Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

Paco Mora Caselles

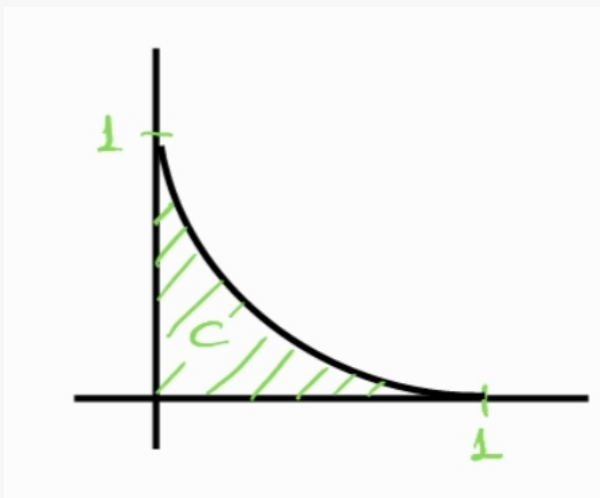
17 de marzo de 2022

CAPÍTULO 1

Relación 1

Ejercicio 1.

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \ y < (1-x)^2\}$$



Dejamos por ahora f en función de k, más tarde calculamos su valor:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in C \\ 0 & (x,y) \notin C \end{cases}$$

Para $x \in (0,1)$:

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy = \int_0^{(1-x)^2} kdy = k(1-x)^2$$

Entonces tenemos:

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a $f_2(y)$, cuando $y \in (0,1)$:

$$f_2(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

Calculamos ahora $E(X^n(1-X)^m)$ usamos $f_1(x)$:

$$E(X^n(1-X)^m) = \int x^n(1-x)^m f_1(x)dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k\int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} =$$

$$= kB(n+1, m+3) = k\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k\frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!}$$

Los momentos de orden n respecto del origen, la esperanza y la varianza de X las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos $m = 0$ y para la varianza podemos usar que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \qquad E(X) = \frac{1}{4} \qquad E(X^2) = \frac{1}{10} \qquad Var(X) = \frac{3}{80}$$

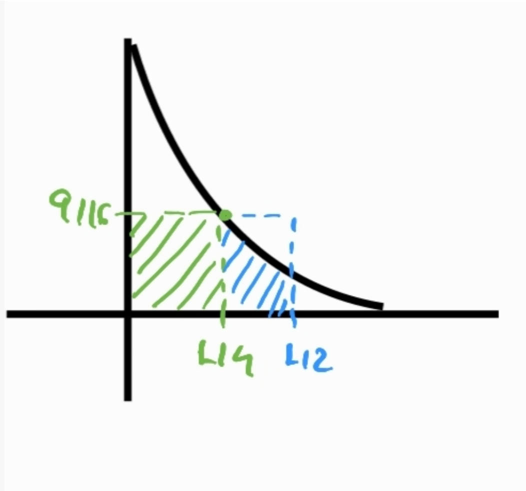
Calculamos $f_{2|1}(y|x)$, si $x \in (0,1)$:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{3}{3(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & y \in (0,(1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0,(1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora $f_{2|1}(y|x = 1/2)$:

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \frac{1}{4}) \\ \\ 0 & y \notin (0, \frac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular $F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por k:



$$F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)=3\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=\frac{3^3}{2^6}$$

Para $F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right)=F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)+3\cdot Area\ T$*, siendo* T *la intersección con* C*. Sabemos entonces que:*

$$\int_{1/4}^{1/2}(1-x)^2dx=\int_{1/4}^{1/2}(x^2-2x+1)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x\Big|_{1/4}^{1/2}=\frac{19}{2^63}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right)=\frac{3^3}{2^6}+3\frac{19}{2^63}=\frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de Y *respecto de* X*:*

$$y-\mu_y=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)$$

$$\mu_y=E(Y)=\int_0^1 y3(1-y^{1/2})dy=3\int_0^1(y-y^{3/2})=\frac{3}{10}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{(1-x)^2}3xydydx=3\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(1-x)^2}d=\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^4dx=$$

$$=B(2,5)=\frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)}=\frac{3}{2}\frac{1!4!}{6!}=\frac{1}{20}$$

Recordemos que $\mu_X=E(X)=\frac{1}{4}$*, entonces:*

$$\sigma_{XY}Cov(X,Y)=\frac{1}{2^2\cdot 5}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{2-3}{2^3\cdot 5}=-\frac{1}{2^3\cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que $\sigma_X = \frac{3}{80}$*):*

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora $E(Y|X = x) = m_{2|1}(x)$*:*

$$E(Y|X = x) = \int y f_{2|1}(y|x) dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Ejercicio 2.

$$E(X) = 2,\ Var(X) = 3\ X\ \textit{simétrica}$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 2 + 3(X-2)2^2 + 2^3) =$$
$$= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6Var(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26$$

Ejercicio 3.
El número de de posibilidades totales es claramente $\binom{N}{n}$*, la distribución de probabilidad es entonces:*

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos $n \leq N,\ r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora $\alpha_{(3)}$*:*

$$E(X_1^{(3)}) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$r_1(r_1-1)(r_1-2)\binom{N_1}{r_1} = r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2)\cdots 2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\binom{N_1-3}{r_1-3}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$P(X_1 = r_1) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$N_1(N_1-1)(N_1-2)\sum_{r_1+r_2+r_3=n}\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= N_1(N_1-1)(N_2-2)\frac{(N-3)^{(n-3)}n!}{(n-3)!N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)}n^{(3)}}{N^{(3)}}$$

Ejercicio 4.

