

# Apuntes de Análisis Funcional

Paco Mora

24 de noviembre de 2022

# Yo qué sé qué es esto

## 1.1 - Introducción

**Definición 1.1.** Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.

### Teorema 1.1. (Baire)

Sea  $(X, d)$  espacio métrico completo  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  abiertos de en  $X$ ,  $\overline{G_r} = X \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

//Repaso de la relación de orden

**Teorema 1.2. Principio de la buena ordenación** Para todo conjunto  $S$ , existe una relación de orden  $\leq$  tal que  $(S, \leq)$  está bien ordenado,  $\leq$  es un buen orden.

### Teorema 1.3. Lema de Zorn

Si  $(P, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para  $C$ , cadena, existe  $c \in P$  tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in C$ ), entonces  $P$  tiene un elemento maximal (existe  $m \in P$  tal que si  $\leq x$  entonces  $x = m$ )

### Teorema 1.4. Principio Maximal de Hasudorff

Cada conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$  contiene una cadena maximal.

**Teorema 1.5.** *Son equivalentes:*

1. *El principio Maximal de Hasudorff*
2. *Lema de Zorn*
3. *Principio de la buena ordenación*
4. *Axioma de elección*

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

**Teorema 1.6.** *De la mejor aproximación*

*Dado  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espacio de Hilbert y  $C \subset H$  cerrado y convexo. Sea  $x_0 \notin C$ . Entonces existe un único elemento  $c_0 \in C$  tal que  $\|x_0 - c\| = \inf\{\|x_0 - c\| : c \in C\}$*

**Demostración**

Tomemos una sucesión  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $c_n \in C$  de forma que se verifique

$$\alpha \quad \|c_n\| \quad \alpha + \frac{1}{n}$$

Si  $c_n$  fuera de Cauchy, existe  $c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Probemos que  $(c_n)$  es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

$$\text{Como } \underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de  $C$  para el punto medio entre  $c_n$  y  $c_m$ :

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que  $\|c_n - c_m\| \rightarrow 0$ .

□

**Teorema 1.7.** *(de la proyección)*

*Sea  $M$  un subespacio cerrado del Hilbert  $H$ , entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas  $P, Q : H \rightarrow H$  tales que  $P(H) = M$  y  $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : \langle y, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\}$  y  $x = Px + Qx \ \forall x \in H$*

*Además se verifica:*

- $x \in M \implies Px = x, Qx = 0; x \in M^\perp \implies Px = 0, Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$  (Pitágoras)

*Como consecuencia  $H = M \oplus M^\perp$*

**Demostración**

Sea  $x \in H$ ,  $x + M$  cerrado y convexo, llamemos  $Qx$  al único elemento en  $x + M$  de norma mínima y definimos  $Px = x - Qx$ . Vemos que  $Qx \in M^\perp$ ,  $\langle z, y \rangle = 0 \forall y \in M$ . Aplicando que  $Qx \equiv Z$  tiene norma mínima en  $x + M$  tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 = \langle z, z \rangle \leq \underbrace{\|z - \alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} = \langle z - \alpha y, z - \alpha y \rangle = \cancel{\langle z, z \rangle} - \bar{\alpha} \langle z, y \rangle - \alpha \langle y, z \rangle = \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora  $\alpha = \langle z, y \rangle$  y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a  $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$ , luego  $\text{Im}(Q) \subset H^\perp$ . Como además  $M \cap M^\perp = \{0\} \implies x = Px + Qx$ , entonces  $H = M \oplus M^\perp$ .

Análogamente sale el resto de los enunciados<sup>1</sup>. □

**Lema 1.8.**  $M \subset H$  subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces  $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$ ,  $\langle x_0, m \rangle \geq 0 \forall m \in M$

**Demostración**

Como  $H \neq M \implies M^\perp \neq \{0\}$

$\{d_n : n = 1, 2, \dots\}$  numerable y denso en  $H$

Tomamos entonces una base ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  tal que:

$$\text{span}\{d_1, \dots, d_n, \dots\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$$

□

**Definición 1.2.** *Conjunto ortonormal*  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots\}$  en  $H : \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ . Tenemos además que son LI:

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i 0_i, \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \implies c_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

**Proposición 1.9.**  $M = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset H$ ,  $P_M(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ . Si  $d = \text{dist}\{x, M\}$  entonces:

$$\|x\|^2 - d^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

**Lema 1.10.** Sea  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  ortonormal,  $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2 \forall x \in H$

---

<sup>1</sup>xd

**Proposición 1.11.**  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  ortonormal en  $H$ , la función:

$$\Lambda : H \rightarrow \ell^2 \quad \Lambda(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

**Demostración**

$(\xi_n) \in \ell^2$  encontramos  $x \in H$ :  $\Lambda(x) = (\xi_n)$ . Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n u_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m \rangle$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

**Teorema 1.12. (de la base hilbertiana)**

Para  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  conjunto ortonormal en  $H$  (espacio de Hilbert). Son equivalentes:

1.  $\{u_1, u_2, \dots\}$  es ortonormal maximal.
2.  $\overline{\text{span}\{u_1, \dots\}} = H$
3.  $\forall x \in H$  se tiene  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$  en  $H$
4.  $\forall x \in H, \forall y \in H$ , se tiene  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle y, u_n \rangle}$
5.  $\forall x \in H$ , se tiene  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

**Demostración**

Recomiendo mirar el libro.  $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea  $M_n = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , sabemos que  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$  y que:

$$\forall x \in H, P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{\text{dist}(x, M_n)^2}_{=: \delta_n \rightarrow 0} + \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_{\varepsilon} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n : \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon, x_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

4  $\Rightarrow$  5

Directo.

