Es sencillo ver que $\widetilde{g}$ es diferenciable. Sea ahora $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(x) = \frac{\widetilde{g}\big(\varepsilon^2 - |x|^2\big)}{\widetilde{g}\big(\varepsilon^2 - |x|^2\big) + \widetilde{g}\big(|x|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\big)}.$$

Obsérvese, por un lado, que el denominador de $g(x)$ nunca se anula, pues para ello deberían satisfacerse a la vez las desigualdades $\varepsilon^2 - |x|^2 \leq 0$ y $|x|^2 - \varepsilon^2/4 \leq 0$, lo que implicaría que $\varepsilon^2 \leq |x|^2 \leq \varepsilon^2/4$, un absurdo. Por lo tanto, g es diferenciable.

Además, $g(x) = 0$ si, y sólo si, $\varepsilon^2 - |x|^2 \leq 0$, es decir, cuando $x \notin D(\mathbf{0}, \varepsilon)$. En consecuencia, si $x \in D(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $g(x)$ es positivo. Esto demuestra que $\operatorname{sop}(g) \subset D(\mathbf{0}, \varepsilon)$, verificándose además que $0 \leq g \leq 1$. Por otro lado, si $0 \leq |x| \leq \varepsilon/2$, es decir, si $x \in D(\mathbf{0}, \varepsilon/2)$, entonces $g(x) \equiv 1$.

Finalmente, dado que la función g anterior cumple todas las condiciones de una función meseta, pero referidas al disco $D(\mathbf{0}, \varepsilon)$, basta tomar como la función meseta buscada una simple traslación de g: definimos

$$\widetilde{h} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \widetilde{h}(x) = g(x - q).$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 4.4.3 (Caracterización de las superficies minimales como puntos críticos del funcional área). *Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación tal que $X(U)$ es una superficie regular. Sea D un disco abierto en $\mathbb{R}^2$ cuya clausura* $\operatorname{cl} D \subset U$. *Entonces, $X(D)$ es superficie minimal si, y sólo si, $A'(0) = 0$ para cualquier variación normal ϕ de $X(D)$, donde $A(t)$ representa el área de la superficie $X^t(D)$.*

Demostración. El área $A(t)$ de la superficie $X^t(D)$ viene dada por

$$A(t) = \int_{X^t(D)} dA = \iint_D \sqrt{E_t G_t - F_t^2}(u,v)\, du dv.$$

Tenemos por tanto que calcular E_t, F_t y G_t para la parametrización X^t,

$$X^t(u,v) = \phi(u,v,t) = X(u,v) + t h(u,v) N\big(X(u,v)\big).$$

Dado que

$$X_u^t = X_u + t h_u N + t h N_u \quad \text{y} \quad X_v^t = X_v + t h_v N + t h N_v,$$

es sencillo comprobar que

$$\begin{cases} E_t = E - 2the + t^2\big(h_u^2 + h^2\langle N_u, N_u\rangle\big) = E - 2the + t^2 R_1, \\ F_t = F - 2thf + t^2\big(h_u h_v + h^2\langle N_u, N_v\rangle\big) = F - 2thf + t^2 R_2, \\ G_t = G - 2thg + t^2\big(h_v^2 + h^2\langle N_v, N_v\rangle\big) = G - 2thg + t^2 R_3, \end{cases}$$

para ciertas funciones R_1, R_2, R_3. Agrupando sumandos convenientemente se tiene

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= EG - F^2 - 2ht(gE + eG - 2fF) + t^2 R_4 \\ &= (EG - F^2)\left(1 - 2ht\frac{gE + eG - 2fF}{EG - F^2}\right) + t^2 R_4 = (EG - F^2)(1 - 4htH + t^2 R), \end{aligned}$$

con $R = R_4/(EG-F^2)$. En definitiva,

$$E_tG_t - F_t^2 = (EG-F^2)\left(1-4htH+\overline{R}\right),$$

donde $\overline{R} = t^2R$ satisface que $\lim_{t\to 0}(\overline{R}/t) = 0$. Por tanto, sustituyendo esta expresión en la fórmula del área,

$$A(t) = \iint_D \sqrt{E_tG_t - F_t^2}\, dudv = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\sqrt{1-4htH+\overline{R}}\, dudv,$$

y derivando a continuación, obtenemos que

$$A'(t) = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\frac{-4hH+\widetilde{R}}{2\sqrt{1-4htH+\overline{R}}}\, dudv,$$

donde ahora, $\lim_{t\to 0}\widetilde{R} = 0$. En particular, si $t=0$,

$$A'(0) = -2\iint_D hH\sqrt{EG-F^2}\, dudv.$$

Una vez obtenida la fórmula anterior para $A'(0)$, la implicación directa del teorema es evidente: si $X(D)$ es una superficie minimal, entonces $H\equiv 0$, por lo que $A'(0)=0$. Veamos por tanto el recíproco.

Supongamos que $A'(0)=0$, para cualquier variación normal de $X(D)$, pero que existe un punto $p\in X(D)$ para el cual $H(p)\neq 0$. Sea $p = X(q)$. Entonces, existe un cierto disco abierto $D(q,r_1)\subset D$ de forma que $(H\circ X)|_{D(q,r_1)}\not\equiv 0$, manteniendo además el mismo signo que $H(p)$ en todos los puntos. Podemos suponer, sin pérdida alguna de generalidad y cambiando la orientación si es necesario, que $H(p)>0$.

Sea ahora $\widetilde{h}: D\longrightarrow \mathbb{R}$ una función meseta para el disco $D(q,r_1)$ (que sabemos siempre existe, véase el lema 4.4.2), es decir, verificando que

- $\widetilde{h}$ es diferenciable,
- $\mathrm{sop}\big(\widetilde{h}\big)\subset D(q,r_1)$,
- $0\le \widetilde{h}\le 1$,
- existe $r_2<r_1$ tal que $\widetilde{h}|_{D(q,r_2)}\equiv 1$.

Como $A'(0)=0$ para cualquier variación normal de $X(D)$, en particular se anulará para la variación determinada por la función $\widetilde{h}$ previamente definida; además, como $\mathrm{sop}\big(\widetilde{h}\big)\subset D(q,r_1)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}0 = A'(0) &= -2\iint_D \widetilde{h}H\sqrt{EG-F^2}\,dudv = -2\iint_{D(q,r_1)}\widetilde{h}H\sqrt{EG-F^2}\,dudv\\ &= -2\iint_{D(q,r_1)\setminus D(q,r_2)}\widetilde{h}H\sqrt{EG-F^2}\,dudv - 2\iint_{D(q,r_2)}\widetilde{h}H\sqrt{EG-F^2}\,dudv.\end{aligned}$$

Obsérvese que, en la suma anterior, tanto H como $\sqrt{EG-F^2}$ son estrictamente positivos (en los dominios respectivos para cada una de las dos integrales); pero, mientras que en la primera integral $\widetilde{h}\ge 0$, en la segunda $\widetilde{h}\equiv 1$, lo que implica que esta última nunca se anula. Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción: $0 = A'(0) < 0$ estrictamente, lo que concluye la demostración. $\square$