Aparado a)

Observemos primero que no hay dos pares de la forma $(a,b),\ (a,c)$ de forma que ambos tengan probabilidad no nula. Igual forma, no hay pares $(b,a),\ (c,a)$ tales que se tomen ambos valores con probabilidad no nula. Por tanto, para ver la distribución marginal de X podemos omitir los valores que toma Y:

$$P(X=0) = P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{3}$$

De forma análoga para la v.a. Y:

$$P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{3}$$

Las esperanzas entonces de estas vvaa son:

$$E(X) = (0+1+2)\cdot\frac{1}{3} = 1$$

$$E(Y) = (1+2+3)\cdot\frac{1}{3} = 2$$

Hacemos también los cálculos necesarios para hacer la recta de regresión:

$$E(XY) = (0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3)\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{8}{3} * 2 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = (0+1+4)\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

La recta de regresión de Y sobre X es entonces:

$$y - 2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}(x-1) \implies y - 2 = x - 1 \implies y = x + 1$$

Calculamos ahora el coeficiente de correlación para poder ver $Var(Y - X^*)$:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}} = 1$$

Este valor de ρ nos indica que X y Y son dependientes linealmente. Calculamos ahora $Var(Y - X^*)$

$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = 0$$

Aparado b)

Para calcular las vvaa marginales solo tenemos que sumar los elementos de la misma fila o columna. Por ejemplo:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Obtenemos así:

$$P(X = 0) = \frac{11}{18} \quad P(X = 1) = \frac{5}{18} \quad P(X = 2) = \frac{2}{18}$$

$$P(Y = 0) = \frac{11}{18} \quad P(Y = 1) = \frac{5}{18} \quad P(Y = 2) = \frac{2}{18}$$

También podemos obtener $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, $Var(X), Var(Y) = \frac{17}{36}$ y $Cov(X, Y) = -\frac{5}{36}$.

Entonces la recta de regresión de X sobre Y es:

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-\frac{5}{36}}{\frac{17}{36}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}$$

Como las esperanzas y las varianzas son iguales, obtenemos que el cálculo de la recta de regresión de Y sobre X es igual:

$$x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}$$

Calcularemos ahora $Var(Y - X^*)$:

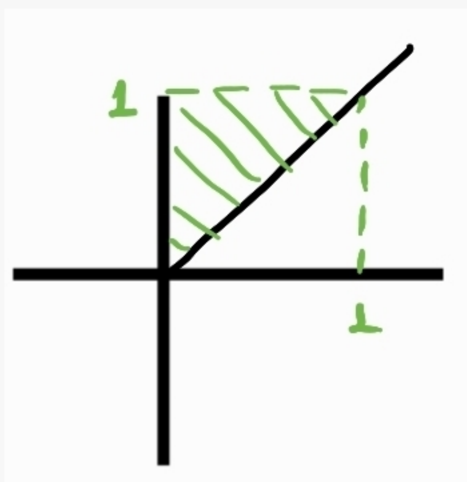
$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = \frac{17}{36}\left(1 - \frac{25/36^2}{17^2/36}\right) = \frac{17}{36}\left(\frac{17^2 - 25}{17^2}\right) = \frac{11}{3 \cdot 17}$$

Para la varianza residual de X sobre Y, vemos que es igual porque coinciden sus esperanzas y sus varianzas.

CAPÍTULO 2

Relación 2

Ejercicio 1.
Vemos en primer lugar cómo es el recinto del ejercicio:



$$\alpha_{n.m} = E(X^nY^m) = \int x^n y^m \cdot \frac{1}{y} = \int_0^1 \int_0^y = x^n x^{m-1} dxdy =$$

$$= \int_0^1 y^{m-1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^y dy = \frac{1}{n+1}\int_0^1 y^{m-1}y^{n+1}dy = \frac{1}{n+1}\frac{1}{m+n+1}$$

Con este resultado podemos obtener los valores:

$$E(Y) = \frac{1}{2} \qquad E(Y^3) = \frac{1}{3} \qquad E(XY) = \frac{1}{6} \qquad E(X) = \frac{1}{4}$$

Entonces tenemos que $Var(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ *y* $Cov(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

Para calcular la recta de regresión obtenemos primero:

$$\beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{1/24}{1/12} = \frac{1}{2}$$

