Delirios de AnalFun

Paco Mora

8 de noviembre de 2022

CAPÍTULO 1

Yo qué sé qué es esto

1.1 - Introducción

Definición 1.1. *Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.*

Teorema 1.1. ***(Baire)***

Sea (X, d) espacio métrico completo $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos de en X, $\overline{G}_r = X \ \forall n \in N$. Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

//Repaso de la relación de orden

Teorema 1.2. ***Principio de la buena ordenación*** *Para todo conjunto $\mathcal{S}$, existe una relación de orden $\leq$ tal que $(S, \leq)$ está bien ordenado, $\leq$ es un buen orden.*

Teorema 1.3. ***Lema de Zorn***

Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para C, cadena, existe $c \in P$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in C$), entonces P tiene un elemento maximal (existe $m \in P$ tal que si $\leq x$ entonces $x = m$)

Teorema 1.4. ***Principio Maximal de Hasudorff***

Cada conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ contiene una cadena maximal.

Teorema 1.5. *Son equivalentes:*

1. *El principio Maximal de Hasudorff*
2. *Lema de Zorn*
3. *Principio de la buena ordenación*
4. *Axioma de elección*

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

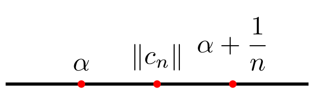
//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

Teorema 1.6. ***De la mejor aproximación***

Dado $(H, < \cdot >)$ *espacio de Hilbert y* $C \subset H$ *cerrado y convexo. Sea* $x_0 \notin C$. *Entonces existe un único elemento* $c_0 \in C$ *tal que* $\|x_0 - x\| = \inf\{\|x_0 - c\| \ = \alpha : \ c \in C\}$

Demostración

Tomemos una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n \in C$ de forma que se verifique



Si c_n fuera de Cauchy, existe $c_0 = \lim_{n\to\infty} c_n$. Probemos que (c_n) es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

Como $\underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de C para el punto medio entre c_n y c_m:

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\|\frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que $\|c_n - c_m\| \to 0$.

$\square$

Teorema 1.7. ***(de la proyección)***

Sea M *un subespacio cerrado del Hilbert* H, *entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas* $P, Q : H \to H$ *tales que* $P(H) = M$ *y* $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : < y, m >= 0 \ \forall m \in M\}$ *y* $x = Px + Qx \ \forall x \in H$

Además se verifica:

- $x \in M \implies Px = x, \ Qx = 0; \ x \in M^\perp \implies Px = 0, \ Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, \ y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *(Pitágoras)*

Como consecuencia $H = M \oplus M^\perp$

Demostración

Sea $x \in H,\ x+M$ cerrado y convexo, llamemos Qx alúnico elemento en $x+M$ de norma mínima y definimos $Px = x - Qx$. Vemos que $Qx \in M^{\perp}$, $< z, y >= 0 \forall y \in M$. Aplicando que $Qx \equiv Z$ tiene norma mínima en $x+M$ tendremos:

$$0 \le \|z\|^2 =< z, z > \le \underbrace{\|z-\alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} =< z-\alpha y, z-\alpha y >= \cancel{< z, z >} - \overline{\alpha} < z, y > -\alpha < y, z >= \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora $\alpha =< z, y >$ y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a $0 \le -\alpha^2 \implies \alpha = 0$, luego $\mathrm{Im}(Q) \subset H^{\perp}$. Como además $M \cap M^{\perp} = \{0\} \implies x = Px + Qx$, entonces $H = M \oplus M^{\perp}$

Análogamente sale el resto de los enunciados[1].

$\square$

Lema 1.1. *$M \subset H$ subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert H. Entonces $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$, $< x_0, m \ge 0 \forall m \in M$*

Demostración

Como $H \neq M \implies M^{\perp} \neq \{0\}$

$$\{d_n :\ n = 1, 2, ..\}\text{numerable y denso en } H$$

Tomamos entonces una base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ tal que:

$$\mathrm{span}\{d_1, ..., d_n, ...\} = \mathrm{span}\{e_1, ..., e_n, ...\}$$

$\square$

Definición 1.2. ***Conjunto ortonormal*** *$\{\overline{u}_1, \overline{u_2}, ...\}$ en $H : < u_i, u_j >= \delta_{ij}$. Tenemos además que son LI:*

$$0 = \| \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i \|^2 =< \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i, \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i >= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \implies c_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

