Apuntes de Inferencia Estadística

Paco Mora

13 de octubre de 2022

Mirar los apuntes de Lorencio

Teorema de Wald

Consistencia

Sea $X \sim F(\cdot, \theta),\ \theta \in \Theta, \hat{\theta}_n$ estimador de θ $\forall n \in \mathbb{N}$, definimos las siguientes operaciones:

$$P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n \in A) := P(\hat{\theta}_n \in A | \theta = \theta_0)$$

$$E_{\theta_0}[\hat{\theta}_n] = \underset{\psi}{\int \cdots \int} \hat{\theta}_n(x) L(x, \theta_0) dx$$

Se dice que $\hat{\theta}_n$ es consistente para $\theta \in \Theta$ si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0$ (convergencia en probabilidad), $\forall \theta_0 \in \Theta$

Proposición 1. *Si Θ es finito y $\hat{\theta}_n$ es estimador de θ entonces se da la consistencia del estadístico si y solo si:*

$$\lim_{n \to \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1,\ \forall \theta_0 \in \Theta$$

Es decir,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0\ \forall \theta \in \Theta \iff \lim_{n \to \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1$$

Demostración

$\Longleftarrow$

Trivial.

$\Longrightarrow$

Si $\hat{\theta}_n$ es el EMV de θ, tomará un valor aislado dentro de Θ.

Si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0$, tomando ε suficientemente pequeño, $\hat{\theta}_n$ solo puede tomar el valor de θ_0, luego $\lim_{n \to \infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1$

□

Proposición 2. ***Desigualdad de Jensen***

Sea X v.a. y g una función cóncava, entonces $E[g(X)] < E(E[X])$ siempre que las esperanzas anteriores existan.

Proposición 3. ***Ley fuerte de Kolmogorov***

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de v.v.a.a. independientes, idénticamente distribuidas y con media finita. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \xrightarrow{c.s.} E[X]$$

Lema 4. *Sean* $\{A_n\},\ \{B_n\}$ *con* $\lim_{n\to\infty}\{P(A_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{P(B_n)\} = 1,$ *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = 1$$

Demostración

$$P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n)$$

Pero tenemos:

$$1 \geq\ P(A_n \cup B_n) \geq P(A_n) \to 1$$

Luego $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = 1$ y tenemos que:

$$P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n) = 1 + 1 - 1 = 1$$

□

Teorema 5. *Sea* X *variable aleatoria con función de distribución* $F(\cdot, \theta)$ *para* $\theta \in \Theta$*, siendo* Θ *un conjunto infinito. Supongamos que se verifica:*

- *(A1) El soporte de* $F(\cdot, \theta)$ *es común para todo* $\theta \in \Theta$*.*
- *(A2)* $E_{\theta_0}\left[\log \dfrac{f}{X, \theta}\right]$ *existe y es finita para todo* $\theta,\ \theta_0 \in \Theta$

Si para todo $n \in \mathbb{N}$ *y* $(X_1, ..., X_n)$ *m.a.s de* X *existe el* $\mathrm{EMV}(\hat{\theta}_n)$ *de* θ *y es único entonces* $\hat{\theta}_n$ *es un estimador consistente del parámetro* θ*.*

Demostración

Utilizaremos la Desigualdad de Jensen, tomaremos $g = \log$ y la v.a. $\dfrac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)}$. La Desigualdad de Jensen entonces nos dice:

$$E_{\theta_0}\left[\log\left(\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)}\right)\right] < \log\left(E_{\theta_0}\left[\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)}\right]\right)$$

Pero notemos que:

$$E_{\theta_0}\left[\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)}\right] = \int \frac{f(x,\theta)}{f(x,\theta_0)} f(x,\theta_0) dx =_{(A1)} 1$$

Luego tenemos que:

$$E_{\theta_0}\left[\log\left(\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)}\right)\right] < 0$$

