

С. В. ИЗМАЙЛОВ

КУРС ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ДЛЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1962

ВВЕДЕНИЕ

Все развитие учения об электрических и магнитных явлениях приводит к выводу о реальном существовании электромагнитного поля. Электромагнитное поле есть вид материи и характеризуется тем, что действует на находящиеся в нем неподвижные и движущиеся заряды с некоторыми силами. В зависимости от того, как проявляется действие электромагнитного поля, электромагнитное поле условно может рассматриваться как магнитное, действующее только на движущиеся в данной системе отсчета заряды, или как электрическое, действующее на покоящиеся в данной системе отсчета заряды. Конечно, это не означает, что электрическое поле не действует на движущиеся заряды.

Разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от выбора системы отсчета. Поэтому в общем случае правильнее говорить об едином электромагнитном поле.

Электрические заряды являются свойством другого вида материи— вещества или частиц. Всякий движущийся заряд (заряженная частица) окружен электромагнитным полем. Заряд, покоящийся в данной системе отсчета, связан только с электрическим полем. Существует и свободное электромагнитное поле, не связанное с зарядами,— так называемые электромагнитные волны. Свободное поле в любой системе отсчета состоит из электрической и магнитной составляющих поля и распространяется в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$. Скорость распространения электромагнитного поля в вакууме всегда одна и та же и не зависит от равномерного и прямолинейного движения системы отсчета.

Электрические заряды имеют атомистическую структуру. Опыт показывает, что все так называемые „элементарные“ заряженные частицы (электроны, позитроны, протоны и т. д.) имеют заряд $\pm e_0$, где $e_0 = 4,802 \cdot 10^{-10}$ СГСе единиц. Заряд частицы распределен в малом объеме. В большинстве случаев заряды элементарных частиц можно считать точечными. Говорят, что заряды дискретны.

В отличие от зарядов, электромагнитное поле распределено в пространстве непрерывно. В этом состоит одно из существенных отличий поля от частиц в классической (не квантовой) физике.

По современным представлениям частицы обладают непрерывными („волновыми“) свойствами и, обратно, поле обладает дискретными свойствами. Эти новые „квантовые“ свойства поля и частиц не входят в область явлений, изучаемых классической электродинамикой, и нами рассматриваться не будут. В классической теории движение частиц характеризуется уравнениями движения Ньютона. Свойства поля характеризуются уравнениями поля. Уравнения поля в вакууме называются уравнениями Максвелла — Лоренца.

В основе уравнений поля лежит сформулированный Фарадеем принцип близкодействия, который в современной формулировке гласит:

а) электромагнитное поле в данной точке пространства в данный момент времени определяется значениями поля в бесконечно близких точках пространства в бесконечно близкие предшествующие моменты времени;

б) сила, с которой электромагнитное поле действует в данный момент времени на заряд, находящийся в данной точке пространства, определяется значением поля в этот момент в данной точке и скоростью заряда в этот момент.

Из принципа близкодействия вытекает, что электромагнитное поле должно характеризоваться дифференциальными уравнениями в частных производных.

Заметим, что уравнения поля, как и уравнения движения частиц, известны лишь приближенно. Разделение материи на два вида (частицы и поле) весьма условно и основано на том, что оба вида материи сравнительно слабо взаимодействуют друг с другом. Поэтому возможно изучение частиц независимо от поля (механика) и изучение поля независимо (или почти независимо) от частиц (электродинамика).

Уравнения движения и уравнения поля характеризуют два вида единой материи. Это наводит на мысль, что и те и другие уравнения являются лишь частными случаями общих уравнений движения единой материи (уравнений будущей квантовой теории материи). Поэтому выявление особых свойств у одного из видов материи, например у поля, заставляет искать эти же свойства у второго вида (частиц) и изменять уравнения их движения так, чтобы вновь открытые свойства.

Развитие учения о движении частиц и поля именно так и происходило, хотя необходимость подобной связи частиц и поля была понята лишь после установления материальности поля. Движение частиц, как показывает механика, подчиняется законам сохранения энергии, импульса (количества движения) и момента импульса. Поскольку электромагнитное поле есть вид материи, оно также должно обладать энергией, импульсом, моментом импульса. Законы сохранения, имеющие место для частиц, должны иметь место и для поля. Специфика поля, заключающаяся в его непрерывности, приводит к тому, что законы сохранения для поля принимают более сложную математическую структуру. Кроме „механических“ законов сохранения,

в электродинамике мы встречаемся еще с законом сохранения электрического заряда.

Электромагнитное поле, связанное с отдельными заряженными частицами, называется микроскопическим. Поле, существующее в присутствии макроскопического вещества, называется макроскопическим.

Микроскопическое поле характеризуется векторами напряженности поля. Вектор напряженности электрического поля и вектор напряженности магнитного поля подчиняются уравнениям Максвелла — Лоренца:

Обоснование уравнений поля можно выполнить различными способами в зависимости от выбора системы основных опытных фактов. В настоящем курсе за основу взяты силы, действующие на квазиточечный заряд в электрическом и магнитном полях, и выражения для напряженностей электромагнитного поля, создаваемого медленно движущимся квазиточечным зарядом.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Электрическое поле и заряды

Направленность действия электрических сил поля позволяет характеризовать поле некоторым вектором \vec{E} , который называется напряженностью электрического поля. Вектор \vec{E} является функцией координат точки в выбранной системе отсчета, а также времени, если создающие поле заряды движутся.

Опыт показывает, что при заданной напряженности поля \vec{E} силы, действующие на разные покоящиеся заряды, помещаемые в данную точку поля, различны. Поэтому надо считать, что электрическая сила не равна, а пропорциональна напряженности поля

$$\vec{F}_e = e\vec{E}. \quad (1.01)$$

Скалярный множитель пропорциональности e служит мерой величины заряда.

В выражении (1.01) предполагается, что заряд точечный и поле \vec{E} берется в точке, занимаемой зарядом. Состояние такого заряда определяется заданием его положения (радиус-вектора \vec{r}) и скорости ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$) в выбранной системе отсчета. Законность подобной абстракции будет рассмотрена ниже. Соотношение (1.01) выражает принцип близкодействия для электрического поля.

Сила \vec{F}_e , действующая на неподвижный заряд, может быть как параллельной \vec{E} , так и антипараллельной \vec{E} , поэтому заряды могут быть разных знаков.

Если в точку поля с напряженностью \vec{E} поместить два точечных заряда e_1 и e_2 , то, как показывает опыт, действующая сила будет

$$\vec{F}_e = e_1 \vec{E} + e_2 \vec{E} = (e_1 + e_2) \vec{E} = e \vec{E}. \quad (1.02)$$

Это значит, что заряд аддитивен.

Единицу заряда можно выбрать произвольно. Выбрав некоторый заряд e_0 за единицу, мы можем остальные заряды измерить по отношению к единичному, пользуясь тем, что согласно (1.01)

$$e : e_0 = F : F_0,$$

где F и F_0 — силы, действующие в данном поле на заряды e и e_0 .

Если электрический заряд занимает некоторый конечный объем V , то его распределение можно характеризовать объемной плотностью заряда $\rho = \rho(r, t)$, численно равной заряду в единице объема. Заряд в элементе объема dV равен $de = \rho dV$, а полный заряд в объеме V получается в силу аддитивности заряда интегрированием по всему объему

$$e = \int_V \rho(r, t) dV. \quad (1.03)$$

Сила, действующая в электрическом поле на заряд в элементе объема dV , равна $d\vec{F}_e = \vec{E} de = \rho \vec{E} dV$. Силу, действующую на заряд в объеме V , получим интегрированием по объему

$$\vec{F}_e = \int_V \rho \vec{E} dV. \quad (1.04)$$

Формула (1.04) обобщает (1.01) на случай объемно распределенных зарядов. Формулы (1.01) или (1.04) определяют действие электрического поля на заряд, то есть характеризуют заряды с пассивной стороны. Но, как показывает опыт, заряды проявляют себя активно. Всякий точечный заряд e' окружен электрическим полем, напряженность которого в точке, определяемой радиус-вектором r относительно заряда, выражается формулой

$$\vec{E}'(r) = \frac{e'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{e'}{r^2} \vec{r}^\circ, \quad (1.05)$$

где $\vec{r}^\circ = \frac{\vec{r}}{r}$ — единичный радиус-вектор. Здесь выбрана абсолютная система единиц, при которой множитель пропорциональности в (1.05) равен единице.

Для наглядного изображения поля, следуя Фарадею, вводят понятие о силовых линиях вектора \vec{E} . Линия вектора представляет собой

пространственную кривую, проведенную так, что касательная в каждой ее точке направлена по вектору \vec{E} в этой точке. Дифференциальное уравнение линии вектора \vec{E} имеет вид

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1.06)$$

Так как силовую линию можно провести через каждую точку пространства, то поле характеризуется бесконечным числом силовых

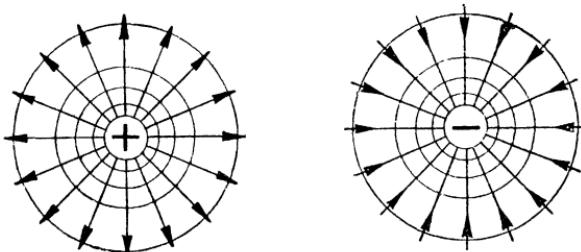


Рис. 1.

линий. Обычно изображаются только некоторые линии. Поля точечных (положительного и отрицательного) зарядов представлены на рисунке 1.

§ 2. Закон Кулона

Электрический заряд e' окружен электрическим полем, определяемым формулой (1.05). На всякий заряд e , помещенный в это поле, будет действовать сила. Отвлекаясь от поля, действующую на заряд e силу можно выразить через величины зарядов e' и e и расстояние между ними. Из уравнений (1.01) и (1.05) следует, что сила, с которой заряд e' действует на заряд e , находящийся на расстоянии r , равна

$$\vec{F} = e\vec{E}' = \frac{ee'}{r^2} \vec{r}^\circ. \quad (2.01)$$

С другой стороны, радиус-вектор заряда e' относительно заряда e равен $-\vec{r}$. Поэтому напряженность поля заряда e в точке, занимаемой зарядом e' , равна

$$\vec{E} = \frac{e}{r^2} \frac{(-\vec{r})}{r} = -\frac{e}{r^2} \vec{r}^\circ.$$

Следовательно, сила, с которой заряд e действует на заряд e' , равна

$$\vec{F}' = e'\vec{E} = -\frac{ee'}{r^2} \vec{r}^\circ. \quad (2.02)$$

Из сравнения (2.01) и (2.02) видно, что для взаимодействия двух покоящихся точечных зарядов выполняется З-й закон Ньютона.

Формулы (2.01) и (2.02) выражают закон Кулона, установленный им в 1794 году на основании опытов с макроскопическими зарядами. Закон гласит, что два заряда действуют друг на друга с силами, пропорциональными произведению зарядов и обратно пропорциональными квадрату расстояния между зарядами. При этом заряды одинаковых знаков отталкиваются ($ee' > 0$), а различных — притягиваются ($ee' < 0$).

В 1913 году Резерфорд, изучая рассеивание α -частиц ядрами атомов, доказал, что для заряженных микрочастиц закон Кулона остается верным до расстояний порядка 10^{-12} см.

Закон Кулона, подобно закону тяготения Ньютона, выражает взаимодействие зарядов в соответствии с представлениями о дальнодействии: сила, с которой каждый из зарядов действует на другой, зависит только от величины зарядов и от расстояния между зарядами. Поле, играющее роль промежуточного агента, передающего действие от одного заряда к другому, в закон Кулона явно не входит. Получается впечатление, что силы взаимодействия передаются мгновенно через пространство.

Представление о дальнодействии, основанное на законах Ньютона и Кулона, господствовало в физике до середины XIX в., до введения поля (принципа близкодействия) Фарадеем и Максвеллом. В действительности действие от заряда к заряду передается при помощи поля, и закон взаимодействия зарядов в форме (2.01) перестает быть справедливым, если заряды движутся и учет процесса распространения поля оказывается существенным.

Законом Кулона обычно пользуются для установления единицы заряда. Полагая $e = e' = 1$ и $r = 1$ см, получим $F = 1$ дине. Таким образом, в абсолютной (гауссовой) системе единиц такой заряд равен единице, который отталкивает в пустоте равный ему заряд, расположенный на расстоянии в 1 см, с силой в одну дину. В рационализированной системе единиц вводится для измерения заряда в $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ раз меньшая единица и выражения (1.01), (1.05) и (2.01) принимают вид:

$$\vec{F} = e \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{e}{4\pi r^2} \vec{r}^\circ, \quad \vec{F} = \frac{ee'}{4\pi r^2} \vec{r}^\circ. \quad (2.03)$$

Выше указывалось, что электрический заряд имеет атомное строение. Заряд „элементарных“ частиц равен $\pm e_0$, где

$$e_0 = 4.802 \cdot 10^{-10} \text{ СГС ед.}$$

Заряды атомных ядер равны Ze_0 , где Z — число Менделеева (номер элемента в периодической системе элементов). В „атомной“ системе единиц за единицу заряда берется величина e_0 .

§ 3. Принцип наложения полей. Теорема Гаусса

Опыт показывает, что электрическое поле подчиняется принципу наложения (суперпозиции) полей: поле двух или нескольких зарядов равно векторной сумме полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности, то есть

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_a \vec{E}_a(\vec{r}, t), \quad (3.01)$$

где $\vec{E}_a(\vec{r}, t)$ — поле, создаваемое зарядом с индексом a в точке \vec{r} в момент t ; \vec{E} — результирующее поле в той же точке и в тот же момент времени.

Принцип суперпозиции вытекает из факта векторного сложения сил, действующих на заряд, находящийся в точке \vec{r} , со стороны других зарядов.

Введем понятие о потоке вектора напряженности. Обозначим элемент площади некоторой поверхности σ с нормалью \vec{n} через $d\sigma$ (рис. 2). Поток вектора \vec{E} через $d\sigma$ определится формулой

$$d\Psi = \vec{E} d\sigma = \vec{E} \vec{n} d\sigma = E_n d\sigma = E \cos \alpha d\sigma. \quad (3.02)$$

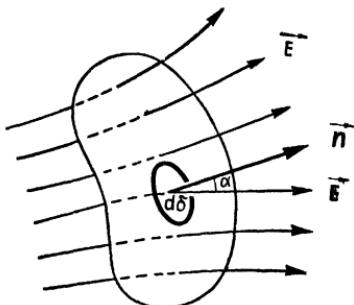


Рис. 2.