Proposición 1.8. *$M = \mathrm{span}\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset H,\ P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} < x_i, u_i > u_i$. Si $d = dist\{x, M\}$ entonces:*

$$\|x\|^2 - \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2$$

Lema 1.2. *Sea $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ ortonormal, $\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^{\infty} | < x, u_i > |^2\ \forall x \in H$*

[1] xd

Proposición 1.9. $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ *ortonormal en* H*, la función:*

$$\Lambda : H \to \ell^2 \ \Lambda(x) = (< x, u_i >)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

Demostración

$(\xi_n) \in \ell^2$ encontramos $x \in H$: $\Lambda(x) = (\xi_n)$. Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n u_n \to < \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m >$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

Teorema 1.10. ***(de la base hilbertiana)***

Para $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ *conjunto ortonormal en* H *(espacio de Hilbert). Son equivalentes:*

1. $\{u_1, u_2, ...\}$ *es ortonormal maximal.*
2. $\overline{\text{span}\{u_1, ...\}} = H$
3. $\forall x \in H$ *se tiene* $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > u_n$ *en* H
4. $\forall x \in H,\ \forall y \in H,$ *se tiene* $< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > \overline{< y, u_n >}$
5. $\forall x \in H,$ *se tiene* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, u_n > |^2$

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

Demostración

Recomiendo mirar el libro. $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea $M_n = span\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, sabemos que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$ y que:

$$\forall x \in H,\ P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{dist(x, M_n)^2}_{=:\delta_n \to 0} + \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2$$

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n :\ \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon,\ x_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

4 $\implies$ 5

Directo.

5 $\implies$ 2

Por la desigualdad de Bessel.

□

Definición 1.3. *A una base como la anterior se le llama **base hilbertiana**. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.*

Lema 1.3. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces E es finito dimensional.*

Para E no completo, no es cierto.

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

Teorema 1.11. *Sea $< \cdot >$ un producto escalar en $C([a,b])$ con $\|\cdot\|_\infty$ más fina que $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{\phi_n : n = 0,1,2,\dots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} < f, \phi_n > \phi_n \ \forall f \in C[a,b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \implies \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} < f, \phi_n > \phi_n \right\|_{<\cdot>} < \varepsilon$$

1.1.1. Series de Fourier

Definición 1.4. *Un polinomio trigonométrico es una función de la forma*

$$h(t) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \ m = 0,1,2,...$$

Lema 1.4. *Si h_1, h_2 son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.*

Lema 1.5. *$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico q_ε tal que:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

Ejercicio 1.

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{pi}} \cos(nt), \ u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{pi}} \sin(mt), \ m = 1,2,...$$

Es ortonormal en $(C[a,b], \langle\cdot\rangle)$

1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

Proposición 1.12. *Dado $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Existe una única medida (F función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)dF(f)$$

Teorema 1.13. ***Teorema de Riesz.***

Buscar en el libro.

Definición 1.5. ***Topología débil del espacio de Hilbert***

Sea $(H, <>)$ un espacio de Hilbert.

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \leftarrow H : x_0, \qquad & \varepsilon > 0,\ t_1, ..., t_p \in H \\ < x, x_0 > \hookleftarrow x \qquad & \end{aligned}$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, ..., t_p) = \{z \in H : | < t; x_0 - z > | < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., p\}$$

Teorema 1.14. ***Alaoglo-Bourbaki***

Sea $(H, <>)$ un espacio de Hilbert y sea $B_H = \{x \in H : \ \|x\|_{<>} \leq 1\}$. Entonces B_H es un subconjunto débilmente compacto.

Demostración

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana $\{e_n\}$ de H y tomemos $(v_n) \subseteq B_H$.

Notemos primero que $| < e_p, v_n > | \leq 1\ \forall p, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $[0,1]^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión (v_n), $v_n \mapsto < -, v_n >$ y utilizando la base, este producto puede expresarse como $\sum_{p=1}^{\infty} < x, e_p > e_p$ para cierto x.