5  $\Rightarrow$  2

Por la desigualdad de Bessel.

□

**Definición 1.3.** A una base como la anterior se le llama **base hilbertiana**. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.

**Lema 1.13.** Si  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces  $E$  es finito dimensional.

Para  $E$  no completo, no es cierto.

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

**Teorema 1.14.** Sea  $\langle \cdot \rangle$  un producto escalar en  $C([a, b])$  con  $\|\cdot\|_\infty$  más fina que  $\|\cdot\|_\infty$ . Sea  $\{\phi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad \forall f \in C[a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \Rightarrow \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_{\langle \cdot \rangle} < \varepsilon$$

### 1.1.1. Series de Fourier

**Definición 1.4.** Un polinomio trigonométrico es una función de la forma

$$h(t) = \sum_{n=0}^m \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**Lema 1.15.** Si  $h_1, h_2$  son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.

**Lema 1.16.**  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , entonces existe un polinomio trigonométrico  $q_\varepsilon$  tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

**Ejercicio 1.**

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \cos(nt), \quad u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \sin(mt), \quad m = 1, 2, \dots$$

Es ortonormal en  $(C[a, b], \langle \cdot \rangle)$

## 1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

**Proposición 1.17.** *Dado  $F : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua. Existe una única medida ( $F$  función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t) dF(f)$$

**Teorema 1.18. Teorema de Riesz.**

*Buscar en el libro.*

**Definición 1.5. Topología débil del espacio de Hilbert**

Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert.

$$\mathbb{K} \leftarrow H : x_0, \quad \varepsilon > 0, \quad t_1, \dots, t_p \in H$$

$$\langle x, x_0 \rangle \leftarrow x$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, \dots, t_p) = \{z \in H : |\langle t_i, x_0 - z \rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$$

**Teorema 1.19. Alaoglo-Bourbaki**

Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y sea  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . Entonces  $B_H$  es un subconjunto débilmente compacto.

**Demostración**

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana  $\{e_n\}$  de  $H$  y tomemos  $(v_n) \subseteq B_H$ .

Notemos primero que  $|\langle e_p, v_n \rangle| \leq 1 \quad \forall p, n \in \mathbb{N}$ .

Tomemos  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ , el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión  $(v_n)$ ,  $v_n \mapsto \langle \cdot, v_n \rangle$  y utilizando la base, este producto puede expresarse como  $\sum_{p=1}^{\infty} \langle x, e_p \rangle e_p$  para cierto  $x$ .

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros  $n_1 < n_2, \dots, n_k < \dots$  de forma que  $(\langle e_p, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$  es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces  $S = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ , entonces  $(\langle s, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$  es convergente  $\forall s \in S$ . Falta ver que sea convergente para todo punto de  $H = \overline{S}$  que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

## 1.3 - Familias de funciones equicontinuas

**Definición 1.6. Familia de funciones (uniformemente) equicontinua**

Una sucesión de funciones continuas  $(f_i)_{i \in I}$  se dice que es equicontinua en  $x_0$  si  $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$  tal que  $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ . Es decir, que el  $\delta$  necesario es el mismo para todas las funciones.

De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:

Una sucesión de funciones uniformemente continuas  $(f_i)_{i \in I}$  se dice que es uniformemente equicontinua en si  $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$  tal que  $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ . Es decir, que el  $\delta$  necesario es el mismo para todas las funciones.

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

**Teorema 1.20.** Sea  $(K, d)$  un espacio métrico y  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, T_p)$  ( $T_p$  es la topología producto).

Si  $\phi$  es (unif.) equicontinua, entonces  $\phi^{-T_p}$  son (uniformemente) continuas

**Teorema 1.21.** Si  $\phi$  es equicontinua, entonces en  $\phi$  coinciden las topologías  $T_p$ (producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto  $D \subseteq K$  denso ( $\overline{D} = K$ ).

**Teorema 1.22. De Ascoli**

Sea  $\phi \subseteq C(K)$  y sea  $(K, d)$  métrico compacto. Entonces  $\phi$  es relativamente compacto en  $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$  es equicontinuo y  $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$  acotado  $\forall x \in K$

**Teorema 1.23. Lax- Milgram**

Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$  tal que:

1.  $B(\cdot, y)$  es lineal  $\forall y \in H$  y  $B(x, \cdot)$  es lineal conj., es decir,  $B$  es sesquilineal.
2.  $B$  es acotada:  $\exists c > 0$  tal que  $|B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \forall x, y \in H$
3.  $B$  es fuertemente positiva:  $\exists b > 0$  tal que  $|B(x, y)| > b \|y\|^2, \forall y \in H$

Entonces para cualquier forma lineal y continua  $\phi : H \rightarrow \mathbb{K}$  existe un único  $y \in H$  tal que  $\phi(x) = B(x, y) \forall x \in H$

**Demostración**

Para  $y$  fijo la aplicación  $x \mapsto B(x, y)$  es lineal continuo. Por el teorema de Riesz,  $\exists z \in H$  tal que  $B(x, y) = \langle x, z \rangle \forall x \in H$  y sea  $T$  la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que  $T(H)$  es un subespacio de  $H$ . Veamos que  $T(H) = H$  y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1.  $T(H)$  es cerrado.

