

Delirios de AnalFun

Paco Mora

27 de octubre de 2022

Yo qué sé qué es esto

1.1 - Introducción

Definición 1.1. Un espacio de medida nula de primera categoría cuando está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Si no es de primera categoría se llama de segunda categoría.

Teorema 1. (Baire)

Sea (X, d) espacio métrico completo $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abiertos de en X , $\overline{G_r} = X \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$$

//Repaso de la relación de orden

Teorema 2. Principio de la buena ordenación Para todo conjunto S , existe una relación de orden \leq tal que (S, \leq) está bien ordenado, \leq es un buen orden.

Teorema 3. Lema de Zorn

Si (P, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior (para C , cadena, existe $c \in P$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in C$), entonces P tiene un elemento maximal (existe $m \in P$ tal que si $\leq x$ entonces $x = m$)

Teorema 4. Principio Maximal de Hasudorff

Cada conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) contiene una cadena maximal.

Teorema 5. *Son equivalentes:*

1. El principio Maximal de Hasudorff
2. Lema de Zorn
3. Principio de la buena ordenación
4. Axioma de elección

//Definiciones de espacio de Hilbert y de Banach

//1.2.8 del libro

//Del 1.3 ha dicho que lo leamos.

//"Los teoremas que pregunto son los que tienen nombre"

Teorema 6. *De la mejor aproximación*

Dado $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio de Hilbert y $C \subset H$ cerrado y convexo. Sea $x_0 \notin C$. Entonces existe un único elemento $c_0 \in C$ tal que $\|x_0 - c\| = \inf\{\|x_0 - c\| : c \in C\}$

Demostración

Tomemos una sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $c_n \in C$ de forma que se verifique

$$\alpha \quad \|c_n\| \quad \alpha + \frac{1}{n}$$

Si c_n fuera de Cauchy, existe $c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Probemos que (c_n) es de Cauchy. Para ello basta usar la identidad del paralelogramo.

$$\text{Como } \underbrace{2\|c_n\|^2}_{2\alpha^2} + \underbrace{2\|c_m\|^2}_{2\alpha^2} - \|c_n + c_m\|^2 = \|c_n - c_m\|^2$$

Dividimos la expresión por 4 podemos usar la convexidad de C para el punto medio entre c_n y c_m :

$$\frac{1}{2}\|c_n\|^2 + \frac{1}{2}\|c_m\|^2 - \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\|c_n - c_m\|^2$$

Ahora tomamos límites para ver que $\|c_n - c_m\| \rightarrow 0$.

□

Teorema 7. *(de la proyección)*

Sea M un subespacio cerrado del Hilbert H , entonces existen un único par de aplicaciones lineales continuas $P, Q : H \rightarrow H$ tales que $P(H) = M$ y $Q(H) = M^\perp = \{y \in H : \langle y, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\}$ y $x = Px + Qx \ \forall x \in H$

Además se verifica:

- $x \in M \implies Px = x, Qx = 0$; $x \in M^\perp \implies Px = 0, Qx = x$
- $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, y \in M\} \ \forall x \in H$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ (Pitágoras)

Como consecuencia $H = M \oplus M^\perp$

Demostración

Sea $x \in H$, $x + M$ cerrado y convexo, llamemos Qx al único elemento en $x + M$ de norma mínima y definimos $Px = x - Qx$. Vemos que $Qx \in M^\perp$, $\langle z, y \rangle = 0 \forall y \in M$. Aplicando que $Qx \equiv Z$ tiene norma mínima en $x + M$ tendremos:

$$0 \leq \|z\|^2 = \langle z, z \rangle \leq \underbrace{\|z - \alpha y\|^2}_{\forall \alpha \in \mathbb{R}} = \langle z - \alpha y, z - \alpha y \rangle = \cancel{\langle z, z \rangle} - \bar{\alpha} \langle z, y \rangle - \alpha \langle y, z \rangle = \alpha^2 \|y\|^2$$

Tomando ahora $\alpha = \langle z, y \rangle$ y como se tiene que cumplir siempre que la expresión es mayor o igual que 0 llegamos a $0 \leq -\alpha^2 \implies \alpha = 0$, luego $\text{Im}(Q) \subset H^\perp$. Como además $M \cap M^\perp = \{0\} \implies x = Px + Qx$, entonces $H = M \oplus M^\perp$.

