Ejercicios de Geometría de Curvas y Superficies

Paco Mora Caselles

24 de noviembre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 2

Ejercicio 2.

$$f(p) = d(p, p_0) = |p - p_0|$$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \; F(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

F es diferenciable salvo si $p = p_0$, entonces $f = F|_S$ es C^∞ en todo $p \neq p_0$.

Sea $p \in S, \; p \neq p_0$

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{f(\alpha(t))}_{|\alpha(t)-p| = <\alpha(t)-p_0, \alpha(t)-p_0>^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} < \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 >^{-\frac{1}{2}} 2 < \alpha'(t), \alpha(t) - p_0 > |_{t=0}$$

$$= \frac{< v, p - p_0 >}{|p - p_0|}$$

Ejercicio 3. ***i)***

Es un difeomorfismo ya que es diferenciable, biyectiva y la inversa es diferenciable (es ella misma).

$$dA_p(v) = -v \qquad \textit{(lo vimos en un ejemplo)}$$

Como comentario, se puede ver que las diferenciales de las funciones lineales son ellas mismas.

ii)

$$C = \{x^2 + y^2 = 1\} \longrightarrow_F H = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \qquad F(x, y, z) = (\sqrt{1+z^2}x, \sqrt{1+z^2}y, z)$$

$$\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ \mathcal{C}^\infty \implies F|_C : C \to \mathbb{R}^3 \ \mathcal{C}^\infty \implies F \ \mathcal{C}^\infty$$

donde $\widetilde{F}|_C = i \circ F$*, con* i *la inclusión canónica.*

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in H \iff \overline{x}^2 + \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = (1+z^2)x^2 + (1+z^2)y^2 - z^2 = (1+z^2)\underbrace{(x^2+y^2)}_{1} - z^2 = 1$$

$$F^{-1} : H \to C \ F^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{u}{\sqrt{1+w^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+w^2}}, w\right)$$

Con lo que la inversa es también diferenciable.

iii)

Vemos primero la expresión de F*:*

$$p = (x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\} \to F(p) \in H$$

La recta con la que definimos F *es* $r(t) = (0,0,z) + t(z,y,0) = (tx, ty, z) \in H$ *para* $t > 0$.

$$1 = (tx)^2 + (ty)^2 - z^2 = t^2(x^2+y^2) - z^2 \qquad t^2 = \frac{1+z^2}{x^2+y^2} = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

Entonces, $F(x,y,z) = \left(x\sqrt{\dfrac{1+z^2}{1-z^2}}, y\sqrt{\dfrac{1+z^2}{1-z^2}}, z\right)$

Tomamos un abierto de $W \subset \mathbb{R}^3$ *abierto donde exista* $\widetilde{F}$*, entonces:*

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -1 < z < 1\} \equiv \mathbb{R}^2_x(-1,1)$$

$$\widetilde{F}(x,y,z) = \left(x\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}}, y\sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}}, z\right) \ (x,y,z) \in W$$

$$\widetilde{F} \ \mathcal{C}^\infty \ y \ \widetilde{F}|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}} = F \implies F \ es \ \mathcal{C}^\infty$$

Tomamos $H_1 = H \cap W = F(\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\})$*,* $H_1 \subset H$ *es abierto* $\implies H_1$ *es una superficie.*

$$G : \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\} \to H_1, \ G(x,y,z) = F(x,y,z)$$

$$G^{-1}(x,y,z) = \left(x\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}, y\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}, z\right) \implies G \ es \ un \ difeomorfismo$$

Ejercicio 4. *El argumento para ver que* F *es diferenciable seguiremos el mismo procedimiento de* *los dos ejercicios anteriores, obtendremos que es diferenciable en todo punto menos en p_0.*

$$\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\} \to \mathbb{R}^3 \ \widetilde{F}(p) = \widetilde{F}(x,y,z) = \frac{p-p_0}{|p-p_0|} \ \widetilde{F}|_S \ es \ \mathcal{C}^\infty$$

$$dFp(v) = (F \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}|\alpha(t)-p_0|^{-1}(\alpha(t)-p_0) =$$

$$= -\frac{1}{2} < \alpha(t)-p_0, \alpha(t)-p_0 >^{-\frac{3}{2}} 2 < \alpha'(t), \alpha(t)-p_0 > (\alpha(t)-p_0) + \frac{1}{|\alpha(t)-p_0|}\alpha'(t)|_{t=0} =$$

$$\frac{v}{|p-p_0|} - \frac{< v, p-p_0 >}{|p-p_0|^3}(p-p_0)$$

Veamos la caracterización del núcleo:

$$\frac{v}{|p-p_0|} - \frac{< v, p-p_0 >}{|p-p_0|^3}(p-p_0) = 0 \iff v = \lambda(p-p_0)$$

$$\Longleftarrow \quad Directo$$

$$\Longrightarrow$$

$$v = \frac{< c, p-p_0 >}{|p-p_0|^2}(p-p_0)$$

Con lo que $Ker(dFp) =< p-p_0 >$

Ejercicio 5.