Y la recta de regresión que nos piden queda:

$$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

Calcularemos ahora la curva de regresión de X *sobre* Y*:*

$$x = m_{1|2}(y) \qquad m_{1|2}(y) = E(X|Y=y) = \int x f_{1|2}(x|y)dx$$

Entonces, para los valores de y *para los que* $f_2(y) > 0$ *tendremos:*

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Calcularemos ahora $f_2(y)$*:*

$$\text{Si } y \in (0,1)\text{: } f_2(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y}dx = \frac{1}{y}x\Big|_0^1 = 1$$

$$f_2(y) = I_{(0,1)}(y)$$

Volvemos ahora al cálculo de $f_{1|2}(x|y)$*. Dado* $y \in (0,1)$*:*

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1/y}{1} = \frac{1}{y} \qquad x \in (0,y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = 0 \qquad x \notin (0,y)$$

Podemos calcular ahora $m_{1|2}(y)$*:*

$$E(X|Y=y) = \int_0^y x\frac{1}{y}dx = \frac{1}{y}\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y}{2}$$

Entonces la curva de regresión es $x = \dfrac{y}{2}$. Notemos que es una recta, en este caso ***necesariamente coincidirá con la recta de regresión****. Entonces, si hubiéramos calculado primero la curva de regresión, no tendríamos que calcular la recta porque sabemos que coincidiría.*

Ejercicio 2.

$$f(t_1,t_2,t_3,t_4) = \frac{1}{4}(t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3) = E(t_1^{X_1}t_2^{X_2}t_3^{X_3}) = \sum p_{i_1i_2i_3}t_1^{i_1}t_2^{i_2}t_3^{i_3}$$

De este último término, en cada sumando, $p_{i_1i_2i_3}$ representa $P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3)$

Viendo el valor de f, sabemos que la vvaa (X_1, X_2, X_3) toma los valores $(1,0,0),(0,1,0),$ $(0,0,1),(1,1,1)$ con probabilidad de $\dfrac{1}{4}$ en cada una de ellas.

Vamos a comprobar si X_1, X_2 son independientes. Para ello, vemos si $f_{12}(t_1,t_2) = f_1(t_1)\cdot f_2(t_2)$. Estas funciones no las conocemos, pero como sabemos que f se puede representar como $E(t_1^{X_1}t_2^{X_2}t_3^{X_3})$, si hacemos $t_3 = 1$:

$$f_{12}(t_1,t_2) = E(t_1^{X_1}, t_2^{X_2}) = E(t_1^{X_1}t_2^{X_2}1^{X_3}) = \frac{1}{4}(t_1+t_2+1+t_1t_2)$$

De igual forma podemos hacer:

$$f_1(t_1) = E(t_1^{X_1}) = E(t_1^{X_1}1^{X_2}1^{X_3}) = \frac{1}{4}(t_1+1+1+t_1) = \frac{1+t_1}{2}$$

$$f_2(t_2) = \frac{1+t_2}{2}$$

Para comprobar la independencia solo tenemos que ver si $f_{12} = f_1f_2$:

$$f_1f_2 = \frac{1}{2}(1+t_1)\cdot\frac{1}{2}(1+t_2) = \frac{1}{4}(t_1+t_2+1+t_1t_2) = f_{12}$$

Luego X_1, X_2 son independientes y de forma análoga: X_2, X_3 son independientes y X_2, X_3 son independientes. Es decir, son independientes dos a dos.

Para comprobar que son independientes, tendremos que ver si $f(t_1,t_2,t_3) = f_1(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdot f_3(t_3)$:

$$f_1f_2f_3 = \frac{1}{2^3}(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3) = \frac{1}{2^3}(1+t_1+t_2+t_1t_2)(1+t_3) =$$

$$= \frac{1}{2^3}(1+t_1+t_2+t_1t_2+t_3+t_1t_3+t_2t_3+t_1t_2t_3) \neq f(t_1,t_2,t_3)$$

Por tanto, las vvaa no son independientes.

Para calcular el apartado c), haremos las parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{1}{4}(t_1+t_2t_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}(1,1,1) = E(X_1) = \frac{1}{2}$$

Por la simetría de f, $E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{2}$. Vamos ahora con las varianzas, que de nuevo bastará con calcular la de X_1:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = E(X_1^{(2)}) = E(X_1^2 - X_1) = 0 = E(X_1^2) - E(X_1) \implies E(X_1^2) = \frac{1}{2}$$

$$Var(X_2) = Var(X_3) = Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El cálculo de la covarianza es rápido, como X_1, X_2, X_3 son independientes ***por parejas****, tenemos que:*

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_3) = 0$$

En el caso general, es decir, si no fueran independientes:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{1}{4} t_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1 \partial t_2}(1,1) = E(X_1 X_2) = \frac{1}{4}$$

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Anotación importante)

Es importante notar las diferencias entre $X + Y + Z$ y (X, Y, Z):

Sean X_1, X_2, X_3 independientes con funciones:

$$f_1(t) = \frac{1}{2}(1+t)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{3}(1+t+t^2)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}(1+t)$$

Entonces la vvaa $Z = X_1 + X_2 + X_3$ es unidimensional, y además $f_Z(t) = \frac{1}{2}(1+t)\frac{1}{3}(1+t+t^2)\frac{1}{2}(1+t)$ ***con un solo parámetro****.*

Si definimos ahora la vvaa $X = (X_1, X_2, X_3)$, es de tres dimensiones con función generatriz:

$$f_X(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{2}(1+t_1)\frac{1}{3}(1+t_2+t_2^2)\frac{1}{2}(1+t_3)$$

Ejercicio 3.

