



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# МЕХАНИКА

ЯКУТА  
АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| Лекция 1.....   | 7  |
| Введение в механику.....  | 7  |
| Кинематика.....   | 7  |
| Система отсчета и системы координат.....                                    | 8  |
| Лекция 2.....   | 15 |
| Движение материальной точки по окружности.....                              | 15 |
| Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея.              |    |
| Преобразования Галилея.....   | 16 |
| Первый закон Ньютона.....   | 17 |
| Второй закон Ньютона. Уравнение движения. Начальные условия.....            | 19 |
| Третий закон Ньютона.....   | 20 |
| Лекция 3.....   | 21 |
| Законы, описывающие индивидуальные свойства сил.....                        | 21 |
| Сила нормальной реакции. Вес.....   | 22 |
| Законы для сил сухого и вязкого трения. Явление застоя. Явление заноса..... | 23 |
| Лекция 4.....   | 26 |
| Тело как система материальных точек. Число степеней свободы системы.....    | 26 |
| Закон измерения импульса системы материальных точек.....                    | 27 |
| Центр масс. Теорема о движении центра масс.....                             | 28 |
| Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского.....                 | 29 |
| Закон сохранения механической энергии.....                                  | 31 |
| Лекция 5.....   | 33 |
| Закон сохранения механической энергии. Продолжение.....                     | 33 |
| Законы изменения и сохранения механической энергии. Равновесие              |    |
| консервативной механической системы.....                                    | 36 |
| Соударения тел. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары. Законы       |    |
| сохранения при соударениях тел.....   | 37 |
| Лекция 6.....   | 38 |
| Неинерциальные системы отсчета (НИСО). Построение механики в НИСО.....      | 38 |
| Связь между скоростями при переходе в НИСО.....                             | 39 |
| Второй закон Ньютона в НИСО. Переносная и кориолисова силы инерции.....     | 41 |
| Лекция 7.....   | 42 |
| Переносная и кориолисова силы инерции. Продолжение.....                     | 42 |
| Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета.....                    | 44 |
| Специальная теория относительности.....                                     | 44 |

|   |     |
|---|-----|
| Лекция 8.....   | 46  |
| Идейный вклад Х. Лоренца, Д. Фицджеральда, Д. Лармора, А. Пуанкаре.....               | 46  |
| Преобразования Лоренца. ....  | 47  |
| Следствия преобразований Лоренца.....   | 49  |
| Событие. Интервал между событиями. ....   | 52  |
| Релятивистское правило сложения скоростей. ....                                       | 55  |
| Релятивистская динамика. ....   | 57  |
| Лекция 10.....  | 60  |
| Релятивистская динамика. Продолжение.....   | 60  |
| Энергия в релятивистской механике. Энергия покоя и кинетическая энергия.....          | 60  |
| Механика твердого тела. Модели и типы движения твердого тела. ....                    | 63  |
| Мгновенная ось вращения. ....   | 65  |
| Движение твердого тела с одной закрепленной точкой. Теорема Эйлера.....               | 67  |
| Лекция 11.....  | 69  |
| Теорема Эйлера. Продолжение .....   | 69  |
| Динамика твердого тела.....   | 70  |
| Момент импульса твердого тела. ....   | 73  |
| Лекция 12.....  | 76  |
| Оси вращения.....   | 76  |
| Общий случай движения твердого тела. ....   | 79  |
| Статика.....  | 80  |
| Лекция 13.....  | 81  |
| Статика. Продолжение .....  | 81  |
| Движение симметричного гироскопа с неподвижной точкой опоры.....                      | 89  |
| Лекция 14.....  | 91  |
| Движение гироскопа. Продолжение .....   | 91  |
| Нутации.....  | 93  |
| Лекция 15.....  | 95  |
| Нелинейные колебания. ....  | 95  |
| Лекция 16.....  | 100 |
| Общий подход к решению уравнений. ....  | 100 |
| Механика волн. ....   | 100 |
| Волны скорости, ускорения, относительной деформации и напряжения.....                 | 103 |
| Лекция 17.....  | 105 |
| Волны скорости, ускорения, относительной деформации и напряжения.<br>Продолжение..... | 105 |

|  |     |
|--|-----|
| Энергия бегущей волны .....  | 107 |
| Стоячие волны.....   | 108 |
| Лекция 18.....   | 111 |
| Нормальные колебания стержня, струны, столба газа.....                             | 111 |
| Акустические резонаторы .....  | 112 |
| Элементы акустики.....   | 113 |
| Лекция 19.....   | 116 |
| 19.1. Эффект Доплера.....  | 116 |
| 19.2 Движение со сверхзвуковой скоростью. Волны с большой<br>интенсивностью .....  | 117 |
| 19.3 Основы гидро- и аэростатики и гидро- и аэродинамики. ....                     | 118 |
| Лекция 20.....   | 121 |
| 20.1. Условия плавания тела на поверхности жидкости .....                          | 121 |
| 20.2. Гидродинамика. Стационарное течение жидкости .....                           | 121 |
| 20.3 Уравнение Бернулли.....   | 122 |
| 20.4. Вязкость. Сила вязкого трения .....  | 125 |
| Лекция 21.....   | 128 |
| 21.1. Условия формулы Пуазейля .....   | 128 |
| 21.2. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса .....                    | 128 |
| 21.3. Лобовое сопротивление при обтекании тел. Парадокс Даламбера .....            | 129 |
| 21.4. Возникновение подъёмной силы.....  | 131 |
| Лекция 22.....   | 133 |
| 22.1. Основы механики деформируемых тел. Типы деформаций .....                     | 133 |
| 22.2. Энергия упругих деформаций .....   | 136 |
| 22.3. Коэффициент Пуассона.....  | 137 |
| 22.4 Связь модуля Сдвига и модуля Юнга .....                                       | 139 |
| Лекция 23.....   | 141 |
| 23.1. Собственные и вынужденные колебания. ....                                    | 141 |
| 23.2. Решение уравнения гармонических колебаний. Характеристики<br>колебаний ..... | 142 |
| 23.3. Колебания физического маятника.....  | 144 |
| 23.4. Сложение колебаний. Биения. Фигуры Лиссажу .....                             | 145 |
| 23.5. Собственные затухающие колебания .....                                       | 147 |
| Лекция 24.....   | 149 |
| 24.1. Собственные затухающие колебания. Продолжение .....                          | 149 |
| 24.2. Вынужденные колебания .....  | 150 |
| 24.6. Установившиеся вынужденные колебания. АЧХ.....                               | 152 |

---

|  |     |
|--|-----|
| 24.7. Фазово-частотная характеристика .....        | 154 |
| 24.8. Соотношение между силами при резонансе ..... | 155 |
| 24.9. Вычисление добротности.....                  | 156 |



## Лекция 1.

### Введение в механику.

Механика изучает движение. Движение – это всякое изменение материи.

**Механическое движение** – это изменение положения тел в пространстве относительно других тел с течением времени. Мы будем изучать только медленное движение тел, т.е. такие движения, при которых скорость намного меньше скорости света. Релятивистская механика изучает быстрое движение.

1. Кинематика – изучает механическое движение не интересуясь его причинами.
2. Динамика материальной точки – изучает причины движения материальной точки.
3. Динамика твердого тела – изучает причины движения твердых тел.
4. Теория упругости – изучает деформации различных сред.
5. Статистика – изучает равновесие твердых тел.
6. Гидро- и аэростатика – изучает равновесие жидкостей и газов и равновесие тел в жидкостях и газах.
7. Гидро- и аэродинамика – изучает движение жидкостей и газов и обтекание жидкостями и газами различных тел.
8. Теория колебаний – изучает периодические процессы происходящие в системах которые имеют небольшое число степеней свободы.
9. Теория волн – занимается периодическими процессами в системах которые имеют очень большое число степеней свободы, в том числе бесконечное число степеней свободы.
10. Релятивистская механика.

### Кинематика.

**Пространство** – «вместилище» всех тел.

Свойства пространства:

- Трехмерность. Для того, чтобы задать положение точки в пространстве необходимо указать три числа – координаты.
- Однородность. Все точки пространства эквивалентны, т.е. при переносе физической установки в другую точку пустого пространства установка будет работать точно также и результаты будут такими же.
- Изотропность. В пустом пространстве все направления эквивалентны, т.е. при повороте физической установки на некоторый угол в пространстве результаты эксперимента будут точно такими же.
- Евклидовость. В пространстве справедлива геометрия Евклида, т.е. справедливы соответствующий набор аксиом геометрии Евклида и все вытекающие из них теоремы.

Все свойства пространства подлежат экспериментальной проверке.

Экспериментальная проверка евклидовости пространства. Проверка теоремы о том, что сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . В 1821-1823 гг. Карл Фридрих Гаусс измерил углы треугольника с вершинами, расположенными на холмах Брокен, Хахехаген и Инзельберг в Германии.

Результат:  $\sigma = 86^\circ 13' 58,366'' + 53^\circ 6' 45,642'' + 40^\circ 39' 30,165'' = 180^\circ 00' 14,173''$   
(точность 0,002%)

**Время** – не может быть строго определено. Оно может быть интуитивно осознано.

Свойства времени:

- Однонаправленность. Время всегда течет только вперед. Можно выделить события, которые происходили раньше, которые происходят сейчас и те, которые произойдут когда-то. В данной системе отсчета эти понятия никогда не меняются местами.
- Однородность. Все моменты времени равноправны. При проведении эксперимента мы получаем определенный результат. Если провести такой же эксперимент спустя некоторое время, мы получим тот же самый результат.
- Равномерность течения (принимается по определению). Это свойство никак нельзя проверить. На этом свойстве основано действие часов.

**Часы** – любое тело или система тел, в которых происходит периодический процесс, при помощи которого можно судить о длительности промежутков времени.

**Секунда** – промежуток времени, в течение которого совершается 9.192.631.770 колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между двумя определенными сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-137 в отсутствие внешних полей.

**Метр** – расстояние, которое проходит свет в вакууме за  $1/299.792.458$  с. Отсюда следует, что скорость света в вакууме равна  $299.792.458$  м/с точно.

### Система отсчета и системы координат.

**Система отсчета** – это совокупность тела отсчета, системы координат и часов.

**Тело отсчета** – любой материальный объект, с которым можно связать систему координат.

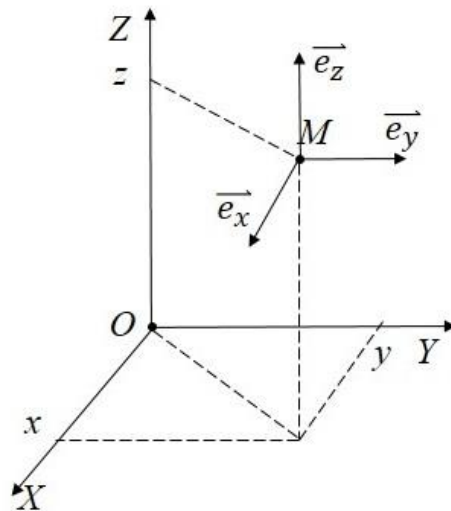
**Система координат** – это совокупность начала отсчета и координатных осей, снабженных средствами измерения длин отрезков.

Средство измерения длин отрезков – координатная сетка.

Системные координаты могут быть разнообразными, но на практике удобно использовать системы координат, в которых координатные оси являются взаимно перпендикулярными, т.е. ортогональными.

Направления осей удобно задавать с помощью единичных векторов.

**Единичный вектор** – это вектор, длина которого равна единице. Если координатная система ортогональна, то и три этих вектора ортогональны. Поэтому их называют единичными ортами.



Координаты:  $x, y, z$

$$-\infty < x < +\infty$$

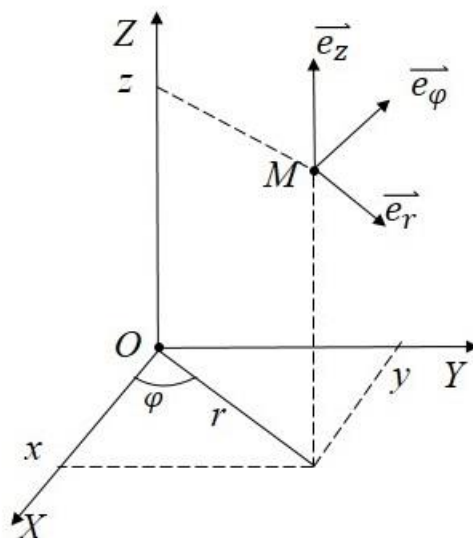
$$-\infty < y < +\infty$$

$$-\infty < z < +\infty$$

Рисунок 1.1. Прямоугольная система координат

Для задания положения точки  $M$  в пространстве используется три числа – это проекция  $x, y, z$  на координатные оси.  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – единичные орты. Представим, что точка  $M$  движется в пространстве.

В декартовой системе координат направление ортов  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  в пространстве не меняется.



Координаты:  $r, \varphi, z$

$\varphi$  – полярный угол

$$0 \leq r < +\infty$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$-\infty < z < +\infty$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

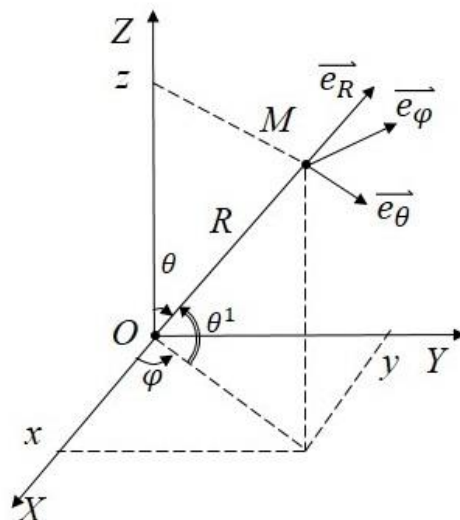
Рисунок 1.2. Цилиндрическая система координат



Существуют формулы, которые позволяют пересчитывать цилиндрические координаты в прямоугольные. Если все происходит в плоскости, то  $z$  тождественно равно нулю. Тогда цилиндрическая система переходит в полярную систему координат на плоскости.

Орт  $\vec{e}_r$  всегда направлен вдоль линии  $r$ . Орт  $\vec{e}_z$  направлен вдоль оси  $Z$ . Орт  $\vec{e}_\varphi$  должен быть направлен перпендикулярно векторам  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_z$ .

Представим, что точка  $M$  движется в пространстве. Тогда орт  $\vec{e}_z$  всегда будет направлен вверх, вдоль оси  $Z$ . А направление ортов  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$  будет меняться.



Координаты:  $R, \theta, \varphi$   
 $\theta$  – зенитный угол,  
 $\varphi$  – азимутальный угол

$$0 \leq R < +\infty$$

$$0 \leq \theta < +\infty$$

$$0 \leq \varphi < +\infty$$

$$x = R \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = R \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = R \cos\theta$$

Рисунок 1.3. Сферическая система координат

При движении точки  $M$  в пространстве все три орта меняют свое направление.

Физика описывает реальные явления, наблюдаемые в природе. Описывать явления в мельчайших деталях невозможно. Поэтому вместо реальных физических явлений рассматривают упрощенные модельные объекты, для описания которых можно применять математические соотношения.

**Физические модели** – замена реальных объектов или процессов идеализированными объектами и процессами, которые сохраняют основные черты реальных объектов или процессов.

**Материальная точка** – это абстрактное тело нулевых размеров, имеющее массу.

ИЛИ

**Материальная точка** – тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с другими характерными размерами или расстояниями.

ИЛИ

**Материальная точка** – геометрическая точка имеющая массу.

**Радиус-вектор материальной точки** – вектор, проведенный из начала координат в текущее положение материальной точки.

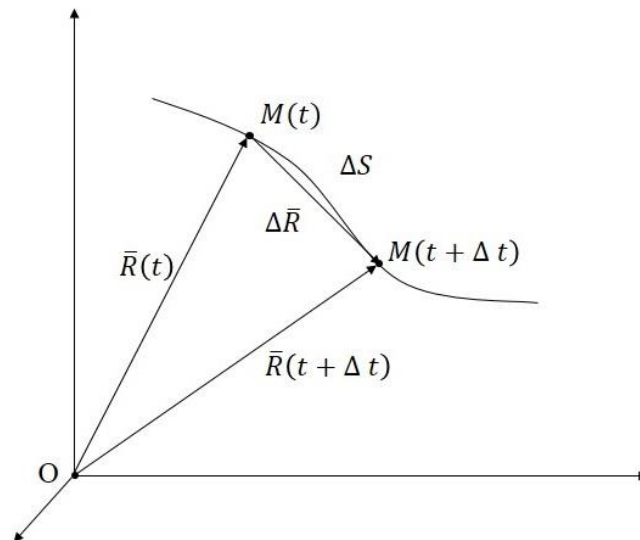


Рисунок 1.4. Радиус-вектор материальной точки

Материальная точка  $M$  в момент времени  $t$  занимает определенное положение. Радиус вектор  $\vec{R}$ . Пусть точка  $M$  двигалась в пространстве и за время  $\Delta t$  заняла новое положение  $M(t + \Delta t)$ . Проведем новый радиус вектор  $\vec{R}(t + \Delta t)$ .

$\Delta \vec{R} = \vec{R}(t + \Delta t) - \vec{R}(t)$  – Разность между векторами  $\Delta \vec{R}$  называется **вектором перемещения**.

**Траектория** – линия, вдоль которой движется материальная точка.

**Путь** ( $\Delta S$ ) – расстояние, пройденное материальной точкой вдоль траектории.

**Координатный способ описания движения.** Необходимо задать зависимость координат от времени.

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \Rightarrow x(t), y(t), z(t)$$

**Траекторный способ описания движения.** Необходимо задать уравнение траектории, по которой движется тело, начальное положение на траектории, положительное направление смещения вдоль траектории и зависимость пути, пройденного вдоль траектории от времени.

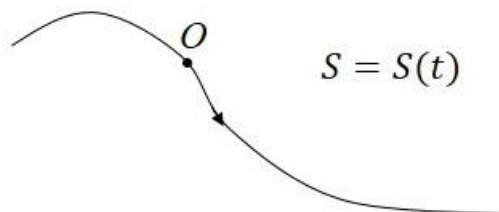


Рисунок 1.5. Траектория

**Закон движения** – зависимость координат от времени.

**Уравнение движения** – дифференциальное уравнение описывающее движение. Например, второй закон Ньютона. Если решить это уравнение – получится Закон движения. Таким образом, закон движения – это решение уравнения движения.

**Уравнение траектории** – уравнение той линии, вдоль которой движется материальная точка. Чтобы получить уравнение траектории, нужно взять закон движения и исключить из него время ( $t$ ).

**Средняя скорость** – Пусть за время  $\Delta t$  перемещение составило  $\Delta \bar{R}$ . Тогда средняя скорость это  $\overline{v_{cp}} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta t}$ .

**Мгновенная скорость** – предел отношения  $\Delta \bar{R}$  к  $\Delta t$  при  $\Delta t$  стремящимся к нулю.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta t} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{R}'(t) = \dot{\bar{R}}(t)$$

$\frac{d\bar{R}}{dt}$  – рассматривают как отношение двух физически бесконечно малых величин.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

**Физически бесконечно малая величина** – величина, которая настолько мала, что ее можно считать бесконечно малой, но достаточно велика, чтобы не терялся ее физический смысл.

**Средняя путевая** ( $v_{cp.пут.}$ ) – отношение пройденного пути к промежутку времени, за которое этот путь был пройден.

$$v_{cp.пут.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$v_{cp.пут.} \neq |\overline{v_{cp.}}|$$

**Среднее ускорение** ( $\bar{a}_{cp}$ ) – ускорение это скорость изменения скорости. Отношение изменения скорости  $\Delta v$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за которое это изменение произошло.

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

**Мгновенное ускорение** –  $\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{v}'(t) = \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{\bar{R}}(t) = \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной траектории.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{dS} * \frac{dS}{dt} = v\tau$$
$$\Delta S \rightarrow 0, |\Delta \bar{R}| \rightarrow \Delta S$$

$dS$  – это длина малого элемента траектории, бесконечно малый путь.

$\frac{dS}{dt}$  – это модуль мгновенной скорости.

$\frac{d\bar{R}}{dS}$  – это вектор, длина которого равна единице.

$\tau$  – это единичный вектор, направленный по касательной.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v \frac{d\bar{\tau}}{dt}$$

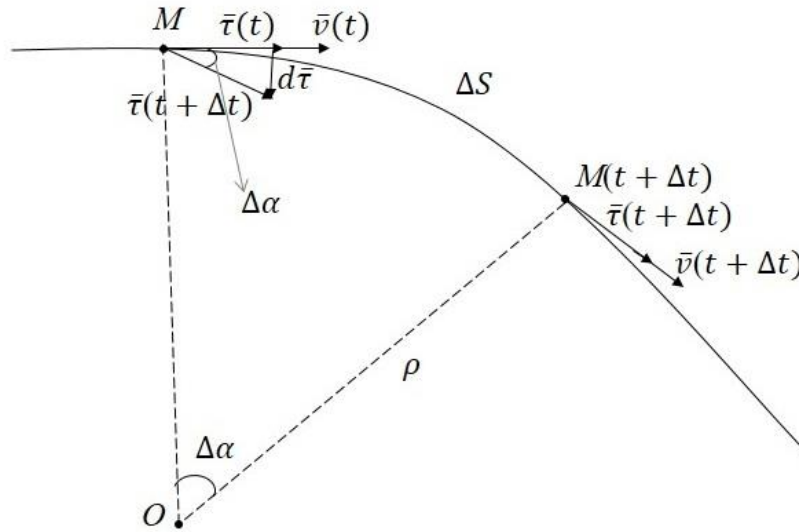


Рисунок 1.6. Расчет мгновенного ускорения

Пусть точка М движется и имеет в момент времени  $t$  скорость  $\bar{v}(t)$ . Пусть точка М за время  $\Delta t$  сдвинулась. Переместим вектор  $\bar{\tau}(t + \Delta t)$  с помощью параллельного переноса.  $d\bar{\tau}$  – разность векторов  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\tau}(t + \Delta t)$ . Восстановим перпендикуляры точки М к вектору скорости.  $\rho$  – радиус кривизны траектории.

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dS} * \frac{dS}{dt} = v \frac{d\bar{\tau}}{dS}$$

$$d\tau = \tau d\alpha = \tau \frac{dS}{\rho}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{\tau}{\rho}$$

$$\tau^2 = 1$$

$$\frac{d}{dS}(\tau^2) = 2\bar{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{dS} = 0$$

$$\bar{\tau} \perp \frac{d\bar{\tau}}{dS}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{\bar{n}}{\rho}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = v \frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{v}{\rho} \bar{n}$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}$$

$a_\tau = \frac{dv}{dt}$  – тангенциальное (касательное) ускорение.

---

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$  – **нормальное ускорение** (центростремительное ускорение).

**Уравнение кинематической связи** – это уравнение, которое связывает друг с другом кинематические характеристики тел системы.

Прямолинейное движение материальной точки.

**Равномерное прямолинейное движение** – это движение, при котором материальная точка, двигаясь вдоль прямой, за ЛЮБЫЕ равные промежутки времени проходит равные расстояния.

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt} = \text{const}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \text{const} = v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

**Равнопеременное прямолинейное движение** – это движение, при котором скорость материальной точки, движущейся вдоль прямой, за ЛЮБЫЕ равные промежутки времени изменяется одинаковым образом.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{const} = a_0$$

$$v_x(t) = a_0 t + v_0$$

$$x(t) = \frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

## Лекция 2.

### Движение материальной точки по окружности.

Пусть материальная точка  $M$  движется по окружности. Воспользуемся для описания движения траекторным способом описания движения.

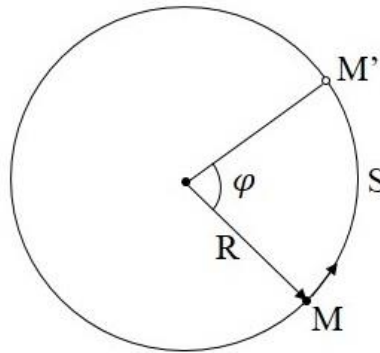


Рисунок 2.1. Движение по окружности

$$S = R\varphi$$
$$v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = \omega R$$
$$dt = \omega$$

$\omega$  – угловая скорость, т.е. скорость изменения угловой координаты.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = ER$$
$$dt = E$$

$E$  – угловое ускорение, т.е. скорость изменения угловой скорости.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

$T$  – период обращения, т.е. время одного полного оборота.

Если  $v$  постоянна, то:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$\nu$  – частота обращения, т.е. число оборотов в единицу времени.

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu$$

Сложение механических движений. Сложение скоростей.

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_1(t) + \vec{R}_2(t) + \dots + \vec{R}_n(t)$$

Любой вектор можно представить в виде суммы любого количества других векторов. Любое движение материальной точки можно разложить на сумму других механических движений произвольным образом.

$$\bar{V} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{v}_1(t) + \bar{v}_2(t) + \dots + \bar{v}_n(t)$$

**Закон сложения скоростей** – если материальная точка участвует одновременно в нескольких механических движениях, то скорости, возникающие при этих движениях, складываются.

### Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея.

Аристотель считал, что для поддержания механического движения тела, на него должны действовать другие тела.

**Закон инерции Галилея** – тело, не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно.

**Свободное тело** – это тело, влиянием на которое других тел можно пренебречь.

**Инерциальная система отсчета** – это такая система отсчета, относительно которой свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

**Принцип относительности Галилея** – механические явления при одинаковых условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

ИЛИ

**Принцип относительности Галилея** – во всех инерциальных системах отсчета законы механики действуют одинаково, то есть нельзя путем постановки механических экспериментов отличить одну инерциальную систему отсчета от другой.

Пусть система К инерциальная, а система К' движется относительно системы К со скоростью  $\bar{V}$ .

Оси  $x$  и  $x'$  все время совпадают. При  $T = 0$ , начало координат  $O$  и  $O'$  также совпадали.

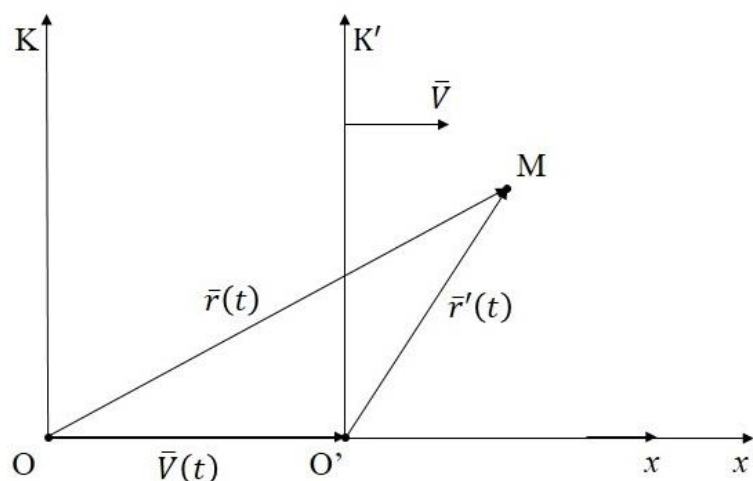


Рисунок 2.2. Принцип относительности Галилея

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \bar{\mathbf{V}}t + \bar{\mathbf{r}}'(t) \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}'(t) \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \bar{\mathbf{a}}'(t) \quad (3)$$

(1) **Набор преобразований Галилея:** Если у нас известны координаты  $x', y', z'$  относительно системы  $K'$ , то их можно пересчитать в координаты  $x, y, z$  в системе  $K$ .

$$x(t) = Vt + x'$$

$$y(t) = y'(t)$$

$$z(t) = z'(t)$$

$$t = t'$$

(2) – Правило преобразования скоростей, которое показывает, как преобразуются скорости при переходе из одной системы отсчета в другую.

Представим, что  $\bar{\mathbf{v}}$  постоянна, т.е. точка  $M$  движется относительно системы  $K$  равномерно и прямолинейно, то относительно системы  $K'$  точка  $M$  тоже будет двигаться равномерно и прямолинейно. Следовательно скорость  $\bar{\mathbf{v}}'$  тоже постоянная величина. Следовательно, если у нас есть хотя бы одна инерциальная система отсчета, то все системы отсчета, движущиеся относительно нее с постоянной скоростью также являются инерциальными системами отсчета.

(3 – во всех инерциальных системах отсчета ускорения точек одинаковы.

**Инварианты преобразований Галилея** (время, ускорение, длина отрезка) – величины, которые не меняются при переходе из одной системы отсчета в другую.

### Первый закон Ньютона.

Исаак Ньютон «Математические начала натуральной философии» (1686-1687)

**Первый закон Ньютона** – Существуют такие системы отсчета, относительно которых свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного движения.

ИЛИ

**Первый закон Ньютона** – Инерциальные системы отсчета существуют.

Первый закон Ньютона носит предельный характер.

Масса, импульс, сила.

**Инертность** – свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения и противиться попыткам изменения этого состояния.

**Масса (инертная масса)** – мера инертности тела при поступательном движении.

Представим, что у нас есть два шарика, между которыми есть сжатая пружинка. Для того, чтобы эта пружинка была сжата мы свяжем шарики ниточкой. Допустим, шарики помещены в невесомость.



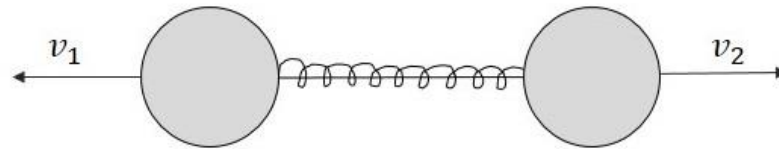


Рисунок 2.3. Шарики с пружинкой

Мы пережигаем нитку, тогда шарики разлетятся и приобретут скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Скорости будут разными, но отношение скоростей будет оставаться неизменным.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = \alpha$$

Заменяем шарик 1 на шарик 3.

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{m_3}{m_1} = \beta$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$$

$$v_3 = \frac{m_1}{m_3} v_1$$

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{m_1 m_3}{m_2 m_1} = \frac{m_3}{m_2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$m_1$  – эталон

$$m_2 = \frac{v_1}{v_2}$$

**Эталон массы** (килограмма) – С 1901 г. По 2019 г. – цилиндр из платино-иридиевого сплава (90% платины и 10% иридия) высотой и диаметром 39,17 мм.

С 20 мая 2019 г. Килограмм определяется путем задания точного численного значения постоянной Планка  $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$  Дж.с. Эталонный прибор – ватт-весы Киббла.

$$U_1 I_2 = mg V_1$$

$V_1$  – скорость катушки при калибровке,

$U_1$  – напряжение на катушке при калибровке,

$I_2$  – сила тока при балансировке катушки,

$m$  – масса груза при балансировке,

$g$  – ускорение свободного падения.

Для точного измерения  $U_1$  и  $I_2$  используются квантовые эффекты – отсюда связь с  $h$ .

**Импульс** (количество движения) – векторная физическая величина, равная произведению массы материальной точки на ее скорость.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Импульс, как физическая величина характеризует поступательное движение материальной точки с учетом направления этого движения.

**Сила** – всякая причина, изменяющая импульс материальной.

ИЛИ

**Сила** – это векторная характеристика взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление их взаимодействия.

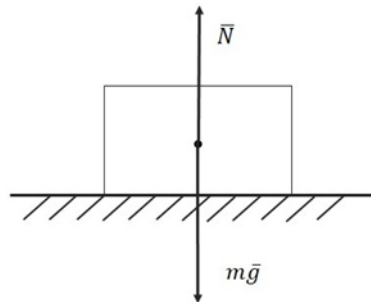


Рисунок 2.4 – Представление сил на графике

Сила характеризуется модулем, направлением, точкой приложения. Поэтому на рисунка очень важна точка приложения и длина линии силы.

### Второй закон Ньютона. Уравнение движения. Начальные условия.

**Второй закон Ньютона** – В инерциальной системе отсчета скорость изменения импульса материальной точки определяется действующей на нее силой.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$1) \frac{d}{dt} = (m\vec{v}) = \vec{F}$$

$$m = const \Rightarrow m = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$dt = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$2) \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \text{ справедливо и в релятивистской механике.}$$

$$3) m, \vec{a} - \text{inv}$$

$$\vec{F} - \text{inv}$$

$$4) \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$5) \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

### Третий закон Ньютона.

**Третий закон Ньютона** – В инерциальной системе отсчета при взаимодействии двух материальных точек силы взаимодействия возникают парами. При этом силы взаимодействия:

- 1) Равны по модулю;
- 2) Противоположны по направлению;
- 3) Действуют вдоль одной прямой;
- 4) Имеют одинаковую физическую природу;
- 5) Приложены к разным материальным точкам.

На поверхности стола лежит кирпич, на него вниз действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции стола  $\vec{N}$ . Для силы  $m\vec{g}$  является противодействием гравитационная сила, с которой кирпич притягивает землю.

**Принцип суперпозиции (независимости действия) сил** – При одновременном действии на материальную точку нескольких сил каждая из них действует независимо от других (как будто другие силы отсутствуют), а результат действия определяется при помощи векторного сложения всех сил.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n$$

### Лекция 3.

#### Законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

Виды взаимодействий:

- Гравитационное – притяжение массивных частиц, действует на любых расстояниях.
- Слабое ядерное – превращение некоторых элементарных частиц, на расстояниях  $\sim 10^{-18}$  м.
- Электромагнитное – притяжение и отталкивание заряженных частиц, на любых расстояниях.
- Сильное ядерное – притяжение и отталкивание кварков и нуклонов в атомном ядре, на расстояниях  $\sim 10^{-15}$  м.

**Закон Всемирного тяготения** (Исаак Ньютон, 1666 г.) – Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками прямо пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, проходящей через эти материальные точки.

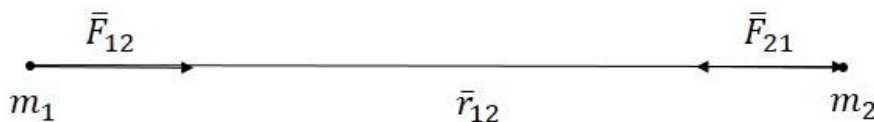


Рисунок 3.1. Гравитационное взаимодействие

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

Закон справедлив только для материальных точек.

$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$  – гравитационная постоянная.

$$F = G \frac{mM}{R^2} = m \frac{GM}{R^2}$$

$m$  – масса материальной точки,  $M$  – масса тела,  $R$  – расстояние от центра шара до материальной точки.

Представим, что точка  $M$  находится в точности на поверхности шара, тогда:

$$F = G \frac{mM}{R^2} = m \frac{GM}{R^2}$$

Позволяет рассчитать силу, с которой притягивается к шару материальная точка, находящаяся вблизи его поверхности. Следовательно,

$$F = G \frac{mM}{R^2} = m \frac{GM}{R^2} = mg$$

$g = \frac{GM}{R^2} \approx 9,8 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$  – напряженность гравитационного поля земли, т.е. ускорение свободного падения.

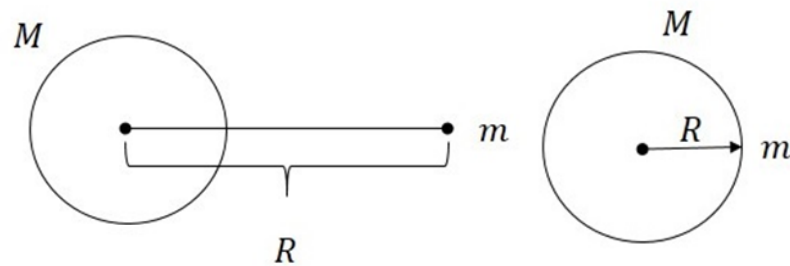


Рисунок 3.2 – Взаимодействие тела и материальной точки

Таким образом, **Сила тяжести** – это гравитационная сила, с которой материальная точка притягивается к Земле.

Рассмотрим свободное падение тела на Землю.

$$F = m_{\text{гр}}g$$

$$F = m_{\text{ин}}a$$

$m_{\text{гр}}$  – гравитационная масса, т.е. величина, которая характеризует способность массивного тела взаимодействовать с гравитационным полем.

$m_{\text{ин}}$  – инертная масса, т.е. мера инертности тела.

$$m_{\text{гр}}g = m_{\text{ин}}a$$

Все тела независимо от их массы падают в гравитационном поле с одинаковым ускорением.

$$\frac{m_{\text{гр}}}{m_{\text{ин}}} = \frac{a}{g} = \text{const} = 1 \text{ – полагают, что инертная и гравитационная массы равны.}$$

Принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс – Инертная и гравитационная масса эквивалентны.

Проверен с относительной погрешностью  $\sim 10^{-12}$  (в 1971 году на физфаке МГУ – В.П. Брагинским и В.И. Пановым).

### Сила нормальной реакции. Вес

**Сила нормальной реакции** – нормальная составляющая силы взаимодействия твердых тел, возникающая при их непосредственном контакте.

**Вес** – сила с которой тело действует на опору (подвес), определенная в системе отсчета, относительно которой опора (подвес) покоится.

**Закон Гука** – Сила упругости, возникающая при малой деформации, прямо пропорциональна величине этой деформации и направлена противоположно направлению деформации.

Малые деформации – это те деформации, которые полностью исчезают после того, как исчезнет внешнее воздействие, т.е. тело полностью восстанавливает свою форму.

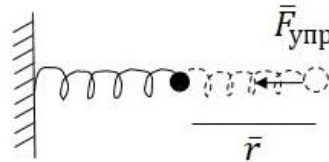


Рисунок 3.3. Деформация пружины

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -K\vec{r}$$

$K$  – Коэффициент упругости.

