tales que $\exp_p : U_0 \longrightarrow V_0$ y $\exp_{\overline{p}} : \overline{U}_0 \longrightarrow \overline{V}_0$ son difeomorfismos. Tomemos además los abiertos $U := \widetilde{\varphi}^{-1}\big(\overline{U}_0 \cap \widetilde{\varphi}(U_0)\big) \subset U_0$ y $\overline{U} := \overline{U}_0 \cap \widetilde{\varphi}(U_0) \subset \overline{U}_0$ (obsérvese que $\overline{U} = \widetilde{\varphi}(U)$, véase la figura 5.10). Finalmente, representamos por V y $\overline{V}$ los entornos (de p y $\overline{p}$, respectivamente) $V := \exp_p(U) \subset V_0$ y $\overline{V} := \exp_{\overline{p}}(\overline{U}) \subset \overline{V}_0$, y definimos la aplicación φ como la composición

$$\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_p}^{-1} : V \longrightarrow \overline{V}.$$

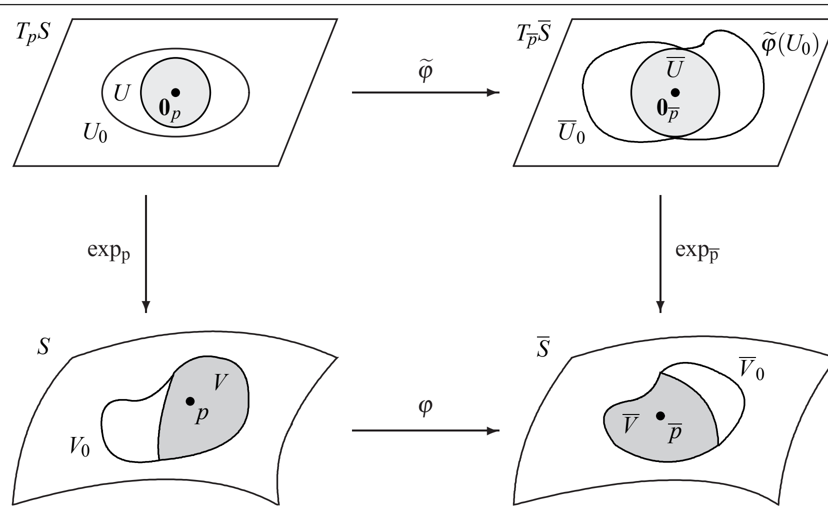

Figura 5.10: Construyendo la isometría φ entre V y $\overline{V}$.

Vamos a demostrar que φ es una isometría (global) entre V y $\overline{V}$. Desde luego, φ es un difeomorfismo, pues es composición de difeomorfismos. Para ver que es una isometría, utilizaremos el teorema 3.7.4: construiremos dos parametrizaciones X y $\overline{X} = \varphi \circ X$, de S y $\overline{S}$, respectivamente, con los mismos coeficientes de la primera forma fundamental.

Para ello, sean $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_pS$ y $\overline{\phi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{S}$ las aplicaciones dadas por

$$\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2 \quad \text{y} \quad \overline{\phi}(r,\theta) = r\cos\theta\,\overline{\mathbf{e}}_1 + r\operatorname{sen}\theta\,\overline{\mathbf{e}}_2,$$

y consideremos $U' := \phi^{-1}(U) = \overline{\phi}^{-1}(\overline{U})$. Ésta es una buena definición pues, si el par $(r,\theta) \in \phi^{-1}(U)$, o lo que es lo mismo, si $\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2 \in U$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(r,\theta) &= r\cos\theta\,\overline{\mathbf{e}}_1 + r\operatorname{sen}\theta\,\overline{\mathbf{e}}_2 = r\cos\theta\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_1) + r\operatorname{sen}\theta\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_2)\\ &= \widetilde{\varphi}(r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2) \in \widetilde{\varphi}(U) = \overline{U},\end{aligned}$$

de donde se deduce que $(r,\theta) \in \overline{\phi}^{-1}(\overline{U})$; el recíproco es análogo. Construimos finalmente las parametrizaciones buscadas para nuestras superficies S y $\overline{S}$ (véase la figura 5.11):

$$X = \exp_p \circ \phi \quad \text{y} \quad \overline{X} = \exp_{\overline{p}} \circ \overline{\phi},$$

respectivamente (en definitiva, no estamos haciendo otra cosa que considerar los sistemas de coordenadas geodésicas polares para cada una de las superficies).

