

Apuntes de Álgebra Conmutativa

Paco Mora

25 de octubre de 2022

Índice general

1 Tema 1	3
Ejercicios	9
2 Anillos noetherianos	24
Ejercicios	32
4 Módulos	36
Ejercicios	42

Tema 1

Ejercicio 1. *Ejercicio Propuesto*

Sea $A = \mathbb{Z}_n$, con n entero > 1 y $\bar{r} \in \mathbb{Z}_n$. Demostrar:

- \bar{r} cancelable $\iff \bar{r}$ invertible $\iff \text{mcd}(r, n) = 1$
- \bar{r} nilpotente \iff todos los divisores primos de n dividen a r .

La siguiente proposición generaliza el ejercicio anterior.

Proposición 1.1. Sea A un anillo finito y sea $a \in A$. Entonces a es cancelable sii es invertible.

Demostración

Definimos

$$\lambda_n : A \rightarrow A \quad \lambda_n(x) = ax \quad \forall x \in A$$

Es inyectiva, $\lambda_n(x) = \lambda_n(y) \iff ax = ay \implies a \text{ cancel. } x = y$

Por lo tanto, y como A es finito, λ_n es biyectiva y $1 \in \text{Im}(\lambda_n) \iff \exists b \in A \mid \lambda_n(b) = 1$

□

Proposición 1.2. A reducido $\iff \text{Nil}(A) = \{\text{elem nilpotentes de } A\} = \{0\}$

Demostración

\implies

A reducido sii $\forall a \in A, a^2 = 0 \implies a = 0$

\impliedby

Por reduc. al absurdo, supongamos $b \in \text{Nil}(A) \setminus \{0\} \implies \exists n > 0$ (mínimo) con $b^n = 0 \implies b^{n-1} \neq 0$

Pero entonces, $(b^{n-1})^2 = b^{2n-2} = 0$ y $2n - 2 \geq n$ para $n \geq 2$, luego llegamos a una contradicción.

□

Ejercicio 2. Ejercicio Propuesto

\mathbb{Z}_n es un anillo reducido $\iff n$ es libre de cuadrados.

Demostración del 1.9(ii)**Demostración**

a/b y $a/c \implies \exists b', c' \in D / ab' = b, ac' = c \dots$ Sean ahora $r, s \in D$ arbitrarios y veamos que $a/rb + sc$

$$rb + rc = r(ab) + s(ac') = arb' = asc' = a(rb' + sc') \implies a|rb + sc \implies \cancel{a}1 = \cancel{a}(dc)$$

□

Ejercicio 3. Ejercicio propuesto

Sean $G_1, G_2 \subset A$. Demostrar que $(G_1)(G_2) = (G_1 \cdot G_2)$. En particular, el producto de ideales principales es un ideal principal.

Observación

$IJ \subset I \cap J$ (estricto en general: $A = \mathbb{Z}$, $I = (2)$, $J = (4)$, $IJ = (8)$, $I \cap J = (4)$)

Ejemplo 4. Aplicación del teorema de la correspondencia

Los ideales de \mathbb{Z}_n están en correspondencia con los divisores positivos de n .

$$\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n) \rightarrow \{d > 0 : d|n\}$$

Pero los ideales de \mathbb{Z}_n son isomorfos a $\{I \trianglelefteq \mathbb{Z} : n\mathbb{Z} \subset I\}$ por el teorema de la correspondencia, entonces:

$$\{I \trianglelefteq \mathbb{Z} : n\mathbb{Z} \subset I\} = \{d\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} : n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}\} = \{d\mathbb{Z} : d|n\} \cong \{d > 0 : d|n\}$$

Proposición 1.3. Proposición 1.31 extendido (la prueba es la de los apuntes) Sean A, B_1, \dots, B_n anillos y sean $g_i : A \rightarrow B_i$ homomorf. de anillos.

1. $\phi : A \rightarrow B_1 \times \dots \times B_n$, dado por $\phi(a) = (g_1(a), \dots, g_n(a))$ es un homomorf. de anillos con núcleo $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(g_i)$
2. Si los $\text{Ker}(g_i)$ son comaximales dos a dos, entonces se verifica:
 - a) $\text{Im}(\phi) = \text{Im}(g_1) \times \dots \times \text{Im}(g_n)$
 - b) $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(g_1) \cdots \text{Ker}(g_n)$
 - c) Se tiene un isom. de anillos: $\frac{A}{\text{Ker}(g_1) \cdots \text{Ker}(g_n)} \cong \text{Im}(g_1) \times \dots \times \text{Im}(g_n)$

Demostración

1.

$$\text{Ker}(\phi) = \{a \in A : (g_1(a), \dots, g_n(a)) = (0, \dots, 0)\} = \{a \in A : g_i(a) = 0 \forall i\} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(g_i)$$

2.

2.b

Si los $\text{Ker}(g_i)$ son comaximales dos a dos entonces:

$$\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(g_1) \cdots \text{Ker}(g_n)$$

Con lo que tenemos 2b).

2.a

Si $(b_1, \dots, b_n) \in \text{Im}(\phi) \implies (b_1, \dots, b_n) = \phi(a) = (g_1(a), \dots, g_n(a))$ para algún $a \in A \implies b_i \in \text{Im}(g_i) \forall i$. Por tanto, $(b_1, \dots, b_n) \in \text{Im}(g_1) \times \dots \times \text{Im}(g_n)$

Si probamos ahora que $(0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \text{Im}(\phi) \forall x_i \in \text{Im}(g_i)$, entonces toda n -upla $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Im}(\phi)$ en $\text{Im}(\phi_1) \times \dots \times \text{Im}(\phi_n)$. Como los núcleos son comaximales dos a dos.

$$\text{Ker}(g_i) + (\cap_{j \neq i} \text{Ker}(g_j)) = A \implies 1 = a + b, \quad a \in \text{Ker}(g_i), \quad b \in \cap_{j \neq i} \text{Ker}(g_j)$$

Como $x_i \in \text{Im}(g_i) \implies \exists u \in A : g_i(u) = x_i$, entonces:

$$x_i = 1 \cdot x_i = (a + b)g_i(u) = g_i((a + b)u)$$

Luego entonces:

$$\phi(bu) = (g_1(bu), \dots, g_i(bu), \dots, g_n(bu)) = (0, \dots, 0, g_i(bu), 0, \dots, 0)$$

$$x_i = g_i(u) = g_i(au + bu) = \cancel{g_i(a)g_i(u)} + g_i(bu)$$

Con lo que queda demostrado 2.b.

2.c.

Basta utilizar 2.a), 2.b) y el primer teorema de isomorfía.

□

Definición 1.1. Conjunto inductivo

Un **conjunto inductivo** es un conjunto ordenado S tal que todo subconjunto totalmente ordenado no vacío tiene una cota superior en S

Lema 1.4. Lema de Zorn

Todo conjunto inductivo no vacío tiene un elemento maximal.

Demostración

Fijemos $I \trianglelefteq A$, $I \neq A$ ideal propio.

$$S_I = \{J \trianglelefteq A : J \text{ ideal propio e } I \subset J\}$$

S_I es inductivo y $\neq \emptyset (I \in S_I)$

Sea Y un subconjunto totalmente ordenado $\neq \emptyset$ de S_I . Tomo $m = \bigcup_{J \in Y} J$. Probemos que m es un ideal propio tal que $I \subset m$. Lo que implica que $m \in S_I$.

$$\text{Sean } a, b \in m \implies \begin{cases} a \in \bigcup_{J \in Y} J \iff \exists J \in Y : a \in J \\ b \in \bigcup_{J \in Y} J \iff \exists J' \in Y : b \in J' \end{cases}$$

Si tomamos por ejemplo que $J \subset J'$, entonces $a, b \in J' \implies a - b \in J' \implies a - b \in m$

Notemos entonces que un elemento maximal de S_I es también un ideal maximal.

□

Ejercicio 5. $I, P \trianglelefteq A$, siendo P primo. Probar que existe un primo minimal sobre I , pongamos q tal que $q \subset P$

Lema 1.5. Lema de Krull

A anillo, $I \trianglelefteq A$ y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo. Suponemos que $I \cap S = \emptyset$ y consideremos $\mathcal{L}_{I,S} = \{J \trianglelefteq A : I \subset J, J \cap S = \emptyset\}$. Se verifica:

1. $\mathcal{L}_{I,S}$ es un conjunto inductivo.
2. Cualquier elemento maximal de $\mathcal{L}_{I,S}$ es un ideal primo.

Demostración

1.

Hemos de probar que si $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}_{I,S}$ es un subconjunto totalmente ordenado $\neq \emptyset \implies$ tiene una cota superior en $\mathcal{L}_{I,S}$.

Habría que comprobar que $\tilde{J} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$ es un ideal.

Como tenemos que $I \subset \tilde{J}$ y $S \cap \tilde{J} = S \cap (\bigcup J) = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} (S \cap J) = \emptyset$

Entonces \tilde{J} es una cota superior de \mathcal{J} en $\mathcal{L}_{I,S}$.

2.

Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in P$. Por reducc. al absurdo, supongamos que $a \notin P$ y $b \notin P$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} P \subsetneq P + (a) \\ P \subsetneq P + (b) \end{array} \right\} \implies P + (a), P + (b) \notin \mathcal{L}_{I,S} \iff \left\{ \begin{array}{l} (P + (a)) \cap S \neq \emptyset \\ (P + (b)) \cap S \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Sean entonces $s \in (P + (a)) \cap S$ y $s' \in (P + (b)) \cap S$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} s = p + ar \\ s' = p' + br' \end{array} \right. \quad p, p' \in P, r, r' \in A$$

$$ss' = (p + ar)(p' + br') = pp' + pbr' + arp' + abrr' \in P \implies P \cap S \neq \emptyset$$

Con lo que llegamos a una contradicción

□

Proposición 1.6. Sea A un anillo e $I \trianglelefteq A$ un ideal **propio**. Son equivalentes:

1. Si $a \in A$ y $a^n \in I$, para algún $n > 0$, entonces $a \in I$
2. Si $a \in A$ y $a^2 \in I$, entonces $a \in I$
3. I es una intersección de ideales primos.
4. I es la intersección de los ideales primos minimales sobre I .

Demostración

1 \implies 2.

Directa.

2 \implies 1

Si $n = 1 \implies a' = a \in I$, podemos suponer que $a \notin I$ y que existe $n > 1$, $a^n \in I$ tal que $a^{n-1} \notin I$. Entonces tenemos:

$$(a^{n-1})^2 = a^{2n-2} = \underbrace{a^n}_{\in I} \underbrace{a^{n-2}}_{\in A} \implies (a^{n-1})^2 \in I \implies a^{n-1} \in I$$

Con lo que tenemos una contradicción y $a \in I$.

4 \implies 3.

Directa.

3 \implies 4.

Supongamos que $\exists (P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ideales primos tales que $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \Lambda, I \subset P_\lambda &\implies {}^1 \exists Q_\lambda \text{ primo minimal sobre } I \text{ tal que } I \subset Q_\lambda \subset P_\lambda \implies \\ &\implies I \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = I \implies I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \\ I &\subset \bigcap_{\substack{Q \in \text{Spec}(A) \\ Q \text{ minimal sobre } I}} Q \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda = I \end{aligned}$$

Con lo que tenemos 4.

3 \implies 2.

Si $a^2 \in I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \iff a^2 \in P_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \implies a \in P_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \iff a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = I$

1 \implies 4.

Sean $\mathcal{Q} = \{\text{ideales primos minimales sobre } I\}$. Queremos probar que $I = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q$. La inclusión \subset es directa.

Supongamos ahora que $I \subsetneq \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q \implies$ tomamos $x \in \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ tal que $x \notin I$.

Como $x \notin I \implies x^n \notin I, \forall n \geq 0$. Aplicamos ahora el lema de Krull con I y $S = \{x^n : n \geq 0\}$.

Entonces $\mathcal{L}_{I,S} = \{J \trianglelefteq A : I \subset J, J \cap S = \emptyset\}$ tiene un elemento maximal, pongamos P , que es primo. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \cap P = \emptyset \\ I \subset P \end{array} \right\} \implies {}^2 \exists Q \text{ primo minimal sobre } I : I \subset Q' \subset P \implies S \cap Q' = \emptyset$$

Con lo que llegamos a una contradicción porque $x \in Q'$

□

Definición 1.2. Ideal radical

Un ideal que cumpla las condiciones de la anterior proposición se dice que es **radical**.

Definición 1.3. Radical de un ideal

Sea $I \trianglelefteq A$ ideal propio, $\sqrt{I} := \{x \in A : x^n \in I, \text{ para algún } n > 0\}$

¹Por el último ejercicio propuesto.

²Por el ejercicio de nuevo.

Proposición 1.7. Sustituye al Corolario 1.4.6

Dado $I \trianglelefteq A$ ideal propio, el subconjunto \sqrt{I} es un ideal radical de A y puede ser descrito por cada una de las siguientes formas equivalentes:

1. El menor ideal radical que contiene a I .
2. La intersección de todos los ideales radicales que contienen a I .
3. La intersección de todos los ideales primos que contienen a I .
4. La intersección de todos los ideales primos minimales que contienen a I .

Demostración

Vemos primero que \sqrt{I} es un ideal radical de A .