Поток вектора \vec{E} через всю поверхность σ будет равен

$$\Psi = \int_{(\sigma)} E_n d\sigma. \quad (3.03)$$

Если поле \vec{E} создается несколькими зарядами, то на основании (3.01) имеем $E_n = \sum_a E_{an}$ и

$$\Psi = \sum_a \int_{(\sigma)} E_{an} d\sigma = \sum_a \Psi_a, \quad (3.04)$$

то есть поток равнодействующего поля через некоторую поверхность σ равен алгебраической сумме потоков составляющих.

В § 1 указывалось, что для графического изображения поля проводят силовые линии. Поток Ψ вектора E через поверхность σ можно интерпретировать как число силовых линий, пронизывающих поверхность σ . Выбирая площадку $d\sigma$ перпендикулярной к \vec{E} , из (3.02) имеем

$$E = |\vec{E}| = \frac{d\Psi}{d\sigma}, \quad (3.05)$$

то есть напряженность поля равна числу силовых линий, проходящих через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению поля. Заметим, что силовые линии служат лишь для наглядного изображения поля, а не являются реальными образованиями.

Рассмотрим теперь поток поля через произвольную замкнутую поверхность σ . Допустим, что поле создается точечными зарядами.

Для одного точечного заряда e_a поток через площадку $d\sigma$ равен согласно (1.05) и (3.02)

$$d\Psi_a = \vec{E}_a \cdot \vec{n} d\sigma = e_a \frac{\cos \alpha \cdot d\sigma}{r_a^2},$$

где α — угол, образованный вектором \vec{E}_a (рис. 3) и нормалью \vec{n} к площадке $d\sigma$ (нормаль берем всегда внешнюю). Поскольку

$$\frac{\cos \alpha \cdot d\sigma}{r_a^2} = d\Omega_a,$$

($d\Omega_a$ — элемент телесного угла, под которым видна площадь $d\sigma$ из точки, занимаемой зарядом e_a), то

$$d\Psi_a = e_a d\Omega_a. \quad (3.06)$$

Поток через всю замкнутую поверхность равен

$$\Psi_a = e_a \oint d\Omega_a, \quad (3.07)$$

где $\oint d\Omega_a$ есть полный телесный угол, под которым видна поверхность из точки, занимаемой зарядом. Если заряд e_a находится внутри поверхности, то телесный угол, под которым видна вся замкнутая поверхность, равен 4π . Если заряд e_a находится вне замкнутой поверхности, то замкнутая поверхность видна под телесным углом, равным нулю. Итак,

$$\oint d\Omega_a = \begin{cases} 4\pi, & \text{если заряд } e_a \text{ находится внутри} \\ & \text{поверхности } \sigma, \\ 0, & \text{если заряд } e_a \text{ находится вне по-} \\ & \text{верхности } \sigma. \end{cases} \quad (3.08)$$

Поэтому поток через замкнутую поверхность

$$\Psi_a = \begin{cases} 4\pi e_a, & \text{если заряд } e_a \text{ находится внутри} \\ & \text{поверхности } \sigma, \\ 0, & \text{если заряд } e_a \text{ находится вне по-} \\ & \text{верхности } \sigma. \end{cases} \quad (3.09)$$

Разделим теперь все заряды на две группы: а) заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности, б) заряды, находящиеся вне замкнутой поверхности. Тогда согласно (3.04) полный поток через замкнутую поверхность равен

$$\Psi = \oint_{(S)} E_n d\sigma = \sum_a \Psi_a + \sum_b \Psi_b.$$

Но по (3.09) все $\Psi_a = 4\pi e_a$, а все $\Psi_b = 0$. Поэтому

$$\Psi = \oint_{(S)} E_n d\sigma = 4\pi e, \quad (3.10)$$

где $e = \sum_a e_a$ — полный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности. Формула (3.10) выражает теорему Гаусса: поток напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен произведению 4π на полный заряд, находящийся внутри этой поверхности. Знак потока определяется знаком суммарного заряда. Поток Ψ характеризует число силовых линий и не зависит от размеров и формы замкнутой поверхности, охватывающей точечный заряд (поверхность можно сделать сколь угодно малой). Следовательно, из положительного заряда $+e$ выходит $4\pi e$, а в отрицательный заряд $-e$ входит $4\pi e$ силовых линий.

Теорема Гаусса говорит о том, что источниками электрического поля являются электрические заряды. Ею удобно пользоваться для определения поля зарядов, распределенных со сферической, цилиндрической или плоской симметрией.

Задачи

1. Определить электрическое поле неподвижного заряда e , равномерно распределенного по поверхности шара радиуса a .

Решение. Вследствие сферической симметрии распределения заряда напряженность поля в данной точке должна быть направлена вдоль радиус-вектора \vec{r} этой точки (если за начало координат взять центр шара) и величина напряженности поля должна зависеть только от расстояния r . Положив $\vec{E} = E(r) \vec{r}$, получим для потока напряженности через шаровую поверхность радиуса r выражение

$$\Psi = \oint_{(S)} E_n d\sigma = E(r) \oint_{(S)} d\sigma = 4\pi r^2 E(r)$$

(так как нормаль к шаровой поверхности совпадает с \vec{r}). Обозначим через $e(r)$ заряд, находящийся внутри шаровой поверхности радиуса r . По теореме Гаусса имеем

$$\Psi = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi e(r), \quad \text{откуда} \quad E(r) = \frac{e(r)}{r^2}.$$

Если точка, определяемая радиус-вектором \vec{r} , лежит вне шара ($r > a$), то $e(r)$ равняется полному заряду шара e ; поэтому

$$E(r) = \frac{e}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}.$$

Если точка лежит внутри шара ($r < a$), то $e(r) = 0$ и

$$E(r) = 0, \quad \vec{E} = 0.$$

Таким образом, напряженность поля внутри равномерно заряженного по поверхности шара равна нулю, а вне шара — совпадает с напряженностью поля точечного заряда, равного заряду шара и расположенного в центре его. На поверхности шара $r = a$ напряженность поля меняется скачком:

$$E_r(a+0) - E_r(a-0) = \frac{e}{a^2} = 4\pi\eta,$$

где $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$ — поверхностная плотность заряда.

2. Определить электрическое поле заряда e , равномерно распределенного по объему шара радиуса a .

Решение. Вследствие сферической симметрии распределения заряда вектор \vec{E} направлен по \vec{r} и мы можем применить формулу $E(r) = \frac{e(r)}{r^2}$,

полученную в предыдущей задаче. Плотность заряда равна $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

Если точка лежит вне шара ($r > a$), то, как и в предыдущей задаче, $e(r) = e$. Поэтому

$$E(r) = \frac{e}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}.$$

Если точка лежит внутри шара ($r < a$), то $e(r)$ есть заряд внутри шара радиуса r :

$$e(r) = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = e \left(\frac{r}{a} \right)^3.$$

Поэтому

$$E(r) = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \rho r, \quad \vec{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \vec{r}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля заряда, распределенного равномерно по объему шара, внутри шара возрастает пропорционально расстоянию r от центра, а вне шара — совпадает с напряженностью поля точечного заряда, равного полному заряду шара и сосредоточенного в центре его. На границе шара ($r = a$) поле непрерывно.

§ 4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (теорема о дивергенции электрического поля)

Соотношение (3.10) суммарным образом связывает поле \vec{E} с зарядами («источниками» поля), находящимися внутри произвольного объема. Для приложений гораздо удобнее дифференциальная формулировка теоремы Гаусса.

Разделим (3.10) на объем V , ограниченный поверхностью σ ; тогда слева мы получим средний поток, выходящий из единицы объема, а справа — среднюю плотность заряда

$$\frac{1}{V} \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = 4\pi \frac{e}{V} = 4\pi\rho.$$

Будем стягивать поверхность σ к некоторой точке (считая, что поверхность σ , охватывающая объем V , — односвязная); тогда предел левой части дает дивергенцию поля

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = \operatorname{div} \vec{E},$$

а предел правой части — плотность заряда в точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} , к которой стягивается поверхность σ :

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{e}{V} = \rho(\vec{r}).$$

Поэтому формула (3.10) приводится к виду

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (4.01)$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля являются заряды.

Выше указывалось, что «элементарные» заряды мы рассматриваем как точечные. Но для удобства математического рассмотрения некоторых вопросов можно вводить плотность заряда ρ , которая равна нулю везде, кроме тех точек, в которых находятся точечные заряды. В этих точках плотность заряда обращается в бесконечность. Для одного точечного заряда e_a можно написать

$$\rho_a(\vec{r}) = e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (4.02)$$

где \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения, а $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$ — радиус-вектор заряда. Функция $\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ есть так называемая несобственная функция Дирака, характеризующая точечный источник поля.

Несобственная функция $\delta(x - \xi)$ одного независимого переменного x может быть определена следующим образом: $\delta(x - \xi) = 0$ при $x \neq \xi$ и $\delta(x - \xi)$ обращается в бесконечность при $x = \xi$, причем для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} f(\xi), & \text{если } a < \xi < b \\ 0, & \text{если } \xi \text{ вне } (a, b). \end{cases} \quad (4.03)$$

В частности, при $f(x) = 1$

$$\int_a^b \delta(x - \xi) dx = 1, \quad \text{если } a < \xi < b. \quad (4.04)$$

Область интегрирования может быть бесконечной. Имеют место равенства:

$$\delta(x - \xi) = \delta(\xi - x), \quad \delta[\alpha(x - \xi)] = \frac{1}{\alpha} \delta(x - \xi). \quad (4.05)$$

Смысл этих равенств заключается в том, что их правая и левая части дают одинаковые результаты, если их применить в качестве множителя под знаком интегрирования.

Аналогично можно ввести трехмерную δ -функцию $\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$, равную нулю везде, кроме точки \vec{r}_a , и такую, что интеграл по объему равен

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_a), & \text{если } \vec{r}_a \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{если } \vec{r}_a \text{ вне } V. \end{cases} \quad (4.06)$$

В частности,

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{r}_a \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{если } \vec{r}_a \text{ вне } V. \end{cases} \quad (4.07)$$

В качестве такой функции можно взять, например, произведение

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_a) = \delta(x - x_a) \delta(y - y_a) \delta(z - z_a). \quad (4.08)$$

Возвращаясь к плотности заряда, видим, что в силу (4.07) полный заряд, соответствующий плотности (4.02), равен

$$\int_V \rho_a(\vec{r}) dV = e_a \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = e_a,$$

где интегрирование проводится по бесконечному объему или любому объему, содержащему точку \vec{r}_a .

Плотность заряда системы точечных зарядов может быть написана при помощи δ -функций в форме

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (4.09)$$

где сумма берется по всем зарядам. Тогда

$$\int_V \rho dV = \sum_a e_a$$

есть сумма всех зарядов, находящихся в объеме V . Для точечного заряда дифференциальная теорема Гаусса согласно (4.01) и (4.02) принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (4.10)$$

Подставляя сюда напряженность поля заряда e_a , которую согласно (1.05) можно написать в форме

$$\vec{E} = \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3} (\vec{r} - \vec{r}_a) = \frac{e_a \vec{R}}{R^3},$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_a$, получим математическое соотношение

$$\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi \delta(\vec{R}), \quad (4.11)$$

определенное δ -функцию через дивергенцию вектора $\frac{\vec{R}}{R^3}$.

Задачи

1. Показать, что решением уравнения поля точечного заряда $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e \delta(\vec{r})$ является поле $\vec{E} = \frac{er}{r^3}$.

Решение. Поле точечного заряда сферически (радиально) симметрично. Обозначая через $E_r = |\vec{E}|$ единственную радиальную составляющую напряженности, получим в сферических координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = 4\pi e \delta(r).$$

Откуда

$$r^2 E_r = 4\pi \int_0^r e \delta(r) r^2 dr = e \int \delta(r) dV,$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ — элемент объема в сферической системе координат.

Замечая, что согласно (4.07) интеграл δ -функции по объему, окружающему заряд, равен единице, получим $E_r = \frac{e}{r^2}$, откуда

$$\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r} = \frac{er}{r^3}.$$

2. Показать, что напряженность поля заряда, равномерно распределенного по объему шара радиуса a , удовлетворяет уравнению (4.01).

Решение. Пользуясь результатами задачи 2 (§ 3), получим для $r < a$ $E_r = \frac{4\pi}{3} \rho r$. Поэтому в сферических координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{4\pi}{3} \rho r^3 \right) = 4\pi \rho.$$

Для точки вне шара ($r > a$) $\vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \frac{e\vec{r}}{r^3} = e \left(\vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \right) = \\ = e \left(-\frac{3}{r^4} \vec{r} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \right) = e \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} \right) = 0,\end{aligned}$$

так как

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3, \quad \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \nabla r = -\frac{3}{r^4} \vec{r} \quad (\nabla r = \vec{r}).$$

§ 5. Сила и плотность электрического тока. Закон сохранения электрического заряда

Всякий движущийся заряд образует конвекционный электрический ток. Заряд, проходящий в единицу времени через единицу площадки, перпендикулярной к направлению движения заряда, определяет плотность электрического тока. Если $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ есть скорость непрерывно распределенного заряда в точке \vec{r} в момент t , то вектор плотности тока равен

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (5.01)$$

Для системы точечных зарядов согласно (4.02)

$$\vec{j} = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (5.02)$$

где \vec{v}_a — скорость движения заряда e_a .

Проведем некоторую поверхность σ . Если \vec{n} — единичный вектор нормали к элементу поверхности $d\sigma$ (в случае замкнутой поверхности будем всегда брать внешнюю нормаль), то сила электрического тока через поверхность σ определяется как поток вектора \vec{j} через эту поверхность

$$I = \int_{(\sigma)} \vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{(\sigma)} j_n d\sigma. \quad (5.03)$$

В силу исторической традиции за направление тока принимается направление движения положительных зарядов.

Электрический заряд подчиняется закону сохранения: заряд замкнутой системы сохраняет постоянную величину. По-видимому, закон сохранения электрического заряда столь же общий и универсальный, как и законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Физический смысл закона сохранения заряда заключается, вероятно, в следующем. Заряд есть постоянная величина, определяющая связь одного вида материи — частиц вещества с другим видом материи — электромагнитным полем (подобно тому, как массу можно

рассматривать как постоянную связь вещества и гравитационного поля). Если бы заряд не сохранялся, то можно представить себе момент, когда отсутствовала бы связь между веществом и электрическим полем. Однако подобное явление не наблюдается.

Математическую формулировку закона сохранения электрического заряда получим, если рассмотрим незамкнутую систему. Уменьшение заряда в объеме V в единицу времени равняется силе электрического тока, идущего через замкнутую поверхность σ , ограничивающую объем V . Поэтому

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_{\sigma} j_n d\sigma. \quad (5.04)$$

Это уравнение есть выражение того факта, что изменение заряда в объеме V может происходить только за счет перераспределения заряда. Из (5.04) легко получить дифференциальную формулировку закона сохранения заряда*. Применяя к (5.04) формулу Остроградского

$$\oint_{\sigma} a_n d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV,$$

получим для неизменного по величине и форме объема V

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0.$$

Так как это справедливо для любого объема V , то должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (5.05)$$

дающее дифференциальную формулировку закона сохранения электрического заряда. Это уравнение часто называют уравнением непрерывности. Заметим, что закон сохранения любого скаляра, являющегося функцией координат и времени, должен иметь форму (5.05).