Sea  $z_n = Ty_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$

$$B(x, y_n - y_m) = \langle x, z_n - z_m \rangle \forall x \in H$$

$$b \|y_n - y_m\|^2 \leq B(y_n - y_m, y_n - y_m) = \langle y_n - y_m, z_n - z_m \rangle \leq \|y_n - y_m\| \|z_n - z_m\|$$



Luego  $(y_n)$  es de Cauchy y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  y tenemos que:

$$\langle x, z_n \rangle = B(x, y_n) \rightarrow B(x, y) = \langle x, z \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x \in H$$

2. Supongamos  $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : \langle x_0, z \rangle = 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) = \langle x_0, z \rangle \forall y \in H, B(x_0, x_0) = 0$  si  $x_0 \neq 0$

□

## 1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  abierto y acotado.

Lo que queremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

**Ejemplo 2.** Tomemos  $n = 2$ , en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.

### Idea para buscar una solución

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2$$

### Definición 1.7. $C^2(\overline{\Omega})$

Denotamos a  $C^2(\overline{\Omega})$  como las funciones dos veces derivables en el interior de  $\Omega$  con segunda derivada continua en  $\overline{\Omega}$ .

Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por  $C_0^2(\overline{\Omega})$ .

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

### Teorema 1.24. Teorema de Gauss

Dada  $\Omega$  suficientemente regular:

$$\int_{\Omega} \partial x_j w dx = \int_{\Omega} w n_j d\theta$$

**Proposición 1.25.** Si existe  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  que minimiza a  $D(u)$  entre todas las funciones  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  con  $u|_{\partial\Omega} \equiv f$ , entonces  $u$  es armónica ( $\Delta u = 0$ ).

**Demostración**

En  $C^2(\overline{\Omega})$ , definimos  $\langle \cdot \rangle_D$  por:

$$\langle F, G \rangle_D = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora  $D(u) = \langle u, u \rangle_D$ .

Si  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  que verifica que  $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$  se tiene que  $D(u + \varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D$$

Cancelando  $D(u)$  tenemos:

$$\varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un  $\varepsilon$  arbitrario, tenemos que  $\langle u, v \rangle_D = 0 \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$  con soporte compacto, luego:

$$0 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} (\Delta u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \text{ con } v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que  $C_0^\infty(\overline{\Omega})$  es denso en  $L^2(\Omega)$ . Entonces  $\langle \Delta u, v \rangle_{L^2} = 0$  para cualquier  $v$  de un denso, luego  $\Delta u = 0$

□

**Teorema 1.26. Desigualdad de Poincaré**

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \|f\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_1$$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

**Lema 1.27.**

1.  $H_1^0 \subseteq H_0$
2.  $\forall v \in H_1^0, \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j \rangle_0 = - \langle \frac{\partial z}{\partial x_j}, v \rangle_0$ . Es decir:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. Si  $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}$

A  $v_j$  se le llama  $\frac{\partial v}{\partial x_j}$

### Demostración

Sea  $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $v_n \rightarrow v \in H_1^0$  en  $\|\cdot\|_1 \implies \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^\infty$  es de Cauchy en  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  y converge a una función a la que llamamos  $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$ . Por la desigualdad de Poincaré,  $(v_n)$  es de Cauchy en  $\|\cdot\|_0$  y su límite no podrá ser otro que  $v$ . La fórmula:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

Viene dada por el paso al límite de la expresión dada por el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} z \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = - \int_z^{x_j} v_n$$

□

### Lema 1.28. Variacional

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y acotado,  $u \in L^2(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} u v dx = 0 \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Entonces  $u = 0$  en  $L^2(\Omega)$  y  $u = 0 \forall x \in \Omega$

### Teorema 1.29.

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un abierto y acotado. Sea  $f \in L^2(\Omega) \equiv H_0$ . Entonces existe una **solución débil** de la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En el siguiente sentido:

*Existe una única función  $v \in H_1^0$  donde que  $\langle u, f \rangle = -\langle u, \Delta v \rangle \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$*

*Lo rojo aún "está por aclarar"*

### Demostración

Si  $f \in L^2 \implies \phi : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua en  $H_0$  por Riesz. Aplicando la des. de Poincaré:

$$|\phi(n)| \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_0 \|u\|_1 \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \phi \text{ es continua en } (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$$

Entonces podemos extender  $\phi$  al completado,  $H_1^0$ . A esta forma lineal extendida le aplicamos el teorema de Riesz.

Existirá entonces una única  $v \in H_1^0$  tal que  $\phi(u) = \langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle_0$  para todo  $u \in H_1^0$ .

Si tomamos  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle_0 = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \stackrel{\text{Int. partes}}{=} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \int_{\Omega} -u \sum_{j=1}^N v_{jj}$$

Donde las parciales son en el sentido generalizado visto en el lema. □

### Definición 1.8. Definición de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y su topología

Si  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  compactos, definimos  $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$

En este espacio  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ , definimos una topología a partir de las seminormas utilizadas en la convergencia uniforme de los elementos de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Lo vemos en detalle:

Los elementos de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  son funciones en  $\mathcal{D}(\Omega)$  tal que su soporte está en  $K$  y se dice que  $h_n \rightarrow h$  si  $h_n \rightarrow h$  de forma uniforme y sus diferenciales convergen de forma uniforme a la de  $h(x)$ , es decir:

$$D^\alpha h_n(x) \rightarrow D^\alpha h(x) \text{ unif. } \forall \alpha = (a_1, \dots, a_N)$$

## 1.5 - Problemas variacionales cuadráticos

### Teorema 1.30. Principal de los problemas variacionales cuadráticos

Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica, acotada, continua<sup>a</sup> y fuertemente positiva<sup>b</sup> y  $b : H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal continua. Sea  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) - b(x) \forall x \in H$$

Llamada forma bilineal cuadrática.

