Apuntes de Análisis Funcional

Paco Mora

29 de noviembre de 2022

CAPÍTULO 1

Yo qué sé qué es esto

1.1 - Introducción

Definición 1.1. *Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.*

Teorema 1.1. ***(Baire)***

Sea (X, d) *espacio métrico completo* $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *abiertos de en* X, $\overline{G}_r = X$ $\forall n \in N$. *Entonces:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

*//**Repaso de la relación de orden***

Teorema 1.2. ***Principio de la buena ordenación*** *Para todo conjunto* $\mathcal{S}$, *existe una relación de orden* $\leq$ *tal que* $(S, \leq)$ *está bien ordenado,* $\leq$ *es un buen orden.*

Teorema 1.3. ***Lema de Zorn***

Si $(P, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para* C*, cadena, existe* $c \in P$ *tal que* $x \leq c$ *para todo* $x \in C$*), entonces* P *tiene un elemento maximal (existe* $m \in P$ *tal que si* $\leq x$ *entonces* $x = m$*)*

Teorema 1.4. ***Principio Maximal de Hasudorff***

Cada conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ *contiene una cadena maximal.*

Teorema 1.5. *Son equivalentes:*

1. *El principio Maximal de Hasudorff*
2. *Lema de Zorn*
3. *Principio de la buena ordenación*
4. *Axioma de elección*

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

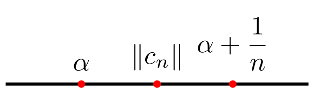
//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

Teorema 1.6. ***De la mejor aproximación***

Dado $(H, < \cdot >)$ espacio de Hilbert y $C \subset H$ cerrado y convexo. Sea $x_0 \notin C$. Entonces existe un único elemento $c_0 \in C$ tal que $\|x_0 - x\| = \inf\{\|x_0 - c\| \ = \alpha : \ c \in C\}$

Demostración

Tomemos una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n \in C$ de forma que se verifique



Si c_n fuera de Cauchy, existe $c_0 = \lim_{n\to\infty} c_n$. Probemos que (c_n) es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

Como $\underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de C para el punto medio entre c_n y c_m:

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\|\frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que $\|c_n - c_m\| \to 0$.

□

Teorema 1.7. ***(de la proyección)***

Sea M un subespacio cerrado del Hilbert H, entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas $P, Q : H \to H$ tales que $P(H) = M$ y $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : < y, m >= 0 \ \forall m \in M\}$ y $x = Px + Qx \ \forall x \in H$

Además se verifica:

- $x \in M \implies Px = x, \ Qx = 0; \ x \in M^\perp \implies Px = 0, \ Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, \ y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *(Pitágoras)*

Como consecuencia $H = M \oplus M^\perp$

Demostración

Sea $x \in H,\ x+M$ cerrado y convexo, llamemos Qx alúnico elemento en $x+M$ de norma mínima y definimos $Px = x - Qx$. Vemos que $Qx \in M^{\perp}$, $< z, y >= 0 \forall y \in M$. Aplicando que $Qx \equiv Z$ tiene norma mínima en $x+M$ tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 =< z, z > \leq \underbrace{\|z - \alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} =< z - \alpha y, z - \alpha y >= \cancel{< z, z >} - \overline{\alpha} < z, y > -\alpha < y, z >= \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora $\alpha =< z, y >$ y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$, luego $\operatorname{Im}(Q) \subset H^{\perp}$. Como además $M \cap M^{\perp} = \{0\} \implies x = Px + Qx$, entonces $H = M \oplus M^{\perp}$

Análogamente sale el resto de los enunciados[1].

$\square$

Lema 1.8. *$M \subset H$ subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert H. Entonces $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$, $< x_0, m \geq 0 \forall m \in M$*

Demostración

Como $H \neq M \implies M^{\perp} \neq \{0\}$

$$\{d_n :\ n = 1, 2, ..\} \text{numerable y denso en } H$$

Tomamos entonces una base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ tal que:

$$\operatorname{span}\{d_1, ..., d_n, ...\} = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n, ...\}$$

$\square$

Definición 1.2. ***Conjunto ortonormal*** *$\{\overline{u}_1, \overline{u_2}, ...\}$ en H : $< u_i, u_j >= \delta_{ij}$. Tenemos además que son LI:*

$$0 = \|\sum_{i=1}^{n} c_i 0_i\|^2 =< \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i, \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i >= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \implies c_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

Proposición 1.9. *$M = \operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset H,\ P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} < x_i, u_i > u_i$. Si $d = dist\{x, M\}$ entonces:*

$$\|x\|^2 - \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2$$

Lema 1.10. *Sea $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ ortonormal, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} | < x, u_i > |^2\ \forall x \in H$*

[1] xd

Proposición 1.11. $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ *ortonormal en* H*, la función:*

$$\Lambda : H \to \ell^2 \ \Lambda(x) = (< x, u_i >)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

Demostración

$(\xi_n) \in \ell^2$ encontramos $x \in H$: $\Lambda(x) = (\xi_n)$. Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n u_n \to < \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m >$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

Teorema 1.12. ***(de la base hilbertiana)***

Para $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ *conjunto ortonormal en* H *(espacio de Hilbert). Son equivalentes:*

1. $\{u_1, u_2, ...\}$ *es ortonormal maximal.*
2. $\overline{\text{span}\{u_1, ...\}} = H$
3. $\forall x \in H$ *se tiene* $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > u_n$ *en* H
4. $\forall x \in H, \ \forall y \in H$*, se tiene* $< x, y > = \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > \overline{< y, u_n >}$
5. $\forall x \in H$*, se tiene* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, u_n > |^2$

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

Demostración

Recomiendo mirar el libro. $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea $M_n = span\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, sabemos que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$ y que:

$$\forall x \in H, \ P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{dist(x, M_n)^2}_{=:\delta_n \to 0} + \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2$$

$$\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n : \ \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon, \ x_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

$4 \implies 5$

Directo.

$5 \implies 2$

Por la desigualdad de Bessel.

□

Definición 1.3. *A una base como la anterior se le llama* ***base hilbertiana****. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.*

Lema 1.13. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces E es finito dimensional.*

Para E no completo, no es cierto.

