

# Ejercicios MNED

Paco Mora Caselles

18 de octubre de 2021

# Tema 1

**Ejercicio 1.**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma(A) = \{0,5 + i, 0,5 - i\}$$

$x, y$  son combinaciones lineales de  $e^{(0,5 \pm i)t}$  es decir de  $\{e^{0,5t}e^i, e^{0,5t}e^{-i}\}$

**Ejercicio 5.**

$$\begin{cases} x'''(t) = \cos(x(t)) + \sin(x'(t)) - e^{x''(t)} + t^2 \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = 7 \\ x''(0) = 13 \end{cases}$$

Consideramos

$$\begin{cases} x(t) \\ u(t) = x'(t) \\ v(t) = x''(t) \end{cases}$$

Entonces la ecuación queda:

$$v'(t) = (x'''(t)) = (\cos(x(t))) + \sin(u(t)) - e^{v(t)} + t^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En versión matricial:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(x) + \sin(u) - e^v + t^2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 9.**

$$e^{at}(y' + ay) = e^{at}y' + ae^{at}y = \frac{d}{dt}(e^{at}y(t))$$

$$e^{\int_0^t a(s)ds} \left( y'(t) - a(t)y(t) \right) = e^{\int_0^t a(s)ds} y'(t) + a(t)e^{\int_0^t a(s)ds} y(t) \frac{d}{dt}(e^{\int_0^t a(s)ds} y(t))$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = e^{at}y(t)|_{t=0}^{(t=t)}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y(t)) = de^{at-bt}$$

# Tema 2

**Ejercicio 8.** a)

$$y_n = \frac{1-h}{1+(n-1)h} \quad n=0, \dots, N = \frac{1}{h}$$

b)

Utilizando que es una ecuación de variables separables, llegamos a:

$$y(t) = \frac{1}{1+t}$$

Dado  $t_* = nh$  fijo, calculamos el límite estacionario:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^h = \lim_{hn=t_*} \frac{1-h}{1+nh-h} = \lim \frac{1-h}{1+t_*-h} = \frac{1}{1+t_*} = y(t_*)$$

Es decir la solución exacta que hemos calculado.

c)

El resultado es:

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_*h}{1+t_*^2+2t_*-h-h t_*} = O(h)_{h \rightarrow 0}$$

con  $hn = t_*$ .

Que el error sea una  $O(h)$  significa que  $|y(t_*) - y_n^h| \leq_{h \rightarrow 0} kh$  Con  $k$  independiente de  $h$ .

Comprobaremos que el error sea una  $O(h)$ :

$$|y(t_*) - y_n^h| = h \frac{t_*}{|1+t_*^2+2t_*-h-h t_*|}$$

Teniendo:

$$\frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*-h-h t_*} \sim_{h \rightarrow 0} \frac{t_*}{1+t_*^2+2t_*} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Luego el error lo podemos acotar por  $hk$  con  $k=1$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Comprobaremos la optimalidad de esta cota.

$$y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_*h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \leq kh^2$$

$$\frac{1}{h^2} y(t_*) - y_n^h = \frac{-t_*h}{1 + t_*^2 + 2t_* - h - ht_*} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$$

Luego el error es mayor o igual que  $h$  y menor que  $h^2$ .

### Ejercicio 6.

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta  $y(t) = \frac{t^2}{2}$  El método de Euler explícito queda:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, g_n) = y_n + ht_n \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 & y_1 &= y_0 + ht_0 = 0 + 0h = 0 \\ y_2 &= 0 + hh = h^2 & y_3 &= h^2 + 2h^2 = 3h^2 \\ y_4 &= (1 + 2 + 3)h^2 = 6h^2 & y_5 &= (1 + 2 + 3 + 4)h^2 = 10h^2 \end{aligned}$$

En general:

$$y_n = (1 + 2 + \dots + n - 1)h^2 = \frac{(n-1)n}{2}h^2 = \frac{n^2 - n}{2}h^2 = \frac{1}{2}n^2h^2 - \frac{1}{2}nhh = \frac{1}{2}t_*^2 - \frac{1}{2}t_*h \rightarrow \frac{1}{2}t_*^2$$

Con lo que tenemos un error del orden de  $O(h)$

### Variación del ejercicio

$$\begin{cases} y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta  $y(t) = t$  El método de Euler explícito queda:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h \end{cases}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 & y_1 &= h & y_2 &= 2h \dots \\ y_n &= nh = t_* = y(t_*) \end{aligned}$$

Con lo que hemos obtenido la solución exacta,  $\forall t_* = nh$   $y(t_*) - y_n^h = 0$ . ¿Por qué no hay error en el método de Euler en este caso? Porque la segunda derivada de la solución exacta,  $y'' \equiv 0$  y porque hemos tomado un  $t_0$  que forma parte de la solución.

Si en vez de tomar 0 tomamos  $t_0 = \varepsilon$ :

$$y_0 = \varepsilon \quad y_1 = \varepsilon + h \quad y_2 = \varepsilon + 2h$$

$$y_n = \varepsilon + nh$$

En este caso al no tomar un  $y_0$  exacto el error se desvía por  $\varepsilon$

$$(1 + hL)^n \sim e^{Lt}$$

con  $t = nh$  O equivalentemente, que  $\lim_{t=nh} (1 + hL)^n = e^{Lt}$

$$(1 + hL)^n = e^{n \log(1+hL)} = e^{hn \frac{\log(1+hL)}{h}} \rightarrow e^{Lt}$$

c)

$$(1 + O(h^{p+1}))^n = \exp(n \log(1 + O(h^{p+1}))) = \exp(hn \frac{\log(1 + O(h^{p+1}))}{n}) = e^{t \frac{\log(1 + O(h^{p+1}))}{n}} = \dots$$

