

Apuntes de Análisis Funcional

Paco Mora

29 de noviembre de 2022

Yo qué sé qué es esto

1.1 - Introducción

Definición 1.1. *Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.*

Teorema 1.1. (Baire)

Sea (X, d) espacio métrico completo $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abiertos de en X , $\overline{G_r} = X \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

//Repaso de la relación de orden

Teorema 1.2. Principio de la buena ordenación Para todo conjunto S , existe una relación de orden \leq tal que (S, \leq) está bien ordenado, \leq es un buen orden.

Teorema 1.3. Lema de Zorn

Si (P, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para C , cadena, existe $c \in P$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in C$), entonces P tiene un elemento maximal (existe $m \in P$ tal que si $\leq x$ entonces $x = m$)

Teorema 1.4. Principio Maximal de Hasudorff

Cada conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) contiene una cadena maximal.

Teorema 1.5. *Son equivalentes:*

1. *El principio Maximal de Hasudorff*
2. *Lema de Zorn*
3. *Principio de la buena ordenación*
4. *Axioma de elección*

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

Teorema 1.6. *De la mejor aproximación*

Dado $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio de Hilbert y $C \subset H$ cerrado y convexo. Sea $x_0 \notin C$. Entonces existe un único elemento $c_0 \in C$ tal que $\|x_0 - c\| = \inf\{\|x_0 - c\| : c \in C\}$

Demostración

Tomemos una sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $c_n \in C$ de forma que se verifique

$$\alpha \quad \|c_n\| \quad \alpha + \frac{1}{n}$$

Si c_n fuera de Cauchy, existe $c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Probemos que (c_n) es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

$$\text{Como } \underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de C para el punto medio entre c_n y c_m :

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que $\|c_n - c_m\| \rightarrow 0$.

□

Teorema 1.7. *(de la proyección)*

Sea M un subespacio cerrado del Hilbert H , entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas $P, Q : H \rightarrow H$ tales que $P(H) = M$ y $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : \langle y, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\}$ y $x = Px + Qx \ \forall x \in H$

Además se verifica:

- $x \in M \implies Px = x, Qx = 0; x \in M^\perp \implies Px = 0, Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ (Pitágoras)

Como consecuencia $H = M \oplus M^\perp$

Demostración

Sea $x \in H$, $x + M$ cerrado y convexo, llamemos Qx al único elemento en $x + M$ de norma mínima y definimos $Px = x - Qx$. Vemos que $Qx \in M^\perp$, $\langle z, y \rangle = 0 \forall y \in M$. Aplicando que $Qx \equiv Z$ tiene norma mínima en $x + M$ tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 = \langle z, z \rangle \leq \underbrace{\|z - \alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} = \langle z - \alpha y, z - \alpha y \rangle = \cancel{\langle z, z \rangle} - \bar{\alpha} \langle z, y \rangle - \alpha \langle y, z \rangle = \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora $\alpha = \langle z, y \rangle$ y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$, luego $\text{Im}(Q) \subset H^\perp$. Como además $M \cap M^\perp = \{0\} \implies x = Px + Qx$, entonces $H = M \oplus M^\perp$.

Análogamente sale el resto de los enunciados¹.

□

Lema 1.8. $M \subset H$ subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert H . Entonces $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$, $\langle x_0, m \rangle \geq 0 \forall m \in M$

Demostración

Como $H \neq M \implies M^\perp \neq \{0\}$

$\{d_n : n = 1, 2, \dots\}$ numerable y denso en H

Tomamos entonces una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ tal que:

$$\text{span}\{d_1, \dots, d_n, \dots\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$$

□

Definición 1.2. *Conjunto ortonormal* $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots\}$ en $H : \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$. Tenemos además que son LI:

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i 0_i, \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \implies c_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Proposición 1.9. $M = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset H$, $P_M(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$. Si $d = \text{dist}\{x, M\}$ entonces:

$$\|x\|^2 - d^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

Lema 1.10. Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ ortonormal, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2 \forall x \in H$

¹xd

Proposición 1.11. $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ ortonormal en H , la función:

$$\Lambda : H \rightarrow \ell^2 \quad \Lambda(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

Demostración

$(\xi_n) \in \ell^2$ encontramos $x \in H$: $\Lambda(x) = (\xi_n)$. Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i u_i \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m \rangle$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

Teorema 1.12. (de la base hilbertiana)

Para $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ conjunto ortonormal en H (espacio de Hilbert). Son equivalentes:

1. $\{u_1, u_2, \dots\}$ es ortonormal maximal.
2. $\overline{\text{span}\{u_1, \dots\}} = H$
3. $\forall x \in H$ se tiene $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$ en H
4. $\forall x \in H, \forall y \in H$, se tiene $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle y, u_n \rangle}$
5. $\forall x \in H$, se tiene $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

Demostración

Recomiendo mirar el libro. $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea $M_n = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, sabemos que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$ y que:

$$\forall x \in H, P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{\text{dist}(x, M_n)^2}_{=: \delta_n \rightarrow 0} + \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_{\varepsilon} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n : \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon, x_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

4 \Rightarrow 5

Directo.

5 \Rightarrow 2

Por la desigualdad de Bessel.

□

Definición 1.3. A una base como la anterior se le llama **base hilbertiana**. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.

Lema 1.13. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces E es finito dimensional.

Para E no completo, no es cierto.