§ 6. Магнитное поле

Магнитное поле проявляется в механических силах, которые действуют на движущиеся в нем заряды. Магнитное поле характеризуется вектором напряженности \vec{B} .

Как показывает опыт, на заряд e , движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле, действует сила, пропорциональная скорости и перпендикулярная как вектору \vec{v} , так и вектору \vec{B} . Эта сила определяется формулой Лоренца

$$\vec{F}_m = e \left[\frac{\vec{v}}{c'} \times \vec{B} \right], \quad (6.01)$$

где c' — постоянная, зависящая от выбора системы единиц. Если выбрать систему единиц Гаусса, в которой размерность напряженности магнитного поля \vec{B} совпадает с размерностью напряженности электрического поля \vec{E} , то отношение $\frac{v}{c'}$ должно быть безразмерным. Это значит, что постоянная c' должна иметь размерность скорости.

Формула (6.01) определяет действие магнитного поля на движущиеся заряды (токи), то есть характеризует заряды как объекты воздействия магнитного поля. Но токи проявляют себя активно — они определяют связанное с ними магнитное поле. Всякий равномерно и прямолинейно движущийся со скоростью \vec{v} точечный заряд окружен

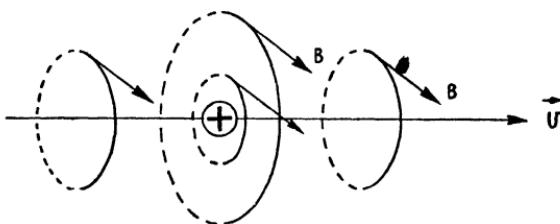


Рис. 4.

магнитным полем, напряженность которого \vec{B} в точке, характеризуемой радиус-вектором \vec{r} относительно заряда, определяется формулой

$$\vec{B} = \frac{e [\vec{v}, \vec{r}^\circ]}{c'' r^2}, \quad (6.02)$$

где $\vec{r}^\circ = \frac{\vec{r}}{r}$ — единичный радиус-вектор.

Из (6.02) видно, что напряженность поля \vec{B} перпендикулярна к скорости \vec{v} заряда и радиус-вектору \vec{r} точки наблюдения и образует с \vec{v} и \vec{r} правовинтовую систему. Легко убедиться, что линии вектора \vec{B} суть окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к \vec{v} и имеющие общую осью линию вектора \vec{v} (рис. 4).

Следует подчеркнуть, что формула (6.02) имеет место лишь для достаточно малых скоростей v заряда, значительно меньших, чем скорость распространения электромагнитного поля.

Постоянная c'' зависит от выбора системы единиц. Поскольку мы уже выбрали размерность \vec{B} , равной размерности \vec{E} , то отношение $\frac{v}{c''}$ должно быть безразмерно, то есть постоянная c'' должна иметь размерность скорости. Покажем теперь, что единицы для маг-

нитного поля могут быть выбраны так, что численные значения c' (см. 6.01) и c'' совпадут. Изменим единицу для \vec{B} (не меняя размерности), положив $\vec{B} = \alpha \vec{B}'$. Тогда (6.01) и (6.02) примут вид:

$$\vec{F}_m = e \frac{\alpha}{c'} [\vec{v}, \vec{B}'], \quad \vec{B}' = \frac{1}{\alpha c''} e \left[\vec{v}, \frac{\vec{r}_0}{r^2} \right].$$

Величину α можно выбрать так, что

$$\frac{\alpha}{c'} = \frac{1}{\alpha c''} = \frac{1}{c}, \quad \text{то есть } \alpha = \left(\frac{c'}{c''} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad c = (c' c'')^{\frac{1}{2}}.$$

Соотношения, определяющие магнитное поле, напишутся теперь в форме

$$\vec{F}_m = e \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right], \quad (6.03)$$

$$\vec{B} = \frac{e [\vec{v}, \vec{r}_0]}{cr^2}. \quad (6.04)$$

Постоянная c , имеющая размерность скорости, носит название электродинамической постоянной. Численное значение ее в гауссовой системе единиц равно

$$c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}. \quad (6.05)$$

Значение c находится из опыта. Для определения c можно, например, найти c' и c'' при произвольном выборе единицы для напряженности B и затем вычислить электродинамическую постоянную по формуле $c = (c' c'')^{\frac{1}{2}}$.

Выше было указано, что (6.04) имеет место только для медленно движущихся зарядов, то есть если

$$v \ll c. \quad (6.06)$$

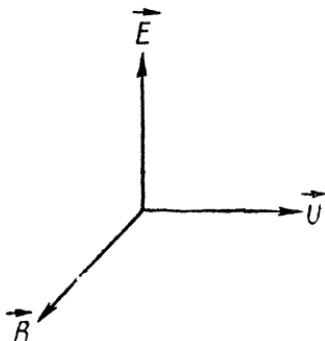


Рис. 5.

Заметив, что $\frac{er^0}{r^2} = \vec{E}$ есть напряженность поля точечного заряда, мы можем написать (6.04) в форме

$$\vec{B} = \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right]. \quad (6.07)$$

В это выражение входят напряженности поля \vec{E} и \vec{B} и скорость \vec{v} , которую можно рассматривать как скорость передвижения поля \vec{E} (так как вместе с зарядом e с той же скоростью передвигается и его поле). Поскольку заряд в (6.07) исключен, мы можем это выражение истолковать как утверждение, что всякое движущееся

(в данной системе отсчета) электрическое поле всегда сопровождается магнитным полем, направленным перпендикулярно как к \vec{v} , так и к \vec{E} (рис. 5). Это соотношение устанавливает связь между электрическим и магнитным полями.

§ 7. Принцип суперпозиции для магнитного поля. Закон Био — Савара

Опыт показывает, что магнитное поле, так же как и электрическое, подчиняется принципу суперпозиции (наложения): поле, создаваемое в данной точке несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности,

$$\vec{B} = \sum_a \vec{B}_a(\vec{r}, t), \quad (7.01)$$

где $\vec{B}_a(\vec{r}, t)$ — поле, создаваемое движущимся зарядом с индексом a .

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем вычислить магнитное поле произвольного стационарного распределения тока. Действительно, магнитное поле, создаваемое зарядом $d\vec{e} = \rho(\vec{r}') dV'$, находящимся в малом объеме dV' , можно написать в форме

$$d\vec{B} = \frac{[\rho \vec{v}, \vec{R}^o]}{cR^2} dV' = \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}^o]}{cR^2} dV', \quad (7.02)$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ — радиус-вектор, проведенный от dV' к точке наблюдения \vec{r} . Чтобы определить полное поле \vec{B} , созданное произвольным стационарным распределением тока, надо применить принцип наложения полей, то есть сложить поля, создаваемые отдельными элементами тока $\vec{j} dV'$,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}^o]}{cR^2} dV'. \quad (7.03)$$

Формулы (7.02) и (7.03) выражают закон Био и Савара для магнитного поля стационарных токов.

Задачи

1. Показать, что сила, действующая в магнитном поле на единицу объема движущегося заряда, равна

$$\vec{f} = \rho \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}].$$

Решение. Считая, что $e = \rho dV$, где dV — элемент объема, разделим (6.03) на dV . Получим плотность силы $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$, равную $\frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}]$.

2. Определить магнитное поле линейного элемента тока $d\vec{l}$ на большом расстоянии от него.

Решение. Для линейного элемента тока объем $dV' = \sigma d\vec{l}$, где σ — поперечное сечение тока. Поэтому $\vec{j} dV' = \vec{j} \sigma d\vec{l} = I d\vec{l}$, где $I = j \cdot \sigma$ — сила тока через сечение σ . Подставляя последнее в (7.02), имеем

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}.$$

Здесь R считается одним и тем же для всех точек сечения тока (R велико по сравнению с поперечными размерами тока). Полученное выражение есть обычное выражение закона Био — Савара для линейного тока. Величина магнитного поля, созданного элементом тока, равна

$$dB = \frac{I dl \sin \alpha}{c R^2},$$

где α — угол между $d\vec{l}$ и \vec{R} .

3. Определить силу, действующую на линейный элемент тока в магнитном поле напряженностью \vec{B} .

Решение. Сила, действующая в магнитном поле на элемент объема тока dV (см. задачу 1), равна

$$d\vec{F} = \vec{j} dV = \left[\frac{\vec{j}}{c}, \vec{B} \right] dV.$$

Заменяя для линейного тока $\vec{j} dV$ через $I d\vec{l}$, получим

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}].$$

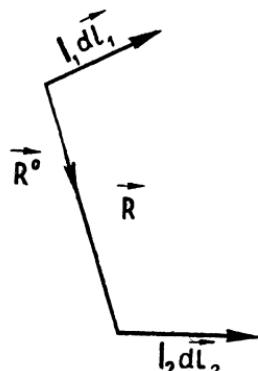


Рис. 6.

Эта сила перпендикулярна к $d\vec{l}$ и \vec{B} .

4. Определить силы, с которыми действуют друг на друга два линейных элемента тока $I_1 d\vec{l}_1$ и $I_2 d\vec{l}_2$ (рис. 6).

Решение. Если \vec{R} — радиус-вектор элемента $I_2 d\vec{l}_2$ относительно $I_1 d\vec{l}_1$, то согласно результатам задачи 2 магнитное поле, созданное элементом $I_1 d\vec{l}_1$ в точках $d\vec{l}_2$, равно

$$d\vec{B}_1 = \frac{I_1}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}_1, \vec{R}^\circ]}{R^2}.$$

Сила, действующая на $I_2 d\vec{l}_2$, равна

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= \frac{I_2}{c} [d\vec{l}_2, d\vec{B}_1] = \frac{I_1 I_2}{c^2} \cdot \frac{[d\vec{l}_2, [d\vec{l}_1, \vec{R}^\circ]]}{R^2} = \\ &= \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \left\{ d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2, \vec{R}^\circ) - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{R}^\circ \right\}. \end{aligned}$$

Меняя местами $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ и заменяя \vec{R} на $-\vec{R}$, получим силу, с которой элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$ действует на элемент $I_1 d\vec{l}_1$,

$$d\vec{F}_1 = - \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} [d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2, \vec{R}^\circ)] = - \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \left\{ d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1, \vec{R}^\circ) - (d\vec{l}_1, d\vec{l}_2) \vec{R}^\circ \right\}.$$

Отсюда видно, что $d\vec{F}_2 \neq -d\vec{F}_1$ и, следовательно, силы взаимодействия двух элементов тока не удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Если, например, элемент $d\vec{l}_1$ параллелен \vec{R} , а $d\vec{l}_2$ перпендикулярен \vec{R} , то $d\vec{F}_1 = 0$, а $d\vec{F}_2 \neq 0$. Но если элементы $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ параллельны или антипараллельны друг другу, то, полагая $d\vec{l}_2 = \epsilon d\vec{l}_1$ ($\epsilon = \pm 1$), получим

$$d\vec{F}_2 = \epsilon \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \{ d\vec{l}_1 (d\vec{l}_1, \vec{R}^\circ) - (d\vec{l}_1)^2 \vec{R}^\circ \},$$

$$d\vec{F}_1 = -\epsilon \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \{ d\vec{l}_1 (d\vec{l}_1, \vec{R}^\circ) - (d\vec{l}_1)^2 \vec{R}^\circ \} = -d\vec{F}_2.$$

Следовательно, в этом случае силы равны и противоположны по направлениям, но все же не удовлетворяют третьему закону Ньютона, так как не направлены по одной прямой, соединяющей элементы тока. Если токи параллельны ($\epsilon = +1$), то они взаимно притягиваются, если токи антипараллельны ($\epsilon = -1$), то они отталкиваются. Заметим, что полученные выражения описывают взаимодействие элементов тока в соответствии с представлениями о дальнодействии. Но действие одного тока на другой передается при помощи магнитного поля, то есть на самом деле всегда имеет место близкодействие.

§ 8. Связь вихря магнитного поля с полным током. Первая группа уравнений Максвелла — Лоренца

Выведем основное дифференциальное уравнение, связывающее магнитное поле с плотностью тока. Для этого продифференцируем выражения для напряженностей электрического и магнитного полей заряда, движущегося относительно медленно ($v \ll c$):

$$\vec{B}_a(\vec{r}) = \left[\frac{\vec{v}_a}{c}, \vec{E}_a \right], \quad \vec{E}_a = \frac{e\vec{R}}{R^3},$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_a$, \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения, $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$ — радиус-вектор заряда e_a , являющийся функцией от времени. Выражение для \vec{E}_a получено при условии, что заряд неподвижен. Однако оно справедливо и в том случае, если заряд движется относительно медленно с постоянной скоростью. Для равномерно движущегося со скоростью \vec{v}_a заряда e_a напряженность поля в точке $A(\vec{r})$ будет функцией ее расстояния $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_a(t)$ от заряда

$$\vec{E}_a = \vec{E}_a(\vec{R}) = \vec{E}_a(\vec{r} - \vec{r}_a(t)).$$

Составим вихрь вектора \vec{B} . Пользуясь формулой

$$[\vec{a} [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - (\vec{a} \vec{b}) \vec{c}$$

и принимая во внимание, что $\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt}$ не зависит от \vec{r} , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B}_a &= \left[\nabla, \left[\frac{\vec{v}_a}{c}, \vec{E}_a \right] \right] = \frac{\vec{v}_a}{c} \operatorname{div} \vec{E}_a - \left(\frac{\vec{v}_a}{c}, \nabla \right) \vec{E}_a = \\ &= \frac{4\pi}{c} \rho_a \vec{v}_a - \left(\frac{\vec{v}_a}{c}, \nabla \right) \vec{E}_a, \end{aligned} \quad (8.01)$$

ибо согласно (4.01) $\operatorname{div} \vec{E}_a = 4\pi \rho_a$. С другой стороны

$$\frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t} = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t}, \nabla \right) \vec{E}_a = -(\vec{v}_a, \nabla) \vec{E}_a.$$

Подставляя это в (8.01), находим

$$\operatorname{rot} \vec{B}_a = \frac{4\pi}{c} \rho_a \vec{v}_a + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t}.$$

Суммируя по всем движущимся зарядам и учитывая, что

$$\sum_a \vec{B}_a = \vec{B}, \quad \sum_a \vec{E}_a = \vec{E} \quad \text{и} \quad \sum_a \rho_a \vec{v}_a = \vec{j},$$

получим

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.02)$$

Это уравнение показывает, что вихри магнитного поля создаются не только токами, но также и переменным во времени электрическим полем.