Hacemos el desarrollo de Taylor en el exponente y nos queda  $= \exp(t(O(h^p) + \dots))$

**Ejercicio 10.** Calculamos primero la solución exacta aunque no nos lo pida el ejercicio.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) + \beta \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y' = -\alpha y = \beta$$

$$e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t} y = e^{-\alpha t} \beta$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} y) = e^{-\alpha t} \beta$$

$$e^{-\alpha t} y - y_0 = \int_0^t e^{-\alpha s} \beta ds$$

$$y(t) = e^{-\alpha t} y_0 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{\alpha t})$$

Hacemos ahora Euler explícito:

$$\begin{cases} u_{n+1} = y_n + hf(t_n, u_n) & n = 0, \dots, \frac{N}{T} - 1 \\ u_0 = A & \text{podemos asumir } A = y_0 \end{cases}$$

Recordemos que cada  $u_n$  es una aproximación a  $y(t_n)$ . También podemos usar  $y_n$  como aproximación a  $y(t_n)$

Es importante saber que  $y_n \neq y(t_n)$ .

En nuestro caso,  $f(t, y) = \alpha y + \beta$ , luego  $u_{n+1} = u_n + h(\alpha y_n + \beta)$

Tenemos entonces dos opciones:

- $u_1 = u_0 + h(\alpha u_0 + \beta)$   
 $u_2 = u_1 + h(\alpha u_1 + \beta) = u_1 + h(\alpha(u_0 + h(\alpha u_0 + \beta)) + \beta) =$   
 $= u_1 + u_0(h\alpha(h\alpha)^2 + \beta(h^2\alpha^2 + h\alpha)) = u_1 + h\alpha(1 + h\alpha)u_0 + h\alpha(h + 1)\beta$
- $u_{n+1} = (1 + h\alpha)u_n + \beta h$ , lo que nos queda:  $u_1 = (1 + h\alpha)u_0 + \beta h$   
 $u_2 = (1 + h\alpha)u_1 + \beta h(1 + h\alpha)u_0 + \beta h(1 + (1 + h\alpha))$   
 $u_3 = (1 + h\alpha)u_2 + \beta h = (1 + h\alpha)((1 + h\alpha)^2 u_0 + \beta h(1 + (1 + h\alpha))) + \beta h = (1 + h\alpha)^3 + \beta h(1 + (1 + h\alpha)^2)$

$$\begin{aligned} u_n &= (1 + h\alpha)^n u_0 + \beta h(1 + (1 + h\alpha) + \dots + (1 + h\alpha)^{n-1}) \\ &= (1 + h\alpha)^n u_0 + \frac{\beta}{\alpha} [(1 + h\alpha)^n - 1] \end{aligned}$$

Podemos observar que la convergencia del segundo método es mejor.

Vamos a comprobar que  $u_n \rightarrow_{h \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, hn=t} y(t)$  cuando  $t = hn$  fijo.

Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right) = e^a$ . Entonces,  $(1 + h\alpha)^n \left(1 + \frac{hn}{n}\alpha\right) \rightarrow e^{t\alpha}$ , el valor que toma la solución exacta en el punto  $t_0$ .

Calculemos ahora el error, sabemos que:

$$\int \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad \text{Desarrollo de Taylor de } \log 1 + x \text{ alrededor de } x = 0$$

$$\text{El desarrollo de } \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2) \text{ con } |x| \rightarrow 0$$

Tomando entonces una  $x$  adecuada:

$$(1 + h\alpha)^n = e^{n \log(1+h\alpha)} = e^{nh\alpha \frac{\log(1+h\alpha)}{h\alpha}} = e^{t\alpha(1 - \frac{h\alpha}{2} + O(h^2))} = e^{t\alpha} e^{-\frac{h\alpha^2 t}{2} + O(h^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } (1 + h\alpha)^n &= -e^{t\alpha} = e^{t\alpha} e^{\dots} - e^{t\alpha} = e^{t\alpha}(e^{\dots} - 1) = e^{t\alpha}(\dots + \frac{[\dots]^2}{2!} + \dots) = \\ &e^{\alpha t}(-\frac{h\alpha^2 t}{2}) + O(h^2) \end{aligned}$$

Hemos llegado a:

$$(1 + h\alpha)^n - e^{t\alpha} = -\frac{h\alpha^2 t}{2} e^{\alpha t} + O(h^2)$$

Y el error es:

$$u_n - y_n = ((1 + h\alpha)^n - e^{\alpha t})u_0 + \frac{\beta}{\alpha}((1 + h\alpha)^n - e^{\alpha t}) = -\frac{h\alpha^2 t}{2}(u_0 + \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t} + O(h^2) \quad h \rightarrow 0$$

**Ejercicio 13.**  $n \geq N - 1$

$$0 < \theta < 1, \quad h = \frac{T}{N}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_n + \theta f(t_n, y_n)) \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Los pasos ahora son:

1. Obtenemos  $f(t_n, y_n)$
2. Avanzamos desde  $(t_n, y_n)$  con pendiente  $f(t_n, y_n)$  hasta el punto  $t_{n+\theta} = t_n + \theta h$  y obtenemos la abscisa  $y_{n+\theta} = y_n + \theta h f(t_n, y_n)$

3. Sobre el punto  $(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$  obtenemos una nueva pendiente  $f(t_{n+\theta}, y_{n+\theta})$
4. Aquí disponemos ya de dos pendientes, lo ideal es tomar  $k = b_1 k_1 + b_2 k_2$  con  $b_1 + b_2 = 1$  promedio y entonces avanzar desde  $t_n$  a  $t_{n+1}$  con esta pendiente:

$$y_{n+1} = y_n + hk \quad \text{con } k = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

5. en el caso de este ejercicio es  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$