Demostraciones de Geometría Global de Superficies

Paco Mora y Chito Belmonte
Apuntes PaChito™

15 de febrero de 2022

Pequeño inciso: Estos apuntes apoyan algunas de sus demostraciones en el libro *Un curso de Geometría Diferencial*, con lo cual puede que algunas demostraciones no coincidan con lo visto en clase.

Índice general

Capítulo 1

Proposición 1.4, la derivada covariante es intrínseca.

Demostración

Desde luego, $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α, la derivada covariante puede verse como un operador, D/dt, de la forma

$$\begin{array}{rccccl} \dfrac{D}{dt}: & \mathfrak{X} & \to & \mathfrak{X} & & \\ & V & \sim & \dfrac{DV}{dt}: & I \to & \mathbb{R}^3 \\ & & & & t \sim & V'(t) < V'(t), N(t) > N(t) \end{array}$$

Este operador es independiente de la orientación elegida para la superficie, pues estamos tomando sólo la parte tangente de V' (obsérvese que si cambiamos N por $-N$ en la fórmula, el resultado es el mismo).

Por otro lado, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental, afirmación que vamos a probar a continuación.

Para ello, sea (U, X) una parametrización de la superficie S y, como viene siendo habitual, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Si $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, por lo que puede expresarse de la forma

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Ahora, calculamos $V'(t)$, utilizando las fórmulas de Gauss para expresar X_{uu}, X_{uv} y X_{vv} en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$:

$$\begin{aligned} V' =& a'X_u + a\left(X_{uu}u' + X_{uv}v'\right) + b'X_v + b\left(X_{vu}u' + X_{vv}v'\right) \\ =& a'X_u + a\left[\left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN\right)u' + \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)v'\right] \\ &+ b'X_v + b\left[\left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN\right)u' + \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN\right)v'\right] \\ =& \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1\right)X_u \\ &+ \left(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)X_v + \left(aeu' + afv' + bfu' + bgv'\right)N. \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada covariante $DV/dt = (V')^{\top}$ se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \left(a' + au'\Gamma_{11}^{1} + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^{1} + bv'\Gamma_{22}^{1}\right) X_u \\ &\quad + \left(b' + au'\Gamma_{11}^{2} + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^{2} + bv'\Gamma_{22}^{2}\right) X_v\end{aligned}$$

Obsérvese que DV/dt depende sólo de los símbolos de Christoffel y, por tanto, de la primera forma fundamental exclusivamente. En otras palabras, la derivada covariante es algo intrínseco; sus propiedades permanecen invariantes por isometrías.

□

Proposición 1.5, linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante.

Demostración

Las tres propiedades se demuestran trivialmente [1] :

I

$\frac{D}{dt}(V+W) = \left[(V+W)'\right]^{\top} = (V'+W')^{\top} = (V')^{\top} + (W')^{\top} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

II

$\frac{D}{dt}(fV) = \left[(fV)'\right]^{\top} = (f'V + fV')^{\top} = (f'V)^{\top} + (fV')^{\top} = f'V + f\frac{DV}{dt}$, pues $V^{\top} = V$, ya que $V \in \mathcal{X}(\alpha)$.

III

La propiedad se prueba de forma similar: como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces $\left\langle (V')^{\perp}, W \right\rangle = \left\langle V, (W')^{\perp} \right\rangle = 0$, de donde

$$\begin{aligned}\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle &= \left\langle (V')^{\top} + (V')^{\perp}, W \right\rangle + \left\langle V, (W')^{\top} + (W')^{\perp} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle\end{aligned}$$

□

Proposición 1.7

Demostración

La parte I es trivial [2]

II

Al ser $DV/dt = \mathbf{0}$, sabemos que $V'(t)$ está en la dirección del normal a la superficie, y análogamente $W'(t)$. En consecuencia, como $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene que $\langle V, W'\rangle = \langle V', W\rangle = 0$ y, por tanto, $\langle V, W\rangle' = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0$.

Esto demuestra que $\langle V, W\rangle$ es constante.