### Законы для сил сухого и вязкого трения. Явление застоя. Явление заноса

**Сила сухого трения** – касательная составляющая силы взаимодействия твердых тел, возникающая при их непосредственном контакте.

Тело лежит на столе, и мы на него действуем какой-то внешней силой. Тело покоится. На это тело будут действовать сила нормальной реакции  $N$  и сила сухого трения. Полная сила реакции это сумма силы нормальной реакции и силы трения.

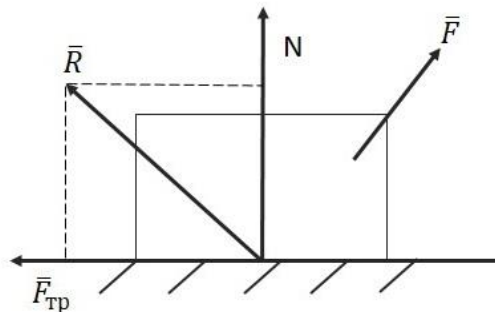


Рисунок 3.4. Тело, на которое действуют внешней силой

Сила сухого трения проявляется как:

- Сила трения покоя;
- Сила трения скольжения;
- Сила трения качения.

**Сила сухого трения покоя** равна по модулю касательной составляющей внешней силы, приложенной к покоящемуся телу, и направлена противоположно этой составляющей.

**Сила сухого трения скольжения** равна по модулю произведению модуля силы нормальной реакции на коэффициент трения скольжения; направлена по касательной к поверхности тела противоположно направлению относительной скорости этой поверхности.

$$\bar{F}_{\text{тр.ск.}} = \mu N$$

Коэффициент трения скольжения ЗАВИСИТ от:

- Материала соприкасающихся поверхностей;
- Качества обработки соприкасающихся поверхностей;
- От относительной скорости движения соприкасающихся поверхностей (очень слабо).

Коэффициент трения скольжения НЕ ЗАВИСИТ от площади соприкасающихся поверхностей.

Закон, описывающий силу сухого трения скольжения, называется **законом Амонтона–Кулона**.

**Сила сухого трения качения**, возникающая при качении цилиндра, прямо пропорциональна модулю силы нормальной реакции и обратно пропорциональна радиусу цилиндра.

Рассмотрим цилиндр, катящийся по некоторой поверхности. Пусть и эта поверхность, и этот цилиндр могут деформироваться. Если цилиндр начинает катиться, то и цилиндр деформируется, и поверхность под ним.

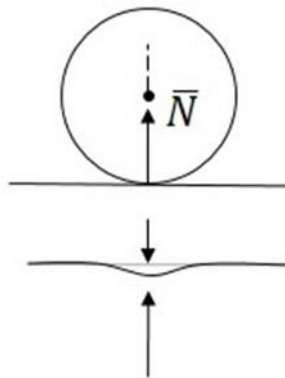


Рисунок 3.5. Иллюстрация примера деформации тел.

$$\bar{F}_{\text{тр.кач.}} * r = N * f$$
$$\bar{F}_{\text{тр.кач.}} = f \frac{N}{r}$$

$f$  – коэффициент трения качения.

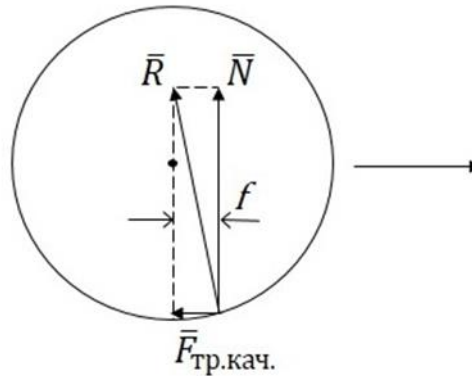


Рисунок 3.7. Сила трения качения

**Сила вязкого трения** – сила, возникающая при движении твердого тела в жидкости друг относительно друга, и направленная противоположно относительной скорости движения тела и жидкости (или слоев жидкости).

При малых скоростях  $\bar{F}_{\text{тр}} \sim v$

При больших скоростях  $\bar{F}_{\text{тр}} \sim v^2$

$$\bar{F}_{\text{тр}} = -\alpha \bar{v} - \beta v \bar{v}$$

Явление, когда тело, на которое действует сила сухого трения в пределах некоторой зоны, под действием внешних сил сохраняет состояние покоя, называется **явлением застоя**.

Допустим, автомобиль едет по дороге, тогда уравнение его движения выглядит следующим образом:

$$\frac{mv^2}{R} = \bar{F}_{\text{тр.пок.}} \leq \mu N = \mu mg$$

Для того чтобы машина двигалась без скольжения,  $v \leq \sqrt{\mu g R}$ .

Чтобы выйти из заноса, нужно восстановить сцепление колес с дорогой, то есть превратить силу трения скольжения в силу трения покоя.

Законы механики.

Законы механики это:

- Три закона Ньютона;
- Законы, описывающие индивидуальные свойства сил.



## Лекция 4.

### Тело как система материальных точек. Число степеней свободы системы

**Число степеней свободы** – это число независимых координат, которые нужно задать для того, чтобы однозначно определить положение системы.

**Связь** – это ограничение возможных движений материальной точки относительно других материальных точек системы.

Если у нас в системе есть  $N$  материальных точек и  $f$  связей, то общее число степеней свободы может быть найдено по формуле  $3N - f$ .

Уравнение кинематической связи.

**Уравнение кинематической связи** – это уравнение, связывающее друг с другом кинематические характеристики точек (тел) системы (координаты, скорости, ускорения).

Пусть есть два груза, которые расположены на одной горизонтальной прямой и связаны нерастяжимой нитью. Мы тянем их с силой  $\vec{F}$ .

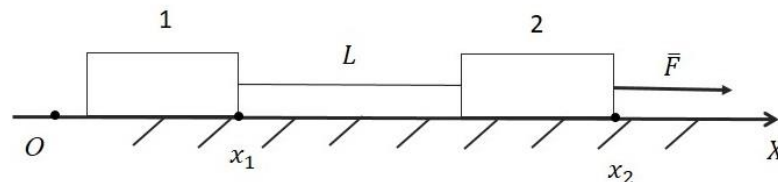


Рисунок 4.1. Два связанных тела

$$x_2 - x_1 = L = \text{const}$$

$$v_2 - v_1 = 0$$

$$a_2 - a_1 = 0$$

Пусть есть палочка, стоящая в углу. Палочка движется так, что ее концы не отрываются от стены и от пола.

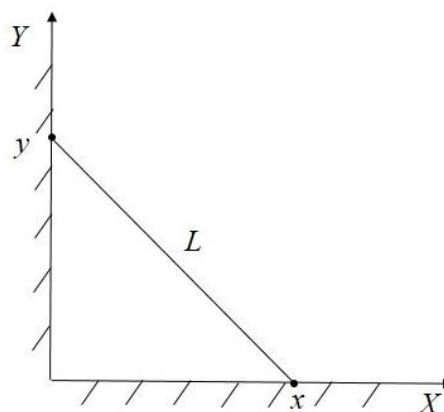


Рисунок 4.2. Палочка в углу

Тогда можно записать уравнения для координат ее концов:

$$x^2 + y^2 = L^2$$

Возьмем производную по времени:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

### Закон измерения импульса системы материальных точек.

**Импульс системы материальных точек** – это векторная сумма импульсов всех материальных точек системы.

$$\bar{P} = \sum m_i \bar{v}_i = \sum \bar{P}_i$$

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  материальных точек. Пусть эти точки могут взаимодействовать между собой (внутренние силы взаимодействия). Пусть на эти точки могут воздействовать внешние тела (внешние силы воздействия).

$$\frac{d\bar{P}_1}{dt} = \bar{F}_1 + \bar{f}_1$$

$\bar{F}_1$  – равнодействующая всех внешних сил на первую материальную точку.

$\bar{f}_1$  – равнодействующая всех внутренних сил на первую материальную точку.

$$\frac{d\bar{P}_2}{dt} = \bar{F}_2 + \bar{f}_2$$

$$\frac{d\bar{P}_n}{dt} = \bar{F}_n + \bar{f}_n$$

$$\frac{d}{dt}(\sum \bar{P}_i) = \sum \bar{F}_i + \sum \bar{f}_i$$

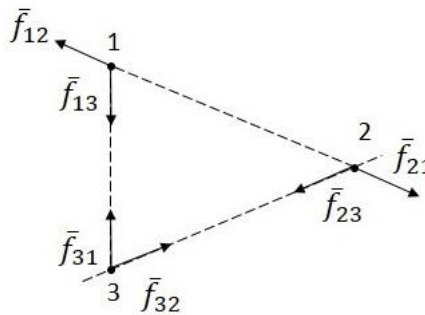


Рисунок 4.3. Система из 3 взаимодействующих точек

$$\bar{f}_{jk} = -\bar{f}_{kj}$$

$$k \neq j$$

$$\sum \bar{f}_i = 0$$

Таким образом:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum \bar{F}_i$$

**Закон изменения импульса системы материальных точек** – скорость изменения импульса системы материальных точек равна равнодействующей всех внешних сил, приложенных к материальным точкам системы.

Рассмотрим два момента времени  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + \Delta t$ . Тогда,

$$\Delta \bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \bar{F}_i) dt$$

$\int_{t_1}^{t_2} (\sum \bar{F}_i) dt$  – импульс равнодействующей всех внешних сил, приложенных к материальным точкам системы.

Изолированная и замкнутая система тел. Закон сохранения импульса системы материальных точек.

**Изолированная система материальных точек** – система, на которую вообще не действуют никакие внешние силы.

**Замкнутая система материальных точек** – система, для которой сумма всех приложенных внешних сил равна нулю.

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum \bar{F}_i = 0 \text{ – система является замкнутой. Тогда, } \bar{P} = const$$

**Закон сохранения импульса системы материальных точек** – импульс системы материальных точек сохраняется неизменным, если система является замкнутой.

Проекция импульса системы материальных точек на некоторое направление сохраняется неизменной, если система является замкнутой в этом направлении.

$$\left( \frac{d\bar{P}}{dt} \right) |_x = (\sum \bar{F}_i) |_x$$
$$\frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow P_x = const$$

### Центр масс. Теорема о движении центра масс.

Пусть у нас имеется система материальных точек с массой  $m_i$ .

$$\bar{R}_{ц.м.} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$$

$\bar{R}_{ц.м.}$  – точка, координаты которой задаются таким образом, называется центром масс.

$$\sum m_i = M$$
$$M \bar{R}_{ц.м.} = \sum m_i \bar{r}_i \quad \frac{d}{dt}$$
$$M \bar{V}_{ц.м.} = \sum m_i \bar{v}_i = \sum \bar{P}_i = \bar{P}$$

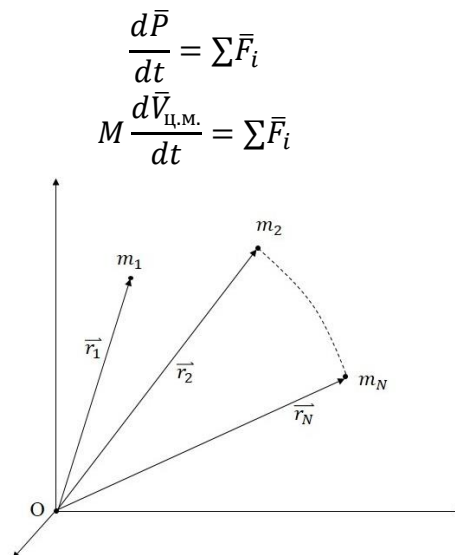


Рисунок 4.4. Система материальных точек

**Теорема о движении центра масс** – центр масс системы материальных точек движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной суммарной массе всей системы, под действием равнодействующей внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы.

$$M \frac{d\vec{V}_{ц.м.}}{dt} = \sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{V}_{ц.м.} = const$$

### Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского

**Реактивная сила** – это сила реакции, возникающая при взаимодействии тела с веществом, выбрасываемым телом или присоединяемым к телу.

**Реактивное движение** – это движение при наличии реактивной силы.

Иван Всеволодович Мещерский «Уравнение движения точки переменной массы в общем случае» (1904).

$$\mu = -\frac{dM}{dt}$$

$M$  – масса тела.

$\frac{dM}{dt}$  – скорость изменения массы.

$\mu$  – расход топлива.

$$\begin{aligned} dM < 0, & \quad \mu > 0 \\ dM > 0, & \quad \mu < 0 \end{aligned}$$

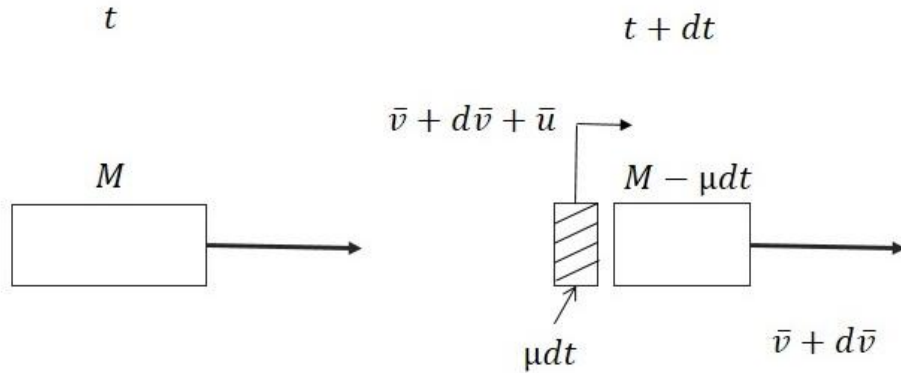


Рисунок 4.5. Реактивная сила

Пусть в момент времени  $t$  летела ракета, и имела массу  $M$ . Прошло время  $dt$ , ракета потеряла часть массы. В результате она разогналась до скорости  $\bar{v} + d\bar{v}$ , для этого она отбросила часть массы  $\mu dt$ .  $\bar{u}$  – скорость истечения газов (определяется относительно ракеты).

$$\begin{aligned} d\bar{P} &= (M - \mu dt)(\bar{v} + d\bar{v}) + \mu dt(\bar{v} + d\bar{v} + \bar{u}) - M\bar{v} = \bar{F} dt \\ M\bar{v} + Md\bar{v} - \mu\bar{v}dt - \mu d\bar{v}dt + \mu\bar{v}dt + \mu d\bar{v}dt + \mu\bar{u}dt - M\bar{v} &= \bar{F} dt \\ Md\bar{v} + \mu\bar{u}dt &= \bar{F} dt \end{aligned} \quad (4)$$

(4)– уравнение Мещерского.

$\bar{F}_p = -\mu\bar{u}$  – реактивная сила.

$$\begin{aligned} M \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{F} + \bar{F}_p \\ M &= M(t) \end{aligned}$$

### Формула Циалковского.

Формула Циалковского позволяет выяснить какую часть массы ракеты нужно сжечь, для того чтобы разогнать ее до заданной скорости. Пусть есть ракета, которая имеет начальную массу  $M_0$ .

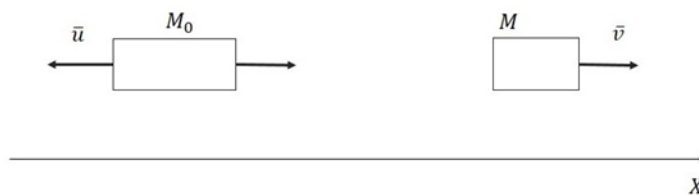


Рисунок 4.6. Ракета с массой  $M_0$

$$\begin{aligned} M \frac{dv}{dt} &= +\mu u = -\frac{dM}{dt} u \\ Mdv &= -udM \\ \frac{dM}{M} &= -\frac{dv}{u} \end{aligned}$$

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = - \int_0^v \frac{dv}{u}$$

$$\ln \frac{M}{M_0} = - \frac{v}{u}$$

$M = M_0 e^{-v/u}$  – формула Циалковского.

Таким образом, масса ракеты при ее разгоне уменьшается экспоненциально.

Представим, что мы хотим разогнать ракету до второй космической скорости.

$v \approx 11,2$  км/с.

$u \approx 3,7$  км/с.

$$\frac{v}{u} \approx 3$$

$$\frac{M}{M_0} \approx \frac{1}{20} (5\%)$$

### Закон сохранения механической энергии.

Пусть есть некоторая точка, которая движется по траектории под действием силы  $\vec{F}$ . Пусть за малое время точка сместилась по траектории.  $d\vec{S}$  – Малое смещение.

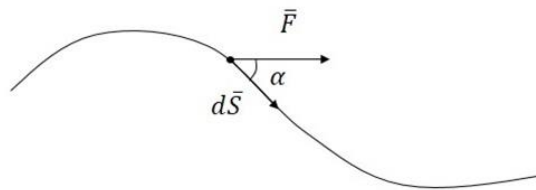


Рисунок 4.7. Траектория точки

$$dA = F * dS * \cos \alpha$$

$$dA = \vec{F} * d\vec{S}$$

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, dA > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi, dA < 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, dA = 0$$

$$A = \int \vec{F} d\vec{S}$$

**Работа силы** при бесконечно малом перемещении называется произведение модуля силы на модуль перемещения точки приложения силы и на косинус угла между векторами силы и перемещения.

Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема о кинетической энергии.

**Кинетическая энергия материальной точки** – произведение массы материальной точки на квадрат ее скорости, деленное пополам.

Является характеристикой механического движения безотносительно к его направлению.

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad T_{\text{сис}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Пусть есть материальная точка, которая движется под действием равнодействующей некоторых сил.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{dt} &= \bar{F} \\ d\bar{S} &= \bar{v} dt \\ \bar{P} &= m\bar{v} \\ dA &= \bar{F} d\bar{S} = \frac{d\bar{P}}{dt} \bar{v} dt = \bar{v} d\bar{P} = m\bar{v} d\bar{v} \\ \bar{v}^2 &= v^2 |d \dots \\ 2\bar{v} d\bar{v} &= 2v dv \\ dA &= mv dv \\ A &= \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \end{aligned}$$

$A = T_2 - T_1$  – Теорема о кинетической энергии.

**Теорема о кинетической энергии** – работа всех сил (внутренних и внешних), действующих на систему материальных точек, равна изменению кинетической энергии этой системы.

$$\begin{aligned} A_i &= T_{2i} - T_{1i} \\ \sum A_i &= \sum T_{2i} - \sum T_{1i} \end{aligned}$$

Следовательно, теорема справедлива и для систем материальных точек.

**Кинетическая энергия** характеризует способность движущегося тела к совершению работы.

Консервативные силы. Потенциальная энергия системы материальных точек. Связь консервативных сил с потенциальной энергией.

Пусть есть материальная точка 1. Перемещаем ее в разные точки пространства с конечной точкой 2. Если мы начнем вычислять работы, которые совершают разные силы при перемещении материальной точки, окажется что для разных сил эти работы ведут себя по разному.

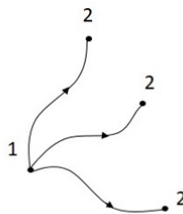


Рисунок 4.8 Перемещение из точки 1 в точку 2

## Лекция 5

### Закон сохранения механической энергии. Продолжение

Пусть у нас есть материальная точка  $m$  в положении 1. Мы выберем в пространстве точку в положении 2 и будем перемещать точку 1 в точку 2 по разным траекториям. При каждом таком перемещении будем вычислять работу.



Рисунок 5.1. - Перемещение из точки 1 в точку 2 (консервативно)

**Консервативные силы** – это силы, работа которых при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 не зависит от траектории, по которой совершается перемещение, а зависит только от начального и конечного положений 1 и 2.

**Гироскопические силы** – это силы, всегда направленные перпендикулярно скорости материальной точки и по этой причине не совершающие работы при ее перемещении.

**Диссипативные силы** – это все силы, не являющиеся консервативными и гироскопическими. Они, как правило, превращают механическую энергию системы во внутреннюю энергию (то есть в теплоту).

Пусть при перемещении точки из положения 1 в положение 2 на нее действует некоторая консервативная сила. Имеется траектория перемещения I, траектория перемещения II.

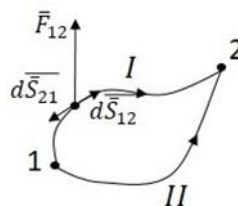


Рисунок 5.2. Перемещение из точки 1 в точку 2

$$A_{12}^I = A_{12}^{II}$$

$$A_{12}^I = -A_{21}^I - \text{докажем.}$$

$$A_{12}^I = \int \vec{F}_{12} d\vec{S}_{12}$$



$$A_{21}^I = \int \bar{F}_{21} d\bar{S}_{21} = \int \bar{F}_{21} d\bar{S}_{21}$$

$$d\bar{S}_{12} = -d\bar{S}_{21}$$

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$$

$$\bar{F}_{12} = \bar{F}_{21}$$

$$A_{21}^I = - \int \bar{F}_{12} d\bar{S}_{12} = -A_{12}^I - \text{ч.т.д.}$$

Представим, что точка переместилась из положения 1 в положение 2 по траектории I, а обратно вернулась по траектории II.

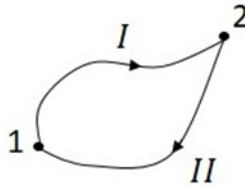


Рисунок 5.4. Перемещение из точки 1 в точку 2 и обратно

$$A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = A_{12}^I + A_{21}^{II} = -A_{21}^I + A_{21}^{II} = 0$$

Т.е. работа, которую совершает консервативная сила при обходе по любому замкнутому контуру равна нулю. Гироскопические силы этому определению тоже удовлетворяют.

**Потенциальная энергия системы материальной точки** – это работа, которую совершают консервативные силы при перемещении материальной точки из данного положения в положение, принятое за начало отсчета потенциальной энергии (в нем потенциальная энергия принимается равной нулю).

$\int_1^2 \bar{F} d\bar{r} = U_1(x, y, z) - U_2(x, y, z)$  – Определяет разность потенциальных энергий материальной точки в положениях 1 и 2.

Если  $U_2 = 0$ , тогда  $U_M = \int_M^0 \bar{F} d\bar{r}$ .

**Потенциальная энергия системы материальных точек** – это работа, которую должны совершить внешние силы против консервативных сил для того, чтобы переместить все материальные точки системы из положения, принятого за начало отсчета потенциальной энергии, в текущее положение.

**Потенциальная энергия** характеризует способность системы тел совершать работу при переходе из одного состояния в другое.

$$\int_1^2 \bar{F} d\bar{r} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

$$\bar{F} d\bar{r} = -dU(x, y, z)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -\bar{F} d\bar{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Процедура нахождения вектора по скалярной функции называется операцией вычисления **градиента**.

$$\vec{F} = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x}; -\frac{\partial U}{\partial y}; -\frac{\partial U}{\partial z} \right\} = -grad U$$

$\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$  – оператор «набла».

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\} U = -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

Зная одну скалярную функцию по потенциальной энергии можно восстановить вектор силы, который действует в каждой точке пространства, путем вычисления соответствующих частных производных взятых с обратным знаком.

Выражения для потенциальной энергии различных консервативных силовых полей.

Пусть есть некоторая пружинка, при растяжении которой возникает возвращающая сила упругости. Предположим, что она подчиняется закону Гука.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

$$U(\vec{r} = 0) = 0$$

$U(r) = \int_r^0 (-k\vec{r})d\vec{r} = -\int_r^0 krdr = \frac{kr^2}{2}$  – **потенциальная энергия, запасаемая деформируемой пружиной.**

Пусть мы находимся на земле. Выберем ось  $X$  направленную вертикально вверх. Пусть есть точка  $m$ , на которую действует сила тяжести  $m\vec{g}$ .

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$U(x = 0) = 0$$

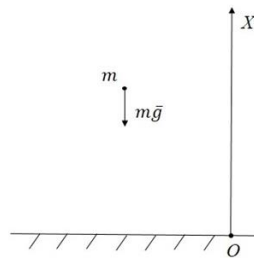


Рисунок 5.5. – Сила тяжести

$$U(x) = \int_x^0 m\vec{g}d\vec{r}$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}_x$$

$$\vec{g}d\vec{r} = -g\vec{e}_xd\vec{r} = -gdx$$

$U(x) = \int_x^0 -(mg)dx = mgx$  – **потенциальная энергия материальной точки в однородном поле силы тяжести земли.**

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$U(\infty) = 0$$

$U(r) = \int_r^\infty \left(-\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}\right) d\vec{r} = -\int_r^\infty \frac{Gm_1 m_2}{r^2} dr = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$  – **потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов.**

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}; U = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Все центральные силы являются консервативными.

### **Законы изменения и сохранения механической энергии. Равновесие консервативной механической системы.**

Рассмотрим некоторую механическую систему и запишем для нее теорему о кинетической энергии.

$$T_2 - T_1 = A^{\text{всех сил}} = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внут.конс.}} + A^{\text{внут.дисс}}$$

$$A^{\text{внут.конс.}} = U_1 - U_2$$

$$T_2 - T_1 = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внут.дисс}} + U_1 - U_2$$

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внут.дисс}}$$

**Механическая энергия системы** – сумма кинетической и потенциальной энергии всех тел системы.

$$E = T + U$$

$$E_2 - E_1 = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внут.дисс}}$$

**Закон изменения механической энергии системы** – изменение механической энергии системы равно сумме работ, совершаемых внешними силами и внутренними диссипативными силами.

$$E_2 - E_1 = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внут.дисс}} = 0$$

$$E_2 = E_1$$

**Закон сохранения механической энергии системы** – механическая энергия системы сохраняется неизменной, если сумма работ внешних сил и работ внутренних диссипативных сил равна нулю.

**Частный случай:** Механическая энергия системы сохраняется неизменной, если система является изолированной и в ней отсутствуют внутренние диссипативные силы.

**Важное утверждение:** В состоянии устойчивого механического равновесия потенциальная энергия консервативной механической системы имеет локальный минимум.

Рассмотрим случай одной единственной материальной точки с одной степенью свободы. Положение этой точки можно задать одной координатой. Материальная точка движется по траектории в поле консервативных сил. Характеризуем точку энергией  $U(x)$ . На эту точку будет действовать сила  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ .

Если точка находится в положении равновесия, то  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$   
 $-\frac{\partial U}{\partial x} = 0$  – условие локального экстремума.

Таким образом, положение равновесия точки с одной степенью свободы соответствует локальному экстремуму потенциальной энергии.

### Соударения тел. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары. Законы сохранения при соударениях тел.

Рассмотрим два произвольных тела, которые летели в пространстве и столкнулись в точке. Проведем касательную и восстановим нормаль (линию удара). Представим, что центры масс лежат на линии удара, то такой удар называется **центральной**. Если скорости центров масс тел лежат на линии удара, то такой удар называется **лобовым**.

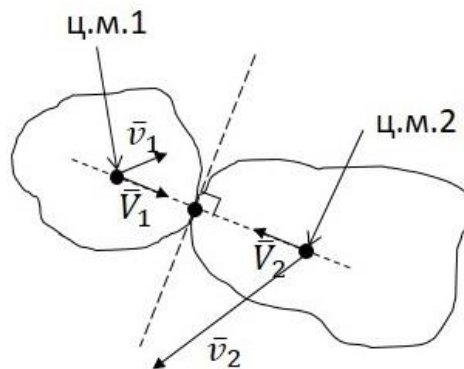


Рисунок 5.6. Иллюстрация столкновения двух тел.

**Линия удара** задается нормально в точке соприкосновения соударяющихся тел.

**Центральный удар** – это удар, при котором линия удара проходит через центры масс соударяющихся тел.

**Лобовой удар** – это удар, при котором векторы скоростей центров масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

**Абсолютно упругий удар** – это удар, в результате которого сохраняется неизменной сумма кинетических энергий соударяющихся тел.

**Абсолютно неупругий удар** – это удар, в результате которого соударяющиеся тела приобретают одинаковую скорость.

**Частично упругий удар** – это удар, в результате которого часть механической энергии соударяющихся тел переходит во внутреннюю энергию, а соударяющиеся тела приобретают разные скорости.

## Лекция 6.

### Неинерциальные системы отсчета (НИСО). Построение механики в НИСО.

**Неинерциальные системы отсчета** – это системы отсчета, в которых не выполняется закон инерции Галилея, то есть это системы отсчета, которые движутся относительно инерциальных систем отсчета с ускорением, либо вращаются относительно них.

Вектор угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

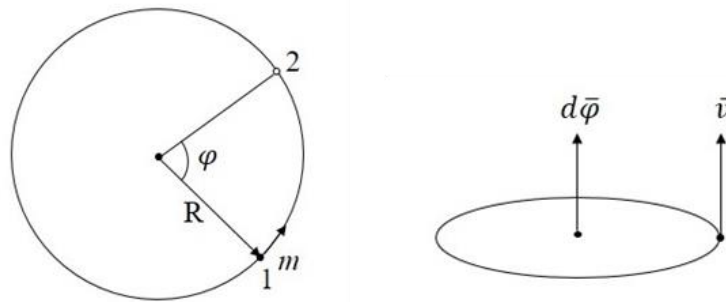


Рисунок 6.1. Движение в НИСО

Введем вектор бесконечно малого угла поворота  $d\vec{\varphi}$ . Договариваются, что вектор направлен вдоль оси вращения, причем направление определяется правилом буравчика.

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  – такой вектор характеризует не только скорость изменения угловой координаты, но и направление вращения.

Рассмотрим две системы отсчета К (инерциальная) и К' (неинерциальная).

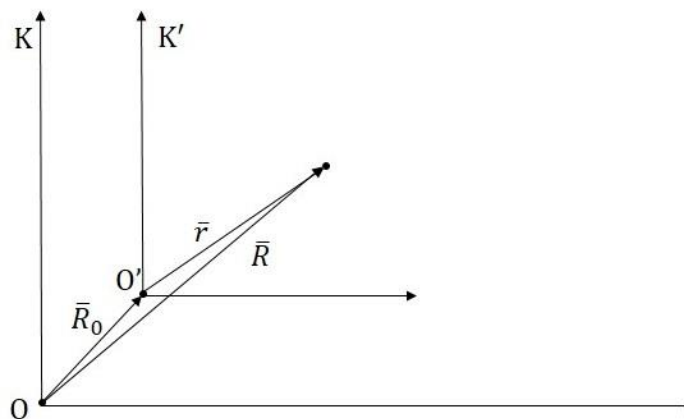


Рисунок 6.2. ИСО К и НИСО К'

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{r}$$

Правило дифференцирования векторов, заданных во вращающейся системе отсчета.

$\bar{A} = A_{x'}\bar{i}' + A_{y'}\bar{j}' + A_{z'}\bar{k}'$  – проекции вектора  $\bar{A}$  на оси в системе  $K'$ .

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{A}}{dt} &= \frac{dA_{x'}}{dt}\bar{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt}\bar{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt}\bar{k}' + A_{x'}\frac{d\bar{i}'}{dt} + A_{y'}\frac{d\bar{j}'}{dt} + A_{z'}\frac{d\bar{k}'}{dt} \\ \frac{d'\bar{A}}{dt} &= \frac{dA_{x'}}{dt}\bar{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt}\bar{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt}\bar{k}' \\ |d\bar{i}'| &= d\varphi|\bar{i}'| \\ d\bar{i}' &= [d\bar{\varphi} * \bar{i}'] \\ \frac{d\bar{i}'}{dt} &= \left[\frac{d\bar{\varphi}}{dt} * \bar{i}'\right]\end{aligned}$$

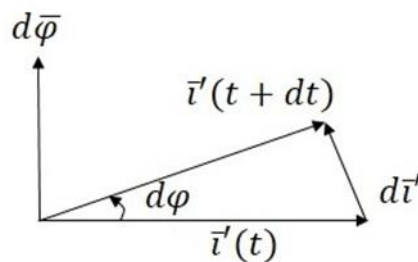


Рисунок 6.3. Расположение векторов

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}'}{dt} &= [\bar{\omega} * \bar{i}']; \quad \frac{d\bar{j}'}{dt} = [\bar{\omega} * \bar{j}']; \quad \frac{d\bar{k}'}{dt} = [\bar{\omega} * \bar{k}'] \\ \frac{d\bar{A}}{dt} &= \frac{d'\bar{A}}{dt} + A_{x'}[\bar{\omega} * \bar{i}'] + A_{y'}[\bar{\omega} * \bar{j}'] + A_{z'}[\bar{\omega} * \bar{k}'] = \\ &= \frac{d'\bar{A}}{dt} + [\bar{\omega} * (A_{x'}\bar{i}' + A_{y'}\bar{j}' + A_{z'}\bar{k}')] =\end{aligned}$$

$\frac{d'\bar{A}}{dt} + [\bar{\omega} * \bar{A}] = \frac{d\bar{A}}{dt}$  – формула, которая позволяет дифференцировать по времени вектор  $\bar{A}$ , заданный относительно вращающейся системы  $K'$ .

### Связь между скоростями при переходе в НИСО.

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{R}_0 + \bar{r} \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= \frac{d\bar{R}_0}{dt} + \frac{d'\bar{r}}{dt} + [\bar{\omega} * \bar{r}]\end{aligned}$$

$\bar{v}_{\text{абс}} = \frac{d\bar{R}}{dt}$  – абсолютная скорость, определяет изменения радиус-вектора  $\bar{R}$  относительно системы  $K$ .

$\bar{v}_{\text{отн}} = \frac{d'\bar{r}}{dt}$  – относительная скорость, которую мы наблюдаем из системы  $K'$ .

$\vec{v}_{\text{пер}} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + [\vec{\omega} * \vec{r}]$  – переносная скорость, смещение точки  $O'$  относительно точки  $O$ , вращение системы  $K'$  относительно системы  $K$ .

$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}$  – Правило преобразования скоростей при переходе в НИСО.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d'\vec{r}}{dt} + [\vec{\omega} * \vec{r}] \\ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} &= \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} + \frac{d'^2\vec{r}}{dt^2} + \left[\vec{\omega} * \frac{d'\vec{r}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} * \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} * \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \\ &= \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} + \frac{d'^2\vec{r}}{dt^2} + \left[\vec{\omega} * \frac{d'\vec{r}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} * \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} * \frac{d'\vec{r}}{dt}\right] + [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}]] = \\ &= \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} + \frac{d'^2\vec{r}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} * \vec{r}\right] + [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}]] + 2[\vec{\omega} * \vec{v}_{\text{отн}}]\end{aligned}$$

$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$  – ускорение, определенное относительно системы  $K$ .

$\vec{a}_{\text{отн}} = \frac{d'^2\vec{r}}{dt^2}$  – ускорение, определенное относительно системы  $K'$ .

$\vec{a}_{\text{пер}} = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} * \vec{r}\right] + [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}]]$  – переносное ускорение.

$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} * \vec{v}_{\text{отн}}]$  – ускорение Кориолиса.

$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}$  – Правило преобразования ускорений.

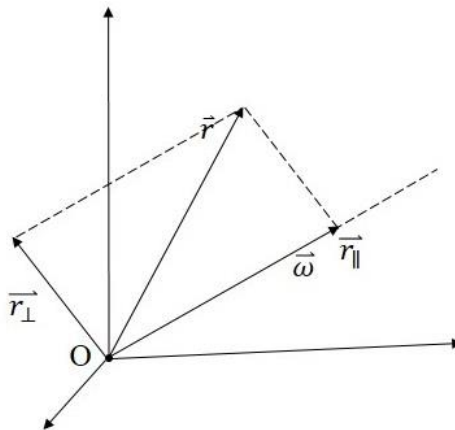


Рисунок 6.4. Разложение вектора  $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$$

$$\begin{aligned}[\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}]] &= [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * (\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel})]] = [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}_{\perp}]] + [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}_{\parallel}]] = \\ &= [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega} \vec{r}_{\perp}) - \vec{r}_{\perp}(\vec{\omega} \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}\end{aligned}$$

$\vec{a}_{\text{ц.с.}} = [\vec{\omega} * [\vec{\omega} * \vec{r}]] = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}$  – центростремительное ускорение.

$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} * \vec{v}_{\text{отн}}]$  – ускорение Кориолиса.

Гаспар-Гюстав де Кориолис (1792-1843) в 1833 описал Кориолисову силу инерции.

## Второй закон Ньютона в НИСО. Переносная и кориолисова силы инерции.

$$m\bar{a}_{abc} = \bar{F}$$

$$m(\bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}) = \bar{F}$$

$$m\bar{a}_{отн} = \bar{F} - m\bar{a}_{пер} - m\bar{a}_{кор}$$

$$\bar{F}_{пер} = -m\bar{a}_{пер}$$

$$\bar{F}_{кор} = -m\bar{a}_{кор}$$

$$m\bar{a}_{отн} = \bar{F} + \bar{F}_{пер} + \bar{F}_{кор} - \text{Второй закон Ньютона относительно НИСО}$$

остается справедливым, если в правую часть помимо суммы всех сил добавить переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.

Скорость изменения импульса равна сумме всех истинных сил и сумме всех сил инерции.

$$\bar{F}_{пер} = -m\bar{a}_{пер} = -m \frac{d^2 \bar{R}_0}{dt^2} - m \left[ \frac{d\bar{\omega}}{dt} * \bar{r} \right] + m\omega^2 \bar{r}_\perp$$

$$\bar{F}_{кор} = -m\bar{a}_{кор} = 2m[\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}]$$

$$\bar{F}_{ц.б.} = m\omega^2 \bar{r}_\perp - \text{центробежная сила.}$$

Поскольку силы инерции вводятся в рассмотрение принудительно, эти силы считаются фиктивными силами.