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z\right)$$

i)

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$, veamos que $F(x,y,z) \in C$:

$$\frac{x^2}{1-z^2} + \frac{y^2}{1-z^2} = \frac{x^2+y^2}{1-z^2} = \frac{1-z^2}{1-z^2} = 1$$

Para comprobar que F es diferenciable, tomamos $f : W \to \mathbb{R}^2$ $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ -1 < z < 1\}$ abierto. Como $F = f|_{\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}} = f \circ i$ y f es diferenciable, F es diferenciable.

ii)

Tomamos $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$, $v \in TpS$ y $\alpha : I \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$ $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

$$dFp(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(F \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\frac{x(t)}{\sqrt{1-z^2(t)}}, \frac{y(t)}{\sqrt{1-z^2(t)}}, z(t)\right) =$$

$$= \left(\frac{x'(t)(1-z^2(t)+x(t)z'(t)z(t))}{(1-z^2(t))^{1/2}}, \frac{y'(t)(1-z^2(t)+y(t)z'(t)z(t))}{(1-z^2(t))^{\frac{1}{2}}}, z'(t)\right)$$

=

$$\left(\frac{v_1(1-z^2)+zv_3}{(1-z^2)^{\frac{2}{3}}}, \frac{v_2(1-z^2)+zv_3}{(1-z^2)^{\frac{2}{3}}}, v_3\right)$$

Ejercicio 6. *Hay una errata en el enunciado, necesitamos la hipótesis $< p, e_3 >= 0$ para el segundo apartado.*

i)

Sea $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$ si $F : A- > \mathbb{R}$ tal que $F(p) = \dfrac{1}{|p \times (0,0,1|}$ y F diferenciable, con lo que f es diferenciable ya que $f = F|_S$.

$$dfp(v) = (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} < \frac{\alpha}{(}t) \wedge (0,0,1), \alpha(t) \wedge (0,0,1) >^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} 2 < \alpha(t) \wedge (0,0,1), \alpha(t)(0,0,1) > \frac{3}{2} < \alpha'(t) \wedge (0,0,1), \alpha(t) \wedge (0,0,1) >$$

$$= \frac{- < \alpha'(t) \wedge (0,0,1), \alpha(t) \wedge (0,0,1) >}{|\alpha(t) \wedge (0,0,1)|^3}|_{t=0} = \frac{- < v \wedge (0,0,1), p \wedge (0,0,1) >}{|p \wedge (0,0,1)|^3}$$

ii)

Probaremos que $< p, v >= 0$

$$dfp = 0 \iff < v \wedge (0,0,1), p \wedge (0,0,1) >= 0$$

Si $p = (x, y, z), v = (a, b, c)$, entonces la expresión anterior es:

$$< (a,b,c) \wedge (0,0,1), (x,y,z) \wedge (0,0,1) >=< (b,a,,0), (y,x,0) >= by + ax = 0$$

Volviendo a lo que queríamos probar:

$$< p, v >= 0 \iff xa + by + zc = zc = 0$$

que es cierto ya que $< p, e_3 >= 0$

Ejercicio 7. ***i)***

$L =< n >$ n vector unitario base de L, $H_\lambda = \{p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :< p, n >= \lambda\}$

$S \subset H_\lambda$ para algún $\lambda \iff < p, n >$ cte Sea $f : S \to \mathbb{R}$ $f(p) =< p, n >$

Para comprobar que es constante, calculamos su diferencial.

$$df_p(v) =< v, n >=_{n||N(p)}= 0$$

ii)

Comprobaremos que $f(p) = |p|^2 - <p, e_3>^2$ es constante en la superficie.

$$df_p(v) = 2(<p,v> - <p,e_3><v,e_3>) = 2(<p,v> - <<p,e_3>e_3, v>) =$$
$$= 2 < \underbrace{p - <p,e_3>e_3}_{(x,y,0)||N(p)^a}, v> = 0$$

iii)

De nuevo comprobamos que $f(p) = |p - p_0|^2$ es constante con la diferencial:

$$df_p(v) = 2 < \underbrace{p - p_0}_{||N(p)}, v> = 0$$

[a] $p = <p,e_1>e_1 + <p,e_2>e_2 + <p,e_3>e_3$

Ejercicio 8.

