Ejercicios de Ampliación de Probabilidad

Paco Mora Caselles

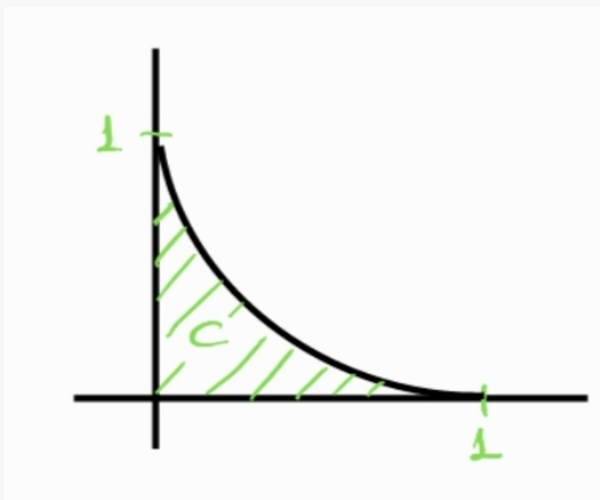
1 de marzo de 2022

CAPÍTULO 1

Relación 1

Ejercicio 1.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \ y < (1-x)^2\}$$



Dejamos por ahora f en función de k, más tarde calculamos su valor:

$$f(x, y) = \begin{cases} k & (x, y) \in C \\ 0 & (x, y) \notin C \end{cases}$$

Para $x \in (0, 1)$:

$$f_1(x) = \int f(x, y) dy = \int_0^{(1-x)^2} k dy = k(1-x)^2$$

Entonces tenemos:

$$f_1(x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Pasamos ahora a $f_2(y)$, cuando $y \in (0,1)$:

$$f_2(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^{1-y^{1/2}} = k(1-y)^{1/2}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} k(1-\sqrt{y}) & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

Calculamos ahora $E(X^n(1-X)^m)$ usamos $f_1(x)$:

$$E(X^n(1-X)^m) = \int x^n(1-x)^m f_1(x)dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m k(1-x)^2 dx = k\int_0^1 x^n(1-x)^{m+2} =$$

$$= kB(n+1, m+3) = k\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = k\frac{n!(m+2)!}{(n+m+3)!}$$

Los momentos de orden n respecto del origen, la esperanza y la varianza de X las podemos calcular con esta expresión. Para los primeros casos tomamos $m = 0$ y para la varianza podemos usar que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$k = 3 \qquad E(X) = \frac{1}{4} \qquad E(X^2) = \frac{1}{10} \qquad Var(X) = \frac{3}{80}$$

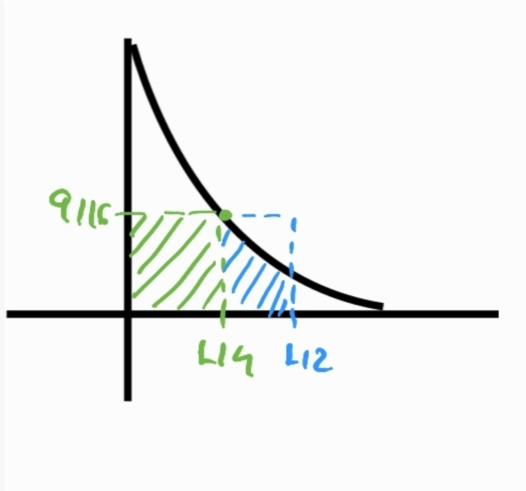
Calculamos $f_{2|1}(y|x)$, si $x \in (0,1)$:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{3}{3(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & y \in (0,(1-x)^2) \\ 0 & y \notin (0,(1-x)^2) \end{cases}$$

Podemos calcular ahora $f_{2|1}(y|x = 1/2)$:

$$f_{2|1}(y|1/2) = \begin{cases} 4 & y \in (0, \frac{1}{4}) \\ \\ 0 & y \notin (0, \frac{1}{4}) \end{cases}$$

Para calcular $F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ nos apoyamos en la figura para saber que basta con calcular el área del rectángulo y multiplicar por k:



$$F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)=3\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=\frac{3^3}{2^6}$$