## Лекция 7.

### Переносная и кориолисова силы инерции. Продолжение

**Кориолисова сила** – это сила, которая действует на материальную точку, которая движется относительно НИСО. Сила направлена перпендикулярно вектору относительной скорости.

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}_{\text{отн}} * \vec{\omega}]$$

Примеры проявления сил инерции на Земле. Маятник Фуко.

Основные проявления сил инерции на Земле:

- 1) Зависимость ускорения свободного падения от широты  $\varphi$  (изменение веса тел и отклонение отвеса от направления на центр Земли):

$$\Delta g/g \sim \omega^2 \cos^2 \varphi, \quad \Delta g/g \approx 0,35\%.$$

$$\alpha_{\text{откл}} \sim \omega^2 \sin 2\varphi, \quad \alpha_{\text{max}} \approx 0,1^\circ.$$

- 2) Отклонение свободно падающих тел к востоку от линии отвеса:  $\Delta S_{\text{вост}} \sim h^{3/2}$ .

При  $h = 100$  м отклонение  $\Delta S_{\text{вост}} \approx 1$  см.

При  $h = 1000$  м отклонение  $\Delta S_{\text{вост}} \approx 40$  см.

Представим, что на поверхности Земли стоит башня. Из-за того, что Земля вращается, основание башни вращается вместе с Землей со скоростью  $\omega R$ . Тогда верхняя точка движется в ту же сторону со скоростью  $\omega(R + H)$ . Если бросить камень с вершины башни, то он, в соответствии с законом инерции Галилея, относительно внешней инерциальной системы отсчета будет лететь вперед со скоростью  $\omega(R + H)$ .

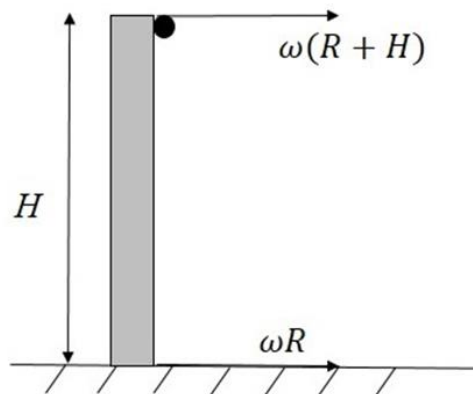


Рисунок 7.1. Иллюстрация примера проявления силы инерции на Земле.

$$\Delta V = \omega H$$

$$\Delta S \cong \Delta V * t_{\text{пад}} = \omega H \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

- 3) Подмывание берегов крупными реками. В северном полушарии всегда подмывается правый берег, а в южном – левый берег.
- 4) Закручивание воздушных масс в циклонах и воды в течениях.

Маятник Фуко (1851 г.)

**Маятник Фуко** – это массивное тело, обычно шар. Он подвешивается на прочном тросике и сверху крепится к потолку с помощью подвеса, который позволяет маятнику свободно качаться во всех возможных вертикальных плоскостях. Маятник отпускают, он начинает качаться. Плоскость качания маятника в пространстве должна сохранять свое положение неизменным. Если начать вращать систему отсчета (макет Земли), в которой маятник находится, то относительно инерциальной системы отсчета плоскость качания маятника сохраняется, а относительно «Земли» - плоскость качания маятника меняется.

Представим, что маятник Фуко установлен на северном полюсе Земли.

$$m\bar{a}_{\text{отн}} = m\bar{g} + 2m[\bar{v}_{\text{отн}} * \bar{\omega}] + \bar{F}$$

Представим, что мы находимся на угловой широте  $\varphi$ .

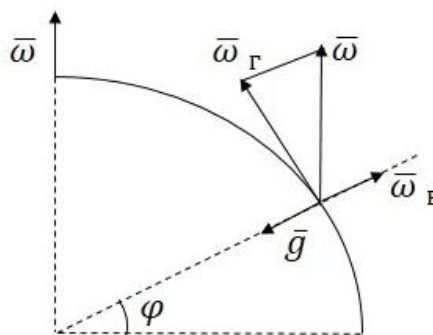


Рисунок 7.2. Маятник Фуко.

$$\bar{\omega}_\Gamma = \bar{\omega}_\parallel + \bar{\omega}_\perp$$

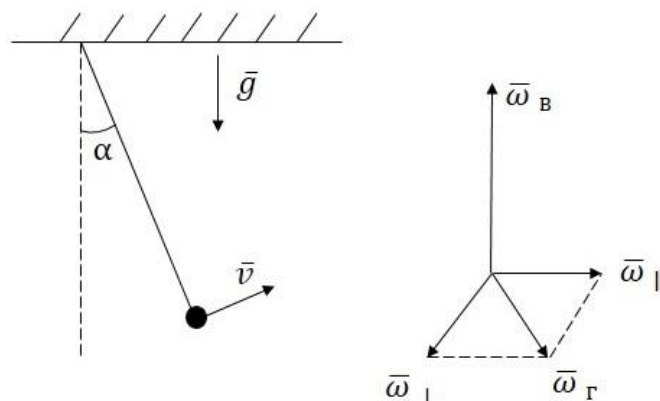


Рисунок 7.3. Расположение векторов в пространстве

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \bar{\omega}_B + \bar{\omega}_{\parallel} + \bar{\omega}_{\perp} \\ m\bar{a}_{отн} &= m\bar{g} + 2m[\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}_B] + 2m[\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}_{\parallel}] + 2m[\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}_{\perp}] + \bar{F} \\ 2m[\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}_B] &\sim \cos \alpha \\ [\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}_{\parallel}] &\sim \sin \alpha \\ m\bar{a}_{отн} &\approx m\bar{g} + 2m[\bar{v}_{отн} * \bar{\omega}_B] + \bar{F} \\ \omega_B &= \omega \sin \varphi\end{aligned}$$

### Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета.

**Законы сохранения в НИСО** – Импульс системы материальных точек, определенный относительно НИСО, сохраняется неизменным, если сумма внешних сил, действующих на материальные точки системы, компенсирует сумму сил инерции.

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{P}}{dt} &= \sum \bar{F}^{внеш} + \sum \bar{F}^{ин} = 0 \\ E_2 - E_1 &= A^{внеш} + A^{внутр.дисс} + A^{ин} = 0\end{aligned}$$

**Закон сохранения в механический энергии НИСО** – механическая энергия системы, определенная относительно НИСО, сохраняется неизменной, если равна нулю сумма работ внешних сил, внутренних диссипативных сил и сил инерции.

В НИСО (как и в ИСО) выполняется закон сохранения момента импульса.

**Принцип эквивалентности Эйнштейна** – Невозможно никакими экспериментами отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

ИЛИ

**Принцип эквивалентности Эйнштейна** – Все физические явления в гравитационном поле происходят так же, как и в поле сил инерции, если одинаковы напряженности этих полей в соответствующих точках пространства и одинаковы начальные условия.

### Специальная теория относительности.

Экспериментальные и идейные основания специальной теории относительности.

Экспериментальное подтверждение конечности скорости света (1676 г.) Датский астроном Олаф Кристенсен Рёмер (1644-1710).

**Наблюдение аберрации звезд (1727 г.)** – Английский астроном Джеймс Брэдли (1692-1762).

Утверждение идеи о волновой природе света.

Объяснение дифракции света на основе волновой теории (1818 г.) – Французский физик Огюстен Жан Френель (1788-1827).

**Система уравнений электромагнитного поля (1864 г.)** – Британский физик и математик Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879).

**Мировой эфир** – гипотетическая среда, в которой как ранее предполагалось, распространяются электромагнитные волны.

**«Проблема» системы уравнений Максвелла** – Уравнения неинвариантны относительно преобразований Галилея, то есть уравнения меняют вид при переходе из одной ИСО в другую.

**Опыт Физо (1851 г.)** – Французский физик Арман Ипполит Луи Физо (1819-1896). Показал, что эфир частично увлекается потоком жидкости, причем разные жидкости увлекают эфир по разному.

**Опыт Эйри (1871-1872 гг.)** – Английский математик и астроном Джордж Биддель Эйри (1801-1892). Также показал, что эфир частично увлекается веществом, но коэффициент увлечения получился не такой, как в опыте Физо.

Опыты Майкельсона и Морли.

**Попытка обнаружения эфирного ветра (1881 г.)** – Американский физик Альберт Абрахам Майкельсон (1852-1931). Построил интерферометр Майкельсона.

**В 1887 г. Майкельсон повторил опыт совместно с Э. Морли** – Американский физик и химик Эдвард Уильямс Морли (1838-1923).

Экспериментальные и теоретические изыскания Герца.

**Успешные работы по обнаружению электромагнитных волн (1885-1889 гг.)** – Немецкий физик Генрих Рудольф Герц (1857-1894). Пытался «подправить» уравнения Максвелла, чтобы сделать их инвариантными относительно преобразований Галилея.

К концу XIX века сложилась следующая противоречивая ситуация:

- 1) Уравнения Максвелла предсказывали существование электромагнитных волн, эти волны были открыты, распространялись со скоростью света.
- 2) Уравнения Максвелла были не инвариантны относительно преобразований Галилея, и это требовало введения специальной среды – «мирового эфира».
- 3) Движение тел относительно эфира обнаружить не удавалось.

## Лекция 8.

### Идейный вклад Х. Лоренца, Д. Фицджеральда, Д. Лармора, А. Пуанкаре.

Нидерландский физик Хендрик Антон Лоренц (1853-1928)

**1892 г.** – создал электронную теорию (свой вариант электродинамики), почти объяснил опыт Физо, но опыт Майкельсона объяснить не смог. Предложил ввести для разных систем отсчета «местное время»:

$$t' = t - Vx/c^2.$$

Гипотеза о сокращении движущихся тел.

**В 1892 г.** Лоренц и в **1893 г.** независимо от него Ирландский физик Джордж Френсис Фицджеральд (1851-1901) предположили, что опыт Майкельсона объясняется сокращением длин движущихся тел (в направлении движения):

$$l = l_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}$$

Кто открыл преобразования Лоренца?

**1900 г.** – Ирландский физик Джозеф Лармор (1857-1942) предложил **преобразования координат и времени**, которые делали уравнения Максвелла инвариантными относительно смены ИСО (**в 1904 г.** их переоткрыл Лоренц).

Анри Пуанкаре – создатель математических основ теории относительности.

Французский математик, механик, физик, астроном, философ Жюль Анри Пуанкаре (1854-1912).

Идейный вклад Анри Пуанкаре:

- Дал преобразованиям имя Лоренца;
- Сформулировал принцип относительности для электромагнитных явлений (1895 г.);
- Обратил внимание на условный характер понятия одновременности;
- Сформулировал всеобщий принцип относительности;
- Нашел инвариант преобразований Лоренца;
- Предложил релятивистское обобщение теории гравитации.

Историческая работа А. Эйнштейна.

**Сентябрь 1905 г.** – Альберт Эйнштейн (1879-1955) опубликовал работу «К электродинамике движущихся тел».

Постулаты Эйнштейна:

- 1) **Принцип относительности** – Законы по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух координатных систем, находящихся относительно друг друга в равномерном поступательном движении, эти изменения состояния относятся.

- 2) **Постулат независимости скорости света от скорости источника** – Каждый луч света движется с определенной скоростью  $c$  независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом.

Баллистическая гипотеза.

Швейцарский физик-теоретик и математик Вальтер Ритц (1878-1909). Считал, что скорость света складывается со скоростью источника подобно тому, как складывается скорость снаряда, вылетающего из артиллерийского орудия, складывается со скоростью платформы. Экспериментально не подтверждена.

### Преобразования Лоренца.

Вывод преобразований Лоренца. При их выводе используются:

- Два постулата Эйнштейна;
- Однородность и изотропность пространства;
- Однородность времени;
- Требование перехода искомых преобразований в преобразования Галилея при  $V \ll c$ .

Процедура синхронизации часов.

- 1) Пусть у нас имеются две точки  $A$  и  $B$ . В точке  $B$  стоит зеркало, а в точке  $A$  – источник света. Пусть в момент времени  $t_1^A$  по часам стоящим в точке  $A$  произошла кратковременная световая вспышка, и свет пошел в сторону зеркала, отразился от него и пришел обратно в точку  $A$  в момент времени  $t_2^A$ . Утверждается, что когда в точке  $A$  будет принят отраженный от зеркала сигнал, в точке  $B$  можно выставить время  $t_B = \frac{t_1^A + t_2^A}{2}$ .

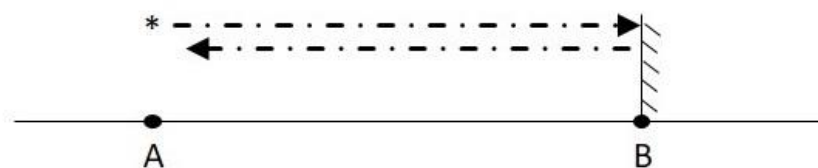


Рисунок 8.1. Иллюстрация примера синхронизации часов.

- 2) Возьмем две точки  $A$  и  $B$ . Разделим отрезок  $AB$  по середине и произведем в этой точке световую вспышку. Запустим часы в точках  $A$  и  $B$  в тот момент, когда до них дойдет световая вспышка.

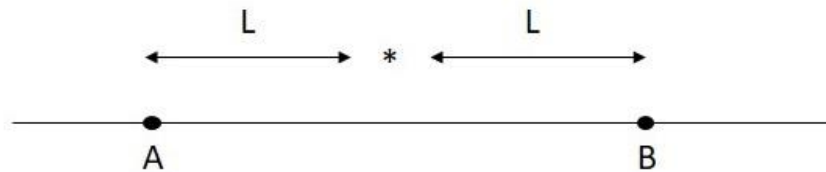


Рисунок 8.2. Иллюстрация примера синхронизации часов.

Рассмотрим две системы отсчета  $K$  и  $K'$ . Система  $K$  – неподвижна. Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Будем считать, что оси  $X$  и  $X'$  совпадают. Будем считать, что в начальный момент времени (когда были запущены часы) – точки  $O$  и  $O'$  совпадали, а оси  $Y$  и  $Y'$  и  $Z$  и  $Z'$  сонаправлены. Все часы системы  $K$  синхронизованы между собой, все часы системы  $K'$  синхронизованы между собой. Представим, что в момент времени  $t=t'=0$  в начале координат произошла световая вспышка.

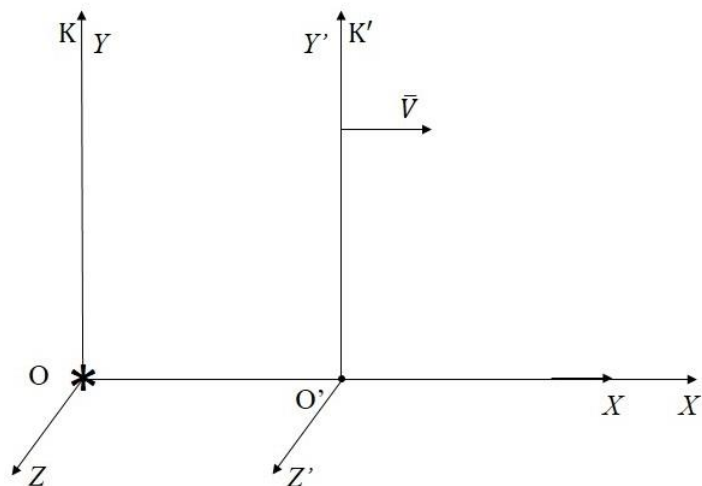


Рисунок 8.3. Две системы отсчета  $K$  и  $K'$

$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$  – уравнение сферы.

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$  – уравнение поверхности, до которой дойдет свет.

Преобразования должны быть линейными.

Преобразования не должны содержать чужих координат.

Преобразования не должны содержать времени.

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad \gamma \rightarrow 1, \quad v \ll c$$

$$y' = py$$

$$z' = pz$$

$$t' = g(t - nx), \quad g \rightarrow 1, \quad n \rightarrow 0, \quad v \ll c$$

$$\gamma^2(x - Vt)^2 + p^2y^2 + p^2z^2 = c^2g^2(t - nx)^2$$

$$c^2g^2n^2x^2 - 2\gamma^2Vxt + \gamma^2V^2t^2 + p^2y^2 + p^2z^2 = c^2g^2t^2 - 2c^2g^2ntx + c^2g^2n^2x^2$$

$$\gamma^2 - (c^2 g^2 n^2) x^2 + 2tx(c^2 g^2 n - \gamma^2 V) + p^2 y^2 + p^2 z^2 = (c^2 g^2 - \gamma^2 V^2) t^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2}$$

$$\gamma^2 - c^2 g^2 n^2 = 1$$

$$c^2 g^2 n^2 - \gamma^2 V = 0$$

$$p = 1$$

$$c^2 g^2 - \gamma^2 V^2 = c^2$$

$$\gamma = g = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 c^2}}$$

$$n = \frac{V}{c^2}$$

Прямые преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2 c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2 c^2}}$$

Обратные преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' - Vt'}{\sqrt{1 - V^2 c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' - Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2 c^2}}$$

### Следствия преобразований Лоренца.

**Сокращение длин движущихся отрезков.** Пусть стержень покоится относительно системы  $K'$  и имеет длину  $L_0$ .

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

Измерим координаты  $x_1$  и  $x_2$  в фиксированный момент времени  $t_\Phi$ .

$$x_1' = \gamma(x_1 - Vt_\Phi)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - Vt_\Phi)$$

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$x_2' - x_1' = L_0$$

$$x_2 - x_1 = L$$



$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 = \sqrt{1 - \beta^2} L_0$$

$$\frac{V^2}{c^2} = \beta^2$$

**Относительность одновременности.** Если в какой-либо системе отсчета два события произошли одновременно, то в другой системе отсчета они могут происходить неодновременно.

Пусть в системе  $K$  произошли два события в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  в момент времени  $t_0$ . В какие моменты времени эти события произойдут в системе  $K'$ ?

$$t'_1 = \gamma(t_1 - Vx_1/c^2)$$

$$t'_2 = \gamma(t_2 - Vx_2/c^2)$$

$$t_1 = t_0$$

$$t_2 = t_0$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow t'_1 < t'_2$$

**Замедление темпа хода движущихся часов.**

Пусть в системе  $K'$  имеются часы, которые покоятся относительно данной системы отсчета и имеют фиксированные координаты  $X'_\phi$ . Мы по этим часам определяем два момента времени  $t'_1$  и  $t'_2$ .

$K$ :

$$t_1 = \gamma(t'_1 + VX'_\phi/c^2)$$

$$t_2 = \gamma(t'_2 + VX'_\phi/c^2)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

$$t_2 - t_1 = \tau$$

$$t'_2 - t'_1 = \tau_0$$

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Наиболее известные парадоксы теории относительности.

**Парадокс «шеста и сарая».**

Представим, что в чистом поле построен сарай, у него в передней и задней стенке имеются двери. Сарай имеет длину  $L$ . Есть шест, который в два раза длиннее сарая. Если шест засунуть в сарай, то он в него не поместится. Попробуем его поместить туда, для этого разгоним шест до очень большой скорости вдоль него самого. При этом будет наблюдаться Лоренцево сокращение длин отрезков. Найдем такую скорость, чтобы шест сократился в два раза. И чтобы убедиться, что шест поместился закроем одновременно двери сарая, когда шест будет внутри.

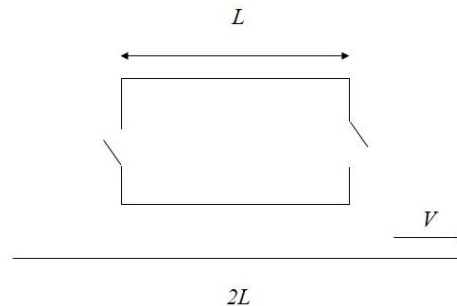


Рисунок 8.4. Иллюстрация парадокса «шеста и сарая».

Посмотрим, как это выглядит с точки зрения наблюдателя, сидящего на шесте. В системе отсчета шеста шест покоится, а сарай движется. При этом наблюдается Лоренцевское сокращение сарая, и сарай уменьшится в два раза и станет меньше шеста в четыре раза.

Объяснение парадокса – одновременность является относительной. В исходной системе отсчета сокращался стержень, чтобы в этом убедиться, мы одновременно закрывали двери сарая. В системе отсчета шеста двери будут закрываться неодновременно.

#### **Парадокс близнецов.**

Представим, что родились и выросли два брата близнеца. Один стал космонавтом, а другой – домоседом. Брат-космонавт сел в ракету, улетел в космическое путешествие и летал в космосе с околосветовой скоростью в течение нескольких лет по часам установленным на космическом корабле. Поскольку наблюдается замедление темпа хода движущихся часов, когда космонавт вернется на землю, он должен обнаружить, что брат-близнец постарел, т.е. стал старше него.

Если посмотреть с точки зрения космического корабля, относительно космонавта, брат-домосед вместе с Земным шаром летал в космическом пространстве с околосветовой скоростью. Поэтому, когда они встретились, должно получиться, что старше будет брат-космонавт.

Если все инерциальные системы отсчета равноправны, то возраст братьев будет одинаковым.

Объяснение парадокса – Брат-космонавт, перед тем как летать в космосе, должен сначала разогнаться до этой скорости. Значит, в течение какого-то времени, он будет двигаться с ускорением и его система не будет инерциальной. Для того, чтобы вернуться обратно, ему нужно тормозить и его система отсчета тоже не будет инерциальной. Эффект изменения темпа хода часов появляется, когда космонавт разгоняется, и когда замедляется. Можно ли объективно отличить систему отсчета домоседа, от системы отсчета космонавта? Да, путем установки в обеих системах отсчета прибора для измерения ускорения – акселерометра. В системе отсчета

ускорение никогда наблюдаться не будет. Таким образом, системы отсчета двух братьев будут разными. По экспериментам, старше окажется брат-домосед.

### Событие. Интервал между событиями.

**Событие в пространстве-времени** – это совокупность  $(x, y, z, t)$  координат материальной точки и момента времени.

Определение релятивистского интервала между событиями

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

**Релятивистский интервал** – это квадрат расстояния между точками, в которых произошли события за вычетом  $c^2 \Delta t^2$ .

Времениподобные, пространственноподобные и светоподобные интервалы.

Классификация интервалов:

- Времениподобный – когда  $(c\Delta t)^2 > (\Delta l)^2$ ;
- Пространственноподобный – когда  $(c\Delta t)^2 < (\Delta l)^2$ ;
- Светоподобный – нулевой, когда  $(c\Delta t)^2 = (\Delta l)^2$ .

**Релятивистский интервал** является инвариантом преобразований Лоренца, то есть не меняется при переходе из одной системы в другую.

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta S'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

ЛЕКЦИЯ 9.

Релятивистский интервал (продолжение).

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta l^2$  – квадрат расстояния между двумя точками, в которых произошли события.

$c^2 \Delta t^2$  – промежуток времени между двумя событиями, которые произошли в разных точках пространства.

$$\Delta S^2 = inv$$

Иногда в научной литературе вводят комплексное время,

$$\tau = ict$$

Тогда

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta \tau^2$$

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$$

$$\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta S^2 < 0$$

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 < 0$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 0$$

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c$$

Таким образом, из времениподобности интервала следует то, что возможна система отсчета, в которой события являются одноместными. Таким образом, времениподобность интервала является достаточным условием для одноместности событий.

Рассмотрим два события, которые происходят одновременно  $\Delta t = 0$ .

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 > 0$$

Таким образом, если события происходят одновременно, то интервал между этими событиями является пространственноподобным.

Пусть  $\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 > 0$ , тогда найдется такая система отсчета, в которой события произойдут одновременно. Т.е. пространственноподобности интервала достаточно для того, чтобы события происходили одновременно.

Причинно-следственная связь между событиями. Диаграмма Минковского.

Два события, разделенные **пространственноподобным интервалом, не могут** быть связаны причинно-следственной связью.

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 > 0$$

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > 0$$

$$V < \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = \alpha c < c$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} < 0$$

$$V > \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = \alpha c$$

$$\alpha c < V < c$$

Два события, разделенные **временноподобным интервалом, могут** быть связаны причинно-следственной связью.

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 < 0$$

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$$

$$\Delta t > 0$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} < 0$$

$$V > \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = \alpha c > c$$

Светоподобный интервал.

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 0$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

Если два события связаны друг с другом светоподобными интервалами, то эти два события представляют собой испускание и прием светового сигнала.

Герман Минковский (1864-1909) предложил изображать события в четырехмерном пространстве-времени точками.

Представим, что у нас есть четырехмерное пространство. Поставим точку с координатами  $x, y, z, ct$  – мировая точка. Мировая точка движется вдоль некоторой траектории – мировой линии. Представим, что точка движется вдоль координаты  $x$ .

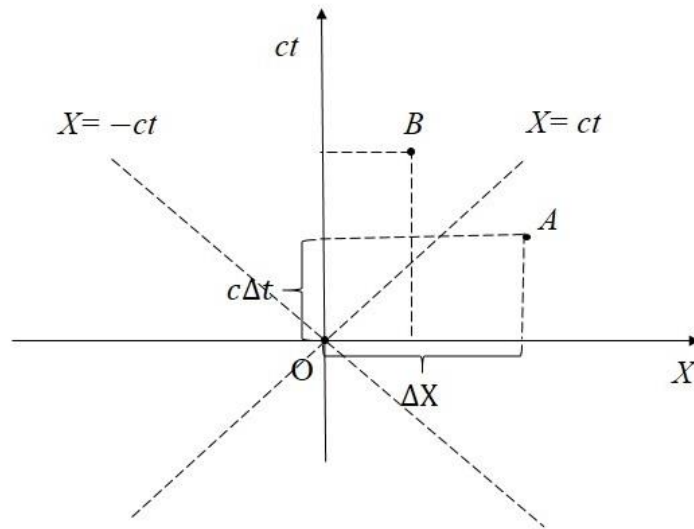


Рисунок 9.1. Иллюстрация примера диаграммы Минковского.

Пусть событие  $O$  произошло в точке  $x=0$ , в момент времени  $t=0$ .  $x = -ct$  и  $x = ct$  – мировые линии. Рассмотрим событие  $A$ , которое связано с событием  $O$  пространственноподобным интервалом. Рассмотрим событие  $B$ , которое связано с событием  $O$  времениподобным интервалом.

Диаграмма Минковского представлена на рисунке 9.2.

1 – область абсолютно удаленных событий.

2 – область абсолютно не одновременных событий.

Все события, которые лежат в верхней части диаграммы происходят позже, чем событие  $O$ .

Все события, которые лежат в нижней части диаграммы происходят раньше, чем событие  $O$ .

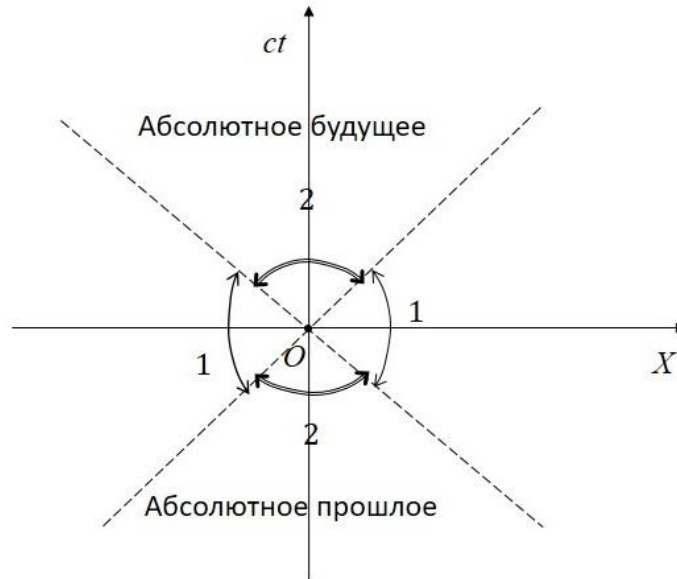


Рисунок 9.2. Диаграмма Минковского.

### Релятивистское правило сложения скоростей.

Пусть некоторые частицы движутся относительно системы отсчета  $K$  и имеют проекции скорости:

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{dx}{dt} \\
 v_y &= \frac{dy}{dt} \\
 v_z &= \frac{dz}{dt} \\
 v_x' &= \frac{dx'}{dt} \\
 v_y' &= \frac{dy'}{dt} \\
 v_z' &= \frac{dz'}{dt} \\
 v_z' &= \frac{dz'}{dt} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
 dx' &= \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
 dy' &= dy \\
 dz' &= dz
 \end{aligned}$$

$$dt' = \frac{dt - Vdx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt - Vdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} * \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt - Vdx/c^2} = \frac{dx - vdt}{dt - Vdx/c^2} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt - Vdx/c^2} = \frac{(dy/dt)\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}}$$

$$v_z' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}}$$

Объяснение аберрации света звезд.

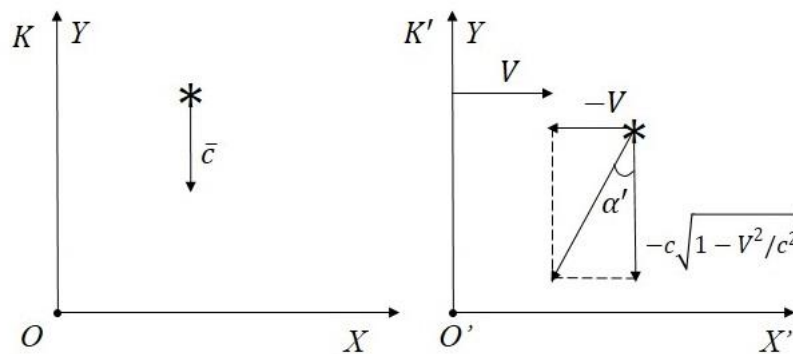


Рисунок. 9.3. Объяснение аберрации света звезд.

Пусть есть система  $K$ , относительно которой свет от звезды идет вертикально вниз. Рассмотрим систему  $K'$ , которая движется относительно системы  $K$ . (Рисунок 9.4.)

$$v_x = 0$$

$$v_y = -c$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = -V$$

$$v_y' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}} = -c\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

Относительно системы  $K'$  свет звезды имеет икс-овую компоненту скорости  $-V$  и игрековую компоненту скорости  $-c\sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Относительно наблюдателя свет будет распространяться под углом  $\alpha'$ .

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{V}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \frac{V}{c}, \quad V \ll c$$

Таким образом, наблюдая за аберрацией света звезд с Земли, релятивистский эффект обнаружить не удастся, потому что скорость земли намного меньше скорости света.

### Релятивистская динамика.

Зависит ли масса электрона от его скорости? (опыт Бухерера, 1908) – Немецкий физик Альфред Генрих Бухерер (1863-1927).

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}?$$

Долгое время считалось, что масса частицы зависит от ее скорости и существует «масса покоя» – масса, которая имеет частицы относительно той системы отсчета, в которой она покоится. В разных системах отсчета масса частиц разная.

Определение массы  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$  и понятие «масса покоя» – устаревшее. В данный момент принято считать, что масса частицы это ее фундаментальная характеристика и масса частицы это ровно та масса, которую измеряют в системе отсчета, относительно которой частица покоится. Во всех системах отсчета эта масса одинаковая.

Определяют релятивистский импульс:

$$\bar{P} = \frac{m\bar{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Импульс продолжает сохраняться при переходе из одной системы отсчета в другую с использованием преобразований Лоренца.

Таким образом, построение релятивистской динамики начинается с введения новой физической величины – **релятивистского импульса**, который вводится из тех соображений, что при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую с использованием преобразований Лоренца, должен продолжать оставаться справедливым закон сохранения релятивистского импульса.

Релятивистское уравнение движения.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{dt} &= \bar{F} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m\bar{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \right) &= \bar{F} \\ \bar{V} &= V\bar{\tau} \\ \frac{dV}{dt} &= a_\tau \\ \frac{d\bar{V}}{dt} &= a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m\bar{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \right) &= \frac{m \frac{d\bar{V}}{dt} \sqrt{1-V^2/c^2} - m\bar{V} \frac{1}{2\sqrt{1-V^2/c^2}} \left( -\frac{2V}{c^2} \right) \frac{dV}{dt}}{1-V^2/c^2} = \\ &= \frac{m(a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n})}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m\bar{V}Va_\tau}{c^2(1-V^2/c^2)^{3/2}} = \frac{ma_\tau\bar{\tau}}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} + \frac{mV^2a_\tau\bar{\tau}}{c^2(1-V^2/c^2)^{3/2}} + \\ &+ \frac{ma_n\bar{n}}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} = \frac{ma_\tau\bar{\tau}}{(1-V^2/c^2)^{3/2}} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{ma_n\bar{n}}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} = \end{aligned}$$



$$= \frac{ma_{\tau}\bar{t}}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} + \frac{ma_n\bar{n}}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = \bar{F}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)}$$

$\gamma^3 ma_{\tau}\bar{t} + \gamma ma_n\bar{n} = \bar{F}_{\tau} + \bar{F}_n$  – **релятивистское уравнение динамики.**

В продольном и в поперечном направлении инертные свойства частицы проявляются по разному. Предпринимались попытки ввести удобные обозначения:

$$m_{\parallel} = \gamma^3 m, \quad m_{\perp} = \gamma m$$

Если,  $m_{\parallel} > m_{\perp}$  тогда, инертные свойства в продольном направлении проявляются сильнее чем при движении поперек траектории.

Рассмотрим частицу, на которую действует некоторая сила. Предположим, что  $\bar{F}_{\tau}$  и  $\bar{F}_n$  равны.

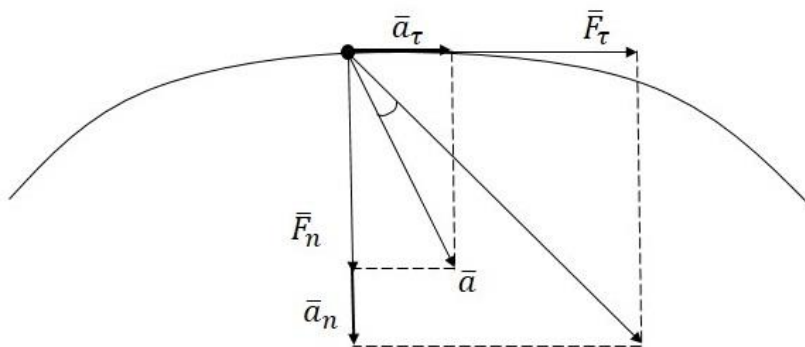


Рисунок 9.4. Иллюстрация результата релятивистского уравнения динамики.

В релятивистской динамике векторы силы и ускорения не сонаправлены друг с другом.

Продольная составляющая силы при переходе из одной системы отсчета в другую не преобразуется.

**Сопутствующая система отсчета** – это такая инерциальная система отсчета, относительно которой движущаяся материальная точка в данный момент времени покоится.

**Правила преобразования ускорения** при переходе в сопутствующую систему отсчета.

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x'V/c^2}$$

$$t = \frac{t' + Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$v_x' = 0$$

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{dv_x'(1 + v_x'V/c^2) - (v_x' + V)Vdv_x'/c^2}{(1 + v_x'V/c^2)^2} = \\ &= \frac{dv_x' + dv_x'v_x'V/c^2 - v_x'Vdv_x'/c^2 - V^2dv_x'/c^2}{(1 + v_x'V/c^2)^2} = \\ &= \frac{dv_x'(1 - V^2/c^2)}{(1 + v_x'V/c^2)^2} = dv_x'(1 - \frac{V^2}{c^2}) \end{aligned}$$



## Лекция 10

### Релятивистская динамика. Продолжение

$$\begin{aligned}
 dv_x &= dv_x' \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \\
 dt &= \frac{dt' + V dx' / c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{dt' (1 + V \frac{dx'}{dt'} / c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
 a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x (1 - V^2/c^2)}{dt'} \\
 a_x &= a_x' (1 - V^2/c^2)^{3/2} \\
 \frac{ma_x}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} &= F_x \\
 ma_x' &= F_x
 \end{aligned}$$

Следовательно, в сопутствующей системе отсчета Второй закон Ньютона выглядит так же как в классическом случае.

### Энергия в релятивистской механике. Энергия покоя и кинетическая энергия.

Пусть есть релятивистская частица, уравнение движения этой частицы выглядит:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{P}}{dt} &= \bar{F} \\
 \bar{P} &= \frac{m\bar{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
 \bar{F}\bar{V}dt &= dA = dE = \frac{d\bar{P}}{dt} * \bar{V}dt \\
 dE &= \bar{V}d\bar{P} = \bar{V}d\left(\frac{m\bar{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right) = \frac{m\bar{V}(d\bar{V}\sqrt{1 - V^2/c^2} - \bar{V}\frac{1(-2V/c^2)}{2\sqrt{1 - V^2/c^2}}dV)}{1 - V^2/c^2} = \\
 &= \frac{mVdV(1 - V^2/c^2) + mV^3dV/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mVdV}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{2} \frac{d(V^2)}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} = \\
 &= -\frac{mc^2}{2} \frac{d(1 - V^2/c^2)}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right) \\
 E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + const \\
 const &= 0
 \end{aligned}$$

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$  – формула для релятивистской энергии частицы.

$E_{\text{пок}} = mc^2$  – энергия покоя, та энергия, которой обладает частица по факту своего существования.

$T = E - mc^2 = mc^2(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - 1)$  – кинетическая энергия в релятивистской механике.

Пусть,

$$V \ll c$$

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad x \ll 1$$

$$T = mc^2((1 - V^2/c^2)^{-1/2} - 1) \approx mc^2(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} - 1) = \frac{mV^2}{2}$$

Таким образом, в случае малых скоростей, выражение для кинетической энергии в релятивистской механике переходит в классическую формулу для кинетической энергии системы.

