Apuntes de Álgebra Conmutativa

Paco Mora

24 de septiembre de 2022

Índice general

CAPÍTULO 1

Tema 1

Ejercicio 1. ***Ejercicio Propuesto***

Sea $A = \mathbb{Z}_n$, con n entero >1 y $\overline{r} \in \mathbb{Z}_n$. Demostrar:

- $\overline{r}$ *cancelable* $\iff$ $\overline{r}$ *invertible* $\iff$ $mcd(r, n) = 1$
- $\overline{r}$ *nilpotente* $\iff$ *todos los divisores primos de* n *dividen a* r*.*

La siguiente proposición generaliza el ejercicio anterior.

Proposición 1.1. *Sea A un anillo finito y sea $a \in A$. Entonces a es cancelable sii es invertible.*

Demostración

Definimos

$$\lambda_n : A \to A \qquad \lambda_n(x) = ax \ \forall x \in A$$

Es inyectiva, $\lambda_n(x) = \lambda_n(y) \iff ax = ay \implies_{a\ cancel.} x = y$

Por lo tanto, y como A es finito, λ_n es biyectiva y $1 \in Im(\lambda_n) \iff \exists b \in A \mid \lambda_n(b) = 1$

$\square$

Proposición 1.2. *A reducido $\iff$ Nil(A) = $\{$elem nilpotentes de $A\} = \{0\}$*

Demostración

$\implies$

A reducido sii $\forall a \in A$, $a^2 = 0 \implies a = 0$

$\impliedby$

Por reduc. al absurdo, supongamos $b \in Nil(A) \backslash \{0\} \implies \exists n > 0$ (mínimo) con $b^n = 0 \implies b^{n-1} \neq 0$

Pero entonces, $(b^{n-1})^2 = b^{2n-2} = 0$ y $2n - 2 \geq n$ para $n \geq 2$, luego llegamos a una contradicción.

$\square$

Ejercicio 2. ***Ejercicio Propuesto***

$\mathbb{Z}_n$ es un anillo reducido $\iff$ n es libre de cuadrados.

Demostración del 1.9(ii)

Demostración

a/b y $a/c \implies \exists b', c' \in D/\ ab' = b,\ ac' = c \ldots$ Sean ahora $r, s \in D$ arbitrarios y veamos que $a/rb + sc$

$$rb + rc = r(ab) + s(ac') = arb' = asc' = a(rb' + sc') \implies a|rb + sc \implies \cancel{b}1 = \cancel{b}(dc)$$

$\square$

Ejercicio 3. ***Ejercicio propuesto***

Sean $G_1, G_2 \subset A$. Demostrar que $(G_1)(G_2) = (G_1 \cdot G_2)$. En particular, el producto de ideales principales es un ideal principal.

Observación

$IJ \subset I \cap J$ (estricto en general: $A = \mathbb{Z},\ I = (2),\ J = (4),\ IJ = (8),\ I \cap J = (4)$)

Ejemplo 4. ***Aplicación del teorema de la correspondencia***

Los ideales de $\mathbb{Z}_n$ están en correspondencia con los divisores positivos de n.

$$\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n) \to \{d > 0 :\ d/n\}$$

Pero los ideales de $\mathbb{Z}_n$ son isomorfos a $\{I \trianglelefteq \mathbb{Z}\ :\ n\mathbb{Z} \subset I\}$ por el teorema de la correspondencia, entonces:

$$\{I \trianglelefteq \mathbb{Z}\ :\ n\mathbb{Z} \subset I\} = \{d\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} :\ n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}\} = \{d\mathbb{Z} :\ d|n\} \cong \{d > 0 :\ d/n\}$$

Proposición 1.3. ***Proposición 1.31 extendido*** *(la prueba es la de los apuntes) Sean $A, B_1, ..., B_n$ anillos y sean $g_i : A \to B_i$ homomorf. de anillos.*

1. *$\phi : A \to B_1 \times ... \times B_n$, dado por $\phi(a) = (g_1(a), ..., g_n(a))$ es un homomorf. de anillos con núcleo $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(g_i)$*
2. *Si los $\mathrm{Ker}(g_i)$ son comaximales dos a dos, entonces se verifica:*
   - a) $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(g_1) \times ... \times \mathrm{Im}(g_n)$
   - b) $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(g_1) \cdots \mathrm{Ker}(g_n)$
   - c) *Se tiene un isom. de anillos:* $\dfrac{A}{\mathrm{Ker}(g_1) \cdots \mathrm{Ker}(g_n)} \cong \mathrm{Im}(g_1) \times ... \times \mathrm{Im}(g_n)$

Demostración

1.