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

Teorema 1.14. Sea $\langle \cdot \rangle$ un producto escalar en $C([a, b])$ con $\|\cdot\|_\infty$ más fina que $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{\phi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad \forall f \in C[a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \Rightarrow \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_{\langle \cdot \rangle} < \varepsilon$$

1.1.1. Series de Fourier

Definición 1.4. Un polinomio trigonométrico es una función de la forma

$$h(t) = \sum_{n=0}^m \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Lema 1.15. Si h_1, h_2 son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.

Lema 1.16. $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico q_ε tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

Ejercicio 1.

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \cos(nt), \quad u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \sin(mt), \quad m = 1, 2, \dots$$

Es ortonormal en $(C[a, b], \langle \cdot \rangle)$

1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

Proposición 1.17. *Dado $F : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Existe una única medida (F función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t) dF(f)$$

Teorema 1.18. Teorema de Riesz.

Buscar en el libro.

Definición 1.5. Topología débil del espacio de Hilbert

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert.

$$\mathbb{K} \leftarrow H : x_0, \quad \varepsilon > 0, \quad t_1, \dots, t_p \in H$$

$$\langle x, x_0 \rangle \leftarrow x$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, \dots, t_p) = \{z \in H : |\langle t_i, x_0 - z \rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$$

Teorema 1.19. Alaoglo-Bourbaki

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Entonces B_H es un subconjunto débilmente compacto.

Demostración

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana $\{e_n\}$ de H y tomemos $(v_n) \subseteq B_H$.

Notemos primero que $|\langle e_p, v_n \rangle| \leq 1 \quad \forall p, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión (v_n) , $v_n \mapsto \langle \cdot, v_n \rangle$ y utilizando la base, este producto puede expresarse como $\sum_{p=1}^{\infty} \langle x, e_p \rangle e_p$ para cierto x .

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros $n_1 < n_2, \dots, n_k < \dots$ de forma que $(\langle e_p, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$ es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces $S = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(\langle s, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$ es convergente $\forall s \in S$. Falta ver que sea convergente para todo punto de $H = \overline{S}$ que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

1.3 - Familias de funciones equicontinuas

Definición 1.6. Familia de funciones (uniformemente) equicontinua

Una sucesión de funciones continuas $(f_i)_{i \in I}$ se dice que es equicontinua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$ tal que $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$. Es decir, que el δ necesario es el mismo para todas las funciones.

De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:

Una sucesión de funciones uniformemente continuas $(f_i)_{i \in I}$ se dice que es uniformemente equicontinua en si $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$ tal que $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Es decir, que el δ necesario es el mismo para todas las funciones.

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

Teorema 1.20. Sea (K, d) un espacio métrico y $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, T_p)$ (T_p es la topología producto).

Si ϕ es (unif.) equicontinua, entonces ϕ^{-T_p} son (uniformemente) continuas

Teorema 1.21. Si ϕ es equicontinua, entonces en ϕ coinciden las topologías T_p (producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto $D \subseteq K$ denso ($\overline{D} = K$).

Teorema 1.22. De Ascoli

Sea $\phi \subseteq C(K)$ y sea (K, d) métrico compacto. Entonces ϕ es relativamente compacto en $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$ es equicontinuo y $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$ acotado $\forall x \in K$

Teorema 1.23. Lax- Milgram

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ tal que:

1. $B(\cdot, y)$ es lineal $\forall y \in H$ y $B(x, \cdot)$ es lineal conj., es decir, B es sesquilineal.
2. B es acotada: $\exists c > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \forall x, y \in H$
3. B es fuertemente positiva: $\exists b > 0$ tal que $|B(x, y)| > b\|y\|^2, \forall y \in H$

Entonces para cualquier forma lineal y continua $\phi : H \rightarrow \mathbb{K}$ existe un único $y \in H$ tal que $\phi(x) = B(x, y) \forall x \in H$

Demostración

Para y fijo la aplicación $x \mapsto B(x, y)$ es lineal continuo. Por el teorema de Riesz, $\exists z \in H$ tal que $B(x, y) = \langle x, z \rangle \forall x \in H$ y sea T la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que $T(H)$ es un subespacio de H . Veamos que $T(H) = H$ y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1. $T(H)$ es cerrado.

Sea $z_n = Ty_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$

$$B(x, y_n - y_m) = \langle x, z_n - z_m \rangle \forall x \in H$$

$$b\|y_n - y_m\|^2 \leq B(y_n - y_m, y_n - y_m) = \langle y_n - y_m, z_n - z_m \rangle \leq \|y_n - y_m\| \|z_n - z_m\|$$

Luego (y_n) es de Cauchy y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ y tenemos que:

$$\langle x, z_n \rangle = B(x, y_n) \rightarrow B(x, y) = \langle x, z \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x \in H$$

2. Supongamos $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : \langle x_0, z \rangle = 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) = \langle x_0, z \rangle \forall y \in H, B(x_0, x_0) = 0$ si $x_0 \neq 0$

□

1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n abierto y acotado.

Lo que queremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplo 2. Tomemos $n = 2$, en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.

Idea para buscar una solución

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2$$

Definición 1.7. $C^2(\overline{\Omega})$

Denotamos a $C^2(\overline{\Omega})$ como las funciones dos veces derivables en el interior de Ω con segunda derivada continua en $\overline{\Omega}$.

Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por $C_0^2(\overline{\Omega})$.

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

Teorema 1.24. Teorema de Gauss

Dada Ω suficientemente regular:

$$\int_{\Omega} \partial x_j w dx = \int_{\Omega} w n_j d\theta$$

Proposición 1.25. Si existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que minimiza a $D(u)$ entre todas las funciones $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $u|_{\partial\Omega} \equiv f$, entonces u es armónica ($\Delta u = 0$).