Взаимосвязь между энергией и импульсом в релятивистской механике.

Рассмотрим  $E^2 - p^2 c^2$

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - V^2/c^2} - \frac{m^2 V^2 c^2}{1 - V^2/c^2} = \frac{m^2 c^4}{1 - V^2/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = m^2 c^4 = \text{inv}$$

Таким образом,  $E^2 - p^2 c^2$  не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую. Она всегда равна произведению квадрата массы на скорость света в четвертой степени.

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2$$

$$\Delta S^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2 = \text{inv}$$

Таким образом,  $m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$  может использоваться для:

- Решения разных задач, в том числе связанных с превращением и рождением разных элементарных частиц;
- Может служить независимым определением массы:

$$m = \sqrt{\frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}}$$

Фотон это безмассовая частица, которая движется со скоростью света. Если записать выражение для энергии и для импульса и попытаться подставить туда скорость  $V = c$ , то в знаменателе образуется 0. Необходимо модифицировать формулу.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{V}$$

$$v = c \text{ (фотон)}$$

$p = \frac{E}{c}$  – связь между энергией и импульсом фотона.

Гравитационное смещение спектральных линий.

Представим, что в пространстве распространяется свет со скоростью  $c$ , а навстречу свету движется некоторый наблюдатель со скоростью  $\bar{v}$  (Рисунок 9.6.). Известно, что если наблюдатель, то есть приемник света движется, то регистрируемая наблюдателем частота изменяется.

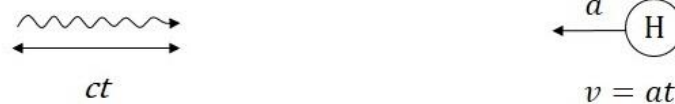


Рисунок 10.1 Эффект Доплера

**Эффект Доплера** – изменение частоты регистрируемой наблюдателем при движении относительно сигнала.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v}{c}$$

Если наблюдатель движется навстречу свету, то регистрируемая частота света возрастает.

Представим, что наблюдатель движется с постоянным ускорением  $a$ .

$$v = at$$

$$l = ct$$

$$v = \frac{al}{c}$$

$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{v}{c} = \frac{al}{c^2}$  – позволяет узнать каков будет наблюдаемый сдвиг частоты излучения, который регистрирует наблюдатель, движущийся с ускорением  $a$ , при том условии что свет прошел расстояние  $l$ .

Пусть наблюдатель покоится. К наблюдателю идет свет, но между наблюдателем и источником света имеется область, в которой существует однородное поле силы тяжести. Тогда свет, двигаясь в сторону неподвижного наблюдателя, проходит расстояние  $l$  в области пространства, где есть однородное поле силы тяжести. По своим проявлениям, это однородное поле силы тяжести не должно отличаться от однородного поля сил инерции.

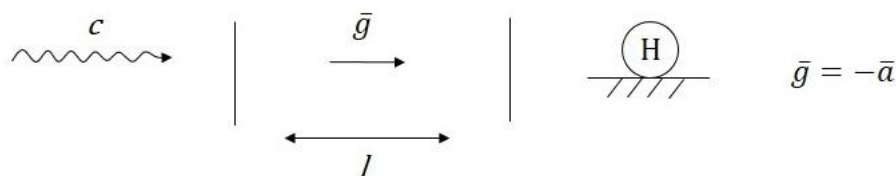


Рисунок 10.2. Иллюстрация примера.

$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{gl}{c^2}$  – позволяет установить, насколько изменяется частота света при прохождении светом области пространства длиной  $l$ , в котором существует однородное поле силы тяжести с напряженностью  $\vec{g}$ .

Эффект объясняется тем, что общая теория относительности предсказывает, что в гравитационном поле время течет медленнее, а частота колебаний возрастает. Если свет идет сверху вниз в поле силы тяжести Земли, то относительное изменение частоты при высоте  $h = 20 \text{ м}$  –  $\frac{\Delta v}{v_0} \sim 10^{-14}$ .

## Механика твердого тела. Модели и типы движения твердого тела.

**Абсолютно твердое тело** – это система материальных точек, все расстояния между которыми неизменны.

Выделяют следующие типы движений:

- Поступательное
- Вращательное
- Плоское
- Сферическое (с одной закрепленной точкой)
- Свободное

**Поступательное движение твердого тела** – это движение, при котором любой отрезок тела движется, оставаясь параллельным своему первоначальному положению.

### *Три степени свободы.*

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся по одинаковым траекториям и в некоторый момент времени обладают одинаковой скоростью и одинаковым ускорением (рисунок 10.3.). Тогда,  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$ .

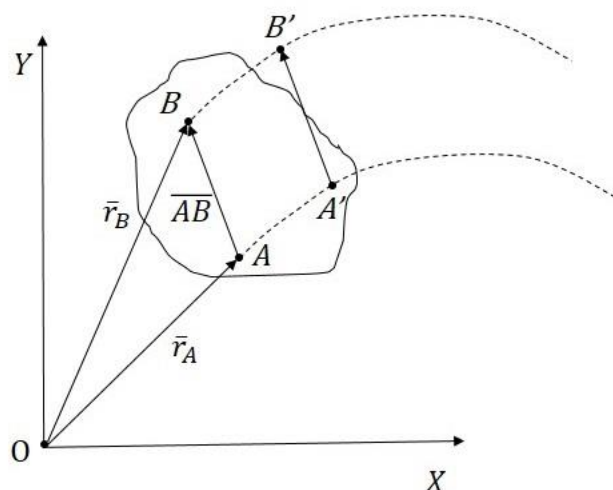


Рисунок 10.3. Иллюстрация поступательного движения тела.

Представим, что тело начало двигаться. Пусть точка  $A$  движется по некоторой траектории. Согласно определению, отрезок  $\overline{AB}$  будет двигаться по точно такой же траектории. Следовательно траектории точек  $A$  и  $B$  будут одинаковы.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \text{const} \\ \dot{\vec{r}}_B &= \dot{\vec{r}}_A (\vec{v}_B = \vec{v}_A) \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A\end{aligned}$$

Следовательно, для того чтобы описать поступательное движение твердого тела достаточно рассматривать одну точку, принадлежащую этому твердому телу.

**Вращательное движение твердого тела** – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям вокруг некоторой неподвижной прямой, которая называется осью вращения. *Одна степень свободы.*

**Плоское движение твердого тела** – это движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой плоскости. *Три степени свободы.*

Рассмотрим некоторую плоскость, параллельно которой движутся все точки тела. Выбираем две произвольные точки  $A$  и  $B$ . Для того чтобы задать положение этого тела, необходимо задать положение отрезка  $AB$ . Для этого достаточно определить три числа, например координаты точка  $A$  и угол между заранее выбранной осью и отрезком  $AB$ .

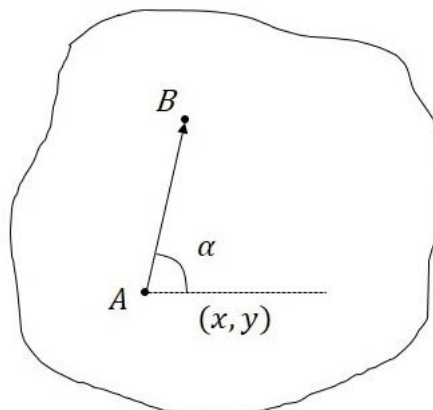


Рисунок 10.4. Плоское движение твердого тела.

**Сферическое движение твердого тела** – это движение, при котором одна точка тела закреплена. *Три степени свободы.*

Свободное движение твердого тела – это общий случай движения тела. *Шесть степеней свободы.*

Углы Эйлера.

Швейцарский, немецкий и российский математик и механик Леонард Эйлер (1707-1783).

Пусть у нас есть неподвижная система координат  $X, Y, Z$ , начало которой совмещено с закрепленной точкой твердого тела. Система  $X', Y', Z'$  жестко связана с

твердым телом и ее начало тоже совмещено с неподвижной точкой твердого тела (Рисунок 10.5.).

Вводится **линия узлов** – линия, вдоль которой пересекаются плоскости  $X,Y$  и  $X',Y'$ . Направление задается вектором  $\vec{\tau}$ .

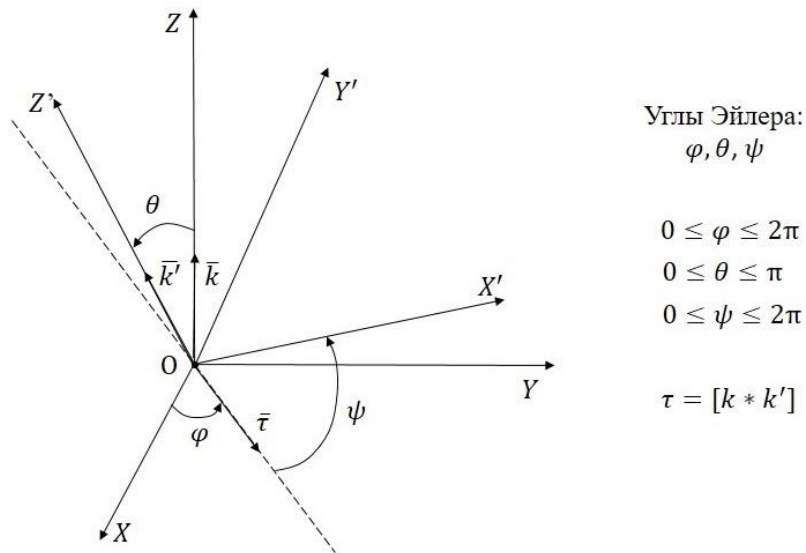


Рисунок 10.5. Углы Эйлера.

### Мгновенная ось вращения.

Рассмотрим некоторое твердое тело. (Рисунок 10.6.)

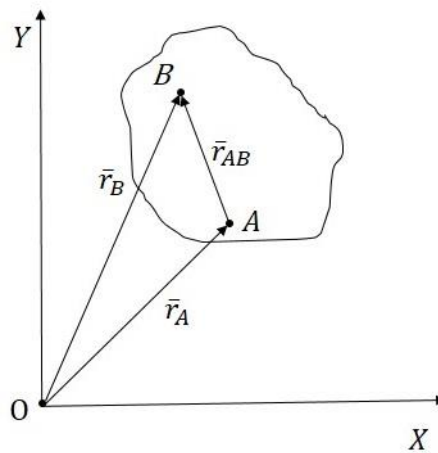


Рисунок 10.6. Твердое тело

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{r}_{AB}^2 &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = const \\ 2(\vec{r}_B - \vec{r}_A)(\vec{v}_B - \vec{v}_A) &= 0\end{aligned}$$



$$\vec{r}_{AB}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = 0$$

$$\vec{v}_A = 0 \Rightarrow \vec{r}_{AB} * \vec{v}_B = 0 \Rightarrow \vec{r}_{AB} \perp \vec{v}_B$$

Следовательно, в данный момент времени движение точки  $B$  выглядит как чистое движение по окружности вокруг некоторой оси, проходящей через точку  $A$ . Эта ось – **мгновенная ось вращения**.

**Мгновенная ось вращения** – это ось, проходящая через неподвижные в данный момент точки твердого тела.

### Сложение вращений.

Пусть по некоторой окружности движется материальная точка. (Рисунок 10.7.)

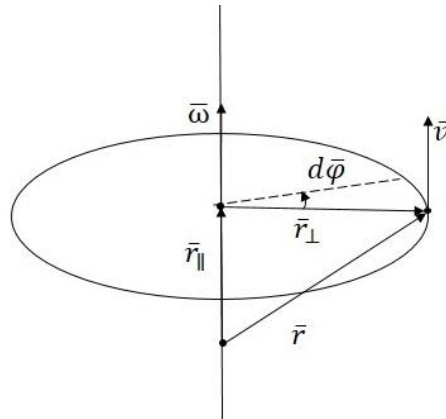


Рисунок 10.7. Движение точки по окружности

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$$

$$\bar{\omega} = \frac{[\vec{r}_\perp * \vec{v}]}{\vec{r}_\perp^2}, \quad \vec{v} = [\bar{\omega} * \vec{r}_\perp]$$

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$$

$$\vec{v} = [\bar{\omega} * (\vec{r} - \vec{r}_\parallel)] = [\bar{\omega} * \vec{r}]$$

Пусть у нас есть некоторая материальная точка, которая характеризуется каким-то радиус-вектором  $\vec{r}$  в пространстве. Точка  $M$  участвует в двух независимых вращательных движениях. (Рисунок 10.8.)

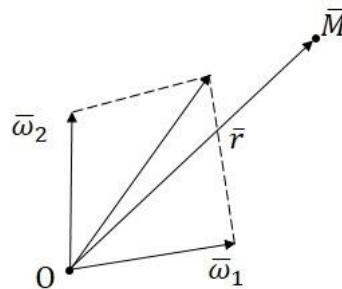


Рисунок 10.8. Точка О и точка М

$$\vec{v}_1 = [\vec{\omega}_1 * \vec{r}]$$

$$\vec{v}_2 = [\vec{\omega}_2 * \vec{r}]$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [\vec{\omega}_1 * \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 * \vec{r}] = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) * \vec{r}]$$

Следовательно, если точка участвует в двух независимых вращательных движениях с разными угловыми скоростями, то вектор угловой скорости можно определять, как векторную сумму двух угловых скоростей.

Построим векторную сумму  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ . Представим, что точка  $M$  расположена так, что вектор  $\vec{r}$  направлен вдоль вектора  $\vec{\omega}$ . Тогда эти векторы будут коллинеарны. Тогда,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [\vec{\omega}_1 * \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 * \vec{r}] = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) * \vec{r}] = 0$$

Следовательно, точка  $M$  лежит на мгновенной оси вращения. Вектор угловой скорости направлен вдоль мгновенной оси вращения.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{угловое ускорение.}$$

Пусть есть горизонтальная поверхность, на которой лежит конус. Пусть этот конус катается по столу так, что его вершина все время находится в одной точке. Конус участвует во вращении вокруг оси симметрии конуса ( $\vec{\omega}_1$ ) и вращение вокруг вертикальной оси ( $\vec{\omega}_2$ ).  $OO'$  – мгновенная ось вращения. Тогда векторы  $\vec{\varepsilon}$  и  $d\vec{\omega}$  будут направлены «на нас».

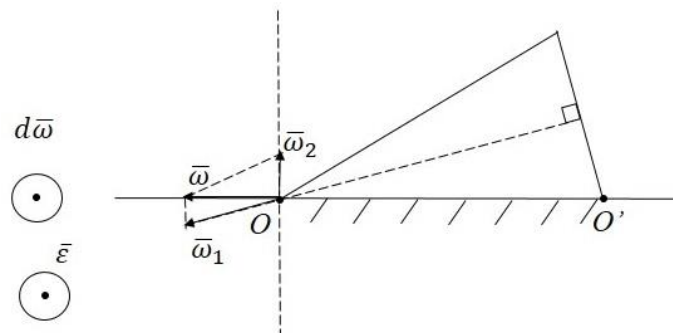


Рисунок 10.9. Иллюстрация примера вращения конуса.

### Движение твердого тела с одной закрепленной точкой. Теорема Эйлера.

**Теорема Эйлера для плоского движения** – При плоском движении твердое тело может быть переведено из одного произвольного положения в любое другое произвольное положение путем одного единственного поворота вокруг некоторой оси.

Пусть есть некоторый отрезок  $AB$ , лежащий в плоскости, в которой происходит плоское движение. При движении отрезок  $AB$  перешел в отрезок  $A_1B_1$ . Соединим точки  $A, A_1$  и  $B, B_1$  пунктирными линиями и восстановим к ним серединные перпендикуляры. Серединные перпендикуляры пересекутся в точке  $O$  – ось вращения. По построению  $OA = OA_1$  – при повороте вокруг оси  $A$  переходит в  $A_1$ .

Предположим, что точка  $B$  переходит в точку  $B_2$ . Рассмотрим два треугольника  $OA_1B_1$  и  $OA_1B_2$ . Сторона  $OA$  – общая,  $A_1B_1 = A_1B_2$  потому что тело твердое.  $OB_1 = OB_2$  по построению. Следовательно соответствующие треугольники равны по трем сторонам и точки  $B_1$  и  $B_2$  должны совпадать. Теорема доказана.

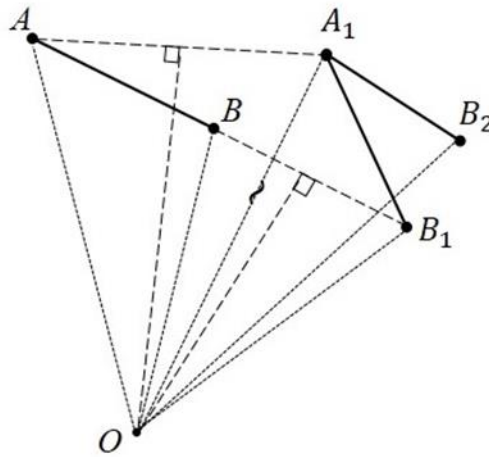


Рисунок 10.10. Иллюстрация теоремы Эйлера.

## Лекция 11.

### Теорема Эйлера. Продолжение

**Теорема Эйлера для сферического движения** – Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из одного произвольного положения в любое другое произвольное положение путем одного единственного поворота вокруг некоторой оси, проходящей через указанную неподвижную точку.

Рассмотрим сферическую поверхность, связанную с твердым телом, рассмотрим на ней точки  $A$  и  $B$  (Рисунок 10.10). Проведем через центр сферы, т.е. через точку закрепления твердого тела (точка  $O$ ) и через точки  $A$  и  $B$  плоскость. Тогда эта плоскость вырежет на поверхности сферы дугу большого круга, а точки  $A$  и  $B$  будут лежать на этой дуге. Повернем тело так, чтобы дуга  $AB$  перешла в дугу  $A_1B_1$ . Дальнейшее доказательство аналогично.

Произвольное движение твердого тела с одной закрепленной точкой можно представить, как чистое вращение вокруг мгновенных осей, проходящих через точку закрепления, но эти мгновенные оси в каждый момент времени разные.

Свободное движение твердого тела в каждый момент времени можно представить, как сумму поступательного движения некоторой точки  $O$  и вращательного движения относительно мгновенной оси, проходящей через эту точку  $O$ .

Пусть у нас есть твердое тело. Выберем в нем некоторую точку  $M$ . Выберем точку  $O$ . Чему равна скорость  $M$  в произвольный момент времени?

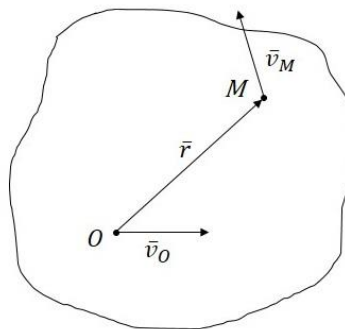


Рисунок 11.1. Твердое тело

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{\text{отн}}$$

Движение тела относительно точки  $O$  можно представить, как чистое вращение вокруг мгновенной оси в любой момент времени. Тогда,

$$\vec{v}_{\text{вр}} = [\vec{\omega} * \vec{r}]$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + [\vec{\omega} * \vec{r}]$$

Рассмотрим точки  $O$  и  $M$ . Рассмотрим произвольную точку  $O'$  и проведем из нее в точку  $M$  радиус-вектор. Тогда,

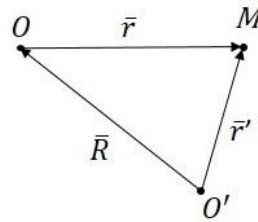


Рисунок 11.2. Расположение точек

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + [\vec{\omega} * \vec{r}]$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + [\vec{\omega}' * \vec{r}']$$

Проведем радиус-вектор  $\vec{R}$ .

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{O'} + [\vec{\omega}' * \vec{R}]$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + [\vec{\omega}' * \vec{R}] + [\vec{\omega} * \vec{r}] = \vec{v}_{O'} + [\vec{\omega}' * (\vec{r} + \vec{R})]$$

$$[\vec{\omega}' * \vec{R}] + [\vec{\omega} * \vec{r}] = [\vec{\omega}' * \vec{r}] + [\vec{\omega}' * \vec{R}]$$

$$[\vec{\omega} * \vec{r}] = [\vec{\omega}' * \vec{r}]$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

Следовательно, угловая скорость всех точек тела одинакова.

### Динамика твердого тела.

Пусть есть некоторая неподвижная точка  $O$  – полюс. Пусть на точку  $m$  действует некоторая сила и при этом точка  $m$  движется, обладая некоторым импульсом. Тогда,  $\vec{M} = [\vec{r} * \vec{F}]$  – момент силы, перпендикулярен плоскости, которая задается векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

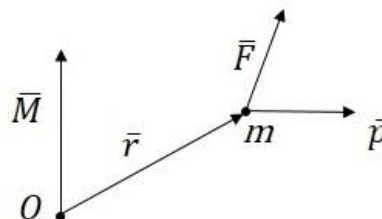


Рисунок 11.3. Момент силы

$\vec{L} = [\vec{r} * \vec{p}]$  – момент импульса.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} * \vec{p}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} * \vec{p} \right] + \left[ \vec{r} * \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r} * \vec{F}] = \vec{M}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$  – уравнение момента, связывает друг с другом скорость изменения момента импульса и момент силы.

**Момент силы относительно оси** – это проекция момента силы на эту ось.

Рассмотрим ось, материальную точку, на которую действует некоторая сила. Выберем на оси произвольную точку  $O$  и проведем радиус-вектор из точки  $O$  к материальной точке  $m$ .

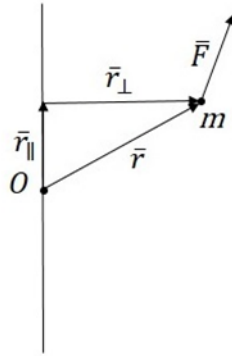


Рисунок 11.4. Ось и материальная точка

$$\bar{M} = [\bar{r} * \bar{F}]$$

$$\bar{r} = \bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp}$$

$$\bar{F} = \bar{F}_{\parallel} + \bar{F}_{\perp}$$

$$\bar{M} = [(\bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp}) * (\bar{F}_{\parallel} + \bar{F}_{\perp})] = [\bar{r}_{\parallel} * \bar{F}_{\parallel}] + [\bar{r}_{\parallel} * \bar{F}_{\perp}] + [\bar{r}_{\perp} * \bar{F}_{\parallel}] + [\bar{r}_{\perp} * \bar{F}_{\perp}]$$

$$M_X = [\bar{r}_{\perp} + \bar{F}_{\perp}] |_X$$

$$L_X = [\bar{r}_{\perp} + \bar{p}_{\perp}] |_X$$

Рассмотрим систему материальных точек. На эти точки действуют какие-то внешние силы и между самими точками действуют внутренние силы. Выберем произвольный полюс  $O$ . Запишем для каждой материальной точки уравнение момента.

$$\frac{d\bar{L}_1}{dt} = \bar{M}_1^{\text{внеш}} + \bar{M}_1^{\text{внутр}}$$

$$\frac{d\bar{L}_2}{dt} = \bar{M}_2^{\text{внеш}} + \bar{M}_2^{\text{внутр}}$$

$$\frac{d\bar{L}_n}{dt} = \bar{M}_n^{\text{внеш}} + \bar{M}_n^{\text{внутр}}$$

$$\bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots + \bar{L}_n = \sum \bar{L}_n$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots + \bar{L}_n) = \sum \bar{M}_i^{\text{внеш}} + \sum \bar{M}_i^{\text{внутр}}$$

Рассмотрим внутренние силы, которые действуют между точками. Это силы взаимодействия. Выберем произвольный полюс  $O$ .

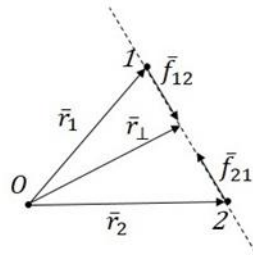


Рисунок 11.5. Взаимодействия сил

$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \bar{M}^{\text{внеш}}$  – уравнение моментов для системы материальных точек.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \bar{M}^{\text{внеш}} = 0$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{const}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \text{ (для одной м. т.)}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{const}$$

**Закон сохранения момента импульса** – Момент импульса системы материальных точек относительно точки (относительно оси) сохраняется неизменным, если равна нулю сумма моментов внешних сил относительно этой точки (относительно этой оси).

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum \bar{M}^{\text{внеш}}|_X = 0$$

$$L_X = \text{const}$$

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг некоторой фиксированной оси. Рассмотрим некую материальную точку с массой  $m_i$ , на нее действуют какие-то внешние и внутренние силы, также она обладает каким-то импульсом.

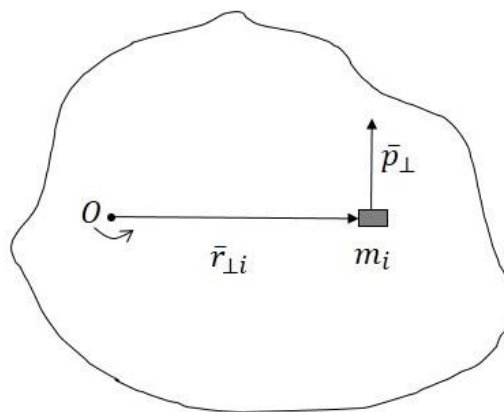


Рисунок 11.6. Абсолютно твердое тело

$$\begin{aligned}\Delta L_X &= [\bar{r}_{\perp i} + \bar{p}_{\perp i}] |_X \\ v_i &= \omega r_{\perp i} \\ \bar{r}_{\perp} &\perp \bar{p}_{\perp}, \quad p_{\perp i} = \Delta m_i v_i = \Delta m_i \omega r_{\perp i} \\ \Delta L_{Xi} &= \Delta m_i \omega r_{\perp i}^2 \\ L_X &= \sum \Delta L_{Xi} = \sum \Delta m_i \omega r_{\perp i}^2 = \omega * \sum m_i r_{\perp i}^2 \\ J &= \sum m_i r_{\perp i}^2 - \text{осевой момент инерции.} \\ L_X &= J \omega \\ \frac{dL_X}{dt} &= M_X \Rightarrow J \frac{d\omega}{dt} = M_X \\ \frac{d\omega}{dt} &= \varepsilon \\ J \varepsilon &= M_X\end{aligned}$$

### Момент импульса твердого тела.

Рассмотрим некоторое твердое тело. Выберем точку О, поместим в точку О начало системы координат, оси которой жестко связаны с телом. Рассмотрим некоторую материальную точку массой  $dm$ , которая характеризуется радиус-вектором  $\bar{r}$  и движется со скоростью  $\bar{v}$  в данный момент времени. Твердое тело вращается с некоторой угловой скоростью  $\bar{\omega}$ .

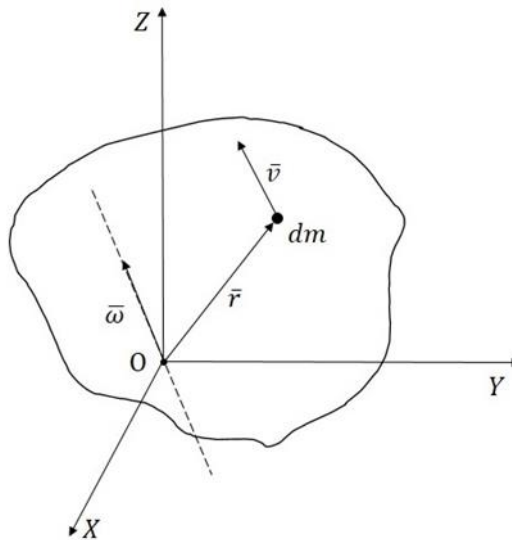


Рисунок 11.7. Твердое тело

$$\begin{aligned}d\bar{p} &= dm * \bar{v} \\ \bar{L} &= \int [\bar{r} * d\bar{p}] = \int [\bar{r} * \bar{v}] dm \\ \bar{v} &= [\bar{\omega} * \bar{r}]\end{aligned}$$



$$\bar{L} = \int dm [\bar{r} * [\bar{\omega} * \bar{r}]] = \int dm (\bar{\omega}(\bar{r}\bar{r}) - \bar{r}(\bar{r}\bar{\omega})) = \int dm (\bar{\omega}r^2 - \bar{r}(\bar{\omega}\bar{r}))$$

$$\bar{r} = \{x, y, z\}, \quad \bar{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$$

$$\bar{\omega}\bar{r} = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z$$

$$L_x = \int dm (\omega_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)) =$$

$$= \int dm (\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y yx - \omega_z zx)$$

$$L_y = \int dm (\omega_y(x^2 + y^2 + z^2) - y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)) =$$

$$= \int dm (-\omega_x y + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z yz)$$

$$L_z = \int dm (\omega_z(x^2 + y^2 + z^2) - z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)) =$$

$$= \int dm (-\omega_x zx - \omega_y zy + \omega_z(x^2 + y^2))$$

$$J_{xx} = \int dm (y^2 + z^2)$$

$$J_{yy} = \int dm (x^2 + z^2)$$

$$J_{zz} = \int dm (x^2 + y^2)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int dm xy$$

$$J_{xz} = J_{zx} = - \int dm xz$$

$$J_{yz} = J_{zy} = - \int dm yz$$

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad - \text{Тензор инерции.}$$

Свойства компонент тензора инерции.

- 1) Тензор инерции симметричен, то есть допускает диагонализацию.
- 2) Осевые компоненты тензора инерции являются осевыми моментами инерции относительно осей  $X, Y, Z$ .
- 3) Момент инерции относительно произвольной оси выражается через компоненты тензора инерции.

- 
- 4) Предыдущее свойство имеет наглядную геометрическую интерпретацию – **эллипсоид инерции.**



## Лекция 12

### Оси вращения

Рассмотрим некоторое твердое тело. (Рисунок 12.1.) Выберем точку  $O$ , поместим в точку  $O$  начало системы координат, оси которой жестко связаны с телом. Рассмотрим произвольную прямую  $OA$ , и точку  $dm$ , которая принадлежит телу. Положение точки  $dm$  характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}$ . Положение прямой  $OA$  задается единичным вектором  $\vec{S}$ .

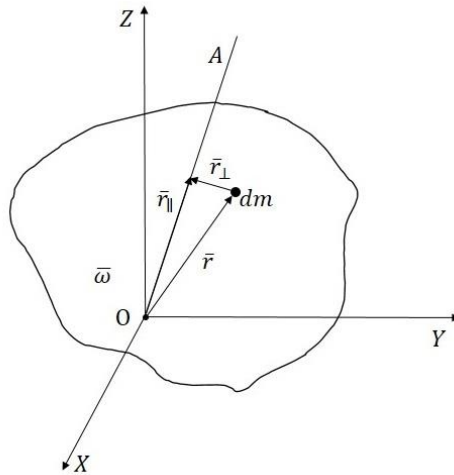


Рисунок 12.1. Твердое тело

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \\
 \vec{S} &= 1, \quad \vec{S} = \{S_x, S_y, S_z\} \\
 S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 &= 1 \\
 J &= \int r_{\perp}^2 dm = \int dm(r^2 - r_{\parallel}^2) \\
 r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \quad \vec{r} = \{x; y; z\} \\
 r_{\parallel} &= (\vec{r} * \vec{S}) = xS_x + yS_y + zS_z \\
 J &= \int dm(r^2 - r_{\parallel}^2) = \\
 &= \int dm(x^2 + y^2 + z^2 - x^2S_x^2 - y^2S_y^2 - z^2S_z^2 - 2xyS_xS_y - 2xzS_xS_z - 2yzS_yS_z) = \\
 &= \int dm(x^2(S_y^2 + S_z^2) + y^2(S_x^2 + S_z^2) + z^2(S_x^2 + S_y^2) - 2xyS_xS_y - 2xzS_xS_z - \\
 &\quad - 2yzS_yS_z) = \int dm(S_x^2(y^2 + z^2) + S_y^2(x^2 + z^2) + S_z^2(x^2 + y^2) - 2xyS_xS_y - \\
 &\quad - 2xzS_xS_z - 2yzS_yS_z) = J_{xx}S_x^2 + J_{yy}S_y^2 + J_{zz}S_z^2 + 2J_{xy}S_xS_y + 2J_{xz}S_xS_z + 2J_{yz}S_yS_z \\
 (\vec{S} * \vec{e}_x) &= \cos \alpha = S_x \\
 (\vec{S} * \vec{e}_y) &= \cos \beta = S_y
 \end{aligned}$$

$$(\bar{S} * \bar{e}_z) = \cos \gamma = S_z$$

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

Если мы знаем все компоненты тензора инерции и знаем, какие углы составляет ось  $OA$  с осями  $OX, OY, OZ$ , мы можем вычислить – **осевой момент инерции**.

$$J = \sum_{i,j \rightarrow x,y,z} J_{ij} S_i S_j$$

Возьмем твердое тело, выберем точку  $O$ , свяжем с этой точкой систему координат. Начнем пропускать через начало координат  $O$  линию  $OA$  во всех возможных направлениях и будем на этой линии откладывать отрезок так, чтобы длина этого отрезка была  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ .

$$\bar{R} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{J}}$$

$$1 = \sum_{ij} J_{ij} \frac{S_i}{\sqrt{J}} \frac{S_j}{\sqrt{J}}$$

$$X_k = \frac{S_k}{\sqrt{J}}, k \rightarrow 1, 2, 3$$

$$\sum_{ij} J_{ij} X_i X_j = 1$$

Вращая оси системы координат можно добиться того, что уравнение эллипсоида примет следующий вид:

$$J_{xx} X_1^2 + J_{yy} X_2^2 + J_{zz} X_3^2 = 1$$

**Главные оси вращения твердого тела** – это оси, относительно которых тензор инерции диагонализирован (они совпадают с главными осями эллипсоида инерции).

**Центральные оси вращения твердого тела** – это оси, проходящие через центр масс тела.

Силы действующие на вращающееся тело.

**Свободная ось вращения** – это такая ось, при вращении вокруг которой твердое тело не действует на эту ось.

Рассмотрим твердое тело. Свяжем с телом систему координат. (Рисунок 12.2.)

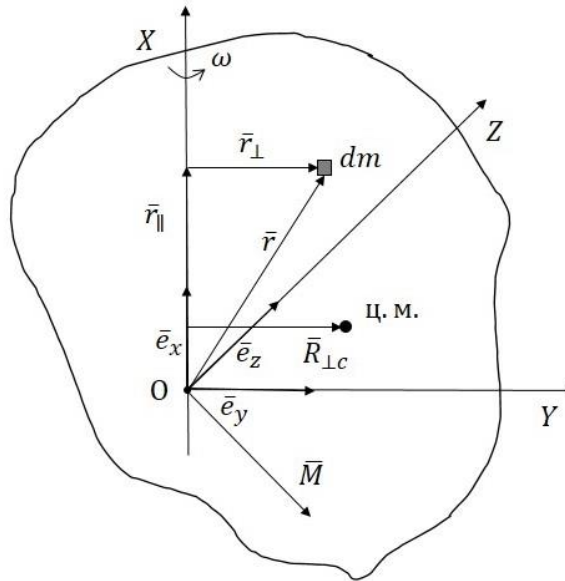


Рисунок 12.2. Твердое тело и система координат

$$\begin{aligned}
 -m\omega^2 \bar{R}_{\perp c} &= \bar{F} \\
 d\bar{f} &= -dm\omega^2 \bar{r}_{\perp} \\
 \bar{M} &= \int [\bar{r} * d\bar{f}] = - \int [\bar{r} * \bar{r}_{\perp}] \omega^2 dm \\
 \bar{r} &= \bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp} \\
 \bar{M} &= -\omega^2 \int [(\bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp}) * \bar{r}_{\perp}] dm = -\omega^2 \int [\bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp}] dm \\
 \bar{r}_{\parallel} &= x\bar{e}_x \\
 \bar{r}_{\perp} &= y\bar{e}_y + z\bar{e}_z \\
 \bar{M} &= -\omega^2 \int [x\bar{e}_x * (y\bar{e}_y + z\bar{e}_z)] dm = -\omega^2 \int [xy(\bar{e}_x * \bar{e}_y)] dm - \omega^2 \int xz[(\bar{e}_x * \bar{e}_z)] dm = \\
 &= -\omega^2 \int xy \bar{e}_z dm - \omega^2 \int xz (-\bar{e}_y) dm = \omega^2 (J_{xy} \bar{e}_z J_{xz} \bar{e}_y) \\
 -m\omega^2 \bar{R}_{\perp c} &= \bar{F} = 0
 \end{aligned}$$

Следовательно ось должна проходить через центр масс и являться центральной.

$$\bar{M} = \omega^2 (J_{xy} \bar{e}_z J_{xz} \bar{e}_y) = 0$$

Следовательно ось является главной.

**Свободные** оси вращения являются **главными центральными** осями вращения.

При вращении вокруг оси, не являющейся свободной, эта ось испытывает деформации.

Вращение вокруг главных центральных осей, обладающих наибольшим и наименьшим осевым моментом инерции является **устойчивым**.

Вращение вокруг главной центральной оси с промежуточным значением осевого момента инерции является **неустойчивым**.

### Общий случай движения твердого тела.

Для задания движения твердого тела в общем случае необходимо записать:

- Уравнение движения центра масс;
- Уравнение моментов.

$$m \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Рассмотрим систему координат с неподвижным полюсом  $O$ . Введем еще одну систему координат с движущимся полюсом  $O'$ . Рассмотрим некоторую материальную точку  $m$ , пусть она обладает импульсом  $\vec{p}$ . Относительно начала  $O$  она характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}$ , а относительно начала  $O'$  – радиус-вектором  $\vec{r}'$ .