Hemos de probar:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) x + y \in \sqrt{I} \forall x, y \in \sqrt{I} \\ b) ax \in \sqrt{I} \forall x \in \sqrt{I}, a \in A \\ c) Si a^n \in \sqrt{I}, con n > 0 \implies a \in \sqrt{I} \end{array} \right\} ideal$$

Vemos en primer lugar b):

$$(ax)^n = a^n x^n \implies (Como x^n \in I, a^n x^n \in I) \implies (ax)^n \in I \implies ax \in \sqrt{I}$$

a) se demuestra utilizando el binomio de Newton:

$$y, x \in \sqrt{I} \implies \exists m, n > 0 : x^m \in I, y^n \in I$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $m = n$

$$(x + y)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i y^{2n-i} \in I \implies x + y \in I$$

Para ver c), sea ahora $a^n \in \sqrt{I} \implies \exists m > 0 : (a^n)^m \in I \implies a^{nm} \in I \implies a \in \sqrt{I}$.

Con lo que \sqrt{I} es un ideal radical.

1.

Sea $J \trianglelefteq A$ ideal radical y propio tal que $I \subset J$. Queremos ver que $\sqrt{I} \subset J$.

Sea $x \in \sqrt{I} \implies \exists n > 0 : x^n \in I \implies x^n \in J \implies J \text{ radical } x \in J$

2.

Es consecuencia inmediata de 1.

3.

Sea $\mathcal{V}(I) = \{P \in \text{Spec}(A) : I \subset P\} \implies \sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathcal{V}(I)} P$.

La inclusión \subset es directa con la afirmación 1 y por ser la intersección un ideal radical. Para la otra, sabemos que \sqrt{I} = intersección de los ideales primos minimales sobre \sqrt{I} . Entonces:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{Q \in \text{Spec}(A) \\ Q \text{ minimal}/\sqrt{I}}} Q \supseteq \bigcap_{P \in \mathcal{V}(I)} P$$

Luego ya tenemos la igualdad.

4.

Se demuestra aplicando el ejercicio.



Ejemplo 6. Tomamos el caso $(I) = 0$

$$\sqrt{(0)} = \{x \in A : x^n = 0\} = \{\text{nilpotentes de } A\} =: \text{Nil}(A)$$

1. $\text{Nil}(A)$ es el menor ideal radical de A
2. $\text{Nil}(A)$ es la intersección de todos los ideales radicales de A .
3. $\text{Nil}(A)$ es la intersección de todos los ideales primos de A .
4. $\text{Nil}(A) = \bigcap_{P \in \text{MinSpec}(A)} P$

Ejercicios

Ejercicio 2.

$$x, y \in \mathcal{U}(A) \implies xyy^{-1}x^{-1} = 1 \implies xy \in \mathcal{U}(A)$$

$$xy \in \mathcal{U}(A) \implies \exists w \in A : xyw = 1 \implies \begin{cases} x^{-1} = yw \\ y^{-1} = wx \end{cases}$$

Ejercicio 3.

En este ejercicio hay una errata, está por solucionar

Sabemos que en un anillo finito, las unidades y los elementos cancelables son los mismos. Luego $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)| = |\{\text{cancelables}\}|$. Además sabemos que $|\{\text{divisores de cero}\}| = n - |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)|$. Además sabemos que:

$$|\mathcal{U}(\mathbb{Z})_n| = \phi(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

Entonces,

$$|\{\text{divisores de cero}\}| = p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 \cdots p_r - \prod_{i=1}^r (p_i - 1))$$

Vemos entonces el cardinal de $\text{Nil}(\mathbb{Z}_n)$:

$$\bar{k} = k + n\mathbb{Z} \in \text{Nil}(\mathbb{Z})_n \iff \text{todos los } p_i \text{ dividen a } k$$

$$\bar{k} \in \text{Nil}(\mathbb{Z})_n \iff \exists t > 0 : \bar{k}^t = \bar{0} \text{ en } \mathbb{Z}_n \iff \exists t > 0 : n/k^t \implies \text{todos los } p_i \text{ dividen a } k$$

Recíprocamente:

$$k = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}, \text{ con } 0 < \beta_i \leq \alpha_i \ \forall i = 1, \dots, r$$

$$|\text{Nil}(\mathbb{Z})_n| = \alpha_1 \cdots \alpha_r$$

Ejercicio 4.

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24}) = \{\bar{k} : \text{mcd}(k, n) = 1\} = \{\text{cancelables}\} = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{23}\}$$

$$\{\text{divisores de cero}\} = \mathbb{Z}_{24} \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24})$$

Ejercicio 6.

Recordemos primero que $p \in A$ es primo sii (p) es un ideal primo.

$f : A \rightarrow B$ homomorf. Si a satisface (P) , ¿ $f(a)$ cumple (P) ?

Apartado a)

$$\text{Si } a \in \mathcal{U}(A) \implies \exists a^{-1} \in A : a \cdot a^{-1} = 1 \implies f(a)f(a^{-1}) = f(1) = 1 \implies f(a) \in \mathcal{U}(B).$$

Apartado b)

Tomando $\mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}[X]}{(2x)}$ homomorfismo inyectivo. El 2 es cancelable en \mathbb{Z} pero no lo es en el anillo destino.

Apartado c)

$$\text{Sea } a \in A \text{ divisor de } 0 \implies \exists b \in A \setminus \{0\} : ab = 0 \implies f(a)f(b) = 0$$

Cuando f es inyectiva: sí, porque $f(b) \neq 0$. En otro caso:

Sean $m, n > 1$, $mn\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \implies$ tomamos un homomorfismo de anillos suprayectivo:

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Tomando m, n tales que $\text{mcd}(n, m) = 1$ tenemos que \overline{m} es divisor de cero pero su imagen, $[m] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$

Apartado d)

Si $a \in A$, existe un exponente $n > 0$ tal que $a^n = 0 \implies f(a)^n = f(a^n) = 0$, entonces $f(a)$ es nilpotente.

Apartado e)

De forma parecida al apartado anterior, vemos que si $e = e^2$ en A , al aplicar f tenemos que $f(e) = f(e)^2 \implies f(e)$ es idempotente.

Apartado f)

Basta tomar la inclusión de \mathbb{Z} en \mathbb{Q} para tener un contraejemplo (no suprayectivo). Para el caso suprayectivo planteamos un ejercicio:

Ejercicio: Sea $\overline{k} = kp^t\mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{p^t} \iff \overline{k} = \overline{p}u$, siendo $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t})$. Más generalmente: Sea A un anillo y $p \in A$ tales que (p) es el único ideal maximal de A . Entonces los elementos irreducibles de A son los de la forma pu , siendo $u \in \mathcal{U}(A)$ (p es el único irreducible de A salvo asociados)

Construimos en base a este ejercicio el homomorfismo suprayectivo formado por la proyección $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^t}$. Dado $q \neq p$ primo, su imagen es $\overline{q} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t}) \implies \overline{q}$ no es irreducible.

Apartado g)

Ejercicio: Sea A un dominio y $p \in A$. Si p es primo entonces es irreducible. Cuando A es un DIP, se verifica también el recíproco.

Como los contraejemplos del apartado anterior parten de \mathbb{Z} y los irreducibles y los primos son iguales en \mathbb{Z} , podemos usar los mismos contraejemplos en este apartado.

Vamos a resolver ahora el primero de los ejercicios planteados:

Ejercicio: Sea $\bar{k} = k p^t \mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{p^t} \iff \bar{k} = \bar{p}\bar{u}$, siendo $\bar{u} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t})$. Más generalmente: Sea A un anillo y $p \in A$ tales que (p) es el único ideal maximal de A . Entonces los elementos irreducibles de A son los de la forma pu , siendo $u \in \mathcal{U}(A)$ (p es el único irreducible de A salvo asociados)

Dado $p = ab$, veamos si p es irreducible. Supongamos que $a \notin \mathcal{U}(A) \implies (a) \subseteq A \implies (a) \subset (p)$ porque (p) es el único ideal maximal. $\implies a = pa'$, siendo $a' \in A$

$$\implies p = ab = pa'b \iff p(1 - a'b) = 0 \begin{cases} 1 - a'b \in \mathcal{U}(A) \text{ no, porque implicaría} \\ \text{una contradicción } (p = 0) \\ 1 - a'b \notin \mathcal{U}(A) \end{cases}$$

$1 - a'b \notin \mathcal{U}(A) \implies (1 - a'b) \subset (p)$, pero no puede darse $(a'b) \subset (p)$, porque tendríamos

$$1 = 1 - a'b + a'b \in (p) \implies a'b \in \mathcal{U}(A) \implies b \in \mathcal{U}(A)$$

Sea $q \in A$ irreducible $\implies q \notin \mathcal{U}(A) \iff (q) \subsetneq A \implies (q) \subset (p) \implies q = pu$, para algún $u \in A$

Vemos ahora los recíprocos.

Apartado a)

La inclusión de \mathbb{Z} a \mathbb{Q} y tomando $a = f(a) = 3$ tenemos un contraejemplo no suprayectivo, para el sobre, tomamos la proyección de \mathbb{Z} en \mathbb{Z}_3 .

Apartados b,c)

Basta aplicar el contrarrecíproco de $f(a)$ cancelable $\implies a$ cancelable y $f(a)$ divisor de 0 $\implies a$ divisor de 0

Apartado d)

$f(a)$ es nilpotente $\iff f(a)$ tal que $\exists n > 0$ tal que $f(a)^n = 0 \implies f(a^n) = 0 \iff a^n \in \text{Ker}(f)$.

Si f es inyectiva, sí se cumple la cadena de sii.

Si f es sobre, tomamos el contraejemplo de la proyección de \mathbb{Z} en \mathbb{Z}_n con un producto de primos

Apartado e)

De forma parecida al apartado anterior:

$$f(a) = f(a^2) \iff a - a^2 \in \text{Ker}(f)$$

Si f es inyectiva, sí se cumple.

En el caso sobre, tomamos la proyección de \mathbb{Z} en \mathbb{Z}_6 , entonces 7 no es idempotente y $f(7) = \bar{1}$ no lo es.

Apartado f)

Para el caso sobre, tomamos la aplicación $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^t}$ y el elemento $(p^t + 1)p \rightsquigarrow \bar{p}$

La idea para obtener el caso inyectivo es tomar un elemento como $2 \cdot 3$ no irreducible, y llevar uno de sus factores a una unidad. Tomamos la aplicación:

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] = \{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{m}{2^r}, m \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$$

Dejamos como ejercicio ver que 3 es irreducible en $\mathbb{Z}[1/2]$

Ejercicio 7.

Apartado a)

Si $m < 0 \implies \mathcal{U}(\mathbb{Z}(\sqrt{m}))$ es finito.

$$N(a + b\sqrt{m}) = 1 \iff a^2 - mb^2 = 1 \iff a^2 + b\sqrt{-m}^2 = 1$$

$\implies (a, b\sqrt{-m})$ está en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 y su 1^a componente a es entera.

$$\implies \mathcal{U}(\mathbb{Z}(\sqrt{m})) \subset \{a + b\sqrt{m} : (a, b\sqrt{-m}) \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}\}$$

Observación

$$a = 0 \iff b\sqrt{-m} = \pm 1 \implies \begin{cases} b = \pm 1 \\ \sqrt{-m} = 1 \end{cases} \implies -m = 1 \implies m = -1$$

Luego $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{m}]) = \{-1, 1\}$ salvo cuando $m = -1$ en que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(i)) = \{1, -1, i, -i\}$

Apartado b)

Supongamos que $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{m}])| > 2$ y cojamos $\alpha = a + b\sqrt{m} \neq \pm 1$

Tomamos $X := \{1, \alpha, \alpha^2, \dots\}$ es el subgrupo multiplicativo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{m}])$ generado por α .

Si X es finito $\implies \exists n > 0 : \alpha^n = 1$. Elegimos n mínimo con esa propiedad $\implies \alpha$ raíz n -ésima (primitiva) de 1 .

Como $m > 0 \implies \alpha = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{R} \implies \alpha = \pm 1$ (contradice que el que $\alpha \neq \pm 1$)

Apartado c)

Por las conclusiones tomadas en el apartado a). Se tiene que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(\sqrt{-11})) = \{1, -1\}$

Se trata de ver ahora que $x = 1 + \sqrt{-11}$ e $y = 1 - \sqrt{-11}$ son irreducibles. Como son conjugados, bastará con ver que uno solo de ellos es irreducible.

En primer lugar, no es cero ni una unidad. Pongamos $x = (a + b\sqrt{-11})(c + d\sqrt{-11})$. Tomando normas:

$$12 = N(x) = N(a + b\sqrt{-11})N(c + d\sqrt{-11})$$

Si ni $a + b\sqrt{-11}$ ni $c + d\sqrt{-11}$ son unidades \implies las combinaciones posibles de normas son $(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$. En cualquier caso, la norma de uno de ambos es 2 o 3. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que la norma de $(a + b\sqrt{-11})$ es 2 o 3, en cualquiera de los casos un primo p .

$$\{2, 3\} \ni p = N(a + b\sqrt{-11}) = a^2 + 11b^2 \implies b \text{ entero } b = 0 \implies a^2 = p$$

Lo cual es imposible porque a es entero, hemos llegado a una contradicción y x es irreducible.

Ahora tenemos que $xy = (1 + \sqrt{-11})(1 - \sqrt{-11}) = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Basta ver ahora que 2 y 3 son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$

$$p = (a + b\sqrt{-11})(c + d\sqrt{-11}) \implies \text{tomando normas } p^2 = N(a + b\sqrt{-11})N(c + d\sqrt{-11})$$

Supongamos que ninguno de estos dos es 1, tenemos que $N(a + b\sqrt{-11}), N(c + d\sqrt{-11}) = p$ y aplicando un razonamiento como el anterior, tenemos que es imposible y entonces p es irreducible.

