

Apuntes de Álgebra Conmutativa

Paco Mora

22 de septiembre de 2022

Índice general

1	Tema 1	3
	Ejercicios	9

Tema 1

Ejercicio 1. *Ejercicio Propuesto*

Sea $A = \mathbb{Z}_n$, con n entero > 1 y $\bar{r} \in \mathbb{Z}_n$. Demostrar:

- \bar{r} cancelable $\iff \bar{r}$ invertible $\iff \text{mcd}(r, n) = 1$
- \bar{r} nilpotente \iff todos los divisores primos de n dividen a r .

La siguiente proposición generaliza el ejercicio anterior.

Proposición 1.1. Sea A un anillo finito y sea $a \in A$. Entonces a es cancelable sii es invertible.

Demostración

Definimos

$$\lambda_n : A \rightarrow A \quad \lambda_n(x) = ax \quad \forall x \in A$$

Es inyectiva, $\lambda_n(x) = \lambda_n(y) \iff ax = ay \implies a \text{ cancel. } x = y$

Por lo tanto, y como A es finito, λ_n es biyectiva y $1 \in \text{Im}(\lambda_n) \iff \exists b \in A \mid \lambda_n(b) = 1$

□

Proposición 1.2. A reducido $\iff \text{Nil}(A) = \{\text{elem nilpotentes de } A\} = \{0\}$

Demostración

\implies

A reducido sii $\forall a \in A, a^2 = 0 \implies a = 0$

\Leftarrow

Por reduc. al absurdo, supongamos $b \in \text{Nil}(A) \setminus \{0\} \implies \exists n > 0$ (mínimo) con $b^n = 0 \implies b^{n-1} \neq 0$

Pero entonces, $(b^{n-1})^2 = b^{2n-2} = 0$ y $2n - 2 \geq n$ para $n \geq 2$, luego llegamos a una contradicción.

□

Ejercicio 2. Ejercicio Propuesto

\mathbb{Z}_n es un anillo reducido $\iff n$ es libre de cuadrados.

Demostración del 1.9(ii)**Demostración**

a/b y $a/c \implies \exists b', c' \in D / ab' = b, ac' = c \dots$ Sean ahora $r, s \in D$ arbitrarios y veamos que $a/rb + sc$

$$rb + rc = r(ab) + s(ac') = arb' = asc' = a(rb' + sc') \implies a|rb + sc \implies \cancel{b}1 = \cancel{b}(dc)$$

□

Ejercicio 3. Ejercicio propuesto

Sean $G_1, G_2 \subset A$. Demostrar que $(G_1)(G_2) = (G_1 \cdot G_2)$. En particular, el producto de ideales principales es un ideal principal.

Observación

$IJ \subset I \cap J$ (estricto en general: $A = \mathbb{Z}$, $I = (2)$, $J = (4)$, $IJ = (8)$, $I \cap J = (4)$)

Ejemplo 4. Aplicación del teorema de la correspondencia

Los ideales de \mathbb{Z}_n están en correspondencia con los divisores positivos de n .

$$\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n) \rightarrow \{d > 0 : d|n\}$$

Pero los ideales de \mathbb{Z}_n son isomorfos a $\{I \trianglelefteq \mathbb{Z} : n\mathbb{Z} \subset I\}$ por el teorema de la correspondencia, entonces:

$$\{I \trianglelefteq \mathbb{Z} : n\mathbb{Z} \subset I\} = \{d\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} : n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}\} = \{d\mathbb{Z} : d|n\} \cong \{d > 0 : d|n\}$$

Proposición 1.3. Proposición 1.31 extendido (la prueba es la de los apuntes) Sean A, B_1, \dots, B_n anillos y sean $g_i : A \rightarrow B_i$ homomorf. de anillos.