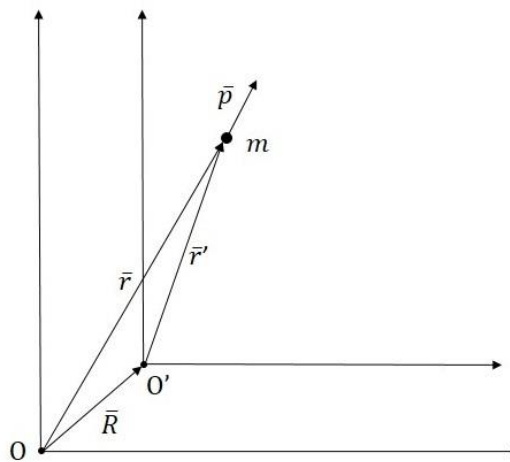


Рисунок 12.3. Система координат с неподвижным полюсом  $O$  и подвижным полюсом  $O'$

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'} &= [\vec{r}' * \vec{p}] \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{R} \\ \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} \\ \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{R}}{dt} &= \vec{V}_{O'}, \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \\ \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\vec{r}' * \vec{p}] + \left[ \vec{r}' * \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v} + \vec{p}] - [\vec{V}_{O'} * \vec{p}] + [\vec{r}' * \vec{F}] \\ \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} &= \vec{M}_{O'} - [\vec{V}_{O'} * \vec{p}]\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\bar{L}_{O'}}{dt}\right)_i = (\bar{M}_{O'})_i - [\bar{V}_{O'} * \bar{p}_i]$$

$$\frac{d\bar{L}_{O'}}{dt} = \bar{M}_{O'}^{\text{внеш}} - [\bar{V}_{O'} * \bar{p}]$$

$$\bar{p} = m\bar{V}_c$$

$$\frac{d\bar{L}_{O'}}{dt} = \bar{M}_{O'}^{\text{внеш}} - m[\bar{V}_{O'} * \bar{V}_c]$$

$m$  – масса всей системы.

Относительно какой точки (какого начала) можно записывать уравнение моментов?

Три наиболее выгодных случая:

1. Начало совпадает с центром масс твердого тела;

$$O' = \text{ц. м.}, \quad \bar{V}_{O'} = \bar{V}_c$$

2. Начало движется параллельно центру масс твердого тела;

$$O' \uparrow \uparrow \text{ц. м.}, \quad \bar{V}_{O'} \parallel \bar{V}_c$$

3. Начало лежит на мгновенной оси вращения твердого тела.

$$\bar{V}_{O'} = 0$$

$$\bar{L}_{O'} = \sum [\bar{r}_i' * m_i \bar{v}_i]$$

$$\bar{v}_i = \bar{V}_c + \bar{v}_i'$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{O'} &= \sum m_i [\bar{r}_i' * (\bar{V}_c + \bar{v}_i')] = \sum m_i [\bar{r}_i' * \bar{V}_c] + \sum m_i [\bar{r}_i' * \bar{v}_i'] = \\ &= [(\sum m_i \bar{r}_i') * \bar{V}_c] + \sum m_i [\bar{r}_i' * \bar{v}_i'] = \sum [\bar{r}_i' * m_i \bar{v}_i'] \end{aligned}$$

### Статика

Для того, чтобы твердое тело находилось в равновесии, нужно чтобы:

- 1) Сумма приложенных к нему внешних сил была равна нулю.
- 2) Сумма приложенных моментов внешних сил была равна нулю.

Условие устойчивости равновесия – локальный минимум потенциальной энергии.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x$$

$$L_x = J\omega$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M$$

$$J\varepsilon = M$$

## Лекция 13

### Статика. Продолжение

Свойства осевого момента инерции.

- 1)  $J = K mL^2$ , где  $m$  – масса твердого тела,  $L$  – некоторый его характерный размер,  $K$  – безразмерный коэффициент.
- 2) Момент инерции относительно точки.

Представим абсолютно твердое тело. Рассмотрим некоторую точку  $O$ , рассмотрим элемент  $\Delta m_i$ .

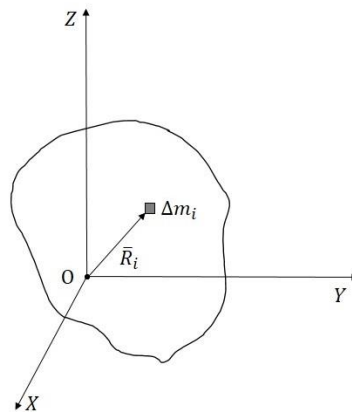


Рисунок 13.1. Твердое тело

$$\theta = \sum \Delta m_i R_i^2$$

Свяжем с точкой  $O$  систему координат  $X, Y, Z$ .

$$J_x = \sum \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_y = \sum \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$J_z = \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_x + J_y + J_z = 2\theta$$

Если выбрать в твердом теле любую произвольную точку, связать с ней систему координат  $X, Y, Z$  и найти осевые моменты инерции относительно этих трех осей  $X, Y, Z$ , то сумма трех осевых моментов инерции будет равна удвоенному моменту инерции относительно точки  $O$ .

Пусть есть тонкостенная полая сфера массой  $m$  и радиусом  $R$ . Чему равен осевой момент инерции относительно оси  $Z$ ?

$$\theta = mR^2$$

$$J_x = J_y = J_z = J$$

$$3J = 2mR^2$$



$$J = \frac{2}{3}mR^2$$

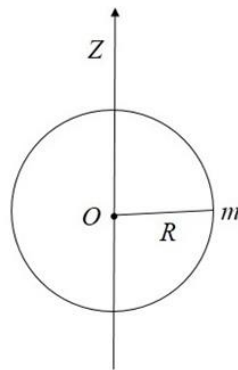


Рисунок 13.2. Сфера

- 3) Рассмотрим плоскую пластинку. Выберем на пластинке некоторую точку  $O$  и свяжем с точкой систему координат так, что оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости пластинки, а ось  $Z$  направлена перпендикулярно плоскости пластинки. Рассмотрим элемент  $\Delta m_i$ . (Рисунок 13.3.)

$$J_z = \theta$$

$$\theta = \sum \Delta m_i r_i^2$$

$$J_x + J_y + J_z = 2J_z$$

$$J_z = J_x + J_y$$

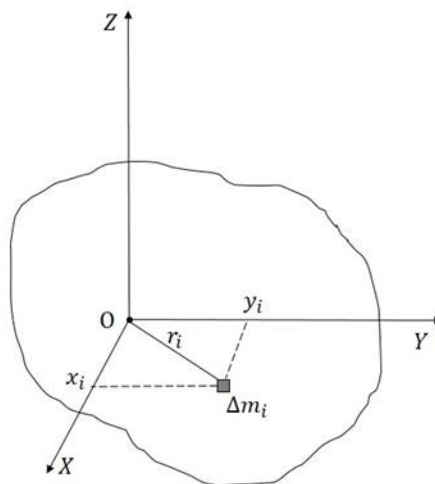


Рисунок 13.3. Твердое тело

Если есть плоское тело и оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости тела, а ось  $Z$  направлена перпендикулярно плоскости тела, то осевой момент инерции относительно оси  $Z$  равен сумме осевых моментов относительно осей  $X$  и  $Y$ .

Рассмотрим однородный диск массой  $m$  и радиусом  $R$ . Направим ось  $Z$  на нас.

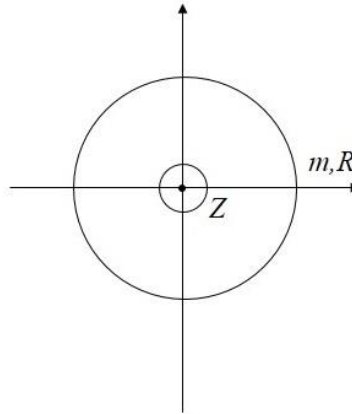


Рисунок 13.4. Однородный диск

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Введем еще 2 оси  $X$  и  $Y$ .

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m R^2$$

- 4) Рассмотрим некоторое твердое тело, выберем в нем точку  $O$  и проведем через нее ось. Рассмотрим некоторый элемент  $\Delta m_i$ .

$$\begin{aligned} \theta &\geq J_z \\ 2\theta &\geq 2J_z \\ J_x + J_y + J_z = 2\theta &\geq 2J_z \\ J_z &\leq J_x + J_y \end{aligned}$$

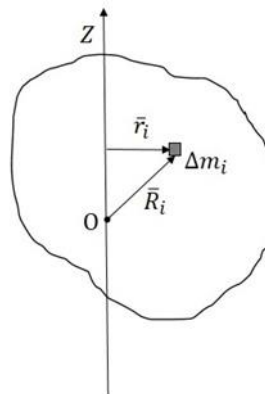


Рисунок 13.5. Твердое тело

Из отрезков с длинами  $J_x, J_y, J_z$  можно составить треугольник.

- 5) Рассмотрим цилиндр. (Рисунок 13.6.) Чему равен осевой момент инерции относительно оси  $Z$ ?

$$J_z = \sum \Delta m_i r_i^2$$

Мысленно сожмем цилиндр вдоль оси  $Z$ . Цилиндр превратится в плоский диск. При такой деформации расстояние  $r_i$  от оси до каждого из элементов массы  $\Delta m_i$  не изменится. Следовательно не изменится и осевой момент инерции. Т.е. осевой момент инерции цилиндра совпадает с осевым моментом инерции диска, и не зависит от высоты цилиндра.

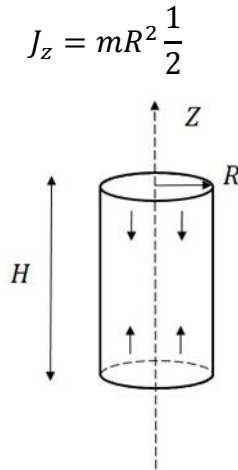


Рисунок 13.6. Цилиндр

#### 6) Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Голландский механик, физик, астроном Христиан Гюйгенс ван Зейлихем (1629-1695)

Швейцарский математик Якоб Штейнер (1796-1863)

Рассмотрим некоторое твердое тело, вращающееся вокруг фиксированной оси  $O$ . Рассмотрим ось, проходящую через центр масс тела  $C$ . Чему равен осевой момент инерции относительно оси  $O$ ? Рассмотрим элемент  $\Delta m_i$ . Проведем радиус-векторы.

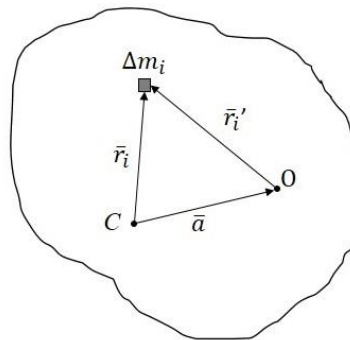


Рисунок 13.7. Иллюстрация теоремы Гюйгенса Штейнера.

$$\begin{aligned}\vec{r}_i' &= \vec{r}_i - \vec{a} \\ J_O &= \sum \Delta m_i r_i'^2 = \sum \Delta m_i (\vec{r}_i - \vec{a})^2 = \sum \Delta m_i \vec{r}_i^2 + \sum \Delta m_i \vec{a}^2 - 2\vec{a} \sum \Delta m_i \vec{r}_i \\ J_O &= J_C + m a^2\end{aligned}$$

Момент инерции  $J_O$  твердого тела относительно некоторой оси  $O$  равен моменту инерции  $J_C$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$ , сложенному с величиной  $ma^2$ , где  $m$  – масса тела,  $a$  – расстояние между осями.

Уравнение моментов и уравнение движения при плоском движении.

Если есть какое-то произвольное твердое тело (Рисунок 13.8.), то все его точки движутся в параллельных плоскостях. Для того чтобы зафиксировать положение твердого тела в пространстве при плоском движении достаточно указать положение произвольного отрезка  $AB$ , лежащего в плоскости движения. Следовательно есть три степени свободы.

Например, в качестве таких степеней свободы могут быть выбраны координаты точки  $A$  и угол между некоторой произвольной линией в плоскости движения и отрезком  $AB$ . Можно рассматривать плоское движение твердого тела как сумму поступательного движения и вращения вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости движения.

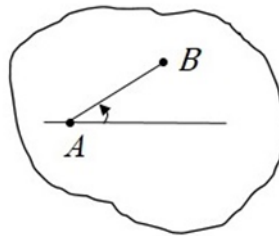


Рисунок 13.8. Произвольный отрезок

Для того чтобы описать движение твердого тела необходимы три скалярных уравнения.

1) Теорема движения центра масс.

$$m \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\text{внеш}}$$

2) Уравнение вращательного движения.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}}$$

3) Уравнение движения в случае движения вокруг фиксированной оси.

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum \bar{M}_i^{\text{внеш}}$$

Если рассматривается движение плоского тела, и движение является поступательным, то на твердое тело действует сила инерции, которая приложена к центру масс тела.

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$$

Следовательно, эта ось не создает никакого момента относительно оси проходящей через центр масс.

Если рассматривается вращательное движение относительно оси, которая движется параллельно скорости центра масс, то относительно этой системы отсчета нужно будет рассматривать моменты сил инерции.

Если ось проходит через мгновенную ось вращения, моменты сил инерции учитывать не нужно, т.к. мгновенная ось инерции в любой момент времени покоится.

Кинетическая энергия твердого тела.

Введем некоторую систему  $K$ . Рассмотрим некоторую произвольную систему материальных точек. Введем некоторую систему  $K'$ . Некоторая материальная точка  $m_i$  относительно системы  $K$  характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}_i$ , относительно системы  $K'$  – радиус-вектором  $\vec{r}_i'$ . (Рисунок 13.9.). Найдем кинетическую энергию системы материальных точек  $T$  относительно системы координат  $K$ .

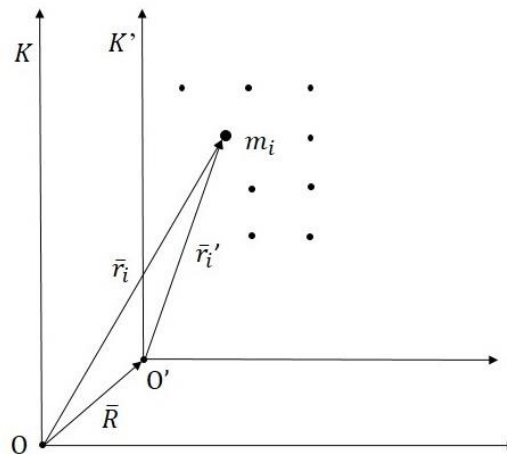


Рисунок 13.9. Произвольная система материальных точек

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{R} + \vec{r}_i' \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i' \\ T &= \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{V} + \vec{v}_i')^2}{2} = \sum \frac{m_i V^2}{2} + \sum m_i (\vec{V} \vec{v}_i') + \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} = \\ &= \frac{m V^2}{2} + \vec{V} \sum m_i \vec{v}_i' + \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} = \frac{m V^2}{2} + m (\vec{V} V_C') + T' \\ T' &= \sum \frac{m_i v_i'^2}{2}\end{aligned}$$

Представим, что точка  $O'$  совпадает с центром масс.

$$O' = \text{ц. м.} \Rightarrow V_C' = 0$$

$$T = \frac{m V^2}{2} + T' \text{ – теорема Кёнига.}$$

**Теорема Кёнига** – Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии материальной точки с массой, равной общей массе системы, и движущейся вместе с центром масс, и кинетической энергии относительно движения всех материальных точек в системе отсчета, связанной с центром масс.

**Теорема Кёнига (вторая формулировка)** – Кинетическая энергия системы материальных точек складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и кинетической энергии движения относительно центра масс.

Пусть твердое тело совершает **вращательные движения** вокруг фиксированной оси. Тогда, кинетическая энергия находится по формуле:

$$v_i = \omega r_{\perp i}$$

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_{\perp i}^2 = \frac{J \omega^2}{2}$$

При **плоском движении** твердого тела, кинетическая энергия находится по формуле:

$$\vec{v}_i = \vec{V}_C + \vec{v}_{\text{впр}i}$$

$$T = \frac{m V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}$$

$$O' = \text{мгн. ось} \Rightarrow V = 0$$

$$T = T' = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{J_{O'} \omega^2}{2}$$

Рассмотрим **сферическое движение** твердого тела, т.е. движение тела, имеющего одну закрепленную точку. Кинетическая энергия находится по формуле:

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega} * \vec{r}_i]$$

$$T = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{v}_i * \vec{v}_i)}{2} = \sum \frac{m_i ([\vec{\omega} * \vec{r}_i] * \vec{v}_i)}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{\omega} * [\vec{r}_i * \vec{v}_i])}{2} =$$

$$= \frac{\vec{\omega}}{2} \sum [\vec{r}_i * (m_i \vec{v}_i)] = \frac{1}{2} (\vec{L} * \vec{\omega})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 L_k \omega_k$$

$$L_k = \sum_{j=1}^3 J_{kj} \omega_j$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^3 J_{kj} \omega_k \omega_j$$

Для определения кинетической энергии твердого тела достаточно знать компоненты тензора инерции и проекции угловой скорости на оси  $X, Y, Z$ .

Центр удара.

Пусть есть некоторое твердое тело, которое подвешено на ось  $O$ . (Рисунок 13.10.) Представим, что мы наносим удар по телу. На каком расстоянии нужно стукнуть по телу, для того чтобы в момент удара в оси не возникала сила реакции?

$$m \frac{dV_C}{dt} = F$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = Fl$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = ml \frac{dV_c}{dt}$$
$$l = \frac{J}{m} \frac{d\omega}{dV_c}$$
$$V_c = \omega a \Rightarrow \frac{d\omega}{dV_c} = \frac{1}{a}$$
$$l = \frac{J}{ma}$$

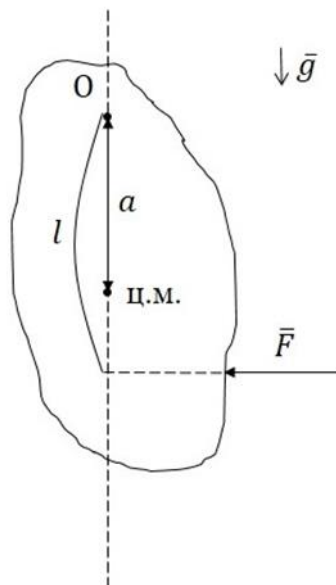


Рисунок 13.10. Иллюстрация центра удара.

Для того, чтобы при кратковременном ударе, который мы наносим по подвешенному телу, ось на которой висит тело не испытывала воздействия со стороны этого тела, нужно чтобы удар был направлен в точку, которая лежит под центром масс на расстоянии  $l$  от оси  $O$ . Эта точка называется **центром удара**.

Движение твердого тела с закрепленной точкой. Гироскопы.

Гироскоп – прибор для обнаружения движения.

**Симметричный гироскоп** – это твердое тело, обладающее осью симметрии, быстро вращающееся вокруг этой оси, причем так, что ось может менять свое положение в пространстве.

Эта ось называется **осью фигуры гироскопа**.

**Точка опоры** – неподвижная (закрепленная) точка оси фигуры гироскопа.

Очень часто закрепляют центр масс гироскопа, тогда точка опоры совпадает с центром масс.

**Карданов подвес** – гироскоп с закрепленным центром масс.

Изобретен Филоном Византийским (III в. до н.э.)

Описал это устройство в 1550 году итальянский математик и инженер Джероламо Кардано (1501-1576).

### Движение симметричного гироскопа с неподвижной точкой опоры.

- 1) Рассмотрим симметричный гироскоп, который вращается вокруг оси своей фигуры. Выберем две произвольные материальные точки. (Рисунок 13.11.)

$$\begin{aligned} d\bar{L} &= dm[\bar{r}_1 * \bar{v}_1] + dm[\bar{r}_2 * \bar{v}_2] \\ \bar{v}_1 &= -\bar{v}_2 \\ d\bar{L} &= dm[\bar{r}_1 * (-\bar{v}_2)] + dm[\bar{r}_2 * \bar{v}_2] = \\ &= dm[(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) * \bar{v}_2] \\ d\bar{L} &\uparrow\uparrow \bar{\omega} \\ \bar{L} &\uparrow\uparrow \bar{\omega} \end{aligned}$$

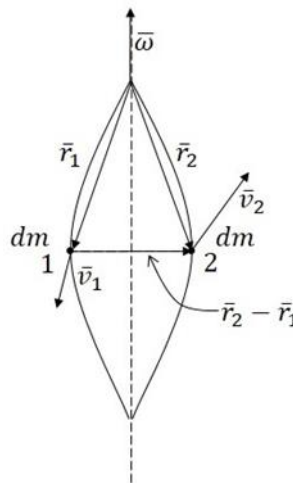


Рисунок 13.11. Симметричный гироскоп

$\bar{L} = J_{\parallel} \bar{\omega}$ , где  $J_{\parallel}$  – это осевой момент инерции относительно оси фигуры гироскопа.

- 2) Рассмотрим симметричный гироскоп, с одной закрепленной точкой вращается так, что вектор угловой скорости перпендикулярен оси фигуры гироскопа. (Рисунок 13.12)

$$\begin{aligned} d\bar{L} &= dm[\bar{r}_1 * \bar{v}_1] + dm[\bar{r}_2 * \bar{v}_2] \\ \bar{v}_1 &= \bar{v}_2 \\ d\bar{L} &= dm[(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) * \bar{v}_2] \\ d\bar{L} &\uparrow\uparrow \bar{\omega} \end{aligned}$$



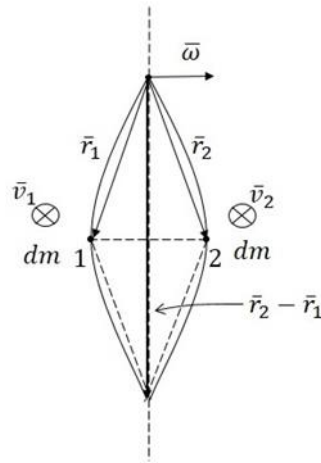


Рисунок 13.12 Симметричный гироскоп с неподвижной точкой опоры.

$\vec{L} = J_{\perp} \vec{\omega}$  где  $J_{\perp}$  – это осевой момент инерции относительно оси перпендикулярной оси фигуры гироскопа.

3) Пусть вектор угловой скорости направлен произвольным образом.

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp} \\ \vec{L} &= \vec{f}(\vec{\omega}) = \vec{f}(\vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}) = \vec{f}(\vec{\omega}_{\parallel}) + \vec{f}(\vec{\omega}_{\perp}) \\ \vec{L} &= J_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} + J_{\perp} \vec{\omega}_{\perp}\end{aligned}$$

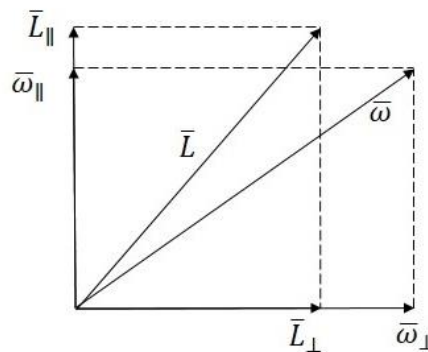


Рисунок 13.13. Иллюстрация ориентированности векторов.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= J_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} + J_{\perp} \vec{\omega}_{\perp} \\ J_{\parallel}^2 \vec{\omega}_{\parallel}^2 + J_{\perp}^2 \vec{\omega}_{\perp}^2 &= L^2 = \text{const} \\ T = \frac{1}{2} (\vec{L} * \vec{\omega}) &= \frac{1}{2} (J_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} + J_{\perp} \vec{\omega}_{\perp}) (\vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}) = \frac{1}{2} (J_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel}^2 + J_{\perp} \vec{\omega}_{\perp}^2) = \text{const}\end{aligned}$$

С точки зрения наблюдателя мы видим, что ось фигуры гироскопа совершает коническое движение вокруг некоторой невидимой нам оси. Такое движение называется – **свободная регулярная прецессия гироскопа**.

## Лекция 14

### Движение гироскопа. Продолжение

**Свободная регулярная прецессия гироскопа** – это когда ось фигуры гироскопа движется по некоторой конической поверхности вокруг вектора момента импульса, и вектор угловой скорости также движется по некоторой другой конической поверхности также вокруг вектора момента импульса.

Прецессия называется свободной, т.к. гироскоп уравновешен. То есть для того, чтобы существовала свободная прецессия гироскопа никакие моменты внешних сил не нужны.

Прецессия называется регулярной, т.к. ось фигуры гироскопа движется строго по конической поверхности, а конец фигуры гироскопа движется по окружности.

**Вынужденная прецессия** – это движение оси фигуры гироскопа, возникающее при наличии действия момента внешних сил. В общем случае не является регулярной.

Пусть у нас есть симметричный гироскоп с одной какой-то фиксированной точкой на оси фигуры. (Рисунок 14.1.) Точка опоры гироскопа неподвижна. Пусть гироскоп совершает быстрое вращение вокруг оси своей фигуры.

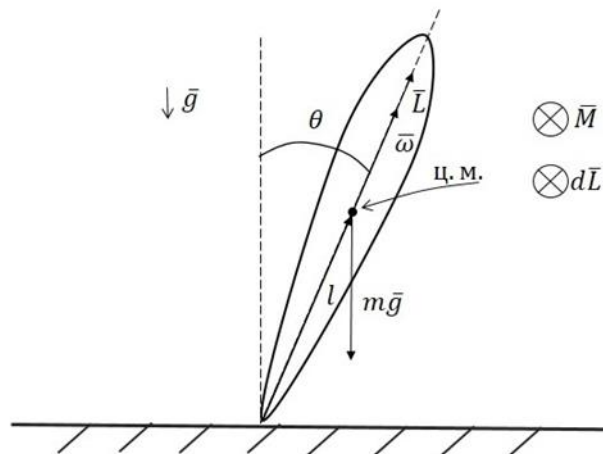


Рисунок 14.1. Прецессия

$$\vec{L} = J_{\parallel} \vec{\omega}_{\parallel} + J_{\perp} \vec{\omega}_{\perp}$$

$$J_{\perp} \vec{\omega}_{\perp} \approx 0$$

$$\vec{L} = J_{\parallel} \vec{\omega}$$

$$M = mgl \sin \theta$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow d\vec{L} \uparrow \vec{M}$$

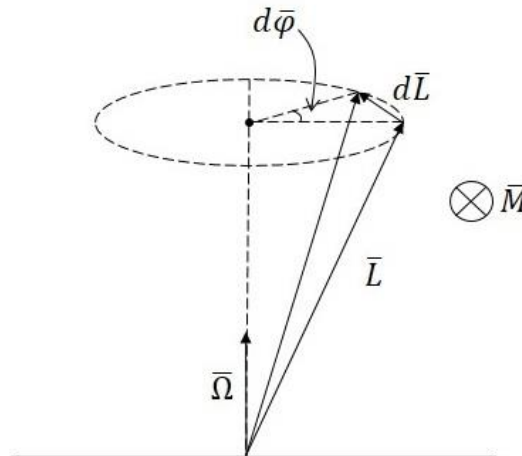


Рисунок 14.2. Расположение векторов

$$dL = L \sin \theta d\varphi$$

$$\frac{dL}{dt} = L \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = L \sin \theta \Omega = M$$

$\vec{M} = [\vec{\Omega} * \vec{L}]$  – Уравнение гироскопа.

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \theta} = \frac{mgl \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{mgl}{J_{\parallel} \omega}$$

$$\Omega \ll \omega$$

$$\frac{mgl}{J_{\parallel} \omega} \ll \omega \Rightarrow J_{\parallel} \omega^2 \gg mgl$$

$$J_{\parallel} \omega^2 \sim T$$

$$mgl \sim U$$

Для того, чтобы можно было пользоваться приближенной теорией гироскопа, кинетическая энергия вращения гироскопа вокруг оси его фигуры должна быть намного больше чем потенциальная энергия, связанная с действием тех сил, которые вызывают вынужденную прецессию.

Парадоксы приближенной теории гироскопа.

- 1) Откуда берется кинетическая энергия прецессионного движения?
- 2) Как объясняется мгновенное исчезновение вынужденной прецессии гироскопа при мгновенном прекращении действия момента внешних сил, вызывающего эту прецессию?

### Нутации.

Нутациями называется дрожание оси фигуры гироскопа, происходящее с малой амплитудой и высокой частотой.

Именно нутации делают вынужденную прецессию нерегулярной и объясняют «парадоксы» приближенной теории гироскопа.

Гироскопические силы.

**Гироскопические силы** – это силы, которые начинают действовать со стороны оси гироскопа при попытке изменить ее направление действием внешних сил.

Пусть у нас есть осесимметричное твердое тело с закрепленной точкой. Изобразим демонстратора со скамьей Жуковского, пусть он держит в руках колесо. Колесо вращается. Представим, что демонстратор решил поднять колесо у себя над головой. (Рисунок 14.3)

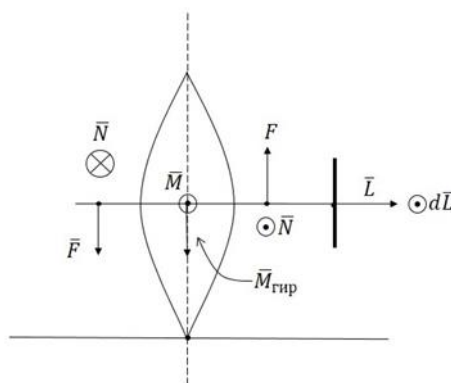


Рисунок 14.3. Действие гироскопических сил.

Мы начинаем действовать на ось колеса создавая момент внешних сил, тут же возникает вектор приращения момента импульса  $d\vec{L}$ , с ним связаны силы реакции, которые создают момент гироскопических сил.

#### Правило Н.Е. Жуковского.

Русский механик Жуковский Николай Егорович (1847-1921).

Вектор  $M_{\text{гир}}$  момента гироскопических сил направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектор  $L$  момента импульса гироскопа и вектор  $\vec{\Omega}_{\text{прин}}$  угловой скорости принудительного вращения.

При этом вектор  $M_{\text{гир}}$  направлен в ту сторону, откуда поворот вектора  $L$  к вектору  $\vec{\Omega}_{\text{прин}}$  по кратчайшему расстоянию осуществляется против часовой стрелки:

$$M_{\text{гир}} = -[\vec{\Omega}_{\text{прин}} * L]$$

Реакция гироскопа, прецессирующего в поле силы тяжести, на внешнее воздействие.

При попытке ускорить прецессию гироскопа его центр масс поднимается.

При попытке замедлить прецессию гироскопа его центр масс опускается.

Принцип Ле Шателье-Брауна.

Французский физик и химик Анри Луи Ле Шателье (1850-1936).

---

Немецкий физик Карл Фердинанд Браун (1850-1918).

На всякое внешнее воздействие система стремится ответить такими изменениями, которые стремятся ослабить это внешнее воздействие.

**Симметричный волчок.**

При движении симметричного быстро вращающегося волчка по шероховатой поверхности ось его фигуры:

- Поднимается, если центр масс находится выше точки опоры;
- Опускается, если центр масс находится ниже точки опоры.

Гироскоп с двумя степенями свободы, установленный на вращающееся основание.

**Правило Фуко** – При вращении основания ось фигуры гироскопа устанавливается параллельно оси вращения основания, причем так, что векторы угловых скоростей основания и гироскопа оказываются сонаправленными.

## Лекция 15.

### Нелинейные колебания.

**Нелинейные колебания** – это колебания, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями колебаний.

Пусть у нас есть математический маятник.

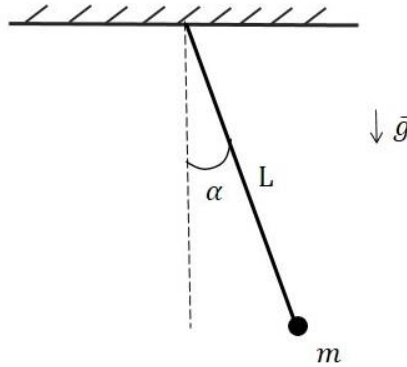


Рисунок 15.1. Математический маятник

Запишем дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \alpha \ll 1$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega_0 t$$

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3 = 0$$

$$-\alpha_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \alpha_0 \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{6} \sin^3 \omega_0 t = 0$$

$$\sin^3 \omega_0 t = \frac{3}{4} \sin \omega_0 t - \frac{1}{4} \sin 3\omega_0 t$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t + \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega_0 t$$

$$\varepsilon \ll 1$$

$$\ddot{\alpha}(t) = -\alpha_0 \omega^2 \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t$$

$$\omega_0^2 \alpha(t) = \omega_0^2 \alpha_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t$$

$$-\frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3 = -\frac{\omega_0^2}{6} (\alpha_0 \sin \omega t + \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t)^3 \approx -\frac{\omega_0^2}{6} \alpha_0^3 \sin^3 \omega t =$$

$$= -\frac{\omega_0^2}{6} \alpha_0^3 \left( \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = -\frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{8} \sin \omega t + \frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{24} \sin 3\omega t$$

$$0 = -\alpha_0 \omega^2 \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t + \omega_0^2 \alpha_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t -$$

$$-\frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{8} \sin \omega t + \frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{24} \sin 3\omega t = 0$$

$$-\alpha_0 \omega^2 + \omega_0^2 \alpha_0 - \frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{8} = 0$$

$$-9\omega^2 \varepsilon \alpha_0 + \omega_0^2 \varepsilon \alpha_0 + \frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{24} = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{8}\right)$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{8}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \quad x \ll 1$$

$$\omega \approx \omega_0$$

$$8\omega_0^2 \varepsilon \alpha_0 = \frac{\omega_0^2 \alpha_0^3}{24}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0^2}{192} \ll 1$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin\left[\omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)t\right] + \frac{\alpha_0^3}{192} \sin\left[3\omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)t\right]$$

Особенности нелинейных колебаний:

- Колебания являются неизохронными.
- Кратные частоты
- Комбинационные частоты

Представим, что система нелинейная и на систему действует сумма двух вынуждающих сил.

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3 = f_{01} \cos \omega_1 t + f_{02} \cos \omega_2 t$$

**Параметрические колебания** – это нелинейные колебания, которые происходят при периодическом изменении какого-либо параметра колебательной системы вследствие внешних воздействий.

**Релаксационные колебания** – это разновидность параметрических колебаний, при которых некоторый параметр системы изменяется так, что энергия системы сначала медленно увеличивается, а затем быстро, скачкообразно, уменьшается и затем эти процессы периодически повторяются.

**Автоколебания** – это нелинейные колебания, при которых система сама регулирует поступление энергии от внешнего источника, поддерживая незатухающие колебания. (Маятник Фруда).

Колебания систем с двумя степенями свободы.

Пусть у нас на горизонтальной поверхности расположены два грузика. Эти грузики соединены друг с другом и с вертикальными стенками пружинками.

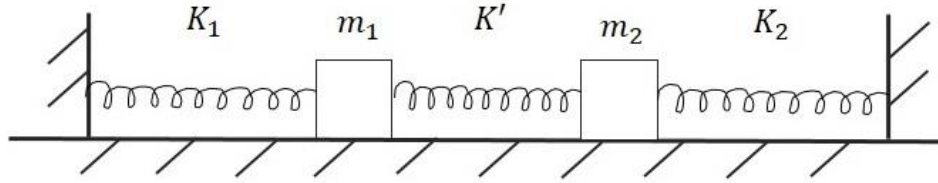


Рисунок 15.2. Иллюстрация системы с двумя степенями свободы.

**Парциальные колебания** – это колебания системы, у которой ограничены все степени свободы, кроме одной.

Чтобы получить первое парциальное колебание, нужно ограничить одну из степеней свободы. Зафиксируем грузик  $m_2$ , тогда колебаться сможет только грузик  $m_1$  и частота колебаний этого грузика:

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{K_1 + K'}{m_1}}$$

Чтобы получить второе парциальное колебание, нужно исключить другую степень свободы. Зафиксируем грузик  $m_1$ , тогда колебаться сможет только грузик  $m_2$  и частота колебаний этого грузика:

$$\omega_{p2} = \sqrt{\frac{K_2 + K'}{m_2}}$$

**Нормальные колебания** – это колебания, при которых все части системы колеблются по гармоническому закону с одинаковой частотой.

**Нормальные колебания** часто называют *модами* (и еще, не совсем удачно – нормальными модами).

**Парциальные (нормальные) частоты** – это частоты соответствующих парциальных (нормальных) колебаний.

Представим, что в нашей системе одинаковые грузики и одинаковые пружинки.

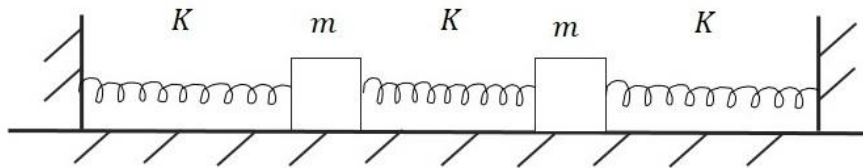


Рисунок 15.3. Парциальные колебания

Сместим оба груза в одну сторону, на одинаковое расстояние и отпустим одновременно. Тогда,

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$



Разведем грузы в разные стороны на одинаковое расстояние и отпустим одновременно. Тогда,

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

Рассмотрим систему двух связанных математических маятников.