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

Teorema 1.14. *Sea $< \cdot >$ un producto escalar en $C([a,b])$ con $\|\cdot\|_\infty$ más fina que $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{\phi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} < f, \phi_n > \phi_n \ \forall f \in C[a,b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \implies \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} < f, \phi_n > \phi_n \right\|_{<\cdot>} < \varepsilon$$

1.1.1. Series de Fourier

Definición 1.4. *Un polinomio trigonométrico es una función de la forma*

$$h(t) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \ m = 0, 1, 2, ...$$

Lema 1.15. *Si h_1, h_2 son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.*

Lema 1.16. *$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico q_ε tal que:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

Ejercicio 1.

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{pi}} \cos(nt), \ u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{pi}} \sin(mt), \ m = 1, 2, ...$$

Es ortonormal en $(C[a,b], \langle\cdot\rangle)$

1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

Proposición 1.17. *Dado $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Existe una única medida (F función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)dF(f)$$

Teorema 1.18. ***Teorema de Riesz.***

Buscar en el libro.

Definición 1.5. ***Topología débil del espacio de Hilbert***

Sea $(H, <>)$ un espacio de Hilbert.

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \leftarrow H : x_0, \qquad & \varepsilon > 0,\ t_1, ..., t_p \in H \\ < x, x_0 > \hookleftarrow x \qquad & \end{aligned}$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, ..., t_p) = \{z \in H : | < t; x_0 - z > | < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., p\}$$

Teorema 1.19. ***Alaoglo-Bourbaki***

Sea $(H, <>)$ un espacio de Hilbert y sea $B_H = \{x \in H : \ \|x\|_{<>} \leq 1\}$. Entonces B_H es un subconjunto débilmente compacto.

Demostración

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana $\{e_n\}$ de H y tomemos $(v_n) \subseteq B_H$.

Notemos primero que $| < e_p, v_n > | \leq 1 \ \forall p, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $[0,1]^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión (v_n), $v_n \mapsto < -, v_n >$ y utilizando la base, este producto puede expresarse como $\sum_{p=1}^{\infty} < x, e_p > e_p$ para cierto x.

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros $n_1 < n_2, ..., n_k < ...$ de forma que $(< e_p, v_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces $S = s\,\mathrm{span}\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(< s, v_{n_k} >)_{k=1}^{\infty}$ es convergente $\forall s \in S$. Falta ver que sea convergente para todo punto de $H = \overline{S}$ que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

1.3 - Familias de funciones equicontinuas

Definición 1.6. ***Familia de funciones (uniformemente) equicontinua***

Una sucesión de funciones continuas $(f_i)_{i\in I}$ *se dice que es equicontinua en* x_0 *si* $\forall\varepsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists\delta_\varepsilon$ *tal que* $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$*. Es decir, que el* δ *necesario es el mismo para todas las funciones.*

De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:

Una sucesión de funciones uniformemente continuas $(f_i)_{i\in I}$ *se dice que es uniformemente equicontinua en si* $\forall\varepsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists\delta_\varepsilon$ *tal que* $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$*. Es decir, que el* δ *necesario es el mismo para todas las funciones.*

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

Teorema 1.20. *Sea* (K, d) *un espacio métrico y* $\mathrm{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R}$ *continuas*$\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, T_p)$ *(*T_p *es la topología producto).*

Si ϕ *es (unif.) equicontinua, entonces* $\overline{\phi}^{T_p}$ *son (uniformemente) continuas*

Teorema 1.21. *Si* ϕ *es equicontinua, entonces en* ϕ *coinciden las topologías* T_p*(producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto* $D \subseteq K$ *denso (*$\overline{D} = K$*).*

Teorema 1.22. ***De Ascoli***

Sea $\phi \subseteq \mathrm{C}(K)$ *y sea* (K, d) *métrico compacto. Entonces* ϕ *es relativamente compacto en* $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$ *es equicontinuo y* $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$ *acotado* $\forall x \in K$

Teorema 1.23. ***Lax- Milgram***

Sea $(H, <>)$ *un espacio de Hilbert y* $B : H \times H \to \mathbb{K}(\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$ *tal que:*

1. $B(\cdot, y)$ *es lineal* $\forall y \in H$ *y* $B(x, \cdot)$ *es lineal conj., es decir,* B *es sesquilineal.*
2. B*es acotada:* $\exists c > 0$ *tal que* $|B(x, y)| \le C\|x\|\|y\|\forall x, y \in H$
3. B *es fuertemente positiva:* $\exists b > 0$ *tal que* $|B(x, y)| > b\|y\|^2$*,* $\forall y \in H$

Entonces para cualquier forma lineal y continua $\phi : H \to \mathbb{K}$ *existe un único* $y \in H$ *tal que* $\phi(x) = B(x, y)\forall x \in H$

Demostración

Para y fijo la apliación $x \hookrightarrow B(x, y)$ es lineal continuo. Por el teorema de Riesz, $\exists z \in H$ tal que $B(x, y) =< x, z > \forall x \in H$ y sea T la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que $T(H)$ es un subespacio de H. Veamos que $T(H) = H$ y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1. $T(H)$ es cerrado.

$$\text{Sea } z_n = Ty_n \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$$

$$B(x, y_n - y_m) =< x, z_n - z_m > \forall x \in H$$

$$b\|y_n - y_m\|^{\cancel{2}} \le B(y_n - y_m, y_n - y_m) =< y_n - y_m, z_n - z_m >\le \cancel{\|y_n - y_m\|}\|z_n - z_m\|$$

Luego (y_n) es de Cacuhy y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y tenemos que:

$$< x, z_n >= B(x, y_n) \to B(x, y) =< x, z >=< x, Ty > \forall x \in H$$

2. Supongamos $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : < x_0, z >= 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) =< x_0, z > \forall y \in H,\ B(x_0, x_0) = 0$ si $x_0 \neq 0$

□

1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

Lo que querremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplo 2. *Tomemos $n = 2$, en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.*

Idea para buscar una solución

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int\limits_{\Omega} |\frac{\partial u}{\partial x_1}|^2 + |\frac{\partial u}{\partial x_2}|^2 d_1 dx_2$$

Definición 1.7. $C^2(\overline{\Omega})$

Denotamos a $C^2(\overline{\Omega})$ como las funciones dos veces derivables en el interior de Ω con segunda derivada continua en $\overline{\Omega}$.

Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por $C^2_0(\overline{\Omega})$.

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

Teorema 1.24. ***Teorema de Gauss***

Dada Ω suficientemente regular:

$$\int\limits_{\Omega} \partial x_j w dx = \int\limits_{\Omega} w n_j d\theta$$

Proposición 1.25. *Si existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que minimiza a $D(u)$ entre todas las funciones $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $u|_{\partial\Omega} \equiv f$, entonces u es armónica ($\triangle u = 0$).*

Demostración

En $C^2(\overline{\Omega})$, definimos $\langle\cdot\rangle_D$ por:

$$\langle F, G\rangle_D = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora $D(u) = \langle u, u\rangle_D$.

Si $v \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica que $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(u + \varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(u) + \varepsilon D(v) + \varepsilon\langle u, v\rangle_D + \varepsilon\langle v, u\rangle_D$$

Cancelando $D(u)$ tenemos:

$$\varepsilon^2 D(u) + \varepsilon D(v) + \varepsilon\langle u, v\rangle_D + \varepsilon\langle v, u\rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un ε arbitrario, tenemos que $\langle u, v\rangle_D = 0\ \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$ con soporte compacto, luego:

$$0 = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = -\int\limits_\Omega (\triangle u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \text{ } \mathit{con} \text{ } v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle \triangle u, v\rangle_{L^2} = 0$ para cualquier v de un denso, luego $\triangle u = 0$

□

Teorema 1.26. ***Desigualdad de Poincaré***

$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega),\ \|f\|_0 \leq \operatorname{diam}(\Omega)\|f\|_1$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle,\rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle,\rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

Lema 1.27.

1. $H_1^0 \subseteq H_0$
2. $\forall v \in H_1^0,\ \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j\rangle_0 = -\langle \frac{\partial z}{\partial x_j}, v\rangle_0$. *Es decir:*

$$\int\limits_\Omega z v_j = -\int\limits_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. *Si* $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v\rangle_1 = \int\limits_\Omega \sum\limits_{j=1}^N \frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}$

A v_j se le llama $\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$

Demostración

Sea $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega),\ v_n \to v \in H_1^0$ en $\|\cdot\|_1 \implies \left(\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\langle,\rangle_0$ y converge a una función a la que llamamos $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré, (v_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_0$ y su límite no podrá ser otro que v. La fórmula:

$$\int_\Omega z v_j = -\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

Viene dada por el paso al límite de la expresión dada por el teorema de Gauss:

$$\int_\Omega z \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = -\int_z^{x_j} v_n$$

$\square$

Lema 1.28. ***Variacional***

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega u v dx = 0 \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Entonces $u = 0$ en $L^2(\Omega)$ y $u = 0\ \forall x \in \Omega$

Teorema 1.29.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado. Sea $f \in L^2(\Omega) \equiv H_0$. Entonces existe una ***solución débil*** *de la ecuación:*

$$\begin{cases} \triangle u = f \\ u|_{\partial\Omega} u = 0 \end{cases}$$

En el siguiente sentido:

Existe una única función $v \in H_1^0$ donde que $\langle u, f\rangle = -\langle u, \triangle v\rangle\ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$

Lo rojo aún "está por aclarar"

Demostración

Si $f \in L^2 \implies \phi : L^2 \to \mathbb{R}$ lineal y continua en H_0 por Riesz. Aplicando la des. de Poincaré:

$$|\phi(n)| \leq \|f\|_0\|u\|_0 \leq \operatorname{diam}(\Omega)\|f\|_0\|u\|_1\ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \phi \text{ es continua en } (\mathcal{D}(\Omega), \langle,\rangle_1)$$

Entonces podemos extender ϕ al completado, H_1^0. A esta forma lineal extendida le aplicamos el teorema de Riesz.

Existirá entonces una única $v \in H_1^0$ tal que $\phi(u) = \langle u, v\rangle_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j\rangle_0$ para todo $u \in H_1^0$.

Si tomamos $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle u, v\rangle_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j\rangle_0 = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} \overset{Int.\ partes}{=} -\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \int_\Omega -u \sum_{j=1}^{N} v_{jj}$$

Donde las parciales son en el sentido generalizado visto en el lema.

□

Definición 1.8. ***Definición de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y su topología***

Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ compactos, definimos $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$

En este espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$, definimos una topología a partir de las seminormas utilizadas en la convergencia uniforme de los elementos de $\mathcal{D}K(\Omega)$. Lo vemos en detalle:

Los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ son funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que su soporte está en K y se dice que $h_n \to h$ si $h_n \to h$ de forma uniforme y sus diferenciales convergen de forma uniforme a la de $h(x)$, es decir:

$$D^\alpha h_n(x) \to D^\alpha h(x)\ unif.\ \forall \alpha = (a_1, ..., a_N)$$

1.5 - Problemas variacionales cuadráticos

Teorema 1.30. ***Principal de los problemas variacionales cuadráticos***

Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, acotada, continua[a] y fuertemente positiva[b] y $b : H \to \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Sea $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - b(x) \forall x \in H$$

Llamada forma bilineal cuadrática.

Entonces se verifica la siguiente equivalencia:

$$\inf\{F(z) :\ z \in H\} = F(x_0) \iff B(x_0, y) = b(y)\ \forall y \in H$$

Además, existe un único x_0 que lo verifica.

[a] $\|y\|\|x\|d \geq |B(x,y)|$
[b] $B(x,y) \geq C\|x\|\|y\|\ \forall x, y$

Notemos que la norma $\|\|$ y el módulo de B son normas equivalentes debido a que B es continua y fuertemente positiva.

