Ejercicios de Teoría de la Probabilidad

Paco Mora Caselles

5 de noviembre de 2021

CAPÍTULO 1

Hoja 3

Ejercicio 3.

$$F(x) = \frac{1}{24}(5xI_{[0,1)}(x) + (5x+3)I_{[1,2)}(x) + (5x+6)I_{[2,3)}(x) + 24I_{[3,+\infty)}(x))$$

Sea $D = \{1,2,3\}$, los puntos de la recta con probabilidad distinta de 0, y $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{3}{24}$ (recordemos que $P(\{1\}) = F(1) - F(1^-)$).

Usando el procedimiento visto en la descomposición de Lebesgue: $P(D) = \frac{9}{24} \implies \alpha = \frac{9}{24} \implies F(x) = \alpha F_d(x) + (1-\alpha)F_c(x)$

Además, tenemos que $P_d(B) = \frac{1}{\alpha}P(B \cap D)$ entonces:

$$F_d(x) = \begin{cases} \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{24}{9} \cdot 0 = 0 & x \in [0,1) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{3} & x \in [1,2) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{6}{24} = \frac{2}{3} & x \in [2,3) \\ \frac{24}{9} \cdot \frac{9}{24} = 1 & x \in [3,+\infty) \end{cases}$$

Pasando a la parte continua, $P_c(B) = \frac{1}{1-\alpha}P(B \cap D^c)$ y $F_c(x) = P_c((-\infty, x])$ $= \frac{1}{1-\alpha}P((-\infty, x] \cap D^c)$

$$F_c(x) = \begin{cases} \dfrac{24}{15} \cdot 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{24}{15} \cdot \dfrac{5x}{24} & x \in [0, 1) \\ \dfrac{24}{15} \cdot \left(\dfrac{5x+3}{24} - \underbrace{\dfrac{3}{24}}_{P(\{1\})} \right) & x \in [1, 2) \\ \dfrac{24}{15} \cdot \left(\dfrac{5x+6}{24} - \dfrac{6}{24} \right) & x \in [2, 3) \\ \dfrac{24}{15} \cdot \left(\dfrac{24}{24} \dfrac{9}{24} \right) & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Hoja 4

Ejercicio 1.

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

a) *$Y = aX - b$ con $a \neq 0$*

La función usada es la $g(x) = ax - b$, esta función es continua, biyectiva (al ser monótona). Será creciente o decreciente dependiendo del valor de a. Si $h(y) = g^{-1}(x) = \dfrac{y+b}{a}$, recordemos que:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ si } y \in g((0,1)) \qquad f_Y(y) = 0 \text{ resto}$$

Calculamos $h'(y) = \dfrac{1}{a}$ y $g((0,1))$:

$$g((0,1)) = \begin{cases} (-b, a-b) & a > 0 \\ (a-b, -b) & a < 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$a > 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right)\frac{1}{a} = 2\frac{a-y-b}{a^2}I_{(-b,a-b)}$$

$$a < 0 \qquad f_Y(y) = 2\left(1 - \frac{y+b}{a}\right) - \frac{1}{a} = 2\frac{y+b-a}{a^2}I_{(a-b,-b)}$$

b) *$Z = 3X^2 - X$*

Usaremos la función $g(x) = 3x^2 - x$, esta función no es biyectiva, tendremos que usar dos intervalos E_1, E_2 para hacer el cambio de variable.