Para $F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right)=F\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)+3\cdot Area\ T$, *siendo* T *la intersección con* C. *Sabemos entonces que:*

$$\int_{1/4}^{1/2}(1-x)^2dx=\int_{1/4}^{1/2}(x^2-2x+1)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x\Big|_{1/4}^{1/2}=\frac{19}{2^6 3}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{9}{16}\right)=\frac{3^3}{2^6}+3\frac{19}{2^6 3}=\frac{23}{32}$$

Tenemos que calcular ahora la recta de regresión de Y *respecto de* X*:*

$$y-\mu_y=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)$$

$$\mu_y=E(Y)=\int_0^1 y3(1-y^{1/2})dy=3\int_0^1(y-y^{3/2})=\frac{3}{10}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{(1-x)^2}3xydydx=3\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(1-x)^2}d=\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^4dx=$$

$$=B(2,5)=\frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)}=\frac{3}{2}\frac{1!4!}{6!}=\frac{1}{20}$$

Recordemos que $\mu_X=E(X)=\frac{1}{4}$, *entonces:*

$$\sigma_{XY}Cov(X,Y)=\frac{1}{2^2\cdot 5}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{2-3}{2^3\cdot 5}=-\frac{1}{2^3\cdot 5}$$

Podemos expresar ya la recta de regresión (recordando que $\sigma_X = \frac{3}{80}$*):*

$$y - \frac{3}{10} = \frac{-1/(5 \cdot 2^3)}{3/(2^4 \cdot 5)}(x - \frac{1}{4})$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

Calculamos ahora $E(Y|X = x) = m_{2|1}(x)$*:*

$$E(Y|X = x) = \int y f_{2|1}(y|x)dy = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\frac{(1-x)^4}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Ejercicio 2.

$$E(X) = 2,\ Var(X) = 3\ X\ \textit{simétrica}$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-2+2)^3) = E((X-2)^3 + 3(X-2)^2 2 + 3(X-2)2^2 + 2^3) =$$
$$= E((X-2)^3) + 6E((X-2)^2) + 12E(X-2) + E(2^3) = 0 + 6Var(X) + 0 + 2^3 = 6 \cdot 3 + 8 = 26$$

Ejercicio 3.

El número de de posibilidades totales es claramente $\binom{N}{n}$*, la distribución de probabilidad es entonces:*

$$P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, X_3 = r_3) = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Claramente necesitamos $n \leq N,\ r_1 + r_2 + r_3 = n$

Calculamos ahora $\alpha_{(3)}$*:*

$$E(X_1^{(3)}) = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}$$

Nos fijamos que:

$$r_1(r_1-1)(r_1-2)\binom{N_1}{r_1} = r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{N_1^{(r_1)}}{r_1(r_1-1)(r_1-2)\cdots 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{N_1^{(r_1)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{(N_1-3)^{(r_1-3)}}{(r_1-3)!} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\binom{N_1-3}{r_1-3}$$

Entonces volviendo a la igualdad anterior:

$$P(X_1 = r_1) = \sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$N_1(N_1-1)(N_1-2)\sum_{r_1+r_2+r_3=n}\frac{\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = N_1(N_1-1)(N_1-2)\frac{\binom{N-3}{n-3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= N_1(N_1-1)(N_2-2)\frac{(N-3)^{(n-3)}n!}{(n-3)!N^{(n)}} = \frac{N_1^{(3)}n^{(3)}}{N^{(3)}}$$

Ejercicio 4.

Aparado a)

Observemos primero que no hay dos pares de la forma (a,b), (a,c) *de forma que ambos tengan probabilidad no nula. Igual forma, no hay pares* (b,a), (c,a) *tales que se tomen ambos valores con probabilidad no nula. Por tanto, para ver la distribución marginal de* X *podemos omitir los valores que toma* Y*:*

$$P(X=0) = P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{3}$$

De forma análoga para la v.a. Y*:*

$$P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{3}$$

Las esperanzas entonces de estas vvaa son:

$$E(X) = (0+1+2)\cdot\frac{1}{3} = 1$$

$$E(Y) = (1+2+3)\cdot\frac{1}{3} = 2$$

Hacemos también los cálculos necesarios para hacer la recta de regresión:

$$E(XY) = (0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3)\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{8}{3} * 2 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = (0+1+4)\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

La recta de regresión de Y *sobre* X *es entonces:*

$$y - 2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}(x-1) \implies y - 2 = x - 1 \implies y = x + 1$$