Apartado d)

Nos preguntamos si cuando un primo entero $p > 1$, ¿es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$?

Tomamos una factorización $p = (a + b\sqrt{-3})(c + d\sqrt{-3})$ y tomamos normas:

$$p^2 = N(a + b\sqrt{-3})N(c + d\sqrt{-3})$$

Entonces tenemos:

$$p \text{ irreducible} \iff N(a + b\sqrt{-3}) = 1 \text{ ó } N(c + d\sqrt{-3}) = 1$$

$$p \text{ no es irreducible} \iff N(a + b\sqrt{-3}) = p = N(c + d\sqrt{-3}) \iff {}^a N(a + b\sqrt{-3}) = p$$

Como conclusión, tenemos que \mathbb{Z} es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ sii la ecuación $x^2 + 3y^2 = p$ no tiene solución en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Basta aplicar ahora este resultado a los 4 números a los que nos piden comprobar si son o no irreducibles.

^autilizando la ecuación de antes y que \mathbb{Z} es un dominio

Ejercicio 9.

Supongamos que (b, X) es principal y tenemos $f \in A[X] : (b, X) = (f) \implies$

$$\implies \begin{cases} X = f(X)g(X), \text{ con } g, h \in A[X] \\ b = f(X)h(X) \end{cases} \implies_{X=0} \begin{cases} 0 = f(0)g(0) \\ b = f(0)h(0) \end{cases} \quad (\text{igualdades en } A)$$

Notemos que b cancelable $\implies f(0)$ cancelable:

Si fuese $f(0)$ no cancelable (= divisor de 0) \implies

$$\exists c \in A \setminus \{0\} : f(0)c = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} bc = 0 \\ c \neq 0 \end{array} \right\} \implies b \text{ no es cancelable (contradicción)}$$

$$\begin{aligned} f(0) &\implies g(0) = 0 \implies g(X) = X \cdot g'(X) \implies X = f(X)g(X) = Xf(X)g'(X) \implies \\ &\implies X \text{ cancelable en } A[X] \implies 1 = f(X)g'(X) \implies f \in \mathcal{U}(A[X]) \implies (b, X) = (f) = A[X] \end{aligned}$$

Entonces $1 = br(X) + Xs(X)$ para ciertos $r, s \in A[X] \implies_{X=0} 1 = br(0) \implies b \in \mathcal{U}(A)$, lo cual es una contradicción ya que sabemos que b no es invertible.

Falta ver que (X, Y) no es principal en $A[X, Y]$

$$A[X, Y] \cong (A[Y])[X]$$

Y no es cancelable y no unidad en $A[X]$, basta aplicar ahora el ejercicio.

Ejercicio 10.

Apartado a)

$$IJ_1 = IJ_2 \not\implies J_1 = J_2$$

Tomaremos $J_2 = 0$ y $I = J_1 = (\bar{2})$ en \mathbb{Z}_4

Apartado b) Enunciado modificado

Todo ideal principal en un dominio cancela (para el producto de ideales)

$I = (y)$ y tenemos que $IJ_1 = IJ_2 \implies ? J_1 = J_2$

Basta con probar que $J_1 \subset J_2$.

$$\text{Sea } z \in J_1 \implies yz \in IJ_1 = IJ_2 \implies yz = \sum_{i=1}^t y_i z_i$$

$$y_i \in I = (y) \implies y_i = a_i y, \text{ para algún } a_i \in A \implies yz = \sum_{i=1}^t (a_i y) z_i = y \sum_{i=1}^t a_i z_i$$

$$\implies z = \sum_{i=1}^t a_i z_i \implies z \in J_2$$

Ejercicio 11. Este ejercicio no está resuelto pero es muy importante.

Ejercicio 12. bis

Sea $A = A_1 \times \dots \times A_m$, donde los A_i son anillos locales (Ej1.21). Probar que los idempotentes de A son las m -uplas (e_1, \dots, e_m) tales que $e_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \dots, m$. Como aplicación, describir un método para calcular todos los elementos idempotentes de \mathbb{Z}_n ,

para $n > 1$. **Particularizarlo a \mathbb{Z}_{4200} .**

Utilizando el ejercicio 5.e), tenemos que $e = (e_1, \dots, e_m)$ es idempotente en $A \iff e_i$ es idempotente en $A \forall i = 1, \dots, m$

La primera parte se reduce a probar que si B es un anillo local, entonces sus únicos idempotentes son $0, 1$.

Demostración

Supongamos que $e = e^2 \in B$, $e \notin \{0, 1\} \implies e, 1 - e$ son idempotentes (1.12(b)) y $e, 1 - e \notin \mathcal{U}(B)$ (1.12(c)). Por tanto $(e), (1 - e)$ son ideales propios de $B \implies (e), (1 - e) \subset m := \text{único ideal maximal de } B$. Entonces, $(e) + (1 - e) \subset m \implies 1 = e + (1 - e) \in m$

Con lo que tenemos una contradicción porque $m \subsetneq B$

□

Describimos el método: $n = p_1^{\mu_1} \cdots p_t^{\mu_t} \implies {}^a\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\mu_1}} \times \mathbb{Z}_{p_t^{\mu_t}}$ que lleva $\bar{a} \mapsto (\bar{a}, \dots, \bar{a})$

Entonces en \mathbb{Z}_{p^t} , el único ideal maximal es (\bar{p}) (p primo).

Vemos el caso de $n = 4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, tomamos el isomorfismo de anillos:

$$\mathcal{U} : \mathbb{Z}_{4200} \rightarrow \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_7$$

$$\bar{a} \mapsto (a + 8\mathbb{Z}, a + 3\mathbb{Z}, a + 25\mathbb{Z}, a + 7\mathbb{Z})$$

Hay $2^4 = 16$ idempotentes: Calculamos el idempotente $\bar{e} \in \mathbb{Z}_{4200}$ tal que $\phi(\bar{e}) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$

Luego se nos queda el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} e \equiv 1 \pmod{8} \\ e \equiv 0 \pmod{3} \\ e \equiv 1 \pmod{25} \\ e \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Las ecuaciones que son congruentes con 1 se pueden agrupar en $x \equiv (\text{mod } 200 = 8 \cdot 25)$, de forma análoga nos queda, $x \equiv (\text{mod } 21)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 200t \\ x = 21s \end{cases} \implies 1 + 200t = 21s \implies 1 = 21s + 200(-t)$$

Y utilizando la identidad de Bézout y el algoritmo de Euclides obtendremos una solución, en este caso es $(s = -19, t = -2)$

^aTeorema chino de los restos

Ejercicio 12.

Apartado a)

$$a \in (e) \iff a = ea$$

\implies

Clara.

\implies

$$\text{Sea } a \in (e) \implies a = ex, \text{ con } x \in A \implies ea = e^2x = ex = a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = ea \\ b = eb \end{array} \right\} ab = e^2ab = eab$$

Si e es una unidad, entonces $e = 1$

$$e =^2 \implies 1 = e$$

Apartado c)

$$\text{Sea } a \in (e) \cap (f) \implies \left\{ \begin{array}{l} a = ea \implies fa = fea = 0 \\ a = fa \end{array} \right\} \implies a = 0$$

Y tenemos que $(e) + (f) = A$ ya que $e + f = 1$.

Como anillos (no ideales), tenemos el isomorfismo de anillos $A \rightarrow (e) \times (f)$ dado por $a \mapsto (ae, af)$

Apartado d)

$$1 = e + f, e \in I, f \in J \implies e + f = 1 = 1^2 = (e + f)^2 = e^2 + \underbrace{2ef}_{I \cap J = \{0\}} + f^2 = e^2 + f^2$$

Hemos descompuesto el 1 como suma de elementos de I, J de dos formas distintas. Como la suma es directa, tenemos entonces que $e = e^2$, $f = f^2$. Luego e es idempotente, $f = 1 - e$ y tenemos $(e) \subset I$, $(1 - e) \subset J$. Falta ver que se da la igualdad:

$$\text{Sea } x \in I \implies x = x \cdot 1 = x(e + f) = xe + \underbrace{x(1 - e)}_{\in I \cap J = \{0\}}$$

Ejercicio 14. Supongamos que f es suprayectivo y vamos a probar que si $P \trianglelefteq B$ y $f^{-1}(P)$ es primo (en A). Entonces P es primo en B .

Usando el primer teorema de isomorfía, $\frac{A}{\text{Ker}(f)} \cong B$:

$$\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}\left(\frac{A}{\text{Ker}(f)}\right)$$

$$Q \mapsto \bar{f}^{-1}(Q) = \{a \in \frac{A}{\text{Ker}(f)} : f(a) \in Q\} = \frac{f^{-1}(Q)}{\text{Ker}(f)}$$

Y utilizando 1.38.2 de los apuntes de Alberto tenemos la biyección:

$$\{\text{ideales primos que contienen a } A\} \rightarrow \text{Spec}\left(\frac{A}{\text{Ker}(f)}\right)$$

Esta biyección lleva $f^{-1}(P) \hookrightarrow \frac{f^{-1}(P)}{\text{Ker}(f)} \in \text{Spec}\left(\frac{A}{\text{Ker}(f)}\right)$

Ejercicio 17. Consideración previa general.

Sea $I \trianglelefteq A$ y queremos identificar $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \text{ideal de } A/I \text{ generado por } \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m\}$.

$$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \frac{J}{I}, \text{ para cierto } J \trianglelefteq A : I \subset J$$

Sea ahora $J = (a_1, \dots, a_m) + I$, tendremos que comprobar si:

$$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) \stackrel{?}{=} \frac{(a_1, \dots, a_m) + I}{I}$$

La inclusión \subset es directa porque cada uno de los \bar{a}_i se incluye en $\frac{(a_1, \dots, a_m) + I}{I}$.

Para la inclusión \supset , tenemos:

$$\bar{z} \in \frac{(a_1, \dots, a_m) + I}{I} \implies z + I = b + y + I, \text{ con } b \in (a_1, \dots, a_m), y \in I \implies y \in I z + I = b + I$$

Por tanto, todos los elementos de $\frac{(a_1, \dots, a_m) + I}{I}$ son de la forma $b + I = \bar{b}$, donde $b \in (a_1, \dots, a_m)$, pero $b = r_1 a_1 + \dots + r_m a_m$ con $r_i \in A \forall i = 1, \dots, m$. Tomando ahora clases tenemos:

$$\bar{b} = \bar{r}_1 \bar{a}_1 + \dots + \bar{r}_m \bar{a}_m \implies \bar{b} \in (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$$

Observación:

Llamamos $B = \frac{K[X, Y, Z]}{(XY, XZ)}$, $A = K[X, Y, Z]$, $I = (XY, XZ)$.

Apartado a)

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{(X, Y) + (XY, XZ)}{(XY, XZ)} \left(\begin{smallmatrix} \text{Obs: } (XY, XZ) \\ \subseteq (X, Y) \end{smallmatrix} \right) = \frac{(X, Y)}{(XY, XZ)}$$

Apartado b)

Razonamiento parecido al apartado anterior:

$$(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{(X, Z)}{(XY, XZ)}$$

Apartado c)

Razonamiento como en a).

$$(\bar{Y}, \bar{Z}) = \frac{(Y, Z)}{(XY, XZ)}$$

Apartado d)

Razonamiento como en a).

$$(\overline{X}) = \frac{(X)}{(XY, XZ)}$$

Apartado e)

$$(\overline{Y}) = \frac{(Y) + (XY, XZ)}{(XY, XZ)} = \left(\begin{smallmatrix} \text{Obs: } (XY) \\ \subseteq (Y) \end{smallmatrix} \right) = \frac{(Y, XZ)}{XY, XZ}$$

Apartado f)

$$(\overline{Z}) = \frac{(Z) + (XY, XZ)}{(XY, XZ)} = \frac{(Z, XY)}{(XY, XZ)}$$

Usaremos ahora que P es primo $\iff B/P$ es dominio, tomaremos $P = J/I$ y $B = A/I$, lo que nos queda:

$$J/I \text{ es primo en } A/I \iff \frac{A/I}{J/I} \text{ es dominio} \iff {}^a A/J \text{ dominio.}$$

Volvamos ahora a cada caso particular:

Apartado a)

$$\frac{(X, Y)}{(XY, XZ)} \text{ primo} \iff \frac{K[X, Y, Z]}{(X, Y)} \cong K[Z] \text{ dominio}$$

Apartado b,c)

Análogos al a).

Apartado d)

$$\frac{K[X, Y, Z]}{(X) \cong_{\text{ejercicio}} K[Y, Z]}$$

Apartado e)

$$\frac{K[X, Y, Z]}{(Y, XZ)} \text{ no es dominio porque } \overline{XZ} = \overline{0} \text{ y } \overline{X} \neq \overline{0} \neq \overline{Z}$$

Apartado f)

Análogo al anterior

^aSegundo teorema de isomorfía

Ejercicio utilizado en el anterior ejercicio: Sea B anillo y X_1, \dots, X_n variables sobre B . Para cada subconjunto $J \subset \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ consideremos la composición de homomorfismos de anillos:

$$B[X_i : i \in \mathbb{N}_n] \hookrightarrow^i B[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\pi} \frac{B[X_1, \dots, X_m]}{(X_j : j \in J)}$$

Probar que $\pi \circ i$ es un isomorfismo de anillos.

