

# Apuntes de Grafos

Paco Mora  
Manuel Franco

25 de octubre de 2021

## Tema 3. Árboles

**Definición 1.0.1.** Diremos que un grafo  $G = (V, E)$  es un árbol si es conexo y no tiene ciclos. Un árbol generador de un grafo  $G = (V, E)$  es un subgrafo parcial conexo y sin ciclos. Un bosque es un grafo  $G = (V, E)$  sin ciclos.

**Definición 1.0.2.** En un árbol, los nodos con grado de incidencia 1 se denominan hojas.

**Teorema 1.** Teorema de caracterización de árboles Sea  $G = (V, E)$ . Son equivalentes:

- $G$  es conexo y sin ciclos
- Entre cada par de vértices distintos de  $V$ , existe una única cadena.
- $G$  es conexo y  $m = n - 1$
- $G$  no contiene ciclos y  $m = n - 1$
- $G$  está minimalmente conectado
- $G$  no contiene ciclos y su añadimos una arista entre dos vértices no adyacentes cualesquiera de  $V$ , el grafo que se obtiene contiene un único ciclo.

**Demostración**

$1 \implies 2$

$G$  es conexo sin nodos  $\implies \forall u \neq v \exists!$  cadena  $u v$ . Existe una cadena por ser conexo, la yuxtaposición de dos cadenas diferentes  $u v$ ,  $G$  contendría al menos un ciclo.

$2 \implies 3$

Suponemos que existe una única cadena entre cada par de vértices  $u, v$ . Como existe una cadena entre cada par de vértices,  $G$  es conexo. Veamos que  $m = n - 1$ . Recordemos una proposición que decía:

”Si  $G$  es conexo  $m \geq n - 1$ ”

Veamos la igualdad ahora por inducción sobre el número de nodos, el caso  $n = 1, 2$  es directo. Si  $n > 2$ , eliminamos una arista cualquiera del grafo:  $e = (u, v)$ . Dado que esa cadena  $(u, (u, v), v)$  era la única que conectaba  $u, v$ , ahora estos vértices están en componentes conexas distintas, con  $n_1, n_2$  nodos y  $m_1, m_2$  aristas respectivamente, que siguen cumpliendo la hipótesis de inducción, luego  $m_1 = n_1 - 1$

y  $m_2 = n_2 - 1$ . En  $G$ ,  $n = n_1 + n_2 = m_1 + 1 + m_2 + 1 = (m_1 + m_2 + 1) + 1 = m + 1$   
 $3 \implies 4$

$G$  conexo y  $m = n - 1 \implies G$  no contiene ciclos y  $m = n - 1$

Supongamos que  $G$  contiene un ciclo y retiráramos una arista cualquiera  $e$  no desconectaría el grafo y tendría un grafo conexo con  $n$  nodos y  $(n - 1) - 1$  aristas, por la proposición que hemos recordado antes,  $G$  no sería conexo, lo que contradice (3)

$4 \implies 5$

$G$  no tiene ciclos y  $m = n - 1 \implies G$  está minimalmente conectado. Por la proposición que hemos recordado antes, basta demostrar que  $G$  es conexo.

Supongamos que  $G$  contiene  $s$  componentes conexas :  $(V_1, E_1), \dots, (V_s, E_s)$  con  $n_i$  nodos y  $m_i$  aristas, tengo ahora que  $G$  es acíclico, por lo que cada cc es acíclica y conexa por lo que cumple 1, y por tanto 3, y por tanto cada  $m_i = n_i - 1$

$$(3) \implies m_i = n_i - 1 \forall i \quad n = \sum_{i=1}^s n_i = \sum_{i=1}^s (m_i + 1) = \sum_{i=1}^s m_i + s = m + s$$

Como partiamos de que  $n = m + 1$  y tenemos  $n = m + s$ , entonces  $s = 1$  y hay solo una cc.

$5 \implies 6$

□

### Teorema 2. Algoritmo de Kruskal

#### Paso 1

Ordenar las aristas de  $E$  en orden ascendente de su peso:

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad T^* = (V, \emptyset)$$

$$E := \{e_1, \dots, e_m\} : \downarrow \leq \uparrow(e_i + 1) \forall i < m$$

#### Paso 2

Añadir  $n - 1$  aristas a  $T^*$  sucesivamente (en el orden de sus pesos) sin que se formen ciclos.

### Teorema 3. Algoritmo de Prim

#### Paso 1

Elegir un vértice  $r \in V$  y hacer  $V_1 = \{r\}$ ,  $V_2 = V \setminus \{r\}$ .

#### Paso 2

Añadir al árbol la arista de menor peso de  $w(V_1)$ , digamos  $(v_1, v_2)$  con  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$ . Añadir  $v_2$  a  $V_1$  y borrar  $v_2$  de  $V_2$ .

#### Paso 3

Si  $|V_1| = n$  parar. Si no, volver al Paso 2.