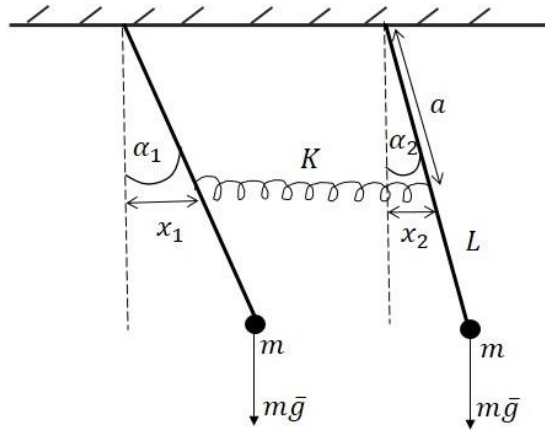


Рисунок 15.4. Система двух связанных маятников.

Уравнение движения каждого из маятников будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} mL^2 \ddot{\alpha}_1 &= -mgL \sin \alpha_1 - K(x_1 - x_2)a \cos \alpha_1 \\ mL^2 \ddot{\alpha}_2 &= -mgL \sin \alpha_2 - K(x_1 - x_2)a \cos \alpha_2 \\ \alpha \ll 1, \quad \sin \alpha &\approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad x \approx a\alpha \end{aligned}$$

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{L} \alpha_1 + \frac{Ka^2}{mL^2} (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{L} \alpha_2 + \frac{Ka^2}{mL^2} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

$$\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{L} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

$$\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{L} (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{2Ka^2}{mL^2} (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$S_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\ddot{S}_1 + \omega_1^2 S_1 = 0$$

$$\ddot{S}_2 + \omega_2^2 S_2 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2Ka^2}{mL^2}}$$

$$S_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$S_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$$
$$\alpha_2 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты нормальных колебаний.

## Лекция 16.

### Общий подход к решению уравнений.

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{L}\alpha_1 + \frac{Ka^2}{mL^2}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{L}\alpha_2 + \frac{Ka^2}{mL^2}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L}$$

$$\beta = \frac{Ka^2}{mL^2}$$

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_1^2\alpha_1 + \beta(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \omega_1^2\alpha_2 + \beta(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

$$\alpha_1(t) = Ae^{i\lambda t}$$

$$\alpha_2(t) = Be^{i\lambda t}$$

$$-\lambda^2 A + \omega_1^2 A + \beta(A - B) = 0$$

$$-\lambda^2 B + \omega_1^2 B + \beta(B - A) = 0$$

$$A(\omega_1^2 - \lambda^2 + \beta) - B\beta = 0$$

$$A(-\beta) + B(\omega_1^2 - \lambda^2 + \beta) = 0$$

Такая система имеет нетривиальное решение, т.е. такое решение при котором  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю, тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю.

$(\omega_1^2 - \lambda^2 + \beta)^2 - \beta^2 = 0$  – характеристическое уравнение исходной системы дифференциальных уравнений.

$$\omega_1^2 - \lambda^2 + \beta = \pm\beta$$

$$\lambda^2 = \omega_1^2 + \beta \pm \beta$$

$$\lambda_1^2 = \omega_1^2 = \frac{g}{L} = \omega_l^2$$

$$\lambda_2^2 = \omega_1^2 + 2\beta = \frac{g}{L} + \frac{2Ka^2}{mL^2} = \omega_{II}^2$$

Произвольное колебание системы можно представить, как суперпозицию нормальных колебаний (мод) системы.

## Механика волн.

**Волновой процесс** – это процесс распространения колебательного движения в пространстве.

**Механические волны** – это волновой процесс в упругой среде.

Распространение импульсов сжатия и разрежения в среде.

Рассмотрим стержень и некоторый элемент среды длиной  $dx$ . Представим, что через стержень идет импульс сжатия.  $S$  – смещение границы элемента.

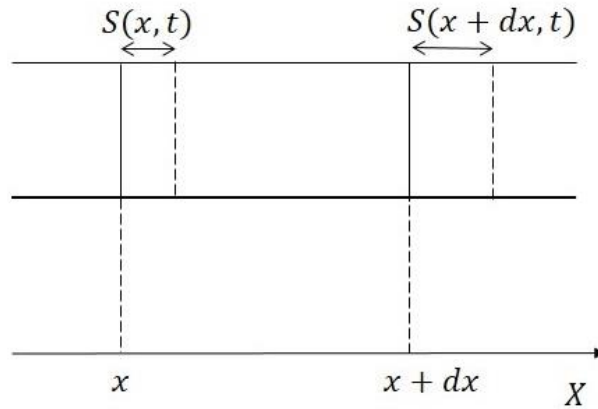


Рисунок 16.1. Участок волны

$$\varepsilon = \frac{S(x + dx, t) - S(x, t)}{dx} = \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)(dx + S(x + dx, t) - S(x, t)) = (\rho_0 + \delta\rho)(dx + \varepsilon dx) =$$

$$= \rho_0 dx + \rho_0 \varepsilon dx + \delta\rho dx + \delta\rho \varepsilon dx = \rho_0 \varepsilon + \delta\rho + \delta\rho \varepsilon$$

$$\varepsilon = -\frac{\delta\rho}{\rho_0}$$

$$\delta\rho > 0, \quad \varepsilon < 0$$

$$\delta\rho < 0, \quad \varepsilon > 0$$

Волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$S = (x, t)$  – смещение частиц среды.

$$C = \text{const}$$

$$S = \left(t \pm \frac{x}{c}\right) = S(\theta(x, t))$$

$$\theta = t \pm \frac{x}{c}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dS}{d\theta}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dS}{d\theta}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d^2 S}{d\theta^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dS}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \pm \frac{1}{c} \frac{dS}{d\theta}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\pm \frac{1}{c} \frac{dS}{d\theta}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 S}{d\theta^2}$$

Функция с аргументом  $\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$  является решением волнового уравнения.

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x} = \pm \frac{1}{c} \frac{dS}{d\theta} = \pm \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = \pm \frac{v}{c}$$

$$\varepsilon = \pm \frac{v}{c}$$

В системе может распространяться волна. Коэффициент перед второй производной по координате это квадрат скорости распространения волны.

**Продольная волна** – это волна, в которой направление колебаний частиц совпадает с направлением распространения волны.

**Поперечная волна** – это волна, в которой колебание частиц происходит в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Плоская гармоническая бегущая волна.

$$S(x, t) = S \left( t \pm \frac{x}{c} \right)$$

Представим, что у нас есть шнур. Начнем двигать шнур вверх вниз по гармоническому закону.

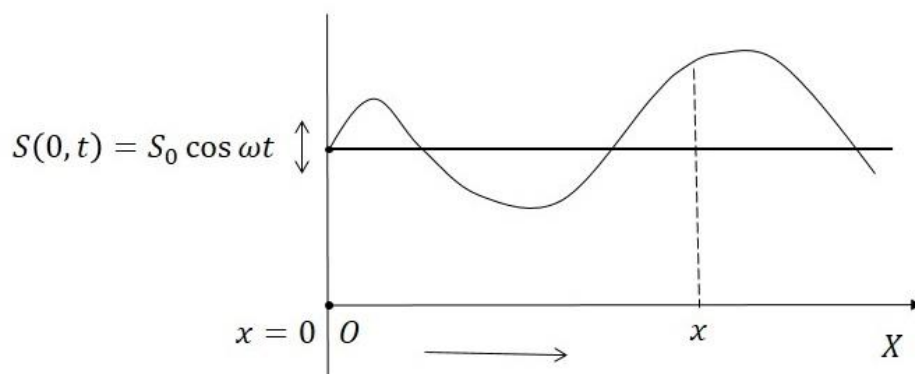


Рисунок 16.2. Иллюстрация бегущей гармонической волны.

$$\tau = \frac{x}{c}$$

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega(t - \tau)) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = S_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$$

$K = \frac{\omega}{c}$  – Волновое число

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - Kx)$$

$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - Kx + \varphi_0)$  – Уравнение плоской бегущей гармонической волны.

$\varphi = \omega t - Kx + \varphi_0$  – **Фаза волны.**

$$\varphi = \omega t - Kx + \varphi_0 = \text{const}, t = t_0 = \text{const}$$

$$d\varphi = \omega dt - Kdx = 0$$

$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{K} = c$  – **Фазовая скорость волны.**

$$S(x_0, t) = S_0 \cos(\omega t - Kx_0 + \varphi_0)$$

$$x_0 = \text{const}$$

$$\omega \Delta t = \omega T = 2\pi = \Delta\varphi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

$$S(x, t_0) = S_0 \cos(\omega t_0 - Kx + \varphi_0)$$

$$t_0 = \text{const}$$

$$\Delta\varphi = -K\Delta x = -K\lambda = -2\pi$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{K}$$

$\lambda$  – **Длина волны** (это минимальное расстояние между точками волны, колеблющимися в фазе).

$C = \frac{\omega}{K} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$  – Связь между фазовой скоростью, длиной волны и частотой волны.

### Волны скорости, ускорения, относительной деформации и напряжения.

Пусть в среде распространяется плоская бегущая гармоническая волна.

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - Kx)$$

$$v = \frac{\partial S}{\partial t} = -S_0 \omega \sin(\omega t - Kx) = S_0 \cos\left(\omega t - Kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_0 = S_0 \omega$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = S_0 \omega^2 \cos(\omega t - Kx) = S_0 \omega^2 \cos(\omega t - Kx + \pi)$$

$$a_0 = S_0 \omega^2$$

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x} = S_0 K \sin(\omega t - Kx) = S_0 K \cos\left(\omega t - Kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varepsilon_0 = S_0 K$$

Скорость распространения волн.

Рассмотрим натянутую струну. Выведем струну из положения равновесия и отпустим. С какой скоростью вдоль струны распространяются волны?

Рассмотрим некоторый элемент струны.

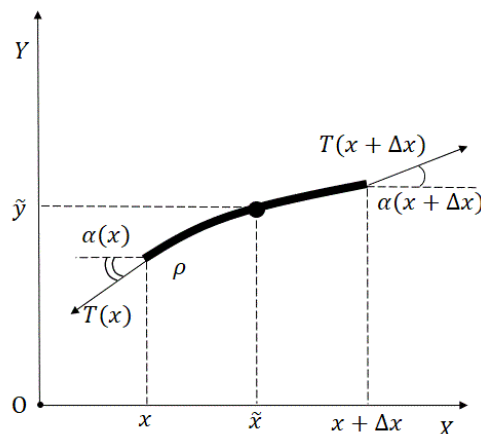


Рисунок 16.2. Скорость распространения волны на струне.

$$\Delta l \approx \Delta x$$

$$\rho = \frac{dm}{dl}$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial t^2} = T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) - T(x) \cos \alpha(x) = 0$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) - T(x) \sin \alpha(x)$$

$$\alpha \ll 1, \quad \sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1$$

$$T(x) = T(x + \Delta x) = T = \text{const}$$

$$\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} \approx T(x + \Delta x) \text{tg } \alpha(x + \Delta x) - T(x) \text{tg } \alpha(x) \approx$$

$$\approx T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x = T \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \Delta x$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$$

$$\frac{T}{\rho} = c^2$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

## Лекция 17.

### Волны скорости, ускорения, относительной деформации и напряжения. Продолжение

Рассмотрим стержень с продольной боковой поверхностью.  $\Sigma$  – площадь поперечного сечения. (Рисунок 17.1.)

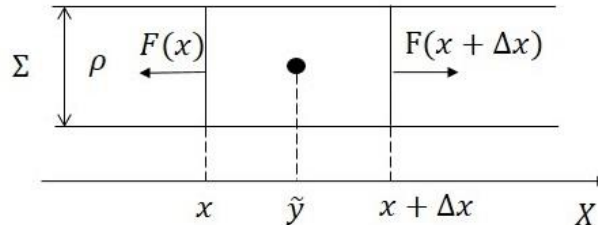


Рисунок 17.1. Скорость распространения волны на стержне.

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$F = \sigma * \Sigma$$

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\rho \Sigma \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x) = (\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)) \Sigma = (\varepsilon(x + \Delta x) - \varepsilon(x)) \Sigma E =$$

$$= \left( \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) \Sigma E = \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \Delta x \Sigma E$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$$

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$C = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Рассмотрим столб газа. (Рисунок 17.2.) При распространении волны в газе, каждый элемент газа деформируется, что приводит к изменению давления и плотности.

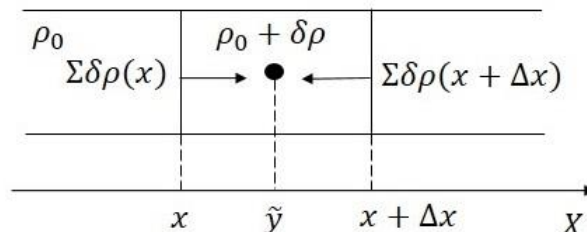


Рисунок 17.2. Скорость распространения волны в газе.



$$\delta p = -\sigma$$

$$\sigma \sim \varepsilon$$

$$p = p(\rho)$$

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} * \delta \rho$$

$$\varepsilon = -\frac{\delta \rho}{\rho_0}$$

$$\rho_0 \Sigma \Delta x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \Sigma \delta p(x + \Delta x) - \delta p(x) = \Sigma \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\varepsilon(x + \Delta x) - \varepsilon(x)) =$$

$$= \Sigma \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) = \Sigma \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \Delta x$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$$

$$C = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}}$$

Процесс распространения звука в газе является адиабатическим. Тогда,

$$p = \text{const } \rho^\gamma$$

$$\gamma \approx 1,41$$

$$p = \frac{\rho RT}{\mu}$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} = \text{const } \gamma \rho^{\gamma-1} \Big|_{\rho_0} = \gamma \frac{\text{const } \rho^\gamma}{\gamma} \Big|_{\rho_0} = \frac{\gamma p}{\rho} \Big|_{\rho_0} = \frac{\gamma RT}{\mu}$$

$$C = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

$C \approx 340$  м/с – скорость звука в воздухе.

Скорость звука в жидкости.

$$C^2 = \frac{dp}{d\rho} \Big|_{\rho_0}$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$C^2 = \frac{dp}{d\rho} = C^2 = \frac{dp}{d\left(\frac{M}{V}\right)} = \frac{dp}{d\left(-\frac{dV}{V^2}\right)} = \frac{1}{\frac{M}{V} \left(-\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}\right)} = \frac{1}{\rho \gamma}$$

$$\gamma = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho \gamma}}$$

### Энергия бегущей волны.

Выражения для объемной плотности кинетической и потенциальной энергии в бегущей волне.

$w = \frac{W}{V}$  – объемная плотность энергии.

$$S(x, t) = S_0 \cos(\omega t - Kx)$$

$$w_k = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - Kx)$$

$$w_{\pi} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} E S_0^2 K^2 \sin^2(\omega t - Kx)$$

$$E = \rho C^2$$

$$K = \frac{\omega}{C}$$

$$w_{\pi} = \frac{1}{2} \rho C^2 S_0^2 \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2(\omega t - Kx) = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - Kx)$$

$$w_k = w_{\pi}$$

$$w = w_k + w_{\pi} = 2w_k = 2w_{\pi} = \rho S_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - Kx) = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 (1 - \cos 2(\omega t - Kx))$$

- Объемная плотность энергии, запасенной в волне колеблется на удвоенной частоте.
- Объемная плотность энергии никогда не бывает отрицательной.
- Колебания энергии происходят вокруг некоторого среднего значения.

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2$$

Следовательно бегущая волна переносит энергию.

Определение вектора Умова-Пойнтинга.

Русский физик Умов Николай Алексеевич (1846-1915).

Британский физик Джон Генри Пойнтинг (1852-1914).

Представим, что у нас есть некоторая площадка с площадью поперечного сечения  $\Sigma$  и через эту площадку идет плоская бегущая гармоническая волна. Тогда за время  $\Delta t$  через цилиндр длиной  $C \Delta t$  пройдет энергия  $W$ .

$$W = w C \Delta t \Sigma$$

$$J = \frac{W}{\Delta t \Sigma} = w C$$

$\vec{J} = w \vec{C}$  – вектор Умова-Пойнтинга.

$$\langle J \rangle = I = \langle w \rangle * C = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 C = I$$

$I$  – интенсивности волны, т.е. средняя плотность потока энергии.

Акустический «закон Ома».

Представим, что в среде распространяется плоская бегущая гармоническая волна. С этой волной связаны волны скорости, ускорения и относительной деформации, а следовательно существует волна напряжения.

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= E\varepsilon_0 = ES_0K \\ \delta p &= -\sigma \\ \delta p_0 &= \sigma_0 \\ E &= \rho C^2 \\ S_0 &= \frac{v_0}{\omega} \\ K &= \frac{\omega}{C} \\ \delta p_0 &= \rho C^2 \frac{v_0}{\omega} \frac{\omega}{C} = \rho C v_0 \\ v_0 &= \frac{\delta p_0}{\rho C}\end{aligned}$$

$\rho C$  – акустическое сопротивление (акустический импеданс).

$$I = \frac{1}{2} \rho S_0^2 \omega^2 C = \frac{1}{2} \rho C v_0^2 = \frac{1}{2} \rho C \frac{(\delta p_0)^2}{(\rho C)^2} = \frac{1}{2} \frac{(\delta p_0)^2}{\rho C}$$

### Стоячие волны.

Пусть вдоль оси  $X$  распространяется плоская бегущая гармоническая волна  $S_1$ . А навстречу ей точно такая же волна  $S_2$ .

$$\begin{aligned}S_1(x, t) &= S_0 \cos(\omega t - Kx) \\ S_2(x, t) &= S_0 \cos(\omega t + Kx) \\ S(x, t) &= S_1(x, t) + S_2(x, t) = S_0 \cos(\omega t - Kx) + S_0 \cos(\omega t + Kx) = \\ &= 2S_0 \cos \frac{\omega t - Kx + \omega t + Kx}{2} * \cos \frac{\omega t - Kx - \omega t - Kx}{2} = \\ &= 2S_0 \cos \omega t \cos Kx = S(x, t)\end{aligned}$$

При сложении двух вол бегущих навстречу друг другу получается стоячая волна.

$$\begin{aligned}x &= x_0 = \text{const} \\ S(x_0, t) &= 2S_0 \cos \omega t \cos Kx_0\end{aligned}$$

Каждая точка среды совершает гармонические колебания, но разные точки среды колеблются с разными амплитудами.

$$\begin{aligned}t &= t_0 = \text{const} \\ S(x, t_0) &= 2S_0 \cos \omega t_0 \cos Kx\end{aligned}$$

В волне существуют такие точки, которые вовсе не колеблются. Такие точки называются **узлами** стоячей волны.

$$\cos Kx = 0 \Rightarrow Kx_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, 3 \dots$$

$$K\Delta x = 2\Delta n \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{K} = \frac{\pi\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$

Следовательно, расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны равно половине длины волны.

Существуют такие точки в волне, которые колеблются с максимальной амплитудой. Такие точки называются **пучностями**.

$$\cos Kx = \pm 1 \Rightarrow Kx_n = (n-1)\pi$$

Следовательно, расстояние между двумя соседними пучностями стоячей волны равно половине длины волны.

Если есть стоячая волна, то в среде также будут существовать скорости, ускорения и относительной деформации.

$$S(x, t) = 2S_0 \cos \omega t \cos Kx$$

$$v(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} = -2S_0 \omega \sin \omega t \cos Kx$$

$$a(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} = -2S_0 \omega^2 \cos \omega t \cos Kx$$

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x} = -2S_0 K \cos \omega t \sin Kx$$

Отражение волн от границы среды.

Рассматривают два основных типа граничных условий.

1) Граница жестко закреплена.

$$S(x, t)|_{\text{гп}} = 0$$

2) Граница среды свободна.

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, t)|_{\text{гп}} = 0$$

Пусть есть шнур, который прикреплен к стене. Шнур натянут. Будем дергать левый конец шнура по гармоническому закону. (Рисунок 17.3.)

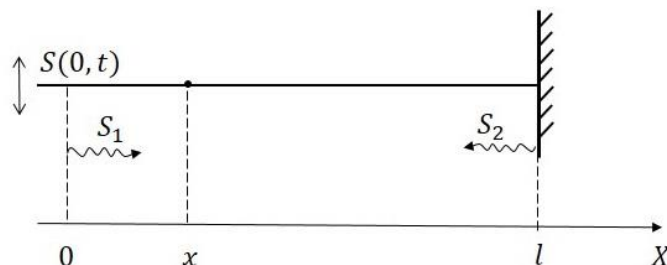


Рисунок 17.3. Шнур, прикрепленный к стене

$$S(0, t) = S_0 \cos \omega t$$

$$\tau_1 = \frac{x}{C}$$

$$S_1(x, t) = S_0 \cos \omega(t - \tau_1) = S_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{C}x) = S_0 \cos(\omega t - Kx)$$

Волна  $S_1$  дойдет до границы закрепления шнура, отразится и пойдет обратно. Возникнет волна  $S_2$ .

$$\tau_2 = \frac{l + l - x}{C} = \frac{2l - x}{C}$$

Предположим, что волна отражается полностью и при отражении волны может возникнуть какая-то дополнительная разность фаз.

$$S_2(x, t) = S_0 \cos(\omega(t - \tau_2) + \varphi_{\text{отр}}) = S_0 \cos(\omega t - K(2l - x) + \varphi_{\text{отр}})$$

$$S(x, t) = S_1(x, t) + S_2(x, t)$$

$$\begin{aligned} S(x, t) &= S_0 \cos(\omega t - Kx) + S_0 \cos(\omega t - K(2l - x) + \varphi_{\text{отр}}) = \\ &= 2S_0 \cos \frac{\omega t - Kx + \omega t - K(2l - x) + \varphi_{\text{отр}}}{2} * \cos \frac{\omega t - Kx - \omega t + K(2l - x) - \varphi_{\text{отр}}}{2} = \\ &= 2S_0 \cos(\omega t - Kl + \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) \cos(K(l - x) - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) \\ S(x, t) &= A(t) \cos(K(l - x) - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) \end{aligned}$$

$$1) S(l, t) = 0$$

$$\cos \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} = 0 \Rightarrow \varphi_{\text{отр}} = \pi$$

$$2) \frac{\partial S(l, t)}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= KA(t) \sin(K(l - x) - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) \\ \frac{\partial S(l, t)}{\partial x} &= KA(t) \sin(K(l - x) - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} = 0 \end{aligned}$$

## Лекция 18.

### Нормальные колебания стержня, струны, столба газа.

Условия возбуждения стоячих волн для трех случаев граничных условий.

- 1) Обе границы закреплены.
- 2) Обе границы свободны.
- 3) Одна граница закреплена, а другая свободна.

$$S(x, t) = A(t) \cos(K(l - x) - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2})$$

$$S = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \varepsilon = 0$$

$$1) S(0, t) = S(l, t) = 0$$

$$S(0, t) = A(t) \cos(Kl - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0$$

$$S(l, t) = A(t) \cos(\frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0$$

$$\varphi_{\text{отр}} = \pi$$

$$\cos(Kl - \frac{\pi}{2}) = \sin Kl = 0$$

$$K_n l = \pi n, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} l = \pi n \Rightarrow l = n \frac{\lambda_n}{2} = 2n \frac{\lambda_n}{4}$$

Для того, чтобы на струне с двумя закрепленными концами существовали стоячие волны, нужно чтобы на длине струны  $l$  укладывалось целое число половин длин волн или четное число четвертей длин волн.

$$\frac{\omega_n}{c} l = \frac{2\pi\nu_n}{c} l = \pi n$$

$\nu_n = \frac{c}{2l} n$  – собственные частоты колебания.

$n = 1$  – основной тон.

$n = 2, 3 \dots$  – обертоны.

$$2) \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = KA(t) \sin(K(l - x) - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2})$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=0} = KA(t) \sin(Kl - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=l} = KA(t) \sin(-\frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0$$

$$\varphi_{\text{отр}} = 0$$

$$\sin Kl = 0$$

$$3) S(0, t) = 0, \frac{\partial S}{\partial x}|_{x=l} = 0$$

$$S(0, t) = A(t) \cos(Kl - \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}|_{x=l} = KA(t) \sin(-\frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}) = 0$$

$$\varphi_{\text{отр}} = 0$$

$$\cos Kl = 0$$

$$K_n l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$l = (2n - 1) \frac{\lambda_n}{4}$$

$$\frac{\omega_n}{c} l = \frac{2\pi\nu_n}{c} l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\nu_n = \frac{c}{4l} (2n - 1)$$

### Акустические резонаторы.

Вывод формулы для собственной частоты резонатора Гельмгольца.

Немецкий физик, врач, физиолог и психолог Герман Людвиг Фердинанд фон Гельмгольц (1821-1894).

Рассмотрим колебания воздуха в носике резонатора Гельмгольца.

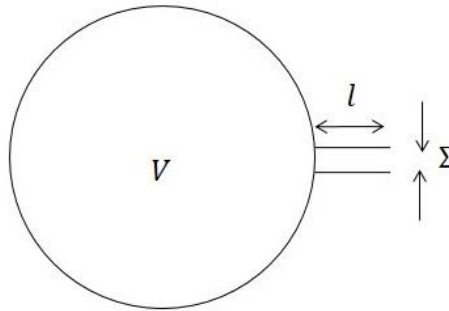


Рисунок 18.1. Резонатор Гельмгольца.

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V}$$

$$c^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho}$$

$$\delta p = c^2 \delta\rho = -c^2 \frac{\rho_0 \Sigma S}{V}$$

$$\rho_0 \Sigma l \frac{d^2 S}{dt^2} = \Sigma \delta p = - \frac{C^2 \rho_0 \Sigma^2 S}{V}$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + - \frac{C^2 \Sigma}{lV} S = 0$$

$$\omega = C \sqrt{\frac{\Sigma}{lV}}$$

Рассмотрим стоячую волну, распространяющуюся в неограниченной среде.

$$S(x, t) = 2S_0 \cos \omega t \cos Kx$$

$$w_k = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} (-2S_0 \omega \sin \omega t \cos Kx)^2 = 2\rho S_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 Kx$$

$$w_n = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{E}{2} (-2S_0 \omega \cos \omega t \sin Kx)^2 = \frac{\rho C^2}{2} 4S_0^2 \frac{\omega^2}{C^2} \cos^2 \omega t \sin^2 Kx =$$

$$= 2\rho S_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sin^2 Kx$$

### Элементы акустики.

**Акустика** – наука, которая изучает акустические волны.

**Звуковые волны** – это акустические волны слышимого человеческим ухом диапазона (примерно от 20Гц до 20кГц).

Основные характеристики звуковых волн:

- 1) Высота – определяется частотой основного тона.
- 2) Тембр – определяется соотношением частот и интенсивностей основного тона и гармоник.
- 3) Громкость.

Любой сигнал можно разложить в спектр. Сигнал характеризуется интенсивностью и частотой.

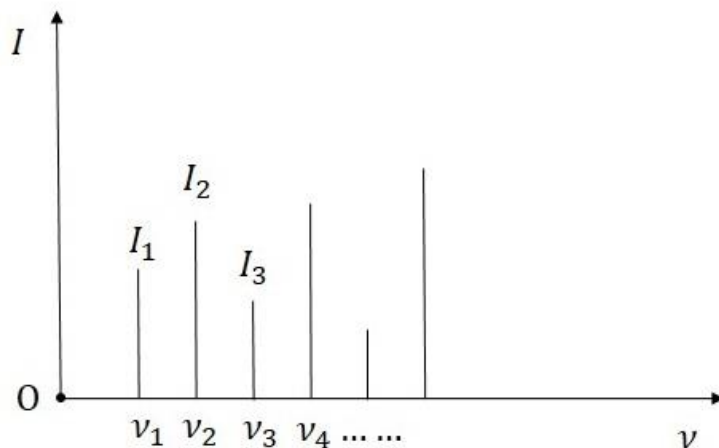


Рисунок 18.2. Линейчатый спектр.



Спектр с широким частотным интервалом называется **сплошным**. Звуки, которые имеют сплошной спектр воспринимаются ухом как шумы.

Громкость. Закон Вебера. Закон Вебера-Фехнера.

Немецкий психофизиолог и анатом Эрнст Генрих Вебер (1795-1879).

Немецкий психолог Густав Теодор Фехнер (1801-1887).

$$\frac{\Delta I}{I} \sim 10^{-1}$$
$$\frac{\Delta I}{I} = A\beta$$

$\beta$  – громкость.

$$\ln \frac{I}{I_{\text{пор}}} = A\beta$$

$$\beta = \frac{1}{A} \ln \frac{I}{I_{\text{пор}}}$$

$$A = \ln 10$$

$$\beta = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}$$

**Закон Вебера-Фехнера** – Громкость звука пропорциональна логарифму интенсивности.

$L_I = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}$  – Уровень интенсивности.

$$I \sim (\delta p)^2$$
$$L_p = \left( \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}} \right)^2 = 2 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}}$$

$$(L_p)_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}}$$

$$I_{\text{пор}} \cong 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

$$\delta p_{\text{пор}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{Па}$$

**Объективная характеристика громкости звука** – это уровень интенсивности (или уровень звукового давления). Измеряется в белах (на практике – в децибелах).

**Единица измерения громкости** называется **фон**. Соотношение между децибелами и фонами можно наглядно представить в виде диаграммы слуха.

**Громкость звука в фонах** для тона данной частоты равна уровню звукового давления в децибелах для тона частотой 1кГц, воспринимаемого ухом как звук равной громкости.

Как человек определяет направление на источник звука?

Рассмотрим человеческую голову. Пусть сбоку приходит звуковая волна. (Рисунок 18.3.)

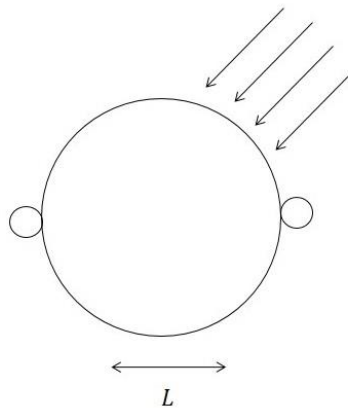


Рисунок 18.3. Иллюстрация восприятия звука человеком.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I}{I} &\sim 10^{-1} \\ \tau &\sim \frac{L}{c} \lesssim \frac{T}{2} = \frac{1}{2\nu} \\ \nu &\lesssim \frac{c}{2L} \\ \nu &\lesssim 1 \text{ кГц}\end{aligned}$$

Если частота звуковой волны превышает 1кГц, то определить источник звука невозможно.

**Бинауральный эффект** – эффект совместного восприятия звуковых волн с помощью двух приемников.

## Лекция 19

### 19.1. Эффект Доплера

**Эффект Доплера** – это эффект изменения частоты волны, регистрируемой приемником, вследствие движения источника волны и (или) приемника.

- 1) Пусть источник звука движется с постоянной скоростью и излучает звук, приемник неподвижен.

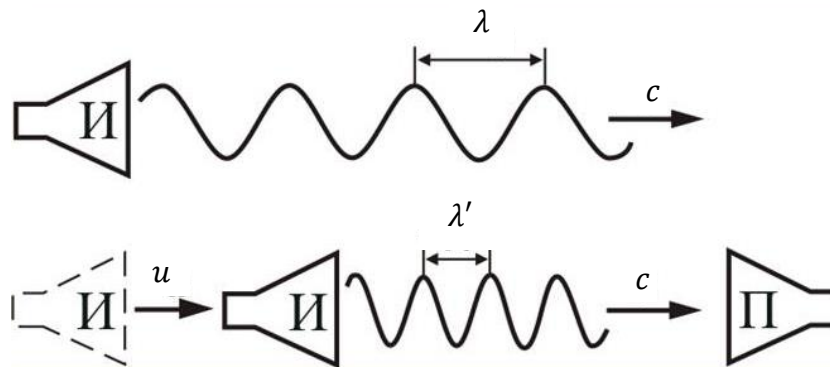


Рисунок 19.1 – Подвижный источник звука

За период волны источник пройдет расстояние  $cT$ , а волна «сжимается» .

$$\begin{aligned}\lambda' &= cT - uT = T(c - u) \\ v' &= \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{T(c - u)} = \frac{1/T}{1 - u/c} = \\ &= \frac{v}{1 - u/c}\end{aligned}$$

$v'$  - такую частоту зарегистрирует приемник.

- 2) Пусть источник покоится, а приемник движется со скоростью  $v$ , тогда:

$$\lambda = cT' - vT' = T'(c - v')$$

$T'$  - новый период

$$\begin{aligned}T' &= \frac{\lambda}{(c - v')} \\ v' &= \frac{1}{T'} = \frac{(c - v')}{\lambda} = \frac{(c - v')}{c} v \\ v' &= v \left(1 - \frac{v}{c}\right)\end{aligned}$$

- 3) Общий случай. Совместим два предыдущих случая, тогда:

$$v' = v \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{u}{c}}$$

Ясно, что эффект Доплера является продольным, для случая, когда скорости источника и приемника не являются продольными можно переписать формулу:

$$v' = v \frac{1 - \frac{\vec{v}\vec{c}}{c^2}}{1 - \frac{\vec{u}\vec{c}}{c^2}}$$

### 19.2 Движение со сверхзвуковой скоростью. Волны с большой интенсивностью

Рассмотрим быстродвижущуюся иглу, тогда у острия образуется импульс сжатия, который распространяется сферически со скоростью звука. Сферическая звуковая волна образует **конус Маха**.

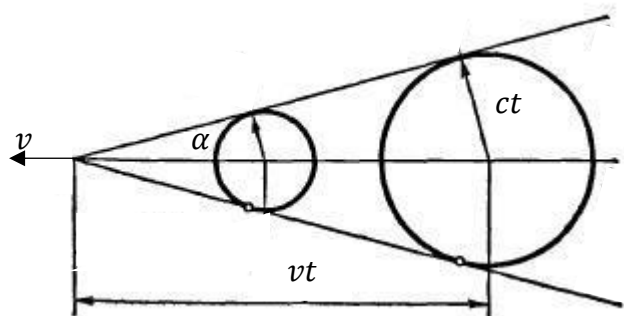


Рисунок 19.2 – Конус Маха

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} \quad (v > c)$$
$$M = \frac{v}{c}$$

$M$  – число Маха. Конус Маха образует ударная волна, то после пролета возле нас сверхзвуковой частицы, мы услышим хлопок.

Пусть в некоторой среде распространяется волна, имеющая большую интенсивность.

$$c^2 = \left( \frac{\delta P}{\delta \rho} \right)_{\rho_0}$$

Зависимость  $\frac{\delta P}{\delta \rho}$  нелинейна. Это приводит к тому, что «горбы» волны двигаются быстрее, чем середина, волна сжимается и затухает. Такая волна проходит следующие этапы эволюции:

1. Гармоническая волна большой интенсивности превращается в пилообразную волну
2. Нелинейное затухание
3. После затухания волна снова становится гармонической, имея существенно меньшую амплитуду

### 19.3 Основы гидро- и аэростатики и гидро- и аэродинамики.

**Жидкости и газы** – такие среды, в которых при равновесии не могут существовать касательные напряжения.

Нормальные напряжения в жидкостях и газах носят характер давления. Вводят коэффициент сжимаемости:

$$\gamma = -\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta P}$$

Объемный коэффициент всестороннего сжатия:

$$k = \frac{1}{\gamma}$$

**Абсолютно несжимаемая жидкость** – жидкость, в которой бесконечно малые деформации вызывают бесконечно большое давление.

ИЛИ

**Абсолютно несжимаемая жидкость** – жидкость, плотность которой можно считать постоянной. ( $\rho = \text{const}, \gamma = 0, k \rightarrow \infty$ )

**Идеальная жидкость** – жидкость, в которой при любых движениях не возникают касательные напряжения (то есть могут существовать только силы нормального давления).

Будем рассматривать объемные и поверхностные силы. Пусть есть элемент жидкости длиной  $x$ , площадь торца  $dS$ . На торцы действуют силы давления.

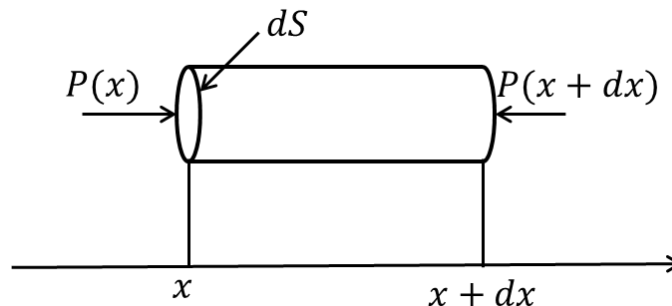


Рисунок 19.3 – Элемент жидкости

Сила давления:

$$dD_x = (P(x) - P(x + dx))dS = -\frac{\delta P}{\delta x} dx dS = -\frac{\delta P}{\delta x} dV$$

$$dD_y = -\frac{\delta P}{\delta y} dV$$

$$dD_z = -\frac{\delta P}{\delta z} dV$$

$$d\vec{D} = dD_x \vec{i} + dD_y \vec{j} + dD_z \vec{k} = \left( -\frac{\delta P}{\delta x} \vec{i} - \frac{\delta P}{\delta y} \vec{j} - \frac{\delta P}{\delta z} \vec{k} \right) dV = -\text{grad}P dV$$

Второй закон Ньютона для элемента жидкости:

$$\begin{aligned} dm \frac{d\vec{v}}{dt} &= d\vec{F} + d\vec{D} \\ \underbrace{\frac{dm}{dV}}_{\rho} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \underbrace{\frac{d\vec{F}}{dV}}_f + \underbrace{\frac{d\vec{D}}{dV}}_{-gradP} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= f - gradP \end{aligned} \quad (5)$$

(5) – уравнение Эйлера для идеальной жидкости.

Теперь пусть жидкость покоится, а значит ускорение всех частиц равно нулю.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \rightarrow f = gradP \quad (6)$$

(6) – основное уравнение гидростатики.