Уравнение (8.02) выведено для равномерно и медленно движущихся зарядов. Опыт показывает, что оно справедливо и для произвольного движения зарядов. Последнее нашло отражение в том, что в (8.02) полностью исключены все особенности поля равномерно движущегося заряда, а входят только суммарные величины — плотность тока \vec{j} и напряженности \vec{E} и \vec{B} .

Переписывая (8.02) в форме

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

видим, что можно ввести полную плотность тока, равную

$$\vec{i} = \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.03)$$

поэтому

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{i}. \quad (8.04)$$

Полная плотность тока \vec{i} есть сумма плотности конвекционного тока \vec{j} и плотности так называемого тока смещения

$$\vec{j}_{\text{смеш.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (8.05)$$

введенного Максвеллом. Ток смещения существует везде, где есть меняющееся со временем электрическое поле.

Обычно уравнения (4.01) и (8.02) объединяют в так называемую первую группу уравнений Максвелла — Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (8.06)$$

Здесь в левых частях стоят только поля, в правых — заряды и токи. Таким образом, первая группа уравнений Максвелла — Лоренца связывает напряженности полей \vec{E} и \vec{B} с зарядами и токами.

Задачи

1. Доказать, что плотность полного тока \vec{i} не имеет источников.

Решение. Беря дивергенцию от \vec{i} , получим

$$\operatorname{div} \vec{i} = \operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Но согласно (8.06) $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$; поэтому в силу закона сохранения заряда

$$\operatorname{div} \vec{i} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, вектор \vec{i} не имеет источников, то есть токовые линии \vec{i} всегда замкнуты.

2. Доказать, что из уравнений 1-й группы Максвелла — Лоренца непосредственно вытекает закон сохранения электрического заряда.

Решение. Действительно, из (8.06) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left\{ c \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \right\} = 0. \end{aligned}$$

§ 9. Электродвижущая и магнитодвижущая силы и закон полного тока

Иногда вместо дифференциальной формы выражения (8.02) удобно пользоваться его интегральной формой. Введем понятия о электродвижущей силе и магнитодвижущей силе. Пусть заряд e передвигается в электрическом поле по некоторому контуру C . Работа

электрической силы $\vec{F}_e = e\vec{E}$ при таком передвижении равна

$$A = \int_{(c)} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = e \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

где $d\vec{r}$ — элемент пути. Работа передвижения единичного заряда вдоль контура C равна электродвижущей силе (э. д. с.), действующей в контуре

$$\mathcal{E}_e = \frac{A}{e} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (9.01)$$

По аналогии с (9.01) циркуляция \vec{B} по контуру C

$$\mathcal{E}_m = \int_{(c)} \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (9.02)$$

носит название магнитодвижущей силы (м. д. с.), действующей в контуре C .

Пусть C — замкнутый контур (рис. 7). По теореме Стокса магнитодвижущая сила в этом контуре будет равна.

$$\mathcal{E}_m = \oint_{(c)} \vec{B} d\vec{r} = \int_{(\sigma)} \text{rot}_n \vec{B} d\sigma,$$

где σ — произвольная поверхность, опирающаяся на контур C , \vec{n} — нормаль к поверхности. Подставляя значение $\text{rot}_n \vec{B}$ из (8.02) и считая поверхность σ неизменной (чтобы производную по времени можно было вынести за знак интеграла), получим

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} \left(I + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dt} \right). \quad (9.03)$$

Здесь $I = \int_{(\sigma)} j_n d\sigma$ есть сила конвекционного тока через поверхность σ , $\Psi = \int_{(\sigma)} E_n d\sigma$ — поток вектора напряженности электрического поля через ту же поверхность. Величина

$$I_{\text{смеш.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dt} \quad (9.04)$$

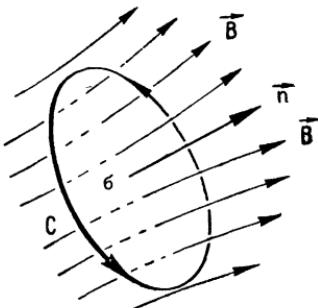


Рис. 7.

есть ток смешения через поверхность σ . Сумму

$$I + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dt} = \int_{(\sigma)} i d\vec{s} \quad (9.05)$$

называют полным током. Выражение (9.03) дает закон полного тока: магнитодвижущая сила в произвольном контуре пропорциональна силе полного тока, идущего через площадь, ограниченную контуром.

Задача

Определить напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечного цилиндрического провода радиуса a , по которому идет равномерно распределенный по сечению провода ток силой I .

Решение. В силу цилиндрической симметрии напряженность поля будет зависеть только от расстояния r (рис. 8). Поэтому можно применить

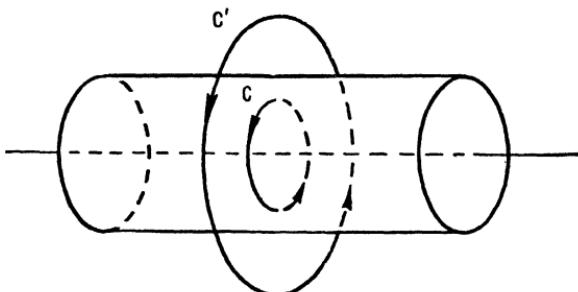


Рис. 8.

закон полного тока. Выберем в качестве контура силовую линию C . Заметим, что \vec{B} направлено по касательной к силовой линии и имеет постоянную величину. Тогда

$$\oint_C \vec{B} d\vec{r} = B \cdot 2\pi r,$$

С другой стороны, ток смещения равен нулю, а конвекционный ток через площадь πr^2 , ограниченную контуром C , равен

$$\pi r^2 j = \pi r^2 \frac{I(r)}{\pi a^2} = I \left(\frac{r}{a} \right)^2.$$

Согласно (9.03)

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \left(\frac{r}{a} \right)^2.$$

Отсюда напряженность поля внутри проводника на расстоянии r от его оси ($r \leq a$) равна

$$B_l = \frac{2I}{ca} \cdot \frac{r}{a},$$

то есть возрастает линейно с расстоянием r от оси к поверхности цилиндра.

Вне цилиндра в качестве контура возьмем силовую линию C' . Сила тока через площадь, ограниченную любым контуром, охватывающим проводник, равна I . Поэтому $B \cdot 2\pi r = I$ и напряженность магнитного поля вне проводника ($r \geq a$) на расстоянии r от оси его равна

$$B = \frac{2I}{cr},$$

то есть падает обратно пропорционально расстоянию. На границе проводника ($r = a$) оба выражения совпадают.

§ 10. Закон непрерывности магнитного потока

Опыт показывает, что магнитное поле всегда имеет непрерывные замкнутые линии вектора \vec{B} . Так, например, в § 6 мы видели, что линии вектора \vec{B} поля движущегося заряда суть окружности.

Закон непрерывности магнитного потока можно сформулировать математически, если рассмотреть произвольную замкнутую поверхность σ в магнитном поле. Тогда поток вектора \vec{B} через такую поверхность будет всегда равен нулю

$$\oint_{(\sigma)} B_n d\sigma = 0. \quad (10.01)$$

Это значит, что магнитное поле не имеет источников. Если назвать гипотетические источники магнитного поля «магнитными зарядами», то (10.01) показывает, что магнитных зарядов в природе не существует, в отличие от электрического поля, для которого справедлива теорема Гаусса

$$\oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = 4\pi e.$$

Применяя теорему Остроградского, получим

$$\oint_{(\sigma)} B_n d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

Ввиду произвольности объема V , по которому производится интегрирование, имеем

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (10.02)$$

Соотношение (10.02) — соотношение неразрывности — показывает, что вектор \vec{B} имеет чисто вихревой характер и объемная плотность магнитных зарядов в любой точке пространства всегда равна нулю.

Задача

Доказать, что для магнитного поля заряда, движущегося равномерно и медленно, соблюдается уравнение неразрывности (10.02).

Решение. Согласно (6.07)

$$\vec{B} = \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right], \quad \vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3}.$$

Вычисляя дивергенцию, имеем

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right] = -\frac{\vec{v}}{c} \cdot [\nabla, \vec{E}] = -\frac{\vec{v}}{c} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Но для статического поля

$$\operatorname{rot} \vec{E} = e \operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0,$$

поэтому

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

§ 11. Связь вихря электрического поля с магнитным током смещения. Вторая группа уравнений Максвелла — Лоренца

Мы видели, что магнитное поле всегда имеет вихревой характер. Покажем, что и электрическое поле при известных условиях может быть вихревым.

Пусть заряд e движется в системе отсчета K' со скоростью \vec{v}' . Сила Лоренца, действующая на заряд e в магнитном поле \vec{B} , равна

$$\vec{F}_m = \frac{e}{c} [\vec{v}', \vec{B}].$$

Перейдем к системе отсчета K , в которой заряд мгновенно поконится (следовательно, поле движется со скоростью $\vec{v} = -\vec{v}'$). В этой системе на заряд действует та же сила \vec{F}_m , но ее удобнее теперь написать в форме

$$\vec{F}_m = -\frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}].$$

При переходе к системе K существенно меняется интерпретация силы \vec{F}_m : сила, действующая в электромагнитном поле на покоящийся заряд, должна быть истолкована как электрическая сила (см. введение). Поэтому отношение $\frac{\vec{F}_m}{e} = \vec{E}$ надо рассматривать как напряженность электрического поля, существующего в системе K . Она равна

$$\vec{E} = -\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right]. \quad (11.01)$$

Соотношение (11.01), аналогичное (6.07), можно истолковать как утверждение, что всякое движущееся магнитное поле создает электрическое поле, направленное перпендикулярно к \vec{B} и \vec{v} (по правилу правого винта). Это электрическое поле можно обнаружить по возникновению электрического тока в проводниках, по отношению к которым поле перемещается. Возникающее при этом электрическое поле называется индукционным.

Явление электромагнитной индукции используется в технике для получения переменного тока: в неподвижном статоре генератора пе-

ременного тока заложены проводники, а магнитное поле создается вращающимися магнитами (рис. 9).

Докажем, что индукционное поле (11.01) имеет вихревой характер. Беря ротор (11.01), получим

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \left[\nabla, \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right] = - \frac{\vec{v}}{c} (\nabla \vec{B}) + \left(\frac{\vec{v}}{c} \nabla \right) \vec{B}.$$

Так как магнитное поле не имеет источников (§ 10), то $\nabla \vec{B} = 0$ и

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{\vec{v}}{c} \nabla \right) \vec{B}.$$

Правая часть может быть преобразована. В системе K' магнитное поле \vec{B}' есть некоторая функция от координат r' : $\vec{B}' = \vec{B}(r')$. Но в системе K напряженность \vec{B} есть функция от \vec{r} и t (в простейшем случае равномерного движения K' относительно K напряженность $\vec{B}'(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{r} - \vec{v}t)$), поэтому

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{r}'} \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} = -(\vec{v} \nabla) \vec{B},$$

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} = -\vec{v} \right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (11.02)$$

Это уравнение носит общий характер и аналогично уравнению

(8.02). Вектор $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ можно назвать по аналогии с (8.05) магнитным током смещения.

Уравнение (11.02) показывает что вихревое электрическое поле создается переменным во времени магнитным полем, то есть магнитным током смещения. Заметим, что в правой части (11.02) можно было ожидать появление магнитного конвекционного тока $\rho_m \vec{v}$. Но поскольку магнитных зарядов в природе не существует, не существует и магнитных токов.

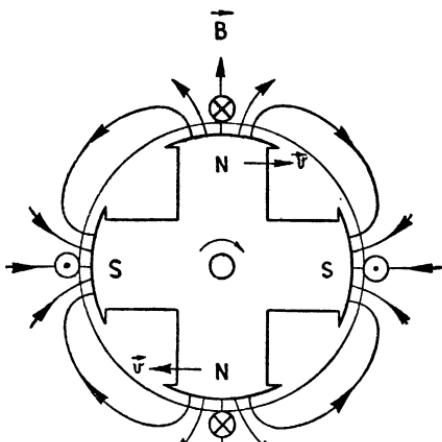


Рис. 9.

Совокупность уравнений (11.02) и (10.02) образует вторую группу уравнений Максвелла — Лоренца

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.03)$$

В отличие от уравнений первой группы (8.06), связывающих электромагнитное поле с зарядами, уравнения второй группы характеризуют свойства поля, не зависящие от зарядов.

§ 12. Закон электромагнитной индукции в интегральной форме

Из формулы (11.02) вытекает формула Неймана для электродвижущей силы индукции. Рассмотрим некоторый замкнутый контур C в переменном магнитном поле. Согласно (9.01) э. д. с. в контуре равна

$$\mathcal{E}_e = \oint \vec{E} d\vec{r}.$$

На основании теоремы Стокса и (11.02) имеем

$$\mathcal{E}_e = \oint_{(\sigma)} \operatorname{rot}_n \vec{E} d\sigma = - \frac{1}{c} \int_{(\sigma)} \frac{\partial B_n}{\partial t} d\sigma.$$

Интегрирование проводится по любой поверхности, опирающейся на контур. Направление нормали \vec{n} выбрано в соответствии с направлением обхода контура. Если контур и поверхность неподвижны, то, вынося знак производной по времени за знак интеграла, получим

$$\mathcal{E}_e = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.01)$$

где

$$\Phi = \int_{(\sigma)} B_n d\sigma \quad (12.02)$$

есть магнитный поток, идущий через поверхность σ , ограниченную контуром C . Формула (12.01) выражает закон электромагнитной индукции Фардаля: электродвижущая сила, возникающая в замкнутом контуре, определяется скоростью изменения магнитного потока, проходящего через площадь, ограниченную контуром. Направление э. д. с. определяется знаком \mathcal{E}_e : если $\mathcal{E}_e > 0$, то направление э. д. с. совпадает с направлением обхода контура, а если $\mathcal{E}_e < 0$, то эти направления противоположны.

Чтобы обнаружить э. д. с. индукции, контур надо сделать проводящим. Тогда в направлении э. д. с. в контуре возникнет электрический ток, обнаруживаемый приборами.

Рассмотрим в качестве примера индукцию в контуре C (рис. 10). Пусть магнитное поле создается постоянным током I' , идущим по контуру C' . При выбранных на рисунке направлениях обхода контура C и тока I' магнитный поток через площадь σ , ограниченную контуром C , положительный. Если расстояние между контурами уменьшается, то магнитный поток Φ через σ возрастает ($\frac{d\Phi}{dt} > 0$) и согласно (12.01) $\mathcal{E}_e < 0$, то есть э. д. с. индукции направлена

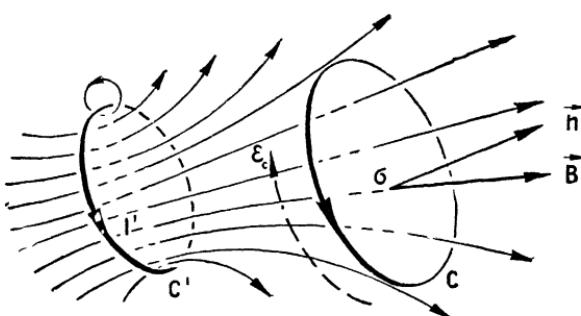


Рис. 10.