Sabemos que, para X, Y, Z tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Entonces $E(X) = E(Y) = E(Z)$ es:

$$\int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \int_0^1 x^2 = \left. \frac{s^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces:

$$E(U) = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Como las variables son independientes:

$$Var(U) = Var(aX) + Var(bY) + Var(cZ) = (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{12}$$

Nos piden también los momentos de orden 3 y 4 respecto de la media. Utilizamos el subapartado de ***Momentos de sumas****. Siguiendo un procedimiento como el de este subapartado llegamos a que solo necesitamos expresiones como $\mu_3(aX) = E\left(aX - \frac{a}{2}\right) = 0$ ya que estas vvaa son simétricas respecto de su media. En definitiva:*

$$E((U - E(U))^3) = \mu_3(aX) + \mu_3(bY) + \mu_3(cZ) = a\mu_3(X) + b\mu_3(Y) + c\mu_3(Z) = 0$$

$$\mu_4(U) = \mu_4(aX) + \mu_4(bY) + \mu_4(cZ) + 6(\mu_2(aX)\mu_2(bY) + \mu_2(aX)\mu_2(cZ) + \mu_2(bY)\mu_2(cZ))$$

Vamos a hacer el cálculo para un n general de:

$$\mu_n(X) = E\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx = \left. \frac{(x - 1/2)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1/2)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}(1 + (-1)^n)$$

Luego:

$$\mu_4(X) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$\mu_2(X) = \frac{1}{12} \qquad \textit{(como ya habíamos calculado antes)}$$

Volviendo ahora a $\mu_4(U)$:

$$\mu_4(U) = (a^4 + b^4 + c^4)\frac{1}{5 \cdot 2^4} + 6\Big(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\Big)\frac{1}{3^2 2^4}$$

Calculamos ahora la función generatriz de momentos (recordemos que la función generatriz no está definida porque X, Y, Z toman valores no enteros). Usaremos la independencia de las vvaa:

$$E(e^{tU}) = E(e^{atX})E(e^{btY})E(e^{ctZ})$$

Tendremos que calcular la función generatriz de momentos de cada vvaa (son todas iguales):

$$E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx}dx = \left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

En el caso de aX (análogamente para bY, cZ):

$$g_{aX}(t) = E(e^{taX}) = \frac{e^{at} - 1}{at}$$

Entonces volviendo a la vvaa U:

$$g_U(t) = \frac{e^{at} - 1}{at} \cdot \frac{e^{bt} - 1}{bt} \cdot \frac{e^{ct} - 1}{ct}$$

La función característica de U será entonces:

$$\varphi_U(t) = \frac{(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{i \cdot a \cdot b \cdot ct^3} = \frac{-i(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{a \cdot b \cdot c \cdot t^3}$$

Nos piden comprobar si es simétrica:

$$E(e^{itU}) = E(e^{it(aX+bY+cZ)}) = E(e^{iatX})E(e^{ibtX})E(e^{ictX}) = \frac{e^{iat} - 1}{iat} \cdot \frac{e^{ibt} - 1}{ibt} \cdot \frac{e^{ict} - 1}{ict} =$$

$$= e^{iat/2}e^{ibt/2}e^{ict/2}2^3$$

Ejercicio 4.

Para calcular A:

$$1 = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{(2r)!} = A\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(2r)!} = A\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = A\frac{1}{2}(e + e^{-1}) \implies A = \frac{2}{e + e^{-1}}$$

B se saca de forma análoga:

$$1 = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{B}{(2r+1)!} = B\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = B\frac{1}{2}(e - e^{-1}) \implies B = \frac{2}{e - e^{-1}}$$

Calculamos ahora las funciones generatrices:

$$f_X(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{(2r)!} t^{2r} = \frac{2}{e + e^{-1}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{t^{2r}}{(2r)!} = \frac{2}{e + e^{-1}} \cdot (e^t + e^{-t})$$

Igualmente:

$$f_Y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$$

Como X, Y son independientes:

$$f_Z(t) = f_X(t) \cdot f_Y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e + e^{-1}} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^2 - e^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{e^2 - e^{-2}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{k!}\right) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2(2t)^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{1}{e^2 e^{-2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 2^{r+1}}{(2r+1)!} t^{2r+1}$$

Luego tenemos que, para $r = 0, 1, 2, \ldots$:

$$P(Z = 2r+1) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \frac{2 \cdot 2^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

El último apartado lo haremos derivando la expresión sin desarrollar las exponenciales:

$$E(Z) = 2\frac{e^2 + e^{-2}}{e^2 - e^{e^{-2}}}$$

$$E(Z(Z-1)) = f_Z''(1) = 4$$

$$Var(Z) = 2\frac{e^4 - 8 - e^{-4}}{(e^2 - e^{-2})^2}$$

Ejercicio 5.