Demostración

En $C^2(\overline{\Omega})$, definimos $\langle \cdot \rangle_D$ por:

$$\langle F, G \rangle_D = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora $D(u) = \langle u, u \rangle_D$.

Si $v \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica que $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(u + \varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D$$

Cancelando $D(u)$ tenemos:

$$\varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un ε arbitrario, tenemos que $\langle u, v \rangle_D = 0 \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$ con soporte compacto, luego:

$$0 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} (\Delta u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \text{ con } v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle \Delta u, v \rangle_{L^2} = 0$ para cualquier v de un denso, luego $\Delta u = 0$

□

Teorema 1.26. Desigualdad de Poincaré

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \|f\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_1$$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

Lema 1.27.

1. $H_1^0 \subseteq H_0$
2. $\forall v \in H_1^0, \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j \rangle_0 = - \langle \frac{\partial z}{\partial x_j}, v \rangle_0$. Es decir:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. Si $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}$

A v_j se le llama $\frac{\partial v}{\partial x_j}$

Demostración

Sea $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v_n \rightarrow v \in H_1^0$ en $\|\cdot\|_1 \implies \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ y converge a una función a la que llamamos $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré, (v_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_0$ y su límite no podrá ser otro que v . La fórmula:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

Viene dada por el paso al límite de la expresión dada por el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} z \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = - \int_z^{x_j} v_n$$

□

Lema 1.28. Variacional

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u v dx = 0 \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Entonces $u = 0$ en $L^2(\Omega)$ y $u = 0 \forall x \in \Omega$

Teorema 1.29.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado. Sea $f \in L^2(\Omega) \equiv H_0$. Entonces existe una **solución débil** de la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En el siguiente sentido:

Existe una única función $v \in H_1^0$ donde que $\langle u, f \rangle = -\langle u, \Delta v \rangle \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$

Lo rojo aún "está por aclarar"

Demostración

Si $f \in L^2 \implies \phi : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua en H_0 por Riesz. Aplicando la des. de Poincaré:

$$|\phi(n)| \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_0 \|u\|_1 \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \phi \text{ es continua en } (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$$

Entonces podemos extender ϕ al completado, H_1^0 . A esta forma lineal extendida le aplicamos el teorema de Riesz.

Existirá entonces una única $v \in H_1^0$ tal que $\phi(u) = \langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle_0$ para todo $u \in H_1^0$.

Si tomamos $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle_0 = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \stackrel{\text{Int. partes}}{=} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \int_{\Omega} -u \sum_{j=1}^N v_{jj}$$

Donde las parciales son en el sentido generalizado visto en el lema. □

Definición 1.8. Definición de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y su topología

Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ compactos, definimos $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$

En este espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$, definimos una topología a partir de las seminormas utilizadas en la convergencia uniforme de los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Lo vemos en detalle:

Los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ son funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que su soporte está en K y se dice que $h_n \rightarrow h$ si $h_n \rightarrow h$ de forma uniforme y sus diferenciales convergen de forma uniforme a la de $h(x)$, es decir:

$$D^\alpha h_n(x) \rightarrow D^\alpha h(x) \text{ unif. } \forall \alpha = (a_1, \dots, a_N)$$

1.5 - Problemas variacionales cuadráticos

Teorema 1.30. Principal de los problemas variacionales cuadráticos

Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, acotada, continua^a y fuertemente positiva^b y $b : H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Sea $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) - b(x) \forall x \in H$$

Llamada forma bilineal cuadrática.

Entonces se verifica la siguiente equivalencia:

$$\inf\{F(z) : z \in H\} = F(x_0) \iff B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$$

Además, existe un único x_0 que lo verifica.

$$\begin{aligned} &^a \|y\| \|x\| \geq |B(x, y)| \\ &^b B(x, y) \geq C \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \end{aligned}$$

Notemos que la norma $\|\cdot\|$ y el módulo de B son normas equivalentes debido a que B es continua y fuertemente positiva.

Demostración

Demostrado en 1.7.1. del libro. Aquí hay un boceto de la demostración:

Dado $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$, se tiene:

$$\begin{aligned} F(x+ty) &= \frac{1}{2}B(x+ty, x+ty) - b(x+ty) = \frac{1}{2}(B(x, x) + B(x, ty) + B(ty, x) + B(ty, ty)) - (b(x) + tb(y)) = \\ &= \frac{1}{2}(B(x, x) + 2B(x, ty) + t^2 B(y, y)) - (b(x) + tb(y)) = \frac{t^2}{2}B(y, y) + t(B(x, y) - b(y)) + \frac{1}{2}B(x, x) - b(x) \end{aligned}$$

Si el x_0 es donde se alcanza el extremo inferior, se tiene que:

$$F(x_0) \leq \frac{t^2}{2} B(y, y) + t \left(B(x_0, y) - b(y) \right) + \underbrace{\frac{1}{2} B(x_0, x_0) - b(x_0)}_{F(x_0)}$$

Y entonces $B(x_0, y) = b(y)$. (???)

"El recíproco se hace con la misma expresión y derivando"

Para la unicidad, basta con aplicar el teorema de Riesz para el producto escalar \langle, \rangle_B

□

Método 1. Método de aproximación de Ritz-Galerkin

Dado $B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$, y tomando $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$ con cada H_n finito dimensional.