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros $n_1 < n_2, ..., n_k < ...$ de forma que $(< e_p, v_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces $S = s\,\mathrm{span}\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(< s, v_{n_k} >)_{k=1}^{\infty}$ es convergente $\forall s \in S$. Falta ver que sea convergente para todo punto de $H = \overline{S}$ que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

1.3 - Teoremas de Skald

Definición 1.6. ***Familia de funciones (uniformemente) equicontinua***

Una sucesión de funciones continuas $(f_i)_{i \in I}$ *se dice que es equicontinua en* x_0 *si* $\forall \varepsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists \delta_\varepsilon$ *tal que* $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$*. Es decir, que el* δ *necesario es el mismo para todas las funciones.*

De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:

Una sucesión de funciones uniformemente continuas $(f_i)_{i \in I}$ *se dice que es uniformemente equicontinua en si* $\forall \varepsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists \delta_\varepsilon$ *tal que* $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$*. Es decir, que el* δ *necesario es el mismo para todas las funciones.*

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

Teorema 1.15. *Sea* (K, d) *un espacio métrico y* $\mathrm{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R}$ *continuas*$\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, T_p)$ *(*T_p *es la topología producto).*

Si ϕ *es (unif.) equicontinua, entonces* $\overline{\phi}^{T_p}$ *son (uniformemente) continuas*

Teorema 1.16. *Si* ϕ *es equicontinua, entonces en* ϕ *coinciden las topologías* T_p*(producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto* $D \subseteq K$ *denso (*$\overline{D} = K$*).*

Teorema 1.17. *Sea* $\phi \subseteq \mathrm{C}(K)$ *y sea* (K, d) *métrico compacto. Entonces* ϕ *es relativamente compacto en* $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$ *es equicontinuo y* $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$ *acotado* $\forall x \in K$

Teorema 1.18. ***Lax- Milgram***

Sea $(H, <>)$ *un espacio de Hilbert y* $B : H \times H \to \mathbb{K}(\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$ *tal que:*

1. $B(\cdot, y)$ *es lineal* $\forall y \in H$ *y* $B(x, \cdot)$ *es lineal conj., es decir,* B *es sesquilineal.*
2. B*es acotada:* $\exists c > 0$ *tal que* $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \forall x, y \in H$
3. B *es fuertemente positiva:* $\exists b > 0$ *tal que* $|B(x, y)| > b\|y\|^2$*,* $\forall y \in H$

Entonces para cualquier forma lineal y continua $\phi : H \to \mathbb{K}$ *existe un único* $y \in H$ *tal que* $\phi(x) = B(x, y) \forall x \in H$

Demostración

Para y fijo la apliación $x \hookrightarrow B(x, y)$ es lineal continuo. Por el teorema de Riesz, $\exists z \in H$ tal que $B(x, y) =< x, z > \forall x \in H$ y sea T la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que $T(H)$ es un subespacio de H. Veamos que $T(H) = H$ y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1. $T(H)$ es cerrado.

$$\text{Sea } z_n = Ty_n \text{ tal que } \lim_{n \to \infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$$

$$B(x, y_n - y_m) =< x, z_n - z_m > \forall x \in H$$

$$b\|y_n - y_m\|^{\cancel{2}} \leq B(y_n - y_m, y_n - y_m) =< y_n - y_m, z_n - z_m >\leq \cancel{\|y_n - y_m\|}\|z_n - z_m\|$$

Luego (y_n) es de Cacuhy y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y tenemos que:

$$<x, z_n> = B(x, y_n) \to B(x, y) = <x, z> = <x, Ty> \forall x \in H$$

2. Supongamos $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : <x_0, z> = 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) = <x_0, z> \forall y \in H,\ B(x_0, x_0) = 0$ si $x_0 \neq 0$

$\square$

1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

Lo que querremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplo 2. *Tomemos $n = 2$, en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.*

Idea para buscar una solución

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_1}|^2 + |\frac{\partial u}{\partial x_2}|^2 d_1 dx_2$$

Definición 1.7. $C^2(\overline{\Omega})$

Denotamos a $C^2(\overline{\Omega})$ como las funciones dos veces derivables en el interior de Ω con segunda derivada continua en $\overline{\Omega}$.

Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por $C^2_0(\overline{\Omega})$.

