Ejemplos PIA

Paco Mora

28 de septiembre de 2022

Sustituciones

$$\lambda y.(yz)[y/z]$$
$$\lambda a.(yz)[a/y][y/z]$$
$$\lambda a.(az)[y/z]$$

$$(\lambda y.x(\lambda x.x)z)[\lambda v.vy/z]$$
$$\lambda a.(x(\lambda x.x)z)[a/y][(\lambda v.vy/z)]$$
$$\lambda a.(x(\lambda x.x)z)[\lambda v.vy/z]$$
$$\lambda a.x(\lambda x.x)(\lambda v.vy)$$

//Así sería paso a paso pero es un lío

$$(\lambda y.(\lambda f.fx)y)[fy/x]$$
$$\lambda a.((\lambda f.fx)y)[a/y][fy/x]$$
$$\lambda a.((\lambda f.fx)a)[fy/x]$$
$$\lambda a.((\lambda f.fx)[fy/x])(a[fy/x])$$
$$\lambda a.\lambda b.(fx)[b/f][fy/x]$$
$$\lambda a.(\lambda b.(bx)[fy(x)])a$$
$$\lambda a.(\lambda b.b(fy))a$$

//Se puede hacer a troncho más fácil

$$(\lambda y.(\lambda f.fx)y)[fy/x]$$
$$(\lambda a.(\lambda b.bx)a)[fy/x]$$
$$\lambda a.(\lambda b.b(fy))a$$

Alfa, beta y eta reducción

$$(\lambda x.\lambda z.x+z)y \xrightarrow{\beta} \lambda z.y+z$$

$$(\lambda x.\lambda z.x+z)z \xrightarrow{\beta} \lambda a.z+a$$

$$(\lambda x.x(\lambda y.xyy)x)(\lambda z.\lambda w.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda z.\lambda w.z)(\lambda y.(\lambda z.\lambda w.z)yy)(\lambda z.\lambda w.z)$$
$$\xrightarrow{\beta} (\lambda z.\lambda w.)(\lambda y.(\lambda w.y)y)(\lambda z.\lambda w.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda z.\lambda w.z)(\lambda y.y)(\lambda z.\lambda w.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda w.(\lambda y.y))(\lambda z.\lambda w.z) \xrightarrow{\beta} \lambda y.y$$

Vemos ahora un ejemplo en el que hay que usar renombramiento:

$$(\lambda ab.ab)(\lambda x.bx)c \xrightarrow{\beta} (\lambda z.(\lambda x.bx)z)c \xrightarrow{\beta} (\lambda z.bz)c \xrightarrow{\beta} bc$$

$$(\lambda x.(\lambda y.x)y(\lambda z.z))(\lambda y.yz)$$

Vamos a ver el orden normal y el aplicativo. Empezamos por el normal:

$$(\lambda y.y\lambda y.yz)y(\lambda z.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.yz)(\lambda z.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda z.z)z \xrightarrow{\beta} z$$

Y el aplicativo:

$$(\lambda x.x(\lambda z.z))(\lambda y.yz) \xrightarrow{\beta} (\lambda y.yz)(\lambda z.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda z.z)z \xrightarrow{\beta} z$$

$$a(\lambda x.(\lambda y.y)a)((\lambda z.z)b)$$

Puede parecer que hay 3 β-redex, pero solo hay dos, la anterior expresión es equivalente a:

$$(a(\lambda x.(\lambda y.y)a))((\lambda z.z)b)$$

Y las β-redex son:

$$(a(\lambda x.(\lambda y.y)a))((\lambda z.z)b) \xrightarrow{\beta} a(\lambda x.a)((\lambda z.z)b) \xrightarrow{\beta} a(\lambda x.a)b$$

Ambos órdenes llevan al mismo resultado.

Resolución Ej 11 Hoja 2

Quitando los paréntesis que no hacen falta queda:

$$(\lambda x.\lambda y.sumy((\lambda z.mulxz)3))7\ 5$$

Utilizando orden normal

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y.sum\ y((\lambda z.mul\ 7\ z)3))5 \xrightarrow{\beta} sum\ 5((\lambda z.mul\ 7\ z)3) \xrightarrow{\beta} sum\ 5(mul\ 7\ 3)$$

$$\xrightarrow{\delta} sum\ 5\ 21 \xrightarrow{\delta} 26$$

Vemos ahora el orden aplicativo:

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda x.\lambda y.sum\ y(mul\ x\ 3))7\ 5 \xrightarrow{\beta} (\lambda y.sum\ y(mul\ 7\ 3))5 \xrightarrow{\delta} (\lambda y.sum\ y21)5 \xrightarrow{\beta} sum\ 5\ 21 \xrightarrow{\delta} 26$$