# Apuntes de Álgebra Conmutativa

Paco Mora

8 de septiembre de 2022

CAPÍTULO 1

# Tema 1. Apuntes extra

**Ejercicio 1.** ***Ejercicio Propuesto***

*Sea* $A = \mathbb{Z}_n$*, con* $n$ *entero >1 y* $\overline{r} \in \mathbb{Z}_n$*. Demostrar:*

- $\overline{r}$ *cancelable* $\iff$ $\overline{r}$ *invertible* $\iff$ $mcd(r,n) = 1$
- $\overline{r}$ *nilpotente* $\iff$ *todos los divisores primos de* $n$ *dividen a* $r$*.*

La siguiente proposición generaliza el ejercicio anterior.

**Proposición 1.1.** *Sea* $A$ *un anillo finito y sea* $a \in A$*. Entonces* $a$ *es cancelable sii es invertible.*

**Demostración**

Definimos

$$\lambda_n : A \to A \qquad \lambda_n(x) = ax \ \forall x \in A$$

Es inyectiva, $\lambda_n(x) = \lambda_n(y) \iff ax = ay \implies_{a\ cancel.} x = y$

Por lo tanto, y como $A$ es finito, $\lambda_n$ es biyectiva y $1 \in Im(\lambda_n) \iff \exists b \in A \mid \lambda_n(b) = 1$

$\square$

**Proposición 1.2.** *A reducido* $\iff$ *Nil(A)* $=$ $\{$*elem nilpotentes de* $A\} = \{0\}$

**Demostración**

$\implies$

$A$ reducido sii $\forall a \in A$, $a^2 = 0 \implies a = 0$

$\impliedby$

Por reduc. al absurdo, supongamos $b \in Nil(A) \setminus \{0\} \implies \exists n > 0$ (mínimo) con $b^n = 0 \implies b^{n-1} \neq 0$

Pero entonces, $(b^{n-1})^2 = b^{2n-2} = 0$ y $2n - 2 \geq n$ para $n \geq 2$, luego llegamos a una contradicción.

$\square$

**Ejercicio 2.** ***Ejercicio Propuesto***

*$\mathbb{Z}_n$ es un anillo reducido $\iff$ $n$ es libre de cuadrados.*

**Demostración del 1.9(ii)**

**Demostración**

$a/b$ y $a/c \implies \exists b', c' \in D/\ ab' = b,\ ac' = c \ldots$ Sean ahora $r, s \in D$ arbitrarios y veamos que $a/rb + sc$

$$rb + rc = r(ab) + s(ac') = arb' = asc' = a(rb' + sc') \implies a|rb + sc \implies \not{b}1 = \not{b}(dc)$$

$\square$