# Delirios de AnalFun

Paco Mora

25 de octubre de 2022

CAPÍTULO 1

# Yo qué sé qué es esto

## 1.1 - Introducción

**Definición 1.1.** *Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.*

**Teorema 1.** ***(Baire)***

*Sea $(X, d)$ espacio métrico completo $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abiertos de en $X$, $\overline{G}_r = X$ $\forall n \in N$. Entonces:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

*//**Repaso de la relación de orden***

**Teorema 2.** ***Principio de la buena ordenación*** *Para todo conjunto $\mathcal{S}$, existe una relación de orden $\leq$ tal que $(S, \leq)$ está bien ordenado, $\leq$ es un buen orden.*

**Teorema 3.** ***Lema de Zorn***

*Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para $C$, cadena, existe $c \in P$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in C$), entonces $P$ tiene un elemento maximal (existe $m \in P$ tal que si $\leq x$ entonces $x = m$)*

**Teorema 4.** ***Principio Maximal de Hasudorff***

*Cada conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ contiene una cadena maximal.*

**Teorema 5.** *Son equivalentes:*

1. *El principio Maximal de Hasudorff*
2. *Lema de Zorn*
3. *Principio de la buena ordenación*
4. *Axioma de elección*

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

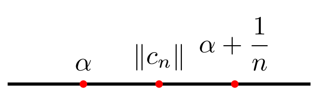
//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

**Teorema 6.** ***De la mejor aproximación***

*Dado* $(H, <\cdot>)$ *espacio de Hilbert y* $C \subset H$ *cerrado y convexo. Sea* $x_0 \notin C$. *Entonces existe un único elemento* $c_0 \in C$ *tal que* $\|x_0 - x\| = \inf\{\|x_0 - c\| \; = \alpha : \; c \in C\}$

**Demostración**

Tomemos una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n \in C$ de forma que se verifique




Si $c_n$ fuera de Cauchy, existe $c_0 = \lim_{n\to\infty} c_n$. Probemos que $(c_n)$ es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

Como $\underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de $C$ para el punto medio entre $c_n$ y $c_m$:

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\|\frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que $\|c_n - c_m\| \to 0$.

$\square$

**Teorema 7.** ***(de la proyección)***

*Sea* $M$ *un subespacio cerrado del Hilbert* $H$, *entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas* $P, Q : H \to H$ *tales que* $P(H) = M$ *y* $Q(H) = M^{\perp} = \{y \in H : <y, m>= 0 \; \forall m \in M\}$ *y* $x = Px + Qx \; \forall x \in H$

*Además se verifica:*

- $x \in M \implies Px = x, \; Qx = 0; \; x \in M^{\perp} \implies Px = 0, \; Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, \; y \in M\} \; \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *(Pitágoras)*

*Como consecuencia* $H = M \oplus M^{\perp}$

**Demostración**

Sea $x \in H,\ x+M$ cerrado y convexo, llamemos $Qx$ alúnico elemento en $x+M$ de norma mínima y definimos $Px = x - Qx$. Vemos que $Qx \in M^{\perp}$, $< z, y >= 0 \forall y \in M$. Aplicando que $Qx \equiv Z$ tiene norma mínima en $x+M$ tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 =< z, z > \leq \underbrace{\|z-\alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} =< z-\alpha y, z-\alpha y >= \cancel{< z, z >} - \overline{\alpha} < z, y > -\alpha < y, z >= \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora $\alpha =< z, y >$ y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$, luego $\text{Im}(Q) \subset H^{\perp}$. Como además $M \cap M^{\perp} = \{0\} \implies x = Px + Qx$, entonces $H = M \oplus M^{\perp}$

Análogamente sale el resto de los enunciados[1].

□

**Lema 1.1.1.** *$M \subset H$ subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert $H$. Entonces $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$, $< x_0, m \geq 0 \forall m \in M$*

**Demostración**

Como $H \neq M \implies M^{\perp} \neq \{0\}$

$$\{d_n :\ n = 1, 2, ..\}\text{numerable y denso en } H$$

Tomamos entonces una base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ tal que:

$$\text{span}\{d_1, ..., d_n, ...\} = \text{span}\{e_1, ..., e_n, ...\}$$

□

**Definición 1.2.** ***Conjunto ortonormal*** *$\{\overline{u}_1, \overline{u_2}, ...\}$ en $H$ : $< u_i, u_j >= \delta_{ij}$. Tenemos además que son LI:*

$$0 = \| \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i \|^2 =< \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i, \sum_{i=1}^{n} c_i 0_i >= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \implies c_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

