 + < p, e_2 > e_2 + < p, e_3 > e_3$

Ejercicio 8.

$$X(u, v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$$

Usaremos las familias de curvas coordenadas obtenidas al fijar uno de los dos parámetros del mapa X. *Si fijamos* $u = u_0$ *obtenemos un paralelo. En el otro caso, si* $v = v_0$, *obtendremos un meridiano. Formamos así* $X_u(u, v_0)$

Si β *es el ángulo que forma la loxodroma tenemos que:*

$$\cos(\beta) = \frac{< \alpha'(t), X_u(\widetilde{\alpha}(t)) >}{|\alpha'(t)||X_u(\widetilde{\alpha}(t)|}$$

Definiendo $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ *obtenemos:*

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(\widetilde{\alpha}(t))X_u(\widetilde{\alpha(t)}) + v'(t)X_v(\widetilde{\alpha}(t))$$

Entonces:

$$\cos(\beta) = \frac{u'E + v'F}{|\alpha'(t)|\sqrt{E}}$$

Calculamos E, F, G*:*

$$X_u = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u)) \implies E = 1$$
$$X_u = (-\sin(u)\sin(v), \sin(u)\cos(v), 0) \implies F = 0$$
$$G = \sin^2(u)$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$\cos(\beta) = \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + \sin^2(u)}}$$

$$\cos^2(\beta)(u'^2 + v'^2 \sin^2(u)) = u'^2$$

$$v'^2 \sin^2(u) = \left(\frac{1}{\cos^2(\beta)} - 1\right) u'^2 = \tan^2(\beta) u'^2$$

$$v' = \tan(\beta)\frac{u'}{\sin(u)} \implies {}_{integrando} v + cte = \pm \log\tan\left(\frac{u}{2}\right)\tan(\beta)$$

Con lo que $\alpha(t) = X\left(t, \pm\log\frac{t}{2}\tan(\beta) + cte\right)$

Ejercicio 9.

$$X(u,v) = (\cos(u)\cosh(v), \sin(u), \cosh(v), v)$$

$$X_u(u,v) = (-\sin((u)\cosh(v), \cos(u)\cosh(v), 0)$$

$$X_v(u,v) = (\cos((u)\sinh(v), \sin(u)\sinh(v), 1)$$

$$E = \cosh^2(v) \qquad F = 0 \qquad G = \cosh^2(v)$$

Aplicaremos la misma estrategia que usamos para el toro, calcularemos el área para una serie de regiones que aproximan al catenoide:

$$A(R_\varepsilon) = \int_{-1}^{1}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \cosh^2(v)dudv = (2\pi - 2\varepsilon)\left(1 + \frac{\sinh(2)}{2}\right)$$

Y solo hay que tomar límites para $\varepsilon \to 0$

Ejercicio 10. ***i)***

$$X_u(u,v) = \left(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u) + \frac{1}{\sin(u)}\right) =$$

$$= \left(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \frac{\cos^2(u)}{\sin(v)}\right)$$

$$E = \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)} = \cot^2(u)$$

$$F = 0$$

$$G = \sin^2(u)\sin^2(v) + \sin^2(u)\cos^2(v) = \sin^2(u)$$

ii)

Tomamos la región $R_\varepsilon = X((\varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon) \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$

$$A(R_\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sqrt{EG-F^2}dudv = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos(u)du(2\pi-2\varepsilon) = 2(\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)-\sin(\varepsilon))(\pi-\varepsilon)$$

$$A(R) = \lim_{\varepsilon\to 0} A(R_\varepsilon) = 2\pi$$

Ejercicio 11. ***i)***

$$X_u(u,v) = \alpha'(s) + r(\cos(\theta)n'(s) + \sin(\theta)b'(s)) =$$
$$=_{Frenett}(s) + r(\cos(\theta)(-k(s)t(s) - \tau(s)bs(s)) + \sin(\theta)\tau(s)n(s)) =$$
$$= t(s)(1 - r\cos(\theta)k(s)) - r\cos(\theta)\tau(s)b(s) + r\sin(\theta)\tau(s)n(s)$$
$$X_v(u,v) = r(-\sin(\theta)n(s) + \cos(\theta)b(s))$$

Como $\{t,n,b\}$ es una base ortonormal podemos calcular $E =< X_s, X_s >$ como la suma de los coeficientes de los vectores de la base al cuadrado. Lo mismo ocurre para G:

$$E =< X_s, X_s >= (1 - r\cos(\theta)k(s))^2 + r^2(\tau(s))^2$$
$$F =< X_u, X_\theta >= ... = -r^2\tau(s)$$
$$G =< X_\theta, X_\theta >= r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = r^2$$

ii)

$$I = (a,b) \to I_\varepsilon = [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \to R_\varepsilon = X(I_\varepsilon \times [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon])$$
$$A(R_\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{I_\varepsilon} \sqrt{EG-F^2}dsd\theta = r\iint(1-\cos(\theta)k(s)r)dsd\theta =$$

Tendremos que probar que $r^2 \int_{I_\varepsilon} k(s)ds \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \cos(\theta) = 0$

$$EG - F^2 = ... = r^2(1 - r\cos(\theta)k(s))^2 \implies \sqrt{EG-F^2} = r(1 - k(s)r\cos(\theta))^a$$

[a] Sabemos por el enunciado que no tenemos que poner valores absolutos al ser $1 - rk(s)\cos(\theta) > 0$