Ejercicios MNED

Paco Mora Caselles

29 de noviembre de 2021

CAPÍTULO 1

Tema 1

Ejercicio 1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \to \sigma(A) = \{0{,}5 + i, 0{,}5 - i\}$$

x, y son combinaciones lineales de $e^{(0{,}5 \pm i)t}$ es decir de $\{e^{0{,}5t}e^{i}, e^{0{,}5}e^{-i}\}$

Ejercicio 5.

$$\begin{cases} x'''(t) = \cos(x(t)) + \sin(x'(t)) - e^{x''(t)} + t^2 \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = 7 \\ x''(0) = 13 \end{cases}$$

Consideramos

$$\begin{cases} x(t) \\ u(t) = x'(t) \\ v(t) = x''(t) \end{cases}$$

Entonces la ecuación queda:

$$v'(t) = (x'''(t)) = (\cos(x(t))) + \sin(u(t)) - e^{v(t)} + t^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En versión matricial:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(x) + \sin(u) - e^{v} + t^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.

$$e^{at}(y' + ay) = e^{at}y' + ae^{at}y = \frac{d}{/dt}(e^{at}y(t))$$

$$e^{\int_0^t a(s)ds}\left(y'(t) - a(t)y(t)\right) = e^{\int_0^t a(s)ds}y'(t) + a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}y(t)\right)\frac{d}{dt}(e^{\int_0^t a(s)ds}y(t))$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = e^{at}y(t)|_{t=0}^{(t=t)}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = de^{at-bt}$$

CAPÍTULO 2

Tema 2

Ejercicio 8. *a)*

$$y_n = \frac{1-h}{1+(n-1)h} \ n = 0, .., N = \frac{1}{h}$$

b)

Utilizando que es una ecuación de variables separables, llegamos a:

$$y(t) = \frac{1}{1+t}$$

Dado $t_* = nh$ *fijo, calculamos el límite estacionario:*

$$\lim_{h\to 0} \ _{n\to+\infty} \ _{hn=t_*} y_n^h = \lim \frac{1-h}{1+nh-h} = \lim \frac{1-h}{1+t_*-h} = \frac{1}{1+t_*} = y(t_*)$$

Es decir la solución exacta que hemos calculado.

c)

El resultado es:

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1+t_*^2+2t_*-h-ht_*} = O(h)_{h\to 0}$$

con $hn = t_*$.

Que el error sea una $O(h)$ *significa que* $|y(t_* - y_n^h| \leq_{h\to 0} kh$ *Con* k *independiente de* h.

Comprobaremos que el error sea una $O(h)$*:*

$$|y(t_* - y_n^h| = h\frac{t_*}{|1+t_*^2+2t_*-h-ht_*|}$$

Teniendo:

$$\frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*-h-ht_*} \sim_{h\to 0} \frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Luego el error lo podemos acotar por hk *con* $k = 1$ *cuando* $h \to 0$.

Comprobaremos la optimalidad de esta cota.

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \leq ?kh^2$$

$$\frac{1}{h^2} y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_* h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \to_{h \to 0} \infty$$

Luego el error es mayor o igual que h y menor que h^2.

Ejercicio 6.

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = \frac{t^2}{2}$ El método de Euler explícito queda:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, g_n) = y_n + ht_n \end{cases}$$

Entonces:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = y_0 + ht_0 = 0 + 0h = 0$$

$$y_2 = 0 + hh = h^2 \qquad y_3 = h^2 + 2h^2 = 3h^2$$

$$y_4 = (1 + 2 + 3) = 6h^2 \qquad y_5 = (1 + 2 + 3 + 4)h^2 = 10h^2$$

En general:

$$y_n = (1 + 2 + ... + n - 1)h^2 = \frac{(n-1)n}{2} h^2 = \frac{n^2 - n}{2} h^2 = \frac{1}{2} n^2 h^2 - \frac{1}{2} nhh = \frac{1}{2} t_*^2 - \frac{1}{2} t_* h \to \frac{1}{2} t_*^2$$

Con lo que tenemos un error del orden de $O(h)$

Variación del ejercicio

$$\begin{cases} y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = t$ El método de Euler explícito queda:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h \end{cases}$$

Con lo que:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = h \qquad y_2 = 2h \; ...$$

$$y_n = nh = t_* = y(t_*)$$

Con lo que hemos obtenido la solución exacta, $\forall t_* = nh$ $y(t_*) - y_n^h = 0$. ¿Por qué no hay error en el método de Euler en este caso? Porque la segunda derivada de la solución exacta, $y'' \equiv 0$ y porque hemos tomado un t_0 que forma parte de la solución.