**Proposición 1.1.** *$M = \text{span}\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset H,\ P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} < x_i, u_i > u_i$. Si $d = dist\{x, M\}$ entonces:*

$$\|x\|^2 - \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2$$

**Lema 1.1.2.** *Sea $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ ortonormal, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} | < x, u_i > |^2\ \forall x \in H$*

[1] xd

**Proposición 1.2.** $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ *ortonormal en* $H$, *la función:*

$$\Lambda : H \to \ell^2 \ \Lambda(x) = (< x, u_i >)_{i=1}^{\infty}$$

*es continua y sobre*

**Demostración**

$(\xi_n) \in \ell^2$ encontramos $x \in H$: $\Lambda(x) = (\xi_n)$. Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n u_n \to < \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m >$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

**Teorema 8.** ***(de la base hilbertiana)***

*Para* $\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ *conjunto ortonormal en* $H$ *(espacio de Hilbert). Son equivalentes:*

1. $\{u_1, u_2, ...\}$ *es ortonormal maximal.*
2. $\overline{\text{span}\{u_1, ...\}} = H$
3. $\forall x \in H$ *se tiene* $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > u_n$ *en* $H$
4. $\forall x \in H, \ \forall y \in H,$ *se tiene* $< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, u_n > \overline{< y, u_n >}$
5. $\forall x \in H,$ *se tiene* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, u_n > |^2$

*A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval*

**Demostración**

Recomiendo mirar el libro. $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea $M_n = span\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, sabemos que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$ y que:

$$\forall x \in H, \ P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{dist(x, M_n)^2}_{=:\delta_n \to 0} + \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2$$

$$\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n : \ \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon, \ x_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

$4 \implies 5$

Directo.

$5 \implies 2$

Por la desigualdad de Bessel.

□

**Definición 1.3.** *A una base como la anterior se le llama* ***base hilbertiana****. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.*

**Lema 1.1.3.** *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces E es finito dimensional.*

*Para E no completo, no es cierto.*

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

**Teorema 9.** *Sea $< \cdot >$ un producto escalar en $C([a,b])$ con $\|\cdot\|_\infty$ más fina que $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{\phi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} < f, \phi_n > \phi_n \ \forall f \in C[a,b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \implies \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} < f, \phi_n > \phi_n \right\|_{<\cdot>} < \varepsilon$$

### 1.1.1. Series de Fourier

**Definición 1.4.** *Un polinomio trigonométrico es una función de la forma*

$$h(t) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \ m = 0, 1, 2, ...$$

**Lema 1.1.4.** *Si $h_1, h_2$ son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.*

**Lema 1.1.5.** *$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico $q_\varepsilon$ tal que:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

**Ejercicio 1.**

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{pi}} \cos(nt), \ u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{pi}} \sin(mt), \ m = 1, 2, ...$$

*Es ortonormal en $(C[a,b], \langle \cdot \rangle)$*

## 1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

**Proposición 1.3.** *Dado $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Existe una única medida ($F$ función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)dF(f)$$

**Teorema 10.** ***Teorema de Riesz.***

*Buscar en el libro.*

**Definición 1.5.** ***Topología débil del espacio de Hilbert***

*Sea $(H, <>)$ un espacio de Hilbert.*

$$\begin{array}{ll} \mathbb{K} \leftarrow H : x_0, & \varepsilon > 0,\ t_1, ..., t_p \in H \\ < x, x_0 > \hookleftarrow x & \end{array}$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, ..., t_p) = \{z \in H : | < t; x_0 - z > | < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., p\}$$

**Teorema 11.** ***Alaoglo-Bourbaki***

*Sea $(H, <>)$ un espacio de Hilbert y sea $B_H = \{x \in H : \ \|x\|_{<>} \leq 1\}$. Entonces $B_H$ es un subconjunto débilmente compacto.*

**Demostración**

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana $\{e_n\}$ de $H$ y tomemos $(v_n) \subseteq B_H$.

Notemos primero que $| < e_p, v_n > | \leq 1\ \forall p, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $[0,1]^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión $(v_n)$, $v_n \mapsto < -, v_n >$ y utilizando la base, este producto puede expresarse como $\sum\limits_{p=1}^{\infty} < x, e_p > e_p$ para cierto $x$.