Apartado a)

$$\alpha(t) = \frac{1 + \cos(t) + \cos(2t)}{3}$$

Comprobemos que es función característica. Si conseguimos expresar α de la forma $\sum p_n e^{itx_n}$ ($\sum p_n = 1$), tendríamos que α es función característica de una vvaa discreta.

Usaremos que:

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(e^{ixt} + e^{-ixt}\right)$$

Entonces nos queda:

$$\alpha(t) = \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) =$$

$$= \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{-it} + \frac{1}{6}e^{2it} + \frac{1}{6}e^{-2it}$$

Entonces todas las constantes que multiplican a exponenciales son no negativas y suman 1. Entonces α es la función característica de la vvaa que toma valores $\{0, 1, -1, 2, -2\}$ con probabilidades:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \qquad P(X = 1) = P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{6}$$

Apartado b)

$$\alpha(t) = \frac{1}{1 + t^3}$$

Esta función no esta acotada en -1 por lo que no puede ser función característica.

Apartado c)

$$\alpha(t) = \frac{1}{1 + t^4}$$

Recordemos la relación entre la existencia de los momentos de orden n y la existencia de la derivada de orden n en el origen.

$$\alpha'(t) = -(1 + t^4)^{-2}4t^3 \qquad \alpha'(0) = 0$$

$$\alpha''(t) = \ldots \qquad \alpha''(0) = 0$$

Entonces si existe X, $E(X) = 0$ $E(X^2) = i^2\alpha''(0) = 0$, entonces la varianza sería nula y la función sería constante, pero la función característica de una distribución uniforme no es α

CAPÍTULO 3

Relación 3

Ejercicio 1.

$$f(x,y) = kyI_D \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x < 1, \; 0 < y < x\}$$

Apartado a)

Dejamos el cálculo de k para luego. Vamos con f_2:

$$f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_y^1 kydx = ky(1-y) \; y \in (0,1)$$

$$E(Y^n(1-y)^m) = \int_0^1 ky^m(1-y)^n y(1-y)dy = kB(m+2, n+2) = k\frac{\Gamma(m+2)\Gamma(n+2)}{\Gamma(m+n+4)} =$$

$$= k\frac{(m+1)!(n+1!)}{(m+n+3)!}$$

Haciendo $n = 0$ obtenemos $\alpha_r = E(Y^r)$

$$\alpha_r = k\frac{(r+1)!}{(r+3)!} = \frac{k}{(r+3)(r+2)}$$

Para obtener el valor de k podemos haciendo $m = n = 0$:

$$m = n = 0 \implies \int_0^1 kf_2(y)dy = k\frac{1}{3!} = \frac{k}{6} = 1 \implies k = 6$$

Como Y es acotada entre 0 y 1, $E(e^{aY}) = E(e^{-aY})$ son finitos, con lo que podemos expresar $g(t)$ como la siguiente serie que será convergente:

$$g(t) = 6\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+3)(r+2)r!} t^r$$

Apartado b)

$$x = m_{1|2}(y) = E(X|Y=y) = \int x f_{1|2(x|y)} dx$$

Dado $y \in (0,1)$

$$f_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{6y}{6y(1-y)} = \dfrac{1}{1-y} & x \in (y,1) \\ 0 & x \notin (y,1) \end{cases}$$

$$\int x f_{1|2(x|y)} dx = \int_y^1 \frac{x}{1-y} dx = \frac{1}{2}\frac{1-y^2}{1+y} = \frac{1}{2}(1+y)$$

Apartado c)

Ambas rectas se cortan en el punto $(E(X), E(Y))$, calculando la intersección obtenemos que las rectas se cortan en el punto $(E(X), E(Y) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$. Otra forma de calcularlo sería utilizar que ya sabemos $E(Y)$ entonces podemos ver qué valor toma la recta $x = \frac{1}{2}(1+y)$ para calcular $E(X)$.

Utilizando las dos anteriores rectas tenemos las pendientes $\beta_{X/Y}$, $\beta_{Y/X}$, con esto podemos calcular ρ despejando.

$$\beta_{Y/X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \qquad \beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}$$

Entonces, como $\rho = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$, tenemos que $\rho^2 = \beta_{Y/X}\beta_{X/Y}$:

$$\rho^2 = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \implies \rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2. ***Apartado a)***

$$X = (X_1, X_2, X_3) \qquad f(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^2 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_2 t_3)$$

Para calcular la función generatriz de $X_{13} = (X_1, X_3)$, que es $E(t_1^{X_1} t_3^{X_3})$ usamos $f(t_1, 1, t_3)$:

$$f_{13}(t_1, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1 t_3)$$

La distribución de X y la de X_{13} es fácil de expresar teniendo la función generatriz de probabilidad:

$$p(2,1,0) = p(1,0,1) = p(1,1,1) = \frac{1}{3} \qquad p(i,j,k) = 0 \textit{ resto}$$

$$p_{13}(2,0) = \frac{1}{3} \qquad p_{13}(1,1) = \frac{2}{3}$$

Para estudiar la independencia entre X_1 y X_3 tendremos que calcular las funciones generatrices de probabilidad de esas vvaa:

$$f_1(t_1) = f_{13}(t_1, 1) = \frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1)$$

$$f_3(t_3) = f_{13}(1, t_3) = \frac{1}{3}(1 + 2t_3)$$

Para demostrar la dependencia vemos que $f_1 f_3 \neq f_{13}$

Apartado b)