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

Teorema 1.19. ***Teorema de Gauss***

Dada Ω suficientemente regular:

$$\int_\Omega \partial x_j w dx = \int_\Omega w n_j d\theta$$

Proposición 1.20. *Si existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que minimiza a $D(u)$ entre todas las funciones $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $u|_{\partial\Omega} \equiv f$, entonces u es armónica ($\triangle u = 0$).*

Demostración

En $C^2(\overline{\Omega})$, definimos $\langle\cdot\rangle_D$ por:

$$\langle F, G\rangle_D = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora $D(u) = \langle u, u\rangle_D$.

Si $v \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica que $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall\varepsilon \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(u + \varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(u) + \varepsilon D(v) + \varepsilon\langle u, v\rangle_D + \varepsilon\langle v, u\rangle_D$$

Cancelando $D(u)$ tenemos:

$$\varepsilon^2 D(u) + \varepsilon D(v) + \varepsilon\langle u, v\rangle_D + \varepsilon\langle v, u\rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un ε arbitrario, tenemos que $\langle u, v\rangle_D = 0 \ \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$ con soporte compacto, luego:

$$0 = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = -\int\limits_{\Omega} (\triangle u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \ \textit{con} \ v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle\triangle u, v\rangle_{L^2} = 0$ para cualquier v de un denso, luego $\triangle u = 0$

□

Teorema 1.21. ***Desigualdad de Poincaré***

$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega),\ \|f\|_0 \leq \operatorname{diam}(\Omega)\|f\|_1$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle,\rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle,\rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

Lema 1.6.

1. $H_1^0 \subseteq H_0$

2. $\forall v \in H_1^0,\ \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j\rangle_0 = -\langle\frac{\partial z}{\partial x_j}, v\rangle_0$. *Es decir:*

$$\int\limits_{\Omega} z v_j = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. Si $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v\rangle_1 = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}$

A v_j se le llama $\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$

Demostración

Sea $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v_n \to v \in H_1^0$ en $\|\cdot\|_1 \implies \left(\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\langle , \rangle_0$ y converge a una función a la que llamamos $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré, (v_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_0$ y su límite no podrá ser otro que v. La fórmula:

$$\int_\Omega z v_j = -\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

Viene dada por el paso al límite de la expresión dada por el teorema de Gauss:

$$\int_\Omega z \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = -\int_z^{x_j} v_n$$

$\square$

Lema 1.7. ***Variacional***

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega u v dx = 0 \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Entonces $u = 0$ en $L^2(\Omega)$ y $u = 0$ $\forall x \in \Omega$

Teorema 1.22.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado. Sea $f \in L^2(\Omega) \equiv H_0$. Entonces existe una ***solución débil*** *de la ecuación:*

$$\begin{cases} \triangle u = f \\ u|_{\partial\Omega} u = 0 \end{cases}$$

En el siguiente sentido:

Existe una única función $v \in H_1^0$ donde que $\langle u, f \rangle = -\langle u, \triangle v \rangle$ $\forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$

Lo rojo aún "está por aclarar"

Demostración

Si $f \in L^2 \implies \phi : L^2 \to \mathbb{R}$ lineal y continua en H_0 por Riesz. Aplicando la des. de Poincaré:

$$|\phi(n)| \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \operatorname{diam}(\Omega) \|f\|_0 \|u\|_1 \ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \phi \text{ es continua en } (\mathcal{D}(\Omega), \langle , \rangle_1)$$

Entonces podemos extender ϕ al completado, H_1^0. A esta forma lineal extendida le aplicamos el teorema de Riesz.

Existirá entonces una única $v \in H_1^0$ tal que $\phi(u) = \langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle_0$ para todo $u \in H_1^0$.

Si tomamos $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle u, v\rangle_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j\rangle_0 = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} \overset{Int.\ partes}{=} -\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \int_\Omega -u \sum_{j=1}^{N} v_{jj}$$

Donde las parciales son en el sentido generalizado visto en el lema.