## 1.1 - Problemas de optimización sobre grafos

**Ejercicio 1.** *El problema del árbol generador del peso mínimo*

$x_e = 1$  si la arista  $e$  pertenece al árbol  $\forall e \in E$

$$\begin{aligned} & \min \sum_{e \in E} l_e x_e \\ & \text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_e \in \{0, 1\} \forall e \in E \\ \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \\ \sum_{e \in E(V^3)} x_e \leq 2 & \forall V^3 \subset V \quad |V^3| = 3 \\ \sum_{e \in E(V^4)} x_e \leq 3 & \forall V^4 \subset V \quad |V^4| = 4 \\ \vdots \\ \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 & \forall S \subset V \quad 3 \leq |S| \leq n - 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Haremos ahora la llamada formulación MTZ, que utiliza "una especie de árbol dirigido" comenzamos definiendo las variables:

$u_i$  = algo parecido al nivel del nodo  $i$  en la arborescencia

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es el predecesor inmediato de } j \text{ en el árbol con raíz en } 1 \\ 0 & \text{oc} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_i \sum_{j=(i,j) \in E} l_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j : (i, j) \in E \\ & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \neq 1 \\ & x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \\ & u_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \\ & u_1 = 0 \\ & u_j \geq u_i + 1 - M(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j : (i, j) \in E \quad (x_{ij} = 1 \implies u_j \geq u_i + 1) \end{array} \right.$$

Podemos cambiar la  $M$  por  $n - 1$  ya que  $u_j \leq n - 1 \forall j$ , creando una mejor formulación del problema.

**Ejercicio 2.** *El problema del camino más corto entre dos vértices  $s$  y  $j$*

Usaremos longitudes no negativas, y sea  $x_{ij} = 1$  si el camino atraviesa el nodo  $i$  y a continuación

el  $j$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V: (i,j) \in E} l_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j : (i, j) \in E \\ & \sum_{j: (j,s) \in E} x_{sj} = 1 \\ & x_{js} = 0 \quad \forall j : (j, s) \in E \\ & \sum_{j: (j,t) \in E} x_{jt} = 1 \\ & x_{tj} = 0 \quad \forall j : (j, t) \in E \\ & \sum_{i: (i,j) \in E} x_{ij} = \sum_{i: (i,j) \in E} x_{ji} \quad \forall j \neq s, t \quad \text{Para todo nodo por el que entres, sales} \end{array} \right.$$

Podemos ver que la tercera y la cuarta restricción no son necesarias ya que se obtienen de las otras.

Veamos ahora otra formulación, si tenemos la estructura de árbol con raíz en  $s$  que contiene los caminos más cortos, supongamos que tenemos que enviar canicas desde la raíz de forma que llegue una a cada nodo. Las variables serán las canicas que pasan por cada arista.

$x_{ij} = n^o$  de items (canicas) que circulan desde  $i$  hasta  $j \equiv$   
 $\equiv n^o$  de caminos más cortos desde  $s = 1$  que contienen el subcamino  $i, (i, j), j$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & \sum_i \sum_{j: (i,j) \in E} l_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} & \sum_{j: (1,j) \in E} x_{1j} = n - 1 \\ & \sum_{j: (i,j)} x_{ij} = \sum_{j: (j,i) \in E} x_{ji} - 1 \quad \forall i \neq 1 \\ & x_{ij}, x_{ji} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in E, i < j \end{array} \right.$$

# Caminos más cortos. Recorridos por artistas y vértices

## Demostración

Si hubiera un camino más corto  $P_1$  entre  $v_i$  y  $v_j$  que el subcamino  $P_2$  entre  $v_i, v_j$ , reemplazando  $P_2$  por  $P_1$  obtenemos o bien 1. o 2.:

1. Un camino más corto que el camino más corto con lo que tenemos una contradicción.
2. Un paseo que contiene ciclos, la eliminación de estos ciclos nos deja un camino más corto que el camino más corto, de nuevo una contradicción.

□

## Demostración

←

Supongamos  $d_j > d_i + l_{ij}$ , entonces, podemos crear un camino más corto a  $j$  yuxtaponiendo el camino a  $i$  y la arista que une  $i$  con  $j$  si no se forman ciclos, si se formaran, basta con quitarlo y aún así tendríamos un camino más corto a  $j$ . En ambos casos tenemos una contradicción.

⇒

Sea  $j \in V$  cualquiera, sea  $P$  un camino cualquiera de  $s$  a  $j$ , ¿se cumple que  $l(p) \geq d_j$ ? Si  $P = (s = i_0, i_1, \dots, i_q = j)$  tenemos que:

$$d_{i_1} - d_{i_0} \leq l_{i_0 i_1} \quad d_{i_2} - d_{i_1} \leq l_{i_1 i_2} \quad \dots$$

$$\text{Sumando todo obtenemos que } d_j - \underbrace{d_s}_0 = d_{i_q} - d_{i_0} \leq \sum_k l_{i_k i_{k+1}} = l(P)$$

□

## Demostración

Sea  $P$  camino entre  $s$  y  $j$ , ¿  $l(p) \geq d_j$  ? De este camino  $(v_s, v_a, v_b, \dots, v_j)$  sabemos que:

- $v_s \notin V'$
- $v_j \in V'$

Si  $P_2$  es el subcamino desde  $s$  hasta el primer nodo de  $V'$  con último coste  $(v_{i_1}, v_{i_2}) \in w(V')$ , entonces:

$$l(P) \geq l(P_2) = \underbrace{l(P_1)}_{\text{longitud del subcamino que une } s \text{ y } v_{i_j}} + l_{i_1 i_2} \geq d_{i_1} + l_{i_1} l_{i_2} \geq_{(c)} d_{i_2} \geq d_j$$

□