Análogamente sale el resto de los enunciados¹.

□

Lema 1.1.1. $M \subset H$ subespacio estricto cerrado del espacio de Hilbert H . Entonces $\exists x_0 \neq 0, x_0 \perp M$, $\langle x_0, m \rangle \geq 0 \forall m \in M$

Demostración

Como $H \neq M \implies M^\perp \neq \{0\}$

$\{d_n : n = 1, 2, \dots\}$ numerable y denso en H

Tomamos entonces una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ tal que:

$$\text{span}\{d_1, \dots, d_n, \dots\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$$

□

Definición 1.2. *Conjunto ortonormal* $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots\}$ en $H : \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$. Tenemos además que son LI:

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i 0_i, \sum_{i=1}^n c_i 0_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \implies c_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Proposición 1.1. $M = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset H$, $P_M(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$. Si $d = \text{dist}\{x, M\}$ entonces:

$$\|x\|^2 - d^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

Lema 1.1.2. Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ ortonormal, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2 \forall x \in H$

¹xd

Proposición 1.2. $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ ortonormal en H , la función:

$$\Lambda : H \rightarrow \ell^2 \quad \Lambda(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$$

es continua y sobre

Demostración

$(\xi_n) \in \ell^2$ encontramos $x \in H$: $\Lambda(x) = (\xi_n)$. Nos preguntamos si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i u_i \rightarrow \langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_m \rangle$$

No se ve nada en la pizarra, ha probado que es de Cauchy para ver que es convergente.

□

Teorema 8. (de la base hilbertiana)

Para $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ conjunto ortonormal en H (espacio de Hilbert). Son equivalentes:

1. $\{u_1, u_2, \dots\}$ es ortonormal maximal.
2. $\overline{\text{span}\{u_1, \dots\}} = H$
3. $\forall x \in H$ se tiene $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$ en H
4. $\forall x \in H, \forall y \in H$, se tiene $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle y, u_n \rangle}$
5. $\forall x \in H$, se tiene $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$

A la igualdad de los dos últimos puntos se le llama Identidad de Parseval

Demostración

Recomiendo mirar el libro. $1 \iff 2$

Por la definición.

$2 \implies 3$

Por la desigualdad de Bessel.

Sea $M_n = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, sabemos que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = H$ y que:

$$\forall x \in H, P_{M_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{\text{dist}(x, M_n)^2}_{=: \delta_n \rightarrow 0} + \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_{\varepsilon} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n : \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon, x_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n c_i u_i \in M_P$$

$$\delta_p = d(x, M_p) \leq \|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon$$

$3 \implies 4$

Continuidad del producto escalar

4 \Rightarrow 5

Directo.

5 \Rightarrow 2

Por la desigualdad de Bessel.

□

Definición 1.3. A una base como la anterior se le llama **base hilbertiana**. A los coeficientes se les llama coeficientes de Fourier.

Lema 1.1.3. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base algebraica numerable, entonces E es finito dimensional.

Para E no completo, no es cierto.

Aquí falta un teorema que ha dictado y no me ha dado tiempo a copiar.

Teorema 9. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en $C([a, b])$ con $\|\cdot\|_\infty$ más fina que $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{\phi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ la sucesión de polinomios ortonormales. Entonces:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad \forall f \in C[a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \Rightarrow \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} < \varepsilon$$

1.1.1. Series de Fourier

Definición 1.4. Un polinomio trigonométrico es una función de la forma

$$h(t) = \sum_{n=0}^m \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Lema 1.1.4. Si h_1, h_2 son polinomios trigonométricos, su producto también lo es.