Demostración

Demostrado en 1.7.1. del libro. Aquí hay un boceto de la demostración:

Dado $t \in \mathbb{R},\ x, y \in H$, se tiene:

$$F(x+ty) = \frac{1}{2}B(x+ty, x+ty) - b(x+ty) = \frac{1}{2}\Big(B(x,x) + B(x,ty) + B(ty,x) + B(ty,ty)\Big) - \Big(b(x) + tb(y)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(B(x,x) + 2B(x,ty) + t^2B(y,y)\Big) - \Big(b(x) + tb(y)\Big) = \frac{t^2}{2}B(y,y) + t\Big(B(x,y) - b(y)\Big) + \frac{1}{2}B(x,x) - b(x)$$

Si el x_0 es donde se alcanza el extremo inferior, se tiene que:

$$F(x_0) \leq \frac{t^2}{2}B(y,y) + t\Big(B(x_0,y) - b(y)\Big) + \underbrace{\frac{1}{2}B(x_0,x_0) - b(x_0)}_{F(x_0)}$$

Y entonces $B(x_0, y) = b(y)$. (???)

”El recíproco se hace con la misma expresión y derivando”

Para la unicidad, basta con aplicar el teorema de Riesz para el producto escalar $\langle , \rangle_B$

□

Método 1. ***Método de aproximación de Ritz-Galerkin***

Dado $B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$, *y tomando* $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$ *con cada* H_n *finito dimensional.*

Tomamos $\mathrm{span}\{e_j^n : j = 1, 2, ..., N\}$ *a una base de cada* H_n

Al problema P *presentado en el anterior teorema (la parte izquierda de la equivalencia) restringido a* H_n *queda:*

$$P|_{H_n} \equiv B(x,y) = h(y) \forall y \in H_n \longrightarrow B(x, e_j^n) = b(e_j^n) = b(e_j^n) \; j = 1, 2, ..., N$$

Entonces si la solución a cada problema es x_n, *se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Demostración

$$B(x_n, y) = b(y) \; \forall y \in H_n$$
$$B(x_0, y) = b(y) \; \forall y \in H$$

Restando llegamos a:

$$0 = B(x_n - x_0, y) \forall y \in H_n$$

Luego el $x_n - x_0$ es la proyección ortogonal sobre H_n asociada a $\langle , \rangle_B$ de x_0 sobre x_n. Entonces es la mejor aproximación sobre H_n como $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

□

1.6 - Operaciones diferenciales y soluciones débiles

Definamos el operador:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

Con:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$$

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

Problema:

Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ encontrar u tal que $L(u) = f$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

Proposición 1.31.

Adjunto de $L^* = \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \overline{a}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ *verifica que:*

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \langle \phi, L^*\psi\rangle \forall \phi, \psi\ \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observación

$\forall f \in L^2(\Omega)$, si $u \in C^n(\Omega)$ verifica que $Lu = f$, entonces $\langle f, \psi\rangle = \langle u, L^*\psi\rangle\ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Definición 1.9. ***Solución débil***

Si $f \in L^2(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ *es una* ***solución débil*** *de la ecuación* $Lu = f$ *siempre que* $\langle f, \psi\rangle = \langle u, L^*\psi\rangle\ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Ejemplo 3. *En* $\mathbb{R}, L = \frac{d}{dx}$ *con* $\Omega = (0, 1),\ u, f \in L^2(\Omega)$

Entonces $Lu = f$ *en sentido débil sii* $\exists F \in: [0, 1] \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua y tal que* $F(x) = u(x)$ *para casi todo punto (p.c.t)* $x \in [0, 1]$ *y* $F'(x) = f(x)$ *p.c.t.* $x \in (0, 1)$

Hay otros ejemplos en el libro (sección 1.10)

1.7 - Teorema de Radon-Nykodin

Teorema 1.32. *Sea* Ω *es de medida.* Σ *una* σ*-álgebra y* $\mu, \nu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ *medidas finitas.*

Si ν *es absolutamente continua respecto de* μ*, es decir,* $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$.

Entonces existe $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ *integrable respecto a* μ *tal que:*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu\ \forall E \in \Sigma$$

Demostración

(Prueba de Von-Neumann)

Sea $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu+\nu)$, entonces podemos definir la forma lineal $\phi : H \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = \int x d\mu$ es lineal y continua para la norma asociada $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ y, por tanto, lo es para la norma asociada $\|\cdot\|_{L^2(\mu+\nu)}$ y aplicando el teorema de Riesz, existe una única función $y \in L^2(\mu + \nu)$ tal que:

$$\int x d\mu = \phi(x) = \langle x, y\rangle_{L^2(\mu+\nu)} = \int_\Omega xyd(\mu + \nu) = \int_\Omega xyd\mu * \int_\Omega xyd\nu$$

Luego tenemos:

$$\int_{\Omega} x(1-y)d\mu = \int_{\Omega} xyd\nu \ \forall x \in H$$

Ejercicio: Probar que $0 < y \leq 1$ p.c.t con relación a μ.

Definimos entonces $g = \dfrac{1-y}{y}$. Entonces:

$$\int_{\Omega} (xy)gd\mu = \int_{\Omega} (xy)d\nu \ \forall x \in H$$

$$\int_{\Omega} ugd\mu = \int_{\Omega} ud\nu \ \forall x \in H, \ u = xg$$

Haciendo $u = \chi_E$ tenemos:

$$\int_{\Omega} gd\mu = \int_{\Omega} \chi_E gd\mu = \int_{\Omega} \chi_E d\nu = \nu(E)$$

□

CAPÍTULO 2

Operadores Lineales

2.1 - Introducción

A no ser que se diga lo contrario, en este tema denotaremos a X como un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Definición 2.1. ***Norma de un operador lineal y*** $\mathcal{L}(X,Y)$

Sea X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y continua. Definimos la norma de T como:

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \ x \in B_X{}^{a}\}$$

Al espacio normado $\Big(\{T : X \to Y \text{ lineal continuo}\}\Big)$ lo denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$. Este espacio es completo cuando lo es Y.

[a] Bola unidad

Observación

Esta norma es la menor constante tal que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \ \forall x \in X$

2.1.1. Nota sobre limites iterados

Cuando tenemos una sucesión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots & \to & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots & \to & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & & & \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos entonces cuando se tiene que:

$$\lim_{p\to\infty} \alpha_p = \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

Proposición 2.1. *Si existe el límite doble,* $\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{pn}$*, entonces se da la igualdad.*

Teorema 2.2. *Si se converge por filas o por columnas se da la convergencia* ***uniforme****, entonces se da la igualdad.*

Observación

Lo realizado sobre límites iterados también es válido para redes y filtros.