$$X(u,v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$$

Usaremos las familias de curvas coordenadas obtenidas al fijar uno de los dos parámetros del mapa X. Si fijamos $u = u_0$ obtenemos un paralelo. En el otro caso, si $v = v_0$, obtendremos un meridiano. Formamos así $X_u(u, v_0)$

Si β es el ángulo que forma la loxodroma tenemos que:

$$\cos(\beta) = \frac{<\alpha'(t), X_u(\widetilde{\alpha}(t))>}{|\alpha'(t)||X_u(\widetilde{\alpha}(t)|}$$

Definiendo $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ obtenemos:

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(\widetilde{\alpha}(t))X_u(\widetilde{\alpha(t)}) + v'(t)X_v(\widetilde{\alpha}(t))$$

Entonces:

$$\cos(\beta) = \frac{u'E + v'F}{|\alpha'(t)|\sqrt{E}}$$

Calculamos E, F, G:

$$X_u = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u)) \implies E = 1$$
$$X_u = (-\sin(u)\sin(v), \sin(u)\cos(v), 0) \implies F = 0$$
$$G = \sin^2(u)$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$\cos(\beta) = \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + \sin^2(u)}}$$

$$\cos^2(\beta)(u'^2 + v'^2 \sin^2(u)) = u'^2$$

$$v'^2 \sin^2(u) = \left(\frac{1}{\cos^2(\beta)} - 1\right) u'^2 = \tan^2(\beta) u'^2$$

$$v' = \tan(\beta)\frac{u'}{\sin(u)} \implies {}_{integrando} v + cte = \pm \log\tan\left(\frac{u}{2}\right)\tan(\beta)$$

Con lo que $\alpha(t) = X\left(t, \pm\log\frac{t}{2}\tan(\beta) + cte\right)$

Ejercicio 9.

$$X(u,v) = (\cos(u)\cosh(v), \sin(u), \cosh(v), v)$$

$$X_u(u,v) = (-\sin((u)\cosh(v), \cos(u)\cosh(v), 0)$$

$$X_v(u,v) = (\cos((u)\sinh(v), \sin(u)\sinh(v), 1)$$

$$E = \cosh^2(v) \qquad F = 0 \qquad G = \cosh^2(v)$$

Aplicaremos la misma estrategia que usamos para el toro, calcularemos el área para una serie de regiones que aproximan al catenoide:

$$A(R_\varepsilon) = \int_{-1}^{1}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \cosh^2(v)dudv = (2\pi - 2\varepsilon)\left(1 + \frac{\sinh(2)}{2}\right)$$

Y solo hay que tomar límites para $\varepsilon \to 0$

Ejercicio 10. ***i)***

$$X_u(u,v) = \left(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u) + \frac{1}{\sin(u)}\right) =$$

$$= \left(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \frac{\cos^2(u)}{\sin(v)}\right)$$

$$E = \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)} = \cot^2(u)$$

$$F = 0$$

$$G = \sin^2(u)\sin^2(v) + \sin^2(u)\cos^2(v) = \sin^2(u)$$

ii)

Tomamos la región $R_\varepsilon = X((\varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon) \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$

$$A(R_\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sqrt{EG-F^2}dudv = \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos(u)du(2\pi-2\varepsilon) = 2(\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)-\sin(\varepsilon))(\pi-\varepsilon)$$

$$A(R) = \lim_{\varepsilon\to 0} A(R_\varepsilon) = 2\pi$$

Ejercicio 11. ***i)***

$$X_u(u,v) = \alpha'(s) + r(\cos(\theta)n'(s) + \sin(\theta)b'(s)) =$$
$$=_{Frenett}(s) + r(\cos(\theta)(-k(s)t(s) - \tau(s)bs(s)) + \sin(\theta)\tau(s)n(s)) =$$
$$= t(s)(1 - r\cos(\theta)k(s)) - r\cos(\theta)\tau(s)b(s) + r\sin(\theta)\tau(s)n(s)$$
$$X_v(u,v) = r(-\sin(\theta)n(s) + \cos(\theta)b(s))$$