в сторону, противоположную направлению обхода контура C (показано пунктирной стрелкой). Если расстояние между контурами увеличивается, то $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ и $\mathcal{E}_e > 0$, т. е. направление э. д. с. индукции совпадает с направлением обхода контура.

Еще в 1834 году, до того как была получена формула (12.01), Э. Х. Ленц установил закон для направления э. д. с. индукции: направление э. д. с. индукции таково, что магнитное поле соответствующего индукционного тока препятствует движению, вызывающему индукцию. Действительно, в случае сближения контуров индукционный ток I в контуре C имеет направление, антипараллельное току I' в контуре C' . Но антипараллельные токи отталкиваются (задача 4, § 7), то есть магнитное взаимодействие токов I и I' препятствует сближению контуров. Если контуры удаляются друг от друга, то токи I и I' параллельны и возникающая сила притяжения препятствует удалению.

Следует иметь в виду, что ток I' в контуре C' не обязан быть током проводимости. Это может быть ток смещения, также создающий магнитное поле (см. § 8 и 9). Кроме того, под движением, вызывающим индукцию, понимается всякое изменение, приводящее к изменению магнитного потока через площадь контура C , например изменение силы тока в контуре C' .

Задачи

1. Имеются два параллельных проводника AB и CD (рис. 11). В проводнике AB идет ток в направлении от A к B . Определить направление э. д. с. индукции в проводнике CD , если: а) проводник CD движется вниз; б) проводник CD движется вверх.

Решение. На основании закона Ленца находим, что в первом случае токи в обоих проводниках имеют одинаковое направление, так как их взаимное притяжение препятствует взаимному удалению проводников, а во втором — токи антипараллельны, так как при сближении проводников возникает сила взаимного отталкивания.

2. Замкнутый круговой контур радиуса a вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг одного из своих диаметров в однородном магнит-

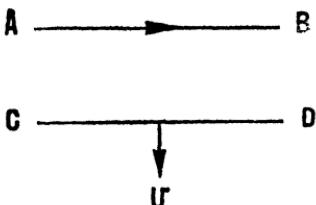


Рис. 11.

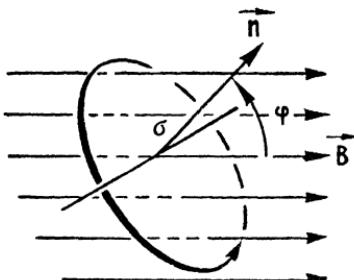


Рис. 12.

ном поле, перпендикулярном к оси вращения (рис. 12). Определить э. д. с. индукции, возникающую в контуре.

Решение. Обозначая через φ угол между направлением \vec{B} и нормалью n к контуру, получаем поток через площадь контура

$$\Phi = \pi a^2 B \cos \varphi.$$

Так как $\varphi = \omega t + \alpha$, где α — начальная фаза, то

$$\Phi = \pi a^2 B \cos (\omega t + \alpha).$$

Тогда по (12.01)

$$\mathcal{E}_e = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} \pi a^2 \omega B \sin (\omega t + \alpha).$$

Таким образом, \mathcal{E}_e меняется периодически с циклической частотой ω . Когда $\sin(\omega t + \alpha) > 0$, направление э. д. с. совпадает с направлением обхода контура, указанного стрелкой. Амплитуда э. д. с. равна $\mathcal{E}_0 = \frac{\pi a^2 \omega B}{c}$ абс. ед. $= \pi a^2 \omega B \cdot 10^{-8}$ вольт.

§ 13. Скорость распространения электромагнитного поля. Электромагнитные волны. Электромагнитная теория света

Рассмотрим свободное электромагнитное поле (поле, не связанное с зарядами). Свободное поле, очевидно, должно быть вихревым.

Согласно (6.07) и (11.01) свободное поле удовлетворяет уравнениям

$$\vec{E} = -\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right], \quad \vec{B} = \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right], \quad (13.01)$$

где \vec{v} — скорость распространения поля. Из (13.01) следует, что свободное поле всегда имеет электрическую и магнитную составляющие, которые образуют единое электромагнитное поле, и что в любой системе отсчета скорость распространения свободного поля не может быть равна нулю (из $\vec{v} = 0$ следует $E = B = 0$). Кроме того, из (13.01) вытекает, что векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} перпендикулярны друг к другу. Последнее можно записать в форме

$$(\vec{v}, \vec{E}) = 0, \quad (\vec{v}, \vec{B}) = 0. \quad (13.02)$$

Чтобы определить скорость распространения свободного поля, подставим значение \vec{B} в выражение для \vec{E} и воспользуемся формулами (13.02).

$$\vec{E} = -\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}\right] = -\left[\frac{\vec{v}}{c}\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E}\right]\right] = -\frac{\vec{v}}{c}\left(\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}\right) + \frac{v^2}{c^2}\vec{E} = \frac{v^2}{c^2}\vec{E}.$$

Из последнего следует, что $v^2 = c^2$, то есть

$$v = c.$$

Мы получили фундаментальный результат: скорость распространения свободного электромагнитного поля равна электродинамической постоянной (§ 6). Итак, электромагнитное поле распространяется в пустоте со скоростью

$$v = c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}. \quad (13.03)$$

Эта скорость распространения электромагнитных волн одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Распространяющееся электромагнитное поле образует электромагнитные волны. Джемс Максвелл, открывший теоретически электромагнитные волны, нашел, что эти волны аналогичны световым волнам. Действительно, векторы напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне перпендикулярны к направлению распространения волны, то есть электромагнитные волны, подобно световым, — поперечные. Скорость распространения электромагнитных волн с равна скорости света. Поэтому Максвелл высказал гипотезу, что световые волны являются частным случаем электромагнитных волн. Гипотеза Максвелла была блестяще подтверждена на опыте и развилась в современную электромагнитную теорию света.

§ 14. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Плотность электромагнитной энергии и вектор Умова — Пойнтинга

Выше указывалось, что для частиц (вещества) имеют место законы сохранения энергии, импульса (количество движения) и момента импульса. Представление о единстве материи требует, чтобы законы сохранения, справедливые для одного из видов материи, были справедливы и для других видов, если для них сохраняющаяся величина имеет смысл. Покажем, что для электромагнитного поля можно ввести величины, которые можно истолковать как энергию, импульс и момент импульса поля.

Прежде всего рассмотрим закон сохранения энергии. Экспериментально доказано, что создание поля требует затраты энергии. Следовательно, на основании закона сохранения энергии электромагнитное поле обладает некоторой энергией. Но в отличие от механической энергии, связанной с частицами, энергия поля не может быть локализована. Она распределена по всей области, в которой электромагнитное поле \vec{E}, \vec{B} отлично от нуля.

Обозначим объемную плотность распределения энергии $w(\vec{r}, t)$. Полная энергия поля в объеме V получается интегрированием плотности по объему

$$W = \int_V w(\vec{r}, t) dV. \quad (14.01)$$

Закон сохранения энергии для поля при отсутствии зарядов формально может быть выражен либо в форме подобной (5.04)

$$-\frac{d}{dt} \int_V w dV = \oint_{\sigma} S_n d\sigma \quad (14.02)$$

(уменьшение энергии поля в объеме V за единицу времени равно потоку электромагнитной энергии через поверхность σ , ограничивающую объем V), либо в дифференциальной форме типа (5.05), вытекающей из (14.02)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0. \quad (14.03)$$

Идея о движении энергии была впервые высказана Н. А. Умовым в 1873 году. Вектор \vec{S} , характеризующий плотность потока энергии (количество энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к направлению потока), называется вектором Умова. Конкретный вид вектора Умова для потока электромагнитной энергии был установлен Пойнтингом в 1884 году.

Выражение для плотности энергии w и потока энергии \vec{S} электромагнитного поля можно получить из уравнений Максвелла — Лоренца.

Из (8.06) и (11.03) имеем

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{j}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Умножив скалярно первое уравнение на \vec{E} , второе на \vec{B} и затем сложив эти уравнения, получим

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E}) - \vec{j} \vec{E}.$$

Так как

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2}{2}, \quad \vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{B}],$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = -\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] - \vec{j} \vec{E}. \quad (14.04)$$

Величина $N' = \vec{j} \vec{E} = \rho \vec{E} \vec{v}$ есть работа, произведенная полем в единицу времени над зарядами в единице объема. Следовательно, скаляр

$$w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (14.05)$$

имеет размерность плотности энергии и может быть истолкован как плотность энергии электромагнитного поля, а вектор

$$\vec{s} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] \quad (14.06)$$

может быть истолкован как вектор плотности потока энергии. Этот вектор называют вектором Умова — Пойнтинга.

При отсутствии зарядов уравнение (14.04) в полном согласии с (14.03) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = 0. \quad (14.07)$$

Таким образом, для свободного электромагнитного поля скаляр w (14.05), истолкованный как плотность энергии, действительно удовлетворяет закону сохранения.

Энергия поля не сохраняется, если имеет место взаимодействие поля с зарядами (14.04).

Получим общую формулировку закона сохранения энергии. Сошененная в единицу времени работа сил, действующих на заряды в единице объема, равна скорости изменения кинетической энергии T' зарядов в единице объема

$$(\rho \vec{E} + \vec{f}_{\text{стр.}}) \vec{v} = \frac{\partial T'}{\partial t}, \quad (14.08)$$

где $\vec{f}^{\text{стр.}}$ — плотность «сторонних» сил, действующих на заряды и имеющих неэлектромагнитное происхождение. Исключая из (14.04) работу электрического поля с помощью (14.08), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(T' + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] + \vec{f}^{\text{стр.}} \cdot \vec{v}. \quad (14.09)$$

Проинтегрируем (14.09) по некоторому неизменному объему V (производную по времени выносим за знак интеграла). Пользуясь теоремой Остроградского и тем, что для медленно движущихся частиц $T' = \frac{1}{2} \mu v^2$, где μ — плотность массы частиц и

$$\int_{(V)} T' dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \mu v^2 dV = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

(суммирование производится по всем заряженным частицам в объеме V)¹, имеем

$$N^{\text{стр.}} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \int_{(V)} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV \right\} + \oint_{(\sigma)} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}]_n d\sigma. \quad (14.10)$$

Здесь

$$N^{\text{стр.}} = \int_{(V)} \vec{f}^{\text{стр.}} \cdot \vec{v} dV \quad (14.11)$$

есть работа сторонних сил, совершаемая в единицу времени в объеме V . Выражение (14.10) дает общую формулировку закона сохранения и превращения энергии: работа сторонних сил в объеме идет на увеличение кинетической энергии частиц, энергии электромагнитного поля в объеме V и на поток энергии через поверхность σ , ограничивающую этот объем.

Если сторонних сил нет ($N^{\text{стр.}} = 0$) и объем V охватывает все поле, так что на его границе $\vec{E} = 0$ и $\vec{B} = 0$, то

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV \right\} = 0. \quad (14.12)$$

Это значит, что сумма кинетической энергии частиц и энергии электромагнитного поля сохраняется. При этом кинетическая энергия частиц может превращаться в энергию поля и обратно. Энергию

¹ Для точечных масс по (4.09) $\mu(\vec{r}) = \sum_a m_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$. Поэтому

$$\int_{(V)} \frac{1}{2} \mu v^2 dV = \frac{1}{2} \sum_a m_a \int_{(V)} v^2(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2.$$

поля, связанного с заряженными частицами, можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию частиц (ниже мы увидим, что взаимная энергия частиц составляет только часть энергии поля).

Задачи

1. Показать, что поток энергии для свободного электромагнитного поля, определяемого формулами (13.01), можно представить в виде

$$\vec{S} = wcn = \vec{wc},$$

где \vec{n} — единичный вектор в направлении распространения поля.

Решение. Так как $v = c$, то $\vec{v} = cn$ и формулы (13.01) принимают вид $\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}]$, $\vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]$.

Отсюда

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} [\vec{n}, \vec{E}]] = \frac{E^2}{4\pi} cn,$$

так как $(\vec{E}, \vec{n}) = 0$. С другой стороны, $E^2 = B^2$, следовательно,

$$E^2 = \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$$

и

$$\vec{S} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} cn = \vec{wc}.$$

Таким образом, в случае электромагнитной волны вектор Умова — Пойнтинга представляется как произведение плотности энергии на скорость ее распространения (подобно тому, как конвекционная плотность тока представляется в виде $\vec{j} = \rho v$).

2. Определить энергию электрического поля неподвижного заряда e , распределенного равномерно по поверхности шара радиуса a .

Решение. Пользуясь результатами задачи 1 (§ 3), получаем для плотности электрической энергии

$$w_e = 0 \quad \text{при } r < 0 \quad \text{и} \quad w_e = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{e^2}{8\pi r^4} \quad \text{при } r \geq a.$$

Интегрируя по всему объему поля (по области вне шара), получим

$$W_e = \int w_e dV = \frac{e^2}{8\pi} \int_a^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{e^2}{2a},$$

то есть энергия шара обратно пропорциональна его радиусу.

§ 15. Закон сохранения импульса. Электромагнитный импульс. Тензор плотности потока импульса

Покажем, что для электромагнитного поля существует величина, которая имеет смысл импульса (количества движения) поля и для которой при отсутствии заряженных частиц выполняется закон сохранения. В присутствии заряженных частиц в замкнутой системе выполняется закон сохранения суммарного импульса поля и частиц.

Так же как и энергия, импульс поля не локализован в какой-либо точке, а непрерывно распределен в поле. Поэтому можно ввести вектор плотности импульса поля \vec{g} , определяющий полный импульс \vec{G} поля в объеме V ,

$$\vec{G} = \int_V \vec{g} dV. \quad (15.01)$$

Вектор \vec{g} есть функция координат точки и времени. Найдем математический вид закона сохранения для любого вектора \vec{g} .