Si en vez de tomar 0 tomamos $t_0 = \varepsilon$:

$$y_0 = \varepsilon \qquad y_1 = \varepsilon + h \qquad y_2 = \varepsilon + 2h$$

$$y_n = \varepsilon + nh$$

En este caso al no tomar un y_0 exacto el error se desvía por ε

$$(1+hL)^n \sim ?e^{Lt}$$

con $t = nh$ O equivalentemente, que $\lim_{t=nh}(1+hL)^n = e^{Lt}$

$$(1+hL)^n = e^{n\log(1+hL)} = e^{hn\dfrac{\log(1+hL)}{h}} \to e^{Lt}$$

c)

$$(1+O(h^{p+1}))^n = exp(n\log(1+O(h^{p+1}))) = exp(hn\frac{\log(1+O(h^{p+1}))}{n}) = e^{t\dfrac{\log(1+O(h^{p+1}))}{n}} = ...$$

Hacemos el desarrollo de Taylor en el exponente y nos queda $= exp(t(O(h^p)+...))$

Ejercicio 10. *Calculamos primero la solución exacta aunque no nos lo pida el ejercicio.*

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) + \beta \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y' = -\alpha y = \beta$$

$$e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t}y = e^{-\alpha t}y$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t})y = e^{-\alpha t}\beta$$

$$e^{-\alpha t}y - y_0 = \int_0^t e^{-\alpha s}\beta ds$$

$$y(t) = e^{-\alpha t}y_0 - \frac{\beta}{\alpha}(1-e^{\alpha t})$$

Hacemos ahora Euler explícito:

$$\begin{cases} u_{n+1} = y_n + hf(t_n, u_n) & n = 0, ..., \frac{N}{T} - 1 \\ u_0 = A & \textit{podemos asumir } A = y_0 \end{cases}$$

Recordemos que cada u_n es una aproximación a $y(t_n)$. También podemos usar y_n como aproximación a $y(t_n)$
Es importante saber que $y_n \neq y(t_n)$.
En nuestro caso, $f(t,y) = \alpha y + \beta$, luego $u_{n+1} = u_n + h(\alpha y_n + \beta)$
Tenemos entonces dos opciones:

- $u_1 = u_0 + h(\alpha u_0 + \beta)$
  $u_2 = u_1 h\alpha(u_1 + \beta) = u_1 + h\alpha(u_0 + h(\alpha u_0 + \beta) + \beta) =$
  $= u_1 + u_0(h\alpha(h\alpha)^2 + \beta(h^2 alfah\alpha)) = u_1 + h\alpha(1+h\alpha)u_0 + h\alpha(h+1)\beta$
- $u_{n+1} = (1+h\alpha)u_n + \beta h$, *lo que nos queda:* $u_1 = (1+h\alpha)u_0 + \beta h$
  $u_2 = (1+h\alpha)u_1 + \beta h(1+h\alpha)u_0 + \beta h(1+(1+h\alpha))$
  $u_3 = (1+h\alpha)u_2 + \beta h = (1+h\alpha)((1+h\alpha)^2 u_0 + \beta h(1+(1+h\alpha))) + \beta h = (1+h\alpha)^3 + \beta h(1(1+h\alpha) + (1+h\alpha)^2)$

$u_n = (1+h\alpha)^n u_0 + \beta h(1 + (1+h\alpha) + ... + (1+h\alpha)^{n-1})$
$= (1+h\alpha)^n u_0 + \frac{\beta}{\alpha}[(1+h\alpha)^n - 1]$

Podemos observar que la convergencia del segundo método es mejor.