Entonces se verifica la siguiente equivalencia:

$$\inf\{F(z) : z \in H\} = F(x_0) \iff B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$$

Además, existe un único  $x_0$  que lo verifica.

$$\begin{aligned} &^a \|y\| \|x\| \geq |B(x, y)| \\ &^b B(x, y) \geq C \|x\| \|y\| \forall x, y \end{aligned}$$

Notemos que la norma  $\|\cdot\|$  y el módulo de  $B$  son normas equivalentes debido a que  $B$  es continua y fuertemente positiva.

### Demostración

Demostrado en 1.7.1. del libro. Aquí hay un boceto de la demostración:

Dado  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in H$ , se tiene:

$$\begin{aligned} F(x+ty) &= \frac{1}{2}B(x+ty, x+ty) - b(x+ty) = \frac{1}{2}(B(x, x) + B(x, ty) + B(ty, x) + B(ty, ty)) - (b(x) + tb(y)) = \\ &= \frac{1}{2}(B(x, x) + 2B(x, ty) + t^2 B(y, y)) - (b(x) + tb(y)) = \frac{t^2}{2}B(y, y) + t(B(x, y) - b(y)) + \frac{1}{2}B(x, x) - b(x) \end{aligned}$$

Si el  $x_0$  es donde se alcanza el extremo inferior, se tiene que:

$$F(x_0) \leq \frac{t^2}{2} B(y, y) + t \left( B(x_0, y) - b(y) \right) + \underbrace{\frac{1}{2} B(x_0, x_0) - b(x_0)}_{F(x_0)}$$

Y entonces  $B(x_0, y) = b(y)$ . (???)

"El recíproco se hace con la misma expresión y derivando"

Para la unicidad, basta con aplicar el teorema de Riesz para el producto escalar  $\langle, \rangle_B$

□

### Método 1. Método de aproximación de Ritz-Galerkin

Dado  $B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$ , y tomando  $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$  con cada  $H_n$  finito dimensional.

Tomamos  $\text{span}\{e_j^n : j = 1, 2, \dots, N\}$  a una base de cada  $H_n$

Al problema  $P$  presentado en el anterior teorema (la parte izquierda de la equivalencia) restringido a  $H_n$  queda:

$$P|_{H_n} \equiv B(x, y) = h(y) \forall y \in H_n \longrightarrow B(x, e_j^n) = b(e_j^n) = b(e_j^n) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Entonces si la solución a cada problema es  $x_n$ , se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

### Demostración

$$B(x_n, y) = b(y) \quad \forall y \in H_n$$

$$B(x_0, y) = b(y) \quad \forall y \in H$$

Restando llegamos a:

$$0 = B(x_n - x_0, y) \quad \forall y \in H_n$$

Luego el  $x_n - x_0$  es la proyección ortogonal sobre  $H_n$  asociada a  $\langle, \rangle_B$  de  $x_0$  sobre  $x_n$ . Entonces es la mejor aproximación sobre  $H_n$  como  $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} \uparrow$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

□

## 1.6 - Operaciones diferenciales y soluciones débiles

Definamos el operador:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

Con:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

**Problema:**

Dada  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  encontrar  $u$  tal que  $L(u) = f$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto.

**Proposición 1.31.**

Adjunto de  $L^* = \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$  verifica que:

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^*\psi \rangle \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Observación**

$\forall f \in L^2(\Omega)$ , si  $u \in C^n(\Omega)$  verifica que  $Lu = f$ , entonces  $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

**Definición 1.9. Solución débil**

Si  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u \in L^2(\Omega)$  es una **solución débil** de la ecuación  $Lu = f$  siempre que  $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

**Ejemplo 3.** En  $\mathbb{R}$ ,  $L = \frac{d}{dx}$  con  $\Omega = (0, 1)$ ,  $u, f \in L^2(\Omega)$

Entonces  $Lu = f$  en sentido débil sii  $\exists F \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente continua y tal que  $F(x) = u(x)$  para casi todo punto (p.c.t)  $x \in [0, 1]$  y  $F'(x) = f(x)$  p.c.t.  $x \in (0, 1)$

Hay otros ejemplos en el libro (sección 1.10)

**1.7 - Teorema de Radon-Nykodin**

**Teorema 1.32.** Sea  $\Omega$  es de medida.  $\Sigma$  una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu, \nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  medidas finitas.

Si  $\nu$  es absolutamente continua respecto de  $\mu$ , es decir,  $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$ .

Entonces existe  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  integrable respecto a  $\mu$  tal que:

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \quad \forall E \in \Sigma$$

**Demostración**

(Prueba de Von-Neumann)

Sea  $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu + \nu)$ , entonces podemos definir la forma lineal  $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(x) = \int x d\mu$  es lineal y continua para la norma asociada  $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$  y, por tanto, lo es para la norma asociada  $\|\cdot\|_{L^2(\mu+\nu)}$  y aplicando el teorema de Riesz, existe una única función  $y \in L^2(\mu + \nu)$  tal que:

$$\int x d\mu = \phi(x) = \langle x, y \rangle_{L^2(\mu+\nu)} = \int_\Omega xy d(\mu + \nu) = \int_\Omega xy d\mu + \int_\Omega xy d\nu$$