Calculamos ahora el coeficiente de correlación para poder ver $Var(Y - X^*)$:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}} = 1$$

Este valor de ρ nos indica que X y Y son dependientes linealmente. Calculamos ahora $Var(Y - X^*)$

$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = 0$$

Aparado b)

Para calcular las vvaa marginales solo tenemos que sumar los elementos de la misma fila o columna. Por ejemplo:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Obtenemos así:

$$P(X = 0) = \frac{11}{18} \quad P(X = 1) = \frac{5}{18} \quad P(X = 2) = \frac{2}{18}$$

$$P(Y = 0) = \frac{11}{18} \quad P(Y = 1) = \frac{5}{18} \quad P(Y = 2) = \frac{2}{18}$$

También podemos obtener $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, $Var(X), Var(Y) = \frac{17}{36}$ y $Cov(X,Y) = -\frac{5}{36}$.

Entonces la recta de regresión de X sobre Y es:

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-\frac{5}{36}}{\frac{17}{36}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}$$

Como las esperanzas y las varianzas son iguales, obtenemos que el cálculo de la recta de regresión de Y sobre X es igual:

$$x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}$$

Calcularemos ahora $Var(Y - X^*)$:

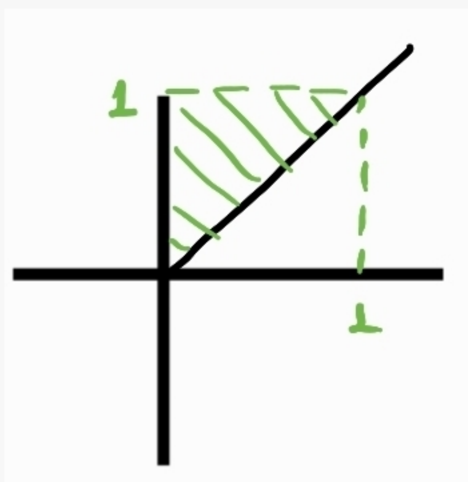
$$Var(Y - X^*) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = \frac{17}{36}\left(1 - \frac{25/36^2}{17^2/36}\right) = \frac{17}{36}\left(\frac{17^2 - 25}{17^2}\right) = \frac{11}{3 \cdot 17}$$

Para la varianza residual de X sobre Y, vemos que es igual porque coinciden sus esperanzas y sus varianzas.

CAPÍTULO 2

Relación 2

Ejercicio 1.
Vemos en primer lugar cómo es el recinto del ejercicio:



$$\alpha_{n.m} = E(X^n Y^m) = \int x^n y^m \cdot \frac{1}{y} = \int_0^1 \int_0^y = x^n x^{m-1} dx dy =$$

$$= \int_0^1 y^{m-1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_0^y dy = \frac{1}{n+1} \int_0^1 y^{m-1} y^{n+1} dy = \frac{1}{n+1} \frac{1}{m+n+1}$$

Con este resultado podemos obtener los valores:

$$E(Y) = \frac{1}{2} \qquad E(Y^3) = \frac{1}{3} \qquad E(XY) = \frac{1}{6} \qquad E(X) = \frac{1}{4}$$

Entonces tenemos que $Var(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ *y* $Cov(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

Para calcular la recta de regresión obtenemos primero:

$$\beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} = \frac{1/24}{1/12} = \frac{1}{2}$$

Y la recta de regresión que nos piden queda:

$$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

Calcularemos ahora la curva de regresión de X *sobre* Y*:*

$$x = m_{1|2}(y) \qquad m_{1|2}(y) = E(X|Y=y) = \int x f_{1|2}(x|y)dx$$

Entonces, para los valores de y *para los que* $f_2(y) > 0$ *tendremos:*

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Calcularemos ahora $f_2(y)$*:*

$$\text{Si } y \in (0,1)\text{: } f_2(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y}dx = \frac{1}{y}x\Big|_0^1 = 1$$

$$f_2(y) = I_{(0,1)}(y)$$

Volvemos ahora al cálculo de $f_{1|2}(x|y)$*. Dado* $y \in (0,1)$*:*

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1/y}{1} = \frac{1}{y} \qquad x \in (0,y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = 0 \qquad x \notin (0,y)$$

Podemos calcular ahora $m_{1|2}(y)$*:*

$$E(X|Y=y) = \int_0^y x\frac{1}{y}dx = \frac{1}{y}\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y}{2}$$

Entonces la curva de regresión es $x = \frac{y}{2}$*. Notemos que es una recta, en este caso* ***necesariamente coincidirá con la recta de regresión****. Entonces, si hubiéramos calculado primero la curva de regresión, no tendríamos que calcular la recta porque sabemos que coincidiría.*

Ejercicio 2.

