Delirios de AnalFun

Paco Mora

15 de septiembre de 2022

CAPÍTULO 1

Yo qué sé qué es esto

Definición 1.1. *Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.*

Teorema 1. ***(Baire)***

Sea (X, d) *espacio métrico completo* $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *abiertos de en* X, $\overline{G}_r = X$ $\forall n \in N$. *Entonces:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

//***Repaso de la relación de orden***

Teorema 2. ***Principio de la buena ordenación*** *Para todo conjunto* $\mathcal{S}$, *existe una relación de orden* $\leq$ *tal que* $(S, \leq)$ *está bien ordenado,* $\leq$ *es un buen orden.*

Teorema 3. ***Lema de Zorn***

Si $(P, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para* C, *cadena, existe* $c \in P$ *tal que* $x \leq c$ *para todo* $x \in C$*), entonces* P *tiene un elemento maximal (existe* $m \in P$ *tal que si* $\leq x$ *entonces* $x = m$*)*

Teorema 4. ***Principio Maximal de Hasudorff***

Cada conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ *contiene una cadena maximal.*

Teorema 5. *Son equivalentes:*

1. *El principio Maximal de Hasudorff*
2. *Lema de Zorn*
3. *Principio de la buena ordenación*
4. *Axioma de elección*

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

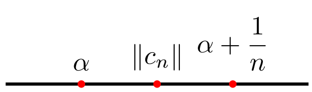
//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

Teorema 6. ***De la mejor aproximación***

Dado $(H, < \cdot >)$ espacio de Hilbert y $C \subset H$ cerrado y convexo. Sea $x_0 \notin C$. Entonces existe un único elemento $c_0 \in C$ tal que $\|x_0 - x\| = \inf\{\|x_0 - c\| \ = \alpha : \ c \in C\}$

Demostración

Tomemos una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n \in C$ de forma que se verifique



Si c_n fuera de Cauchy, existe $c_0 = \lim_{n\to\infty} c_n$. Probemos que (c_n) es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

Como $\underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de C para el punto medio entre c_n y c_m:

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\|\frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que $\|c_n - c_m\| \to 0$.

$\square$

Teorema 7. ***(de la proyección)***

Sea M un subespacio cerrado del Hilbert H, entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas $P, Q : H \to H$ tales que $P(H) = M$ y $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : < y, m >= 0 \ \forall m \in M\}$ y $x = Px + Qx \ \forall x \in H$

Además se verifica:

- $x \in M \implies Px = x, \ Qx = 0; \ x \in M^\perp \implies Px = 0, \ Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, \ y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *(Pitágoras)*

Como consecuencia $H = M \oplus M^\perp$

Demostración

Sea $x \in H,\ x+M$ cerrado y convexo, llamemos Qx alúnico elemento en $x+M$ de norma mínima y definimos $Px = x - Qx$. Vemos que $Qx \in M^\perp$, $<z, y>= 0 \forall y \in M$. Aplicando que $Qx \equiv Z$ tiene norma mínima en $x+M$ tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 =<z,z> \leq \underbrace{\|z-\alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} =<z-\alpha y, z-\alpha y>= \cancel{<z,z>} - \overline{\alpha}<z,y> -\alpha<y,z>= \alpha^2\|y\|^2$$

Tomando ahora $\alpha =<z,y>$ y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$, luego $\mathrm{Im}(Q) \subset H^\perp$. Como además $M \cap M^\perp = \{0\} \implies x = Px + Qx$, entonces $H = M \oplus M^\perp$

Análogamente sale el resto de los enunciados[1].

□

Lema 1.0.1. *$M \subset H$ subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert H. Entonces $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$, $< x_0, m \geq 0 \forall m \in M$*

Demostración

Como $H \neq M \implies M^\perp \neq \{0\}$

$$\{d_n : \ n = 1, 2, ..\}\text{numerable y denso en } H$$

Tomamos entonces una base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ tal que:

$$\mathrm{span}\{d_1, ..., d_n, ...\} = \mathrm{span}\{e_1, ..., e_n, ...\}$$

□

Definición 1.2. ***Conjunto ortonormal*** *$\{\overline{u}_1, \overline{u_2}, ...\}$ en $H : <u_i, u_j>= \delta_{ij}$. Tenemos además que son LI:*

$$0 = \|\sum_{i=1}^n c_i 0_i\|^2 =<\sum_{i=1}^n c_i 0_i, \sum_{i=1}^n c_i 0_i>= \sum_{i=1}^n c_i^2 \implies c_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

Proposición 1.1. *$M = \mathrm{span}\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset H,\ P_M(x) = \sum_{i=1}^n < x_i, u_i > u_i$. Si $d = dist\{x, M\}$ entonces:*

$$\|x\|^2 - \delta^2 = \sum_{i=1}^n |<x, u_i>|^2$$

Lema 1.0.2. *Sea $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ ortonormal, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^\infty |<x, u_i>|^2 \ \forall x \in H$*

[1] xd

Proposición 1.2. *$\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ ortonormal en H, la función:*

$$\Lambda : H \to \ell^2 \ \Lambda(x) = (< x, u_i >)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

Demostración

$(\xi_n) \in \ell^2$ encontramos $x \in H$: $\Lambda(x) = (\xi_n)$. Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n u_n \to < \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m >$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

Teorema 8. ***(de la base hilbertiana)***

Para $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ conjunto ortonormal en H (espacio de Hilbert). Son equivalentes:

1. *$\{u_1, u_2, ...\}$ es ortonormal maximal.*
2. $\overline{\text{span}\{u_1, ...\}} = H$
3. *$\forall x \in H$ se tiene $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > u_n$ en H*
4. *$\forall x \in H$, $\forall y \in H$, se tiene $< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > \overline{< y, u_n >}$*
5. *$\forall x \in H$, se tiene $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, u_n > |^2$*

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

Demostración

Te la miras en el libro, crack. (puede entrar en el examen)

□

Definición 1.3. *A una base como la anterior se le llama **base hilbertiana**. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.*