Lema 1.1.5. $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico q_ε tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon$$

Ejercicio 1.

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_{2n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \cos(nt), \quad u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \sin(mt), \quad m = 1, 2, \dots$$

Es ortonormal en $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$

1.2 - Teoremas de representación

Vemos primero un primer teorema de representación.

Proposición 1.3. *Dado $F : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Existe una única medida (F función de distribución) tal que:*

$$F(f) = \int_0^1 f(t) dF(f)$$

Teorema 10. Teorema de Riesz.

Buscar en el libro.

Definición 1.5. Topología débil del espacio de Hilbert

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert.

$$\mathbb{K} \leftarrow H : x_0, \quad \varepsilon > 0, \quad t_1, \dots, t_p \in H$$

$$\langle x, x_0 \rangle \leftarrow x$$

$$W(x_0, \varepsilon, t_1, \dots, t_p) = \{z \in H : |\langle t_i, x_0 - z \rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$$

Teorema 11. Alaoglo-Bourbaki

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Entonces B_H es un subconjunto débilmente compacto.

Demostración

Lo vemos para el caso separable.

Tomemos una base hilbertiana $\{e_n\}$ de H y tomemos $(v_n) \subseteq B_H$.

Notemos primero que $|\langle e_p, v_n \rangle| \leq 1 \quad \forall p, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert, que es métrico compacto.

Por el teorema de Riesz, tomamos la forma lineal equivalente a cada elemento de la sucesión (v_n) , $v_n \mapsto \langle \cdot, v_n \rangle$ y utilizando la base, este producto puede expresarse como $\sum_{p=1}^{\infty} \langle x, e_p \rangle e_p$ para cierto x .

Volviendo al cubo de Hilbert, existe una sucesión de enteros $n_1 < n_2, \dots, n_k < \dots$ de forma que $(\langle e_p, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$ es convergente (ya que el cubo es métrico compacto).

Si tomamos entonces $S = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(\langle s, v_{n_k} \rangle)_{k=1}^{\infty}$ es convergente $\forall s \in S$. Falta ver que sea convergente para todo punto de $H = \overline{S}$ que se demuestra con los teoremas de Skald que se ven a continuación.

□

1.3 - Teoremas de Skald

Definición 1.6. Familia de funciones (uniformemente) equicontinua

Una sucesión de funciones continuas $(f_i)_{i \in I}$ se dice que es equicontinua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$ tal que $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$. Es decir, que el δ necesario es el mismo para todas las funciones.

De forma análoga se define el concepto de familia de funciones uniformemente equicontinua:

Una sucesión de funciones uniformemente continuas $(f_i)_{i \in I}$ se dice que es uniformemente equicontinua en si $\forall \varepsilon > 0 \forall i \in I \exists \delta_\varepsilon$ tal que $d(y, x) < \delta_\varepsilon \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Es decir, que el δ necesario es el mismo para todas las funciones.

Las demostraciones de los teoremas se pueden encontrar en el libro General Topology de Willard (va para tarea).

Teorema 12. Sea (K, d) un espacio métrico y $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\} \hookrightarrow (\mathbb{R}^K, T_p)$ (T_p es la topología producto).

Si ϕ es (unif.) equicontinua, entonces $\bar{\phi}^{T_p}$ son (uniformemente) continuas

Teorema 13. Si ϕ es equicontinua, entonces en ϕ coinciden las topologías T_p (producto) y la de convergencia puntual sobre un subconjunto $D \subseteq K$ denso ($\bar{D} = K$).

