

# Delirios de AnalFun

Paco Mora

20 de octubre de 2022

# Yo qué sé qué es esto

## 1.1 - Introducción

**Definición 1.1.** Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.

### Teorema 1. (Baire)

Sea  $(X, d)$  espacio métrico completo  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  abiertos de en  $X$ ,  $\overline{G_r} = X \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

//Repaso de la relación de orden

**Teorema 2. Principio de la buena ordenación** Para todo conjunto  $S$ , existe una relación de orden  $\leq$  tal que  $(S, \leq)$  está bien ordenado,  $\leq$  es un buen orden.

### Teorema 3. Lema de Zorn

Si  $(P, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para  $C$ , cadena, existe  $c \in P$  tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in C$ ), entonces  $P$  tiene un elemento maximal (existe  $m \in P$  tal que si  $x \leq m$  entonces  $x = m$ )

### Teorema 4. Principio Maximal de Hasudorff

Cada conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$  contiene una cadena maximal.

**Teorema 5.** *Son equivalentes:*

1. El principio Maximal de Hasudorff
2. Lema de Zorn
3. Principio de la buena ordenación
4. Axioma de elección

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

**Teorema 6.** *De la mejor aproximación*

Dado  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio de Hilbert y  $C \subset H$  cerrado y convexo. Sea  $x_0 \notin C$ . Entonces existe un único elemento  $c_0 \in C$  tal que  $\|x_0 - c\| = \inf\{\|x_0 - c\| : c \in C\}$

**Demostración**

Tomemos una sucesión  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $c_n \in C$  de forma que se verifique

$$\alpha \quad \|c_n\| \quad \alpha + \frac{1}{n}$$

Si  $c_n$  fuera de Cauchy, existe  $c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Probemos que  $(c_n)$  es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

$$\text{Como } \underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de  $C$  para el punto medio entre  $c_n$  y  $c_m$ :

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que  $\|c_n - c_m\| \rightarrow 0$ .

□

**Teorema 7.** *(de la proyección)*

Sea  $M$  un subespacio cerrado del Hilbert  $H$ , entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas  $P, Q : H \rightarrow H$  tales que  $P(H) = M$  y  $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : \langle y, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\}$  y  $x = Px + Qx \ \forall x \in H$

Además se verifica:

- $x \in M \implies Px = x, Qx = 0$ ;  $x \in M^\perp \implies Px = 0, Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$  (Pitágoras)

Como consecuencia  $H = M \oplus M^\perp$

**Demostración**

Sea  $x \in H$ ,  $x + M$  cerrado y convexo, llamemos  $Qx$  al único elemento en  $x + M$  de norma mínima y definimos  $Px = x - Qx$ . Vemos que  $Qx \in M^\perp$ ,  $\langle z, y \rangle = 0 \forall y \in M$ . Aplicando que  $Qx \equiv Z$  tiene norma mínima en  $x + M$  tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 = \langle z, z \rangle \leq \underbrace{\|z - \alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} = \langle z - \alpha y, z - \alpha y \rangle = \cancel{\langle z, z \rangle} - \bar{\alpha} \langle z, y \rangle - \alpha \langle y, z \rangle = \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora  $\alpha = \langle z, y \rangle$  y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a  $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$ , luego  $\text{Im}(Q) \subset H^\perp$ . Como además  $M \cap M^\perp = \{0\} \implies x = Px + Qx$ , entonces  $H = M \oplus M^\perp$ .

Análogamente sale el resto de los enunciados<sup>1</sup>.

□

**Lema 1.1.1.**  $M \subset H$  subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces  $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$ ,  $\langle x_0, m \rangle \geq 0 \forall m \in M$

**Demostración**

Como  $H \neq M \implies M^\perp \neq \{0\}$

$\{d_n : n = 1, 2, \dots\}$  numerable y denso en  $H$

Tomamos entonces una base ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  tal que:

$$\text{span}\{d_1, \dots, d_n, \dots\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$$

□

**Definición 1.2.** *Conjunto ortonormal*  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots\}$  en  $H : \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ . Tenemos además que son LI:

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i 0_i, \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \implies c_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

**Proposición 1.1.**  $M = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset H$ ,  $P_M(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ . Si  $d = \text{dist}\{x, M\}$  entonces:

$$\|x\|^2 - d^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

**Lema 1.1.2.** Sea  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  ortonormal,  $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2 \forall x \in H$

<sup>1</sup>xd

**Proposición 1.2.**  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  ortonormal en  $H$ , la función:

$$\Lambda : H \rightarrow \ell^2 \quad \Lambda(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