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A :\ (g_1(a), ..., g_n(a)) = (0, ..., 0)\} = \{a \in A :\ g_i(a) = 0\ \forall i\} = \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(g_i)$$

2.

2.b

Si los $\mathrm{Ker}(g_i)$ son comaximales dos a dos entonces:

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(g_1) \cdots \mathrm{Ker}(g_n)$$

Con lo que tenemos 2b).
2.a

Si $(b_1, ..., b_n) \in \mathrm{Im}(\phi) \implies (b_1, ..., b_n) = \phi(a) = (g_1(a), ..., g_n(a))$ para algún $a \in A \implies b_i \in \mathrm{Im}(g_i)\ \forall i$. Por tanto, $(b_1, ..., b_n) \in \mathrm{Im}(g_1) \times ... \times \mathrm{Im}(g_n)$

Si probamos ahora que $(0, ..., x_i, 0, ..., 0) \in \mathrm{Im}(\phi)\ \forall x_i \in \mathrm{Im}(g_i)$, entonces toda n-upla $(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{Im}(\phi)$ en $\mathrm{Im}(\phi_1) \times ... \times \mathrm{Im}(\phi_n)$. Como los núcleos son comaximales dos a dos.

$$\mathrm{Ker}(g_i) + (\cap_{j\neq i} \mathrm{Ker}(g_j) = A \implies 1 = a + b,\ a \in \mathrm{Ker}(g_i),\ b \in \cap_{j\neq i} \mathrm{Ker}(g_j))$$

Como $x_i \in \mathrm{Im}(g_i) \implies \exists u \in A :\ g_i(u) = x_i$, entonces:

$$x_i = 1 \cdot x_i = (a + b)g_i(u) = g_i((a + b)u)$$

Luego entonces:

$$\phi(bu) = (g_1(bu), ..., g_i(bu), ..., g_n(bu)) = (0, ..., 0, g_i(bu), 0, ..., 0)$$

$$x_i = g_i(u) = g_i(au + bu) = \cancel{g_i(a)g_i(u)} + g_i(bu)$$

Con lo que queda demostrado 2.b.
2.c.

Basta utilizar 2.a), 2.b) y el primer teorema de isomorfía.

$\square$

Definición 1.0.1. ***Conjunto inductivo***

*Un **conjunto inductivo** es un conjunto ordenado S tal que todo subconjunto totalmente ordenado no vacío tiene una cota superior en S*

Lema 1.0.1. ***Lema de Zorn***

Todo conjunto inductivo no vacío tiene un elemento maximal.

Demostración

Fijemos $I \trianglelefteq A,\ I \neq A$ ideal propio.

$$S_I = \{J \trianglelefteq A :\ J \text{ ideal propio e } I \subset J\}$$

S_I es inductivo y $\neq \emptyset (I \in S_I)$

Sea Y un subconjunto totalmente ordenado $\neq \emptyset$ de S_I. Tomo $m = \bigcup_{J\in T} J$. Porbemos que m es un ideal propio tal que $I \subset m$. Lo que implica que $m \in S_I$.

Sean $a, b \in m \implies \begin{cases} a \in \bigcup_{J\in T} J \iff \exists J \in T :\ a \in J \\ b \in \bigcup_{J\in T} J \iff \exists J' \in T :\ b \in J' \end{cases}$

Si tomamos por ejemplo que $J \subset J'$, entonces $a, b \in J' \implies a - b \in J' \implies a - b \in m$

Notemos entonces que un elemento maximal de S_I es también un ideal maximal.