Teorema 14. Sea $\phi \subseteq C(K)$ y sea (K, d) métrico compacto. Entonces ϕ es relativamente compacto en $\|\cdot\|_\infty \iff \phi$ es equicontinuo y $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$ acotado $\forall x \in K$

Teorema 15. Lax- Milgram

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ tal que:

1. $B(\cdot, y)$ es lineal $\forall y \in H$ y $B(x, \cdot)$ es lineal conj., es decir, B es sesquilineal.
2. B es acotada: $\exists c > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq c \|x\| \|y\| \forall x, y \in H$
3. B es fuertemente positiva: $\exists b > 0$ tal que $|B(x, y)| > b \|y\|^2, \forall y \in H$

Entonces para cualquier forma lineal y continua $\phi : H \rightarrow \mathbb{K}$ existe un único $y \in H$ tal que $\phi(x) = B(x, y) \forall x \in H$

Demostración

Para y fijo la aplicación $x \mapsto B(x, y)$ es lineal continuo. Por el teorema de Riesz, $\exists z \in H$ tal que $B(x, y) = \langle x, z \rangle \forall x \in H$ y sea T la forma lineal que da el teorema de Riesz.

Tenemos que $T(H)$ es un subespacio de H . Veamos que $T(H) = H$ y esto dará la prueba de nuevo por el teorema de Riesz. Demostremos varias cosas:

1. $T(H)$ es cerrado.

Sea $z_n = Ty_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in H, z \in T(H)$

$$B(x, y_n - y_m) = \langle x, z_n - z_m \rangle \forall x \in H$$

$$b \|y_n - y_m\|^2 \leq B(y_n - y_m, y_n - y_m) = \langle y_n - y_m, z_n - z_m \rangle \leq \|y_n - y_m\| \|z_n - z_m\|$$

Luego (y_n) es de Cauchy y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ y tenemos que:

$$\langle x, z_n \rangle = B(x, y_n) \rightarrow B(x, y) = \langle x, z \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x \in H$$

2. Supongamos $T(H) \subsetneq H \implies \exists x_0 \neq 0 : \langle x_0, z \rangle = 0 \forall z \in T(H) \implies B(x_0, y) = \langle x_0, z \rangle \forall y \in H, B(x_0, x_0) = 0$ si $x_0 \neq 0$

□

1.4 - Principio de Dirichlet

Para esta sección consideraremos Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n abierto y acotado.

Lo que querremos estudiar en esta sección será el siguiente sistema llamado problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega}(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplo 2. Tomemos $n = 2$, en esta dimensión existe el problema clásico de una placa que se calienta en los bordes. Queremos conocer el estado estacionario del sistema.

Idea para buscar una solución

Buscar el estado de equilibrio minimizando una energía o acción adecuada.

La energía que plantea Dirichlet es la de la llamada integral de Dirichlet:

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2$$

Definición 1.7. $C^2(\overline{\Omega})$

Denotamos a $C^2(\overline{\Omega})$ como las funciones dos veces derivables en el interior de Ω con segunda derivada continua en $\overline{\Omega}$.

Las funciones con las que trabajaremos en este apartado son las de este tipo con soporte compacto, y al conjunto de ellas las denotaremos por $C_0^2(\overline{\Omega})$.

Para ver una proposición necesitamos repasar el siguiente teorema:

Teorema 16. Teorema de Gauss

Dada Ω suficientemente regular:

$$\int_{\Omega} \partial x_j w dx = \int_{\Omega} w n_j d\theta$$

Proposición 1.4. Si existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que minimiza a $D(u)$ entre todas las funciones $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $u|_{\partial\Omega} \equiv f$, entonces u es armónica ($\Delta u = 0$).

Demostración

En $C^2(\overline{\Omega})$, definimos $\langle \cdot \rangle_D$ por:

$$\langle F, G \rangle_D = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Definimos ahora $D(u) = \langle u, u \rangle_D$.