**Demostración**

$(\xi_n) \in \ell^2$  encontramos  $x \in H$ :  $\Lambda(x) = (\xi_n)$ . Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i u_i \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m \rangle$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

**Teorema 8. (de la base hilbertiana)**

Para  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  conjunto ortonormal en  $H$  (espacio de Hilbert). Son equivalentes:

1.  $\{u_1, u_2, \dots\}$  es ortonormal maximal.
2.  $\overline{\text{span}\{u_1, \dots\}} = H$
3.  $\forall x \in H$  se tiene  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$  en  $H$
4.  $\forall x \in H, \forall y \in H$ , se tiene  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle y, u_n \rangle}$
5.  $\forall x \in H$ , se tiene  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

**Demostración**

Recomiendo mirar el libro.  $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea  $M_n = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , sabemos que  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$  y que:

$$\forall x \in H, P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{\text{dist}(x, M_n)^2}_{=: \delta_n \rightarrow 0} + \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_{\varepsilon} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n : \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon, x_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

4  $\Rightarrow$  5

Directo.

5  $\Rightarrow$  2

Por la desigualdad de Bessel.

□

**Definición 1.3.** A una base como la anterior se le llama **base hilbertiana**. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.

**Lema 1.1.3.** Si  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces  $E$  es finito dimensional.

Para  $E$  no completo, no es cierto.

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

**Teorema 9.** Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto escalar en  $C([a, b])$  con  $\|\cdot\|_\infty$  más fina que  $\|\cdot\|_\infty$ . Sea  $\{\phi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad \forall f \in C[a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \Rightarrow \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} < \varepsilon$$

### 1.1.1. Series de Fourier

**Definición 1.4.** Un polinomio trigonométrico es una función de la forma

$$h(t) = \sum_{n=0}^m \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**Lema 1.1.4.** Si  $h_1, h_2$  son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.

**Lema 1.1.5.**  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , entonces existe un polinomio trigonométrico  $q_\varepsilon$  tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

**Ejercicio 1.**

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \cos(nt), \quad u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \sin(mt), \quad m = 1, 2, \dots$$

Es ortonormal en  $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$

## 1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

**Proposición 1.3.** *Dado  $F : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua. Existe una única medida ( $F$  función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t) dF(f)$$

**Teorema 10. Teorema de Riesz.**

*Buscar en el libro.*

**Definición 1.5. Topología débil del espacio de Hilbert**

Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert.

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \leftarrow H : x_0, \quad \varepsilon > 0, \quad t_1, \dots, t_p \in H \\ \langle x, x_0 \rangle \leftarrow x \end{aligned}$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, \dots, t_p) = \{z \in H : |\langle t_i, x_0 - z \rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$$

**Teorema 11. Alaoglo-Bourbaki**

Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y sea  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . Entonces  $B_H$  es un subconjunto débilmente compacto.

**Demostración**

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana  $\{e_n\}$  de  $H$  y tomemos  $(v_n) \subseteq B_H$ .

Notemos primero que  $|\langle e_p, v_n \rangle| \leq 1 \quad \forall p, n \in \mathbb{N}$ .

Tomemos  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ , el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión  $(v_n)$ ,  $v_n \mapsto \langle \cdot, v_n \rangle$  y utilizando la base, este producto puede expresarse como  $\sum_{p=1}^{\infty} \langle x, e_p \rangle e_p$  para cierto  $x$ .

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros  $n_1 < n_2, \dots, n_k < \dots$  de forma que  $(\langle e_p, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$  es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces  $S = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ , entonces  $(\langle s, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$  es convergente  $\forall s \in S$ . Falta ver que sea convergente para todo punto de  $H = \overline{S}$  que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

## 1.3 - Teoremas de Skald

**Definición 1.6. Familia de funciones (uniformemente) equicontinua**

Una sucesión de funciones continuas  $(f_i)_{i \in I}$  se dice que es equicontinua en  $x_0$  si  $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$  tal que  $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ . Es decir, que el  $\delta$  necesario es el mismo para todas las funciones.

De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:

Una sucesión de funciones uniformemente continuas  $(f_i)_{i \in I}$  se dice que es uniformemente equicontinua en si  $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$  tal que  $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ . Es decir, que el  $\delta$  necesario es el mismo para todas las funciones.

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

**Teorema 12.** Sea  $(K, d)$  un espacio métrico y  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^K, T_p)$  ( $T_p$  es la topología producto).

Si  $\phi$  es (unif.) equicontinua, entonces  $\bar{\phi}^{T_p}$  son (uniformemente) continuas

**Teorema 13.** Si  $\phi$  es equicontinua, entonces en  $\phi$  coinciden las topologías  $T_p$ (producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto  $D \subseteq K$  denso ( $\bar{D} = K$ ).