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3) = E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} t_3^{X_3}) = \sum p_{i_1i_2i_3} t_1^{i_1} t_2^{i_2} t_3^{i_3}$$

De este último término, en cada sumando, $p_{i_1i_2i_3}$ *representa* $P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3)$

Viendo el valor de f*, sabemos que la vvaa* (X_1, X_2, X_3) *toma los valores* $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ *con probabilidad de* $\frac{1}{4}$ *en cada una de ellas.*

Vamos a comprobar si X_1, X_2 *son independientes. Para ello, vemos si* $f_{12}(t_1, t_2) = f_1(t_1) \cdot f_2(t_2)$*. Estas funciones no las conocemos, pero como sabemos que* f *se puede representar como* $E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} t_3^{X_3})$*, si hacemos* $t_3 = 1$*:*

$$f_{12}(t_1, t_2) = E(t_1^{X_1}, t_2^{X_2}) = E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} 1^{X_3}) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + 1 + t_1t_2)$$

De igual forma podemos hacer:

$$f_1(t_1) = E(t_1^{X_1}) = E(t_1^{X_1} 1^{X_2} 1^{X_3}) = \frac{1}{4}(t_1 + 1 + 1 + t_1) = \frac{1 + t_1}{2}$$

$$f_2(t_2) = \frac{1 + t_2}{2}$$

Para comprobar la independencia solo tenemos que ver si $f_{12} = f_1f_2$*:*

$$f_1f_2 = \frac{1}{2}(1 + t_1) \cdot \frac{1}{2}(1 + t_2) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + 1 + t_1t_2) = f_{12}$$

Luego X_1, X_2 *son independientes y de forma análoga:* X_2, X_3 *son independientes y* X_2, X_3 *son independientes. Es decir, son independientes dos a dos.*

Para comprobar que son independientes, tendremos que ver si $f(t_1, t_2, t_3) = f_1(t_1) \cdot f_2(t_2) \cdot f_3(t_3)$*:*

$$f_1f_2f_3 = \frac{1}{2^3}(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_3) = \frac{1}{2^3}(1 + t_1 + t_2 + t_1t_2)(1 + t_3) =$$

$$= \frac{1}{2^3}(1 + t_1 + t_2 + t_1t_2 + t_3 + t_1t_3 + t_2t_3 + t_1t_2t_3) \neq f(t_1, t_2, t_3)$$

Por tanto, las vvaa no son independientes.

Para calcular el apartado c), haremos las parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{1}{4}(t_1 + t_2t_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}(1,1,1) = E(X_1) = \frac{1}{2}$$

Por la simetría de f, $E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{2}$. Vamos ahora con las varianzas, que de nuevo bastará con calcular la de X_1:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = E(X_1^{(2)}) = E(X_1^2 - X_1) = 0 = E(X_1^2) - E(X_1) \implies E(X_1^2) = \frac{1}{2}$$

$$Var(X_2) = Var(X_3) = Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

*El cálculo de la covarianza es rápido, como X_1, X_2, X_3 son independientes **por parejas**, tenemos que:*

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_3) = 0$$

En el caso general, es decir, si no fueran independientes:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{1}{4} t_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1 \partial t_2}(1,1) = E(X_1 X_2) = \frac{1}{4}$$

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Anotación importante)

Es importante notar las diferencias entre $X + Y + Z$ y (X, Y, Z):

Sean X_1, X_2, X_3 independientes con funciones:

$$f_1(t) = \frac{1}{2}(1 + t)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{3}(1 + t + t^2)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}(1 + t)$$

*Entonces la vvaa $Z = X_1 + X_2 + X_3$ es unidimensional, y además $f_Z(t) = \frac{1}{2}(1+t)\frac{1}{3}(1+t+t^2)\frac{1}{2}(1+t)$ **con un solo parámetro**.*

Si definimos ahora la vvaa $X = (X_1, X_2, X_3)$, es de tres dimensiones con función generatriz:

$$f_X(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{2}(1 + t_1)\frac{1}{3}(1 + t_2 + t_2^2)\frac{1}{2}(1 + t_3)$$

Ejercicio 3.