Ejercicio 18.

$$I + (x) = \{a + xf : a \in I, f \in A[X]\} = \{f \in A[X] : g(0) \in I\}$$

Se reduce a probar que cada uno es primo si y solo si A/I es dominio si y solo si $A[X]/I[X]$ es dominio si y solo si $A[X]/I + (x)$ es dominio.

Tenemos un homomorfismo de anillos:

$$\phi : \frac{A}{I} \rightarrow \frac{A[X]}{I + (x)} \text{ tal que } \bar{a} = a + I \mapsto [a]$$

Claramente está bien definido y es homomorfismo de anillos (conserva suma y multiplicación).

Tenemos:

$$\frac{A[X]}{I + (x)} \ni [f(X)] = [f(0) + Xg(X)] = [f(0)] + [Xg(X)] = \phi(\overline{f(0)})$$

Luego ϕ es suprayectiva. Comprobamos la inyectividad.

$$\text{Ker}(\phi) = \{\bar{a} = a + I : [a] = [0]\} = \{\bar{a} \in A/I : a \in I + (x)\} = \{\bar{a} \in A/I : a \in I\} = \{\bar{0}\}$$

Por tanto ϕ es un isomorfismo de anillos. Con esto tenemos el apartado b) y la mitad del apartado a). Veamos ahora la relación entre A/I y $A[X]/I[X]$. Consideremos el homomorfismo:

$$\frac{A}{I} \rightarrow \frac{A[X]}{I[X]} \text{ dado por } \bar{a} \mapsto [a]$$

A partir de este formamos:

$$\psi : \frac{A}{I}[X] \rightarrow \frac{A[X]}{I[X]} \text{ dado por } \psi : \sum_{i=1}^n \bar{a}_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^n [a_i][X]^i = \left[\sum_{i=0}^n a_i X^i \right]$$

Es directo ver que ψ es suprayectiva, y tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\psi) &= \left\{ \sum_{i=0}^n \bar{a}_i X^i : \sum_{i=0}^n a_i X^i \in I[X] \right\} \implies \text{Ker}(\psi) = \left\{ \sum_{i=0}^n \bar{a}_i X^i : a_i \in I \forall i = 0, 1, \dots, n \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n \bar{a}_i X^i : \bar{a}_i = \bar{0} : \forall i = 0, 1, 2, \dots, n \right\} = \{\bar{0}\} \end{aligned}$$

Como conclusión llegamos a que $A[X]/I[X] \cong \frac{A}{I}[X]$ lo que nos lleva a demostrar c). Porque $\frac{A}{I}[X]$ nunca será un cuerpo.

Ejercicio 19. La última parte se queda como ejercicio planteado.

$$\begin{aligned}
 0 &= (-a)^n (1-b)^n = \sum_{i=0}^n b^i 1^{n-i} = 1 - nb + \binom{n}{2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (-b)^{n-1} + (-b)^n \implies \\
 &\implies 1 = b(n - \binom{n}{2} b + \dots - \binom{n}{n-1} (-b)^{n-2} + (-b)^{n-1})
 \end{aligned}$$

Ejercicio 20. Notación modificada.

Denotamos al radical de Jacobson de A como $J(A)$.

Apartado a)

Demostramos que es un si y solo si.

\Leftarrow

Supongamos que $a \notin J(A)$:

$$\implies \exists M \in \text{MaxSpec}(A) : a \notin M \implies M \subsetneq M + (a) \implies M + (a) = A \implies$$

$$1 = m + ra, \quad m \in M, \quad r \in A \implies m = 1 + (-r)a \in 1 + (a) \implies m \in \mathcal{U}(A) \implies A = (m) \subseteq M$$

Con lo que tenemos una contradicción ya que M es propio al ser maximal.

\implies

Supongamos que $1 + (a) \not\subseteq \mathcal{U}(A)$, entonces:

$$\implies \exists r \in A : 1 + ra \notin \mathcal{U}(A) \implies (1 + ra) \subseteq M \text{ para algún } M \text{ maximal}$$

$$\implies 1 = \underbrace{1 + ra}_{\in M} + \underbrace{(-r)a}_{\in J(A) \subseteq M} \implies 1 \in M$$

Y llegamos de nuevo a la misma contradicción, M es propio, luego no puede contener al 1 (sería el total).

Apartado b)

Sea e idempotente, $e = e^2 \in J(A)$. Por el apartado a). Tenemos que $1 - e \in \mathcal{U}(A)$ y sabemos por el problema 12 que $1 - e$ es idempotente. Además, por este ejercicio también sabemos que al ser unidad e idempotente, $1 - e = 1 \implies e = 0$.

Ejercicio 21. Apartado a)

\implies

Se trata de probar que $M = A \setminus \mathcal{U}(A)$. La inclusión \subseteq es directa. Basta probar \supseteq : Si $a \in A \setminus \mathcal{U}(A) \implies (a)$ es un ideal propio $\implies (a) \subseteq M \implies a \in M$

\Leftarrow

Si $I \not\subseteq A$ es ideal propio, $I \subseteq A \setminus \mathcal{U}(A)$

Apartado b)

(ver ejercicio anterior)

Como $J(A) = M \implies 1 + M \subseteq \mathcal{U}(A)$. Lo único que tenemos que ver es que sea subgrupo. Que sea cerrado para la multiplicación es trivial. Veamos que existen los inversos.

Sea $m \in M \implies 1 + m \in 1 + M \subseteq \mathcal{U}(A) \implies$ escribimos $(1 + m)^{-1} = 1 + m'$, con $m' \in A$. Veamos que $m' \in A$:

$$1 = (1 + m)(1 + m')$$

Apartado d)

$\bar{1} + m = \bar{1} + (\bar{3})$ es un subgrupo multiplicativo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{27})$

$$\bar{1} + (\bar{3}) = \{\overline{1+a} : a \in 3\mathbb{Z}\} = \{\bar{b} : b \equiv 1 \pmod{3}\} = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{13}, \bar{16}, \bar{19}, \bar{22}, \bar{25}\}$$

Vemos que lo genera $\bar{4}$:

$$\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{16}, \bar{10}, \dots\} \text{ (tamaño mayor que 4)} \implies \bar{1} + (\bar{3}) = \langle \bar{4} \rangle$$

Ejercicio 22.

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{a}{b}, \text{ donde } p \nmid b\}$$

Apartado a)

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \{q \in \mathbb{Z}_{(p)} : q = \frac{a}{b}, \text{ con } a \notin p\mathbb{Z}\}$$

Apartado b)

$\mathbb{Z}_{(p)}$ anillo local con $\mathbb{Z}_{(p)} \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{(p)}) = m$ el único ideal maximal que está generado por $\frac{p}{1} = p$

$$\mathbb{Z}_{(p)} \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{(p)}) = p\mathbb{Z}_{(p)} = \{p\frac{a}{b} : \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(p)}\}$$

Que se ve (en parte) con el ejercicio 1.21.a

Apartado c)

$$\frac{\mathbb{Z}_{(p)}}{p\mathbb{Z}_{(p)}} \cong \mathbb{Z}_p := \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$$

Definimos el homomorfismo:

$$\mathbb{Z}_p \rightarrow \frac{\mathbb{Z}_{(p)}}{p\mathbb{Z}_{(p)}} \quad \bar{a} = [a] = a + p\mathbb{Z}_{(p)}$$

$$\text{Ker}(\phi) = \{\bar{a} = a + p\mathbb{Z} : a + p\mathbb{Z}_{(p)} = p\mathbb{Z}_{(p)}\}$$

Luego los elementos serán de la forma:

$$\bar{a}, \text{ con } a = p \frac{r}{s}, \text{ con } p \nmid s \implies \begin{cases} sa = pr \\ p \nmid s \end{cases} \implies p|a \implies \bar{a} = \bar{0} \implies \text{Ker}(\phi) = \{\bar{0}\}$$

Luego ϕ es inyectivo. Sin embargo, esto lo podríamos haber demostrado diciendo simplemente que los homomorfismos que salen de un cuerpo son inyectivos.

Comprobemos ahora que ϕ es sobre. Sea $[a/b] = a/b + p\mathbb{Z}_{(p)} \in \frac{\mathbb{Z}_{(p)}}{p\mathbb{Z}_{(p)}}$. Queremos ver que $[a/b] = [r/1] = \phi(\bar{r})$, para cierto $r \in \mathbb{Z}$

Si $[a/b] = [0]$, no hay nada que probar. Podemos suponer que $[a/b] \neq [0] \iff a/b \notin p\mathbb{Z}_{(p)} = m = \mathbb{Z}_{(p)} \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{(p)})$

$$\implies ab \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{(p)}) : p \nmid a \text{ (y } p \nmid b)$$

Entonces hacemos:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \implies \left[\frac{a}{b}\right] = [a][b^{-1}] = [a] \cdot [b]^{-1} = \phi(a)\phi(b)^{-1} = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(\bar{a}\bar{b}^{-1}0)$$

Apartado d)

Hecho en un ejercicio planteado anteriormente de forma más general.

Ejercicio 23. Modificado

Sea $I \triangleleft A$ ideal propio tal que $I \subseteq J(A)$. Demostrar:

1. Para $a \in A$, se verifica:

$$a \in \mathcal{U}(A) \iff a + I \in \mathcal{U}(A/I)$$

2. Si A/I no tiene elementos idempotentes no triviales \implies lo mismo pasa con A .

3. Si I es maximal, entonces A es local.

Apartado a)

\implies

Trivial ($ab = 1 \implies \bar{a}\bar{b} = \bar{1}$)

\Longleftarrow

$$\begin{aligned} \text{Si } \bar{a} \in \mathcal{U}(\bar{A}) &\implies \exists \bar{b} \in \bar{A} : \bar{a}\bar{b} = \bar{1} \implies ab - 1 \in I \subseteq J(A) \implies \\ &\implies 1 + (ab - 1) \in \mathcal{U}(A) \implies ab \in \mathcal{U}(A) \implies a \in \mathcal{U}(A) \end{aligned}$$

Apartado b)

$$\begin{aligned} &\text{Sea } e = e^2 \in A \implies \bar{e} = \bar{e}^2 \implies \\ \implies &\begin{cases} \bar{e} = \bar{0} \iff e \in I \subseteq J(A) \implies e = 0 \\ \text{ó} \\ \bar{e} = \bar{1} \implies e - 1 \in I \subseteq J(A) \implies 1 + (e - 1) \in \mathcal{U}(A) \iff e \in \mathcal{U}(A) \implies e = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 24. Apartado a)

Tomamos $t = t(n, m) = n + m$ y hacemos inducción en $t \geq 2$. El caso de $t = 2$ es claro. Sea $t > 2$ y supongamos que es cierto siempre que la suma de los exponentes sea $< t$.

La hipótesis de inducción nos dice entonces que I^n, J^{m-1} comaximales y I^n, J comaximales. Ambas propiedades implican entonces que I^n es comaximal con $J^{m-1}J = J$

Apartado b)

\Leftarrow

Tomemos $x = 1, y = 0 \Rightarrow (1+I) \cap J \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in I, b \in J : 1+a = b \Rightarrow 1 = (-a)_{\in I} + b_{\in J}$
 \Rightarrow

Sean $x, y \in A \Rightarrow x - y \in A = I + J \Rightarrow x - yi + j$, con $i \in I, j \in J \Rightarrow$

$$x - i = y + j \in (x + I) \cap (y + J)$$

Anillos noetherianos

Se han cambiado algunas definiciones respecto a los apuntes de Alberto del Valle.

Definición 2.1. Retículo

Un conjunto (parcialmente) ordenado (\mathcal{L}, \leq) se dice que es un **retículo** cuando cualquier subconjunto de dos elementos tiene ínfimo y supremo. (\mathcal{L}, \leq) se dice **retículo completo** cuando cualquier subconjunto no vacío tiene ínfimo y supremo.

Notación

Si $0 \neq S \subseteq \mathcal{L} \implies$

$$\begin{cases} \bigvee_{s \in S} = \sup_{\mathcal{L}}(S) \\ \bigwedge_{s \in S} = \inf_{\mathcal{L}}(S) \end{cases}$$

Definición 2.2. Compacidad y cocompacidad

Sea (\mathcal{L}, \leq) un retículo completo. Diremos que $x \in \mathcal{L}$ es **compacto** (resp. **cocompacto**) si dado cualquier subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\bigvee_{s \in S} s = x$ (resp. $\bigwedge_{s \in S} s = x$), existe $F \subseteq S$ finito tal que $x = \bigvee_{s \in F} s$ (resp. $x = \bigwedge_{s \in F} s$).

Ejercicio 1. Ejercicio propuesto

Sea A un anillo. Probar:

1. $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$ es un retículo completo.
2. Un ideal $I \trianglelefteq A$ es un elemento compacto de $\mathcal{L}(A)$ sii es un ideal finitamente generado.

Proposición 2.1. Sea (\mathcal{L}, \leq) un conjunto ordenado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. (\mathcal{L}, \leq) satisface la condición de cadena ascendente (ACC en inglés): Si $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \implies m \in \mathbb{Z}^+ : s_m = s_{m+1} = \dots$
2. Todo subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{L}$ tiene algún elemento maximal.

Si además (\mathcal{L}, \leq) es un retículo completo, dichas condiciones son equivalentes a:

3. Todo elemento $x \in \mathcal{L}$ es compacto.

Observación

(\mathcal{L}, \leq) es conj. ordenado (retículo completo) $\iff (\mathcal{L}, \geq)$ es conjunto ordenado (retículo completo).

Luego podemos hacer una proposición equivalente a la anterior cambiando la condición de cadena ascendente por descendente y \leq por \geq .