Luego tenemos:

$$\int_{\Omega} x(1-y)d\mu = \int_{\Omega} xy d\nu \quad \forall x \in H$$

**Ejercicio:** Probar que  $0 < y \leq 1$  p.c.t con relación a  $\mu$ .

Definimos entonces  $g = \frac{1-y}{y}$ . Entonces:

$$\int_{\Omega} (xy)gd\mu = \int_{\Omega} (xy)d\nu \quad \forall x \in H$$

$$\int_{\Omega} ugd\mu = \int_{\Omega} ud\nu \quad \forall x \in H, \quad u = xg$$

Haciendo  $u = \chi_E$  tenemos:

$$\int_{\Omega} gd\mu = \int_{\Omega} \chi_E g d\mu = \int_{\Omega} \chi_E d\nu = \nu(E)$$

□

# Operadores Lineales

## 2.1 - Introducción

A no ser que se diga lo contrario, en este tema denotaremos a  $X$  como un espacio de Banach sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$

**Definición 2.1.** *Norma de un operador lineal y  $\mathcal{L}(X, Y)$*

Sea  $X, Y$  espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  lineal y continua. Definimos la norma de  $T$  como:

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in B_X^a\}$$

Al espacio normado  $(\{T : X \rightarrow Y \text{ lineal continuo}\})$  lo denotamos por  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Este espacio es completo cuando lo es  $Y$ .

<sup>a</sup>Bola unidad

**Observación**

Esta norma es la menor constante tal que  $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \forall x \in X$

### 2.1.1. Nota sobre limites iterados

Cuando tenemos una sucesión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots & \rightarrow & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots & \rightarrow & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & & & \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos entonces cuando se tiene que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$



**Proposición 2.1.** Si existe el límite doble,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn}$ , entonces se da la igualdad.

**Teorema 2.2.** Si se converge por filas o por columnas se da la convergencia **uniforme**, entonces se da la igualdad.

### Observación

Lo realizado sobre límites iterados también es válido para redes y filtros.

## 2.2 - Inversión de operadores lineales

En esta sección veremos que los operadores invertibles en dimensión infinita forman un conjunto abierto (como ocurre en  $\mathbb{R}^n$ ).

En general, estudiaremos la invertibilidad de un operador  $T : X \rightarrow X$  ( $X$  un Hilbert) estudiando la de  $(T - \lambda Id)$ . En ese caso,  $\lambda$  será un valor propio. Obteniendo los vectores propios asociados  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ . Entonces si estos vectores forman una base Hilbertiana, entonces  $X = \text{span}\{e_j\}$  y  $\forall x \in H$ :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \lambda_j e_j$$

Cuando tengamos esto, podremos resolver la ecuación  $T(x) = y$ , donde queremos obtener la  $x$  a partir de  $T$  e  $y$ .

Esto lo podremos hacer para un operador compacto (la bola unidad va a un conjunto (relativamente) compacto) y simétrico.

### Teorema 2.3. De Von Neumann

Si  $K \in \mathcal{L}(X)$  invertible,  $L, A \in \mathcal{L}(X)$  y sea  $L = K - A$ . Entonces si  $\|A\| < \frac{1}{\|K^{-1}\|}$  entonces  $L$  es invertible.

### Demostración

**Caso 1:**  $K = Id$ . Probaremos entonces que la bola de radio 1 está dentro de los elementos invertibles.

Consideremos  $Id - B$  con  $\|B\| < 1$ . Veremos que esta diferencia es invertible.

Definimos  $S = \sum_{i=0}^{\infty} B^i$ . Veremos que esta serie es convergente.

Supongamos que la serie es *normalmente* convergente, es decir,  $\sum \|B^n\| < \infty$ .

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n \text{ es de Cauchy} \implies \text{es convergente}$$

La serie es *normalmente* convergente ya que dados dos operadores  $S, T$  tenemos  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$ . Entonces podemos la serie para ver que es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n < \infty$$

Siendo la última convergente al ser una serie geométrica (recordemos que  $\|B\| < 1$ )

Veamos que  $S = (Id - B)^{-1}$ . Tenemos que  $B \circ S = B \circ \left( \sum_{n=0}^{\infty} B^n \right)$ . Como la composición es una función bilineal continua, podemos pasar  $B$  a dentro del sumatorio:

$$B \circ S = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B)S = Id$$

De igual forma tenemos:

$$S \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies S(Id - B) = Id$$

**Caso 2:** Como  $K$  es invertible, tenemos que:  $(K - A) = K(Id - K^{-1}A)$  será invertible cuando es composición de invertibles<sup>1</sup>.

En primer lugar,  $K$  es invertible, y tomando  $B = K^{-1}A$ , tenemos que:

$$\|B\| = \|K^{-1}A\| \leq \|K^{-1}\| \|A\| < 1$$

Y usando el caso 1, tenemos que  $(Id - K^{-1}A)$  es invertible  $\implies K - A$  es invertible.

Además, utilizando ambos casos podemos escribir  $(K - A)^{-1}$  como:

$$(K - A)^{-1} = \left( K(Id - K^{-1}A) \right)^{-1} = (Id - L^{-1}A)^{-1} \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1}A)^n K^{-1} \quad (2.1)$$

□

### Ejercicio 1. *Ejercicio propuesto*

Dado un espacio normado  $(Z, \|\cdot\|)$ , es completo sii toda serie normalmente convergente en  $Z$  es convergente en  $Z$ .

### Ejercicio 2. *Ejercicio propuesto*

$\mathcal{L}(X)$  es completo.