$\square$

Ejercicio 5. *$I, P \trianglelefteq A$, siendo P primo. Probar que existe un primo minimal sobre I, pongamos q tal que $q \subset P$*

Lema 1.0.2. ***Lema de Krull***

A anillo, $I \trianglelefteq A$ y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo. Suponemos que $I \cap S = \emptyset$ y consideremos $\mathcal{L}_{I,S} = \{J \trianglelefteq A : \; I \subset J, \; J \cap S = \emptyset\}$. Se verifica:

1. *$\mathcal{L}_{I,S}$ es un conjunto inductivo.*
2. *Cualquier elemento maximal de $\mathcal{L}_{I,S}$ es un ideal primo.*

Demostración

1.

Hemos de probar que si $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_{I,S}$ es un subconjunto totalmente ordenado $\neq \emptyset \implies$ tiene una cota superior en $\mathcal{L}_{I,S}$.

Habría que comprobar que $\widetilde{J} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$ es un ideal.

Como tenemos que $I \subset \widetilde{J}$ y $S \cap \widetilde{J} = S \cap (\bigcup J) = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} (S \cap J) = \emptyset$

Entonces $\widetilde{J}$ es una cota superior de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{L}_{I,S}$.

2.

Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in P$. Por reducc. al absurdo, supongamos que $a \notin P$ y $b \notin P$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} P \subsetneq P + (a) \\ P \subsetneq P + (b) \end{array} \right\} \implies P + (a), P + (b) \notin \mathcal{L}_{I,S} \iff \left\{ \begin{array}{l} (P + (a)) \cap S \neq \emptyset \\ (P + (b)) \cap S \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Sean entonces $s \in (P + (a)) \cap S$ y $s' \in (P + (b)) \cap S$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} s = p + ar \\ s' = p' + br' \end{array} \right. \qquad p, p' \in P, \; r, r' \in A$$

$$ss' = (p + ar)(p' + br') = pp' + pbr' + arp' + abrr' \in P \implies P \cap S \neq \emptyset$$

Con lo que llegamos a una contradicción

$\square$

Proposición 1.4. *Sea A un anillo e $I \trianglelefteq A$ un ideal **propio**. Son equivalentes:*

1. *Si $a \in A$ y $a^n \in I$, para algún $n > 0$, entonces $a \in I$*
2. *Śi $a \in A$ y $a^2 \in I$, entonces $a \in I$*
3. *I es una intersección de ideales primos.*
4. *I es la intersección de los ideales primos minimales sobre I.*

Demostración

$1 \implies 2.$

Directa.

$2 \implies 1$

Si $n=1 \implies a' = a \in I$, podemos suponer que $a \notin I$ y que existe $n > 1$, $a^n \in I$ tal que $a^{n-1} \notin I$. Entonces tenemos:

$$(a^{n-1})^2 = a^{2n-2} = \underbrace{a^n}_{\in I}\underbrace{a^{n-2}}_{\in A} \implies (a^{n-1})^2 \in I \implies a^{n-1} \in I$$

Con lo que tenemos una contradicción y $a \in I$.

$4 \implies 3$.

Directa.

$3 \implies 4$.

Supongamos que $\exists (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ideales primos tales que $I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ I \subset P_\lambda \implies {}^1\exists Q_\lambda \text{ primo minimal sobre } I \text{ tal que } I \subset Q_\lambda \subset P_\lambda \implies$$
$$\implies I \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = I \implies I = \cap_{\lambda\in Q_\lambda}$$
$$I \subset \bigcap_{\substack{Q\in\mathrm{Spec}(A)\\ Q\ minimal\ I}} Q \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda = I$$

Con lo que tenemos 4.

$3 \implies 2$.

Si $a^2 \in I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \iff a^2 \in P_\lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda \implies a \in P_\lambda,\ \forall\lambda\in\Lambda \iff a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = I$

$1 \implies 4$.

Sean $\mathcal{Q} = \{$ideales primos minimales sobre $I\}$. Queremos probar que $I = \cap_{Q\in\mathcal{Q}} Q$. La inclusión $\subset$ es directa.

Supongamos ahora que $I \subsetneq \bigcap_{Q\in\mathcal{Q}} Q \implies$ tomamos $x \in \cap_{Q\in\mathcal{Q}} Q$ tal que $x \notin I$.

Como $x \notin I \implies x^n \notin I,\ \forall n \geq 0$. Aplicamos ahora el lema de Krull con I y $S = \{x^n :\ n \geq 0\}$.