Demostración

1 \implies 2

Por reducción al absurdo, supongamos que existe un subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{L}$ tal que S no tiene elementos maximales.

Sea $s_1 \in S$ arbitrario. Tenemos que s_1 no es maximal, luego $\exists s_2 \in S$ tal que $s_1 < s_2$ con s_2 no maximal, luego podemos tomar s_3 . Así construimos una cadena estrictamente ascendente $s_1 < s_2 < \dots$, lo que es una contradicción con ACC.

2 \implies 1

Sea $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$ una cadena ascendente $\implies S := \{s_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ tiene un elemento maximal, pongamos $\mu = s_m$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+ \implies \mu = s_m \leq s_{m+k} \forall k = 0, 1, \dots, \implies S_m = S_{m+k} \forall k \geq 0$

En adelante supondremos que (\mathcal{L}, \leq) es un retículo completo.

3 \implies 1

Sea $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ una cadena ascendente en \mathcal{L} y tomamos $x = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}^+} s_n \implies x = \bigvee_{k=1}^r s_{n_k}$ para cierto subconjunto finito $\{n_1 < \dots < n_r\} \subseteq \mathbb{Z}^+ \implies x = s_{n_r}$. Como s_{n_r} es el supremo, $s_{n_r+k} = s_{n_r} \forall k > 0$

2 \implies 3

Sea $x \in \mathcal{L}$ arbitrario y $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{L}$ tal que $x = \bigvee_{s \in S} s$. Tomamos ahora $x_F = \bigvee_{s \in F} s \forall F \subseteq S$ finito, ¿ $x = \bigvee_{F \subseteq S \text{ finito}} x_F$?

Pero sabemos que $\Sigma = \{x_F : F \subseteq S \text{ finito}\}$, luego Σ tiene un elemento maximal: $\exists F' \subseteq S$ finito tal que $x_{F'} = \bigvee_{s \in F'} s$ es maximal en Σ .

Se trata de probar que $x = x_{F'}$, sea $s \in S$ arbitrario \implies

$$F'' = F' \cup \{s\} \implies x_{F'} = \bigvee_{s \in F'} s \leq x_{F''} = \bigvee_{s \in F''} s \implies x_{F'} \text{ maximal}$$

$$\implies x_{F'} = x_{F''} \implies t \leq x_{F'} \forall t \in S \implies x_{F'} \leq x = \bigvee_{s \in S} s \leq x_{F'}$$

□

Definición 2.3. Anillo noetheriano

Un anillo A se dice que es **noetheriano** cuando $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$ cumple las tres condiciones equivalentes de la proposición anterior^a.

^aRecordemos que $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$ es un retículo completo por el ejercicio propuesto.

Proposición 2.5. Si A es noetheriano, de cualquier subconjunto $X \subseteq A$ se puede extraer un subconjunto finito (minimal) X_0 tal que $(X) = (X_0)$

Demostración

$$\Omega = \{I = (X') : X' \subseteq X, X' \text{ finito}\}$$

$$\mathcal{L}(A) \text{ noetheriano} \implies \exists I_0 = (X_0) \text{ elemento maximal de } \Omega \implies X \subseteq {}^1I_0 = (X_0)$$

□

Proposición 2.6. Si D es un dominio noetheriano $\implies D$ es un dominio de factorización (posiblemente no única)

Demostración

Supongamos que no es así, luego $\exists a \in A \setminus (\mathcal{U}(A) \cup \{0\})$ que no es producto de irreducibles $\implies \Omega \neq \emptyset \implies \exists (b) \in \Omega : (b) \text{ es maximal en } \Omega \implies b \text{ no es irreducible} \iff \mathcal{L}(A) \text{ noeth} \exists x, y \in A \setminus \mathcal{U}(A) : xy = b$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} (b) \subsetneq (x) \\ (b) \subsetneq (y) \end{array} \right\} \implies (x), (y) \notin \Omega \implies$$

$\implies x$ y y son producto finito de irreducibles $\implies b = xy$ también lo es, luego hemos llegado a una contradicción.

□

Proposición 2.7. Si A es noetheriano, entonces todo ideal contiene un producto finito de ideales principales

Demostración

Supongamos que no es cierto $\iff \exists I \trianglelefteq A : I$ no contiene ningún producto finito de ideales primos.

$$\emptyset \neq \Omega = \{I' \trianglelefteq A : I' \text{ no contiene ningún producto finito de ideales primos}\}$$

Como es $\Omega \neq \emptyset$, podemos tomar $I_0 \in \Omega$ maximal $\implies I_0$ no es primo $\iff \exists a, b \in A \setminus I_0 : ab \in I_0 \implies$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} I_0 \subsetneq I_0 + (a) \\ I_0 \subsetneq I_0 + (b) \end{array} \right\} \implies I_0 + (a), I_0 + (b) \notin \Omega \implies \exists P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$$

De forma que P_i, Q_i son ideales primos tales que $P_1 \cdots P_r \subseteq I_0 + (a)$ y $Q_1 \cdots Q_s I_0 + (b) \implies P_1 \cdots P_r Q_1 \cdots Q_s \subseteq (I_0 + (a))(I_0 + (b)) \subseteq I_0$

□

Teorema 2.8. De la base de Hilbert

Sea A un anillo y $n > 0$ un entero. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es noetheriano.
2. $A[X_1, \dots, X_n]$ es noetheriano.

Demostración

2 \implies 1

Observación

¹Ejercicio

$$I \trianglelefteq A \implies I[X] \trianglelefteq A[X], \quad A \cap I[X] = I$$

Sea $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ una cadena ascendente de ideales de $A \implies I_0[X] \subseteq I_1[X] \subseteq \dots$ es una cadena en $A[X] \implies A[X] \text{ noetheriano} \exists m > 0 : I_m[X] = I_{m+k}[X] \quad \forall k \geq 0 \implies \text{ver obs. } A \cap I_m[X] = A \cap I_{m+k}[X] \quad \forall k \geq 0$

1 \implies 2

Basta probarla cuando $n = 1$, $A[X_1, \dots, X_n] \cong A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$

Vamos a probar que $A[X]$ es noetheriano. Supongamos que no lo es $\implies \exists I \trianglelefteq A[X] : I$ no es f.g. \implies elegimos $f_1 \in I \setminus \{0\}$ con grado máximo (n_1) y ponemos b_1 como el coeficiente principal de f_1 :

$(0) \subsetneq (f_1) \subsetneq I \implies$ tomo $f_2 \in I \setminus (f_1)$ con grado mínimo ($n_1 \geq n_2$) y ponemos b_2 el coeficiente principal de f_2 . Entonces $(f_1, f_2) \subsetneq I \implies$ tomo $f_3 \in I \setminus (f_1, f_2)$ con grado mínimo $n_3 (\geq n_2 \geq n_1)$ y tomamos b_3 el coeficiente principal de $f_3 \dots$

Probaremos entonces que la cadena $(b_1) \subseteq (b_1, b_2) \subseteq (b_1, b_2, b_3)$ es una cadena **estrictamente** ascendente, lo que nos llevará a una contradicción.

Si $(b_1, \dots, b_{k-1}) = (b_1, \dots, b_k) \implies b_k = a_1 b_1 + \dots + a_{k-1} b_{k-1}$ para ciertos $a_i \in A$, entonces:

$$g := f_k a_1 X^{n_k - n_1} f_1 - \dots - a_{k-1} X^{n_k - n_{k-1}} f_{k-1} \in I$$

$0 = b_k - a_1 b_1 - \dots - a_{k-1} b_{k-1}$ es el coeficiente principal de X^{n_k} en g

Si fuese $g \in (f_1, \dots, f_{k-1}) \implies f_k = g + \sum_{i=1}^{k-1} a_i X^{n_k - n_i} f_i$

Por tanto $g \notin (f_1, \dots, f_{k-1})$

b_k es el coeficiente principal de $f_k \quad \forall k \geq 1 \implies g \in I \setminus (f_1, \dots, f_{k-1})$ y $\text{def}(g) < \text{deg}(f_k)$

□

Teorema 2.12. Cohen

Sea A un anillo. Son equivalentes:

1. A es noetheriano.
2. Todo ideal primo es f.g.

Notación

Si $I \trianglelefteq A$ y $X \subseteq A \implies (I : X) = \{a \in A : aX \subseteq I\}$. Además, $(I : X)$ es un ideal e $I \subseteq (I : X)$

Además, $(I : x) = (I : \{x\})$

Demostración

2 \implies 1

Supongamos que A no es noetheriano $\implies I \trianglelefteq A : I$ no es f.g. $\implies \Omega = \{I' \trianglelefteq A : I' \text{ no es f.g.}\} \neq \emptyset$

¿Toda cadena $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en Ω tiene una cota superior en Ω ?

$$J := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

Si $J = (a_1, \dots, a_m) \implies \exists \mu \in \Lambda : a_1, \dots, a_m \in I_\mu \implies (I_\mu \subseteq) J \subseteq I_\mu \implies J = I_\mu \implies I_\mu \text{ f.g. (contradicción)}$

Por el lema de Zorn, $\exists P \in \Omega$, elemento maximal. Demostraremos que P es un ideal primo (lo que nos llevará a una contradicción).

Supongamos que P no es primo, sean $a, b \in A \setminus P$ y $ab \in P$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} P \subsetneq P + (a) \\ y \\ b \in (P : (a)) = (P : a) \end{array} \right\} \implies P \subsetneq (P : (a)) \implies$$

$$\implies P + (a), (P : a) \notin \Omega \implies P + (a) = (p_1 + r_1a, \dots, p_s + r_sa), p_i \in P, r_i \in A \quad (P : a) = (q_1, \dots, q_s)$$

$$\implies ?P = (p_1, \dots, p_s, aq_1, \dots, aq_s) \quad (\implies \text{ contradicción})$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } p \in P &\implies p = b_1(p_1 + r_1a) + \dots + b_s(p_s + r_sa) \implies p = \sum_{i=1}^s b_i p_i + a \sum_{i=1}^s b_i r_i (*) \implies a \sum_{i=1}^s b_i r_i \in P \\ P &\iff \sum_{i=1}^s b_i r_i \in (P : a) = (q_1, \dots, q_t) \implies \sum_{i=1}^s b_i r_i = \sum_{j=1}^t c_j q_j \implies (\text{falta el final, consultar apuntes de Alberto del Valle}) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.13.

Sea A anillo y $n > 0$ un entero. Son equivalentes:

1. A es noetheriano.
2. $A[[X_1, \dots, X_n]]$ noetheriano.

Demostración

$$2 \implies 1$$

Como en el caso de polinomios (teorema de la base de Hilbert)

$$1 \implies 2$$

Es la reducción al caso $n = 1$ como en polinomios (Si $n > 1$, $A[[X_1, \dots, X_n]] \cong A[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]]$).

Vamos a probar que $A[[X]]$ es noetheriano.

$$\begin{aligned} \text{Sea } P \trianglelefteq A[[X]] \text{ un ideal primo} &\implies I_0 = \{a \in A : a = f(0), \text{ para alguna } f \in P\} \implies \\ I_0 \trianglelefteq A &\implies A \text{ noeth. } I_0 = (b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Como $b_i \in I_0 \implies$ podemos fijar $f_i \in P : f_i(0) = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Tenemos entonces dos casos posibles:

1. $X \in P \implies P = (f_1, \dots, f_m, X)$. Justificamos esta igualdad:

El lado \supseteq es directo. Sea ahora $f \in P \implies f = \underbrace{f(0)}_{\in I_0} + Xg(X)$ con $f(0) = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$ con

los $a_i \in A$. Entonces $f = a_1b_1 + \dots + a_nb_n + Xg(X)$

2. $X \notin P$. Probaremos entonces que $P = (f_1, \dots, f_n)$.

3. De nuevo el lado \supseteq es directo. Sea $f \in P \implies f(0) \in I_0 \implies f(0) = a_1^0b_1 + \dots + a_n^0b_n$. Entonces $g = f - \sum_{i=1}^n a_i^0f_i \implies$ tiene término independiente nulo $\implies g = Xg_1(X) \in P \implies X \notin P \implies g_1 \in P$

Si $g_1(0) = \sum_{i=1}^n a_i^1 b_i \implies g_1 - \sum_{i=1}^n a_i^1 f_i$ es un polinomio en P con término indep. nulo. \implies
 $g_1 - \sum_{i=1}^n a_i^1 f_i = Xg_2 \implies g_1 = \sum_{i=1}^n a_i^1 f_i + g_2$. Con g_2 múltiplo de X , $g_2 = Xg_3 \implies g_3 \in P$
 Con lo que queda una suma infinita:

$$\sum_{i=0}^n a_i^0 f_i + \sum_{i=1}^n a_i^1 X f_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 X^2 f_i + \dots = \sum_{i=1}^n h_i(X) f_i$$

□

Definición 2.4. Dimensión de Krull

Sea A un anillo. Se llama **dimensión de Krull** de A al número $n \in \mathbb{N} \cup \{x\}$ tal que:

$$\dim(A) = \text{Kdim } A = \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{existe una cadena } P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n \text{ en } \text{Spec}(A)\}$$

Proposición 2.14. Si A es un anillo artinian entonces:

1. $\text{Spec}(A) = \text{MaxSpec}(A)$, o sea todo ideal primo es maximal, o " A tiene dimensión $\dim(A) = 0$.
2. $\text{Spec}(A) = \text{MaxSpec}(A)$ es finito.
3. $J := \text{Jac}(A) = \text{Nil}(A)$ es **nilpotente**

(no está copiado entero)

Demostración

1.