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros $n_1 < n_2, ..., n_k < ...$ de forma que $(< e_p, v_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces $S = s\,\mathrm{span}\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(< s, v_{n_k} >)_{k=1}^{\infty}$ es convergente $\forall s \in S$. Falta ver que sea convergente para todo punto de $H = \overline{S}$ que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

## 1.3 - Teoremas de Skald

**Definición 1.6.** ***Familia de funciones (uniformemente) equicontinua***

*Una sucesión de funciones continuas* $(f_i)_{i\in I}$ *se dice que es equicontinua en* $x_0$ *si* $\forall \varepsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists \delta_\varepsilon$ *tal que* $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$. *Es decir, que el* $\delta$ *necesario es el mismo para todas las funciones.*

*De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:*

*Una sucesión de funciones uniformemente continuas* $(f_i)_{i\in I}$ *se dice que es uniformemente equicontinua en si* $\forall \varepsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists \delta_\varepsilon$ *tal que* $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. *Es decir, que el* $\delta$ *necesario es el mismo para todas las funciones.*

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

**Teorema 12.** *Sea* $(K, d)$ *un espacio métrico y* $\mathrm{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ continuas}\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, T_p)$ *(*$T_p$ *es la topología producto).*

*Si* $\phi$ *es (unif.) equicontinua, entonces* $\overline{\phi}^{T_p}$ *son (uniformemente) continuas*

**Teorema 13.** *Si* $\phi$ *es equicontinua, entonces en* $\phi$ *coinciden las topologías* $T_p$*(producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto* $D \subseteq K$ *denso (*$\overline{D} = K$*).*

**Teorema 14.** *Sea* $\phi \subseteq \mathrm{C}(K)$ *y sea* $(K, d)$ *métrico compacto. Entonces* $\phi$ *es relativamente compacto en* $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$ *es equicontinuo y* $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$ *acotado* $\forall x \in K$

**Teorema 15.** ***Lax- Milgram***

*Sea* $(H, <>)$ *un espacio de Hilbert y* $B : H \times H \to \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ *tal que:*

1. $B(\cdot, y)$ *es lineal* $\forall y \in H$ *y* $B(x, \cdot)$ *es lineal conj., es decir,* $B$ *es sesquilineal.*
2. $B$*es acotada:* $\exists c > 0$ *tal que* $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \forall x, y \in H$
3. $B$ *es fuertemente positiva:* $\exists b > 0$ *tal que* $|B(x, y)| > b\|y\|^2$, $\forall y \in H$

*Entonces para cualquier forma lineal y continua* $\phi : H \to \mathbb{K}$ *existe un único* $y \in H$ *tal que* $\phi(x) = B(x, y) \forall x \in H$

**Demostración**

Para $y$ fijo la apliación $x \hookrightarrow B(x, y)$ es lineal continuo. Por el teorema de Riesz, $\exists z \in H$ tal que $B(x, y) =< x, z > \forall x \in H$ y sea $T$ la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que $T(H)$ es un subespacio de $H$. Veamos que $T(H) = H$ y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1. $T(H)$ es cerrado.

$$\text{Sea } z_n = Ty_n \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$$

$$B(x, y_n - y_m) =< x, z_n - z_m > \forall x \in H$$

$$b\|y_n - y_m\|^{\cancel{2}} \leq B(y_n - y_m, y_n - y_m) =< y_n - y_m, z_n - z_m >\leq \cancel{\|y_n - y_m\|}\|z_n - z_m\|$$

Luego $(y_n)$ es de Cacuhy y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y tenemos que:

$$<x, z_n> = B(x, y_n) \to B(x, y) = <x, z> = <x, Ty> \forall x \in H$$

2. Supongamos $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : <x_0, z> = 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) = <x_0, z> \forall y \in H,\ B(x_0, x_0) = 0$ si $x_0 \neq 0$

$\square$

## 1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos $\Omega$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

Lo que querremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

**Ejemplo 2.** *Tomemos $n = 2$, en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.*

**Idea para buscar una solución**

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int\limits_{\Omega} |\frac{\partial u}{\partial x_1}|^2 + |\frac{\partial u}{\partial x_2}|^2 d_1 dx_2$$

**Definición 1.7.** $C^2(\overline{\Omega})$

*Denotamos a $C^2(\overline{\Omega})$ como las funciones dos veces derivables en el interior de $\Omega$ con segunda derivada continua en $\overline{\Omega}$.*

*Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por $C_0^2(\overline{\Omega})$.*

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

**Teorema 16.** ***Teorema de Gauss***

*Dada $\Omega$ suficientemente regular:*

$$\int\limits_{\Omega} \partial x_j w dx = \int\limits_{\Omega} w n_j d\theta$$

**Proposición 1.4.** *Si existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que minimiza a $D(u)$ entre todas las funciones $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $u|_{\partial\Omega} \equiv f$, entonces $u$ es armónica ($\triangle u = 0$).*

**Demostración**

En $C^2(\overline{\Omega})$, definimos $\langle \cdot \rangle_D$ por:

$$\langle F, G\rangle_D = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora $D(u) = \langle u, u\rangle_D$.