Следствия:

- 1) Для нахождения жидкости в равновесии, необходимо, чтобы действующие на нее силы были потенциальными.
- 2) В отсутствии массовых сил при равновесии давление во всех точках жидкости и во всех направлениях одинаковое.

ИЛИ

В отсутствии массовых сил при равновесии давление со свободной поверхности жидкости без изменений передается во все её точки

$$f = 0 = gradP \rightarrow P = const$$

Второй пункт – закон Паскаля.

Рассмотрим жидкость в стакане, применим основное уравнение гидростатики:

$$\begin{aligned} \frac{\delta P}{\delta x} &= 0 \\ \frac{\delta P}{\delta y} &= 0 \\ \frac{\delta P}{\delta z} &= -\rho g \\ P(z) &= P_0 - \rho g z \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим газ в пространстве, для него  $\rho(z) \neq const$

$$\begin{aligned} \frac{\delta P}{\delta z} &= -\rho g \\ \rho &= \frac{\mu P}{RT} \\ \frac{\delta P}{\delta z} &= -\frac{\mu P}{RT} g \end{aligned}$$

Будем считать, что  $T = const$

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} = P_0 e^{-z/H} \quad (7)$$

---

$$H = \frac{RT}{\mu g}$$

$H$  – высота изотермической плотности. (7) – барометрическая формула.

### Закон Архимеда

На тело погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, численно равная весу вытесненной жидкости. Эта сила направлена вертикально вверх и приложена к центру масс жидкости, вытесненной телом.

Точка приложения силы – центр плавучести.

$$F_a = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{выт}}$$

$\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости

$V_{\text{выт}}$  – объем вытесненной жидкости



## Лекция 20.

### 20.1. Условия плавания тела на поверхности жидкости

Рассмотрим случай плавания корабля. Схема плавучего корабля изображена на рисунке 20.1. Пусть корабль симметричный, точка  $C$  – центр масс, точка  $M$  – метациентр, точка  $A$  – центр плавучести. При наклоне корабля меняется форма вытесненного объема жидкости, из-за этого центр плавучести меняется на точку  $A'$ . При этом силу Архимеда  $F$  мы перенесли вверх в метациентр, физический смысл не поменялся, так удобнее для расчетов. Точка  $M$  лежит на линии, разделяющей корабль пополам.  $CM$  – метacentрическая высота. Из чертежа видно, что сила тяжести  $Q$  и сила Архимеда  $F$  создают пару сил, момент которых являются возвращающими. Таким образом, для успешной плавучести корабля необходимо, чтобы центр масс корабля находился выше центра плавучести.

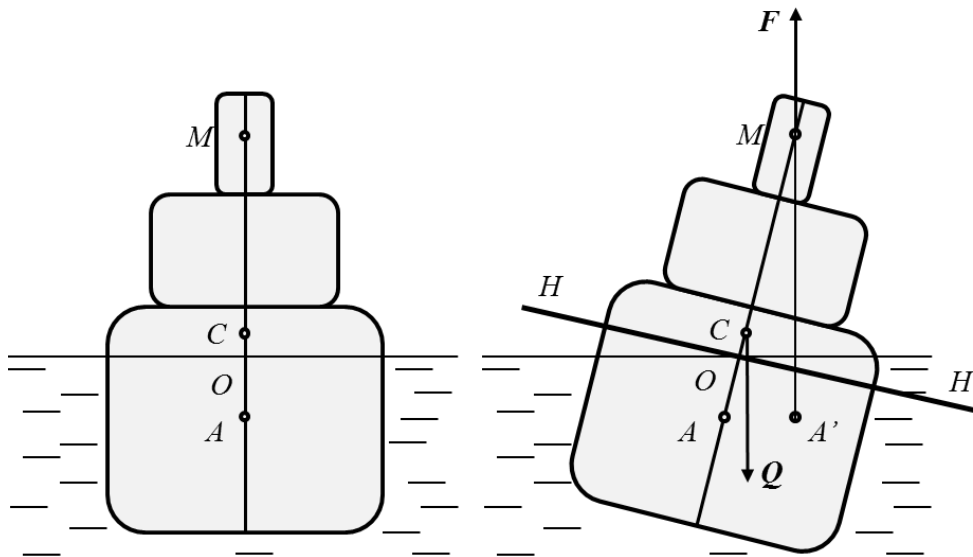


Рисунок 20.1 – Устойчивость плавания на поверхности жидкости

### 20.2. Гидродинамика. Стационарное течение жидкости

**Стационарное течение** – это такое течение, при котором поле скоростей не зависит от времени, а зависит только от координат.

Пусть в пространстве перемещается некий объем жидкости. Бесконечно малый объем жидкости будем называть частицей жидкости. Зафиксируем время, для каждой частицы жидкости нарисуем вектор скорости. Может оказаться, что в следующий момент времени вектора скорости для всего пространства будут такими же.

Говорят, что существует поле скоростей жидкости, которое является функцией координаты и времени  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ . Для стационарного течения зависимость для поля скорости представима в виде  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  – стационарное поле скоростей.



**Линия тока** – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора скорости частицы жидкости в данной точке. Линии тока не пересекаются. При стационарном течении линии тока совпадают с траекториями частиц.

**Трубка тока** – это поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторый замкнутый контур.

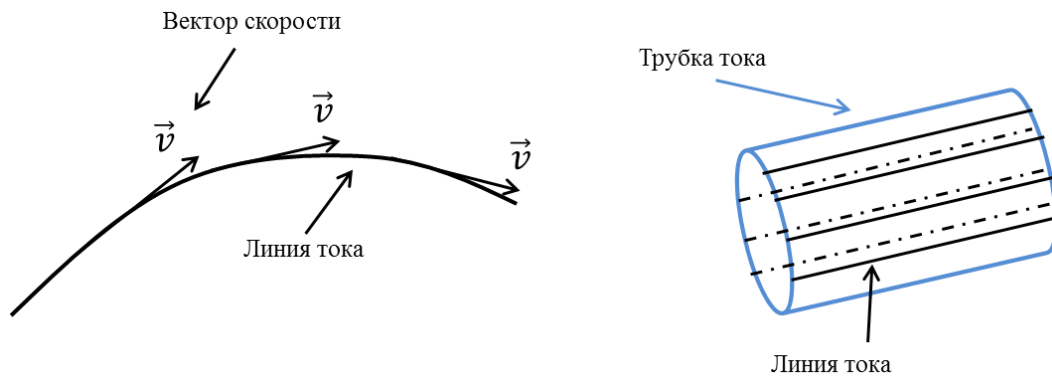


Рисунок 20.2 – Линии тока и трубка тока

Получим условие неразрывности для несжимаемой жидкости. Рассмотрим трубку тока, с одной стороны узкую (сечение  $S_1$ ), с другой стороны пошире (сечение  $S_2$ ). Пусть вода втекает в трубку тока со скоростью  $v_1$ , а вытекает из нее со скоростью  $v_2$ .

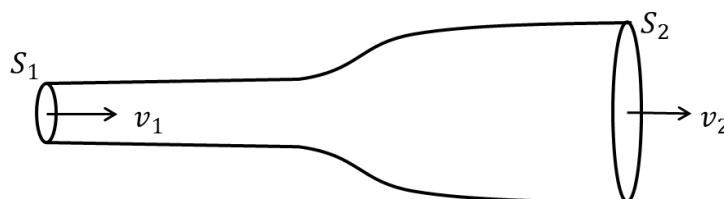


Рисунок 20.3 – Условие неразрывности

Рассмотрим отрезок времени  $\Delta t$ . Сколько воды втекает, столько же должно и вытечь. Масса жидкости, которая втекла и вытекла:

$$\begin{aligned}\Delta m &= \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t \\ S_1 v_1 &= S_2 v_2 = Sv = \text{const}\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнение (8) является условием неразрывности потока. В каждой точке трубки тока должно выполняться это условие.

### 20.3 Уравнение Бернулли

Выведем теперь уравнение Бернулли. Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости. Отметим, что несжимаемость мы здесь не требуем. Пусть трубка

тока имеет переменное сечение, вода движется в поле консервативных сил. Введем линии частиц воды AD и BC на рисунке 20.4

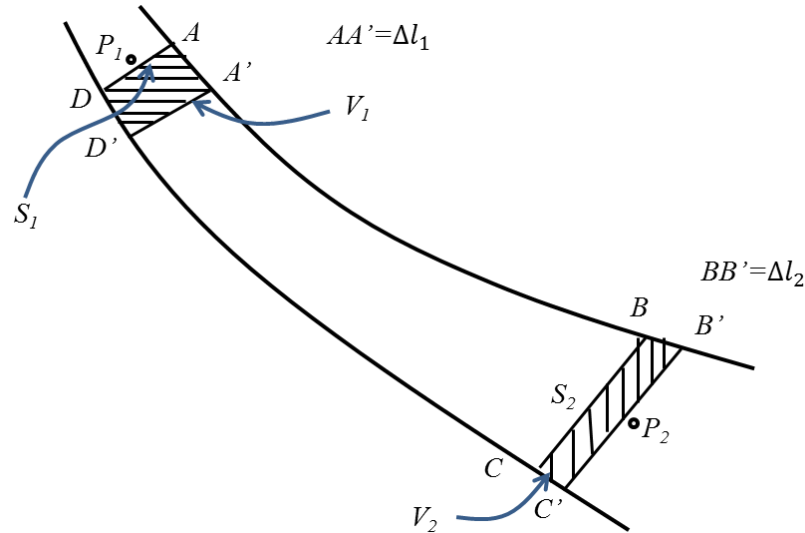


Рисунок 20.4 – Вывод уравнения Бернулли

Рассмотрим отрезок времени  $\Delta t$ . За это времени границы переместятся в точки  $A'D'$  и  $B'C'$ . Обозначим площади поперечного сечения  $S_1$ , давление на границе AD  $P_1$ ,  $AA' = \Delta l_1$ , объем жидкости  $ADA'D' = V_1$ . Тоже самое с объемом  $BCB'C'$ , только давление  $P_2$  обозначим на границе  $B'C'$ . Жидкость течет за счет разности давлений, посчитаем их работу:

$$A_1 = P_1 S_1 \Delta l_1 = P_1 V_1 = P_1 \frac{\Delta m}{\rho_1}$$

$$A_2 = -P_2 S_2 \Delta l_2 = -P_2 V_2 = -P_2 \frac{\Delta m}{\rho_2}$$

Так как жидкость идеальна, то сумма работ равна изменению механической работы:

$$A = A_1 + A_2 = P_1 \frac{\Delta m}{\rho_1} - P_2 \frac{\Delta m}{\rho_2} = E_2 - E_1$$

$$\varepsilon = \frac{E}{\Delta m} - \text{энергия на единицу массы}$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \varepsilon_2$$

Видно, что:

$$\frac{P}{\rho} + \varepsilon = \text{const} \quad (9)$$

Уравнение (9) является уравнением Бернулли. Это уравнение справедливо даже если жидкость сжимаема, то есть плотность изменяется. Рассмотрим как оно изменится в поле силы тяжести, тогда механическая энергия:

$$E = \frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m g h$$

$h$  - высота относительно некоторого уровня.

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + g h$$

$$\frac{v^2}{2} + g h + \frac{P}{\rho} = \text{const}$$

$$\rho = \text{const}$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const} = B \quad (10)$$

Уравнение (10) - уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости. Число  $B$  называется постоянной Бернулли. Условия применения уравнения Бернулли:

- течение стационарное
- жидкость идеальная
- сечения потока плоские, расположены перпендикулярно скоростям частиц
- для сжимаемой жидкости течение должно происходить при постоянной разности давлений, постоянной температуре, без разрыва потока.

Устройства на основе уравнения Бернулли:

### 1. Трубка Пито

Трубка вставляется в поток жидкости, в нее втекает вода. Для нее справедлива формула:

$$P_{\infty} + \frac{\rho v^2}{2} = \rho g h_1$$

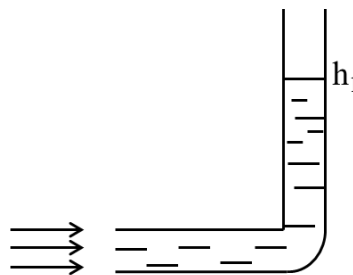


Рисунок 20.5 – Трубка Пито

## 2. Зонд

Зонд позволяет определить давление жидкости  $P_\infty$ :

$$P_\infty = \rho g h_1$$

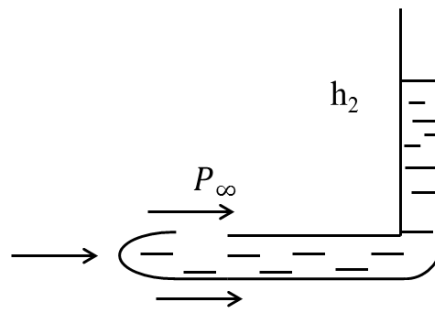


Рисунок 20.6 - Зонд

## 3. Трубка Прандтля

Трубка Прандтля совмещает в себе трубку Пито и зонд, позволяя определить как давление жидкости, так и ее скорость, используя разность высот столбов жидкости в трубках:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g (h_1 - h_2)$$

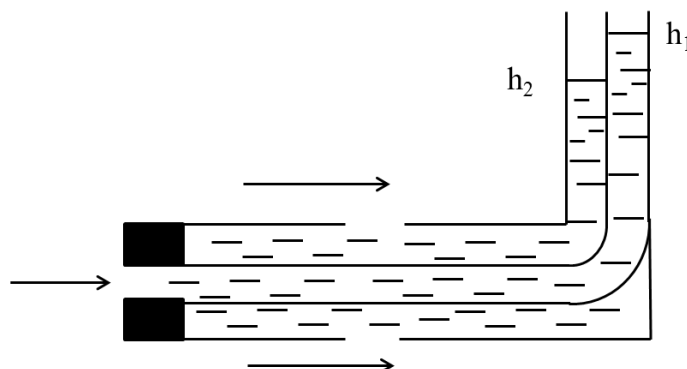


Рисунок 20.7 – Трубка Прандтля

## 20.4. Вязкость. Сила вязкого трения

Все реальные жидкости обладают вязкостью, то есть в реальных жидкостях действуют тангенсальные напряжения. Рассмотрим две пластинки, одна неподвижная, другая подвижная, расстояние между ними  $h$ , пространство между ними заполнено жидкостью, площадь пластинок  $S$ , подвижная пластинка движется относительно другой со скоростью  $v$ . Из опыта следует, что при таком движении, на каждую из пластинок действует сила вязкого трения  $F$ , при этом:

$$F \sim S, F \sim v, F \sim \frac{1}{h}$$

Если пластинки движутся в одном направлении со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , то:

$$F \sim v_1 - v_2$$

Рассмотрим вместо пластинок два слоя жидкости, которые расположены близко друг к другу ( $h \rightarrow 0$ ). Тогда получим формулу:

$$F = \eta S \frac{\partial v}{\partial h} \quad (11)$$

Где  $\eta$  – коэффициент вязкости (динамическая вязкость),  $\frac{\partial v}{\partial h}$  – поперечный градиент. Формулу (11) можно переписать:

$$\frac{F}{S} = \sigma_\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial h}$$

$\sigma_\tau$  – тангенсальное напряжение. Рассмотрим течение вязкой жидкости по трубе. Понятно, что вязкая жидкость быстрее всего течет по оси трубы, а у стенок скорость меньше из-за прилипания жидкости к стенкам. Возьмем цилиндрическую трубу радиусом  $R$ , выделим в жидкости небольшой цилиндр радиусом  $r$  и длиной  $dx$ , ось  $x$  направлена вдоль оси цилиндра. Тогда сила вязкого трения:

$$F_{\text{тр}} = \eta 2\pi r dx \frac{\partial v}{\partial r}$$

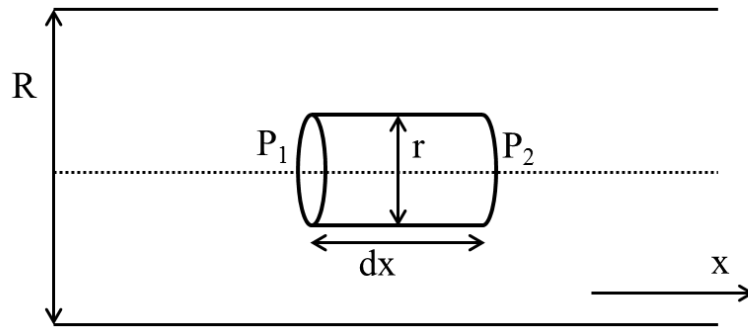


Рисунок 20.8 – Труба жидкости с выделенным цилиндром

Сила вязкого трения должна уравновешиваться силой разности давлений:

$$F_{\text{тр}} + F_g = 0$$

$$F_g = \pi r^2 (P(x) - P(x + dx)) = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx$$

$$\eta 2\pi r dx \frac{\partial v}{\partial r} = \pi r^2 \frac{dP}{dx} dx$$

При стационарном течении скорость не зависит от координаты  $x$ , а давление не зависит от  $r$ , тогда:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta l} \frac{dP}{dx}, \quad \Delta P = P_2 - P_1 < 0$$

$l$  – длина выделенного цилиндра.

$$2\eta dv = \frac{\Delta P}{l} \int_r^R r dr$$

$$\begin{aligned}
 -2\eta v &= \frac{\Delta P}{l} \frac{R^2 - r^2}{2} \\
 v(r) &= \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\
 v_{max} &= \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2
 \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь выделим в трубе жидкости бесконечно тонкий цилиндр радиусом  $r$  и рассмотрим бесконечно близкий к нему цилиндр на расстоянии  $dr$  от него.

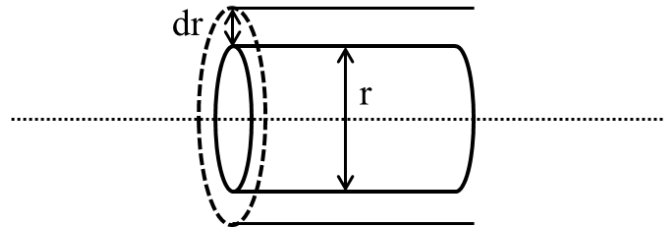


Рисунок 20.9 – Вывод формулы Пуазейля

И рассмотрим жидкость, протекающую между двумя бесконечно близкими цилиндрами. Скорость внутри этого зазора определяется формулой (12). Масса жидкости протекающая через этот слой за время  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned}
 dQ &= \frac{dm}{\Delta t} = \rho \frac{dV}{\Delta t} = \rho \frac{2\pi r dr v \Delta t}{\Delta t} = 2\pi r dr \rho \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\
 Q &= \frac{\pi \rho (P_1 - P_2)}{2\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr \\
 Q &= \frac{\pi \rho (P_1 - P_2)}{2\eta l} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi \rho (P_1 - P_2) R^4}{8\eta l}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Формула (13) называется формулой Пуазейля.

## Лекция 21

### 21.1. Условия формулы Пуазейля

На прошлой лекции мы вывели формулу Пуазейля. Но не обсудили при каких условиях она применима. Пусть по трубе течет жидкость, обладающая кинетической энергией:

$$K = \int \frac{\rho v^2}{2} 2\pi r dr v$$

- кинетическая энергия, протекающая через поперечное сечение трубы в единицу времени. Мощность силы трения:

$$A_{\text{тр}} = - \int v(P_1 - P_2) \underbrace{2\pi r dr}_{ds}$$

Потребуем, чтобы рассеяние было гораздо меньше, чем запас энергии:

$$\frac{|A_{\text{тр}}|}{K} \ll 1$$

В результате:

$$\frac{\rho R^2 v_{\text{max}}}{16\eta l} \gg 1 \quad (14)$$

(14) является условием применимости формулы Пуазейля.

### 21.2. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса

**Ламинарное течение** – это такое течение, при котором жидкость перемещается слоями, параллельно направлению течения, без перемешивания.

**Турбулентное течение** – это такое течение, при котором частицы жидкости совершают хаотическое движение, что приводит к перемешиванию жидкости.

Переход от ламинарного к турбулентному течению происходит при увеличении скорости течения жидкости. Можно вывести этот критерий. Рассмотрим элемент жидкости объема  $\Delta V$ , массой  $\Delta m$ , который движется. Он имеет кинетическую энергию:

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v^2}{2} \sim \rho \Delta V v^2 = \rho l^3 v^2$$

$l$  – характерный размер элемента жидкости. На этот элемент жидкости действует вязкое трение. Работа трения:

$$A_{\text{тр}} \sim F_{\text{тр}} l = \eta S \frac{v}{l} l \sim \eta S l^2 v$$

Для того, чтобы течение было ламинарным, нужно:

$$\frac{\Delta E_k}{|A_{\text{тр}}|} \sim \frac{\rho l^3 v^2}{\eta S l^2 v} = \frac{\rho l v}{\eta} = Re$$

$Re$  – число Рейнольдса. Оно определяет во сколько раз отличается запас кинетической энергии от модуля работы вязкой жидкости. Если скорость будет маленькой, а вязкость большой, то жидкость не будет перемешиваться и будет течь ламинарно. А если скорость будет большой, а вязкость маленькой, то, очевидно, течение будет турбулентным.

Таким образом, число Рейнольдса является критерием ламинарного или турбулентного течения. Из опыта следует:

$Re \ll 1$  – ламинарное

$Re \gg 10^4$  – турбулентное

Что происходит в остальных случаях неизвестно, так как нужны дополнительные данные (форма тела, обтекаемость).

### 21.3. Лобовое сопротивление при обтекании тел. Парадокс Даламбера

Рассмотрим силы, которые действуют на тело, помещенное в поток жидкости. Можно выделить две составляющие: вдоль потока и поперек потока. Составляющая сила, направленная поперек потока, называется **подъемной силой**. Силу вдоль потока можно разложить на две: сила вязкого трения и сила лобового сопротивления. Они друг с другом тесно связаны.

Рассмотрим обтекание симметричного тела идеальной жидкостью. На рисунке 21.1 показаны линии тока. Выделим три объема жидкости 1,2,3.

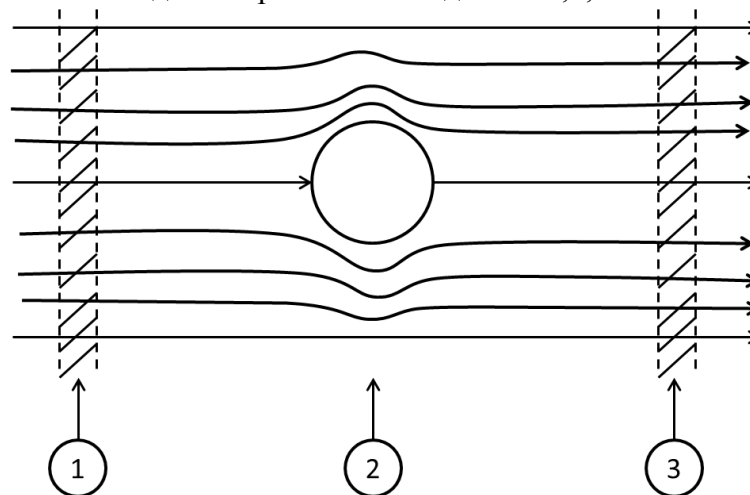


Рисунок 21.1 – Обтекание жидкостью симметричного тела

Импульсы в объемах 1,2,3:

$$P_I = P_1 + P_2$$

$$P_{II} = P_2 + P_3$$

$$P_I = P_{II}$$



Сумма сил, действующих на жидкость, равна нулю, сумма разности давлений равна нулю, а значит по 3-ему Закону Ньютона сила, действующая на тело со стороны жидкости, равна нулю. Мы получили **парадокс Даламбера**:

Симметричное тело, находящееся в ламинарном потоке идеальной жидкости, не испытывает лобового сопротивления.

Опыт показывает, что тонкий слой, находящийся бесконечно близко к телу, можно считать «прилипшим» к телу. Этот тонкий слой называется **пограничным слоем**. Посчитаем толщину этого слоя. Рассмотрим малый элемент жидкости толщиной  $\delta$ , длиной  $l$ , расположенный у поверхности твердого тела.

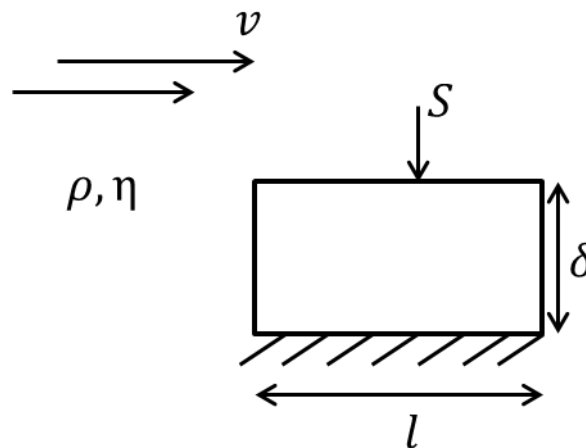


Рисунок 21.2 – Пограничный слой

Объемная плотность сил трения:

$$f_{\text{тр}} = \frac{F_{\text{тр}}}{\delta S} = \frac{\eta S v}{\delta S \delta} = \frac{\eta v}{\delta^2}$$

Объемная плотность сил давления:

$$f_{\text{давл}} \sim \text{grad} P \sim \text{grad} \frac{\rho v^2}{2} \sim \frac{\rho v^2}{l}$$

$$P \approx P_0 - \frac{\rho v^2}{2}$$

Можно записать:

$$\frac{\eta v}{\delta^2} = \frac{\rho v^2}{l} \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v}} = \sqrt{\frac{\eta l^2}{\rho v l}} = \frac{l}{\sqrt{Re}}$$

Наличие пограничного слоя влияет на поведение тел в потоке жидкости. Откуда берется лобовое сопротивление? Рассмотрим шар, обтекаемый жидкостью, на рисунке 21.3. Выберем три точки на линии тока, 1 – близи передней части тела, 2 – посередине, 3 – вблизи задней части тела.

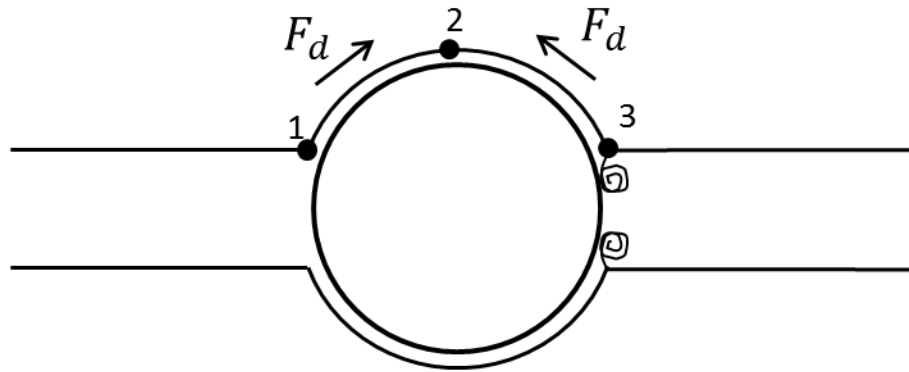


Рисунок 21.3 – Обтекание шара

Давление в точках 1 и 2:

$$P_1 > P_2$$

То есть частицы ускоряются, сила давления направлена вдоль потока. Но:

$$P_2 < P_3$$

Между точками 2 и 3 сила давления направлена против линии тока. Это может спровоцировать в пограничном слое возвратное поступательное движение жидкости. Поскольку жидкость несжимаема, то будет возникать вихрь, вихри будут отрываться от тела, образуется дорожка Кармана. Карман описал возникновение и движение вихрей вдоль «дорожки».

#### 21.4. Возникновение подъёмной силы

Введем понятие циркуляции скорости. Рассмотрим поле скоростей  $v = v(r)$ .

$$\Gamma = \oint_L v dl$$

Возьмем обтекаемое крыло, причем длина верхней части больше, чем нижней, то есть частицам воздуха в верхней части необходимо преодолеть большее расстояние, поэтому скорость частиц воздуха у верхней части крыла больше. Давление сверху -  $P_B$ , давление снизу -  $P_H$ . При этом  $P_H > P_B$ . Выделим некоторое сечение крыла толщиной  $dl$ , тогда сила, действующая на выделенный фрагмент крыла:

$$dF = (P_H - P_B)Ldl$$

Где  $L$  – длина крыла.

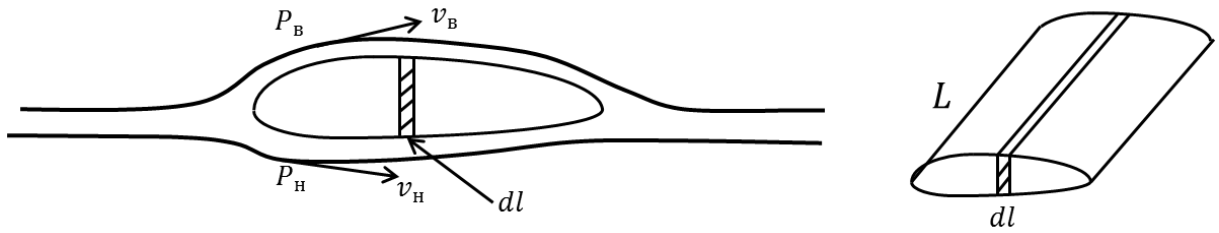


Рисунок 21.4 – Обтекание крыла

Через уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_H^2}{2} + P_H = \frac{\rho v_B^2}{2} + P_B$$

$$P_H - P_B = \frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_H^2) = \frac{\rho}{2}(v_B - v_H) \underbrace{(v_B + v_H)}_{\approx 2v} \approx \rho v(v_B - v_H)$$

$$F = \int (P_H - P_B) L dl = \int \rho v L (v_B - v_H) dl$$

Возьмем интеграл по поверхности крыла:

$$F = \rho v L \oint_{\text{крылу}} (v_B - v_H) dl = \rho v L \Gamma$$

Отношение подъемной силы к размаху крыла:

$$\frac{F}{L} = \rho v \Gamma \quad (15)$$

(15) – формула Жуковского для подъемной силы крыла. Подъемная сила связана с циркуляцией скорости.

## Лекция 22

### 22.1. Основы механики деформируемых тел. Типы деформаций

Как известно, абсолютно упругое тело – это модель, реальные тела имеют свойство деформироваться. Выделяют несколько типов деформации.

**Упругие деформации** – деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия вызывающих их сил.

**Неупругие (пластические) деформации** – деформации, которые сохраняются полностью или частично после прекращения действия вызывающих их сил.

**Идеально упругое тело** – тело, любые деформации которого являются упругими. Для идеально упругого тела можно установить взаимно однозначную связь между деформациями и вызывающими их силами. А значит можно попытаться вывести определенные зависимости.

Фундаментальными деформациями являются:

- 1) Сжатие и растяжение
- 2) Сдвиг
- 3) Кручение
- 4) Изгиб

Основные деформации – это 1) и 2), деформации 3) и 4) сводятся к предыдущим. Необходимо учитывать направление и площадь приложения механических сил при деформации. Поэтому введем понятие механических напряжений. Рассмотрим произвольную бесконечно малую площадку  $dS$ , вектор нормали  $\vec{n}$  направлен наружу, на площадку действует сила  $\vec{F}$ , тогда можно ввести механическое напряжение  $\vec{\sigma}$ :

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Вектор  $\vec{\sigma}$  можно разложить на две составляющие:

$$\vec{\sigma} \rightarrow \begin{matrix} \vec{\sigma}_\tau \\ \vec{\sigma}_n \end{matrix}$$

$\vec{\sigma}_\tau$  – тангенсальное напряжение,  $\vec{\sigma}_n$  – нормальное напряжение. Часто используют обозначение  $\vec{\sigma}_\tau = \vec{\tau}$ . Если действие силы приводит к сжатию тела, то нормальное напряжение называют давлением  $\sigma_n = -P$ . Поговорим о количественных характеристиках.

- 1) Сжатие и растяжение

Пусть есть стержень длиной  $l_0$ , площадь сечения  $S$ , на его концы действует сила  $F$ , которая равномерно распределена по сечению стержня. Через некоторое время длина стержня становится  $l$ , введем относительную деформацию  $\varepsilon$ :

$$\Delta l = l - l_0, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Для каждого тела существует некий диапазон напряжений, при котором относительная деформация пропорциональна напряжению  $\varepsilon \sim \sigma$ :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Где  $E$  – модуль Юнга (коэффициент пропорциональности). Модель Юнга является характеристикой материала при растяжении и сжатии.

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = \frac{ES}{l_0} \Delta l = k \Delta l$$

$k$  – коэффициент жесткости стержня. То есть стержень можно понимать, как жесткую пружину. Замечание: если принять  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , то качественно ничего не изменится.

$$\frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l(l - l_0)}{l_0 l} = \frac{(\Delta l)^2}{l_0 l} \approx \varepsilon^2$$

На рисунке 22.1 изображена зависимость модуля напряжения от относительного удлинения. Мы рассматривали только область 0-1, где справедлив закон Гука,  $\sigma_{\text{п}}$  – предел пропорциональности. При увеличении относительного удлинения закон Гука нарушается, но деформации остаются упругими, то есть при снятии напряжения тело вернется в первоначальное состояние,  $\sigma_y$  – предел упругости.

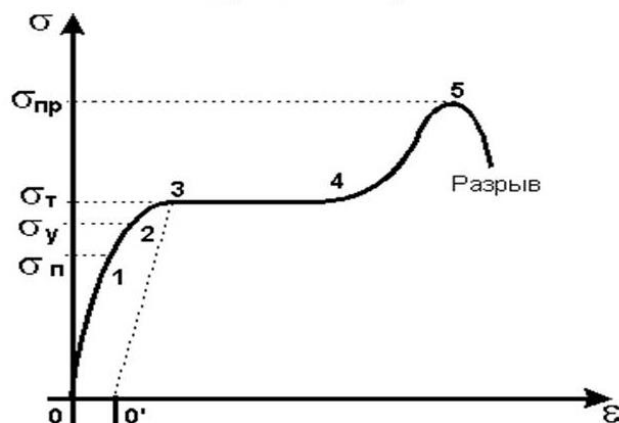


Рисунок 22.1 – Зависимость модуля напряжения от относительного удлинения

Превысив предел упругости, деформации станут пластическими, но деформации все еще будут однородными, а после преодоления предела текучести  $\sigma_t$  материала начнет «течь», то есть вести себя почти как жидкость. В определенном месте площадь сечения станет наименьшей, напряжения будут максимальными. Очевидно в самом узком месте стержень порвется, достигнув предел прочности  $\sigma_{\text{пр}}$ .

## 2) Сдвиговые деформации

Рассмотрим брусок, вдоль граней которого действуют силы (Рисунок 22.2). Силы направлены таким образом, чтобы создать деформацию сдвига. Квадрат превратится в ромб, две грани повернулись на угол  $\gamma$ .

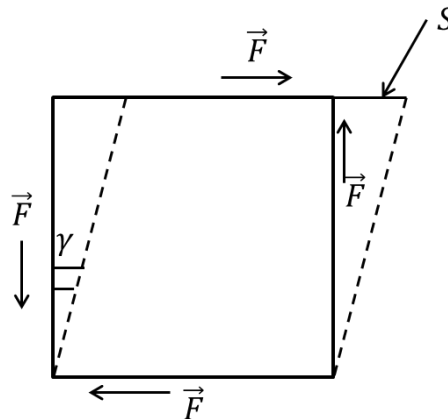


Рисунок 22.2 – Сдвиговые деформации

Обозначим  $S$  – площадь грани, на которую действует касательная сила  $F$ , тогда тангенсальное напряжение будет равным:

$$\tau = \frac{F}{S}$$

Как и в случае растяжения, угол  $\gamma$  пропорционален напряжению:

$$\gamma \sim \tau$$
$$\tau = G\gamma$$

Где  $G$  – модуль сдвига. Модуль сдвига может быть выражен через модуль Юнга и тоже является характеристикой материала.

### 3) Деформация кручения

Рассмотрим жестко подвешенный к потолку стержень. К нижней грани приложим вращающий момент  $M$ , при этом нижняя грань повернется относительно верхней на угол  $\varphi$  (угол кручения). Тогда:

$$M = f\varphi$$

Где  $f$  – модуль кручения, который не является характеристикой вещества, а зависит еще и от формы тела.

### 4) Деформация изгиба

Рассмотрим горизонтальный стержень при различных вариантах крепления. Сначала рассмотрим крепление как на рисунке 22.3. Прогнем незакрепленный конец палки на расстояние  $\lambda$ .  $\lambda$  называется стрелой прогиба.

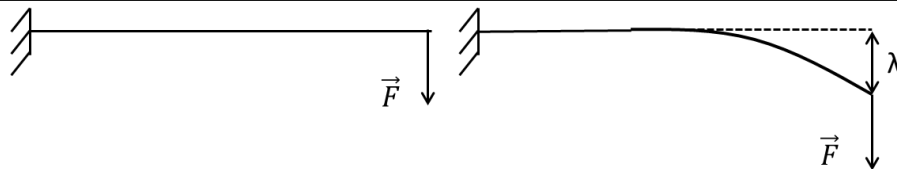


Рисунок 22.3 – Изгиб стержня

Опыт показывает, что  $\lambda \sim F$ . Рассмотрим теперь стержень, закрепленный с обоих концов, на центр которого действует сила.