$P \in \text{Spec}(A) \implies \frac{A}{P}$ dominio artinian y por el ejemplo 2.4.3 tenemos que A/P es cuerpo
 $\iff P \in \text{MaxSpec}(A)$

2.

Definimos:

$$\Omega = \{I \trianglelefteq A : I = \text{intersección finita de ideales maximales}\}$$

Tenemos que $\Omega \neq \emptyset$ porque A tiene un ideal maximal $\implies \exists I_0 \in \Omega$ minimal $\implies I_0 = M_1 \cap \dots \cap M_r$.

Sea entonces $M \in \text{MaxSpec}(A) \implies I_0 \cap M \in \Omega \implies$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} I_0 \cap M \in \Omega \\ I_0 \cap M \in I_0 \end{array} \right\} \implies I_0 \text{ minimal } I_0 \cap M = I_0 \iff I_0 \subseteq M$$

$$M_1 \cdots M_r \subseteq M_1 \cap \dots \cap M_r = I_0 \subseteq M \implies M \text{ primo } \exists j : M_j \subseteq M \implies$$

$$\implies M_j \text{ maximal } M_j = M \implies \text{MaxSpec}(A) = \{M_1, \dots, M_r\}$$

3.

Como A es artinian y se tiene la cadena descendente $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots \implies \exists m \in \mathbb{Z}^+$ (minimal) con $J^m = J^{m+k} \forall k \geq 0$. Definimos $I := J^m$ ($I^2 = I$).

Supongamos que $I \neq 0 \implies$

$$\emptyset \neq \Omega' := \{K \trianglelefteq A : KI \neq 0, K \subseteq I\} \ni I$$

$\implies \Omega'$ tiene un elemento minimal K_0 tal que $K_0 I \neq 0 \implies \exists x \in K_0 : xI \neq 0 \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x)I \neq 0 \implies (x) \in \Omega' \\ (x) \subseteq K_0 \text{ minimal} \end{array} \right\} \implies (x) = K_0$$

Entonces $xI \neq 0 \implies 0 \neq xI = xI^2 = (xI)I \implies xI \in \Omega'$ y se tiene $xI_{\in \Omega'} \subseteq (x) = K_0 \implies K_0 \text{ minimal en } \Omega' \implies xI = (x) = K_0$

Entonces $x \in xI \implies x = xy$ para cierto $y \in I$, luego $x = xy = xy^2 = \dots = xy^n \forall n > 0$ y además $y \in I \subseteq J(A) = \text{Nil}(A) \implies \exists n > 0 : y^n = 0$. Entonces $x = 0$, lo que nos lleva a una contradicción.

4.

$J = M_1 \cap \dots \cap M_r$, donde $\text{MaxSpec}(A) = \{M_1, \dots, M_r\}$. Como cada M_i son maximales, los M_i son comaximales dos a dos. Por tanto, tenemos que:

$$J = M_1 \cap \dots \cap M_r = M_1 \cdots M_r \implies 0 = J^m = M_1^m \cdots M_r^m$$

□

Teorema 2.15. (Akizuki)

Sea A un anillo. Son equivalentes:

1. A es artinian.
2. A es noetheriano y $\dim(A) = 0$.

Aún no tenemos todos los conceptos necesarios para demostrar este teorema, nos dejaremos algún detalle sin resolver.

Demostración

1 \implies 2

Ya hemos visto que $\dim(A) = 0$. Queda pendiente probar que A es noetheriano.

2 \implies 1

Sabemos que $\implies \text{MaxSpec}(A) = \text{Spec}(A) = \text{MinSpec}(A) \implies$ ² este conjunto es finito.

Si tomamos $\text{Spec}(A) = \{M_1, \dots, M_r\}$ tenemos que $J := J(A) = \text{Nil}(A) = M_1 \cap \dots \cap M_r = M_1 \cdots M_r$ (ya que los elementos son maximales dos a dos).

Por ser A noetheriano, J es f.g y como también es nil (todos sus elementos son nipotentes), tenemos que J es nilpotente (ejercicio 2.4) $\iff \exists m > 0$ (minimal) tal que $J^m = 0 \implies 0 = M_1^m \cdots M_r^m$

Utilizando ahora el teorema chino de los restos (la versión general de esta asignatura), tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \phi : A & \rightarrow & \frac{A}{M_1^m} \times \dots \times \frac{A}{M_r^m} \\ a & \mapsto & (\bar{a}, \dots, \bar{a}) \end{array}$$

es un isomorfismo de anillos.

$$\text{Entonces } A \text{ es artinian} \iff \frac{A}{M_i^m} \text{ es artinian } \forall i = 1, \dots, r$$

²Ejercicio 2.7

Afirmamos ahora que A/M_i^m es un anillo local (noetheriano) con M_i/M_i^m como único ideal maximal (= primo).

Basta con ver que es el único ya que usando el teorema de correspondencia podremos ver que es maximal.

Sea M/M_i^m un ideal maximal de A/M_i^m ($\implies M \in \text{MaxSpec}(A)$) $\implies M_i^m \subseteq M \implies M$ primo $M_i \subseteq M \implies M_i$ maximal $M_i = M$

La prueba entonces queda reducida a probar que si A es un anillo noetheriano local con $\dim(A) = 0$ (y M como único ideal maximal), entonces A es artiniiano.

Observación

M es nilpotente $\iff \exists q > 0$ (*minimal*) tal que $M^q = 0$

Observación

M es f.g. \implies fijo $\{x_1, \dots, x_d\}$ conjunto de generadores de $M \implies$ *ejerc.* $M^t = (x_{i_1}, \dots, x_{i_t} : i_1, \dots, i_t \in \{1, 2, \dots, d\})$

Crucial: Cada cociente M^t/M^{t+1} (en particular $M^{q-1} = M^{q-1}/M^q$) es un A/M -esp. vectorial con $\{\overline{x_{i_1}}, \dots, \overline{x_{i_t}}\}$ como conjunto de generadores. Definimos entonces:

$$\begin{aligned} \frac{A}{M} \times \frac{M^t}{M^{t+1}} &\rightarrow \frac{M^t}{M^{t+1}} \\ (a + m, y + m^{t+1}) &\mapsto ay + m^{t+1} \end{aligned}$$

Probad que está bien definida y transforma M^t/M^{t+1} es un A/M -esp. vectorial.

Además, si $y \in M^t \implies y = \sum a_i x_{i_1} \cdots x_{i_t} \implies y + M^{t+1} = \sum a_i + m(x_{i_1} \cdots x_{i_t} M^{t+1}) \implies M^t/M^{t+1}$ está generado como A/M -esp. vectorial por $\{\overline{x_{i_1} \cdots x_{i_t}}\}$

Entonces cada M^t/M^{t+1} es un $\frac{A}{M}$ -esp. vectorial de dimensión finita.

Entonces $M^q = 0 \neq M^{q-1}$. Probaremos por inducción en $q \geq 1$ que A es artiniiano.

Si $q = 1 \implies M = 0 \implies A = A/M$ es un cuerpo y terminamos.

Sea $q > 1$ y lo suponemos cierto para $q - 1 \implies A/M^{q-1}$ es artiniiano.

Sea $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ una cadena descendente de ideales de A . Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{I_0 + M^{q-1}}{M^{q-1}} \supseteq \frac{I_1 + M^{q-1}}{M^{q-1}} \supseteq \dots & \text{se estaciona por ser } A/M^{q-1} \text{ artiniiano} \\ I_0 \cap M^{q-1} \supseteq I_1 \cap M^{q-1} \supseteq \dots & \text{se estaciona por ser } M^{q-1} \text{ un } A/M\text{-esp. vectorial de dimensión finita} \end{array} \right.$$

Entonces $\exists s > 0$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_s + M^{q-1} = I_{s+k} + M^{q-1} \\ I_s \cap M^{q-1} = I_{s+k} \cap M^{q-1} \end{array} \right\} \forall k \geq 0$$

Se trata ahora de probar que si $I, J \leq A : I \supseteq J$ y se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} I + M^{q-1} = J + M^{q-1} \\ I \cap M^{q-1} = J \cap M^{q-1} \end{array} \right\} \implies I = J$$

$$\underbrace{y}_{\in I} - \underbrace{z}_{\in J \subseteq I} \implies h \in I \cap M^{q-1} = J \cap M^{q-1} \implies h \in J \implies y = z + h \in J$$

□

Ejercicios

Ejercicio 1.

Apartado c)

$$X \subseteq (X) \implies {}_{2,1.b)}(I : (X)) \subseteq (I : X)$$

Probamos que $(I : X) \subseteq (I : (X))$.

Sea $a \in (I : X) \iff ax \in I \forall x \in X$.

Quiero probar que si $z \in (X) \implies az \in I$:

$$z \in (X) \iff z = \sum_{i=1}^n b_i x_i \ (b_i \in A, x_i \in X) \implies az = \sum_{i=1}^n b_i ax \implies az \in I$$

Apartado e)

1.

Sea $a \in A$:

$$a \in ((I : X) : Z) \iff aZ \subseteq (I : X) \iff az \in (I : X) \forall z \in Z \iff (az)X \subseteq I \forall z \in Z$$

$$(az)x = a(zx) \in I \forall z \in Z, \forall x \in X \iff aw \in I \forall w \in X \cdot Z = Z \cdot X \iff a \in (I : X \cdot Z)$$

Apartado f)

Sea $a \in A$:

$$a \in (I : \bigcup_t X_t) \iff az \in I \forall z \in \bigcup_t X_t \iff az \in I \forall z \in X_t \text{ con } t \in T \text{ arbitrario}$$

$$\iff a \in (I : X_t) \forall t \in T \iff a \in \bigcap_{t \in T} (I : X_t)$$

2.

Sabemos que $\sum_{t \in T} J_t = (\bigcup_{t \in T} J_t)$ y aplicando el apartado c) y el caso anterior:

$$\left(I : \sum_{t \in T} J_t \right) = \left(I : \left(\bigcup_{t \in T} J_t \right) \right) = \left(I : \bigcup_{t \in T} J_t \right) \bigcap_{t \in T} (I : J_t)$$

Ejercicio 2. Hay una errata en el tercer caso del a). El enunciado correcto es:

$$\left(\frac{J}{I}\right)\left(\frac{J'}{I}\right) = \frac{JJ' + I}{I}$$

Ejercicio 3.

\supseteq

Directa. Basta con ver que el conjunto de generadores de $(X \cdot Y)$ está contenido en $(X)(Y)$, que es directo.

\subseteq

$(X)(Y) = ((X) \cdot (Y)) \implies$ sus elementos son las sumas $\sum_{i=1}^n z_i w_i$ donde $z_i \in (X)$, $w_i \in (Y)$.
Entonces $z_i \in (X) \implies z_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} x_j$ donde $a_{ij} \in A$, $x_j \in X$ y $w_j \in (Y) \implies w_i = \sum_{k=1}^{q_i} b_{ik} y_k$,
donde $b_{ik} \in A$, $y_k \in Y \implies z_i w_i = \sum_{j,k} a_{ij} b_{ik} x_j y_k \in (X \cdot Y)$

Ejercicio 4.

Tenemos que $I = (b_1, \dots, b_n)$. Hacemos inducción en $n \geq 1$.

Para $n = 1$, $I = (b_1)$. Como b_1 es nilpotente, $\exists m > 0$: $b_1^m = 0 \implies I^m = 0$

Sea $n > 1$ y cierto para ideales nil generados por menos de n elementos. Si tomamos $I' = (b_1, \dots, b_{n-1})$, I' es nil ($I' \subseteq I$). La hipótesis de inducción nos da además un $p > 0$ entero tal que $I'^p = 0$.

Por otra parte, $(b_n)^q = 0$ para un cierto entero $q > 0$. Observamos además que $I = I' + (b_n)$. ¿Existe entonces m tal que $I^m = 0$? Esto ocurre si y solo si $\forall y_1, \dots, y_m \in I$ se tiene que $y_1 \cdots y_m = 0$

Ahora, podemos poner $y_i = y'_i + z_i$ con $y'_i \in I'$ y $z_i \in (b_n)$. Si tomamos $m = p + q$ entonces $(y_i + z_i)^m = 0 \forall i$. Luego I es nilpotente.

Ejercicio 5.

Tomamos el cociente $\frac{A}{I}$, tenemos que $\text{Nil}\left(\frac{A}{I}\right) = \frac{\sqrt{I}}{I}$ es nil y f.g. Utilizando ahora el ejercicio anterior, tenemos que $\exists m$ tal que $\left(\frac{\sqrt{I}}{I}\right)^m$. Entonces:

$$0 = \left(\frac{\sqrt{I}}{I}\right)^m = \frac{(\sqrt{I})^m + I}{I} \implies (\sqrt{I})^m \subseteq I$$

Ejercicio 6.

Si $x \in \bigcap_{n>0} (b^n) \implies \forall n > 0, \exists x_n \in A$ tal que $x = b^n x_n \implies \forall n > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} b^n x_n &= x = b^{n+1} x_{n+1} \implies x_n = b x_{n+1} \\ \implies (x_1) &\subseteq (x_2) \subseteq \dots \subseteq (x_n) \subseteq \dots \end{aligned}$$

Luego tenemos una cadena ascendente en $\mathcal{L}(A)$, pero como A es noetheriano, la cadena se estaciona, es decir, $\exists m > 0$ tal que $(x_m) = (x_{m+1}) \forall k \geq 0$

En particular, tenemos que:

$$x_{m+1} \in (x_m) \implies \exists c \in A : x_{m+1} = c x_m \implies x_m = b x_{m+1} = b c x_m$$

Tenemos ahora dos casos:

Si x es cancelable, x_m es cancelable (siguiente línea) $\implies bc = 1 \implies b \in \mathcal{U}(A)$ (contradicción).