Como $\{t,n,b\}$ es una base ortonormal podemos calcular $E =< X_s, X_s >$ como la suma de los coeficientes de los vectores de la base al cuadrado. Lo mismo ocurre para G:

$$E =< X_s, X_s >= (1 - r\cos(\theta)k(s))^2 + r^2(\tau(s))^2$$
$$F =< X_u, X_\theta >= ... = -r^2\tau(s)$$
$$G =< X_\theta, X_\theta >= r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = r^2$$

ii)

$$I = (a,b) \to I_\varepsilon = [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \to R_\varepsilon = X(I_\varepsilon \times [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon])$$
$$A(R_\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int\limits_{I_\varepsilon} \sqrt{EG-F^2}dsd\theta = r\iint(1-\cos(\theta)k(s)r)dsd\theta =$$

Tendremos que probar que $r^2 \int\limits_{I_\varepsilon} k(s)ds \int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \cos(\theta) = 0$

$$EG - F^2 = ... = r^2(1 - r\cos(\theta)k(s))^2 \implies \sqrt{EG-F^2} = r(1-k(s)r\cos(\theta))^a$$

[a]Sabemos por el enunciado que no tenemos que poner valores absolutos al ser $1 - rk(s)\cos(\theta) > 0$

CAPÍTULO 2

Hoja 3

Ejercicio 1. *Por ser S_1 orientable, tenemos un atlas en S_1 formado por cartas compatibles* $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$.

Si $f : S_1 \to S_2$ difeomorfismo, comprobaremos que $\{U_\alpha, f(X_\alpha) = \overline{X}_\alpha\}$ es un atlas compatible de S_2.

Si $(U_{\alpha_1}, \overline{X}_{\alpha_1}), (U_{\alpha_2}, \overline{X}_{\alpha_2})$ son dos parametrizaciones, tenemos:

- *Si $\overline{X}_{\alpha_1}(U_1) \cap \overline{X}_{\alpha_2}(U_2) = \emptyset$, entonces son compatibles.*
- *En otro caso, $\overline{X}_{\alpha_1}(U_1) \cap \overline{X}_{\alpha_2}(U_2) = R$*

$$h : \overline{X}_{\alpha_1}^{-1}(R) \to \overline{X}_{\alpha_2}^{-1}(R)$$

$$h = \overline{X}_{\alpha_2}^{-1} \circ \overline{X}_{\alpha_1} = (f \circ X_{\alpha_2})^{-1} \circ (f \circ X_{\alpha_1}) = X_{\alpha_2}^{-1} \circ X_{\alpha_1}$$

Luego son compatibles al ser compatibles $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}$

Ejercicio 12. *Si $\alpha(v) = (h(v), 0, \phi(v))$ y $|\alpha'(v)| = 1$:*

$$X(u, v) = (h(v), \cos(u), h(v)\sin(u), \phi(v))$$

$$X_u = (-h(v)\sin(u), h(v)\cos(u), 0)$$

$$X_v = (h'(v)\cos(u), h'(v)\sin(u), \phi'(v))$$

$$X_{uu} = (-h(v)\cos(u), -h(v)\sin(u), 0)$$

$$X_{uv} = (-h'(v)\sin(u), h'(v)\cos(u), 0)$$

$$X_{vv} = (h''(v)\cos(u), h''(v)\sin(u), \phi''(v))$$

$$E = h^2(v) \qquad F = 0 \qquad G = 1$$

$$e =< A_{X(u,v)}X_u, X_u >= - < dN_{X(u,v)}(X_u), X_u >= - < N_u, X_u >= {}^a =< N, X_{uu} >$$

$$f =< N, X_{uv} > \qquad g =< N, X_{vv} >$$

Desarrollamos ahora e:

$$e =< \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}, X_{uu} >= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} < X_u \wedge X_v, X_{uu} >= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} det(X_u, X_v, X_{uu}) =$$

$$= \frac{1}{h} det(X_u, X_v, X_{uv})$$

$$f = \frac{1}{h} det(X_u, X_v, X_{uv}) \qquad g = \frac{1}{h} det(X_u, X_v, X_{vv})$$

A partir de aquí son cuentas para sacar e, f, g *con estos determinantes, nos queda:*

$$e = -\phi' \cdot h \qquad f = 0 \qquad g = h''\phi' - h'\phi''$$

Aplicaremos ahora las fórmulas que obtuvimos para K, H, k_1, k_2 *en función de los componentes de la primera y la segunda forma fundamental.*

$$K = -\frac{h''}{h} \qquad H = \frac{1}{2}\left(h''\phi' - h'\phi'' - \frac{\phi'}{h}\right)$$

$$k_1 = -\frac{\phi'}{h} \qquad k_2 = h''\phi' - h'\phi''$$

[a] $< N, X_u >= 0 \implies < N_u, X_u > + < N, X_{uu} >= 0$ y otras igualdades que usaremos derivando con respecto de v