1. $\phi : A \rightarrow B_1 \times \dots \times B_n$, dado por $\phi(a) = (g_1(a), \dots, g_n(a))$ es un homomorf. de anillos con núcleo $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(g_i)$
2. Se los $\text{Ker}(g_i)$ son comaximales dos a dos, entonces se verifica:
 - a) $\text{Im}(\phi) = \text{Im}(g_1) \times \dots \times \text{Im}(g_n)$
 - b) $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(g_1) \cdots \text{Ker}(g_n)$
 - c) Se tiene un isom. de anillos: $\frac{A}{\text{Ker}(g_1) \cdots \text{Ker}(g_n)} \cong \text{Im}(g_1) \times \dots \times \text{Im}(g_n)$

Demostración

1.

$$\text{Ker}(\phi) = \{a \in A : (g_1(a), \dots, g_n(a)) = (0, \dots, 0)\} = \{a \in A : g_i(a) = 0 \forall i\} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(g_i)$$

2.

Si los $\text{Ker}(g_i)$ son comaximales dos a dos entonces:

$$\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(g_1) \cdots \text{Ker}(g_n)$$

Con lo que tenemos 2b).

2.a

Si $(b_1, \dots, b_n) \in \text{Im}(\phi) \implies (b_1, \dots, b_n) = \phi(a) = (g_1(a), \dots, g_n(a))$ para algún $a \in A \implies b_i \in \text{Im}(g_i) \forall i$. Por tanto, $(b_1, \dots, b_n) \in \text{Im}(g_1) \times \dots \times \text{Im}(g_n)$

Si probamos ahora que $(0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \text{Im}(\phi) \forall x_i \in \text{Im}(g_i)$, entonces toda n -upla $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Im}(\phi)$ en $\text{Im}(\phi_1) \times \dots \times \text{Im}(\phi_n)$ comaximales dos a dos.

$$\text{Ker}(g_i) + (\cap_{j \neq i} \text{Ker}(g_j)) = A \implies 1 = a + b, \quad a \in \text{Ker}(g_i), \quad b \in \cap_{j \neq i} \text{Ker}(g_j)$$

Como $x \in \text{Im}(g_i) \implies \exists u \in A : g_i(u) = x_i$, entonces:

$$x_i = 1 \cdot x_i = (a + b)g_i(u) = g_i((a + b)u)$$

Luego entonces:

$$\phi(bu) = (g_1(bu), \dots, g_i(bu), \dots, g_n(bu)) = (0, \dots, 0, g_i(bu), 0, \dots, 0)$$

$$x_i = g_i(u) = g_i(au + bu) = \underline{g_i(a)}\overline{g_i(u)} + g_i(bu)$$

Con lo que queda demostrado 2.b. 2.c.

Basta utilizar 2.a), 2.b) y el primer teorema de isomorfía.

□

Definición 1.0.1. Conjunto inductivo

Una **conjunto inductivo** es un conjunto ordenado S tal que todo subconjunto totalmente ordenado no vacío tiene un acota superior en S

Lema 1.0.1. Lema de Zorn

Todo conjunto inductivo no vacío tiene un elemento maximal.

Demostración

Fijemos $I \trianglelefteq A$, $I \neq A$ ideal propio.

$$S_I = \{J \trianglelefteq A : J \text{ ideal propio e } I \subset J\}$$

S_I es inductivo y $\neq \emptyset (I \in S_I)$

Sea Y un subconjunto totalmente ordenado $\neq \emptyset$ de S_I . Tomo $m = \bigcup_{J \in Y} J$. Porbemos que m es un ideal propio tal que $I \subset m$. Lo que implica que $m \in S_I$.

$$\text{Sean } a, b \in m \implies \begin{cases} a \in \bigcup_{J \in Y} J \iff \exists J \in Y : a \in J \\ b \in \bigcup_{J \in Y} J \iff \exists J' \in Y : b \in J' \end{cases}$$

Si tomamos por ejemplo que $J \subset J'$, entonces $a, b \in J' \implies a - b \in J' \implies a - b \in m$

Notemos entonces que un elemento maximal de S_I es también un ideal maximal.