Sabemos que, para X, Y, Z tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Entonces $E(X) = E(Y) = E(Z)$ es:

$$\int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \int_0^1 x^2 = \left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Entonces:

$$E(U) = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} + c\frac{1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Como las variables son independientes:

$$Var(U) = Var(aX) + Var(bY) + Var(cZ) = (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{12}$$

Nos piden también los momentos de orden 3 y 4 respecto de la media. Utilizamos el subapartado de ***Momentos de sumas****. Siguiendo un procedimiento como el de este subapartado llegamos a que solo necesitamos expresiones como $\mu_3(aX) = E\left(aX - \frac{a}{2}\right) = 0$ ya que estas vvaa son simétricas respecto de su media. En definitiva:*

$$E((U - E(U))^3) = \mu_3(aX) + \mu_3(bY) + \mu_3(cZ) = a\mu_3(X) + b\mu_3(Y) + c\mu_3(Z) = 0$$

$$\mu_4(U) = \mu_4(aX) + \mu_4(bY) + \mu_4(cZ) + 6(\mu_2(aX)\mu_2(bY) + \mu_2(aX)\mu_2(cZ) + \mu_2(bY)\mu_2(cZ))$$

Vamos a hacer el cálculo para un n general de:

$$\mu_n(X) = E\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx = \left.\frac{(x-1/2)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1/2)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}(1 + (-1)^n)$$

Luego:

$$\mu_4(X) = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

$$\mu_2(X) = \frac{1}{12} \qquad \textit{(como ya habíamos calculado antes)}$$

Volviendo ahora a $\mu_4(U)$:

$$\mu_4(U) = (a^4 + b^4 + c^4)\frac{1}{5 \cdot 2^4} + 6\Big(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\Big)\frac{1}{3^2 2^4}$$

Calculamos ahora la función generatriz de momentos (recordemos que la función generatriz no está definida porque X, Y, Z toman valores no enteros). Usaremos la independencia de las vvaa:

$$E(e^{tU}) = E(e^{atX})E(e^{btY})E(e^{ctZ})$$

Tendremos que calcular la función generatriz de momentos de cada vvaa (son todas iguales):

$$E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx} dx = \left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

En el caso de aX (análogamente para bY, cZ):

$$g_{aX}(t) = E(e^{taX}) = \frac{e^{at} - 1}{at}$$

Entonces volviendo a la vvaa U:

$$g_U(t) = \frac{e^{at} - 1}{at} \cdot \frac{e^{bt} - 1}{bt} \cdot \frac{e^{ct} - 1}{ct}$$

La función característica de U será entonces:

$$\varphi_U(t) = \frac{(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{i \cdot a \cdot b \cdot ct^3} = \frac{-i(e^{iat} - 1)(e^{ibt} - 1)(e^{ict} - 1)}{a \cdot b \cdot c \cdot t^3}$$

Nos piden comprobar si es simétrica:

$$E(e^{itU}) = E(e^{it(aX+bY+cZ)}) = E(e^{iatX})E(e^{ibtX})E(e^{ictX}) = \frac{e^{iat} - 1}{iat} \cdot \frac{e^{ibt} - 1}{ibt} \cdot \frac{e^{ict} - 1}{ict} =$$

$$= e^{iat/2}e^{ibt/2}e^{ict/2}2^3$$

Ejercicio 4.