### Definición 2.2. *Resolvente y espectro*

Dado  $M : X \rightarrow X$  se definen el resolvente y el espectro respectivamente como:

$$\rho(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \text{ es invertible}\}$$

$$\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \text{ NO es invertible}\}$$

<sup>1</sup>Queda como ejercicio demostrarlo

**Teorema 2.4.** Dado  $M \in \mathcal{L}(X)$ , se tiene:

1.  $\rho(M)$  es abierto.
2.  $\rho(M) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  tal que  $\lambda \mapsto (\lambda Id - M)^{-1}$  es analítica.

Esta prueba, por algún motivo, demuestra ambos puntos:

#### Demostración

Si  $\lambda \in \rho(M)$ , podemos aplicar el teorema de Von Neumann para  $K = \lambda Id - M$  y  $A = \lambda Id$  y tendremos que:

$(\lambda - h)Id - M = (\lambda Id - M) - hId$  será invertible si  $h$  es suficientemente pequeño

La fórmula (2.1) nos da:

$$\left((\lambda - h)Id - M\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda Id - M)^{-1}h\right)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda Id - M)^{-1}\right)^{n+1} h^n \text{ en } \mathcal{L}(X) \quad (2.2)$$

Siendo esta serie convergente cuando  $|h| < \|\lambda Id - M^{-1}\|^{-1}$  (la condición que necesitábamos para aplicar el teorema).

□

**Teorema 2.5. Gelfund**

$\forall M \in \mathcal{L}(X)$ , el espectro  $\sigma(M)$  es compacto no vacío.

#### Demostración

Tomamos una bola  $B(0, \|M\|)$ , entonces tenemos  $\sigma(M) \subseteq B(0, \|M\|)$ .

Sea  $\xi \in \mathbb{C}$  tal que  $|\xi| > \|M\| \implies \xi \notin \sigma(M)$  (por (2.1) y usando el Teorema de Von Neumann 2.3). Para aplicar el teorema, tomemos  $B = \xi^{-1}M$ . Entonces (2.1) nos da:

$$(\xi Id - M)^{-1} = \xi^{-1}(Id - M\xi^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \xi^{-(n+1)}$$

Esta serie converge cuando  $\|M\xi^{-1}\| < 1$ , es decir, cuando  $|\xi| > \|M\|$ . Por lo tanto,  $\sigma(M)$  es compacto.

Vemos ahora que es no vacío por reducción al absurdo. Supongamos  $\rho(M) = \mathbb{C}$  y definimos la función entera:

$$\begin{aligned} \phi : \rho(M) = \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\mapsto (\lambda Id - M)^{-1} \end{aligned}$$

Esta  $\phi$  verifica que  $\phi'(\lambda) = Id$  debido a (2.2).

Si  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| = 0 \implies \phi$  es constante por el Teorema de Liouville, lo que nos lleva a una contradicción.

Vemos este límite, tenemos que:

$$\|\phi(\lambda)\| = \|(\lambda Id - M)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(Id - M\lambda^{-1})^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \|M\lambda^{-1}\|^n = \frac{1}{|\lambda|(1 - \|M\lambda^{-1}\|)} \rightarrow 0$$

□

Dado un operador lineal  $T : H \rightarrow H$  y fijado  $y \in H$ , tenemos una aplicación lineal inducida  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \phi_{Ty} : H &\rightarrow H \\ y &\mapsto \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

Aplicando entonces Riesz, tenemos un único operador lineal  $T^*y$  tal que  $\phi_{Ty}(x) = \langle x, T^*y \rangle \forall y \in H$ . Luego  $\forall x, y \in H$ , llegamos a la igualdad

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (2.3)$$

### Definición 2.3. Adjunto de un operador

A  $T^*$  definido como en (2.3) lo llamamos el **adjunto** de  $T$ .

Necesitaremos ahora algunas propiedades sobre la norma de un operador lineal.

**Lema 2.6.** Dados  $f, g \in H$ :

- $\|T\| = \sup\{\langle Tf, g \rangle : \|f\|, \|g\| \leq 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf, g \rangle|, \|g\| \leq 1\} : \|f\| \leq 1\}$
- $\|T\| = \|T^*\|$
- Si  $T = T^*$  entonces  $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$

**Demostración**

1.

Se utiliza la segunda igualdad dada.

2.

Ejercicio.

3.

Sea  $M := \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$ ,  $M \leq \|T\|$  es "directo". Vemos la otra desigualdad:

$$\begin{aligned} |\langle Tf, g \rangle| &= \frac{1}{4} \left| \langle T(f+g), f+g \rangle - T(f-g), f-g \rangle \right| \leq \frac{1}{4} \left| \langle \frac{T(f+g)}{\|f+g\|}, \frac{f+g}{\|f+g\|} \rangle \|f+g\|^2 \right| + \left| \langle \frac{T(f-g)}{\|f-g\|}, \frac{f-g}{\|f-g\|} \rangle \|f-g\|^2 \right| \\ &\leq \frac{M}{4} (\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = \frac{M}{4} (2\|f\|^2 + 2\|g\|^2) \end{aligned}$$

Tomando supremos llegamos a la desigualdad.

□

**Proposición 2.7.** Sea  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  una base hilbertiana y sea la sucesión  $(\lambda_k) \in \mathbb{C}$  acotada. Tomamos  $T$ :

$$\begin{aligned} Te_k &:= \lambda_k e_k \\ T(X) &= \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k \rangle \lambda_k e_k \end{aligned}$$

*Demostrar:*

<sup>2</sup>Se utiliza que  $T = T^*$ , queda como ejercicio.

1.  $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}$
2.  $T^*(e_k) = \overline{\lambda_k} e_k$
3.  $T = T^* \iff \lambda_k \in \mathbb{R}$
4.  $T$  es proyección ortogonal  $\iff \lambda_k \in \{0, 1\} \forall k$
5.  $T$  es compacto  $\iff \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$
6.  $T(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \lambda_k \overline{e_k}$

Demostración

Ejercicio.