Tomamos $\text{span}\{e_j^n : j = 1, 2, \dots, N\}$ a una base de cada H_n

Al problema P presentado en el anterior teorema (la parte izquierda de la equivalencia) restringido a H_n queda:

$$P|_{H_n} \equiv B(x, y) = h(y) \forall y \in H_n \longrightarrow B(x, e_j^n) = b(e_j^n) = b(e_j^n) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Entonces si la solución a cada problema es x_n , se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Demostración

$$B(x_n, y) = b(y) \quad \forall y \in H_n$$

$$B(x_0, y) = b(y) \quad \forall y \in H$$

Restando llegamos a:

$$0 = B(x_n - x_0, y) \quad \forall y \in H_n$$

Luego el $x_n - x_0$ es la proyección ortogonal sobre H_n asociada a \langle, \rangle_B de x_0 sobre x_n . Entonces es la mejor aproximación sobre H_n como $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

□

1.6 - Operaciones diferenciales y soluciones débiles

Definamos el operador:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

Con:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Problema:

Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ encontrar u tal que $L(u) = f$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

Proposición 1.31.

Adjunto de $L^* = \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$ verifica que:

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^*\psi \rangle \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observación

$\forall f \in L^2(\Omega)$, si $u \in C^n(\Omega)$ verifica que $Lu = f$, entonces $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Definición 1.9. Solución débil

Si $f \in L^2(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ es una **solución débil** de la ecuación $Lu = f$ siempre que $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Ejemplo 3. En \mathbb{R} , $L = \frac{d}{dx}$ con $\Omega = (0, 1)$, $u, f \in L^2(\Omega)$

Entonces $Lu = f$ en sentido débil sii $\exists F \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continua y tal que $F(x) = u(x)$ para casi todo punto (p.c.t) $x \in [0, 1]$ y $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in (0, 1)$

Hay otros ejemplos en el libro (sección 1.10)

1.7 - Teorema de Radon-Nykodin

Teorema 1.32. Sea Ω es de medida. Σ una σ -álgebra y $\mu, \nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ medidas finitas.

Si ν es absolutamente continua respecto de μ , es decir, $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$.

Entonces existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrable respecto a μ tal que:

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \quad \forall E \in \Sigma$$

Demostración

(Prueba de Von-Neumann)

Sea $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu + \nu)$, entonces podemos definir la forma lineal $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = \int x d\mu$ es lineal y continua para la norma asociada $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ y, por tanto, lo es para la norma asociada $\|\cdot\|_{L^2(\mu+\nu)}$ y aplicando el teorema de Riesz, existe una única función $y \in L^2(\mu + \nu)$ tal que:

$$\int x d\mu = \phi(x) = \langle x, y \rangle_{L^2(\mu+\nu)} = \int_\Omega xy d(\mu + \nu) = \int_\Omega xy d\mu + \int_\Omega xy d\nu$$

Luego tenemos:

$$\int_{\Omega} x(1-y)d\mu = \int_{\Omega} xy d\nu \quad \forall x \in H$$

Ejercicio: Probar que $0 < y \leq 1$ p.c.t con relación a μ .

Definimos entonces $g = \frac{1-y}{y}$. Entonces:

$$\int_{\Omega} (xy)gd\mu = \int_{\Omega} (xy)d\nu \quad \forall x \in H$$

$$\int_{\Omega} ugd\mu = \int_{\Omega} ud\nu \quad \forall x \in H, \quad u = xg$$

Haciendo $u = \chi_E$ tenemos:

$$\int_{\Omega} gd\mu = \int_{\Omega} \chi_E g d\mu = \int_{\Omega} \chi_E d\nu = \nu(E)$$

□

Operadores Lineales

2.1 - Introducción

A no ser que se diga lo contrario, en este tema denotaremos a X como un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}

Definición 2.1. *Norma de un operador lineal y $\mathcal{L}(X, Y)$*

Sea X, Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ lineal y continua. Definimos la norma de T como:

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in B_X^a\}$$

Al espacio normado $(\{T : X \rightarrow Y \text{ lineal continuo}\})$ lo denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$. Este espacio es completo cuando lo es Y .

^aBola unidad

Observación

Esta norma es la menor constante tal que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \forall x \in X$

2.1.1. Nota sobre limites iterados

Cuando tenemos una sucesión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots & \rightarrow & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots & \rightarrow & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & & & \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos entonces cuando se tiene que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

Proposición 2.1. Si existe el límite doble, $\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn}$, entonces se da la igualdad.

Teorema 2.2. Si se converge por filas o por columnas se da la convergencia **uniforme**, entonces se da la igualdad.

Observación

Lo realizado sobre límites iterados también es válido para redes y filtros.

2.2 - Inversión de operadores lineales

En esta sección veremos que los operadores invertibles en dimensión infinita forman un conjunto abierto (como ocurre en \mathbb{R}^n).

En general, estudiaremos la invertibilidad de un operador $T : X \rightarrow X$ (X un Hilbert) estudiando la de $(T - \lambda Id)$. En ese caso, λ será un valor propio. Obteniendo los vectores propios asociados $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Entonces si estos vectores forman una base Hilbertiana, entonces $X = \text{span}\{e_j\}$ y $\forall x \in H$:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \lambda_j e_j$$

Cuando tengamos esto, podremos resolver la ecuación $T(x) = y$, donde queremos obtener la x a partir de T e y .

Esto lo podremos hacer para un operador compacto (la bola unidad va a un conjunto (relativamente) compacto) y simétrico.

Teorema 2.3. De Von Neumann

Si $K \in \mathcal{L}(X)$ invertible, $L, A \in \mathcal{L}(X)$ y sea $L = K - A$. Entonces si $\|A\| < \frac{1}{\|K^{-1}\|}$ entonces L es invertible.