Para calcular A:

$$1 = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{(2r)!} = A\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(2r)!} = A\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = A\frac{1}{2}(e + e^{-1}) \implies A = \frac{2}{e + e^{-1}}$$

B se saca de forma análoga:

$$1 = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{B}{(2r+1)!} = B\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = B\frac{1}{2}(e - e^{-1}) \implies B = \frac{2}{e - e^{-1}}$$

Calculamos ahora las funciones generatrices:

$$f_X(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A}{(2r)!} t^{2r} = \frac{2}{e + e^{-1}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{t^{2r}}{(2r)!} = \frac{2}{e + e^{-1}} \cdot (e^t + e^{-t})$$

Igualmente:

$$f_Y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$$

Como X, Y son independientes:

$$f_Z(t) = f_X(t) \cdot f_Y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e + e^{-1}} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^2 - e^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{k!}\right) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2(2t)^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{1}{e^2 e^{-2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 2^{r+1}}{(2r+1)!} t^{2r+1}$$

Luego tenemos que, para $r = 0, 1, 2, ...$:

$$P(Z = 2r+1) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} \frac{2 \cdot 2^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

El último apartado lo haremos derivando la expresión sin desarrollar las exponenciales:

$$E(Z) = 2\frac{e^2 + e^{-2}}{e^2 - e^{e^{-2}}}$$

$$E(Z(Z-1)) = f_Z''(1) = 4$$

$$Var(Z) = 2\frac{e^4 - 8 - e^{-4}}{(e^2 - e^{-2})^2}$$

Ejercicio 5.

Apartado a)

$$\alpha(t) = \frac{1 + \cos(t) + \cos(2t)}{3}$$

Comprobemos que es función característica. Si conseguimos expresar α de la forma $\sum p_n e^{itx_n}$ ($\sum p_n = 1$), tendríamos que α es función característica de una vvaa discreta.

Usaremos que:

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(e^{ixt} + e^{-ixt}\right)$$

Entonces nos queda:

$$\alpha(t) = \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{3}\frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) =$$

$$= \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{-it} + \frac{1}{6}e^{2it} + \frac{1}{6}e^{-2it}$$

Entonces todas las constantes que multiplican a exponenciales son no negativas y suman 1. Entonces α es la función característica de la vvaa que toma valores $\{0, 1, -1, 2, -2\}$ con probabilidades:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \qquad P(X = 1) = P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{6}$$

Apartado b)

$$\alpha(t) = \frac{1}{1 + t^3}$$

Esta función no esta acotada en -1 por lo que no puede ser función característica.

Apartado c)

$$\alpha(t) = \frac{1}{1 + t^4}$$

Recordemos la relación entre la existencia de los momentos de orden n y la existencia de la derivada de orden n en el origen.

$$\alpha'(t) = -(1 + t^4)^{-2}4t^3 \qquad \alpha'(0) = 0$$

$$\alpha''(t) = ... \qquad \alpha''(0) = 0$$

Entonces si existe X, $E(X) = 0$ $E(X^2) = i^2\alpha''(0) = 0$, entonces la varianza sería nula y la función sería constante, pero la función característica de una distribución uniforme no es α

CAPÍTULO 3

Relación 3

Ejercicio 1.

$$f(x,y) = kyI_D \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < x\}$$

Apartado a)

Dejamos el cálculo de k para luego. Vamos con f_2:

$$f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_y^1 kydx = ky(1-y) \ y \in (0,1)$$

$$E(Y^n(1-y)^m) = \int_0^1 ky^m(1-y)^n y(1-y)dy = kB(m+2,n+2) = k\frac{\Gamma(m+2)\Gamma(n+2)}{\Gamma(m+n+4)} =$$

$$= k\frac{(m+1)!(n+1!)}{(m+n+3)!}$$

Haciendo $n = 0$ obtenemos $\alpha_r = E(Y^r)$

$$\alpha_r = k\frac{(r+1)!}{(r+3)!} = \frac{k}{(r+3)(r+2)}$$

Para obtener el valor de k podemos haciendo $m = n = 0$:

$$m = n = 0 \implies \int_0^1 kf_2(y)dy = k\frac{1}{3!} = \frac{k}{6} = 1 \implies k = 6$$

Como Y es acotada entre 0 y 1, $E(e^{aY}) = E(e^{-aY})$ son finitos, con lo que podemos expresar $g(t)$ como la siguiente serie que será convergente:

$$g(t) = 6\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+3)(r+2)r!} t^r$$

Apartado b)

$$x = m_{1|2}(y) = E(X|Y=y) = \int x f_{1|2(x|y)} dx$$

Dado $y \in (0,1)$

$$f_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{6y}{6y(1-y)} = \dfrac{1}{1-y} & x \in (y,1) \\ 0 & x \notin (y,1) \end{cases}$$

$$\int x f_{1|2(x|y)} dx = \int_y^1 \frac{x}{1-y} dx = \frac{1}{2}\frac{1-y^2}{1+y} = \frac{1}{2}(1+y)$$

Apartado c)

Ambas rectas se cortan en el punto $(E(X), E(Y))$, calculando la intersección obtenemos que las rectas se cortan en el punto $(E(X), E(Y) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$. Otra forma de calcularlo sería utilizar que ya sabemos $E(Y)$ entonces podemos ver qué valor toma la recta $x = \frac{1}{2}(1+y)$ para calcular $E(X)$.