Vamos a comprobar que $u_n \to_{h\to 0,\ n\to+\infty,\ hn=t} y(t)$ *cuando* $t = hn$ *fijo.*

Sabemos que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right) = e^a$*. Entonces,* $(1+h\alpha)^n(1+\frac{hn}{n}\alpha) \to e^{t\alpha}$*, el valor que toma la solución exacta en el punto* t_0*.*

Calculemos ahora el error, sabemos que:

$$\int \frac{1}{1+x} = 1 - x + x + x^2 - x^3 + ...$$

$$\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \qquad \textit{Desarrollo de Taylor de } \log 1 + x \textit{ alrededor de } x = 0$$

El desarrollo de $\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2)$ *con* $|x| \to 0$

Tomando entonces una x *adecuada:*

$$(1+h\alpha)^n = e^{n\log(1+h\alpha)} = e^{nh\alpha\frac{\log(1+h\alpha)}{h\alpha}} = e^{t\alpha(1-\frac{h\alpha}{2}+O(h^2))} = e^{t\alpha}e^{-\frac{h\alpha^2 t}{2}+O(h^2)}$$

Entonces, $(1+h\alpha)^n = -e^{t\alpha} = e^{t\alpha}e^{\cdots} - e^{t\alpha} = e^{t\alpha}(e^{\cdots} - 1) = e^{t\alpha}(... + \frac{[...]^2}{2!} + ...) = e^{\alpha t}(-\frac{h\alpha^2 t}{2}) + O(h^2)$

Hemos llegado a:

$$(1+h\alpha)^n - e^{t\alpha} = -\frac{h\alpha^2 t}{2}e^{\alpha t} + O(h^2)$$

Y el error es:

$$u_n - y_n = ((1+h\alpha)^n - e^{\alpha t})u_0 + \frac{\beta}{\alpha}((1+h\alpha)^n - e^{\alpha t}) = -\frac{h\alpha^2 t}{2}(u_0 + \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t} + O(h^2) \qquad h \to 0$$

Ejercicio 12. *Comprobamos el orden de Euler explícito del problema:*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad y(0) = 0$$

Observamos que la solución es $y(x) = -\frac{(1-x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1-x}$

Tenemos un problema en 1 ya que la derivada no está acotada en ese punto.

Vemos la expresión del error local:

$$\ell(t;h) = \frac{h^2}{2}y''(t)$$

$$\ell(x;h) = \frac{h^2}{2}y''(x)$$

Vemos que $y''(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$. *En el caso de que* x *sea de la forma* $x = 1-h$ *tendremos que* $\ell(1-h;h) = \frac{h^2}{4}\frac{1}{h^{3/2}} = \frac{1}{4}h^{1/2}$ *Con lo que el error global no convergerá (tiene orden* $\frac{1}{2}-1$*).*

Ejercicio 13. $n \geq N-1$
$0 < \theta < 1, \; h = \frac{T}{N}$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_n + \theta f(t_n, y_n)) \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Los pasos ahora son:

1. *Obtenemos* $f(t_n, y_n)$
2. *Avanzamos desde* (t_n, y_n) *con pendiente* $f(t_n, y_n)$ *hasta el punto* $t_{n+\theta} = t_n + \theta h$ *y obtenemos la abscisa* $y_{n+\theta} = y_n + \theta h f(t_n, y_n)$
3. *Sobre el punto* $(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$ *obtenemos una nueva pendiente* $f(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$
4. *Aquí disponemos ya de dos pendientes, lo ideal es tomar* $k = b_1k_1 + b_2k_2$ *con* $b_1 + b_2 = 1$ *promedio y entonces avanzar desde* t_n *a* t_{n+1} *con esta pendiente:*

$$y_{n+1} = y_n + hk \qquad \text{con } k = b_1k_1 + b_2 + k_2$$

5. *en el caso de este ejercicio es* $b_1 = 0, \; b_2 = 1$

Ejercicio 16.

CAPÍTULO 3

Tema 4

Ejercicio 4.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{array}$$

Las condiciones para obtener un orden 3 son:

1. $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ *(lo tenemos)*
2. $b_2 c_2 + b_3 c_3 = \dfrac{1}{2}$ *(también se cumple)*
3. $b_2 + c_2^2 + b_3 c_3^2 = \dfrac{1}{3}$

La última condición no se cumple, luego el método no es de orden 3, $\ell(h) = O(h^{p+1})$ *para* $p \leq 2$ *(recordemos que el orden del error local es uno más que el método).*

Si usamos $y' = y$ *puede que la solución sea más precisa, pero esto no va a ocurrir en general. Con lo que no contradecimos con lo que hemos dicho para el orden del método:*

$$f(t,y) = y \implies \begin{cases} k_1 = y_n \\ k_2 = y_n + h y_n = (1+h) y_n \\ k_3 = y_n + \dfrac{h}{2}(y_n + h y_n) = y_n + h y_n + \dfrac{h^2}{2} y_n = y_n \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2}\right) \end{cases}$$