Por la independencia de los Z_i tenemos que la función generatriz de probabilidad de Z es:

$$g(t_1, t_3) = (\frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1t_3))^n = \frac{1}{3^n}(t_1^2 + 2t_1t_3)^n$$

Tratamos de expresar esto como una serie o una suma finita para ver cómo es la distribución de Z. Para ello, utilizaremos el Binomio de Newton.

$$g(t_1, t_3) = \frac{1}{3^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} t_1^{2r}(2t_1t_3)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{3^n}\binom{n}{r} t_1^{2r} 2^{n-r} t_1^{n-r} t_3^{n-r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{2^{n-r}}{3^n}\binom{n}{r} t_1^{n+r} t_3^{n-r}$$

Por tanto tenemos la distribución de Z:

$$P(X_1 = n + r, X_3 = n - r) = \frac{2^{n-r}}{3^n}\binom{n}{r} \textit{ con } r = 0, 1, 2, ..., n$$

Ejercicio 3. ***Apartado a)***

Lo haces tú en tu casita crack.

Apartado b)

Calcularemos los $P(Z = r)$, primero tomemos $r \geq 0$:

$$P(Z = r) = P(X - Y = r) = \sum_{s=r}^{+\infty} P(X = s, Y = s + r) = \sum_{s=r}^{+\infty} P(X = s)P(Y = sr) =$$

$$= pq^s pq^{s-r} = \sum_{s=0}^{+\infty} p^2 q^{2s-r} = p^2 \sum_{s=r}^{+\infty} q^{2s-r}$$

Esto es una geométrica de razón q^2:

$$P(Z = r) = \frac{p^2 q^r}{1-q^2} = \frac{p^2 q^r}{\underbrace{(1-q)}_{=p}(1+q)} = \frac{pq^r}{1+q}$$

Para calcular el caso $r < 0$ y como X e Y tienen la misma distribución:

$$P(Z = r) = P(X - Y = r) = P(Y - X = -r) = \frac{p^{q-r}}{1+q}$$

Y en general:

$$P(Z = r) = \frac{pq^{|r|}}{1+q}$$

Ejercicio 4. *Este ejercicio está incompleto*

Veamos la distribución que corresponde a $\psi_n(t)$. Después, intentaremos expresar ϕ_n en función de ψ_n

Nos fijamos primero en que la parte $\dfrac{1-e^{2it}}{1-e^{2it/n}}$ se puede ver como la suma de una progresión geométrica en la que el primer término es 1 y de razón $e^{2it/n}$:

$$\psi_n(t) = \frac{1-e^{2it}}{n(1-e^{2it/n})} \frac{1}{n}(1 + e^{2it/n} + e^{2\cdot 2it/n} + ... + e^{(n-1)2it/n}) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{it\dfrac{2r}{n}} = E(e^{itT_n})$$

Por tanto, la distribución de T_n es de la forma:

$$P(T_n = \frac{2r}{n}) = \frac{1}{n},\ r = 0, 1, ..., n-1$$

Para ϕ_n hacemos la siguiente transformación:

$$\phi_n(t) = \frac{\sin(t)}{n\sin(\dfrac{t}{n})} = \frac{1}{n}\frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it/n} - e^{-it/n}} = \frac{1}{n}\frac{e^{-it} - e^{it}}{e^{-it/n} - e^{it/n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{e^{-it}}{e^{-it/n}} \cdot \frac{1-e^{2it}}{1-e^{2it/n}} = e^{it(1/n-1)}\frac{1}{n}\frac{1-e^{2it}}{1-e^{2it/n}} = e^{it(\dfrac{1-n}{n})}\psi_n(t)$$

Como sabemos que dada una vvaa X y otra vvaa Y tal que $Y = aX + b$, se cumple que:

$$\phi_Y(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$$

En nuestro caso podemos llegar a que $S_n = T_n + \frac{1-n}{n}$*, por tanto, llegamos a la siguiente distribución para* S_n*:*

$$P(S_n = \frac{2r+1-n}{n}) = P(T_n = \frac{2r}{n}) = \frac{1}{n} \qquad r = 0, 1, 2, ..., n-1$$
$$P(S_n = \frac{k}{n}) = \frac{1}{n} \qquad k = 1-n, 3-n, ..., n-1$$

Donde cada k *es de la forma* $2 \cdot r + 1 - n$ *con* $r = 0, 1, ..., n-1$

Si n *es impar, la vvaa* S_n *toma el valor 0, y los valores de* k *son de la forma* $0, \pm 2, \pm 4, ..., \pm n-1$

Si n *es par,* k *toma los valores* $\pm 1, \pm 3, \pm 5, ..., \pm n-1$

Ejercicio 5.