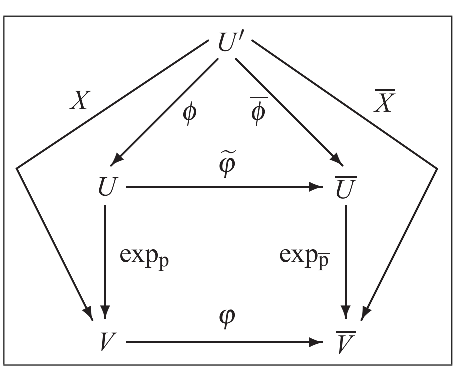

Figura 5.11: Construyendo las parametrizaciones X y $\overline{X} = \varphi \circ X$.

Es muy sencillo comprobar que el nuevo diagrama (véase la figura 5.11) es conmutativo, es decir, que $\overline{X} = \varphi \circ X$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\overline{X}(r,\theta) &= (\exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \overline{\phi})(r,\theta) = \exp_{\overline{\mathrm{p}}}(r\cos\theta\overline{\mathbf{e}}_1 + r\operatorname{sen}\theta\overline{\mathbf{e}}_2)\\
&= (\exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi})(r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_2) = (\varphi \circ \exp_{\mathrm{p}})(r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_2)\\
&= (\varphi \circ \exp_{\mathrm{p}} \circ \phi)(r,\theta) = (\varphi \circ X)(r,\theta).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi = \overline{X} \circ X^{-1}$. El teorema 3.7.4 nos asegura entonces que si los coeficientes de la primera forma fundamental de X y $\overline{X}$ coinciden, la aplicación φ es una isometría. Ahora bien, en el ejemplo 5.11 hemos calculado los coeficientes E, F y G correspondientes a los sistemas de coordenadas geodésicas polares, cuando la curvatura de Gauss es constante, relaciones (5.19), (5.20) y (5.21). Así, se tiene que $E = 1 = \overline{E}$ y $F = 0 = \overline{F}$. Además, como por hipótesis $K = \overline{K}$,

$$G = \left\{\begin{array}{ll}
r^2 & \text{si } K = \overline{K} = 0\\
\dfrac{1}{K}\operatorname{sen}^2\big(\sqrt{K}\,r\big) = \dfrac{1}{\overline{K}}\operatorname{sen}^2\big(\sqrt{\overline{K}}\,r\big) & \text{si } K = \overline{K} > 0\\
\dfrac{-1}{K}\operatorname{senh}^2\big(\sqrt{-K}\,r\big) = \dfrac{-1}{\overline{K}}\operatorname{senh}^2\big(\sqrt{-\overline{K}}\,r\big) & \text{si } K = \overline{K} < 0
\end{array}\right\} = \overline{G}.$$

Luego $\varphi = \exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}$ es una isometría. □

Observación 5.6. Obsérvese que, para la aplicación $\varphi = \exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}$ definida en la demostración del teorema de Minding, se tiene además que $d\varphi_p \equiv \widetilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
d\varphi_p(\mathbf{v}) &= d\big(\exp_{\overline{\mathrm{p}}} \circ \widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}\big)_p(\mathbf{v}) = d(\exp_{\overline{\mathrm{p}}})_{(\widetilde{\varphi}\circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1})(p)}\Big(d\big(\widetilde{\varphi} \circ {\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}\big)_p(\mathbf{v})\Big)\\
&= d(\exp_{\overline{\mathrm{p}}})_{\mathbf{0}_p}\Big(d\widetilde{\varphi}_{{\exp_{\mathrm{p}}}^{-1}(p)}\big(d({\exp_{\mathrm{p}}}^{-1})_p(\mathbf{v})\big)\Big) = \big(d\widetilde{\varphi}_{\mathbf{0}_p} \circ d({\exp_{\mathrm{p}}}^{-1})_p\big)(\mathbf{v})\\
&= \Big(\widetilde{\varphi} \circ \big(d(\exp_{\mathrm{p}})_{\mathbf{0}_p}\big)^{-1}\Big)(\mathbf{v}) = \widetilde{\varphi}(\mathbf{v}),
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in T_pS$. En particular, $d\varphi_p(\mathbf{e}_i) = \overline{\mathbf{e}}_i$, para $i = 1,2$. ◇