Demostración

Caso 1: $K = Id$. Probaremos entonces que la bola de radio 1 está dentro de los elementos invertibles.

Consideremos $Id - B$ con $\|B\| < 1$. Veremos que esta diferencia es invertible.

Definimos $S = \sum_{i=0}^{\infty} B^i$. Veremos que esta serie es convergente.

Supongamos que la serie es *normalmente* convergente, es decir, $\sum \|B^n\| < \infty$.

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n \text{ es de Cauchy} \implies \text{es convergente}$$

La serie es *normalmente* convergente ya que dados dos operadores S, T tenemos $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$. Entonces podemos la serie para ver que es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n < \infty$$

Siendo la última convergente al ser una serie geométrica (recordemos que $\|B\| < 1$)

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$. Tenemos que $B \circ S = B \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n \right)$. Como la composición es una función bilineal continua, podemos pasar B a dentro del sumatorio:

$$B \circ S = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B)S = Id$$

De igual forma tenemos:

$$S \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies S(Id - B) = Id$$

Caso 2: Como K es invertible, tenemos que: $(K - A) = K(Id - K^{-1}A)$ será invertible cuando es composición de invertibles¹.

En primer lugar, K es invertible, y tomando $B = K^{-1}A$, tenemos que:

$$\|B\| = \|K^{-1}A\| \leq \|K^{-1}\| \|A\| < 1$$

Y usando el caso 1, tenemos que $(Id - K^{-1}A)$ es invertible $\implies K - A$ es invertible.

Además, utilizando ambos casos podemos escribir $(K - A)^{-1}$ como:

$$(K - A)^{-1} = \left(K(Id - K^{-1}A) \right)^{-1} = (Id - L^{-1}A)^{-1} \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1}A)^n K^{-1} \quad (2.1)$$

□

Ejercicio 1. *Ejercicio propuesto*

Dado un espacio normado $(Z, \|\cdot\|)$, es completo sii toda serie normalmente convergente en Z es convergente en Z .

Ejercicio 2. *Ejercicio propuesto*

$\mathcal{L}(X)$ es completo.

Definición 2.2. *Resolvente y espectro*

Dado $M : X \rightarrow X$ se definen el resolvente y el espectro respectivamente como:

$$\rho(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \text{ es invertible}\}$$

$$\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \text{ NO es invertible}\}$$

¹Queda como ejercicio demostrarlo

Teorema 2.4. Dado $M \in \mathcal{L}(X)$, se tiene:

1. $\rho(M)$ es abierto.
2. $\rho(M) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que $\lambda \mapsto (\lambda Id - M)^{-1}$ es analítica.

Esta prueba, por algún motivo, demuestra ambos puntos:

Demostración

Si $\lambda \in \rho(M)$, podemos aplicar el teorema de Von Neumann para $K = \lambda Id - M$ y $A = \lambda Id$ y tendremos que:

$(\lambda - h)Id - M = (\lambda Id - M) - hId$ será invertible si h es suficientemente pequeño

La fórmula (2.1) nos da:

$$\left((\lambda - h)Id - M\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda Id - M)^{-1}h\right)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda Id - M)^{-1}\right)^{n+1} h^n \text{ en } \mathcal{L}(X) \quad (2.2)$$

Siendo esta serie convergente cuando $|h| < \|\lambda Id - M^{-1}\|^{-1}$ (la condición que necesitábamos para aplicar el teorema).

□

Teorema 2.5. Gelfund

$\forall M \in \mathcal{L}(X)$, el espectro $\sigma(M)$ es compacto no vacío.

Demostración

Tomamos una bola $B(0, \|M\|)$, entonces tenemos $\sigma(M) \subseteq B(0, \|M\|)$.

Sea $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $|\xi| > \|M\| \implies \xi \notin \sigma(M)$ (por (2.1) y usando el Teorema de Von Neumann 2.3). Para aplicar el teorema, tomemos $B = \xi^{-1}M$. Entonces (2.1) nos da:

$$(\xi Id - M)^{-1} = \xi^{-1}(Id - M\xi^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \xi^{-(n+1)}$$

Esta serie converge cuando $\|M\xi^{-1}\| < 1$, es decir, cuando $|\xi| > \|M\|$. Por lo tanto, $\sigma(M)$ es compacto.

Vemos ahora que es no vacío por reducción al absurdo. Supongamos $\rho(M) = \mathbb{C}$ y definimos la función entera:

$$\begin{aligned} \phi : \rho(M) = \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\mapsto (\lambda Id - M)^{-1} \end{aligned}$$

Esta ϕ verifica que $\phi'(\lambda) = Id$ debido a (2.2).

Si $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| = 0 \implies \phi$ es constante por el Teorema de Liouville, lo que nos lleva a una contradicción.

Vemos este límite, tenemos que:

$$\|\phi(\lambda)\| = \|(\lambda Id - M)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(Id - M\lambda^{-1})^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \|M\lambda^{-1}\|^n = \frac{1}{|\lambda|(1 - \|M\lambda^{-1}\|)} \rightarrow 0$$

□

Dado un operador lineal $T : H \rightarrow H$ y fijado $y \in H$, tenemos una aplicación lineal inducida ϕ :

$$\begin{aligned} \phi_{Ty} : H &\rightarrow H \\ y &\mapsto \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

Aplicando entonces Riesz, tenemos un único operador lineal T^*y tal que $\phi_{Ty}(x) = \langle x, T^*y \rangle \forall y \in H$. Luego $\forall x, y \in H$, llegamos a la igualdad

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (2.3)$$

Definición 2.3. Adjunto de un operador

A T^* definido como en (2.3) lo llamamos el **adjunto** de T .