**Teorema 14.** Sea  $\phi \subseteq C(K)$  y sea  $(K, d)$  métrico compacto. Entonces  $\phi$  es relativamente compacto en  $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$  es equicontinuo y  $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$  acotado  $\forall x \in K$

**Teorema 15. Lax- Milgram**

Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$  tal que:

1.  $B(\cdot, y)$  es lineal  $\forall y \in H$  y  $B(x, \cdot)$  es lineal conj., es decir,  $B$  es sesquilineal.
2.  $B$  es acotada:  $\exists c > 0$  tal que  $|B(x, y)| \leq c \|x\| \|y\| \forall x, y \in H$
3.  $B$  es fuertemente positiva:  $\exists b > 0$  tal que  $|B(x, y)| > b \|y\|^2, \forall y \in H$

Entonces para cualquier forma lineal y continua  $\phi : H \rightarrow \mathbb{K}$  existe un único  $y \in H$  tal que  $\phi(x) = B(x, y) \forall x \in H$

**Demostración**

Para  $y$  fijo la aplicación  $x \mapsto B(x, y)$  es lineal continuo. Por el teorema de Riesz,  $\exists z \in H$  tal que  $B(x, y) = \langle x, z \rangle \forall x \in H$  y sea  $T$  la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que  $T(H)$  es un subespacio de  $H$ . Veamos que  $T(H) = H$  y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1.  $T(H)$  es cerrado.

Sea  $z_n = Ty_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$

$$B(x, y_n - y_m) = \langle x, z_n - z_m \rangle \forall x \in H$$

$$b \|y_n - y_m\|^2 \leq B(y_n - y_m, y_n - y_m) = \langle y_n - y_m, z_n - z_m \rangle \leq \|y_n - y_m\| \|z_n - z_m\|$$



Luego  $(y_n)$  es de Cauchy y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  y tenemos que:

$$\langle x, z_n \rangle = B(x, y_n) \rightarrow B(x, y) = \langle x, z \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x \in H$$

2. Supongamos  $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : \langle x_0, z \rangle = 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) = \langle x_0, z \rangle \forall y \in H, B(x_0, x_0) = 0$  si  $x_0 \neq 0$

□

## 1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  abierto y acotado.

Lo que queremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

**Ejemplo 2.** Tomemos  $n = 2$ , en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.

### Idea para buscar una solución

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2$$

### Definición 1.7. $C^2(\overline{\Omega})$

Denotamos a  $C^2(\overline{\Omega})$  como las funciones dos veces derivables en el interior de  $\Omega$  con segunda derivada continua en  $\overline{\Omega}$ .

Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por  $C_0^2(\overline{\Omega})$ .

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

### Teorema 16. Teorema de Gauss

Dada  $\Omega$  suficientemente regular:

$$\int_{\Omega} \partial x_j w dx = \int_{\Omega} w n_j d\theta$$

**Proposición 1.4.** Si existe  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  que minimiza a  $D(u)$  entre todas las funciones  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  con  $u|_{\partial\Omega} \equiv f$ , entonces  $u$  es armónica ( $\Delta u = 0$ ).

**Demostración**

En  $C^2(\overline{\Omega})$ , definimos  $\langle \cdot \rangle_D$  por:

$$\langle F, G \rangle_D = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora  $D(u) = \langle u, u \rangle_D$ .

Si  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  que verifica que  $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$  se tiene que  $D(u + \varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D$$

Cancelando  $D(u)$  tenemos:

$$\varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un  $\varepsilon$  arbitrario, tenemos que  $\langle u, v \rangle_D = 0 \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$  con soporte compacto, luego:

$$0 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} (\Delta u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \text{ con } v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que  $C_0^\infty(\overline{\Omega})$  es denso en  $L^2(\Omega)$ . Entonces  $\langle \Delta u, v \rangle_{L^2} = 0$  para cualquier  $v$  de un denso, luego  $\Delta u = 0$

□

### Teorema 17. Poincaré

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \|f\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_1$$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

#### Lema 1.4.1.

1.  $H_1^0 \subseteq H_0$
2.  $\forall v \in H_1^0, \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j \rangle_0 = - \langle \frac{\partial z}{\partial x_j}, v \rangle_0$ . Es decir:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. Si  $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}$

A  $v_j$  se le llama  $\frac{\partial v}{\partial x_j}$

### Demostración

Sea  $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow v \in H_1^0$  en  $\|\cdot\|_1 \implies \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^\infty$  es de Cauchy en  $\|\cdot\|_0$  y converge a  $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$

□