□

## 2.3 - Operadores Compactos

### Definición 2.4. Operador compacto

Sea  $H$  espacio de Hilbert,  $B_H$  una base hilbertiana de  $H$  con  $B_H = \{v \in H : \|v\| \leq 1\}$  y  $T : H \rightarrow H$  un operador lineal.

$T$  se dice **compacto** si  $T(B_H)$  es relativamente compacto, es decir, si  $\forall (f_n)$  sucesión acotada en  $H$ ,  $T(f_n)$  tiene una subsucesión convergente.

### Definición 2.5. $\mathcal{K}(H)$

Definimos  $\mathcal{K}(H) = \{S : H \rightarrow H \text{ lineal, continuo y compacto}\}$ .

### Teorema 2.8.

Sea  $H$  un Hilbert separable y  $T : H \rightarrow H$  lineal y continuo. Entonces:

1.  $S : H \rightarrow H$  es compacto  $\implies S \circ T$  y  $T \circ S$  son compactos. ( $\mathcal{K}(H)$  es un ideal de  $\mathcal{L}(H)$ )
2. Si  $T_n : H \rightarrow H$  es compacto  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$  entonces  $T$  es compacto.
3. Si  $T$  es compacto entonces  $\exists T_n : H \rightarrow H$  operadores de rango finito tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$
4.  $T$  es compacto si y solo si  $T^*$  lo es.

Demostración

Los apartados 1,2 aún no están incluidos.

3.

Tomamos  $\{e_x\}$  b.h. en  $H$  y la función:

$$Q_n : H \rightarrow \overline{\text{span}\{e_k : k > n\}}$$

$$g \mapsto Q_n(g) = \sum_{i>n} \langle g, e_i \rangle e_i$$

Notemos entonces que  $\|Q_n(g)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow +\infty$ .

Afirmamos que esta convergencia no es solo puntual, sino que  $\|Q_n \circ T\| \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow \infty$ .

Para demostrarlo, definimos  $P_n : H \rightarrow \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  como el proyector ortogonal. Y tomamos  $Q_n$

tal que  $I_n = P_n + Q_n$ , al componer con  $T$  tenemos:

$$Id = P_n + Q_n \implies T = \underbrace{P_n \circ T}_{\rightarrow T} + \underbrace{Q_n \circ T}_{\rightarrow 0}$$

Completar la demostración de la afirmación y del teorema como ejercicio. Cuidado porque lo puede preguntar

4.

Ejercicio.

□

### Ejemplo 3.

Sea  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y un operador  $K : f \mapsto K(f)$  una función tal que:

$$K(f)(s) := \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

Si  $k$  continua entonces  $K : L_1([a, b]) \rightarrow C[a, b]$  es compacto.

#### Demostración

Vemos que  $K(B_{L^1})$  es relativamente compacto en  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ :

$$\|K(f)\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_{L^1} \implies K(B_{L^1}) \text{ compacto}$$

Si vemos además que  $K(B_{L^1})$  es uniformemente equicontinua y aplicando Ascoli terminaremos la prueba.

$$|K(f)(s) - K(f)(s')| = \left| \int_a^b (k(s, t) - k(s', t)) f(t) dt \right| \leq \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)| |f(t)| dt \leq \varepsilon \|f\|_{L^1}$$

Aplicando la continuidad uniforme de  $k$

□

Como corolario, tenemos que:

$$k \text{ continua} \implies K : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b] \text{ es compacto}$$

#### Observación

$$\text{Si } k \in L^2[\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d] \implies K : L^2[\mathbb{R}^d] \rightarrow L^2[\mathbb{R}^d]$$

Con  $K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y) f(y) dy$ , entonces  $K$  está bien definido, es compacto y  $\|K\|^2 \leq$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |k(x, y)|^2 dx dy$$

**Ejemplo 4.**

Recordemos el operador de Laplace (o laplaciano) en  $\mathbb{R}^N$ :

$$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Y se tiene que hay solución para el problema de Dirichlet:

$$\forall f \in L^2(\Omega) \exists! u \in H \text{ tq } \Delta u = f \text{ en } \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0$$

Entonces el operador que para cada  $f \in L^2(\Omega)$  da la solución del problema de Dirichlet es un operador compacto. Para demostrar esto necesitamos el teorema de Rellich, 2.9

**Teorema 2.9. Rellich**

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un abierto acotado con frontera regular. Sea  $\Phi \subseteq L^2(\Omega)$  tales que  $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \forall j, \forall \phi \in \Phi$  y se cumple:

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq K, \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq K \forall j, \forall g \in \Phi$$

Entonces  $\phi$  es relativamente compacto en  $L^2(\Omega)$

**Demostración**

No se ha dado (ni se pregunta).

□

**Teorema 2.10. Hilbert-Schmidt**

Sea  $H$  un espacio de Hilbert (separable) y  $T : H \rightarrow H$  operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  en  $H$  de vectores propios  $Tv_k = \lambda_k v_k$  con  $\lambda_k \in \mathbb{R} \forall k$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0$

Vamos a demostrar este teorema por partes.

**Proposición 2.11.** Si  $T = T^*$  en  $H$  y  $Tv = \lambda v, v \neq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$

**Demostración**

Como  $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$

□

**Proposición 2.12.** Para un operador compacto  $T : H \rightarrow H$  y  $\forall \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\text{Ker}(T - \lambda Id)$  es finito dimensional, es decir, los subespacios propios son finito dimensionales.