□

Definición 1.8. ***Definición de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y su topología***

Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ compactos, definimos $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$

En este espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$, definimos una topología a partir de las seminormas utilizadas en la convergencia uniforme de los elementos de $\mathcal{D}K(\Omega)$. Lo vemos en detalle:

Los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ son funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que su soporte está en K y se dice que $h_n \to h$ si $h_n \to h$ de forma uniforme y sus diferenciales convergen de forma uniforme a la de $h(x)$, es decir:

$$D^\alpha h_n(x) \to D^\alpha h(x) \ unif.\ \forall \alpha = (a_1, ..., a_N)$$

1.5 - Problemas variacionales cuadráticos

Teorema 1.23. ***Principal de los problemas variacionales cuadráticos***

Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, acotada, continua[a] *y fuertemente positiva*[b] *y $b : H \to \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Sea $F(x)$:*

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - b(x) \forall x \in H$$

Llamada forma bilineal cuadrática.

Entonces se verifica la siguiente equivalencia:

$$\inf\{F(z) :\ z \in H\} = F(x_0) \iff B(x_0, y) = b(y)\ \forall y \in H$$

Además, existe un único x_0 que lo verifica.

[a] $\|y\|\|x\|d \geq |B(x,y)|$
[b] $B(x,y) \geq C\|x\|\|y\|\ \forall x, y$

Notemos que la norma $\|\|$ y el módulo de B son normas equivalentes debido a que B es continua y fuertemente positiva.

Demostración

Demostrado en 1.7.1. del libro. Aquí hay un boceto de la demostración:

Dado $t \in \mathbb{R},\ x, y \in H$, se tiene:

$$F(x+ty) = \frac{1}{2}B(x+ty, x+ty) - b(x+ty) = \frac{1}{2}\Big(B(x,x) + B(x,ty) + B(ty,x) + B(ty,ty)\Big) - \Big(b(x) + tb(y)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(B(x,x) + 2B(x,ty) + t^2B(y,y)\Big) - \Big(b(x) + tb(y)\Big) = \frac{t^2}{2}B(y,y) + t\Big(B(x,y) - b(y)\Big) + \frac{1}{2}B(x,x) - b(x)$$

Si el x_0 es donde se alcanza el extremo inferior, se tiene que:

$$F(x_0) \leq \frac{t^2}{2}B(y,y) + t\Big(B(x_0,y) - b(y)\Big) + \underbrace{\frac{1}{2}B(x_0,x_0) - b(x_0)}_{F(x_0)}$$

Y entonces $B(x_0,y) = b(y)$. (???)

”El recíproco se hace con la misma expresión y derivando”

Para la unicidad, basta con aplicar el teorema de Riesz para el producto escalar $\langle , \rangle_B$

□

Método 1. ***Método de aproximación de Ritz-Galerkin***

Dado $B(x_0,y) = b(y) \forall y \in H$*, y tomando* $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$ *con cada* H_n *finito dimensional.*

Tomamos $\mathrm{span}\{e_j^n : j = 1,2,...,N\}$ *a una base de cada* H_n

Al problema P *presentado en el anterior teorema (la parte izquierda de la equivalencia) restringido a* H_n *queda:*

$$P|_{H_n} \equiv B(x,y) = h(y) \forall y \in H_n \longrightarrow B(x,e_j^n) = b(e_j^n) = b(e_j^n)\ j = 1,2,...,N$$

Entonces si la solución a cada problema es x_n*, se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Demostración

$$B(x_n,y) = b(y)\ \forall y \in H_n$$
$$B(x_0,y) = b(y)\ \forall y \in H$$

Restando llegamos a:

$$0 = B(x_n - x_0, y) \forall y \in H_n$$

Luego el $x_n - x_0$ es la proyección ortogonal sobre H_n asociada a $\langle , \rangle_B$ de x_0 sobre x_n. Entonces es la mejor aproximación sobre H_n como $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

□

1.6 - Operaciones diferenciales y soluciones débiles

Definamos el operador:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

Con:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$$

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

Problema:

Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ encontrar u tal que $L(u) = f$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

Proposición 1.24.

$$\textit{Adjunto de } L^* = \sum_{|\alpha|\leq n} (-1)^{|\alpha|}\overline{a}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \textit{ verifica que:}$$

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \langle \phi, L^*\psi\rangle \forall \phi, \psi\ \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observación

$\forall f \in L^2(\Omega)$, si $u \in C^n(\Omega)$ verifica que $Lu = f$, entonces $\langle f, \psi\rangle = \langle u, L^*\psi\rangle\ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Definición 1.9. ***Solución débil***