En primer lugar, vemos que el mínimo de la parábola está en $x = \dfrac{1}{6}$, con lo que tenemos los *conjuntos* $E_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, $E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$, *tenemos que:*

$$E_1 \to \left(-\frac{1}{12}, 0\right) = F_1 \qquad E_2 = \left(\frac{1}{6}, 1\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 2\right) = F_2$$

Para cada intervalo, definimos g_i*:*

$$g_1 = g|_{(0,\frac{1}{6})} : \left(0, \frac{1}{6}\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \qquad g_2 = g|_{(\frac{1}{6},1)} : \left(\frac{1}{6}, 1\right) \to \left(-\frac{1}{12}, 2\right)$$

Entonces tenemos que:

$$f_Z(z) = \sum_r f_X(h_r(z))|h_r'(z)|$$

Siendo $h_r(z)$ *la inversa de* $g_r(z)$*, las calculamos:*

$$z = 3x^2 - x \iff 3x^2 - x - z = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12z}}{6} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{1+12z}}{6} = h_2(z) & (\textit{creciente}) \\ \dfrac{1-\sqrt{1+12z}}{6} = h_1(z) & (\textit{decreciente}) \end{cases}$$

$$h_1'(z) = -\frac{12}{26\sqrt{1+12z}} = -\frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$
$$h_2'(z) = \frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

Entonces tenemos que:

$$z \in \left(-\frac{1}{12}, 0\right) \implies f_Z(z) = 2\left(1 - \frac{1-\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}} + 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}} =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{1+12z}}\left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2 \cdot 10}{6\sqrt{1+12z}} = \frac{10}{3\sqrt{1+12z}}$$

$$z \in (0,2) \implies f_Z(z) = 2\left(1 - \frac{1+\sqrt{1+12z}}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{1+12z}}$$

Ejercicio 2.

$$f(x,y) = \frac{2}{(2-x-y)^3} I_E(x,y) \qquad \textit{con } E \textit{ el cuadrilátero de vértices } (0,0),(1,0),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),(0,1)$$

Y los cambios de variable:

$$\begin{cases} U = \dfrac{X}{2-X-Y} \\ V = \dfrac{Y}{2-X-Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{2-x-y} \\ v(x,y) = \dfrac{y}{2-x-y} \end{cases}$$

Esta transformación es biyectiva.

Como comentario, recordar que los cambios de variable de la forma:

$$u = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \qquad v = \frac{a'x+b'y+c'}{dx+ey+f}$$

Además de ser biyectivos transforman rectas en rectas.

Entonces tenemos que:

$$f_{U,V}(u,v) = f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

Vemos en qué se transforman los vértices del cuadrilátero con estas transformaciones:

1. $(0,0) \to (0,0)$
2. $(1,0) \to (1,0)$
3. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \to (1,1)$
4. $(0,1) \to (0,1)$

Calculamos ahora las inversas:

$$u(2-x-y) = x \iff -2u + ux + uy + x = 0 \iff (1+u)x + uy - 2u = 0$$
$$v(2-x-y) = v \iff -2v + vx + vy + y = 0 \iff (1+v)y + ux - 2v = 0$$

Espectacular sistema de ecuaciones lineales del que sacamos que $x = \dfrac{2u}{1+u+v}$ $y = \dfrac{2v}{1+u+v}$

Ahora,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1+u+v)-2u}{(1+u+v)^2} = \frac{2(1+v)}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2u}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2v}{(1+u+v)^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1+u)}{(1+u+v)^2}$$

El Jacobiano entonces es $\frac{4}{(1+u+v)^3}$*, con lo que la función de densidad* $f_{(U,V)}$ *es:*

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2-\frac{2u}{1+u+v}\right)^3}\frac{4}{(1+u+v)^3} = 1 \quad Si\ (u,v) \in (0,1)\times(0,1)$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = 0\ Si(u,v) \notin (0,1)\times(0,1)$$

Recordemos que $E\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ y>0,\ 2x+y<2,\ x+2y<2\}$*, utilizando las inversas que hemos calculado antes vemos que los elementos de* F *cumplen:*

$$\frac{2u}{1+u+v} > 0 \implies u > 0 \qquad \frac{2v}{1+u+v} > 0 \implies v > 0$$
$$\frac{2\cdot 2u}{1+u+v} + \frac{2v}{1+u+v} < 2 \implies u < 1 \qquad ... \implies v < 1$$

Lo que nos coincide con lo que habíamos calculado previamente sabiendo que la transformación llevaba rectas a rectas.