2.2 - Inversión de operadores lineales

En esta sección veremos que los operadores invertibles en dimensión infinita forman un conjunto abierto (como ocurre en $\mathbb{R}^n$).

En general, estudiaremos la invertibilidad de un operador $T : X \to X$ (X un Hilbert) estudiando la de $(T - \lambda Id)$. En ese caso, λ será un valor propio. Obteniendo los vectores propios asociados $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Entonces si estos vectores forman una base Hilbertiana, entonces $X = \operatorname{span}\{e_j\}$ y $\forall x \in H$:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \lambda_j e_j$$

Cuando tengamos esto, podremos resolver la ecuación $T(x) = y$, donde queremos obtener la x a partir de T e y.

Esto lo podremos hacer para un operador compacto (la bola unidad va a un conjunto (relativamente) compacto) y simétrico.

Teorema 2.3. ***De Von Neumann***

Si $K \in \mathcal{L}(X)$ *invertible,* $L, A \in \mathcal{L}(X)$ *y sea* $L = K - A$*. Entonces si* $\|A\| < \dfrac{1}{\|K^{-1}\|}$ *entonces* L *es invertible.*

Demostración

Caso 1: $K = Id$. Probaremos entonces que la bola de radio 1 está dentro de los elementos invertibles.

Consideremos $Id - B$ con $\|B\| < 1$. Veremos que esta diferencia es invertible.

Definimos $S = \sum\limits_{i=0}^{\infty} B^n$. Veremos que esta serie es convergente.

Supongamos que la serie es *normalmente* convergente, es decir, $\sum \|B^n\| < \infty$.

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n \text{ es de Cauchy} \implies \text{ es convergente}$$

La serie es *normalmente* convergente ya que dados dos operadores S, T tenemos $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$. Entonces podemos la serie para ver que es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n < \infty$$

Siendo la última convergente al ser una serie geométrica (recordemos que $\|B\| < 1$)

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$. Tenemos que $B \circ S = B \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n\right)$. Como la composición es una función bilineal continua, podemos pasar B a dentro del sumatorio:

$$B \circ S = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B)S = Id$$

De igual forma tenemos:

$$S \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies S(Id - B) = Id$$

Caso 2: Como K es invertible, tenemos que: $(K - A) = K(Id - K^{-1}A)$ será invertible cuando es composición de invertibles[1].

En primer lugar, K es invertible, y tomando $B = K^{-1}A$, tenemos que:

$$\|B\| = \|K^{-1}A\| \leq \|K^{-1}\|\|A\| < 1$$

Y usando el caso 1, tenemos que $(Id - K^{-1}A)$ es invertible $\implies$ $K - A$ es invertible.

Además, utilizando ambos casos podemos escribir $(K - A)^{-1}$ como:

$$(K - A)^{-1} = \Big(K(Id - K^{-1}A)\Big)^{-1} = (Id - L^{-1}A)^{-1} \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1}A)^n K^{-1} \tag{2.1}$$

□

Ejercicio 1. ***Ejercicio propuesto***

Dado un espacio normado $(Z, \|\cdot\|)$, es completo sii toda serie normalmente convergente en Z es convergente en Z.

Ejercicio 2. ***Ejercicio propuesto***

$\mathcal{L}(X)$ es completo.

Definición 2.2. ***Resolvente y espectro***

Dado $M : X \to X$ se definen el resolvente y el espectro respectivamente como:

$$\rho(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda Id - M) \text{ es invertible}\}$$

$$\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda Id - M) \text{ NO es invertible}\}$$

[1] Queda como ejercicio demostrarlo

Teorema 2.4. *Dado $M \in \mathcal{L}(X)$, se tiene:*

1. *$\rho(M)$ es abierto.*
2. *$\rho(M) \to \mathcal{L}(X)$ tal que $\lambda \mapsto (\lambda Id - M)^{-1}$ es analítica.*

Esta prueba, por algún motivo, demuestra ambos puntos:

Demostración

Si $\lambda \in \rho(M)$, podemos aplicar el teorema de Von Neumann para $K = \lambda Id - M$ y $A = \lambda Id$ y tendremos que:

$$(\lambda - h)Id - M = (\lambda Id - M) - hId \text{ será invertible si } h \text{ es suficientemente pequeño}$$

La fórmula (2.1) nos da:

$$\Big((\lambda - h)Id - M\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((\lambda Id - M)^{-1}h\Big)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((\lambda Id - M)^{-1}\Big)^{n-1} h^n \text{ en } \mathcal{L}(X) \quad (2.2)$$

Siendo esta serie convergente cuando $|h| < \|\lambda Id - M^{-1}\|^{-1}$ (la condición que necesitábamos para aplicar el teorema).

□

Teorema 2.5. ***Gelfund***

$\forall M \in \mathcal{L}(X)$, *el espectro $\sigma(M)$ es compacto no vacío.*

Demostración

Tomamos una bola $B(0, \|M\|)$, entonces tenemos $\sigma(M) \subseteq B(0, \|M\|)$.

Sea $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $|\xi| > \|M\| \implies \xi \notin \sigma(M)$ (por (2.1) y usando el Teorema de Von Neumann 2.3). Para aplicar el teorema, tomemos $B = \xi^{-1}M$. Entonces (2.1) nos da:

$$(\xi Id - M)^{-1} = \xi^{-1}(Id - M\xi^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \xi^{-(n+1)}$$

Esta serie converge cuando $\|M\xi^{-1}\| < 1$, es decir, cuando $|\xi| > \|M\|$. Por lo tanto, $\sigma(M)$ es compacto.

Vemos ahora que es no vacío por reducción al absurdo. Supongamos $\rho(M) = \mathbb{C}$ y definimos la función entera:

$$\begin{aligned} \phi : \rho(M) = \mathbb{C} &\to L(X) \\ \lambda &\mapsto (\lambda Id - M)^{-1} \end{aligned}$$

Esta ϕ verifica que $\phi'(\lambda) = Id$ debido a (2.2).