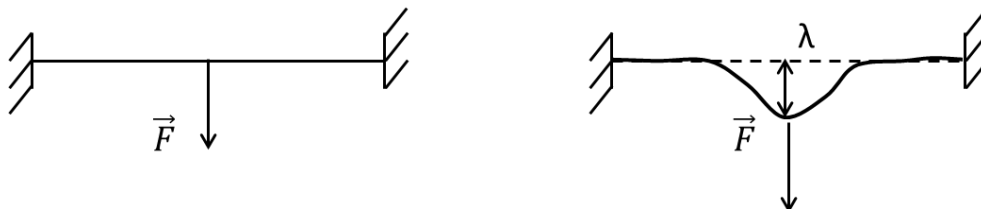


Рисунок 22.4 – Изгиб закрепленного стержня

В этом случае и других возможным  $\lambda \sim F$ .

## 22.2. Энергия упругих деформаций

Выведем формулу для энергии деформации. Растянем стержень длиной  $l_0$  по оси  $x$  силой  $F$  до длины  $l$ .

$$\frac{F}{S} = E \frac{x}{l_0}, F = \frac{ES}{l_0} x$$

Работа равна:

$$A = \int_0^{\Delta l} F dx = \frac{ES}{l_0} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{ES \Delta l^2}{l_0 \cdot 2} = \frac{1}{2} E \underbrace{S l_0}_V \underbrace{\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2}_{\varepsilon^2} = \frac{EV \varepsilon^2}{2}$$

Введем объемную плотность энергии упругой деформации:

$$\begin{aligned} W_{\text{упр}} &= A \\ w &= \frac{W_{\text{упр}}}{V} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \\ W_{\text{упр}} &= \frac{ES \Delta l^2}{l_0 \cdot 2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{ES \Delta l}{l_0}}_{F_0} \Delta l \end{aligned}$$

$F_0$  – максимальная сила

$$W_{\text{упр}} = \frac{1}{2} F_0 \Delta l$$

Энергию можно вывести и другим способом. Возьмем квадратный брусок и приложим к верхней грани силу  $F_0$  как на рисунке 22.2. Высоту бруска обозначим  $a$ . Тогда:

$$W_{\text{упр}} = \frac{1}{2} F_0 \Delta l = \frac{1}{2} \tau S a \gamma = \frac{1}{2} \tau \gamma V$$

$$w = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{G \gamma^2}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$$

Отдельно отметим формулы:

$$w = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$w = \frac{\tau^2}{2G}$$

### 22.3. Коэффициент Пуассона

Рассмотрим стержень длиной  $l_0$ , поперечным размером  $d_0$ . Растянем его с силой  $F$ . Опыт показывает, что при растяжении поперечный размер уменьшается, а при сжатии – увеличивается. Для математического описания вводят коэффициент Пуассона. Введем величины изменения размеров:

$$\Delta l = l - l_0 > 0$$

$$\Delta d = d - d_0 < 0$$

Введем величины относительных деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d_0}$$

Тогда коэффициент Пуассона:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}$$

Знак минус нужен для положительности коэффициента. Коэффициент Пуассона является характеристикой материала.

Если деформации велики, то можно пользоваться принципом малых деформаций.

#### Принцип суперпозиции малых деформаций.

Если на тело действует несколько сил, то для вычисления результирующей малой деформации нужно вычислить малые деформации, вызываемые каждой силой в отдельности, а затем сложить эти деформации.

Найдем связь между характеристиками материала. Для этого возьмем прямоугольный параллелепипед. Направим координатные оси вдоль ребер. Обозначим длины ребер через  $x, y, z$ . Приложим напряжения, приложенные вдоль различных ребер. Отрицательная деформация будет означать сжатие.



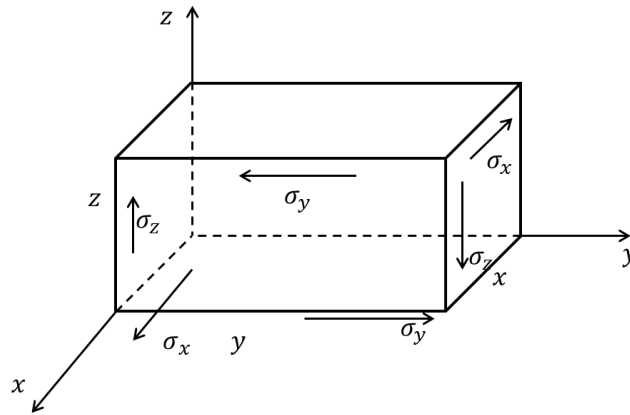


Рисунок 22.5 – Прямоугольный параллелепипед

Относительные деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

Перепишем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \sigma_x(1 + \mu) - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left( \sigma_y(1 + \mu) - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left( \sigma_z(1 + \mu) - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right)\end{aligned}$$

Объем и изменение объема:

$$\begin{aligned}V &= xyz \\ \Delta V &= \Delta(xyz) = \Delta x yz + x \Delta y z + xy \Delta z \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta V}{xyz} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} \left( (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 + \mu) - 3\mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\mu)}{E}$$

Рассмотрим вопрос о всестороннем сжатии, то есть давления со всех сторон одинаковое:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

Тогда:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3P(1 - 2\mu)}{E} = -\frac{P}{K} \quad (16)$$

(16) – закон Гука для всестороннего сжатия.  $K$  – модуль всестороннего сжатия

$$K > 0 \rightarrow \mu \leq \frac{1}{2}$$

## 22.4 Связь модуля Сдвига и модуля Юнга

Рассмотрим брусок, который в поперечном сечении – квадрат со стороной  $a$ , а его длина –  $L$ . Подвергнем брусок деформации сдвига, для этого приложим касательное напряжение  $\vec{\tau}$ . Проведем прямую  $MN$  параллельную диагонали  $AC$ . Призма  $MND$  находится в равновесии, а, значит, сумма действующих на нее сил равна нулю. Она находится в равновесии благодаря силе  $F$ :

$$F = \sqrt{2}\tau lL$$

$l$  – длина сторон  $MD$  и  $ND$ . Нормальное напряжение, действующее на призму:

$$\sigma_n = \frac{F}{S_{MND}} = \frac{F}{\sqrt{2}lL} = \tau$$

Тогда можно сделать вывод о внутренних напряжениях и перерисовать поперечное сечение бруска на рисунке 22.7.

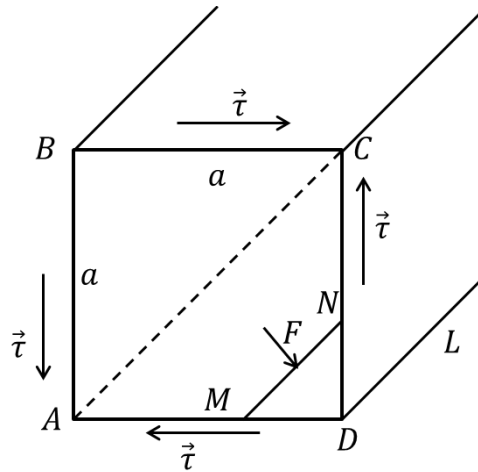


Рисунок 22.6 – Деформируемый брусок

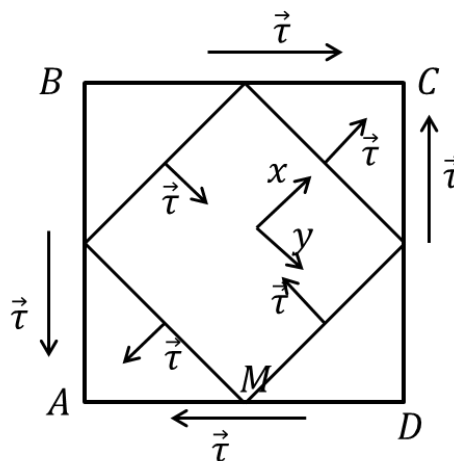


Рисунок 22.7 – Внутренние напряжения

Введем оси параллельные диагоналям AC и BD, тогда:

$$\sigma_x = \tau, \quad \sigma_y = -\tau, \quad \sigma_z = 0$$
$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$$

Используя, выведенные выше формулы:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \tau (1 + \mu) = \varepsilon$$
$$\varepsilon_y = -\frac{1}{E} \tau (1 + \mu) = -\varepsilon$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 = \frac{\Delta V}{V} \rightarrow \Delta V = 0$$

При сдвиговой деформации объем тела не меняется! Теперь найдем связь между модулями Юнга и сдвига. Вспомним формулы:

$$w = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon, \quad w = \frac{\tau^2}{2G}$$

Полная энергия равна (учитывая x и y):

$$w = 2 \left( \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \right) = \sigma \varepsilon = \tau \frac{1}{E} \tau (1 + \mu) = \frac{\tau^2 (1 + \mu)}{E} = \frac{\tau^2}{2G}$$
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (17)$$

(17) – связь между модулем Юнга и модулем сдвига.

## Лекция 23

### 23.1. Собственные и вынужденные колебания.

**Колебания** — повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

**Период колебаний** – это минимальный промежуток времени, через который система, совершающая колебания, возвращается в свое исходное состояние (точно или приближенно).

**Механические колебания** – колебания, которые совершают механические системы.

Типы колебаний:

1) Собственные колебания:

- свободные
- несвободные

2) Вынужденные колебания

Собственные колебания – колебания, возникающие при отсутствии внешней периодической силы. Свободные колебания происходят только при действии одной возвращающей силы. Вынужденные колебания возникают при воздействии внешней периодической силы.

Рассмотрим пружинный маятник. Под пружинным маятником понимают тело, которое совершает колебания на невесомой пружине, двигаясь вдоль оси этой пружины.

Второй закон Ньютона для тела массой  $m$ , колеблющегося на пружине жесткостью  $k$  вдоль оси  $x$ , выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ w_0^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим математический маятник. Под математическим маятником понимают материальную точку массой  $m$ , совершающую колебания на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$ . Тогда второй закон Ньютона для маятника:

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\alpha} &= -mgl\sin\alpha \\ \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Пусть угол отклонения  $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha &= 0 \\ w_0^2 &= \frac{g}{l} \\ \ddot{\alpha} + w_0^2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение вида (18) и (19) является уравнением гармонических колебаний. Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega t \\ \dot{x}(t) &= -A \omega \sin \omega t \\ \ddot{x}(t) &= -A \omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

Подставим в (верхнее):

$$\begin{aligned}-A \omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t &= 0 \\ \omega_0^2 - \omega^2 &= 0 \rightarrow \omega_0 = \omega \rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t\end{aligned}$$

Можно доказать, что решением является сумма косинуса и синуса:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

Или:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$C_1$  и  $C_2$  – константы,  $\varphi$  – сдвиг по фазе. Частоты колебаний пружинного и математического маятников:

$$\omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{\text{мат}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### 23.2. Решение уравнения гармонических колебаний. Характеристики колебаний

Будем искать решение уравнения колебаний в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= A e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= A \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= A \lambda^2 e^{\lambda t} \\ A \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение (20) называется характеристическим уравнением начального дифференциального уравнения (18).

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i \omega_0, \quad \lambda_2 = -i \omega_0 \\ x(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{i \omega_0 t} + A_2 e^{-i \omega_0 t}\end{aligned}$$

Константы  $A_1$  и  $A_2$  находятся из начальных условий. Возьмем типовое решение:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$x(t)$  – смещение от положения равновесия

$A$  – амплитуда, максимальный модуль смещения

$2A$  – размах колебаний

$\omega_0$  – частота

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$  – фаза,  $\frac{x}{A} = \cos \varphi$

$\varphi_0$  – начальная фаза

Частота имеет смысл изменения фазы за время:

$$\frac{d\varphi}{dt} = w_0, \quad [w_0] = \frac{\text{рад}}{c} = c^{-1}$$

$$\Delta\varphi = w_0\Delta t = w_0T = 2\pi$$

$T$  – период колебаний,  $T = \frac{2\pi}{w_0}$

$\nu = \frac{1}{T}$  – циклическая частота, количество циклов за единицу времени

Теперь пусть тело совершает колебания по закону:

$$x(t) = A \cos w_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -Aw_0 \sin w_0 t = \underbrace{Aw_0}_{v_0} \cos\left(w_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$v_0 = Aw_0$  – скорость

$$\ddot{x}(t) = \underbrace{Aw_0^2}_{a_0} \cos(w_0 t + \pi)$$

$a_0 = Aw_0^2$  – ускорение

Потенциальная энергия:

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2 w_0 t = \frac{kA^2}{4} (1 + \cos 2w_0 t)$$

$2w_0 t$  означает, что за одно колебание происходит двойное превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Кинетическая энергия:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 w_0^2 \sin^2 w_0 t = \frac{kA^2}{2} \sin^2 w_0 t = \frac{kA^2}{4} (1 - \cos 2w_0 t)$$

Полная энергия:

$$E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mw_0^2 A^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$$

Пусть у нас положение системы задается только одной обобщенной координатой  $q$ . Тогда можем сформулировать **теорему**:

Если потенциальная энергия системы с одной степенью свободы представима в виде  $U = \alpha q^2$ , а кинетическая – в виде  $T = \beta \dot{q}^2$ , где  $q$  – некоторая координата, то система совершает гармонические колебания с круговой частотой  $w_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$ .

Докажем эту теорему. Поскольку система консервативна, то:

$$\alpha q^2 + \beta \dot{q}^2 = \text{const}$$

$$q = q(t) \quad \dot{q} = \dot{q}(t)$$

$$2\alpha q \dot{q} + 2\beta \dot{q} \ddot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{\alpha}{\beta} q = 0 \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет вид уравнения гармонических колебаний. Теорема доказана.

### 23.3. Колебания физического маятника

**Физический маятник** – абсолютно твердое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси, вокруг которой оно может совершать колебания.

**Точка подвеса** – точка пересечения оси маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через его центр масс.

Рассмотрим твердое тело,  $O$  - точка подвеса, обозначим на теле центр масс  $C$ ,  $OC = a$ , угол отклонения прямой  $OC$  от вертикали  $= \alpha$ , масса тела  $m$ , Уравнение моментов для тела:

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= -mgsina \\ \alpha \ll 1, \quad \sin\alpha &\approx \alpha \\ \ddot{\alpha} + \frac{mga}{J}\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(22) – уравнение гармонических колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

Возьмем математический маятник, у которого период колебаний равен период колебаний твердого тела, тогда:

$$\begin{aligned} 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ l &= \frac{J}{ma} \end{aligned}$$

$l$  – приведенная длина физического маятника

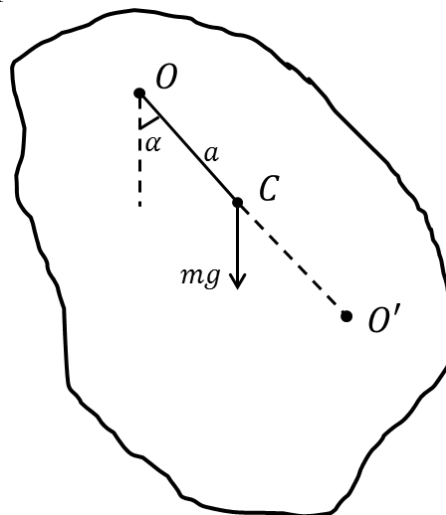


Рисунок 23.1 – Физический маятник

**Центр качания** – точка, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, для того чтобы период колебаний не изменился. Центр качания находится от точки подвеса на расстоянии  $l$ .

$$J = J_c + ma^2$$

$$l = \frac{J_c + ma^2}{ma} = a + \frac{J_c}{ma} > a$$

Следовательно точка подвеса и центр качания  $O'$  находятся по разные стороны от центра масс.

Теорема Гюйгенса

Точка подвеса и центр качания являются взаимными, или сопряженными, то есть если перенести точку подвеса в центр качания, то прежняя точка подвеса превратится в центр качания и наоборот.

Докажем теорему. Пропустим ось вращения через центр качания.

$$l' = a' + \frac{J_c}{ma'}$$

$$a' = l - a = \frac{J_c}{ma}$$

$$l' = \frac{J_c}{ma} + \frac{J_c ma}{mJ_c} = a + \frac{J_c}{ma}$$

$$l' = l$$

### 23.4. Сложение колебаний. Биения. Фигуры Лиссажу

Рассмотрим сложение колебаний. Имеем два закона колебаний:

$$x_1(t) = A_1 \cos w_1 t$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(w_2 t + \varphi_0)$$

1) Колебания происходят вдоль одной прямой и в одном направлении

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos w_1 t + A_2 \cos(w_2 t + \varphi_0)$$

- в общем случае сложная зависимость

1а)  $w_1 = w_2 = w_0$

$$x(t) = A_1 \cos w_0 t + A_2 \cos(w_0 t + \varphi_0)$$

- гармоническое колебание

1б)  $w_1 \approx w_2, A_1 = A_2 = A, \varphi_0 = 0$

$$x(t) = A \cos w_1 t + A \cos(w_2 t + \varphi_0) = 2A \cos \frac{w_1 - w_2}{2} t \cos \frac{w_1 + w_2}{2} t$$

$$w_1 - w_2 = \Delta w \ll w_1, w_2$$

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \approx w_0 \approx w_1 \approx w_2$$

$$x(t) = \underbrace{2A \cos \Delta w t}_{A(t)} \cos w_0 t = A(t) \cos w_0 t \quad (23)$$



$A(t)$  – медленно меняющаяся амплитуда. На графике 23.2 изображена зависимость (23) – биения.

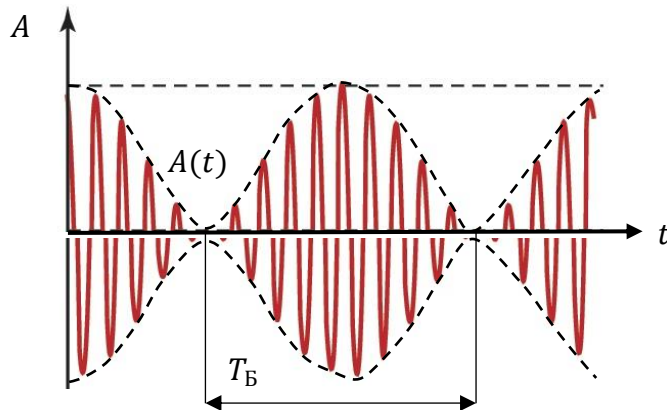


Рисунок 23.2 – Биения

Там, где амплитуда обращается в ноль, происходит выворот фазы. Период биения -  $T_B$ .

$$\frac{\Delta \omega T_B}{2} = \pi \rightarrow T_B = \frac{2\pi}{\Delta \omega} = \frac{2\pi}{\omega_6}$$

$$\omega_6 = |\omega_1 - \omega_2|$$

## 2) Взаимно перпендикулярные колебания

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Для того, чтобы траектория замкнулась необходимо:

$$n\omega_1 = m\omega_2$$

$n$  и  $m$  – целые числа. Траектория, описываемая такими колебаниями, называется фигурой Лиссажу. На рисунке 23.3 представлены разные фигуры Лиссажу. По вертикали указано соотношение чисел  $n$  и  $m$ , по горизонтали указана начальная фаза  $\varphi_0$ .

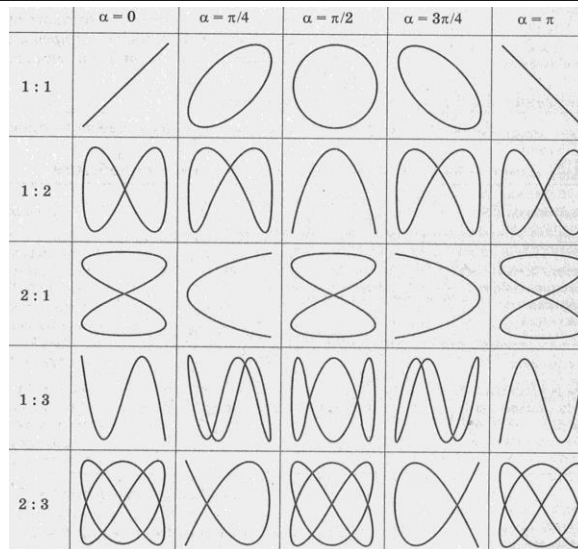


Рисунок 23.3 – Фигуры Лиссажу

### 23.5. Собственные затухающие колебания

Пусть на маятник действует сила вязкого трения:

$$F_{\text{тр}} = -\alpha v$$

Тогда уравнение колебаний выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$w_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta = \frac{\alpha}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + w_0^2x = 0 \quad (24)$$

Уравнение (24) называется уравнением затухающих колебаний. Ищем решение в виде:

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta A\lambda e^{\lambda t} + w_0^2 A e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + w_0^2 = 0 \quad (25)$$

(25) – характеристическое уравнение.

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - w_0^2}$$

Получены два решения:

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$x_2(t) = A_2 e^{\lambda_2 t}$$

- 1) Апероодический режим  $\delta > w_0$

$$x(t) = e^{-\delta t} \left( A_1 e^{\sqrt{\delta^2 - w_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - w_0^2} t} \right) \quad (26)$$

Получили (26) – апериодический режим, при этом координата может менять знак не более одного раза. Остальные режимы будут рассмотрены на следующей лекции.

## Лекция 24

### 24.1. Собственные затухающие колебания. Продолжение.

2) Критический режим  $\delta = w_0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$$

$$x(t) = (A + V_0 t) e^{-\delta t}$$

$V_0$  – константа с размерностью скорости (но начальной скоростью не является)

3) Периодический режим  $\delta < w_0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \sqrt{w_0^2 - \delta^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} \left( A_1 e^{i \sqrt{w_0^2 - \delta^2} t} + A_2 e^{-i \sqrt{w_0^2 - \delta^2} t} \right)$$

Можно переписать в виде:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos \left( \sqrt{w_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0 \right)$$

$w_3 = \sqrt{w_0^2 - \delta^2}$  – частота затухающих колебаний

$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$  – амплитуда затухающих колебаний (медленно затухающую)

График затухающих колебаний представлен на рисунке 24.1.

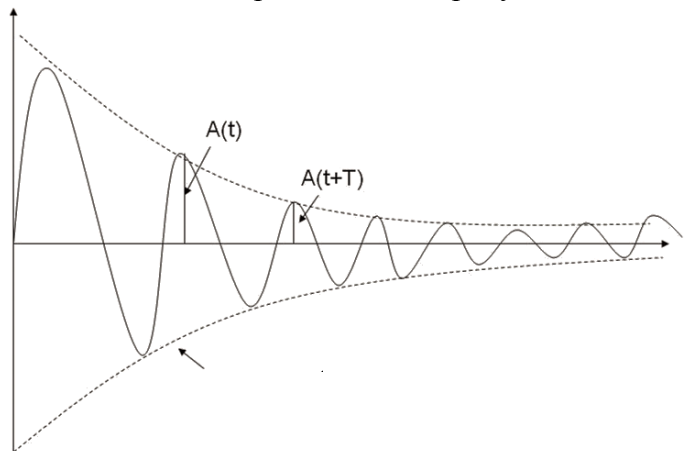


Рисунок 24.1 – Затухающие колебания

Рассмотрим характеристики затухающих колебаний.

$$\frac{A(t)}{A_0} = \frac{1}{e} = e^{-1} = e^{-\delta \tau}$$

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

$\tau$  – время релаксации. Логарифмический декремент затухания:

$$\theta = \frac{\ln A_n}{\ln A_{n+1}} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T$$

$$\theta = \delta T$$

Добротность:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E_T}$$

$E$  – полный запас энергии,  $\Delta E_T$  – потери энергии за период. Выразим добротность в более понятных единицах. Будем считать, что

$$w_3 \approx w_0, \quad \delta \ll w_0$$

$$A_0 e^{-\delta t} \cos(w_0 t + \varphi_0)$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\delta t} \cos^2(w_0 t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A_0 w_0 e^{-\delta t} \sin(w_0 t + \varphi_0)$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA_0^2 w_0^2}{2} e^{-2\delta t} \sin^2(w_0 t + \varphi_0)$$

$$mw_0^2 = K$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{KA_0^2}{2} e^{-2\delta t} \sin^2(w_0 t + \varphi_0)$$

Полная энергия:

$$E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \underbrace{\frac{KA_0^2}{2}}_{E_0} e^{-2\delta t}$$

$$E = E_0 e^{-2\delta t}$$

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{E_0 e^{-2\delta t} - E_0 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad x \ll 1$$

$$Q \approx \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T)} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi w_0}{\delta 2\pi} = \frac{w_0}{2\delta}$$

Можно указать еще один интересный факт для добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \pi \frac{\tau}{T} = \pi N_e \approx 3N_e$$

$N_e$  – число колебаний, за которое амплитуда уменьшится в  $e$  раз. А  $3N_e$  – полное число колебаний до практически полного затухания:

$$3N_e \approx N_{\text{зат}}$$

## 24.2. Вынужденные колебания

**Вынужденные колебания** – колебания, которые происходят под действием внешней вынуждающей силы. Как правило внешняя сила периодическая.

Рассмотрим движение гармонического осциллятора массой  $m$ , на пружине жесткостью  $k$ , в вязкой среде, действует внешняя сила  $F_{\text{вн}} = F_0 \cos \omega t$ . Тогда уравнение колебаний будет выглядеть:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (27)$$

(27) – уравнение вынужденных колебаний. Если справа 0, то уравнение однородное, если не 0, то уравнение неоднородное. Существует теорема, что решение неоднородного уравнения представимо в виде суммы решений однородного уравнения и частного неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_{\text{одн}} + x_{\text{неодн}}$$

$$\underbrace{\ddot{x}_{\text{одн}} + 2\delta\dot{x}_{\text{одн}} + \omega_0^2 x_{\text{одн}}}_{=0} + \ddot{x}_{\text{неодн}} + 2\delta\dot{x}_{\text{неодн}} + \omega_0^2 x_{\text{неодн}} = f_0 \cos \omega t$$

Нам достаточно найти  $x_{\text{неодн}}$ . Вспомним формулу Эйлера:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$\text{Re}(e^{i\omega t}) = \cos \omega t$$

Будем считать, что на нашу систему действует вынуждающая сила  $e^{i\omega t}$ :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

Тогда мы сможем найти комплексное решение, взять действительную часть, и эта действительная часть будет  $x_{\text{неодн}}$ . Будем искать решение в виде:

$$x(t) = Ae^{i\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = Ai\lambda e^{i\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = -A\lambda^2 e^{i\lambda t}$$

$$-A\lambda^2 e^{i\lambda t} + 2\delta Ai\lambda e^{i\lambda t} + \omega_0^2 Ae^{i\lambda t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$Ae^{i\lambda t}(\omega_0^2 - \lambda^2 + 2\delta i\lambda) = f_0 e^{i\omega t}$$

Решение должно существовать для любого момента времени, а значит:

$$\lambda = \omega$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta\omega i}$$

Представим знаменатель в виде комплексного числа:

$$z = a + ib$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\varphi}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg} \varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} e^{-i\varphi}$$

$$A = \frac{f_0 e^{i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$x(t) = Ae^{i\omega t} = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Возьмем действительную часть от  $x(t)$ :

$$x_{\text{неодн}} = \text{Re}(x(t)) = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}} \cos\left(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\varphi(w)}\right)$$

Полное решение:

$$x(t) = Ce^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{w_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0\right) + A(w) \cos(\omega t + \varphi(w))$$

– решение уравнения вынужденных колебаний. При этом через время  $3\tau$  первая часть решения затухнет, установятся вынужденные колебания. Это называется процессом установления вынужденных колебаний.

## 24.6. Установившиеся вынужденные колебания. АЧХ

Пусть колебания установились. Отдельно выпишем амплитуду  $A(w)$ :

$$A(w) = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}}$$

Зависимость  $A(w)$  носит название амплитудно-частотной характеристики (АЧХ).

1)  $w = 0$

$$A(0) = \frac{f_0}{w_0^2} = \frac{F_0}{mw_0^2} = \frac{F_0}{K} = x_0$$

$K$  – жесткость пружины

2)  $w \rightarrow \infty$

$$A(w) \sim \frac{f_0}{w^2} \rightarrow 0$$

Где-то должен быть локальный максимум, для этого необходимо найти минимум знаменателя:

$$\frac{d}{dw} ((w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2) = 2(w_0^2 - w^2)(-2w) + 8\delta^2 w = 0$$

$$w^2 - w_0^2 + 2\delta^2 = 0$$

$$w = w_p = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2}$$

$$w_p \approx w_0$$

$w_p$  – резонансная частота.

**Резонанс смещения** – явление возрастания амплитуды установившихся колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний.

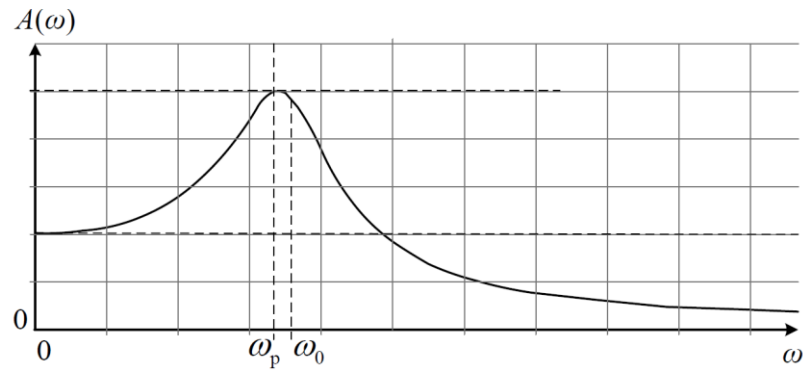


Рисунок 24.2 – Амплитудно-частотная характеристика

Рассмотрим резонанс скорости вынужденных колебаний:

$$x(t) = A(w) \cos(wt + \varphi(w))$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -wA(w) \sin(wt + \varphi(w)) = V(w) \cos\left(wt + \varphi(w) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V(w) = \frac{f_0 w}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}}$$

1)  $w = 0$

$$V(0) = 0$$

2)  $w \rightarrow \infty$

$$V(w) \sim \frac{f_0}{w} \rightarrow 0$$

3) Ищем локальный максимум

$$V(w) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\frac{w_0^2 - w^2}{w}\right)^2 + 4\delta^2}}$$

Резонанс скорости наблюдается при  $w = w_0$

Найдем резонанс ускорения.

$$a(t) = \dot{v}(t) = -w^2 A(w) \cos(wt + \varphi(w)) = a_0(w) \cos(wt + \varphi(w) + \pi)$$

$$a_0(w) = \frac{f_0 w^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2}}$$

1)  $w = 0$

$$a_0(0) = 0$$

2)  $w \rightarrow \infty$

$$a_0(w) \rightarrow f_0 = \frac{F_0}{m}$$



### 3) Ищем локальный максимум

$$a_0(w) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\frac{w_0^2}{w^2} - 1\right)^2 + \frac{4\delta^2}{w^2}}}$$

$$\frac{d}{dw} \left( \left(\frac{w_0^2}{w^2} - 1\right)^2 + \frac{4\delta^2}{w^2} \right) = 2 \left( \left(\frac{w_0^2}{w^2} - 1\right) \left(-2 \frac{w_0^2}{w^3}\right) - \frac{8\delta^2}{w^3} \right) = 0$$

$$1 - \frac{w_0^2}{w^2} - \frac{2\delta^2}{w_0^2} = 0$$

$$w^2 = \frac{w_0^2}{1 - \frac{2\delta^2}{w_0^2}} \approx w_0^2 \left( 1 + \frac{2\delta^2}{w_0^2} \right) = w_0^2 + 2\delta^2$$

$$w_p = \sqrt{w_0^2 + 2\delta^2}$$

Выпишем точные формулы для резонансных частот:

$$w_x = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2}$$

$$w_v = w_0$$

$$w_a = \sqrt{w_0^2 + 2\delta^2}$$

$$w_a w_x = w_0^2 = w_v^2$$

$$w_v = \sqrt{w_a w_x}$$

## 24.7. Фазово-частотная характеристика

Выпишем фазу:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\delta w}{w_0^2 - w^2}$$

1)  $w = 0$

$$\varphi = 0$$

2)  $w = w_0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

3)  $w \rightarrow \infty$

$$\varphi \rightarrow -\pi$$

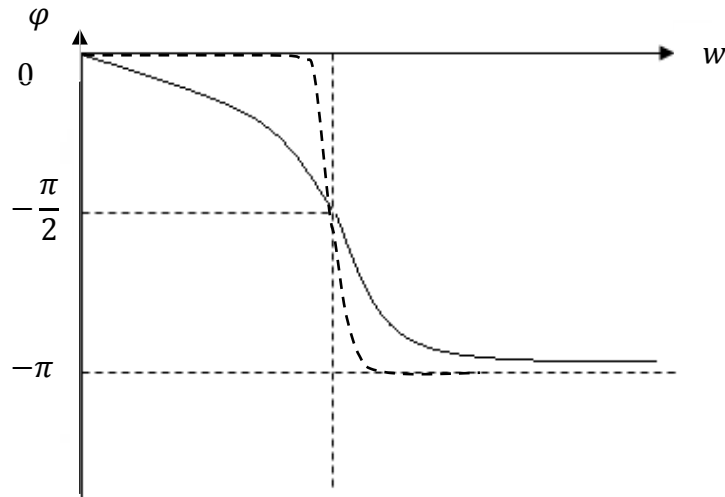


Рисунок 24.3 – Фазово-частотная характеристика

**Фазово-частотная характеристика** – зависимость разности фаз между смещением и вынуждающей силой от частоты вынуждающей силы (при установившихся вынужденных колебаниях).

## 24.8. Соотношение между силами при резонансе

Найдем соотношение сил при резонансе. При этом:

$$w_p \approx w_0, \quad w = w_0$$

$$A(w_0) = \frac{f_0}{2\delta w_0} = \frac{F_0}{2m\delta w_0}$$

$$\varphi(w_0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$F_{\text{внеш}} = F_0 \cos w_0 t$$

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}} &= -kx = -kA(w_0) \cos(w_0 t + \varphi(w_0)) = -k \frac{F_0}{2m\delta w_0} \cos\left(w_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -mw_0^2 \frac{F_0}{2m\delta w_0} \sin w_0 t = \frac{F_0 w_0}{2\delta} \sin w_0 t = -Q F_0 \sin w_0 t \end{aligned}$$

Амплитуда силы упругости в  $Q$  раз превосходит внешнюю силу.

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= -\alpha v = -\alpha w_0 A(w_0) (-\sin(w_0 t + \varphi(w_0))) = 2\delta m w_0 \frac{F_0}{2m\delta w_0} \sin\left(w_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -F_0 \cos w_0 t = -F_{\text{внеш}} \end{aligned}$$

При резонансе внешняя сила всегда компенсирует силу трения, а это значит, что внешняя сила направлена против силы трения, значит внешняя сила всегда со направлена со скоростью.

## 24.9. Вычисление добротности

Вычислить добротность можно двумя способами.

Первый способ. Вспомним, чему равна амплитуда при нулевой частоте и резонансе:

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{F_0}{k} \\ A_{\text{рез}} &\approx A(w_0) = \frac{F_0}{2m\delta w_0} \\ \frac{A_{\text{рез}}}{A(0)} &= \frac{k}{2m\delta w_0} = \frac{mw_0^2}{2m\delta w_0} = \frac{w_0}{2\delta} \\ \frac{A_{\text{рез}}}{A(0)} &= Q \end{aligned}$$

На практике использовать такой способ расчета не очень удобно. Чаще всего пользуются другим способом.

Второй способ. Введем понятие полуширины резонансной кривой.

**Полуширина резонансной кривой** – это величина, на которую нужно изменить (увеличить или уменьшить) частоту вынуждающей силы при резонансе для того, чтобы амплитуда установившихся вынужденных колебаний стала в  $\sqrt{2}$  раз меньше максимального (резонансного) значения.

**Ширина резонансной кривой** – удвоенная полуширина резонансной кривой.

На рисунке 24.5 изображен график резонансной кривой. Найдем  $\frac{A_{\text{рез}}}{\sqrt{2}}$ .

$$\begin{aligned} A^2(w) &= \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2 w^2} = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{(w_0 - w)^2 (w_0 + w)^2 + 4\delta^2 w^2} \\ w &\approx w_0 \quad w_0 - w = \Delta w \\ w_0 + w &\approx 2w_0 \\ A^2(w) &= \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{(\Delta w)^2 (2w_0)^2 + 4\delta^2 w_0^2} = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{4w_0^2 (\Delta w^2 + \delta^2)} \\ A_{\text{рез}}^2 &= \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{4w_0^2 \delta^2} \end{aligned}$$

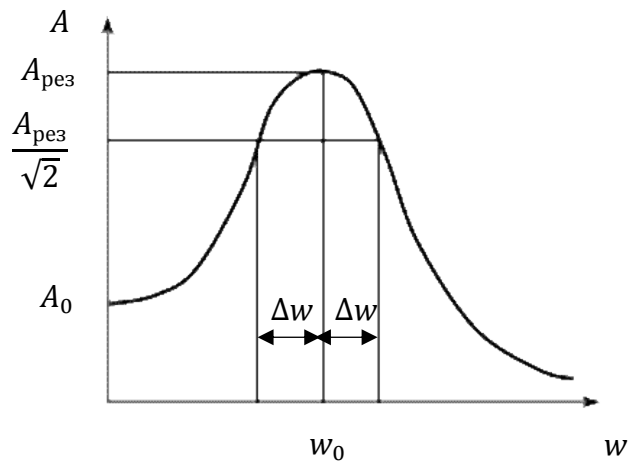


Рисунок 24.4 – Резонансная кривая

$$\frac{A_{\text{рез}}^2}{A^2} = 2, \quad \Delta w = \delta$$

Получаем финальный результат:

$$Q = \frac{w_0}{2\delta} = \frac{w_0}{2\Delta w}$$



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