□

Ejercicio 5. $I, P \trianglelefteq A$, siendo P primo. Probar que existe un primo minimal sobre I , pongamos q tal que $q \subset P$

Lema 1.0.2. Lema de Krull

A anillo, $I \trianglelefteq A$ y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo. Suponemos que $I \cap S = \emptyset$ y consideremos $\mathcal{L}_{I,S} = \{J \trianglelefteq A : I \subset J, J \cap S = \emptyset\}$. Se verifica:

1. $\mathcal{L}_{I,S}$ es un conjunto inductivo.
2. Cualquier elemento maximal de $\mathcal{L}_{I,S}$ es un ideal primo.

Demostración

1.

Hemos de probar que si $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}_{I,S}$ es un subconjunto totalmente ordenado $\neq \emptyset \implies$ tiene una cota superior en $\mathcal{L}_{I,S}$.

Habría que comprobar que $\tilde{J} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$ es un ideal.

Como tenemos que $I \subset \tilde{J}$ y $S \cap \tilde{J} = S \cap (\bigcup J) = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} (S \cap J) = \emptyset$

Entonces \tilde{J} es una cota superior de \mathcal{J} en $\mathcal{L}_{I,S}$.

2.

Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in P$. Por reducc. al absurdo, supongamos que $a \notin P$ y $b \notin P$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} P \subsetneq P + (a) \\ P \subsetneq P + (b) \end{array} \right\} \implies P + (a), P + (b) \notin \mathcal{L}_{I,S} \iff \left\{ \begin{array}{l} (P + (a)) \cap S \neq \emptyset \\ (P + (b)) \cap S \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Sean entonces $s \in (P + (a)) \cap S$ y $s' \in (P + (b)) \cap S$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} s = p + ar \\ s' = p' + br' \end{array} \right. \quad p, p' \in P, r, r' \in A$$

$$ss' = (p + ar)(p' + br') = pp' + pbr' + arp' + abrr' \in P \implies P \cap S \neq \emptyset$$

Con lo que llegamos a una contradicción

□

Proposición 1.4. Sea A un anillo e $I \trianglelefteq A$ un ideal **propio**. Son equivalentes:

1. Si $a \in A$ y $a^n \in I$, para algún $n > 0$, entonces $a \in I$
2. Si $a \in A$ y $a^2 \in I$, entonces $a \in I$
3. I es una intersección de ideales primos.
4. I es la intersección de los ideales primos minimales sobre I .

Demostración1 \implies 2.

Directa.

2 \implies 1

Si $n = 1 \implies a' = a \in I$, podemos suponer que $a \notin I$ y que existe $n > 1$, $a^n \in I$ tal que $a^{n-1} \notin I$. Entonces tenemos:

$$(a^{n-1})^2 = a^{2n-2} = \underbrace{a^n}_{\in I} \underbrace{a^{n-2}}_{\in A} \implies (a^{n-1})^2 \in I \implies a^{n-1} \in I$$

Con lo que tenemos una contradicción y $a \in I$.

4 \implies 3.

Directa.

3 \implies 4.

Supongamos que $\exists (P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ideales primos tales que $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \Lambda, I \subset P_\lambda &\implies {}^1 \exists q_\lambda \text{ primo minimal sobre } I \text{ tal que } I \subset q_\lambda \subset P_\lambda \implies \\ &\implies I \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = I \implies I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda \\ I \subset \bigcap_{\substack{q \in \text{Spec}(A) \\ q \text{ minimal } I}} q &\subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda = I \end{aligned}$$

Con lo que tenemos 4.

3 \implies 2.

Si $a^2 \in I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \iff a^2 \in P_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \implies a \in P_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \iff a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = I$

1 \implies 4.

Sean $\mathcal{Q} = \{\text{ideales primos minimales sobre } I\}$. Queremos probar que $I = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q$. La inclusión \subset es directa.

Supongamos ahora que $I \subsetneq \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q \implies$ tomamos $x \in \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ tal que $x \notin I$.

Como $x \notin I \implies x^n \notin I, \forall n \geq 0$. Aplicamos ahora el lema de Krull con I y $S = \{x^n : n \geq 0\}$.

