

Mirar los apuntes de Lorencio

Teorema de Wald

Consistencia

Sea $X \sim F(\cdot, \theta)$, $\theta \in \Theta$, $\hat{\theta}_n$ estimador de $\theta \forall n \in \mathbb{N}$, definimos las siguientes operaciones:

$$P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n \in A) := P(\hat{\theta}_n \in A | \theta = \theta_0)$$

$$E_{\theta_0}[\hat{\theta}_n] = \int_{\psi} \cdots \int \hat{\theta}_n(x) L(x, \theta_0) dx$$

Se dice que $\hat{\theta}_n$ es consistente para $\theta \in \Theta$ si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0$ (convergencia en probabilidad), $\forall \theta_0 \in \Theta$

Proposición 0.1. Si Θ es finito y $\hat{\theta}_n$ es estimador de θ entonces se da la consistencia del estadístico si y solo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1, \forall \theta_0 \in \Theta$$

Es decir,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0 \forall \theta \in \Theta \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1$$

Demostración

\Leftarrow

Trivial.

\Rightarrow

Si $\hat{\theta}_n$ es el EMV de θ , tomará un valor aislado dentro de Θ .

Si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0$, tomando ε suficientemente pequeño, $\hat{\theta}_n$ solo puede tomar el valor de θ_0 , luego $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1$

□

Proposición 0.2. Desigualdad de Jensen

Sea X v.a. y g una función cóncava, entonces $E[g(X)] < E(E[X])$ siempre que las esperanzas anteriores existan.

Proposición 0.3. Ley fuerte de Kolmogorov

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de v.v.a.a. independientes, idénticamente distribuidas y con media finita. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \xrightarrow{c.s.} E[X]$$

Lema 0.0.1. Sean $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \{P(A_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{P(B_n)\} = 1$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap B_n) = 1$$

Demostración

$$P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n)$$

Pero tenemos:

$$1 \geq P(A_n \cup B_n) \geq P(A_n) \rightarrow 1$$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap B_n) = 1$ y tenemos que:

$$P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n) = 1 + 1 - 1 = 1$$

□

Teorema 1. Sea X variable aleatoria con función de distribución $F(\cdot, \theta)$ para $\theta \in \Theta$, siendo Θ un conjunto infinito. Supongamos que se verifica:

- (A1) El soporte de $F(\cdot, \theta)$ es común para todo $\theta \in \Theta$.
- (A2) $E_{\theta_0} \left[\log \frac{f}{X, \theta} \right]$ existe y es finita para todo θ , $\theta_0 \in \Theta$

Si para todo $n \in \mathbb{N}$ y (X_1, \dots, X_n) m.a.s de X existe el EMV($\hat{\theta}_n$) de θ y es único entonces $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente del parámetro θ .

Demostración

Utilizaremos la Desigualdad de Jensen, tomaremos $g = \log$ y la v.a. $\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)}$. La Desigualdad de Jensen entonces nos dice:

$$E_{\theta_0} \left[\log \left(\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right) \right] < \log \left(E_{\theta_0} \left[\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right] \right)$$

Pero notemos que:

$$E_{\theta_0} \left[\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right] = \int \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta_0)} f(x, \theta_0) dx =_{(A1)} 1$$

Luego tenemos que:

$$E_{\theta_0} \left[\log \left(\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right) \right] < 0$$

Usaremos ahora la ley fuerte de Kolmogorov a la sucesión $\left\{ \log \left(\frac{f(X_n, \theta)}{f(X_n, \theta_0)} \right) \right\}_n$ y utilizando que la convergencia casi segura es más fuerte que la convergencia en probabilidad, tenemos :

$$\frac{\log \left(\frac{L(\mathbb{X}, \theta)}{L(\mathbb{X}, \theta_0)} \right)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\log \left(\frac{f(x_i, \theta)}{f(x_i, \theta_0)} \right)}{n} \xrightarrow{P_{\theta_0}} E_{\theta_0} \left[\log \left(\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right) \right] < 0$$

Como a partir de cierto n el logaritmo de la izquierda será negativo podemos tomar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left(\log \frac{L(\mathbb{X}, \theta)}{L(\mathbb{X}, \theta_0)} < 0 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(L(\mathbb{X}, \theta) < L(\mathbb{X}, \theta_0)) = 1$$

Como el espacio paramétrico es finito, utilizaremos la equivalencia para la definición de consistencia y buscaremos el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0)$$

Estudiamos ahora el suceso $\{\hat{\theta}_n(x) = \theta_0\} = \bigcap_{\substack{\theta \in \Theta \\ \theta \neq \theta_0}} \{L(\mathbb{X}, \theta) < L(X, \theta_0)\}$

El suceso es intersección finita de sucesos cuya probabilidad tienen límite 1. Utilizando el lema llegamos a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1$$

□

Ejemplo 1. $X \sim \mathcal{U}(\theta, \theta+1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, X_1, \dots, X_n m.a.s de X , $(f(x, \theta) = 1, \text{ si } x \in (\theta, \theta+1))$. Buscar el EMV de θ .

$$L(\mathbb{X}, \theta) = 1 \text{ si } (x_i \in (\theta, \theta+1), i = 1, \dots, n) \iff (\theta < x_{1:n} \text{ y } x_{n:n} < \theta+1) \iff (x_{n:n}-1 < \theta < x_{1:n})$$

En $\alpha(x_{n:n} - 1) + (1 - \alpha)x_{1:n}$ se alcanza el máximo de $L(\mathbb{X}, \theta) \forall \alpha \in (0, 1)$