Utilizando las dos anteriores rectas tenemos las pendientes $\beta_{X/Y}$, $\beta_{Y/X}$, con esto podemos calcular ρ despejando.

$$\beta_{Y/X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \qquad \beta_{X/Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}$$

Entonces, como $\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$, tenemos que $\rho^2 = \beta_{Y/X}\beta_{X/Y}$:

$$\rho^2 = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \implies \rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2. ***Apartado a)***

$$X = (X_1, X_2, X_3) \qquad f(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^2 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_2 t_3)$$

Para calcular la función generatriz de $X_{13} = (X_1, X_3)$, que es $E(t_1^{X_1} t_3^{X_3})$ usamos $f(t_1, 1, t_3)$:

$$f_{13}(t_1, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1 t_3)$$

La distribución de X y la de X_{13} es fácil de expresar teniendo la función generatriz de probabilidad:

$$p(2,1,0) = p(1,0,1) = p(1,1,1) = \frac{1}{3} \qquad p(i,j,k) = 0 \ resto$$

$$p_{13}(2,0) = \frac{1}{3} \qquad p_{13}(1,1) = \frac{2}{3}$$

Para estudiar la independencia entre X_1 y X_3 tendremos que calcular las funciones generatrices de probabilidad de esas vvaa:

$$f_1(t_1) = f_{13}(t_1, 1) = \frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1)$$

$$f_3(t_3) = f_{13}(1, t_3) = \frac{1}{3}(1 + 2t_3)$$

Para demostrar la dependencia vemos que $f_1 f_3 \neq f_{13}$

Apartado b)

Por la independencia de los Z_i tenemos que la función generatriz de probabilidad de Z es:

$$g(t_1, t_3) = (\frac{1}{3}(t_1^2 + 2t_1t_3))^n = \frac{1}{3^n}(t_1^2 + 2t_1t_3)^n$$

Tratamos de expresar esto como una serie o una suma finita para ver cómo es la distribución de Z. Para ello, utilizaremos el Binomio de Newton.

$$g(t_1, t_3) = \frac{1}{3^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t_1^{2r}(2t_1t_3)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{3^n}\binom{n}{r}t_1^{2r}2^{n-r}t_1^{n-r}t_3^{n-r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{2^{n-r}}{3^n}\binom{n}{r}t_1^{n+r}t_3^{n-r}$$

Por tanto tenemos la distribución de Z:

$$P(X_1 = n + r, X_3 = n - r) = \frac{2^{n-r}}{3^n}\binom{n}{r} \ con \ r = 0, 1, 2, ..., n$$

Ejercicio 3. ***Apartado a)***

Lo haces tú en tu casita crack.

Apartado b)

Calcularemos los $P(Z = r)$, primero tomemos $r \geq 0$:

$$P(Z = r) = P(X - Y = r) = \sum_{s=r}^{+\infty} P(X = s, Y = s + r) = \sum_{s=r}^{+\infty} P(X = s)P(Y = sr) = pq^s pq^{s-r} = \sum_{s=0}^{+\infty} p^2 q^{2s-r} = p^2 \sum_{s=r}^{+\infty} q^{2s-}$$

Esto es una geométrica de razón q^2:

$$P(Z=r) = \frac{p^2q^r}{1-q^2} = \frac{p^2q^r}{\underbrace{(1-q)}_{=p}(1+q)} = \frac{pq^r}{1+q}$$

Para calcular el caso $r<0$ y como X e Y tienen la misma distribución:

$$P(Z=r) = P(X-Y=r) = P(Y-X=-r) = \frac{p^{q-r}}{1+q}$$

Y en general:

$$P(Z=r) = \frac{pq^{|r|}}{1+q}$$