Si $\lim_{\lambda \to \infty} \|\phi(x)\| = 0 \implies \phi$ es constante por el Teorema de Liouville, lo que nos lleva a una contradicción.

Vemos este límite, tenemos que:

$$\|\phi(\lambda)\| = \|(\lambda Id - M)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(Id - M^{-1})^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \|M^{-1}\lambda\|^n = \frac{1}{|\lambda|(1 - \|M\lambda^{-1}\|)} \to 0$$

□

Dado un operador lineal $T : H \to H$ y fijado $y \in T$, tenemos una aplicación lineal inducida ϕ:

$$\begin{aligned} \phi_{Ty} : H &\to K \\ y &\mapsto \langle Tx, y\rangle \end{aligned}$$

Aplicando entonces Riesz, tenemos un único operador lineal T^*y tal que $\phi_{Ty}(x) = \langle x, T^*y\rangle\ \forall y \in H$. Luego $\forall x, y \in H$, llegamos a la igualdad

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{2.3}$$

Definición 2.3. ***Adjunto de un operador***

A T^* definido como en (2.3) lo llamamos el ***adjunto*** *de T.*

Necesitaremos ahora algunas propiedades sobre la norma de un operador lineal.

Lema 2.6. *Dados $f, g \in H$:*

- $\|T\| = \sup\{\langle Tf, g\rangle : \ \|f\|, \|g\| \leq 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf, g\rangle|,\ \|g\| \leq 1\} \|f\| \leq 1\}$
- $\|T\| = \|T^*\|$
- *Si $T = T^*$ entonces* $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \ \|f\| \leq 1\}$

Demostración

1.

Se utiliza la segunda igualdad dada.

2.

Ejercicio.

3.

Sea $M := \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \ \|f\| \leq 1\}$, $M \leq \|T\|$ es "directo". Vemos la otra desigualdad:

$$|\langle Tf, g\rangle| =^{2} \frac{1}{4}\Big|\langle\langle T(f+g), f+g\rangle - T(f-g), f-g\rangle\Big| \leq \frac{1}{4}\Big|\langle\frac{T(f+g)}{\|f+g\|}, \frac{f+g}{\|f+g\|}\rangle\|f+g\|^2\Big| + \Big|\langle\frac{T(f-g)}{\|f-g\|}, \frac{f-g}{\|f-g}\|\rangle\|f-g\|^2\Big|$$

$$\leq \frac{M}{4}\Big(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\Big) = \frac{M}{4}(2\|f\|^2 + 2\|g\|^2)$$

Tomando supremos llegamos a la desigualdad.

□

Proposición 2.7. *Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base hilbertiana y sea la sucesión $(\lambda_k) \in \mathbb{C}$ acotada. Tomamos T:*

$$Te_k := \lambda_k e_k$$

$$T(X) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle \lambda_k e_k$$

Demostrar:

[2] Se utiliza que $T = T^*$, queda como ejercicio.

1. $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : \ k = 1, 2, ...\}$
2. $T^*(e_k) = \overline{\lambda_k} e_k$
3. $T = T^* \iff \lambda_k \in \mathbb{R}$
4. *T es proyección ortogonal* $\iff \lambda_k \in \{0, 1\}\ \forall k$
5. *T es compacto* $\iff \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$
6. $T(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \lambda_k \overline{e_k}$

Demostración

Ejercicio.

□

2.3 - Operadores Compactos

Definición 2.4. ***Operador compacto***

Sea H espacio de Hilbert, B_H una base hilbertiana de H con $B_H = \{v \in H : \ \|v\| \leq 1\}$ y $T : H \to H$ un operador lineal.

*T se dice **compacto** si $T(B_H)$ es relativamente compacto, es decir, si $\forall (f_n)$ sucesión acotada en H, $T(f_n)$ tiene una subsucesión convergente.*

Definición 2.5. $\mathcal{K}(H)$

Definimos $\mathcal{K}(H) = \{S : H \to H \ \text{ lineal, continuo y compacto}\}$.

Teorema 2.8.

Sea H un Hilbert separable y $T : H \to H$ lineal y continuo. Entonces:

1. *$S : H \to H$ es compacto $\implies S \circ T$ y $T \circ S$ son compactos. ($\mathcal{K}(H)$ es un ideal de $\mathcal{L}(H)$)*
2. *Si $T_n : H \to H$ es compacto $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ entonces T es compacto.*
3. *Si T es compacto entonces $\exists T_n : H \to H$ operadores de rango finito tales que $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$*
4. *T es compacto sii T^* lo es.*

Demostración

Los apartados 1,2 aún no están incluidos.

3.

Tomamos $\{e_x\}$ b.h. en H y la función:

$$\begin{aligned} Q_n : H &\to \overline{\text{span}\{e_k : \ k > n\}} \\ g &\mapsto Q_n(g) = \sum_{i>n} \langle g, e_i\rangle e_i \end{aligned}$$

Notemos entonces que $\|Q_n(g)\|^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i\rangle|^2 \to 0$ con $n \to +\infty$.

Afirmamos que esta convergencia no es solo puntual, sino que $\|Q_n \circ T\| \to 0$ con $n \to \infty$.

Para demostrarlo, definimos $P_n : H \to \text{span}\{e_1, ..., e_n\}$ como el proyector ortogonal. Y tomamos Q_n

tal que $I_n = P_n + Q_n$, al componer con T tenemos:

$$Id = P_n + Q_n \implies T = \underbrace{P_n \circ T}_{\to T} + \underbrace{Q_n \circ T}_{\to 0}$$

Completar la demostración de la afirmación y del teorema como ejercicio. Cuidado porque lo puede preguntar

4.

Ejercicio.

$\square$

Ejemplo 3.

Sea $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y un operador $K : f \mapsto K(f)$ una función tal que:

$$K(f)(s) := \int_a^b k(s,t) f(t) dt$$

Si k continua entonces $K : L_1([a,b]) \to C[a,b]$ es compacto.