Entonces $\mathcal{L}_{I,S} = \{J \trianglelefteq A :\ I \subset J,\ J \cap S = \emptyset\}$ tiene un elemento maximal, pongamos P, que es primo. Entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} S \cap P = \emptyset \\ I \subset P \end{array}\right\} \implies {}^2\exists Q \text{ primo minimal sobre } I :\ I \subset Q' \subset P \implies S \cap Q' = \emptyset$$

Con lo que llegamos a una contradicción porque $x \in Q'$

□

Definición 1.0.2. ***Ideal radical***

*Un ideal que cumpla las condiciones de la anterior proposición se dice que es **radical**.*

Definición 1.0.3. ***Radical de un ideal***

Sea $I \trianglelefteq A$ ideal propio, $\sqrt{I} := \{x \in A :\ x^n \in I,\ \ \text{para algún } n > 0\}$

[1]Por el último ejercicio propuesto.
[2]Por el ejercicio de nuevo.

Proposición 1.5. ***Sustituye al Corolario 1.4.6***

Dado $I \subsetneq A$ ideal propio, el subconjunto $\sqrt{I}$ es un ideal radical de A y puede ser descrito por cada una de las siguientes formas equivalentes:

1. *El menor ideal radical que contiene a I.*
2. *La intersección de todos los ideales radicales que contienen a I.*
3. *La intersección de todos los ideales primos que contienen a I.*
4. *La intersección de todos los ideales primos minimales que contienen a I.*

Demostración

Vemos primero que $\sqrt{I}$ es un ideal radical de A.

Hemos de probar:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a)\ x+y \in \sqrt{I}\ \forall x,y \in \sqrt{I} \\ b)\ ax \in \sqrt{I}\ \forall x \in \sqrt{I},\ a \in A \end{array}\right\} \textit{ideal} \\ c)\ \textit{Si } a^n \in \sqrt{I},\ \textit{con } n > 0 \implies a \in \sqrt{I} \end{array}\right.$$

Vemos en primer lugar b):

$$(ax)^n = a^n x^n \implies (\textit{Como } x^n \in I,\ a^n x^n \in I) \implies (ax)^n \in I \implies ax \in \sqrt{I}$$

a) se demuestra utilizando el binomio de Newton:

$$y, x \in \sqrt{I} \implies \exists m, n > 0 :\ x^m \in I,\ y^n \in I$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $m = n$

$$(x+y)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i y^{2n-i} \in I \implies x+y \in I$$

Para ver c), sea ahora $a^n \in \sqrt{I} \implies \exists m > 0 :\ (a^n)^m \in I \implies a^{nm} \in I \implies a \in \sqrt{I}$.

Con lo que $\sqrt{I}$ es un ideal radical.

1.

Sea $J \trianglelefteq A$ ideal radical y propio tal que $I \subset J$. Queremos ver que $\sqrt{I} \subset J$.

Sea $x \in \sqrt{I} \implies \exists n > 0 :\ x^n \in I \implies x^n \in J \implies_{J\ radical} x \in J$

2.

Es consecuencia inmediata de 1.

3.

Sea $\mathcal{V}(I) = \{P \in \operatorname{Spec}(A) :\ I \subset P\} \implies ?\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathcal{V}(I)} P$.

La inclusión $\subset$ es directa con la afirmación 1 y por ser la intersección un ideal radical. Para la otra, sabemos que $\sqrt{I}$ = intersección de los ideales primos minimales sobre $\sqrt{I}$. Entonces:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{Q \in \operatorname{Spec}(A) \\ Q\ minimal/\sqrt{I}}} Q \supseteq \bigcap_{P \in \mathcal{V}(I)} P$$

Luego ya tenemos la igualdad.

4.

Se demuestra aplicando el ejercicio.