**Demostración**

De lo contrario,  $\exists(\phi_n)$  conjunto ortonormal infinito en  $\text{Ker}(T - \lambda Id) \implies \{T(\phi_n)\}_{n=1}^\infty$  debería tener

una subsucesión convergente ( $T$  es compacto). Pero además:

$$T\phi_n = \lambda\phi_n \implies \|\lambda\phi_n - \lambda\phi_m\| = \lambda\|\phi_n - \phi_m\| = \lambda\sqrt{2} \quad \forall n \neq m$$

Si esto último lo aplicamos a la subsucesión convergente:

$$T\phi_{n_k} = \lambda\phi_{n_k} \implies \|\lambda\phi_{n_k} - \lambda\phi_{n_{k'}}\| = \lambda\|\phi_{n_k} - \phi_{n_{k'}}\| = \lambda\sqrt{2} \quad \forall k \neq k'$$

Entonces la subsucesión no es convergente y llegamos a una contradicción.  $\square$

**Proposición 2.13.** Si  $T$  es compacto y autoadjunto, entonces  $\|T\|$  o  $-\|T\|$  es un valor propio de  $T$

**Demostración**

Recordemos que en un operador autoadjunto,  $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$ . Buscamos una solución a este problema de optimización.

Sea  $(f_n) \subseteq B_H$  tal que  $\langle Tf_n, f_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$  y  $|\lambda| = \|T\|$ . Como  $(T(f_n))$  tendrá una subsucesión convergente  $T(f_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \in H$ . Afirmamos que  $g$  es vector propio asociado a  $\lambda$

Demostramos ahora esta afirmación. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 &= \langle Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}, Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k} \rangle = \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle - 2\lambda \langle f_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle + \lambda^2 \langle f_{n_k}, f_{n_k} \rangle = \\ &= \|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle + \lambda \|f_{n_k}\|^2 \leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle + \lambda^2 \rightarrow \|T\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Entonces las sucesiones  $(Tf_{n_k})$  y  $(\lambda f_{n_k})$  son equivalentes y como  $Tf_{n_k} \rightarrow g$ , entonces  $\lambda f_{n_k} \rightarrow g$ , luego:

$$T(g) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda f_{n_k}\right) = \lambda T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}\right) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} T(f_{n_k}) = \lambda g$$

Y  $\|T\|$  o  $-\|T\|$  es un valor propio.  $\square$

Demostramos ahora el Teorema de Hilbert-Schmidt.

**Demostración**

Sea  $S := \overline{\text{span}\{v : v \text{ es vector propio asociado a algún valor propio}\}}$ . Veremos que  $S = H$ .

Vamos primero al caso  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ . Supongamos que  $S \subsetneq H$ , entonces  $H = S \oplus S^\perp$  y veremos que  $T(S^\perp) \subseteq S^\perp$

Dado  $g \in S^\perp \implies \langle Tg, g \rangle = 0$ . Dado  $f \in S$  tenemos  $\langle f, Tg \rangle = \langle Tf, g \rangle = 0$ .

Entonces tenemos que  $T|_{S^\perp} : S^\perp \rightarrow S^\perp$  y por la proposición anterior,  $\|T|_{S^\perp}\| \neq 0$  es valor propio, lo cual es una contradicción.

Luego  $T$  es una biyección y  $S^\perp = \{0\}$ , con lo que  $S = H$  y  $H$  tiene una base ortonormal de vectores propios. Lo único que nos queda por ver en este caso entonces es  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ , veámoslo.

Si no tendiera a 0, existirían una infinidad  $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_s}, \dots$  y  $|\lambda_{k_i}| > \varepsilon \quad \forall i$ . Y cada valor estaría asociado con un vector  $v_{k_i}$  tal que  $Tv_{k_i} = \lambda_{k_i} v_{k_i}$  y se tendría:

$$\|\lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\|^2 = \langle \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}, \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j} \rangle = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2\varepsilon^2$$

Pero entonces  $(Tv_{k_i})$  no puede tener una subsucesión convergente.





# Ejercicios

## 3.1 - Tema 1

**Ejercicio 4.** Sea  $g \in C[a, b]$  y considere la forma lineal  $L : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $L(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . Demuestre que  $L$  es continua y calcule su norma.

**Indicación.** Suponer en primer lugar que  $g$  es positiva.

Tomamos la norma:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Como  $L$  es lineal, será continua sii:

$$|L(f)| \leq C\|f\|$$

Tenemos:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq M \int_a^b |g(x)|dx \leq M(b-a)\|g\|$$

Calculamos ahora la norma:

$$\|L\| = \sup\{|L(f)| : \|f\|_\infty = 1\}$$

Y tendremos:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

*Este será nuestro candidato a norma. Comprobemos que es realmente su supremo. En el caso  $g \geq 0$  tomando  $f \equiv 1$  sale de forma directa. El caso no positivo lo piensas en casa.*

<sup>a</sup>Ya que  $g$  es continua en un compacto

**Ejercicio 12.** *Pruébese que un subconjunto de un espacio de Banach  $X$  es relativamente compacto sii para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto relativamente compacto  $K_\varepsilon$  en  $X$  tal que  $K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon$*

*Se tiene que si  $S \subset (X, \|\cdot\|)$  Banach:*

$$\overline{S} = \bigcap_{\varepsilon > 0} S + B(0, \varepsilon)$$

*Se usa que en un  $(X, d)$  métrico  $K \subseteq X$  es compacto  $\iff$  totalmente acotado y completo.*