Nos fijamos primero en que ϕ *debe de ser continua para* $t \in \mathbb{R}$*, incluido en los puntos en los que se anule el denominador (en estos puntos, definiremos* ϕ *por continuidad). Por tanto, cuando el denominador se anula, el numerador se ha de anular también para que exista el límite y sea finito.*

Los puntos en los que se anula el denominador son:

$$\sin(\frac{t}{a}) = 0 \iff \frac{t}{a} = k\pi \qquad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

En estos puntos se tiene que cumplir también que:

$$\sin(t) = \sin(ka\pi) = 0 \iff k \cdot a \in \mathbb{Z} \ (\textit{para cualquier } a) \iff a \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 6.

Utilizaremos que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$*. Entonces podemos escribir:*

$$\sin\left(\frac{2^n t}{2^n}\right) = \sin\left(2\frac{e^{n-1}t}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{2^{n-1}t}{2^n}\right)\cos\left(\frac{2^{n-1}t}{2^n}\right) = 2^2\sin\left(\frac{2^{n-2}t}{2^n}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^2}\right)$$

Iterando llegamos a:

$$\sin(t) = 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\prod_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^j}\right)$$

Por tanto, $\phi_n(t) = \dfrac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

Para saber la distribución de la vvaa seguimos un procedimiento como en el ejercicio 4:

$$P\left(X_n = \frac{k}{n'}\right) = \frac{1}{n'}$$

Donde $n' = 2^n$ es par, con lo que k toma los valores $\pm1, \pm3, \pm5, ..., \pm n-1$:

$$P\left(Z_n = \frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \qquad k = \pm1, \pm3, \pm5, ..., \pm 2^n - 1$$

Otra forma de aproximarnos al problema

Sabemos que para una función característica ϕ, si existe $t_0 \neq$ tal que $\phi(t_0) = e^{i\alpha}(\iff |\phi(t_0)| = 1)$, la va asociada a esa función característica, X, será discreta y tomará valores dentro del conjunto:

$$\{\frac{\alpha + 2k\pi}{t_0} \ : \ k = 0, \pm1, \pm2, ...\}$$

En nuestro caso, tomando $t_0 = 2^n\pi$ tenemos que :

$$\phi_n(2^n\pi) = \cos(2^{n-1}\pi)\cdots\cos(pi) = -1 = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

Por tanto, tenemos que la va X valores en el conjunto

$$\{\frac{\pi + 2k\pi}{2^n\pi} \ : \ k = 0, \pm1, \pm2, ...\} = \{\frac{1+2k}{2^n} \ : \ k = 0, \pm1, \pm2, ...\} = \{\pm\frac{1}{2^n}, \ \pm\frac{3}{2^n}, \ \pm\frac{t}{2^n}\}$$

Que no es tan restrictivo como al conjunto en el que llegamos de la otra manera, pero es una manera interesante de abordar el problema.

Ejercicio 7.

Intentaremos ver si la va buscada es suma de vvaa independientes. Buscaremos que cada elemento del producto sea función característica:

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\left(\frac{t}{3^r}\right)\right) = \prod_{r=1}^{n} \frac{1}{3}\left(1 + e^{i\frac{t}{3^r}} + e^{-i\frac{t}{3^r}}\right)$$

Luego $g_r(t)$ es la f. característica de una v.a. Z_r que toma los valores $0, \frac{1}{3^r}, -\frac{1}{3^r}$ con probabilidad $\frac{1}{3}$ en cada una de ellas.

Sabemos además que la función ψ_n:

$$\psi_n(t) = \frac{\sin(t)}{n\sin\left(\frac{t}{n}\right)}$$

es función característica de una v.a. que toma los valores (n impar)

$$0, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{4}{n}, ..., \pm\frac{n-1}{n}$$

Cada uno con probabilidad $\frac{1}{n}$.

Esta v.a. no nos coincide mucho con las g_r que tenemos. Sin embargo, si tomamos $n = 3$ tenemos la v.a. X_3 que toma los valores $\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$. Ahora, tomamos la v.a. $Z_1 = \frac{X_3}{3}$. Esta v.a. toma los valores $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ con probabilidad $\frac{1}{3}$ en cada una de ellos. Entonces la f. característica de Z_1 es g_1 y:

$$g_1(t) = \phi_{Z_1}(t) = E(e^{itZ_1}) = E(e^{it^{X_3/2}}) = E(e^{it/3X_3}) = \psi_3\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{3\sin\left(\frac{t}{6}\right)}$$

Análogamente llegamos a que:

$$g_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2\cdot 3^{r-1}}\right)}{3^r \sin\left(\frac{t}{2\cdot 3^r}\right)}$$

Entonces, $\phi_n(t)$ queda:

$$\phi_n(t) = \prod_{r=1}^{n} g_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{3\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2\cdot 3})}{3\sin\left(\frac{t}{2\cdot 3^2}\right)} \cdots \frac{\sin\left(\frac{t}{2\cdot 3^{n-1}}\right)}{3\sin\left(\frac{t}{2\cdot 3^n}\right)} = \frac{1}{3^n}\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2\cdot 3^n})}$$

Sea Y la v.a. con f. característica ψ_{3^n} que toma los valores $\{0, \pm\frac{2}{3^n}, \pm\frac{2\cdot 2}{3^n}, \pm\frac{2\cdot 3}{3^n}, ..., \pm\frac{3^n-1}{3^n}\}$ con probabilidad $\frac{1}{3^n}$.