Si $f \in L^2(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ es una ***solución débil*** *de la ecuación $Lu = f$ siempre que $\langle f, \psi\rangle = \langle u, L^*\psi\rangle\ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

Ejemplo 3. *En $\mathbb{R}, L = \dfrac{d}{dx}$ con $\Omega = (0, 1),\ u, f \in L^2(\Omega)$*

Entonces $Lu = f$ en sentido débil sii $\exists F \in: [0, 1] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua y tal que $F(x) = u(x)$ para casi todo punto (p.c.t) $x \in [0, 1]$ y $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in (0, 1)$

Hay otros ejemplos en el libro (sección 1.10)

1.7 - Teorema de Radon-Nykodin

Teorema 1.25. *Sea Ω es de medida. Σ una σ-álgebra y $\mu, \nu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ medidas finitas.*

Si ν es absolutamente continua respecto de μ, es decir, $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$.

Entonces existe $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ integrable respecto a μ tal que:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu\ \forall E \in \Sigma$$

Demostración

(Prueba de Von-Neumann)

Sea $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu+\nu)$, entonces podemos definir la forma lineal $\phi : H \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = \int x d\mu$ es lineal y continua para la norma asociada $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ y, por tanto, lo es para la norma asociada $\|\cdot\|_{L^2(\mu+\nu)}$ y aplicando el teorema de Riesz, existe una única función $y \in L^2(\mu + \nu)$ tal que:

$$\int x d\mu = \phi(x) = \langle x, y\rangle_{L^2(\mu+\nu)} = \int_\Omega xyd(\mu + \nu) = \int_\Omega xyd\mu * \int_\Omega xyd\nu$$

Luego tenemos:

$$\int\limits_{\Omega} x(1-y)d\mu = \int\limits_{\Omega} xyd\nu \ \forall x \in H$$

Ejercicio: Probar que $0 < y \leq 1$ p.c.t con relación a μ.

Definimos entonces $g = \dfrac{1-y}{y}$. Entonces:

$$\int\limits_{\Omega} (xy)gd\mu = \int\limits_{\Omega} (xy)d\nu \ \forall x \in H$$

$$\int\limits_{\Omega} ugd\mu = \int\limits_{\Omega} ud\nu \ \forall x \in H, \ u = xg$$

Haciendo $u = \chi_E$ tenemos:

$$\int\limits_{\Omega} gd\mu = \int\limits_{\Omega} \chi_E gd\mu = \int\limits_{\Omega} \chi_E d\nu = \nu(E)$$

$\square$

CAPÍTULO 2

Operadores Lineales

2.1 - Introducción

A no ser que se diga lo contrario, en este tema denotaremos a X como un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Definición 2.1. ***Norma de un operador lineal y $\mathcal{L}(X,Y)$***

Sea X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y continua. Definimos la norma de T como:

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \ x \in B_X{}^{a}\}$$

Al espacio normado $\Big(\{T : X \to Y \text{ lineal continuo}\}\Big)$ lo denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$. Este espacio es completo cuando lo es Y.

[a] Bola unidad

Observación

Esta norma es la menor constante tal que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \ \forall x \in X$

2.1.1. Nota sobre limites iterados

Cuando tenemos una sucesión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & ... & \to & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & ... & \to & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & & & \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & ... & & \\ \beta_1 & \beta_2 & ... & \beta_n & & & \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos entonces cuando se tiene que:

$$\lim_{p\to\infty} \alpha_p = \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

Proposición 2.1. *Si existe el límite doble,* $\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{pn}$*, entonces se da la igualdad.*

Teorema 2.2. *Si se converge por filas o por columnas se da la convergencia* ***uniforme****, entonces se da la igualdad.*

Observación

Lo realizado sobre límites iterados también es válido para redes y filtros.

Definición 2.2. ***Operador*** T^*

2.2 - Inversión de operadores lineales

En esta sección veremos que los operadores invertibles en dimensión infinita forman un conjunto abierto (como ocurre en $\mathbb{R}^n$).