Demostración

Vemos que $K(B_{L^1})$ es realtivamente compacto en $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\|K(f)\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_{L^1} \implies K(B_{L^1}) \text{ compacto}$$

Si vemos además que $K(B_{L^1})$ es uniformemente equicontinua y aplicando Ascoli terminaremos la prueba.

$$|K(f)(s) - K(f)(s')| = \left| \int_a^b \Big(k(s,t) - k(s't)\Big) f(t) dt \right| \leq \int_a^b |k(s,t) - k(s',t)| \, |f(t)| dt \leq \varepsilon \|f\|_{L^1}$$

Aplicando la continuidad uniforme de k

$\square$

Como corolario, tenemos que:

$$k \text{ continua} \implies K : L^2[a,b] \to L^2[a,b] \text{ es compacto}$$

Observación

Si $k \in L^2[\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d] \implies K : L^2[\mathbb{R}^d] \to L^2[\mathbb{R}^d]$

Con $K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y) f(y) dy$, entonces K está bien definido, es compacto y $\|K\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d \mathbb{R}^d} |k(x,y)|^2 dx dy$

Ejemplo 4.

Recordemos el operador de Laplace (o laplaciano) en $\mathbb{R}^N$*:*

$$\triangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Y se tiene que hay solución para el problema de Dirichlet:

$$\forall f \in L^2(\Omega)\ \exists! u \in H \ tq \ \ \triangle u = f \ en \ \Omega, \ u|_{\partial\Omega} = 0$$

Entonces el operador que para cada $f \in L^2(\Omega)$ *da la solución del problema de Dirichlet es un operador compacto. Para demostrar esto necesitamos el teorema de Rellich, 2.9*

Teorema 2.9. ***Rellich***

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado con frontera regular. Sea* $\Phi \subseteq L^2(\Omega)$ *tales que* $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)\ \forall j,\ \forall \phi \in \Phi$ *y se cumple:*

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq K, \ \|\frac{\partial g}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq K \ \forall j, \ \forall g \in \Phi$$

Entonces ϕ *es relativamente compacto en* $L^2(\Omega)$

Demostración

No se ha dado (ni se pregunta).

□

Teorema 2.10. ***Hilbert-Schmidt*** *"Este teorema lo pregunto sí o sí"*

Sea H *un espacio de Hilbert (separable) y* $T : H \to H$ *operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en* H *de vectores propios* $Tv_k = \lambda_k v_k$ *con* $\lambda_k \in \mathbb{R}\ \forall k$ *y* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$

Vamos a demostrar este teorema por partes.

Proposición 2.11. *Si* $T = T^*$ *en* H *y* $Tv = \lambda v,\ v \neq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración

Como $\lambda\langle v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$

□

Proposición 2.12. *Para un operador copmacto* $T : H \to H$ *y* $\forall \lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$ *es finito dimensional, es decir, los subespacios propios son finito dimensionales.*

Demostración

De lo contrario, $\exists(\phi_n)$ conjunto ortonormal infinito en $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \implies \{T(\phi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ debería tener una subsucesión convergente (T es compacto). Pero además:

$$T\phi_n = \lambda\phi_n \implies \|\lambda\phi_n - \lambda\phi_m\| = \lambda\|\phi_n - \phi_m\| = \lambda\sqrt{2}\ \forall n \neq m$$

Si esto último lo aplicamos a la subsucesión convergente:

$$T\phi_{n_k} = \lambda\phi_{n_k} \implies \|\lambda\phi_{n_k} - \lambda\phi_{n_{k'}}\| = \lambda\|\phi_{n_k} - \phi_{n_{k'}}\| = \lambda\sqrt{2}\ \forall k \neq k'$$

Entonces la subsunción no es convergente y llegamos a una contradicción.

□

Proposición 2.13. *Si T es compacto y autoadjunto, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio de T*

Demostración

Recordemos que en un operador autoadjunto, $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| \leq 1\}$. Buscamos una solución a este problema de optimización.

Sea $(f_n) \subseteq B_H$ tal que $\langle Tf_n, f_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$ y $|\lambda| = \|T\|$. Como $(T(f_n))$ tendrá una subsucesión convergente $T(f_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} g \in H$. Afirmamos que g es vector propio asociado a λ

Demostramos ahora esta afirmación. Tenemos que:

$$0 \leq \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 = \langle Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}, Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\rangle = \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle - 2\lambda\langle f_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle + \lambda^2\langle f_{n_k}, f_{n_k}\rangle =$$

$$\|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda\langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda\|f_{n_k}\|^2 \leq \|T\|^2 - 2\lambda\langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda^2 \to \|T\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0$$

Entonces las sucesiones (Tf_{n_k}) y (λf_{n_k}) son equivalentes y como $Tf_{n_k} \to g$, entonces $\lambda f_{n_k} \to g$, luego:

$$T(g) = T(\lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}) = \lambda T\left(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}\right) = \lambda \lim_{k\to\infty} T(f_{n_k}) = \lambda g$$

Y $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio.

□

Demostramos ahora el Teorema de Hilbert-Schmidt.

Demostración

Sea $S := \overline{\text{span}\{v : v \text{ es vector propio asociado a algún valor propio}\}}$. Veremos que $S = H$.

Vamos primero al caso $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Supongamos que $S \subsetneq H$, entonces $H = S \oplus S^\perp$ y veremos que $T(S^\perp) \subseteq S^\perp$

Dado $g \in S^\perp \implies ?Tg \in S^\perp$. Dado $f \in S$ tenemos $\langle f, Tg\rangle = \langle Tf, g\rangle = 0$.

Entonces tenemos que $T|_{S^\perp} : S^\perp \to S^\perp$ y por la proposición anterior, $\|T|_{S^\perp}\| \neq 0$ es valor propio, lo cual es una contradicción .

Luego T es una biyección y $S^\perp = \{0\}$, con lo que $S = H$ y H tiene una base ortonormal de vectores propios. Lo único que nos queda por ver en este caso entonces es $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, veámoslo.

Si no tendiera a 0, existirían una infinidad $\lambda_{k_1}, ..., \lambda_{k_s}, ...$ y $|\lambda_{k_i}| > \varepsilon\ \forall i$. Y cada valor estaría asociado con un vector v_{k_i} tal que $Tv_{k_i} = \lambda_{k_i} v_{k_i}$ y se tendría:

$$\|\lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\|^2 = \langle \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}, \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\rangle = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2\varepsilon^2$$

Pero entonces (Tv_{k_i}) no puede tener una subsucesión convergente.