Entonces $\mathcal{L}_{I,S} = \{J \leq A : I \subset J, J \cap S = \emptyset\}$ tiene un elemento maximal, pongamos P , que es primo. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \cap P = \emptyset \\ I \subset P \end{array} \right\} \implies {}^2 \exists Q \text{ primo minimal sobre } I : I \subset Q' \subset P \implies S \cap Q' = \emptyset$$

Con lo que llegamos a una contradicción porque $x \in Q'$

□

Definición 1.0.2. Ideal radical

Un ideal que cumpla las condiciones de la anterior proposición se dice que es **radical**.

Definición 1.0.3. Radical de un ideal

Sea $I \leq A$ ideal propio, $\sqrt{I} := \{x \in A : x^n \in I, \text{ para algún } n > 0\}$

Proposición 1.5. Sustituye al Corolario 1.4.6

Dado $I \leq A$ ideal propio, el subconjunto \sqrt{I} es un ideal radical de A y puede ser descrito por cada una de las siguientes formas equivalentes:

1. El menor ideal radical que contiene a I .
2. La intersección de todos los ideales radicales que contienen a I .

¹Por el último ejercicio propuesto.

²Por el ejercicio de nuevo.

3. La intersección de todos los ideales primos que contienen a I .
 4. La intersección de todos los ideales primos minimales que contienen a I .

Demostración

Vemos primero que \sqrt{I} es un ideal radical de A .

Hemos de probar:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \ x + y \in \sqrt{I} \ \forall x, y \in \sqrt{I} \\ b) \ ax \in \sqrt{I} \ \forall x \in \sqrt{I}, \ a \in A \\ c) \ Si \ a^n \in \sqrt{I}, \ con \ n > 0 \implies a \in \sqrt{I} \end{array} \right\} \text{ ideal}$$

Vemos en primer lugar b):

$$(ax)^n = a^n x^n \implies (\text{Como } x^n \in I, \ a^n x^n \in I) \implies (ax)^n \in I \implies ax \in \sqrt{I}$$

a) se demuestra utilizando el binomio de Newton:

$$a, x \in \sqrt{I} \implies \exists m, n > 0 : x^m \in I, \ y^n \in I$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $m = n$

$$(x + y)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i y^{2n-i} \in I \implies x + y \in I$$

Para ver c), sea ahora $a^n \in \sqrt{I} \implies \exists m > 0 : (a^n)^m \in I \implies a^{nm} \in I \implies a \in \sqrt{I}$.

Con lo que \sqrt{I} es un ideal radical.

1.

Sea $J \trianglelefteq A$ ideal radical y propio tal que $I \subset J$. Queremos ver que $\sqrt{I} \subset J$.

Sea $x \in \sqrt{I} \implies \exists n > 0 : x^n \in I \implies x^n \in J \implies J \text{ radical } x \in J$

2.

Es consecuencia inmediata de 1.

3.

Sea $\mathcal{V}(I) = \{P \in \text{Spec}(A) : I \subset P\} \implies \sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathcal{V}(I)} P$.

La inclusión \subset es directa con la afirmación 1 y por ser la intersección un ideal radical. Para la otra, sabemos que \sqrt{I} = intersección de los ideales primos minimales sobre \sqrt{I} . Entonces:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{Q \in \text{Spec}(A) \\ Q \text{ minimal}/\sqrt{I}}} Q \supseteq \bigcap_{P \in \mathcal{V}(I)} P$$

Luego ya tenemos la igualdad.

4.

Se demuestra aplicando el ejercicio.

□

Ejemplo 6. Tomamos el caso $(I) = 0$

$$\sqrt{(0)} = \{x \in A : x^n = 0\} = \{\text{nilpotentes de } A\} =: \text{Nil}(A)$$

1. $\text{Nil}(A)$ es el menor ideal radical de A
2. $\text{Nil}(A)$ es la intersección de todos los ideales radicales de A .
3. $\text{Nil}(A)$ es la intersección de todos los ideales primos de A .
4. $\text{Nil}(A) = \bigcap_{P \in \text{MinSpec}(A)} P$

Ejercicios

Ejercicio 2.

