

Apuntes de Álgebra Conmutativa

Paco Mora

5 de septiembre de 2022

Tema 1. Apuntes extra

Ejercicio 1. *Ejercicio Propuesto*

Sea $A = \mathbb{Z}_n$, con n entero > 1 y $\bar{r} \in \mathbb{Z}_n$. Demostrar:

- \bar{r} cancelable $\iff \bar{r}$ invertible $\iff \text{mcd}(r, n) = 1$
- \bar{r} nilpotente \iff todos los divisores primos de n dividen a r .

La siguiente proposición generaliza el ejercicio anterior.

Proposición 1.0.1. Sea A un anillo finito y sea $a \in A$. Entonces a es cancelable sii es invertible.

Demostración

Definimos

$$\lambda_n : A \rightarrow A \quad \lambda_n(x) = ax \quad \forall x \in A$$

Es inyectiva, $\lambda_n(x) = \lambda_n(y) \iff ax = ay \implies a \text{ cancel. } x = y$

Por lo tanto, y como A es finito, λ_n es biyectiva y $1 \in \text{Im}(\lambda_n) \iff \exists b \in A \mid \lambda_n(b) = 1$

□

Proposición 1.0.2. A reducido $\iff \text{Nil}(A) = \{\text{elem nilpotentes de } A\} = \{0\}$

Demostración

\implies

A reducido sii $\forall a \in A, a^2 = 0 \implies a = 0$

\impliedby

Por reduc. al absurdo, supongamos $b \in \text{Nil}(A) \setminus \{0\} \implies \exists n > 0$ (mínimo) con $b^n = 0 \implies b^{n-1} \neq 0$

Pero entonces, $(b^{n-1})^2 = b^{2n-2} = 0$ y $2n - 2 \geq n$ para $n \geq 2$, luego llegamos a una contradicción.

□

Ejercicio 2. Ejercicio Propuesto

\mathbb{Z}_n es un anillo reducido $\iff n$ es libre de cuadrados.

Demostración del 1.9(ii)**Demostración**

a/b y $a/c \implies \exists b', c' \in D / ab' = b, ac' = c \dots$ Sean ahora $r, s \in D$ arbitrarios y veamos que $a/rb + sc$

$$rb + rc = r(ab) + s(ac') = arb' = asc' = a(rb' + sc') \implies a|rb + sc \implies \cancel{b}1 = \cancel{b}(dc)$$

□