Si x_n no fuese cancelable, entonces existe $y_n \in A \setminus \{0\}$ tal que $x_n y_n = 0 \implies x y_n = 0$ (contradicción ya que x es cancelable)

Si x no fuera cancelable, ¿podríamos tomar $x_n = x_{n+1} \forall n > 0$? Le llamamos y a ese elemento. $x = by = b^2 y = \dots \implies b \text{ cancelable } y = by$

Si probamos que $\bar{y} \neq \bar{0}$ y que \bar{z} es cancelable en A , entonces $0 \neq \bar{y} \in \bigcap_{n>0} (\bar{z}^n)$

Veamos primero que $\bar{y} \neq \bar{0}$. Supongamos que $\bar{y} = \bar{0} \implies y \in (y(1-z)) \implies y = y(1-z)f(y,z)$ con $f \in K[y,z]$. Como y es cancelable, $(1-z)f(y,z) = 1 \implies 1-z \in \mathcal{U}(K[y,z])$. Lo cual es una contradicción, las unidades de un anillo de polinomios son las unidades del "anillo origen".

Supongamos ahora que \bar{z} no es cancelable. Lo que es equivalente a que \bar{z} sea divisor de cero en A . Entonces $\exists g \in K[y,z]$ tal que $\bar{z} \cdot \bar{g} = \bar{0}$, $\bar{g} \neq 0 \iff$

$$\iff zg(y,z) \in (y(1-z)) \iff \exists h = h(y,z) : zg(y,z) = y(1-z)h(y,z) (*)$$

Entonces $zg(y,z) \in (y)$, $z \notin (y)$. Luego $g(y,z) \in (y) \implies g(y,z) = y\tilde{g}(y,z) \implies (*)z\tilde{g}(y,z) = (1-z)h(y,z) (**)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-z)h(y,z) \in (z) \\ 1-z \notin (z) \end{array} \right\} \implies h(y,z) \in (z) \iff h(y,z) = z\tilde{h}(y,z) \text{ para algún } \tilde{h} \in K[y,z] \implies$$

$$\implies (**) \tilde{g}(y,z) = (1-z)\tilde{h}(y,z)$$

Entonces tenemos:

$$g(y,z) = y\tilde{g}(y,z) = y(1-z)\tilde{h}(y,z) \implies g(y,z) \in (y(1-z)) \iff \bar{g} = \bar{0} \text{ (contradicción)}$$

Ejercicio 7.

Si aplicamos la proposición 2.7, tenemos que $(0) = P_1 \cdots P_r$, donde los P_i son primos (quizá algunos repetidos). Sea $P \in \text{MinSpec}(A) \implies (0) = P_1 \cdots P_r \subseteq P$. Pero como P es primo, $\exists j$ tal

que $P_j \subseteq P$ y como P es minimal en $\text{Spec}(A)$, $P_j = P \implies P \in \{P_1, \dots, P_r\}$. Entonces el número de primos minimales es finito (hay hasta r)

Para la segunda parte, tomamos $I \not\subseteq A$ y usamos el teorema de la correspondencia para ideales primos:

$$\begin{array}{ccc} \{P \in \text{Spec}(A) : I \subseteq P\} & \xrightarrow{\text{biyección}} & \text{Spec}\left(\frac{A}{I}\right) \\ P \mapsto & & \frac{P}{I} \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{primos minimales} \\ \text{sobre } I \end{array} \right\} & \leftrightarrow & \text{MinSpec}\left(\frac{A}{I}\right) \text{ (finito)} \end{array}$$

Ejercicio 8.

Visto en la prueba del teorema de Akizuki.

Ejercicio 9.

Si $a \in \mathcal{U}(A) \implies a = u = up^0$

Si $0 \neq a \notin \mathcal{U}(A)$:

$$\implies (a) \subsetneq A \implies (a) \subseteq J = (p) \implies a = pa_1 \implies a \in (p) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (p^n) \implies$$

$$\implies \{n \in \mathbb{N} : a \in (p^n)\} \implies \exists m \text{ maximal con } a \in (p^m)$$

Entonces $a = p^m u$ y basta probar que $u \in \mathcal{U}(A)$.

Si $u \notin \mathcal{U}(A) \implies (u) \subseteq J = (p) \implies u = pv$, con $v \in A \implies a = p^m u = p^m(pv) = p^{m+1}v \implies a \in (p^{m+1})$ lo cual es una contradicción.

Observación

Hemos probado que todo ideal principal de A es 0 o de la forma (p^n) con $n \in \mathbb{N}$

Entonces tenemos:

$$A = (p^0) \supsetneq (p^1) \supsetneq \dots \supsetneq (p^n) \supsetneq \dots$$

Sea ahora $I \not\subseteq A$ f.g. $\implies I = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i)$

Si suponemos que $(x_i) = (p^{m_i})$ y suponemos $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$, entonces $\sum_{i=1}^n (x_i) = \sum_{i=1}^n (p^{m_i}) = (p^{m_n})$

Supongamos que $I \not\subseteq A$ que no es finitamente generado.

Tomamos $y_1 \in I \setminus \{0\}$ arbitrario, entonces $(y_1) \subsetneq I \implies \exists y_2 \in I \setminus (y_1) \implies (y_1, y_2) \subsetneq I \dots$
Construimos así una cadena ascendente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \neq & (y_1) \subsetneq & (y_1, y_2) \subsetneq & \dots \subsetneq & (y_1, \dots, y_n) \subsetneq & \dots \\ & (p^{m_1}) \subsetneq & (p^{m_2}) \subsetneq & \dots \subsetneq & (p^{m_n}) \subsetneq & \dots \end{array}$$

Módulos

Está haciendo la introducción bastante rápido, quedan apuntados los conceptos que introduce. Los ha visto conforme a los apuntes de Alberto.

■ **Definición 4.1. Módulo**

■ **Definición 4.2. Submódulo**

Notación

Al conjunto de submódulos del A -módulo M lo denotamos por $\mathcal{L}(A M)$

Proposición 4.1. Extraída de los ejemplos 4.9

Un A -módulo M es cíclico sii es isomorfo a $\frac{A}{I}$, para un ideal I de A .

Demostración

Si $\frac{A}{I}$ es cíclico generado por $\bar{1} = 1 + I$ ya que $a + I = a(1 + I)$

Si M es cíclico, entonces $M = (x) = Ax = \{ax : a \in A\}$. Si defino $f :_a A \rightarrow M = Ax$ de forma que $a \mapsto f(a) = ax$ tenemos un epimorfismo de A -módulos.

Por el teorema de isomorfía, tenemos que $\frac{A}{\text{Ker}(f)} \cong M$. Siendo $\text{Ker}(f)$ un ideal de A .

Observación

$$\text{Ker}(f) = \{a \in A : ax = 0\} = \text{ann}_A(x) \stackrel{M}{=} \text{ann}_A(M)$$

Para \subseteq en la última igualdad necesitamos probar que si $\underbrace{ax = 0}_{a \in \text{ann}_A(x)} \implies \underbrace{a(bx) = 0}_{a \in \text{ann}_A(M)} \quad \forall b \in A$

□

Proposición 4.10. Proposición-Definición

Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de submódulos del A -módulo M . Decimos que es una familia independiente (de submódulos) cuando satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

1. La expresión de un $x \in \sum_{i \in I} M_i$ como $x = \sum_{i \in I} x_i$ (**suma finita**) con $x_i \in M_i \forall i \in I$, es única.
2. Si $0 = \sum_{i \in I}^{x_i} (\text{suma finita})$ con $x_i \in M_i \forall i \in I$, entonces $x_i = 0 \forall i \in I$.
3. $\forall j \in I$, se tiene que $M_j \cap \left(\sum_{i \neq j} M_i \right) = 0$

Demostración

1 \implies 2.

Trivial.

2 \implies 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sum x_i \\ x = \sum x'_i \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Suma finita}} 0 = \sum_{i \in I} (x_i - x'_i) \implies x_i - x'_i = 0$$

3 \implies 2.

Si $0 = \sum x_i \implies \forall j \in I$ tenemos que $x_j = \sum_{i \neq j} (-x_i) \implies x_j \in M_j \cap \left(\sum_{i \neq j} M_i \right) \stackrel{3)}{=} 0 \implies x_j = 0 \forall j \in I$

1, 2 \implies 3.

Sea $x \in M_j \cap \left(\sum_{i \neq j} M_i \right) \implies x = \sum_{i \neq j} x_i$, con $x_i \in M_i \forall i \in I \setminus \{j\} \implies 0 = \sum_{i \neq j} x_i + (-x) \stackrel{2)}{\implies} -x = 0 \iff x = 0$

□

Cuando $(M_i)_{i \in I}$ es una familia independiente de submódulos de M , la suma $\sum_{i \in I} M_i$ suele denotarse por $\bigoplus_{i \in I}^{int} M_i$ = suma directa interna de los M_i .

Recordemos que se tiene la suma directa externa $\bigoplus_{i \in I}^{ext} M_i = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} M_i : x_i = 0 \forall i \in I\}$.

En general, si $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de submódulos de M , se tiene un homomorfismo inducido:

$$\begin{aligned} \phi : \bigoplus_{i \in I}^{ext} M_i &\rightarrow M \\ (x_i) &\mapsto \sum x_i \end{aligned}$$

Cuya imagen es $\sum_{i \in I} M_i$, es decir $\text{Im}(\phi) = \sum_{i \in I} M_i$

Se tiene que ϕ es un monomorfismo $\iff (M_i)_{i \in I}$ es una familia independiente. En tal caso induce un isomorfismo entre la suma externa y la interna. Por tanto, obviaremos el superíndice ext o int.

Proposición 4.12. Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia independiente de submódulos de M tal que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Para cada $j \in I$, se tiene:

1. $M_j \cong \frac{\bigoplus_{i \neq j} M_i}{\bigoplus_{i \neq j} M_j}$
2. $\bigoplus_{i \neq j} M_i \cong \frac{M}{M_j}$

Como caso particular, se tiene que si $M = N \oplus N'$, entonces:

$$\frac{M}{N'} \cong N \quad \frac{M}{N} \cong N'$$

Demostración

1.

Utilizamos la proyección de M a M_j que tiene por núcleo $\bigoplus_{i \neq j} M_i$

2.

De nuevo, tomamos la proyección de M a $\bigoplus_{i \neq j} M_i$ cuyo núcleo es M_j

□

Vemos ahora una proposición que no está incluida en los apuntes de Alberto del Valle

Observación previa

Si M es un A -módulo, entonces $\text{End}_A(M)$ es un anillo no conmutativo en general (con la composición como producto).

Proposición 4.13. M es indecomponible sii los únicos idempotentes de $\text{End}_A(M)$ son 0 y 1_M

Demostración

\Rightarrow

Sea $\varepsilon \in \text{End}_A(M)$ idempotente ($\Rightarrow 1_M - \varepsilon$ también lo es) $\stackrel{?}{\Rightarrow} M = \text{Im}(\varepsilon) \oplus \text{Im}(1_M - \varepsilon)$

Si eso está probado, entonces al ser M indecomponible $\text{Im}(\varepsilon) = 0$ o $\text{Im}(1_M - \varepsilon) = 0 \iff \varepsilon = 0$ o $1_M - \varepsilon = 0$

$$M = \text{Im}(\varepsilon) + \text{Im}(1 - \varepsilon) : x = \varepsilon(x) + (1_M - \varepsilon)(x)$$

$$x \in \text{Im}(\varepsilon) \cap \text{Im}(1 - \varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} x = \varepsilon(y) & \Rightarrow (1_M - \varepsilon)(x) = \underbrace{[(1_M - \varepsilon) \cdot \varepsilon]}_0(x) \\ y & \\ x = (1_M - \varepsilon)(z) & \Rightarrow \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

\Leftarrow

Si $M = N \oplus N'$ (suma directa interna), entonces:

$$\begin{aligned} \varepsilon_N : M = N \oplus N' &\rightarrow N \hookrightarrow M \\ v + v' &\mapsto v + 0 \end{aligned}$$

Entonces ε_N es idempotente, luego $\varepsilon_N = 0$ ($\iff N = 0$) o bien $\varepsilon_N = 1_M$ ($\iff N = M$)

□

Lema 4.14. Sea $0 \neq M$ un A -módulo cíclico, entonces M es indescomponible sii los únicos idempotentes del anillo $\frac{A}{\text{ann}_A(M)}$ son $\bar{0}, \bar{1}$.

Si tenemos entonces un isomorfismo en ${}_A\text{Mod} : \frac{A}{\text{ann}_A(M)} \cong M$, entonces $\text{End}_A(M) \cong \text{End}_A\left(\frac{A}{\text{ann}_A(M)}\right)$

Ejercicio 1. Si $I \subsetneq A$, entonces la aplicación $\frac{A}{I} \xrightarrow{\mu} \text{End}_A(A/I)$ ($\mu_{\bar{a}}\bar{b} \mapsto \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$) es un isomorfismo de anillos.