Рассмотрим какую-либо составляющую вектора плотности \vec{g} , например g_x . Закон ее сохранения можно представить согласно (14.03) в форме

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{t}_x = 0. \quad (15.02)$$

Здесь \vec{t}_x — вектор плотности потока величины g_x , характеризующий количество величины g_x , проходящее в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению потока. Составляющие t_{xx} , t_{xy} и t_{xz} вектора \vec{t}_x определяют плотности потока величины g_x соответственно в направлениях x , y и z . Аналогично (15.02) законы сохранения g_y и g_z могут быть выражены с помощью векторов плотности потока \vec{t}_y и \vec{t}_z величин g_y и g_z в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_y}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{t}_y &= 0, \\ \frac{\partial g_z}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{t}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.03)$$

Совокупность трех векторов \vec{t}_x , \vec{t}_y и \vec{t}_z образует новую величину, которая называется тензором 2-го ранга. Обычно тензор 2-го ранга $(^2)t$ записывается в виде матрицы, составленной из составляющих t_{xx} , t_{xy} ... векторов \vec{t}_a .

$$(^2)t = \begin{pmatrix} t_{xx}, & t_{xy}, & t_{xz} \\ t_{yx}, & t_{yy}, & t_{yz} \\ t_{zx}, & t_{zy}, & t_{zz} \end{pmatrix}. \quad (15.04)$$

Вектор с составляющими

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{div} (^2)t)_x &= \operatorname{div} \vec{t}_x = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \\ (\operatorname{div} (^2)t)_y &= \operatorname{div} \vec{t}_y = \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \\ (\operatorname{div} (^2)t)_z &= \operatorname{div} \vec{t}_z = \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (15.05)$$

называется дивергенцией тензора $(^2)t$. Пользуясь обозначением (15.05), законы сохранения (15.02) и (15.03) для трех составляющих вектора \vec{g} можно написать в виде одного тензорного уравнения, выражающего закон сохранения вектора \vec{g}

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \operatorname{div} (^2)t = 0. \quad (15.06)$$

Для дивергенции тензора можно сформулировать теорему, аналогичную теореме Остроградского. Если σ — замкнутая поверхность, окружающая объем V , и \vec{n} — внешняя нормаль к элементу $d\sigma$ поверхности, то для вектора \vec{t}_x имеем по теореме Остроградского

$$\oint_{(\sigma)} \vec{t}_x \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{t}_x dV \quad (15.07)$$

(аналогичные выражения имеют место для \vec{t}_y и \vec{t}_z). Стоящие справа величины $\operatorname{div} \vec{t}_x$, $\operatorname{div} \vec{t}_y$, $\operatorname{div} \vec{t}_z$ согласно (15.05) являются составляющими вектора $\operatorname{div} (^2)t$.

Введем вектор $(^2)t\vec{n}$ (произведение тензора $(^2)t$ на вектор \vec{n}) с составляющими

$$\left. \begin{aligned} (^2)t\vec{n})_x &= \vec{t}_x \vec{n} = t_{xx}n_x + t_{xy}n_y + t_{xz}n_z \\ (^2)t\vec{n})_y &= \vec{t}_y \vec{n} = t_{yx}n_x + t_{yy}n_y + t_{yz}n_z \\ (^2)t\vec{n})_z &= \vec{t}_z \vec{n} = t_{zx}n_x + t_{zy}n_y + t_{zz}n_z \end{aligned} \right\} \quad (15.08)$$

Тогда три соотношения типа (15.07) для \vec{t}_x , \vec{t}_y и \vec{t}_z можно записать в компактной форме тензорного равенства

$$\oint_{(\sigma)} (^2)t \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} (^2)t dV. \quad (15.09)$$

Эта формула, представляющая собой обобщение теоремы Остроградского, утверждает, что поток тензора через замкнутую поверхность σ равен интегралу от дивергенции тензора по объему, ограниченному поверхностью σ .

Вернемся к закону сохранения импульса поля. Задача заключается в определении вектора плотности импульса \vec{g} и тензора плотности потока импульса $(^2)t$ через напряженности электромагнитного поля. Рассмотрим силу Лоренца, действующую на заряд e в электромагнитном поле \vec{E} , \vec{B} .

Согласно (1.01) и (6.03) эта сила равна

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = e \left\{ \vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right\}. \quad (15.10)$$

Плотность силы (сила, действующая на единицу объема заряда) равна

$$\vec{f} = \rho \left\{ \vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right\}. \quad (15.11)$$

Преобразуем плотность силы, исключив из нее плотность заряда ρ и плотность тока \vec{j} с помощью уравнений 1-й группы Максвелла — Лоренца.

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}, \quad \frac{\vec{j}}{c} = \frac{\rho \vec{v}}{c} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Тогда

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{B} \right] \right\}.$$

Правую часть последнего выражения можно привести к более симметричному виду, если использовать уравнения (11.03) 2-й группы Максвелла — Лоренца

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Умножая первое уравнение векторно слева на $\frac{1}{4\pi} \vec{E}$, второе на $\frac{1}{4\pi} \vec{B}$ и прибавляя их к правой части предыдущего соотношения, получим

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{1}{4\pi} \{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{E}] + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] \} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{4\pi c} = \\ &= \vec{\theta} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}]. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Величину

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}^{(e)} + \vec{\theta}^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{E}] \} + \frac{1}{4\pi} \{ \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] \}$$

легко преобразовать и показать, что $\vec{\theta}$ есть дивергенция некоторого тензора 2-го ранга. Рассмотрим проекцию $\vec{\theta}^{(e)}$ на ось x :

$$\begin{aligned} \theta_x^{(e)} &= \frac{1}{4\pi} \{ E_x \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{E}]_x \} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{4\pi} E_x E_y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi} E_x E_z. \end{aligned}$$

Поэтому $\theta_x^{(e)}$ можно рассматривать как x -ую составляющую дивергенции тензора с составляющими

$$t_{xx}^{(e)} = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) = \frac{1}{4\pi} \left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right),$$

$$t_{xy}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} E_x E_y, \quad t_{xz}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} E_x E_z \quad \text{и т. д.}$$

Аналогично преобразуется магнитный вектор $\vec{\theta}^{(m)}$. Вводя симметричный тензор ${}^{(2)}t$ с составляющими

$$t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{\alpha\beta} \right\}, \quad (15.13)$$

где α и β пробегают значения x, y, z и

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

мы можем $\vec{\theta}$ записать в форме $\vec{\theta} = \operatorname{div} {}^{(2)}t$. В итоге плотность силы Лоренца определится формулой

$$\vec{f} = \operatorname{div} {}^{(2)}t - \frac{\partial}{\partial t} \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{4\pi c}. \quad (15.14)$$

Так как \vec{f} есть плотность силы, то $\frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}]$ имеет размерность плотности импульса $\left(\frac{\text{кол. дв.}}{\text{объем}} \right)$. Поэтому вектор

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (15.15)$$

(\vec{S} — вектор Умова — Пойнтинга) можно рассматривать как вектор плотности количества движения электромагнитного поля.

При отсутствии зарядов $\vec{f} = 0$ и (15.14) можно записать в форме

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \operatorname{div} (-{}^{(2)}t) = 0. \quad (15.16)$$

Из сравнения (15.16) с (15.06) видно, что вектор \vec{g} при отсутствии зарядов действительно подчиняется закону сохранения, причем роль тензора потока импульса поля играет тензор $(-{}^{(2)}t)$.

Интегрируя (15.16) по некоторому неизменному объему V и пользуясь (15.01), (15.08) и (15.09), получим

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}t \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (15.17)$$

где σ — поверхность, ограничивающая объем V , а \vec{n} — внешняя нормаль к элементу поверхности $d\sigma$. Таким образом, при отсутствии

зарядов изменение импульса поля в объеме V в единицу времени равно потоку тензора $(^2)t$ через ограничивающую объем поверхность. Если поверхность охватывает все поле, так что на ней E и B равны нулю, то и $(^2)t = 0$. Тогда

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0, \quad \vec{G} = \text{const}, \quad (15.18)$$

то есть при отсутствии зарядов полный импульс всего электромагнитного поля сохраняется.

Задача

Определить электромагнитное количество движения медленно движущегося заряда e , распределенного сферически симметрично.

Решение. Электрическое поле медленно движущегося заряда совпадает с его статическим полем \vec{E} . Магнитное поле по (6.07) равно $\vec{B} = \left[\frac{\vec{v}}{c}, E \right]$, где \vec{v} — скорость заряда. Поэтому плотность импульса поля, связанного с зарядом, равна

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\vec{E}, \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right] \right] = \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ \vec{v} E^2 - (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right\}.$$

Примем, что заряд движется вдоль оси x , так что $\vec{v} = \vec{i}v$; тогда

$$g_x = \frac{1}{4\pi c^2} (E_y^2 + E_z^2) v, \quad g_y = -\frac{1}{4\pi c^2} E_x E_y v, \quad g_z = -\frac{1}{4\pi c^2} E_x E_z v.$$

Следовательно, интегрируя по всему объему поля, получим

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \int (E_y^2 + E_z^2) dV, \quad G_y = -\frac{v}{4\pi c^2} \int E_x E_y dV,$$

$$G_z = -\frac{v}{4\pi c^2} \int E_x E_z dV.$$

Но поле заряда сферически симметрично, поэтому

$$\int E_x^2 dV = \int E_y^2 dV = \int E_z^2 dV = \frac{1}{3} \int E^2 dV,$$

$$\int E_x E_y dV = \int E_x E_z dV = \dots = 0.$$

Следовательно,

$$G_x = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \frac{2}{3} \int E^2 dV \cdot v, \quad G_y = G_z = 0.$$

Но $\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = W_e$ есть энергия электрического поля заряда, поэтому

$$G_x = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2} v, \quad G_y = G_z = 0$$

или

$$\vec{G} = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2} \vec{v},$$

то есть количество движения поля движущегося заряда пропорционально вектору скорости заряда. Чтобы вычислить коэффициент при \vec{v} , надо знать распределение заряда.

§ 16. Электромагнитная масса. Пропорциональность массы и энергии

Мы доказали, что при отсутствии зарядов энергия и импульс электромагнитного поля сохраняются, подчиняясь уравнениям сохранения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{S}, \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = - \operatorname{div} (-^{(2)}t). \quad (16.01)$$

В классической механике импульс \vec{p} частицы имеет два множителя: массу m и скорость \vec{v} . Плотность импульса поля \vec{g} также можно представить в форме

$$\vec{g} = \mu_f \vec{u}, \quad (16.02)$$

где μ_f — масса единицы объема поля, а \vec{u} — некоторая скорость, которую можно связать с потоком энергии и плотностью энергии w поля, положив

$$\vec{S} = \vec{w} \vec{u}. \quad (16.03)$$

Формулу (16.03) следует рассматривать как определение скорости \vec{u} , а формулу (16.02) — как определение плотности массы поля μ_f . Легко показать, что \vec{u} не может превышать по величине скорости c .

Согласно (15.15) вектор количества движения связан с \vec{S} соотношением $\vec{g} = \vec{S}/c^2$. Следовательно,

$$\vec{g} = \frac{w}{c^2} \vec{u}. \quad (16.04)$$

Сопоставляя (16.04) с (16.02), получим связь между плотностью массы и плотностью энергии электромагнитного поля

$$\mu_f = \frac{w}{c^2}. \quad (16.05)$$

Тем самым мы приходим к новому понятию массы — массы, связанной не с отдельными частицами, а с полем. Поле обладает массой,

которая называется электромагнитной. Масса поля в некотором объеме V , равная

$$m_f = \int_{(V)} \mu_f dV, \quad (16.06)$$

определяется, очевидно, его энергией

$$m_f = \frac{W}{c^2}. \quad (16.07)$$

Заметим, что наличие массы у поля можно было бы предвидеть заранее, исходя из представления о поле как виде материи. Соотношения (16.07) и (16.05) показывают, что масса поля однозначно определяется его энергией.

На основании представления о единстве материи можно предполагать, что соотношение (16.07) должно выполняться для любого вида материи. Это положение строго доказывается в специальной теории относительности. Если какой-либо материальный объект обладает массой m и полной энергией W , то они связаны соотношением

$$m = \frac{W}{c^2}. \quad (16.08)$$

Справедливость уравнения (16.08) подтверждается на опыте.

Задача

Определить электромагнитную массу заряда e , равномерно распределенного по поверхности сферы радиуса a .

Решение. Энергия шара, равномерно заряженного по поверхности, равна $W_e = \frac{e^2}{2a}$ (задача 2, § 14). Поэтому согласно (16.08)

$$m = \frac{e^2}{2ac^2}.$$

§ 17. Натяжения Максвелла

Тензор $(-\overset{(2)}{t})$ был истолкован как плотность потока импульса поля. Следуя Максвеллу, тензору $\overset{(2)}{t}$ можно дать другое толкование.

Изменение импульса тела в единицу времени равняется действующей силе. Поэтому в выражении

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \operatorname{div} \overset{(2)}{t}$$

вектор $\operatorname{div} \overset{(2)}{t}$ есть плотность объемной силы, действующей на объем V электромагнитного поля. Преобразование (15.09) позволяет приве-

сти силы, действующие на объем, к поверхностным силам. В выражении

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \oint_{(S)}^{(2)} \vec{t}_n d\sigma \equiv \vec{F} \quad (17.01)$$

слева стоит изменение импульса поля в объеме V в единицу времени, а справа — величина, которую следует рассматривать как поверхностную силу, действующую на объем V . Поэтому стоящая под знаком интеграла величина

$${}^{(2)}\vec{t} \cdot \vec{n} = \vec{t}_n = \vec{f}^{(n)} \quad (17.02)$$

есть плотность поверхностной электромагнитной силы, то есть сила, действующая на единицу площади ограничивающей поверхности с нормалью \vec{n} . Из (17.02) видно, что поверхностная сила, приложенная к произвольно наклоненной единичной площадке, получается путем линейного преобразования с компонентами $t_{\alpha\beta}$ единичного вектора нормали \vec{n} к этой площадке. Сила, действующая на единичную площадку, нормалью к которой является ось x ($\vec{n} = \vec{i}$), имеет согласно (15.08) составляющую по оси x , равную

$$f_x^{(x)} = {}^{(2)}\vec{t} \cdot \vec{i} = t_{xx}i_x + t_{xy}i_y + t_{xz}i_z = t_{xx},$$

так как $i_x = 1$, $i_y = i_z = 0$. Аналогично $f_y^{(x)} = t_{yx}$, $f_z^{(x)} = t_{zx}$.

Итак, $t_{\alpha\beta}$ суть составляющие силы, действующей на единичную площадку с нормалью \vec{i}_β ($\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{i}_2 = \vec{j}$, $\vec{i}_3 = \vec{k}$). Диагональный элемент $t_{\beta\beta}$ есть нормальное напряжение, приложенное к площадке. Смешанные компоненты суть касательные или скальывающие напряжения. Весь тензор ${}^{(2)}\vec{t}$ с компонентами (15.13) называется тензором максвелловских напряжений.