Necesitaremos ahora algunas propiedades sobre la norma de un operador lineal.

Lema 2.6. Dados $f, g \in H$:

- $\|T\| = \sup\{\langle Tf, g \rangle : \|f\|, \|g\| \leq 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf, g \rangle|, \|g\| \leq 1\} : \|f\| \leq 1\}$
- $\|T\| = \|T^*\|$
- Si $T = T^*$ entonces $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$

Demostración

1.

Se utiliza la segunda igualdad dada.

2.

Ejercicio.

3.

Sea $M := \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$, $M \leq \|T\|$ es "directo". Vemos la otra desigualdad:

$$\begin{aligned} |\langle Tf, g \rangle| &= \frac{1}{4} \left| \langle T(f+g), f+g \rangle - T(f-g), f-g \rangle \right| \leq \frac{1}{4} \left| \langle \frac{T(f+g)}{\|f+g\|}, \frac{f+g}{\|f+g\|} \rangle \|f+g\|^2 \right| + \left| \langle \frac{T(f-g)}{\|f-g\|}, \frac{f-g}{\|f-g\|} \rangle \|f-g\|^2 \right| \\ &\leq \frac{M}{4} (\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = \frac{M}{4} (2\|f\|^2 + 2\|g\|^2) \end{aligned}$$

Tomando supremos llegamos a la desigualdad.

□

Proposición 2.7. Sea $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ una base hilbertiana y sea la sucesión $(\lambda_k) \in \mathbb{C}$ acotada. Tomamos T :

$$\begin{aligned} Te_k &:= \lambda_k e_k \\ T(X) &= \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k \rangle \lambda_k e_k \end{aligned}$$

Demostrar:

²Se utiliza que $T = T^*$, queda como ejercicio.

1. $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}$
2. $T^*(e_k) = \overline{\lambda_k} e_k$
3. $T = T^* \iff \lambda_k \in \mathbb{R}$
4. T es proyección ortogonal $\iff \lambda_k \in \{0, 1\} \forall k$
5. T es compacto $\iff \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$
6. $T(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \lambda_k \overline{e_k}$

Demostración

Ejercicio.

□

2.3 - Operadores Compactos

Definición 2.4. Operador compacto

Sea H espacio de Hilbert, B_H una base hilbertiana de H con $B_H = \{v \in H : \|v\| \leq 1\}$ y $T : H \rightarrow H$ un operador lineal.

T se dice **compacto** si $T(B_H)$ es relativamente compacto, es decir, si $\forall (f_n)$ sucesión acotada en H , $T(f_n)$ tiene una subsucesión convergente.

Definición 2.5. $\mathcal{K}(H)$

Definimos $\mathcal{K}(H) = \{S : H \rightarrow H \text{ lineal, continuo y compacto}\}$.

Teorema 2.8.

Sea H un Hilbert separable y $T : H \rightarrow H$ lineal y continuo. Entonces:

1. $S : H \rightarrow H$ es compacto $\implies S \circ T$ y $T \circ S$ son compactos. ($\mathcal{K}(H)$ es un ideal de $\mathcal{L}(H)$)
2. Si $T_n : H \rightarrow H$ es compacto $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ entonces T es compacto.
3. Si T es compacto entonces $\exists T_n : H \rightarrow H$ operadores de rango finito tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$
4. T es compacto si y solo si T^* lo es.

Demostración

Los apartados 1,2 aún no están incluidos.

3.

Tomamos $\{e_x\}$ b.h. en H y la función:

$$Q_n : H \rightarrow \overline{\text{span}\{e_k : k > n\}}$$

$$g \mapsto Q_n(g) = \sum_{i>n} \langle g, e_i \rangle e_i$$

Notemos entonces que $\|Q_n(g)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 \rightarrow 0$ con $n \rightarrow +\infty$.

Afirmamos que esta convergencia no es solo puntual, sino que $\|Q_n \circ T\| \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

Para demostrarlo, definimos $P_n : H \rightarrow \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ como el proyector ortogonal. Y tomamos Q_n

tal que $I_n = P_n + Q_n$, al componer con T tenemos:

$$Id = P_n + Q_n \implies T = \underbrace{P_n \circ T}_{\rightarrow T} + \underbrace{Q_n \circ T}_{\rightarrow 0}$$

Completar la demostración de la afirmación y del teorema como ejercicio. Cuidado porque lo puede preguntar

4.

Ejercicio.

□

Ejemplo 3.

Sea $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y un operador $K : f \mapsto K(f)$ una función tal que:

$$K(f)(s) := \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

Si k continua entonces $K : L_1([a, b]) \rightarrow C[a, b]$ es compacto.

Demostración

Vemos que $K(B_{L^1})$ es relativamente compacto en $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\|K(f)\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_{L^1} \implies K(B_{L^1}) \text{ compacto}$$

Si vemos además que $K(B_{L^1})$ es uniformemente equicontinua y aplicando Ascoli terminaremos la prueba.

$$|K(f)(s) - K(f)(s')| = \left| \int_a^b (k(s, t) - k(s', t)) f(t) dt \right| \leq \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)| |f(t)| dt \leq \varepsilon \|f\|_{L^1}$$

Aplicando la continuidad uniforme de k

□

Como corolario, tenemos que:

$$k \text{ continua} \implies K : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b] \text{ es compacto}$$

Observación

$$\text{Si } k \in L^2[\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d] \implies K : L^2[\mathbb{R}^d] \rightarrow L^2[\mathbb{R}^d]$$

Con $K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y) f(y) dy$, entonces K está bien definido, es compacto y $\|K\|^2 \leq$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |k(x, y)|^2 dx dy$$

Ejemplo 4.