Que sea un homomorfismo es directo, vemos que:

$$\text{Ker}(\mu) = \{\bar{a} : \mu_{\bar{a}} \equiv 0\} = \{\bar{a} \in \frac{A}{I} : \overline{ab} = \bar{0} \ \forall \bar{b} \in \frac{A}{I} \ (\implies \bar{a} = \bar{a}\bar{1} = \bar{0})\} \implies$$

$$\text{Ker}(\mu) = 0 \implies \mu \text{ inyectiva}$$

Vemos que μ es suprayectivo. Sea $f \in \text{End}_A\left(\frac{A}{I}\right)$ de forma que $f(\bar{1}) = \bar{a}$. Entonces tenemos que $\bar{b} = b\bar{1} \mapsto bf(\bar{1}) = b\bar{a} = \overline{ba} \implies f = \mu_{\bar{a}}$. Luego μ es sobre.

Ejercicio 2. Ejercicio planteado

Sea $M \in \text{MaxSpec}(A)$ y $n > 0$ un entero. Probar que el A -módulo A/M^n es indescomponible.

Ejercicio 3. Ejercicio planteado

Sea $a \in A \setminus (\mathcal{U}(A) \cup \{0\})$, donde A es un DIP. Probar:

$$\frac{A}{(a)} \text{ indescomponible} \iff a \text{ es asociado a } p^t, \text{ para algún } p \in A \text{ irreducible y algún } t > 0$$

Definición previa a la proposición 4.26

Definición 4.3. Sucesión exacta corta

Se dice que una sucesión de A -módulos y A -homomorfismos $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta** si el núcleo de cada morfismo es la imagen del que la precede. Esto es equivalente a:

$$\begin{cases} g & \text{epimorfismo} \\ f & \text{monomorfismo} \\ \text{Im}(f) = \text{Ker}(g) \end{cases}$$

Ejercicio 4.

Toda sucesión exacta corta con término central M es isomorfa a una del estilo:

$$0 \rightarrow K \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/K \rightarrow 0$$

Donde \hookrightarrow es la inclusión desde un submódulo y π es la proyección sobre el cociente.

Corolario 4.27. $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es noeth. (resp. artiniano) si y solo si todos los M_i son noeth. (resp. artinianos)

Demostración

Se reduce trivialmente al caso $n = 2$. Vemos que $N_1 \oplus N_2$ noeth $\iff N_1, N_2$ lo son. Sabemos que:

$$N_2 \cong \frac{N_1 \oplus N_2}{N_1}$$

Lo cual da la prueba de forma directa. □

Corolario 4.28. Apartado a)

Sea A anillo. Son equivalentes:

1. A anillo noeth. (resp. artiniano)
2. Para algún (resp. todo) entero $n > 0$, el A -módulo libre A^n es noeth. (resp. artiniano).
3. Todo A -módulo fin. generado es noeth. (resp. artiniano)

Observación previa a la prueba

Como en los dos casos de este corolario hay una parte fuerte y una débil en 2), para probar esto hay que hacer el caso fuerte para $1 \implies 2$ y el débil para $2 \implies 3$

Demostración

$1 \implies 2$.

Hay que probar que $\forall n > 0$ ${}_A A^n$ es noeth (sale por el corolario anterior).

$2 \implies 1$.

Suponemos que $\exists n > 0$ tal que ${}_A A^n$ noeth. $\implies {}_A A$ noeth.

$(1, 2) \implies 3$.

\exists epimorfismo $\pi : {}_A A^n \rightarrow M$ y ${}_A A^n$ noeth. $\implies M$ noeth.

$3 \implies 1$.

Trivial □

Corolario 4.28. Apartado b)

Sea A un anillo noeth. (resp. artinian) y sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos tal que B es f.g. como A -módulo (con la restricción de escalones). Entonces B es anillo noeth. (resp. artinian)

Demostración

$$\mathcal{L}({}_B B) \subseteq \mathcal{L}({}_A B)$$

El apartado a) nos dice que ${}_A B$ es noeth. (resp. artinian). Entonces sale "directamente" la prueba. □

Ejercicio 5.

Sea $A = A_1 \times \dots \times A_n$ producto finito de anillos. Probar que todo A -módulo es isomorfo a un producto $M_1 \times \dots \times M_n$, donde cada M_i es un A_i -módulo. En particular:

$$\mathcal{L}({}_A M) \cong \mathcal{L}({}_{A_1} M_1) \times \dots \times \mathcal{L}({}_{A_n} M_n)$$

Lema 4.29. Lema de Artin**Demostración**

Sean $0 = m_1^{n_1} \dots m_r^{n_r}$, donde los m_i son maximales distintos y los $n_i > 0$. Aplicamos entonces el teorema chino de los restos.

$$A \cong \frac{A}{m_1^{n_1}} \times \dots \times \frac{A}{m_r^{n_r}}$$

Entonces si A es un anillo y $m \in \text{MaxSpec}(A) \implies \frac{A}{m^n}$ es un anillo local (con un único ideal maximal $\frac{m}{m^n}$)

La prueba se reduce ahora al caso en que A es un anillo local y su ideal maximal M satisface $m^n = 0$, para algún $n > 0$. Usamos inducción en n .

Si $n = 1$, entonces A es un cuerpo (sus únicos ideales son 0 y A)

Si $n > 1$ y se cumple para $n - 1$. Consideramos la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow m^{n-1}M \rightarrow M \rightarrow \frac{M}{m^{n-1}M} \rightarrow 0$$

Donde $\frac{M}{m^{n-1}M}$ es un $\frac{A}{m^{n-1}}$ -módulo. Y además, $m^{n-1}M$ es un $\frac{A}{m}$ -esp. vectorial □

Con esto podemos completar la demostración del teorema de Akizuki.

Demostración

$$A \text{ artinian} \iff {}_A A \text{ artinian} \implies \text{lem. Art } {}_A A \text{ noeth.} \iff A \text{ anillo noeth.}$$

□

■ **Definición 4.4.** Un A -módulo M se dice de longitud finita si es noeth. y artinian.

Corolario 4.31. *Un anillo A es artiniiano sii todo A -módulo f.g. es de longitud finita.*

Demostración

Akizuki $\implies A$ es noeth. \implies todo A -módulo y f.g es noeth. y artiniiano.

□

Ejercicios

Ejercicio 1.

$$\mu(a+b)(x) = (a+b)(x) = ax + b = \mu(a)(x) + \mu(b)(x) \implies \mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$$

$$\mu(ab)(x) = (ab)(x) = a(bx) = \mu(a)(\mu(b)(x)) = (\mu(a) \circ \mu(b))(x) \implies \mu(ab) = \mu(a) \circ \mu(b)$$

$$\mu(1)(x) = 1x = x \forall x \in M \implies \mu(1) = 1_M$$

Sea (M, f) un par formado donde M es un grupo abeliano y $f : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ es un homomorfismo de anillos. Entonces M adquiere una estructura de A -módulo donde el producto es $A \times M \rightarrow M$ que viene definido por $(a, x) \mapsto ax := f(a)(x)$. Hay que probar varias propiedades:

$$a(x+y) = f(a)(x+y) = {}^a f(a)(x) + f(a)(y) = ax + ay$$

El resto de propiedades, como este, son rutinarias.

${}^a f$ es un homomorfismo de grupos abelianos

Ejercicio 2.

"Pura rutina"

Ejercicio 3.

Apartado a)

$$X = \{x_j : j \in J\}$$

$$m, m' \in IX \implies \begin{cases} m = \sum_{j \in J} a_j x_j, \text{ con } a_i \in I, \forall i \in I \text{ y } a_i = 0 \forall i \in J \\ m' = \sum_{j \in J} a'_j x_j, \dots \end{cases}$$

$$m + m' = \sum (a_j + a'_j) x_j \in IX$$

$$b \in A \quad bm = b \sum_{j \in J} a_j x_j = \sum_{j \in J} (ba_j) x_j \in IX$$

Apartado b)

Tomamos $SN = \{m \in M : m = \sum_{j \in J} s_j x_j, \text{ con } s_j \in S, x_j \in N\}$ que es un A -submódulo de M .
El resto es parecido al a).

Ejercicio 4. "Rutinario"

Ejercicio 5.

Tendremos que probar que ϕ conserva la suma y la multiplicación por elementos de $K[X]$.

$$\phi \left[\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \right) v \right] \stackrel{?}{=} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \right) \phi(v) \quad \forall v \in V_1 \quad \forall \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \in K[X]$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \phi \left[\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \right) v \right] &= \phi \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i f_1^i(v) \right) =_{\phi \text{ } K\text{-lineal}} \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi(f_1^i(v)) = \sum_{i=0}^n \lambda_i (\phi \circ f_1^i)(v) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i (f_2^i \circ \phi)(v) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_2^i(\phi(v)) = \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \right) \phi(v) \end{aligned}$$

Ejercicio 6.

\Leftarrow

Sea $f : \frac{A}{I} \rightarrow \frac{A}{J}$ un A -homomorfismo.

¿Cómo son los A -homomorfismos $f : \frac{A}{I} \rightarrow N$, donde $N \in A\text{-Mod}$?

Vienen unívocamente determinados por la imagen del $\bar{1}$, $f(\bar{1}) \in \{y \in N : Iy = 0\}$

Tenemos entonces una aplicación inducida:

$$\begin{array}{ccc} \psi : \text{Hom}_A \left(\frac{A}{I}, N \right) & \rightarrow & \{y \in N : Iy = 0\} \\ f & \mapsto & f(\bar{1}) \end{array}$$

Vemos que esta aplicación tiene inversa: dado $y \in \{y \in N : Iy = 0\}$, podemos tomar $\mu_y : \frac{A}{I} \rightarrow N$ determinada por $\mu_y(\bar{1}) = y$. Se deja como ejercicio probar que esta asignación define la inversa.

Volviendo al inicio, y denotando con $\bar{\cdot}$ a las clases de $\frac{A}{I}$ y con \square a las de $\frac{A}{J}$ sabemos que

$$f = \mu_{[b]} : \bar{a} \mapsto [ab] \text{ donde } [b] \in \{[c] \in \frac{A}{J} : I[c] = [0]\} = \{c + J : Ic \subseteq J\} = \frac{(J : I)}{J}.$$

Como conclusión, llegamos a que $f = \mu_{[b]}$, donde $[b] \in \frac{(J : I)}{J} (\iff b \in (J : I))$

Vemos cuando es este $\mu_{[b]}$ inyectivo. Lo será cuando

$$\begin{aligned} \mu_{[b]} = (\bar{a}) = [0] &\implies \bar{a} = \bar{0} \\ [ab] = [0] &\implies \bar{a} = \bar{0} \\ \Downarrow &\quad \Downarrow \\ ab \in J &\implies a \in I \\ a \in (J : b) &\implies a \in I \iff (J : b) \subseteq I \end{aligned}$$

En conclusión, $\mu_{[b]}$ inyectivo sii $(J : b) \subseteq I$

Comprobarmos ahora cuando es $\mu_{[b]}$ suprayectivo.

$$\text{Im}(\mu_{[b]}) = \{[ab] : \bar{a} \in \frac{A}{J}\} = \{ab + J : a \in A\} = \frac{Ab + J}{J}$$

$$\text{Luego } \mu_{[b]} \text{ es sobre } \iff \frac{Ab + J}{J} = \frac{A}{J} \iff Ab + J = A \implies I(Ab + J) = I \implies I = Ib + IJ \subseteq J + IJ = J$$

Ejercicio 7. Apartado a)

Basta con ver que L es cíclico de orden 3, luego $((0, 6)) \cong \mathbb{Z}_3$

$$\begin{aligned} \frac{M}{K} &= \frac{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9}{\mathbb{Z}_3 \oplus 0} \cong \frac{\mathbb{Z}_3}{\mathbb{Z}_3} \oplus \frac{\mathbb{Z}_9}{0} \cong \mathbb{Z}_9 \\ \frac{M}{L} &= \frac{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9}{0 \oplus (6)} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \frac{\mathbb{Z}_9}{(6)} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

No son isomorfos porque uno es cíclico y el otro no.

Apartado b)

$$\begin{aligned} \frac{M}{K + L} &= \frac{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9}{\mathbb{Z}_3 \oplus (6)} = 0 \oplus \frac{\mathbb{Z}_9}{(6)} \cong \mathbb{Z}_3 \\ \frac{M}{N} &= \frac{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9}{0 \oplus \mathbb{Z}_9} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K + L &= \mathbb{Z}_3 \oplus (6) \cong \mathbb{Z}_3 \mathbb{Z}_3 \\ N &\cong \mathbb{Z}_9 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.

Pongamos que $N = (x_1, \dots, x_s)$ y $\frac{M}{N}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_t)$.

Parece razonable comprobar que $M = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t)$, donde los y_i son representantes arbitrarios de las clases \bar{y}_i .

Sea $m \in M \implies \bar{m} = m + N = \sum_{j=1}^t b_j \bar{y}_j$ donde los $b_j \in A$

Pero $\sum_{j=1}^t b_j \bar{y}_j = \overline{\sum_{j=1}^t b_j y_j} = m$. Por lo tanto:

$$m - \sum_{j=1}^t b_j y_j \in N \implies m - \sum_{j=1}^t b_j y_j = \sum_{i=1}^s a_i x_i$$

Con $a_i \in A$. Por lo tanto:

$$m = \sum_{i=1}^s a_i x_i + \sum_{j=1}^t b_j y_j$$

Ejercicio 12.

Si $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}] = \{\frac{m}{q^t} : m \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ fuera finitamente generado, tomamos denominadores comunes y podemos expresar $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ como:

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{q}] = \left(\frac{m_1}{q^t}, \dots, \frac{m_n}{q^t} \right)$$

Pero entonces $\frac{1}{q^{t+1}}$ no se puede generar (o algo así era).