В качестве примера рассмотрим напряжение при $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \neq 0$. Направим ось x вдоль \vec{E} , тогда $E_x = E$, $E_y = E_z = 0$. Ось z направим перпендикулярно нормали \vec{n} к элементу поверхности и напряженности поля (рис. 13). Обозначим через ϑ угол между нормалью к поверхности и полем. Тогда $n_x = \cos \vartheta$, $n_y = \sin \vartheta$, $n_z = 0$ и согласно (17.02)

$$f_x^{(n)} = t_{xx}n_x + t_{xy}n_y, \quad f_y^{(n)} = t_{yx}n_x + t_{yy}n_y, \quad f_z^{(n)} = t_{zx}n_x + t_{zy}n_y.$$

Но из (15.13)

$$t_{xx} = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{E^2}{8\pi}, \quad t_{yy} = -\frac{E^2}{8\pi}, \quad t_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

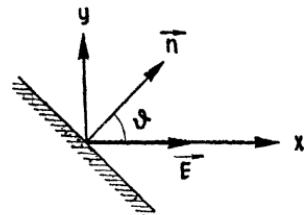


Рис. 13.

Поэтому составляющие поверхностной плотности силы, действующей на элемент с нормалью \vec{n} , равны

$$f_x^{(n)} = \frac{E^2}{8\pi} \cos \vartheta, \quad f_y^{(n)} = -\frac{E^2}{8\pi} \sin \vartheta, \quad f_z^{(n)} = 0. \quad (17.03)$$

Абсолютная величина поверхностной плотности силы, равная

$$|f^{(n)}| = \frac{1}{8\pi} E^2 = w_e, \quad (17.04)$$

не зависит от ориентации элемента поверхности по отношению к полю и равна плотности энергии электрического поля. Угол между нормалью к поверхности \vec{n} и вектором плотности силы $\vec{f}^{(n)}$ всегда делится пополам вектором поля \vec{E} . Тензор натяжений переносит чистое натяжение, если \vec{E} перпендикулярно к поверхности, и чистое давление, если \vec{E} лежит в плоскости поверхности.

Для магнитного поля получаются аналогичные результаты.

Задача

Определить давление электромагнитной волны, падающей на поверхность тела под углом α и полностью поглощаемой.

Решение. Объем наклонного цилиндра, построенного на единичной площадке поверхности тела, с образующей, равной скорости света c , равен $cn = c \cdot \cos \alpha$. Количество движения поля в этом объеме $\vec{G} = \vec{g}c \cdot \cos \alpha = \frac{\vec{S}}{c} \cos \alpha$, где \vec{S} — вектор Умова — Пойнтинга для падающей волны. Если волна полностью поглощается телом, то в одну секунду единице поверхности тела передается количество движения \vec{G} . Нормальная составляющая \vec{G} дает давление, а касательная — касательное напряжение

$$P = -\vec{n}\vec{G} = \frac{S}{c} \cos^2 \alpha, \quad T = \vec{G} \cdot \vec{\tau} = \frac{S}{c} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Тот же результат можно получить с помощью максвелловских натяжений.

§ 18. Закон сохранения импульса для поля и частиц

В присутствии заряженных частиц законы сохранения энергии и импульса согласно (14.04) и (15.14) могут быть написаны в форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = - \operatorname{div} \vec{S}, \quad (18.01)$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{f} = - \operatorname{div} (-{}^{(2)}t). \quad (18.02)$$

Из первого уравнения вытекает, что в присутствии заряженных частиц энергия поля расходуется не только на поток энергии, выходящей из рассматриваемого единичного объема, но и на работу,

совершаемую над частицами, находящимися в этом объеме. Второе уравнение показывает, что импульс поля меняется не только вследствие существования потока импульса через ограничивающую поверхность, но и вследствие взаимодействия с заряженными частицами.

Рассмотрим интегральную форму закона сохранения импульса. Проинтегрируем (18.02) по некоторому объему V . Пользуясь (15.01) и (15.09), получим

$$\frac{d\vec{G}}{dt} + \int_V \vec{f} dV = \oint_{(S)}^{(2)} t \vec{n} d\sigma. \quad (18.03)$$

Интеграл, стоящий в левой части, равен силе Лоренца \vec{F} , действующей на совокупность заряженных частиц в объеме V . Обозначив через $\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a$ импульс всех заряженных частиц в объеме V , мы можем написать закон изменения импульса частиц

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{стр.}}, \quad (18.04)$$

где \vec{F} — электромагнитная сила Лоренца, действующая на частицы в объеме V , а $\vec{F}_{\text{стр.}}$ — сторонняя сила неэлектромагнитного происхождения. Исключая из (18.03) и (18.04) силу \vec{F} , получим

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} + \vec{G}) = \oint_{(S)}^{(2)} t \vec{n} d\sigma + \vec{F}_{\text{стр.}}, \quad (18.05)$$

то есть изменение в единицу времени импульса поля и заряженных частиц, заключенных в объеме V , определяется максвелловскими напряжениями, приложенными к границе объема V (иначе говоря, потоком импульса через эту границу) и равнодействующей сил $\vec{F}_{\text{стр.}}$ неэлектромагнитного происхождения. При этом предполагается, что заряды не переходят за границу σ объема V (в противном случае следовало бы добавить поток количества движения частиц).

Если объем V охватывает все поле (на его границе тензор $(2)t$ равен нулю) и сил неэлектромагнитного происхождения нет, то

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} + \vec{G}) = 0, \quad \vec{P} + \vec{G} = \text{const.} \quad (18.06)$$

Таким образом, при отсутствии сторонних сил полный импульс, слагающийся из импульса поля и импульса частиц, сохраняется.

В электронной теории Г. Лоренца предполагалось, что все силы, действующие между частицами вещества, имеют электромагнитное происхождение и всегда $\vec{F}_{\text{стр.}} = 0$. Исследование сил взаимодействия между тяжелыми ядерными частицами — протонами и нейтронами — показало, что существуют сторонние силы неэлектромагнитного

происхождения (ядерные силы). Поэтому вообще $\vec{F}^{\text{стр.}} \neq 0$. Если при этом, как и в (18.06), рассматривать объем, охватывающий все поле, то

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{G}) = \vec{F}^{\text{стр.}}. \quad (18.07)$$

Следует подчеркнуть, что в (18.06) сохраняется не каждая из величин \vec{P} , \vec{G} в отдельности, а их сумма — полный импульс. В процессе движения поля и частиц импульс поля превращается в импульс частиц и обратно. Происходит качественное изменение импульса. Поэтому следует говорить не просто о законе сохранения импульса, а о законе сохранения и превращения импульса.

§ 19. Основные законы механики быстро движущихся частиц

Выражение для кинетической энергии частицы $\frac{1}{2}mv^2$ справедливо только при $v \ll c$. Учитывая пропорциональность массы и энергии (§ 16), получим для кинетической энергии более общее выражение. Предполагая, что соотношение (16.08) справедливо не только для поля, но и для частиц, можно сформулировать следующие законы движения для частицы:

1) изменение импульса в единицу времени равно действующей силе

$$\frac{d}{dt}(mv) = \vec{F}; \quad (19.01)$$

2) изменение энергии частицы в единицу времени равно мощности действующей силы

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}; \quad (19.02)$$

3) масса и энергия пропорциональны

$$W = mc^2. \quad (19.03)$$

Поскольку энергия частицы зависит от скорости, то из (19.03) следует зависимость массы от скорости. Подставляя (19.03) в (19.02) и пользуясь (19.01), получим

$$c^2 dm = \vec{v} d(m\vec{v}) = m\vec{v} d\vec{v} + v^2 dm.$$

Вводя вектор $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ и разделяя переменные, имеем

$$\frac{dm}{m} = \frac{\vec{\beta} d\vec{\beta}}{1 - \beta^2}.$$

Интегрируя это выражение и обозначая постоянную интегрирования через $\ln m_0$, найдем

$$\ln m = -\frac{1}{2} \ln(1 - \beta^2) + \ln m_0,$$

откуда

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
 (19.04)

Чтобы выяснить смысл постоянной интегрирования, положим $v = 0$, тогда $m = m_0$. Таким образом, m_0 есть масса покоящейся частицы — так называемая масса покоя.

Формула (19.04), дающая зависимость массы от скорости, была впервые получена Г. Лоренцем для так называемой электромагнитной массы и затем распространена А. Эйнштейном в его специальной теории относительности на обычную «механическую» массу. Поскольку c имеет величину $3 \cdot 10^{10}$ $\frac{\text{см}}{\text{сек}}$, то для малых скоростей ($v \ll c$) членом $\frac{v^2}{c^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей и считать массу постоянной, равной массе покоя m_0 . По мере приближения скорости к значению c масса неограниченно возрастает, стремясь к бесконечности. Зависимость (19.04) подтверждена экспериментально многочисленными опытами с быстрыми частицами.

Подставляя выражение для массы (19.04) в (19.03), получим новое выражение для энергии частицы

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
 (19.05)

При $v = 0$ имеем

$$W_0 = m_0 c^2.$$
 (19.06)

Эта величина называется энергией покоя частицы. Покоящаяся частица обладает энергией, пропорциональной массе покоя частицы. Эта энергия определяется внутренней структурой частицы и, возможно, слагается из энергий полей, с которыми связана частица, в частности и энергии ее электрического поля (см. задачи 2, § 14; 1, § 16).

Кинетическая энергия частицы определяется как разность энергии W и энергии покоя W_0

$$T = W - W_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$
 (19.07)

(Заметим, что часто кинетической энергией называют величину W , отличающуюся от T энергией покоя.)

Легко показать, что при $v \ll c$ выражение (19.07) превращается в классическую кинетическую энергию $\frac{1}{2} m_0 v^2$. Действительно, по

формуле бинома Ньютона

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

$$\dots = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots$$

При $v \ll c$ существенен лишь первый «классический» член разложения.

При скорости v , стремящейся к c , энергия W , как и масса, стремится к бесконечности. Поэтому скорость, равная скорости распространения электромагнитных действий, недостижима для частицы с отличной от нуля массой покоя — для достижения такой скорости требуется затратить бесконечную энергию.

Скорость распространения электромагнитных действий в любой системе отсчета является предельной скоростью. Материальные объекты не могут двигаться в любой системе отсчета со скоростью, превышающей скорость света, которая, как подчеркивалось выше, инвариантна. Со скоростью, равной скорости света c , могут двигаться лишь те материальные объекты, масса покоя которых равна нулю. Такими частицами являются кванты электромагнитного поля (фотоны) и, может быть, нейтрино.

Учитывая (19.04), импульс частицы можно написать в виде

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W}{c^2} \vec{v}. \quad (19.08)$$

Законы импульса и энергии для частицы принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}, \quad (19.09)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (19.10)$$

Соответственно можно уточнить формулировку (14.10) закона сохранения и превращения энергии. Заменяя в (14.10) классическую кинетическую энергию системы частиц $\sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2$ значением энергии,

применимым для любых скоростей,

$$W = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (19.11)$$

(m_a — масса покоя частицы с индексом a), получим

$$N^{\text{стр.}} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{m_a e^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} + \int_{(V)} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv \right\} + \oint_{(\sigma)} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}]_n d\sigma. \quad (19.12)$$

Смысл этого выражения остается, конечно, прежним: работа сторонних сил в объеме V идет на увеличение энергии частиц, энергии электромагнитного поля в этом объеме и на поток энергии через поверхность, ограничивающую объем.

Импульс системы частиц согласно (19.08) принимает вид

$$\vec{P} = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (19.13)$$

Обобщенный закон сохранения и превращения импульса (18.05) может быть написан в форме

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} + \int_{(V)} \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}] dv \right\} = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}t \cdot \vec{n} \cdot d\sigma + \vec{F}^{\text{стр.}}, \quad (19.14)$$

то есть изменение в единицу времени полного импульса в объеме V , равного сумме импульсов частиц и поля, определяется равнодействующей максвелловских напряжений, приложенных к границе объема, и равнодействующей сторонних сил, действующих на частицы.

Задача

Выразить энергию W частицы через ее импульс \vec{p} .

Решение.

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2 \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = -m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^2}{1 - \beta^2} \left(\beta = \frac{v}{c} \right).$$

С другой стороны $W^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{W}{c} \right)^2 = p^2 + m_0^2 c^2 \quad \text{и} \quad W = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

§ 20. Дефект массы и энергия связи

Смысъл взаимосвязи между массой и энергией, определяемой формулой

$$W = mc^2, \quad (20.01)$$

делается болеъ ясным при рассмотрении движения сложной системы, состоящей из нескольких частиц. Сложная система, как целое, характеризуется некоторой массой покоя m_0 и скоростью движения \vec{v} . Покоящаяся система массы m_0 согласно (19.06) обладает внутренней энергией покоя $W_0 = m_0c^2$. Так как m_0 положительная величина, то и внутренняя энергия положительна. Если \vec{v} — скорость движения системы как целого, то полная энергия (изолированной) движущейся системы равна

$$W = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (20.02)$$

Энергия W положительна, если корень взять с положительным знаком. Но принципиально можно взять корень с отрицательным знаком; тогда мы получим область отрицательных энергий, отдаленную от положительных энергий разрывом шириной $2m_0c^2$ (от $+m_0c^2$ до $-m_0c^2$).

В классической теории переход системы из области $W \geq m_0c^2$ в область $W \leq -m_0c^2$ невозможен. Поэтому ограничимся рассмотрением только области положительных энергий.

Внутренняя энергия системы m_0c^2 содержит в себе, кроме энергий покоя частиц, входящих в систему, еще и кинетические энергии относительного движения этих частиц и энергии их взаимодействия друг с другом. Следовательно, внутренняя энергия системы m_0c^2 не равна сумме энергий покоя $m_a c^2$ составляющих ее частиц (m_a — масса покоя a -той частицы), то есть

$$m_0c^2 \neq \sum_a m_a c^2.$$

Отсюда

$$m_0 \neq \sum m_a. \quad (20.03)$$

Это значит, что масса покоя не является аддитивной величиной и не существует закона сохранения массы покоя. Сохраняющейся величиной является полная энергия W и связанная с ней масса $m = \frac{W}{c^2}$.

Разность

$$\Delta m_0 = m_0 - \sum_a m_a \quad (20.04)$$

называется дефектом массы системы, а величина

$$\Delta W = \Delta m_0 c^2 = c^2 \left(m_0 - \sum_a m_a \right) \quad (20.05)$$

называется энергией связи системы. Если $\Delta W > 0$, то система может самопроизвольно распасться на составляющие ее частицы. Действительно, если частицы, первоначально составляющие систему, удалены друг от друга так, что их взаимная потенциальная энергия равна нулю, то их кинетическая энергия (с учетом энергий покоя) равна

$$W = \sum_a W_a = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}.$$

Каждый член этой суммы положителен. Если совокупность рассматриваемых движущихся частиц первоначально составляла покоящуюся систему с массой m_0 , то по закону сохранения энергии $m_0 c^2 = W$, то есть

$$m_0 c^2 = \sum_a W_a = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (20.06)$$

Но это уравнение (при $v_a \neq 0$) может выполняться только в том случае, когда $m_0 > \sum_a m_a$, то есть если дефект массы системы Δm_0 положителен. Итак, сложная система может самопроизвольно распасться на части только в том случае, если ее дефект массы относительно суммы масс частей, на которые она распадается, положителен. С подобными явлениями мы встречаемся при радиоактивном α - и β -распаде ядер или при распаде космических π -, μ -, K -мезонов и гиперонов.