Usaremos ahora la ley fuerte de Kolmogorov a la sucesión $\left\{\log\left(\dfrac{f(X_n,\theta)}{f(X_n,\theta_0)}\right)\right\}_n$ y utilizando que la convergencia casi segura es más fuerte que la convergencia en probabilidad, tenemos :

$$\frac{\log\left(\dfrac{L(\mathbb{X},\theta)}{L(\mathbb{X},\theta_0)}\right)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log\left(\dfrac{f(x_i,\theta)}{f(x_i,\theta_0)}\right)}{n} \xrightarrow{P_{\theta_0}} E_{\theta_0}\left[\log\left(\frac{f(X,\theta)}{f(X,\theta_0)}\right)\right] < 0$$

Como a partir de cierto n el logaritmo de la izquierda será negativo podemos tomar:

$$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}\left(\log\frac{L(\mathbb{X},\theta)}{L(\mathbb{X},\theta_0)} < 0\right) = \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}(L(\mathbb{X},\theta) < L(\mathbb{X},\theta_0)) = 1$$

Como el espacio paramétrico es finito, utilizaremos la equivalencia para la definición de consistencia y buscaremos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}(\hat{\theta}_n = \theta_0)$$

Estudiamos ahora el suceso $\{\hat{\theta}_n(x) = \theta_0\} = \bigcap_{\substack{\theta\in\Theta \\ \theta\neq\theta_0}} \{L(\mathbb{X},\theta) < L(X,\theta_0)\}$

El suceso es intersección finita de sucesos cuya probabilidad tienen límite 1. Utilizando el lema llegamos a:

$$\lim_{n\to\infty} P(\hat{\theta}_n = \theta_0) = 1$$

□

Ejemplo 1. *$X \sim \mathcal{U}(\theta,\theta+1),\ \theta\in\mathbb{R},\ X_1,...,X_n$ m.a.s de X, $(f(x,\theta)=1,\ si\ x\in(\theta,\theta+1))$. Buscar el EMV de θ.*

$$L(\mathbb{X},\theta) = 1\ si\ (x_i\in(\theta,\theta+1),\ i=1,...,n) \iff (\theta < x_{1:n}\ y\ x_{n:n} < \theta+1) \iff (x_{n:n}-1 < \theta < x_{1:n})$$

En $\alpha(x_{n:n}-1)+(1-\alpha)x_{1:n}$ se alcanza el máximo de $L(\mathbb{X},\theta)\ \forall\ \alpha\in(0,1)$

Método de la función pivote

Proposición 1. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución continua $F(x,\theta),\ \theta\in\Theta$ y monótona y sea $X=(X_1,...,X_n)$*

Para demostrarlo necesitamos algunos resultados

Lema 2. *Sea X v.a. con función de distribución F continua, entonces $F(X)\sim\mathcal{U}(0,1)$*

Lema 3. *Sea $\mathcal{U}\sim\mathcal{U}(0,1)$, entonces $-\log U\sim \mathrm{Exp}(1)$*

Vamos ahora con la demostración de la proposición.

Demostración

Tenemos que $\{F(X)\le x\} \iff \{X\le F^{-1}(x)\}$, entonces:

$$P(F(X)\le x) = P(X\le F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x\ \forall x\in(0,1)$$

□

Demostración

$T(\mathbb{X},\theta) = -\sum_{j=1}^{n}\log F(X_j,\theta)$ trivialmente es monótona en θ (al serlo F)

Vemos ahora que $T(\mathbb{X},\theta)$ no depende de θ en su distribución.

$$T(\mathbb{X},\theta) = \sum_{j=1}^{n} E_j$$

Donde E_j son Exp(1) indep. entre sí. Pero sabemos que la suma de exponenciales tiene una distribución Gamma:

$$T(\mathbb{X}, \theta) \sim \Gamma(1, n)$$

Luego no depende de θ.

$\square$

Queda por copiar el texto del método de Neyman.