Si $v \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica que $v|_{\partial\Omega} = 0 \implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(u + \varepsilon v)(*) \geq D(u)$

$$(*) = D(u) + \varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D$$

Cancelando $D(u)$ tenemos:

$$\varepsilon^2 D(v) + \varepsilon D(v) + \varepsilon \langle u, v \rangle_D + \varepsilon \langle v, u \rangle_D \geq 0$$

Como esto lo podemos hacer para un ε arbitrario, tenemos que $\langle u, v \rangle_D = 0 \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$ con soporte compacto, luego:

$$0 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Utilizando el teorema de Gauss llegaremos al resultado deseado.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} (\Delta u) v \quad \forall v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \text{ con } v|_{\partial\Omega} = 0$$

También sabemos que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle \Delta u, v \rangle_{L^2} = 0$ para cualquier v de un denso, luego $\Delta u = 0$

□

Teorema 17. Desigualdad de Poincaré

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \|f\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_1$$

Como consecuencia, tenemos continuidad en la inclusión:

$$(\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$$

Aquí faltan varias definiciones de tipos de espacios de Hilbert. Creo que están en el libro.

Lema 1.4.1.

1. $H_1^0 \subseteq H_0$
2. $\forall v \in H_1^0, \exists v_j \in H_0 : \langle z, v_j \rangle_0 = - \langle \frac{\partial z}{\partial x_j}, v \rangle_0$. Es decir:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

3. Si $u, v \in H_1^0 \implies \langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}$

A v_j se le llama $\frac{\partial v}{\partial x_j}$

Demostración

Sea $(v_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v_n \rightarrow v \in H_1^0$ en $\|\cdot\|_1 \implies \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right)_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ y converge a una función a la que llamamos $v_j \in H_0 = L^2(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré, (v_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_0$ y su límite no podrá ser otro que v . La fórmula:

$$\int_{\Omega} z v_j = - \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_j} v$$

Viene dada por el paso al límite de la expresión dada por el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} z \frac{\partial v_n}{\partial x_j} = - \int_z^{x_j} v_n$$

□

Lema 1.4.2. Variacional

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u v dx = 0 \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Entonces $u = 0$ en $L^2(\Omega)$ y $u = 0 \forall x \in \Omega$

Teorema 18.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado. Sea $f \in L^2(\Omega) \equiv H_0$. Entonces existe una **solución débil** de la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En el siguiente sentido:

Existe una única función $v \in H_1^0$ donde que $\langle u, f \rangle = -\langle u, \Delta v \rangle \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$

Lo rojo aún "está por aclarar"

Demostración

Si $f \in L^2 \implies \phi : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua en H_0 por Riesz. Aplicando la des. de Poincaré:

$$|\phi(n)| \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_0 \|u\|_1 \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \phi \text{ es continua en } (\mathcal{D}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$$

Entonces podemos extender ϕ al completado, H_1^0 . A esta forma lineal extendida le aplicamos el teorema de Riesz.

Existirá entonces una única $v \in H_1^0$ tal que $\phi(u) = \langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle_0$ para todo $u \in H_1^0$.

Si tomamos $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle_0 = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \stackrel{\text{Int. partes}}{=} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \int_{\Omega} -u \sum_{j=1}^N v_{jj}$$

Donde las parciales son en el sentido generalizado visto en el lema. □

Definición 1.8. Definición de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y su topología

Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ compactos, definimos $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$

En este espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$, definimos una topología a partir de las seminormas utilizadas en la convergencia uniforme de los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Lo vemos en detalle:

Los elementos de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ son funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que su soporte está en K y se dice que $h_n \rightarrow h$ si $h_n \rightarrow h$ de forma uniforme y sus diferenciales convergen de forma uniforme a la de $h(x)$, es decir:

$$D^\alpha h_n(x) \rightarrow D^\alpha h(x) \text{ unif. } \forall \alpha = (a_1, \dots, a_N)$$

1.5 - Problemas variacionales cuadráticos

Teorema 19. Principal de los problemas variacionales cuadráticos

Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, acotada, continua^a y fuertemente positiva^b y $b : H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Sea $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) - b(x) \forall x \in H$$

Llamada forma bilineal cuadrática.