□

Proposición 1.8, la ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

[1] Tu puta madre por si acaso.
[2] Cada vez que lea 'es trivial' voy a meter un 'tu puta madre por si acaso'.

□

Proposición 1.9, la ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos

Demostración

PANIC

□

Teorema 1.10, existencia y unicidad de campos paralelos[3]

Demostración

Hay que encontrar $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $DV/dt = \mathbf{0}$.

Sea (U, X) una parametrización de S con $\alpha(t_0) \in X(U)$, y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Utilizando la expresión de la demostración de la proposición 1.4 para la derivada covariante de un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, como $DV/dt = \mathbf{0}$, los coeficientes de los vectores X_u y X_v tienen que anularse; luego si representamos V como $V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t))$, se verificará que

$$\left\{ \begin{array}{l} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0 \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\,\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0 \end{array} \right.$$

En otras palabras, se prueba que siempre es posible 'fijar un rumbo' en la superficie. Una vez fijado, ya se puede hablar de si se mantiene o no constante la dirección de cualquier otro campo.

Tenemos por tanto un sistema de ecuaciones diferenciales cuya condición inicial es

$$V(t_0) = V_0 = (a(t_0), b(t_0))$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones para tales sistemas establece el resultado buscado (además, se puede obtener la solución de forma explícita al resolverlo, siempre y cuando esto sea posible).

$\square$

[3] Hay una demostración extrínseca y otra intrínseca en el libro. He decidido copiar la intrínseca porque leyéndola en diagonal he determinado que sería más sencilla, si queréis buscar la otra (fruto de vuestra curiosidad o esquizofrenia paranoide), está en el libro.

Capítulo 2

Proposición 2.0.1. ***Proposición exclusiva de Apuntes PaChito ™***

Sea $\alpha : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización. Son equivalentes:

1. *α es pregeodésica*
2. *$\exists \beta(u) = \alpha(h(u))$ una reparametrización de α / β es geodésica.*
3. *La reparametrización parametrizada por el arco de α es geodésica.*

Demostración

$$1 \implies 2$$

Directo por la definición

$$3 \implies 1$$

Por la definición directo

$$2 \implies 3$$

¿Te imaginas que es directo por la definición? Pues no. Mala suerte.

Tomamos una reparametrización de I:

$$I \to^{\alpha} S$$

$$J \to^{h(u)} I$$

$$J \to^{\beta(u)=\alpha(h(u)) \text{ que es geodésica}} S$$

Esto es un triangulito si lo dibujáis... Estaría bien que yo también lo hiciera pero soy un *vago*.

$$||\beta'(u)|| = c = h'(u) \cdot ||\alpha'(h(u))||$$

Si $c = 1 \to \beta(u)$ es la reparametrizavión por arco de α

Si $c \neq 1 \to$ Tomo $\underbrace{\gamma(s) = \beta(\frac{u}{c})}_{GEODESICA} = \alpha(h(\frac{u}{c}))$

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c} \cdot \beta'\left(\frac{s}{c}\right)$$

$\square$

Capítulo 3

Lema 3.2, Lema de homogeneidad de las geodésicas

Lo más importante del lema son las fórmulas que aparecen centradas en su enunciado.

Demostración

Sea $p \in S$ y sea un vector tangente $v \in T_pS$. Entonces, $\exists \gamma_v \ : \ I_v \to S$. Como $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda v \in T_pS$.

Defino ahora $\alpha(t) = \gamma_v(\lambda t)$.

$$I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} \ : \ \lambda t \in I_v\}$$

$$t \in I_\alpha \iff \lambda t \in I_v \iff t \in \frac{1}{\lambda} \cdot I_v$$

Luego otenemos que $\dfrac{1}{\lambda} I_v = I_\alpha$. De esto deducimos que $\alpha(0) = p = \gamma_v(0)$.

$$\alpha'(t) = \lambda \gamma_v'(\lambda t) \implies \alpha'(0) = \lambda \gamma_v'(0() = \lambda v$$

Y se obtiene que α es una geodésica, por ser reparametrización afín de una geométrica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = \gamma_v(\alpha t) \\ I_\alpha = \dfrac{1}{\lambda} I_v \end{array} \right. \in \mathcal{J}_{p,\lambda v} = \{(I_{\alpha,\alpha}), ...\} \implies \frac{1}{\lambda} I_v \subseteq I_{\alpha v}$$

$$\forall t \in \frac{1}{\lambda} I_v, \ \gamma_{\lambda v}(t) = \lambda_v(\lambda t)$$

Llamo ahora $w = \lambda v$.