Recordemos el operador de Laplace (o laplaciano) en \mathbb{R}^N :

$$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Y se tiene que hay solución para el problema de Dirichlet:

$$\forall f \in L^2(\Omega) \exists! u \in H \text{ tq } \Delta u = f \text{ en } \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0$$

Entonces el operador que para cada $f \in L^2(\Omega)$ da la solución del problema de Dirichlet es un operador compacto. Para demostrar esto necesitamos el teorema de Rellich, 2.9

Teorema 2.9. Rellich

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera regular. Sea $\Phi \subseteq L^2(\Omega)$ tales que $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \forall j, \forall \phi \in \Phi$ y se cumple:

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq K, \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq K \forall j, \forall g \in \Phi$$

Entonces ϕ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$

Demostración

No se ha dado (ni se pregunta).

□

Teorema 2.10. Hilbert-Schmidt "Este teorema lo pregunto sí o sí"

Sea H un espacio de Hilbert (separable) y $T : H \rightarrow H$ operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ en H de vectores propios $Tv_k = \lambda_k v_k$ con $\lambda_k \in \mathbb{R} \forall k$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$

Vamos a demostrar este teorema por partes.

Proposición 2.11. Si $T = T^*$ en H y $Tv = \lambda v, v \neq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración

Como $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$

□

Proposición 2.12. Para un operador copmacto $T : H \rightarrow H$ y $\forall \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $\text{Ker}(T - \lambda Id)$ es finito dimensional, es decir, los subespacios propios son finito dimensionales.

Demostración

De lo contrario, $\exists(\phi_n)$ conjunto ortonormal infinito en $\text{Ker}(T - \lambda Id) \implies \{T(\phi_n)\}_{n=1}^\infty$ debería tener

una subsucesión convergente (T es compacto). Pero además:

$$T\phi_n = \lambda\phi_n \implies \|\lambda\phi_n - \lambda\phi_m\| = \lambda\|\phi_n - \phi_m\| = \lambda\sqrt{2} \quad \forall n \neq m$$

Si esto último lo aplicamos a la subsucesión convergente:

$$T\phi_{n_k} = \lambda\phi_{n_k} \implies \|\lambda\phi_{n_k} - \lambda\phi_{n_{k'}}\| = \lambda\|\phi_{n_k} - \phi_{n_{k'}}\| = \lambda\sqrt{2} \quad \forall k \neq k'$$

Entonces la subsucesión no es convergente y llegamos a una contradicción. □

Proposición 2.13. Si T es compacto y autoadjunto, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio de T

Demostración

Recordemos que en un operador autoadjunto, $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$. Buscamos una solución a este problema de optimización.

Sea $(f_n) \subseteq B_H$ tal que $\langle Tf_n, f_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ y $|\lambda| = \|T\|$. Como $(T(f_n))$ tendrá una subsucesión convergente $T(f_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \in H$. Afirmamos que g es vector propio asociado a λ

Demostramos ahora esta afirmación. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 &= \langle Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}, Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k} \rangle = \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle - 2\lambda \langle f_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle + \lambda^2 \langle f_{n_k}, f_{n_k} \rangle = \\ &= \|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle + \lambda \|f_{n_k}\|^2 \leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle + \lambda^2 \rightarrow \|T\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Entonces las sucesiones (Tf_{n_k}) y (λf_{n_k}) son equivalentes y como $Tf_{n_k} \rightarrow g$, entonces $\lambda f_{n_k} \rightarrow g$, luego:

$$T(g) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda f_{n_k}\right) = \lambda T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}\right) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} T(f_{n_k}) = \lambda g$$

Y $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio. □

Demostramos ahora el Teorema de Hilbert-Schmidt.

Demostración

Sea $S := \overline{\text{span}\{v : v \text{ es vector propio asociado a algún valor propio}\}}$. Veremos que $S = H$.

Vamos primero al caso $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Supongamos que $S \subsetneq H$, entonces $H = S \oplus S^\perp$ y veremos que $T(S^\perp) \subseteq S^\perp$

Dado $g \in S^\perp \implies \langle Tg, g \rangle = 0$. Dado $f \in S$ tenemos $\langle f, Tg \rangle = \langle Tf, g \rangle = 0$.

Entonces tenemos que $T|_{S^\perp} : S^\perp \rightarrow S^\perp$ y por la proposición anterior, $\|T|_{S^\perp}\| \neq 0$ es valor propio, lo cual es una contradicción.

Luego T es una biyección y $S^\perp = \{0\}$, con lo que $S = H$ y H tiene una base ortonormal de vectores propios. Lo único que nos queda por ver en este caso entonces es $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, veámoslo.

Si no tendiera a 0, existirían una infinidad $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_s}, \dots$ y $|\lambda_{k_i}| > \varepsilon \quad \forall i$. Y cada valor estaría asociado con un vector v_{k_i} tal que $Tv_{k_i} = \lambda_{k_i}v_{k_i}$ y se tendría:

$$\|\lambda_{k_i}v_{k_i} - \lambda_{k_j}v_{k_j}\|^2 = \langle \lambda_{k_i}v_{k_i} - \lambda_{k_j}v_{k_j}, \lambda_{k_i}v_{k_i} - \lambda_{k_j}v_{k_j} \rangle = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2\varepsilon^2$$

Pero entonces (Tv_{k_i}) no puede tener una subsucesión convergente.