$$x, y \in \mathcal{U}(A) \implies xy y^{-1} x^{-1} = 1 \implies xy \in \mathcal{U}(A)$$

$$xy \in \mathcal{U}(A) \implies \exists w \in A : xyw = 1 \implies \begin{cases} x^{-1} = yw \\ y^{-1} = wx \end{cases}$$

Ejercicio 3. En este ejercicio hay una errata, está por solucionar

Sabemos que en un anillo finito, las unidades y los elementos cancelables son los mismos. Luego $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)| = |\{\text{cancelables}\}|$. Además sabemos que $|\{\text{divisores de cero}\}| = n - |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)|$. Además sabemos que:

$$|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)| = \phi(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

Entonces,

$$|\{\text{divisores de cero}\}| = p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 \cdots p_r - \prod_{i=1}^r (p_i - 1))$$

Vemos entonces el cardinal de $\text{Nil}(\mathbb{Z}_n)$:

$$\bar{k} = k + n\mathbb{Z} \in \text{Nil}(\mathbb{Z})_n \iff \text{todos los } p_i \text{ dividen a } k$$

$$\bar{k} \in \text{Nil}(\mathbb{Z})_n \iff \exists t > 0 : \bar{k}^t = \bar{0} \text{ en } \mathbb{Z}_n \iff \exists t > 0 : n/k^t \implies \text{todos los } p_i \text{ dividen a } k$$

Recíprocamente:

$$k = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}, \text{ con } 0 < \beta_i \leq \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, r$$

$$|\text{Nil}(\mathbb{Z})_n| = \alpha_1 \cdots \alpha_r$$

Ejercicio 4.

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24}) = \{\bar{k} : \text{mcd}(k, n) = 1\} = \{\text{cancelables}\} = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{23}\}$$

$$\{\text{divisores de cero}\} = \mathbb{Z}_{24} \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24})$$

Ejercicio 6.

Recordemos primero que $p \in A$ es primo sii (p) es un ideal primo.

$f : A \rightarrow B$ homomorf. Si a satisface (P) , ¿ $f(a)$ cumple (P) ?

Apartado a)

Si $a \in \mathcal{U}(A) \implies \exists a^{-1} \in A : a \cdot a^{-1} = 1 \implies f(a)f(a^{-1}) = f(1) = 1 \implies f(a) \in \mathcal{U}(B)$.

Apartado b)

Tomando $\mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}[X]}{(2x)}$ homomorfismo inyectivo. El 2 es cancelable en \mathbb{Z} pero no lo es en el anillo destino.

Apartado c)

Sea $a \in A$ divisor de 0 $\implies \exists b \in A \setminus \{0\} : ab = 0 \implies f(a)f(b) = 0$

Cuando f es inyectiva: sí, porque $f(b) \neq 0$. En otro caso:

Sean $m, n > 1$, $mn\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \implies$ tomamos un homomorfismo de anillos suprayectivo:

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Tomando m, n tales que $\text{mcd}(n, m) = 1$ tenemos que \overline{m} es divisor de cero pero su imagen, $[m] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$

Apartado d)

Si $a \in A$, existe un exponente $n > 0$ tal que $a^n = 0 \implies f(a)^n = f(a^n) = 0$, entonces $f(a)$ es nilpotente.

Apartado e)

De forma parecida al apartado anterior, vemos que si $e = e^2$ en A , al aplicar f tenemos que $f(e) = f(e)^2 \implies f(e)$ es idempotente.

Apartado f)

Basta tomar la inclusión de \mathbb{Z} en \mathbb{Q} para tener un contraejemplo (no suprayectivo). Para el caso suprayectivo planteamos un ejercicio:

Ejercicio: Sea $\overline{k} = kp^t\mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{p^t} \iff \overline{k} = \overline{p}\overline{u}$, siendo $\overline{u} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t})$. Más generalmente: Sea A un anillo y $p \in A$ tales que (p) es el único ideal maximal de A . Entonces los elementos irreducibles de A son los de la forma pu , siendo $u \in \mathcal{U}(A)$ (p es el único irreducible de A salvo asociados)

Construimos en base a este ejercicio el homomorfismo suprayectivo formado por la proyección $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^t}$. Dado $q \neq p$ primo, su imagen es $\overline{q} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t}) \implies \overline{q}$ no es irreducible.