Si $v \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica que $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(u+\varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(u) + \varepsilon D(v) + \varepsilon\langle u, v\rangle_D + \varepsilon\langle v, u\rangle_D$$

Cancelando $D(u)$ tenemos:

$$\varepsilon^2 D(u) + \varepsilon D(v) + \varepsilon\langle u, v\rangle_D + \varepsilon\langle v, u\rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un $\varepsilon$ arbitrario, tenemos que $\langle u, v\rangle_D = 0\ \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$ con soporte compacto, luego:

$$0 = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = -\int\limits_\Omega (\triangle u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \textit{ con } v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle \triangle u, v\rangle_{L^2} = 0$ para cualquier $v$ de un denso, luego $\triangle u = 0$

□

**Teorema 17.** ***Desigualdad de Poincaré***

$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega),\ \|f\|_0 \leq \operatorname{diam}(\Omega)\|f\|_1$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle , \rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle , \rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

**Lema 1.4.1.**

1. $H_1^0 \subseteq H_0$
2. $\forall v \in H_1^0,\ \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j\rangle_0 = -\langle \frac{\partial z}{\partial x_j}, v\rangle_0$. *Es decir:*

$$\int\limits_\Omega z v_j = -\int\limits_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. *Si* $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v\rangle_1 = \int_\Omega \sum_{j=1}^N \frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}$

*A $v_j$ se le llama* $\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$

**Demostración**

Sea $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v_n \to v \in H_1^0$ en $\|\cdot\|_1 \implies \left(\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\langle , \rangle_0$ y converge a una función a la que llamamos $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré, $(v_n)$ es de Cauchy en $\|\cdot\|_0$ y su límite no podrá ser otro que $v$. La fórmula:

$$\int_\Omega z v_j = -\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

Viene dada por el paso al límite de la expresión dada por el teorema de Gauss:

$$\int_\Omega z \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = -\int_z^{x_j} v_n$$

$\square$

**Lema 1.4.2.** ***Variacional***

*$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $u \in L^2(\Omega)$:*

$$\int_\Omega uvdx = 0 \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*Entonces $u = 0$ en $L^2(\Omega)$ y $u = 0$ $\forall x \in \Omega$*

**Teorema 18.**

*Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado. Sea $f \in L^2(\Omega) \equiv H_0$. Entonces existe una* ***solución débil*** *de la ecuación:*

$$\begin{cases} \triangle u = f \\ u|_{\partial\Omega} u = 0 \end{cases}$$

*En el siguiente sentido:*

*Existe una única función $v \in H_1^0$ donde que $\langle u, f\rangle = -\langle u, \triangle v\rangle$ $\forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$*

*Lo rojo aún "está por aclarar"*

**Demostración**

Si $f \in L^2 \implies \phi : L^2 \to \mathbb{R}$ lineal y continua en $H_0$ por Riesz. Aplicando la des. de Poincaré:

$$|\phi(n)| \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \operatorname{diam}(\Omega)\|f\|_0\|u\|_1 \ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \phi \text{ es continua en } (\mathcal{D}(\Omega), \langle , \rangle_1)$$

Entonces podemos extender $\phi$ al completado, $H_1^0$. A esta forma lineal extendida le aplicamos el teorema de Riesz.

Existirá entonces una única $v \in H_1^0$ tal que $\phi(u) = \langle u, v\rangle_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j\rangle_0$ para todo $u \in H_1^0$.

Si tomamos $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle u, v\rangle_1 = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j\rangle_0 = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} \overset{Int.\ partes}{=} -\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \int_\Omega -u \sum_{j=1}^{N} v_{jj}$$

Donde las parciales son en el sentido generalizado visto en el lema.

□

**Definición 1.8.** ***Definición de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y su topología***

*Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ compactos, definimos $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$*

*En este espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$, definimos una topología a partir de las seminormas utilizadas en la convergencia uniforme de los elementos de $\mathcal{D}K(\Omega)$. Lo vemos en detalle:*

*Los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ son funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que su soporte está en $K$ y se dice que $h_n \to h$ si $h_n \to h$ de forma uniforme y sus diferenciales convergen de forma uniforme a la de $h(x)$, es decir:*

$$D^\alpha h_n(x) \to D^\alpha h(x)\ unif.\ \forall \alpha = (a_1, ..., a_N)$$

**Teorema 19.** ***Ritz-Galerkin***

*Sea $H$ un esp. de Hilbert y se sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineal, continua y fuertemente positiva. Sea $b : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Definimos $F(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - b(x)\ \forall x \in H$. Entonces,*

$$\min\{F(x) : x \in H\} = F(x_0) \iff \Big[B(x_0, y) = b(y)\ \forall y \in H\Big]$$

Para demostrar esto necesitamos el método de Ritz

**Método 20.**