En general, estudiaremos la invertibilidad de un operador $T : X \to X$ (X un Hilbert) estudiando la de $(T - \lambda Id)$. En ese caso, λ será un valor propio. Obteniendo los vectores propios asociados $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Entonces si estos vectores forman una base Hilbertiana, entonces $X = \text{span}\{e_j\}$ y $\forall x \in H$:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle \lambda_j e_j$$

Cuando tengamos esto, podremos resolver la ecuación $T(x) = y$, donde queremos obtener la x a partir de T e y.

Esto lo podremos hacer para un operador compacto (la bola unidad va a un conjunto (relativamente) compacto) y simétrico.

Teorema 2.3. ***De Von Neumnn***

Si $K \in \mathcal{L}(X)$ *invertible,* $L, A \in \mathcal{L}(X)$ *y sea* $L = K - A$*. Entonces si* $\|A\| < \dfrac{1}{\|K^{-1}\|}$ *entonces* L *es invertible.*

Demostración

Caso 1: $K = Id$. Probaremos entonces que la bola de radio 1 está dentro de los elementos invertibles.

Consideremos $Id - B$ con $\|B\| < 1$. Veremos que esta diferencia es invertible.

Definimos $S = \sum\limits_{i=0}^{\infty} B^n$. Veremos que esta serie es convergente.

Supongamos que la serie es *normalmente* convergente, es decir, $\sum \|B^n\| < \infty$.

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n \text{ es de Cauchy} \implies \text{es convergente}$$

La serie es *normalmente* convergente ya que dados dos operadores S, T tenemos $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. Entonces podemos la serie para ver que es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n < \infty$$

Siendo la última convergente al ser una serie geométrica (recordemos que $\|B\| < 1$)

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$. Tenemos que $B \circ S = B \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n\right)$. Como la composición es una función bilineal continua, podemos pasar B a dentro del sumatorio:

$$B \circ S = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B)S = Id$$

De igual forma tenemos:

$$S \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies S(Id - B) = Id$$

Caso 2: Como K es invertible, tenemos que: $(K - A) = K(Id - K^{-1}A)$ será invertible cuando es composición de invertibles[1].

En primer lugar, K es invertible, y tomando $B = K^{-1}A$, tenemos que:

$$\|B\| = \|K^{-1}A\| \leq \|K^{-1}\|\|A\| < 1$$

Y usando el caso 1, tenemos que $(Id - K^{-1}A)$ es invertible $\implies$ $K - A$ es invertible.

Además, utilizando ambos casos podemos escribir $(K - A)^{-1}$ como:

$$(K - A)^{-1} = \Big(K(Id - K^{-1}A)\Big)^{-1} = (Id - L^{-1}A)^{-1} \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1}A)^n K^{-1} \tag{2.1}$$

□

Ejercicio 1. ***Ejercicio propuesto***

Dado un espacio normado $(Z, \|\cdot\|)$, es completo sii toda serie normalmente convergente en Z es convergente en Z.

Ejercicio 2. ***Ejercicio propuesto***

$\mathcal{L}(X)$ es completo.

Definición 2.3. ***Resolvente y espectro***

Dado $M : X \to X$ se definen el resolvente y el espectro respectivamente como:

$$\rho(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda Id - M) \text{ es inverible}\}$$

$$\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda Id - M) \text{ NO es inverible}\}$$

[1] Queda como ejercicio demostrarlo

Teorema 2.4. *1. $\rho(M)$ es abierto.*
2. $\rho(M) \to \mathcal{L}(X)$ tal que $\lambda \mapsto (\lambda Id - M)^{-1}$ es analítica.

Demostración

1.

Si $\lambda \in \rho(M)$, podemos aplicar el teorema de Von Neumann para $K = \lambda Id - M$ y $A = \lambda Id$ y tendremos que:

$$(\lambda - h)Id - M = (\lambda Id - M) - hId \text{ será invertible si } h \text{ es suficientemente pequeño}$$

La fórmula 2.1 nos da:

$$\Big((\lambda - h)Id - M\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((\lambda Id - M)^{-1}h\Big)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((\lambda Id - M)^{-1}\Big)^{n-1} h^n \text{ en } \mathcal{L}(X)$$

Siendo esta serie convergente cuando $|h| < \|\lambda Id - M^{-1}\|^{-1}$ (la condición que necesitábamos para aplicar el teorema).

$\square$