Entonces ψ_n es la f.característica de $Y/2$. Por tanto, corresponde a una v.a. que toma los valores $\{0, \pm\frac{1}{3^n}, \pm\frac{2}{3^n}, \pm\frac{3}{3^n}, ..., \pm\frac{\frac{(3^{n-1})}{2}}{3^n}\}$.

CAPÍTULO 4

Relación 4

Ejercicio 4.

Calculamos en primer lugar $f_1(x)$ *para* $x > 0$*:*

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dy = \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}$$

Hacemos el cambio $\dfrac{y^2}{2} = t$*, con lo que tenemos* $y^2 = 2t$*, y* $dy = dt$*:*

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}e^{x^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{2}}t^{-1/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-x^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2}n}e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

En el caso de $x < 0$*:*

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dy = \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2/2}dy = \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}(-du) =$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2}}$$

Luego en ambos casos: $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \implies X \sim \mathcal{N}(0,1)$*. Análogamente:* $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$*.* *Podríamos pensar en poner* (X, Y) *como una normal de algún tipo. Pero esto nos resultará imposible pues las funciones de densidad de las vvaa normales no se anulan en ningún punto y* (X, Y) *se anula en* A^c

Ejercicio 5. *Notamos primero que:*

$$P(X=1)=0$$

$$P(X=2)=P(AA \text{ o } BB)=P(AA)+P(BB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \qquad P(X>2)=\frac{1}{2}$$

Para $X=3$ partimos de la situación AB o la BA. Independientemente de la situación inicial y de quien gane el partido, la competición no habrá terminado, $P(X=3)=0$. Para $X=4$:

$$AB\begin{cases} ABA\begin{cases} ABAA \to \textit{termina} \\ ABAB \to \textit{sigue} \end{cases} \\ ABB\begin{cases} ABBB \to \textit{termina} \\ ABBA \to \textit{sigue} \end{cases} \end{cases}$$

$$BA\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

Con lo que tenemos:

$$P(X=2\cdot 2)=P(\textit{empate de las 2 primeras})P(AA \text{ o } BB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Y en general:

$$P(X=2\cdot n)=P(\textit{empate en los } 2\cdot(n-1) \textit{ primeros partidos})P(AA \text{ o } BB)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}$$

Como la competición termina cuando haya una diferencia de dos puntos, los valores que toma (Y_1,Y_2) son de la forma $(n,n+2)$ y $(n+2,n)$ con $n=0,1,2,\dots$. Vemos además que:

$$P(Y_1=n,Y_2=n+2)=P(\textit{empate en los } 2n \textit{ primeros partidos})P(BB)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2^{n+2}}$$

$$P(Y_1=n,Y_2=n+2)=P(\textit{empate en los } 2n \textit{ primeros partidos})P(AA)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2^{n+2}}$$

$$P(Y_1=i,Y_2=j)=0 \quad \textit{en el resto de casos}$$

Para calcular la marginal de Y_1, vamos a orientarnos un poco viendo los valores más bajos para luego pasar al caso general:

$$P(Y_1=0)=P(BB)=\frac{1}{2^2}$$

$$P(Y_1=1)=P(ABBB)+P(BABB)=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2^3}$$

$$P(Y_1=n)=P(Y_1=n,Y_2=n+2)+P(Y_1=n,Y_2=n-2)=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^n}=\frac{5}{2^{n-2}} \ (n\geq 2)$$

En el cálculo de la distribución de Z podemos usar la de X:

$$P(Z=n)=P(X=2n-2)=P(X=2(n-1))=\frac{1}{2^{n-1}}$$

Calculamos ahora la función generatriz de probabilidad de X:

$$g_x(t) = E(t^X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{t^2}{2})^n = \frac{\frac{t^2}{2}}{1 - \frac{t^2}{2}} = \frac{t^2}{2 - t^2} = -1 + 2(2 - t^2)^{-1}$$

Pero esto solo ocurre cuando converja la serie, es decir cuando $\left| \frac{t^2}{2} \right| < 1 \iff |t| < \sqrt{2}$. *Como* $1 < \sqrt{2}$, *podemos usar la derivada de g para calcular los momentos factoriales de orden n, y con ellos,* $E(X)$, $E(X^2)$ *y* $Var(X)$*:*

$$g'(t) = 4(t_2 - t^2)^{-2}$$
$$g''(t) = 4(2 - t^2)^{-2} + 16t^2(2 - t^2)^{-3}$$

Entonces, como 1 está en el interior del dominio de g:

$$E(X) = g'(1) = 4$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X) = g''(1) = 20 \implies E(X^2) = 20 + 4$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 24 - 4^2 = 8$$