Vemos el caso en el que $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$. En este caso, $H = \text{Ker}(T) \oplus (\text{Ker}(T))^\perp$ y nos podemos restringir a $T : \text{Ker}(T)^\perp \to \text{Ker}(T)^\perp$ y aplicar el caso anterior. Entonces tenemos una base que tenemos que completar con el núcleo.

Falta un pequeño detalle, tenemso que ver que $T(\text{Ker}(T)^\perp) \subseteq \text{Ker}(T)^\perp$. Si $g \in \text{Ker}(T)\ \perp,\ x \in \text{Ker}(T) \implies$, tenemos:

$$\langle x, Tg\rangle = \langle Tx, g\rangle = \langle 0, g\rangle = 0$$

□

De la demostración obteneos que el proceso de diaginalización se puede hacer de forma recurrente. Sea $T : H \to H$, $\text{Ker}(T) = \{0\}$ y $(\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id)$ para $\lambda_1 = \|T\|$ o $-\|T\|$. Se da entonces que:

$$H = (\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id) \oplus (\text{Ker}(T) - \lambda_1 T)^\perp$$

Y restringimos ahora T a $(\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id)^\perp$ y su imagen será de nuevo $(\text{Ker}(T) - \lambda_1 Id)^\perp$ (como al final de la demostración anterior). La norma de la restricción (o su opuesto) nos dará otro valor propio λ_2. De esta forma recursiva se pueden obtener todos los valores propios (mirar ejercicio siguiente).

Ejercicio 5. ***Propuesto***

Demostrar que vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

2.4 - Alternativa de Fredholm

Sea $T : H \to H$ compacto y autoadjunto, $b \in H, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Analizamos el problema $(P) : \lambda u - Tu = b,\ u \in H$ para un u desconocido.

Definición 2.6. ***Problema homogéneo asociado***

Dado (P), llamamos a $\lambda u - Tu = 0$ el problema homogéneo asociado (P_{hom}).

Teorema 2.14. *En esta situación:*

$$(P) \text{ tiene solución} \iff \langle b, v\rangle = 0\ \forall v \text{ sol. de } (P_{hom})$$

Demostración

Por el teorema de Hilbert-Schmidt, existe una base $\{u_n\}$ hilbertiana de vectores propios con valor propio asociado λ_n y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Entonces sabemos que:

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n\ \forall x \in H$$

Tomamos $0 \neq \lambda \neq \lambda_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ podemos definir $(\lambda Id - T)^{-1} : H \to H$ y es un operador lineal y continuo. Vemos que si u es solución de (P), entonces:

$$u = \lambda^{-1}(b + Tu) = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle u, u_n\rangle u_n\right)$$

Notemos además que $(\lambda - \lambda_n)\langle u, u_n\rangle = \langle(\lambda Id - T)u, u_n\rangle$ ya que:

$$\langle(\lambda Id - T)u, u_n\rangle = \lambda\langle u, u_n\rangle - \langle Tu, u_n\rangle = \lambda\langle u, u_n\rangle - \langle u, T_n\rangle = \lambda\langle u, u_n\rangle - \lambda_n\langle u, u_n\rangle = (\lambda - \lambda_n)\langle u, u_n\rangle$$

Despejando ahora $\langle u, u_n \rangle$ y usando que $(\lambda Id - T)u = b$ y que u es solución de (P):

$$u = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\langle b, u_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n\right)$$
$$\lambda u = \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\langle b, u_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n\right)$$

Tomemos entonces $\alpha_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$ y analizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n$. Por la desigualdad de Bessel, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle b, u_n \rangle|^2 = \|b\|^2 < +\infty$. Y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \implies |\alpha_n| \leq cte\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces la siguiente serie convergente y se acota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle b, u_n \rangle|^2 \leq (cte)^2 \|b\|^2$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle b, u_n \rangle$ es convergente en H y u está bien definido.

Además,

$$Tu = \lambda^{-1}\left(Tb + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n\right) = \lambda^{-1}\left(\lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda_n (1 + \alpha_n) \langle b, u_n \rangle u_n$$

Como $\lambda u = \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \dfrac{\langle b, u_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n\right)$, entonces:

$$\lambda u - Tu = b + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda_n (1 + \alpha_n) \langle b, u_n \rangle u_n = b$$

□

Corolario 2.15. *Dado $b \in H$, $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$ y supongamos que (P) tiene una solución. Entonces podemos definir $(\lambda Id - T)^{-1} : H \to H$, operador lineal y continuo. tal que $b \mapsto u$ solución del problema (P).*

CAPÍTULO 3

Ejercicios

3.1 - Tema 1

Ejercicio 4. *Sea* $g \in C[a,b]$ *y considere la forma lineal* $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ *definida por* $L(f) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$. *Demuestre que* L *es continua y calcule su norma.*

Indicación. *Suponer en primer lugar que* g *es positiva.*

Tomamos la norma:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}$$

Como L *es lineal, será continua sii:*

$$|L(f)| \leq C\|f\|$$

Tenemos:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq {}^a M \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)\|f\|$$

Calculamos ahora la norma:

$$\|L\| = \sup\{|L(f)| : \|f\|_\infty = 1\}$$

Y tendremos:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Este será nuestro candidato a norma. Comprobemos que es realmente su supremo. En el caso $g \geq 0$ tomando $f \equiv 1$ sale de forma directa. El caso no positivo lo piensas en casa.

[a] Ya que g es continua en un compacto

Ejercicio 12. *Pruébese que un subconjunto de un espacio de Banacah X es relativamente compacto sii para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto relativamente compacto K_ε en X tal que $K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon$*

Se tiene que si $S \subset (X, \|\cdot\|)$ Banach:

$$\overline{S} = \bigcap_{\varepsilon > 0} S + B(0, \varepsilon)$$

Se usa que en un (X, d) métrico $K \subseteq X$ es compacto $\iff$ totalmente actoado y completo.