Vemos el caso en el que $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$. En este caso, $H = \text{Ker}(T) \oplus (\text{Ker}(T))^\perp$ y nos podemos restringir a $T : \text{Ker}(T)^\perp \rightarrow \text{Ker}(T)^\perp$ y aplicar el caso anterior. Entonces tenemos una base que tenemos que completar con el núcleo.

Falta un pequeño detalle, tenemos que ver que $T(\text{Ker}(T)^\perp) \subseteq \text{Ker}(T)^\perp$. Si $g \in \text{Ker}(T)^\perp$, $x \in \text{Ker}(T) \implies$, tenemos:

$$\langle x, Tg \rangle = \langle Tx, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0$$

□

De la demostración obtenemos que el proceso de diagonalización se puede hacer de forma recurrente. Sea $T : H \rightarrow H$, $\text{Ker}(T) = \{0\}$ y $(\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id)$ para $\lambda_1 = \|T\|$ o $-\|T\|$. Se da entonces que:

$$H = (\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id) \oplus (\text{Ker}(T) - \lambda_1 T)^\perp$$

Y restringimos ahora T a $(\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id)^\perp$ y su imagen será de nuevo $(\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id)^\perp$ (como al final de la demostración anterior). La norma de la restricción (o su opuesto) nos dará otro valor propio λ_2 . De esta forma recursiva se pueden obtener todos los valores propios (mirar ejercicio siguiente).

Ejercicio 5. Propuesto

Demostrar que vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

2.4 - Alternativa de Fredholm

Sea $T : H \rightarrow H$ compacto y autoadjunto, $b \in H, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Analizamos el problema $(P) : \lambda u - Tu = b, u \in H$ para un u desconocido.

Definición 2.6. Problema homogéneo asociado

Dado (P) , llamamos a $\lambda u - Tu = 0$ el problema homogéneo asociado (P_{hom}) .

Teorema 2.14. En esta situación:

$$(P) \text{ tiene solución} \iff \langle b, v \rangle = 0 \quad \forall v \text{ sol. de } (P_{hom})$$

Demostración

Por el teorema de Hilbert-Schmidt, existe una base $\{u_n\}$ hilbertiana de vectores propios con valor propio asociado λ_n y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. Entonces sabemos que:

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n \quad \forall x \in H$$

Tomamos $0 \neq \lambda \neq \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ podemos definir $(\lambda Id - T)^{-1} : H \rightarrow H$ y es un operador lineal y continuo. Vemos que si u es solución de (P) , entonces:

$$u = \lambda^{-1}(b + Tu) = \lambda^{-1} \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, u_n \rangle u_n \right)$$

Notemos además que $(\lambda - \lambda_n) \langle u, u_n \rangle = \langle (\lambda Id - T)u, u_n \rangle$ ya que:

$$\langle (\lambda Id - T)u, u_n \rangle = \lambda \langle u, u_n \rangle - \langle Tu, u_n \rangle = \lambda \langle u, u_n \rangle - \langle u, T u_n \rangle = \lambda \langle u, u_n \rangle - \lambda_n \langle u, u_n \rangle = (\lambda - \lambda_n) \langle u, u_n \rangle$$

Despejando ahora $\langle u, u_n \rangle$ y usando que $(\lambda Id - T)u = b$ y que u es solución de (P) :

$$u = \lambda^{-1} \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\langle b, u_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n \right)$$

Tomemos entonces $\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$ y analizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n$. Por la desigualdad de Bessel, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle b, u_n \rangle|^2 = \|b\|^2 < +\infty$. Y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0 \implies |\alpha_n| \leq cte \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces la siguiente serie convergente y se acota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle b, u_n \rangle|^2 \leq (cte)^2 \|b\|^2$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle b, u_n \rangle$ es convergente en H y u está bien definido.

□

Corolario 2.15. *Dado $b \in H$, $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$ y supongamos que (P) tiene una solución. Entonces podemos definir $(\lambda Id - T)^{-1} : H \rightarrow H$, operador lineal y continuo. tal que $b \mapsto u$ solución del problema (P) .*

Ejercicios

3.1 - Tema 1

Ejercicio 4. Sea $g \in C[a, b]$ y considere la forma lineal $L : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Demuestre que L es continua y calcule su norma.

Indicación. Suponer en primer lugar que g es positiva.

Tomamos la norma:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Como L es lineal, será continua sii:

$$|L(f)| \leq C\|f\|$$

Tenemos:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq M \int_a^b |g(x)|dx \leq M(b-a)\|f\|$$

Calculamos ahora la norma:

$$\|L\| = \sup\{|L(f)| : \|f\|_\infty = 1\}$$

Y tendremos:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Este será nuestro candidato a norma. Comprobemos que es realmente su supremo. En el caso $g \geq 0$ tomando $f \equiv 1$ sale de forma directa. El caso no positivo lo piensas en casa.

^aYa que g es continua en un compacto

Ejercicio 12. *Pruébese que un subconjunto de un espacio de Banach X es relativamente compacto sii para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto relativamente compacto K_ε en X tal que $K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon$*

Se tiene que si $S \subset (X, \|\cdot\|)$ Banach:

$$\overline{S} = \bigcap_{\varepsilon > 0} S + B(0, \varepsilon)$$

Se usa que en un (X, d) métrico $K \subseteq X$ es compacto \iff totalmente acotado y completo.