Calculamos ahora también $f_1(x) = \int f(x,y)dy$*:*

$$\begin{cases} Si\ x \in (0,\frac{2}{3}) & f_1(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{2}{(2-x-y)^3}dy \\ Si\ x \in (\frac{2}{3},1) & f_1(x) = \int_0^{2-2x} \frac{2}{(2-x-y)^3}dy \end{cases}$$

Ejercicio 3. *Vemos los puntos para los que* $p((i,j)) = cte$*:*

1. $p((i,j)) = k\cdot 2 \to (i,j) = (1,1)$
2. $p((i,j)) = k\cdot 3 \to (i,j) = (1,2),(2,1)$

$\vdots$

3. $p((i,j)) = k\cdot h \to (i,j) = (i,h-i)$

Para cada caso hay $h-1$ *parejas.*

Entonces,

$$\sum p(i,j) = \sum k(i+j) = \sum_{h=2}^{n}\sum_{i=1}^{h-1} k\cdot h = \sum_{h=2}^{n} k(h-1)h = k\sum_{h=2}^{n}(h^2-h) =$$

$$= k(\sum_{h=2}^{n} h^2 - \sum_{h=2}^{n} h) = k\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \cancel{1} - \frac{n(n+1)}{2} + \cancel{1}\right) = k\frac{n(n+1)(2n-2)}{6} =$$

$$= k\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = 1 \iff k = \frac{3}{n(n-1)(n+1)}$$

Calcularemos ahora $p_1(i)$:

$$p_1(i) = \sum_j p((i,j)) = \sum_{j=1}^{n-i} k(i+j) = k\left(\sum_{j=1}^{n-1} i + \sum_{j=1}^{n-1} j\right) = k\left(i(n-i) + \frac{(n-i+1)(n-i)}{2}\right)$$

$$p_1(i) = k\frac{(n-i)(n+i+1)}{2}$$

Vemos ahora la familia de distribuciones $p_{2|1}(j|i)$:

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i,j))}{p_1(i)} = \frac{k(i+j)}{\frac{k(n-i)(n+i+1)}{2}} = 2\frac{i+j}{(n-i)(n+i+1)} \ si\ j = 1, 2, ..., n-i$$

Ejercicio 4.

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-x-y) & (x,y) \in T \\ 0 & (x,y) \notin T \end{cases}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \int\limits_0^{1-x} k(1-x-y)dy & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{1-x} k(1-x-y)dy = k(1-x)y - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = k\frac{(1-x)^2}{2}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} k\frac{(1-x)^2}{2} & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Con esto podemos calcular el valor de k:

$$\int\limits_0^1 k\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{k}{6} = 1 \iff k = 6$$

Sea $x \in (0,1)$, calculemos $f_{2|1}(y|x)$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{6(1-x-y)}{3(1-x^2)} = \frac{2(1-x-y)}{(1-x)^2} \ si\ y \in (0, 1-x)$$

$$f_{2|1}(y|x) = 0 \ si\ y \notin (0, 1-x)$$

Vemos ahora $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int\limits_0^x k\frac{(1-u)^2}{2}du = 1-(1-x)^3 & x \in (0,1) \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{2|1}(y|x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int\limits_0^y \frac{2(1-x-v)}{(1-x)^2}dv = 1-\frac{(1-x-y)^2}{(1-x)^2} & y \in (0,1-x) \\ 1 & y > 1-x \end{cases}$$

CAPÍTULO 3

Hoja 5

Ejercicio 2.

$$F_x(t) = P(x \leq t) = P(x + y \leq t)$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \text{\textit{área del triangulo con catetos} } t = \dfrac{t^2}{2} & 0 < t < 1 \\ 1 - \text{ \textit{área triánglo cateto} } (2-t) = 1 - \dfrac{(2-t)^2}{2} = \dfrac{2-(2-t)^2}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

Derivando obtenemos que:

$$f_x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Este problema lo podríamos ver de otra forma: Sean U, V variables aleatorias independientes ambas con distribución uniforme en $(0, 1)$. Calcular la función de densidad de $U + V$. En este caso podremos usar las convoluciones.