□

Ejemplo 6. *Tomamos el caso* $(I) = 0$

$$\sqrt{(0)} = \{x \in A : \ x^n = 0\} = \{\textit{nilpotentes de } A\} =: \mathrm{Nil}(A)$$

1. $\mathrm{Nil}(A)$ *es el menor ideal radical de* A
2. $\mathrm{Nil}(A)$ *es la intersección de todos los ideales radicales de* A.
3. $\mathrm{Nil}(A)$ *es la intersección de todos los ideales primos de* A.
4. $\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{P \in \mathrm{MinSpec}(A)} P$

Ejercicios

Ejercicio 2.

$$x, y \in \mathcal{U}(A) \implies xyy^{-1}x^{-1} = 1 \implies xy \in \mathcal{U}(A)$$

$$xy \in \mathcal{U}(A) \implies \exists w \in A : \ xyw = 1 \implies \begin{cases} x^{-1} = yw \\ y^{-1} = wx \end{cases}$$

Ejercicio 3. ***En este ejercicio hay una errata, está por solucionar***

Sabemos que en un anillo finito, las unidades y los elementos cancelables son los mismos. Luego $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)| = |\{\textit{cancelables}\}|$. *Además sabemos que* $|\{\textit{divisores de cero}\}| = n - |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)|$. *Además sabemos que:*

$$|\mathcal{U}(\mathbb{Z})_n| = \phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_r^{\alpha_r - 1}(p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

Entonces,

$$|\{\textit{divisores de cero}\}| = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_r^{\alpha_r - 1}(p_1 \cdots p_r - \prod_{i=1}^{r}(p_i - 1))$$

Vemos entonces el cardinal de $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}_n)$:

$$\overline{k} = k + n\mathbb{Z} \in \mathrm{Nil}(\mathbb{Z})_n \iff \textit{todos los } p_i \textit{ dividen a } k$$

$$\overline{k} \in \mathrm{Nil}(\mathbb{Z})_n \iff \exists t > 0 : \ \overline{k}^t = \overline{0} \textit{ en } \mathbb{Z}_n \iff \exists t > 0 : \ n/k^t \implies \textit{todos los } p_i \textit{ dividen a } k$$

Recíprocamente:

$$k = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}, \ \textit{con } 0 < \beta_i \leq \alpha_i \ \forall i = 1, ..., r$$

$$|\,\mathrm{Nil}(\mathbb{Z})_n| = \alpha_1 \cdots \alpha_r$$

Ejercicio 4.

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24}) = \{\overline{k} : \ \mathrm{mcd}(k, n) = 1\} = \{\textit{cancelables}\} = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}\}$$

$$\{\textit{divisores de cero}\} = \mathbb{Z}_{24} \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24})$$

Ejercicio 6.

Recordemos primero que $p \in A$ es primo sii (p) es un ideal primo.

$f : A \to B$ homomorf. Si a satisface (P),¿ $f(a)$ cumple (P)?

Apartado a)

Si $a \in \mathcal{U}(A) \implies \exists a^{-1} \in A : \ a \cdot a^{-1} = 1 \implies f(a)f(a^{-1}) = f(1) = 1 \implies f(a) \in \mathcal{U}(B)$.

Apartado b)

Tomando $\mathbb{Z} \to \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(2x)}$ *homomorfismo inyectivo. El 2 es cancelable en $\mathbb{Z}$ pero no lo es en el anillo destino.*

Apartado c)

Sea $a \in A$ divisor de 0 $\implies \exists b \in A \setminus \{0\} : \ ab = 0 \implies f(a)f(b) = 0$

Cuando f es inyectiva: sí, porque $f(b) \neq 0$. En otro caso:

Sean $m, n > 1, \ mn\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \implies$ *tomamos un homomorfismo de anillos suprayectivo:*

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Tomando m, n tales que $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$ *tenemos que $\overline{m}$ es divisor de cero pero su imagen,* $[m] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$

Apartado d)

Si $a \in A$, existe un exponente $n > 0$ tal que $a^n = 0 \implies f(a)^n = f(a^n) = 0$*, entonces $f(a)$ es nilpotente.*

Apartado e)

De forma parecida al apartado anterior, vemos que si $e = e^2$ en A, al aplicar f tenemos que $f(e) = f(e)^2 \implies f(e)$ *es idempotente.*

Apartado f)

Basta tomar la inclusión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ para tener un contraejemplo (no suprayectivo). Para el caso suprayectivo planteamos un ejercicio:

Ejercicio: *Sea $\overline{k} = kp^t\mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{p^t} \iff \overline{k} = \overline{pu}$, siendo $\overline{u} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t})$. Más generalmente: Sea A un anillo y $p \in A$ tales que (p) es el único ideal maximal de A- Entonces los elementos irreducibles de A son los de la forma pu, siendo $u \in \mathcal{U}(A)$ (p es el único irreducible de A salvo asociados)*

Construimos en base a este ejercicio el homomorfismo suprayectivo formado por la proyección $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{p^t}$. Dado $q \neq p$ primo, su imagen es $\overline{q} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t}) \implies \overline{q}$ no es irreducible.