Entonces se verifica la siguiente equivalencia:

$$\inf\{F(z) : z \in H\} = F(x_0) \iff B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$$

Además, existe un único x_0 que lo verifica.

^a $\|y\| \|x\| \geq |B(x, y)|$
^b $B(x, y) \geq C \|x\| \|y\| \forall x, y$

Notemos que la norma $\|\cdot\|$ y el módulo de B son normas equivalentes debido a que B es continua y fuertemente positiva.

Demostración

Demostrado en 1.7.1. del libro. Aquí hay un boceto de la demostración:

Dado $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$, se tiene:

$$\begin{aligned} F(x+ty) &= \frac{1}{2}B(x+ty, x+ty) - b(x+ty) = \frac{1}{2}(B(x, x) + B(x, ty) + B(ty, x) + B(ty, ty)) - (b(x) + tb(y)) = \\ &= \frac{1}{2}(B(x, x) + 2B(x, ty) + t^2 B(y, y)) - (b(x) + tb(y)) = \frac{t^2}{2}B(y, y) + t(B(x, y) - b(y)) + \frac{1}{2}B(x, x) - b(x) \end{aligned}$$

Si el x_0 es donde se alcanza el extremo inferior, se tiene que:

$$F(x_0) \leq \frac{t^2}{2} B(y, y) + t \left(B(x_0, y) - b(y) \right) + \underbrace{\frac{1}{2} B(x_0, x_0) - b(x_0)}_{F(x_0)}$$

Y entonces $B(x_0, y) = b(y)$. (???)

"El recíproco se hace con la misma expresión y derivando"

Para la unicidad, basta con aplicar el teorema de Riesz para el producto escalar \langle, \rangle_B

□

Método 20. Método de aproximación de Ritz-Galerkin

Dado $B(x_0, y) = b(y) \forall y \in H$, y tomando $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n}$ con cada H_n finito dimensional.

Tomamos $\text{span}\{e_j^n : j = 1, 2, \dots, N\}$ a una base de cada H_n

Al problema P presentado en el anterior teorema (la parte izquierda de la equivalencia) restringido a H_n queda:

$$P|_{H_n} \equiv B(x, y) = h(y) \forall y \in H_n \longrightarrow B(x, e_j^n) = b(e_j^n) = b(e_j^n) \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Entonces si la solución a cada problema es x_n , se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Demostración

$$B(x_n, y) = b(y) \quad \forall y \in H_n$$

$$B(x_0, y) = b(y) \quad \forall y \in H$$

Restando llegamos a:

$$0 = B(x_n - x_0, y) \quad \forall y \in H_n$$

Luego el $x_n - x_0$ es la proyección ortogonal sobre H_n asociada a \langle, \rangle_B de x_0 sobre x_n . Entonces es la mejor aproximación sobre H_n como $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n}$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

□

1.6 - Operaciones diferenciales y soluciones débiles

Definamos el operador:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

Con:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Problema:

Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ encontrar u tal que $L(u) = f$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

Proposición 1.5.

Adjunto de $L^* = \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$ verifica que:

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^*\psi \rangle \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observación

$\forall f \in L^2(\Omega)$, si $u \in C^n(\Omega)$ verifica que $Lu = f$, entonces $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Definición 1.9. Solución débil

Si $f \in L^2(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ es una **solución débil** de la ecuación $Lu = f$ siempre que $\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^*\psi \rangle \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Ejemplo 3. En \mathbb{R} , $L = \frac{d}{dx}$ con $\Omega = (0, 1)$, $u, f \in L^2(\Omega)$

Entonces $Lu = f$ en sentido débil sii $\exists F \in: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continua y tal que $F(x) = u(x)$ para casi todo punto (p.c.t) $x \in [0, 1]$ y $F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in (0, 1)$

Hay otros ejemplos en el libro (sección 1.10)