$$f_U(u) = I_{(0,1)}(u) \qquad f_V(v) = I_{(0,1)}(v)$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u & 0 < u < 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases} \qquad F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ v & 0 < v < 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases}$$

Si $Z = U + V$

$$f_Z(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_u(z-t) f_V(t) dt = \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(0,1)}(z-t) I_{(0,1)}(t) dt = \int\limits_0^1 I_{(0,1)}(z-t) dt$$

Como $0 < z-t < 1 \implies z-1 < t < z$*, luego tendremos:*

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int_0^z dt = z & 0 < z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dt = 1-(z-1) = 2-z & 1 < z < 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

Lo que es igual a lo que hemos calculado antes.

Otra forma análoga)

Sea (U, V) *uniforme, se obtiene una nueva variable* (X, Y) *mediante la siguiente transformación:*

$$\begin{cases} X = U + V \\ Y = V \end{cases}$$

Calcular la función de distribución marginal de la v.a. X

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(U,V)}(u(x,y), v(x,y))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

Y luego calcularíamos f_X

Ejercicio 3.

$$f_X(t) = I_{(0,1)}(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1) \\ 0 & t \notin (0,1) \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int f_X(z-t)dF_Y(t) = \int I_{(0,1)}(z-t)dF_Y(t) =$$

Como Y *es discreta y toma valores en* $t = 0, 1$*, la integral la podemos calcular como:*

$$= I_{(0,1)}(z)\frac{1}{2} + I_{(0,1)}(z-1)\frac{1}{2} = I_{(0,1)}(z)\frac{1}{2} + I_{(1,2)}(z)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(I_{(0,1)}(z) + I_{(1,2)}(z)) = I_{(0,2)}(z)\frac{1}{2}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & z \in (0,2) \\ 0 & z \notin (0,2) \end{cases}$$

Integrando llegamos a:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}z & 0 < z < 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.

a)

Los valores que se pueden tomar son los que cumplen que $i \leq j$. El caso (i,j) con $i < j$ se cumple cuando se saca ese par en el orden (i,j) o en el orden (j,i). Para el caso $i = j$, solo hay un modo de sacarlo. Entonces:

$$p((i,j)) = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2} & i < j \\ \\ \dfrac{1}{n^2} & i = j \\ \\ 0 & i > j \end{cases}$$

b)

$$p_1(i) = \sum_{j=1}^{n} p((i,j)) = \sum_{j=i}^{n} p((i,j)) = p(i,i) + \sum_{j=i+1}^{n} p((i,j)) = \frac{1}{n^2}(n-i)\frac{2}{n^2} \qquad \forall i$$

$$p_1(i) = \frac{2n - 2i + 1}{n^2}$$

c)

$$p_2(j) = \sum_{i=1}^{j} p((i,j)) = \sum_{i=1}^{j-1} p((i,j)) + p((j,j)) = (j-1)\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \qquad \forall j$$

$$p_2(j) = \frac{2j - 1}{n^2}$$

d)

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p((i,j))}{p_1(i)}$$

Sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$
Si $j = i + 1, ..., n$

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{2/n^2}{(2n - 2i + 1)/n^2} = \frac{2}{2(n-i)+1}$$

Si $j = i$

$$p_{2|1}(j|i) = \frac{1/n^2}{(2n - 2i + 1)/n^2} = \frac{1}{2(n-i)+1}$$

En el resto de casos

$$p_{2|1}(j|i) = 0$$

e)

Sea $j \in \{1, 2, ..., n\}$
Si $i = 1, ..., j - 1$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{((i,j))}{p_2(j)} = \frac{2/n^2}{(2j-1)/n^2} = \frac{2}{2j-1}$$

Si $i = j$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{((i,j))}{p_2(j)} = \frac{1}{2j-1}$$

En el resto de casos

$$p_{1|2}(i|j) = 0$$