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \implies \mu w = v$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot I_w \subseteq I_{\mu w} \ y \ \forall t \in \underbrace{\frac{1}{\mu} I_w}_{\lambda I_{\lambda v}}$$

$$\gamma_{\mu w}(t) = \gamma_w(\mu t) \qquad \frac{1}{\mu} \cdot I_w = \lambda I_\lambda v \subseteq I_v$$

$$I_{\lambda v} \subseteq \frac{1}{\lambda} I_v$$

Al final he tenido que copiar tal cual lo que pone en la pizarra y no tengo ni idea de si he demostrado algo o no.

□

Teorema 3.3, Propiedades de la aplicación exponencial

Primero tenemos que demostrar esta propiedad

$$p \in S,\ v \in T_pS \implies iv \in \mathcal{D}_p,\ \forall t \in I_v \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Demostración

$$\begin{cases} t = 0 \to OK \\ t \neq 0, \qquad tv \in \mathcal{D}_p \iff 1 \in I_{tv} = \frac{1}{t} \cdot I_v\ si\ 1 = \frac{1}{t} t \end{cases}$$

$$exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),\ \forall t \in I_v$$

□

Fin de la demostración inciso, comenzamos a demostrar el teorema.

Demostración

I

Que sea estrellado nos dice que el segmento que une cualquier punto con el origen no se sale del conjunto. En otras palabras,

$$\forall \underbrace{v \in \mathcal{D}_p}_{1 \in I_v \implies [0,1] \subset I\ \forall t \in [0,1]},\ [0, v] = \{tv,\ 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{D}_p$$

Del inciso se deduce que $t \in I_v \implies tv \in \mathcal{D}_p$. Notamos lo siguiente:

$$\forall v \in T_pS,\ \exists (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_v$$

Y justo debajo ha escrito

$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall |t| < \varepsilon,\ tv \in \mathcal{D}_p$$

II

Este dice el sensei Alías que nos lo creamos y yo **me lo creo.**

III

$$\exists \underbrace{U}_{\text{entorno de } 0}{}^{1} \in \mathcal{D}_p\ :\ exp_{p|\mathcal{U}}\ :\ \underbrace{\mathcal{U}}_{\subset T_pS} \to \underbrace{V}_{\subset S} \text{ es difeomorfismo}$$

Para comprobar si es un difeomorfismo, tenemos que ver que la diferencial es un isomorfismo lineal. Vamos a ver si esto es así:

$$\forall v \in \mathcal{D}_p \to d(exp_p)_v\ :\ \underbrace{T_v(\mathcal{D}_p)}_{T_v(T_pS)} \to T_{exp_p(v)}S$$

$$\forall w \in T_pS \qquad \alpha(t) = v + tw$$

[1] Para el sensei Alías, decir entorno implica que es abierto

$$\alpha \ : \ I \to \mathcal{D}_p \subset T_pS$$

$$\alpha(0) = v \qquad \alpha'(0) = w \qquad \to \qquad w \in T_v(T_pS)$$

Vamos al caso particular $v = 0$.

$$d(exp_p)_0 \ : \ T_0(TpS) = T_pS \to T_{exp_p(v)}S = T_pS$$

$$\forall w \in T_pS = T_0(T_pS)$$

$$d(exp_p)_v(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(\alpha(t))$$

Tenemos que encontrar una curva que cumpla

$$\forall \alpha(t) \ : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = 0 \\ \alpha'(0) = w \end{array}\right\} \alpha(t) = tw$$

$$exp_p(\alpha(t)) = exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1) = \gamma_w(t)$$

$$d(exp_p)_0(w) = \gamma_w'(0) = w \implies d(exp_p)_0 = Id$$

$\square$