Apartado g)

Ejercicio: *Sea A un dominio y $p \in A$. Si p es primo entonces es irreducible. Cuando A es un DIP, se verifica también el recíproco.*

Como los contraejemplos del apartado anterior parten de $\mathbb{Z}$ y los irreducibles y los primos son iguales en $\mathbb{Z}$, podemos usar los mismos contraejemplos en este apartado.

Vamos a resolver ahora el primero de los ejercicios planteados:

Ejercicio: *Sea $\overline{k} = kp^t\mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{p^t} \iff \overline{k} = \overline{pu}$, siendo $\overline{u} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t})$. Más generalmente: Sea A un anillo y $p \in A$ tales que (p) es el único ideal maximal de A- Entonces los elementos irreducibles de A son los de la forma pu, siendo $u \in \mathcal{U}(A)$ (p es el único irreducible de A salvo asociados)*

Dado $p = ab$, veamos si p es irreducible. Supongamos que $a \notin \mathcal{U}(A) \implies (a) \trianglelefteq A \implies (a) \subset (p)$ porque (p) es el único ideal maximal. $\implies a = pa'$, siendo $a' \in A$

$$\implies p = ab = pa'b \iff p(1-a'b) = 0 \begin{cases} 1 - a'b \in \mathcal{U}(A) \text{ no, porque implicaría} \\ \quad \text{una contradicción } (p = 0) \\ 1 - a'b \notin \mathcal{U}(A) \end{cases}$$

$$1 - a'b \notin \mathcal{U}(A) \implies (1-a'b) \subset (p), \text{ pero no puede darse } (a'b) \subset (p), \text{ porque tendríamos}$$

$$1 = 1 - a'b + a'b \in (p) \implies a'b \in \mathcal{U}(A) \implies b \in \mathcal{U}(A)$$

Sea $q \in A$ irreducible $\implies q \notin \mathcal{U}(A) \iff (q) \trianglelefteq A \implies (q) \subset (p) \implies q = pu$, para algún $u \in A$

Vemos ahora los recíprocos.

Apartado a)

La inclusión de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ y tomando $a = f(a) = 3$ tenemos un contraejemplo no suprayectivo, para el sobre, tomamos la proyecctión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_3$.

Apartados b,c)

Basta aplicar el contrarrecíproco de $f(a)$ cancelable $\implies$ a cancelable y $f(a)$ divisor de $0 \implies a$ divisor de 0

Apartado d)

$f(a)$ es nilpotente $\iff f(a)$ tal que $\exists n > 0$ tal que $f(a)^n = 0 \implies f(a^n) = 0 \iff a^n \in \mathrm{Ker}(f)$.

Si f es inyectiva, sí se cumple la cadena de sii.

Si f es sobre, tomamos el contraejemplo de la proyección de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_n$ con un producto de primos

Apartado e)

De forma parecida al apartado anterior:

$$f(a) = f(a^2) \iff a - a^2 \in \mathrm{Ker}(f)$$

Si f es inyectiva, sí se cumple.

En el caso sobre, tomamos la proyección de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_6$, entonces 7 no es idempotente y $f(7) = \overline{1}$ no lo es.

Apartado f)

Para el caso sobre, tomamos la aplicación $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{p^t}$ *y el elemento* $(p^t + 1)p \rightsquigarrow \overline{p}$

La idea para obtener el caso inyectivo es tomar un elemento como $2 \cdot 3$ *no irreducible, y llevar uno de sus factores a una unidad. Tomamos la aplicación:*

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \{q \in \mathbb{Q} : \; q = \frac{m}{2^r}, \; m \in \mathbb{Z}, \; r \geq 0\}$$

Dejamos como ejercicio ver que 3 es irreducible en $\mathbb{Z}[1/2]$