Apartado g)

Ejercicio: Sea A un dominio y $p \in A$. Si p es primo entonces es irreducible. Cuando A es un DIP, se verifica también el recíproco.

Como los contraejemplos del apartado anterior parten de \mathbb{Z} y los irreducibles y los primos son iguales en \mathbb{Z} , podemos usar los mismos contraejemplos en este apartado.

Vamos a resolver ahora el primero de los ejercicios planteados:

Ejercicio: Sea $\bar{k} = kp^t\mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{p^t} \iff \bar{k} = \bar{p}\bar{u}$, siendo $\bar{u} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^t})$. Más generalmente: Sea A un anillo y $p \in A$ tales que (p) es el único ideal maximal de A . Entonces los elementos irreducibles de A son los de la forma pu , siendo $u \in \mathcal{U}(A)$ (p es el único irreducible de A salvo asociados)

Dado $p = ab$, veamos si p es irreducible. Supongamos que $a \notin \mathcal{U}(A) \implies (a) \subseteq A \implies (a) \subset (p)$ porque (p) es el único ideal maximal. $\implies a = pa'$, siendo $a' \in A$

$$\implies p = ab = pa'b \iff p(1 - a'b) = 0 \begin{cases} 1 - a'b \in \mathcal{U}(A) \text{ no, porque implicaría} \\ \text{una contradicción } (p = 0) \\ 1 - a'b \notin \mathcal{U}(A) \end{cases}$$

$1 - a'b \notin \mathcal{U}(A) \implies (1 - a'b) \subset (p)$, pero no puede darse $(a'b) \subset (p)$, porque tendríamos

$$1 = 1 - a'b + a'b \in (p) \implies a'b \in \mathcal{U}(A) \implies b \in \mathcal{U}(A)$$

Sea $q \in A$ irreducible $\implies q \notin \mathcal{U}(A) \iff (q) \subseteq A$ (y propio) $\implies (q) \subset (p) \implies q = pu$, para algún $u \in A$

Vemos ahora los recíprocos.

Apartado a)

La inclusión de \mathbb{Z} a \mathbb{Q} y tomando $a = f(a) = 3$ tenemos un contraejemplo no suprayectivo, para el sobre, tomamos la proyección de \mathbb{Z} en \mathbb{Z}_3 .

Apartados b,c)

Basta aplicar el contrarrecíproco de $f(a)$ cancelable $\implies a$ cancelable y $f(a)$ divisor de 0 $\implies a$ divisor de 0

Apartado d)

$f(a)$ es nilpotente $\iff f(a)$ tal que $\exists n > 0$ tal que $f(a)^n = 0 \implies f(a^n) = 0 \iff a^n \in \text{Ker}(f)$.

Si f es inyectiva, sí se cumple la cadena de sii.

Si f es sobre, tomamos el contraejemplo de la proyección de \mathbb{Z} en \mathbb{Z}_n con un producto de primos

Apartado e)

De forma parecida al apartado anterior:

$$f(a) = f(a^2) \iff a - a^2 \in \text{Ker}(f)$$

Si f es inyectiva, sí se cumple.

En el caso sobre, tomamos la proyección de \mathbb{Z} en \mathbb{Z}_6 , entonces 7 no es idempotente y $f(7) = \bar{1}$ no lo es.

Apartado f)

Para el caso sobre, tomamos la aplicación $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^t}$ y el elemento $(p^t + 1)p \rightsquigarrow \bar{p}$

La idea para obtener el caso inyectivo es tomar un elemento como $2 \cdot 3$ no irreducible, y llevar uno de sus factores a una unidad. Tomamos la aplicación:

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] = \{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{m}{2^r}, m \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$$

Dejamos como ejercicio ver que 3 es irreducible en $\mathbb{Z}[1/2]$