Entonces $y_{n+1} = y_n + h\left(\dfrac{3}{6} y_n + \dfrac{1}{6}(1+h) y_n + \dfrac{2}{6}\left(1 + h + \dfrac{h^2}{2}\right) y_n\right) = y_n \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{6}\right).$

Con lo que $y_n = T_3(h)^n$ *donde* $T_3(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}$ *y* $e^h = T_3(h) + O(h^4)$ *y* $T_3(h) = e^h(1 + O(h^4))$ *Entonces:*

$$T_3(h)^n = e^{t_n}(1 + O(h^4))^n = e^{t_n}(1 + O(h^3)) \implies y_n - e^{t_n} = O(h^3)$$

Ejercicio 10.

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2)$$

Con:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1)) \end{cases}$$

Podemos observar que la expresión anidada en k_2 *parece una nueva* k_i*, cambiamos nuestras* $k's$ *para que el problema sea más intuitivo:*

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2) \\ y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3) \end{cases}$$

b)

El tablero de Butcher es:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

c)

Comprobamos el orden:

1. $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ *(Se cumple)*
2. $b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2}$ *(Se cumple)*
3. $b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3}$ *(Se cumple)*
4. $b_3c_2c_3 = \frac{1}{6}$ *(Se cumple)*

Por tanto, el método es de orden máximo y en nuestro caso, es de orden 3.

a)

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(t_n, y_n; h) \text{ donde } \Phi_f(t_n, y_n; h) = \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3$$

$$k_1 = f(t_n, y_n) \implies k_1 \text{ es Lips con respecto al segundo argumento}$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1)$$

$$k_2(y_n) = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1(y_n))$$

$$k_2(z_n) = f(t_n + \frac{1}{3}h, z_n + \frac{1}{3}hk_1(z_n))$$

$$|k_2(y_n) - k_2(z_n)| \leq L_f|y_n + \frac{1}{3}hk_1(y_n) - (z_n + \frac{1}{3}hk_1(z_n))| \leq L_f(|y_n - z_n| + \frac{1}{3}h(k_1(y_n) - k_1(z_n))) \leq$$

$$\leq L_f(|y_n - z_n| + \frac{1}{3}h|y_n - z_n|L_f) = (L_f + \frac{1}{3}hL_f^2)|y_n - z_n| = L'_f|y_n - z_n|$$

$$|k_3(y_n) - k_3(z_n)| \leq L_f(|y_n - z_n|\frac{2}{3}h|k_2(y_n) - k_2(z_n)|) \leq L_f(1 + \frac{2}{3}hL_fL'_f)|y_n - z_n|$$

En general:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(t_n, y_n; h)$$

$$z_{n+1} = z_n + h\Phi_f(t_n, z_n; h)$$

$$|y_n - z_n| \leq (1 + h\Lambda_{\Phi_f})|y_n - z_n|$$

con $\Lambda_f = O(1)$ *con lo que:*

$$|y_n - z_n| \leq (1 + h\Lambda_{\phi_f})^n|y_0 - z_0| \leq e^{hn\Lambda\phi_f}$$

CAPÍTULO 4

Tema 5

4.1 - Indicaciones sobre los métodos multipaso

Hay principalmente tres tipos de ejercicios en este tema:

1. Polinomio característico $\rho(z)$ de segundo o tercer orden. Recordamos que $\rho(1) = 0, \rho'(1) \neq 0 \implies \rho(z) = (z-1)\widetilde{\rho}(t)$. Normalmente hay un parámetro en los coeficientes de $\rho(z)$, a y se piden condiciones sobre a para que se cumplan las condiciones de Dalhquist.
2. Usar $\rho(z)$ y $\sigma(z)$ para determinar el orden del método. Recordemos que $\ell(h) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 \dfrac{h^2}{2} y^{(2)}(t) + C_3 \dfrac{h^3}{3} y'''(t) + ...$ y se tiene $\ell(h) = O(h^2) \implies C_0 = C_1 = 0$ ya que $C_0 = \rho(1) = 0,\ C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ y $C_q = \sum\limits_{j=0}^{k} j^q a_j - q \sum\limits_{j=0}^{k} j^{q-1} b_j$
3. Usando fórmulas de interpolación determinar un método multipaso. Dado y_0, y_1, y_2 obtener $\ell(s)$ usando $L'(t) = hf(t_n, y_n)$.

CAPÍTULO 5

Anexo: otros ejercicios