Пусть, например, покоящаяся система с массой m_0 распадается на две частицы с массами m_a и m_b . Законы сохранения энергии и импульса будут иметь вид

$$m_0 c^2 = W_a + W_b, \quad \vec{p}_a + \vec{p}_b = 0, \quad (20.07)$$

где W_a , W_b и \vec{p}_a , \vec{p}_b — соответственно энергии и импульсы частиц распада. Из второго равенства $p_a^2 = p_b^2$. Так как (см. § 19, задача 1)

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4, \quad \text{то} \quad W_a^2 - W_b^2 = (m_a^2 - m_b^2) c^4.$$

Решая это уравнение совместно с первым уравнением (20.07), получим

$$W_a = c^2 \frac{m_0^2 + m_a^2 - m_b^2}{2m_0}, \quad W_b = c^2 \frac{m_0^2 - m_a^2 + m_b^2}{2m_0}. \quad (20.08)$$

Таким образом, энергии частиц распада, а следовательно, и их скорости (в системе отсчета, в которой первоначальная система покоялась), будут вполне определенными.

Если дефект массы системы Δm_0 по отношению к сумме масс покоя частей отрицателен, то система устойчива и на части самопроизвольно не распадается. В этом случае, чтобы разложить систему

на части, надо сообщить ей энергию, равную или большую чем абсолютная величина энергии связи $|Δm_0| c^2$ системы.

Задачи

1. Частица массы покоя m_0 распадается на две частицы с массами покоя m_a и m_b . Определить скорости продуктов распада.

Решение. Так как $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, то по (20.08) имеем

$$v_a^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_a^2 c^4}{W_a^2} \right) = c^2 \left[1 - \frac{4 m_0^2 m_a^2}{(m_0^2 + m_a^2 - m_b^2)^2} \right],$$

$$v_b^2 = c^2 \left[1 - \frac{4 m_0^2 m_b^2}{(m_0^2 - m_a^2 - m_b^2)^2} \right].$$

2. π -мезон с массой покоя $m_\pi = 276 m_e$ (m_e — масса электрона) распадается на μ мезон с массой $m_\mu = 216 m_e$ и нейтрино с массой покоя, равной нулю. Определить энергию и скорости продуктов распада.

§ 21. Перенос материи при взаимодействии

Рассмотрим заряженную частицу, которая в начальный момент времени $t = 0$ оказалась в рассматриваемой системе отсчета и на которую другие частицы действуют с некоторой силой. Согласно обычной концепции действие силы сводится к изменению количества движения и энергии частицы — происходит передача движения от тела воздействующего телу, испытывающему воздействие. Однако подобная концепция не передает полностью происходящего явления, если учесть, что электромагнитное поле материально и частица имеет заряд. По мере изменения скорости частицы происходят два типа изменений в электромагнитном поле: 1) изменяется электромагнитное поле, непосредственно связанное с частицей, в частности, появляется магнитное поле частицы; 2) возникает поле излучения. По мере увеличения скорости частицы увеличивается энергия и импульс связанного с нею поля, растет электромагнитная масса частицы. Кроме того, поскольку ускорение частицы отлично от нуля, существует поток электромагнитного излучения, то есть поток энергии, импульса, электромагнитной массы.

Возникает вопрос, откуда берется материя, которая заключена в возрастающем поле, связанном с частицей, и испускается в виде электромагнитного излучения. Опираясь на закон сохранения материи (закон М. В. Ломоносова), необходимо допустить, что вся эта материя должна быть подведена к нашему заряду. Мы приходим к новой концепции действия силы: при воздействии тел на заряженную частицу происходит перенос материи от воздействующих тел к частице, а вместе с переносом материи происходит и перенос движения. Это

относится как к действию электромагнитного поля, так и к действию сторонних сил неэлектромагнитного происхождения.

В случае действия на частицу электромагнитного поля, это поле должно изменяться — частично превращаться из поля, связанного с воздействующими телами, в поле, связанное с частицей, и в поле излучения. Когда движение заряда происходит в стационарных полях, подобное превращение поля обычно не рассматривается, так как за- бывается необходимость поддерживать эти внешние условия стацио-нарными.

Если на частицу действуют сторонние силы, то процесс взаимо-действия более сложен. Действительно, опираясь на представления о близкодействии, следует действие сторонней силы связать с нали-чием некоторого материального стороннего (неэлектромагнитного) поля. В процессе взаимодействия стороннее поле превращается в электромагнитное поле, связанное с частицей, и в поле электро-магнитного излучения.

Так как вещество построено из заряженных частиц (электронов и ядер), то все обычно наблюдаемые взаимодействия в веществе со-провождаются переносом и превращением материи.

Очевидно, что новая концепция взаимодействия тел носит универ-сальный характер. Всякое взаимодействие связано с материальными полями и должно сопровождаться переносом материи и ее превра-щением из одного вида в другой.

§ 22. Полная система уравнений Максвелла — Лоренца

Электромагнитное поле как вид материи характеризуется системой уравнений Максвелла — Лоренца, которые мы объединили в две группы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v}, \end{aligned} \right\} \text{(I)} \quad (22.01)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(II)} \quad (22.02)$$

Группа уравнений (22.01) характеризует связь между полем и заряженными частицами, являющимися источниками поля; слева стоят напряженности поля \vec{E} , \vec{B} , справа — величины, характеризующие за-ряженные частицы. Группа уравнений (22.02) характеризует само элек-тромагнитное поле и указывает на отсутствие источников маг-нитного поля. Обе группы уравнений в совокупности описывают общие свойства материального электрического поля, выражают законы движения и принцип причинности для поля.

Можно показать, что уравнения Максвелла — Лоренца определяют состояние поля в любой момент времени t , если задано состояние поля в начальный момент времени t_0 и плотности зарядов ρ и токов $\vec{j} = \rho\vec{v}$ как функции времени и координат (состояние поля задано, если в данный момент определены значения векторов \vec{E} и \vec{B} во всех точках пространства). Таким образом, уравнения Максвелла — Лоренца выражают принцип причинности для электромагнитного поля.

Однако приведенная выше задача определения поля предполагает, что ρ и \vec{j} даны заранее как функции координат и времени. В действительности заряженные частицы движутся под действием электромагнитного поля и сторонних сил.

Электромагнитную силу, действующую на частицу, заряд которой распределен с плотностью ρ , можно, согласно (15.11), представить в форме

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \int_V \rho \left\{ \vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right\} dV,$$

где интегрирование производится по всему объему частицы. Существенно учесть действие на частицу не только внешнего поля, но и поля, создаваемого самой частицей. Поэтому, полагая $\vec{E} = \vec{E}^{(a)} + \vec{E}^{(i)}$, $\vec{B} = \vec{B}^{(a)} + \vec{B}^{(i)}$ (значок a относится к внешнему, а i — к внутреннему полю), получим

$$\vec{F} = \vec{F}^{(a)} + \vec{F}^{(i)},$$

где

$$\vec{F}^{(a)} = \int_V \rho \left\{ \vec{E}^{(a)} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}^{(a)} \right] \right\} dV,$$

$$\vec{F}^{(i)} = \int_V \rho \left\{ \vec{E}^{(i)} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}^{(i)} \right] \right\} dV.$$

Вычисление силы $\vec{F}^{(i)}$ («силы самодействия») требует более подробных сведений о частице и будет рассмотрено позже. Здесь отметим, что $\vec{F}^{(i)}$ складывается из двух членов: один, равный $-\frac{d}{dt}(\vec{m}_e \vec{v})$ (где m_e — электромагнитная масса частицы), соответствует некоторой силе инерции; второй — имеет характер силы трения и при $v \ll c$ равен $\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2}$ (где e — заряд частицы).

Внешнюю электромагнитную силу для квазиточечной частицы можно написать в форме (15.10)

$$\vec{F} = e \left\{ \vec{E}^{(a)} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}^{(a)} \right] \right\}, \quad (22.03)$$

поскольку в пределах частицы внешнее поле $\vec{E}^{(a)}$, $\vec{B}^{(a)}$ слабо меняется и поэтому его можно вынести из-под знака интеграла.

Теперь уравнение движения a -той частицы можно написать в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}}{= e_a \left\{ \vec{E}_a + \left[\frac{\vec{v}_a}{c}, \vec{B}_a \right] \right\} + \vec{F}_a^{(i)} + \vec{F}_a^{\text{стр.}}, \quad (22.04)$$

$$(a = 1, 2, 3, \dots).$$

В (22.04) m_a — масса покоя частицы, включающая электромагнитную массу, $\vec{F}_a^{(i)}$ — сила самодействия (без силы электромагнитной инерции, которая включена в левую часть), $\vec{F}_a^{\text{стр.}}$ — сторонняя сила. Знаком a вверху, обозначающий внешнее поле, опущен; знаком a внизу указывает, что поле берется в точке, занимаемой a -той частицей.

Плотность зарядов и токов системы квазиточечных частиц определяется формулами:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad \vec{j} = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (22.05)$$

Таким образом, полная система уравнений Максвелла — Лоренца, характеризующих движение поля и квазиточечных частиц, включает уравнения (22.01), (22.02), (22.04), (22.05). Для частиц, имеющих конечные размеры, уравнения движения формулируются гораздо сложнее.

Первые интегралы движения полной системы уравнений Максвелла — Лоренца были получены выше. Это интеграл энергии (19.11) и интеграл импульса (19.13). Интеграл момента импульса будет рассмотрен в § 23. Однако обычно мы встречаемся с более частными задачами: а) с задачей определения поля по заданным зарядам и токам и б) с задачей определения движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. Эти задачи будут рассмотрены в следующих главах.

§ 23. Закон сохранения момента импульса. Момент импульса электромагнитного поля

В механике частицы из закона импульса вытекает закон сохранения момента импульса. Для электромагнитного поля закон сохранения момента импульса можно получить преобразованием уравнения (15.14), выражающего закон сохранения импульса поля

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{f} = \operatorname{div} {}^2 t. \quad (23.01)$$

Умножая (23.01) векторно на радиус-вектор \vec{r} элемента объема dV , имеем

$$[\vec{r}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}] + [\vec{r}, f] = [\vec{r}, \operatorname{div} {}^2 t]. \quad (23.02)$$

Так как элементы объема dV неподвижны, то \vec{r} не зависит от t ; следовательно, $[\vec{r}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{r}, \vec{g}]$. Очевидно, что вектор

$$\vec{t} = [\vec{r}, \vec{g}] \quad (23.03)$$

можно истолковать как вектор плотности момента импульса электромагнитного поля. Тогда

$$\vec{L}_f = \int_V [\vec{r}, \vec{g}] dV \quad (23.04)$$

есть момент импульса объема V поля.

Преобразуем правую часть (23.02). Пользуясь симметрией тензора ${}^2 t$; имеем для x -овой составляющей

$$\begin{aligned} [\vec{r}, \operatorname{div} {}^2 t]_x &= y \left(\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (yt_{xz} - zt_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (yt_{yz} - zt_{yy}) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (yt_{zz} - zt_{yz}) = (\operatorname{div} [\vec{r}, {}^2 t])_x. \end{aligned}$$

Произведение $[\vec{r}, {}^2 t]$ можно рассматривать как некоторый асимметричный тензор ${}^2 N$ с компонентами

$$\left. \begin{aligned} N_{xx} &= yt_{xz} - zt_{xy}, & N_{xy} &= yt_{yz} - zt_{yy}, & N_{xz} &= yt_{zz} - zt_{zy} \\ N_{yx} &= zt_{xx} - xt_{xz}, & N_{yy} &= zt_{yx} - xt_{yy}, & N_{yz} &= zt_{zx} - xt_{zz} \\ N_{zx} &= xt_{xy} - yt_{xx}, & N_{zy} &= xt_{yy} - yt_{yx}, & N_{zz} &= xt_{zy} - yt_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (23.05)$$

Если α, β, γ — циклическая перестановка индексов x, y, z , то (23.05) запишется в виде

$$N_{\alpha\lambda} = x_\beta t_{\lambda\gamma} - x_\gamma t_{\lambda\beta}. \quad (23.06)$$

Введем векторы $\vec{t}_\lambda \equiv (t_{\lambda x}, t_{\lambda y}, t_{\lambda z})$ — плотность потока величины g_λ (с обратным знаком). Тогда

$$N_{\alpha\lambda} = [\vec{r}, \vec{t}_\lambda]_\alpha. \quad (23.07)$$

Теперь можно написать

$$[\vec{r}, \operatorname{div} {}^2 t] = \operatorname{div} {}^2 N.$$

Закон сохранения момента импульса в дифференциальной форме принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{r}, \vec{g}] + [\vec{r}, \vec{f}] = \operatorname{div} {}^2 N. \quad (23.08)$$

Для произвольного объема V , ограниченного поверхностью σ , пользуясь формулой (15.09), получим

$$\frac{d}{dt} \int_V [\vec{r}, \vec{g}] dV + \int_V [\vec{r}, \vec{f}] dV = \oint_{\sigma} {}^2 N \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (23.09)$$

Так как $\frac{d}{dt} (\mu \vec{v}) = \vec{f} + \vec{f}_{\text{струн.}}$, где $\vec{f}_{\text{струн.}}$ — плотность сторонней силы, а μ — плотность массы частиц, то

$$\int_V [\vec{r}, \vec{f}] dV = \frac{d}{dt} \int_V [\vec{r}, \mu \vec{v}] dV - \int_V [\vec{r}, \vec{f}_{\text{струн.}}] dV.$$

Здесь

$$\vec{L} = \int_V [\vec{r}, \mu \vec{v}] dV = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] \quad (23.10)$$

есть момент импульса частиц в объеме V , а

$$\vec{K}_{\text{струн.}} = \int_V [\vec{r}, \vec{f}_{\text{струн.}}] dV \quad (23.11)$$

есть главный момент сторонних сил, действующих в объеме V .

Уравнение (23.09) принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_f) = \vec{K}_{\text{струн.}} + \oint_{\sigma} {}^2 N \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (23.12)$$

Поверхностный интеграл, стоящий в правой части,

$$\vec{K} = \oint_{\sigma} {}^2 N \cdot \vec{n} d\sigma \quad (23.13)$$

можно толковать двояко. С одной стороны, его можно рассматривать как главный момент поверхностных электромагнитных сил, действующих на границу σ объема V . Действительно, момент силы, действующей на единичную площадку с нормалью \vec{n} , согласно (23.13) есть ${}^2 N \cdot \vec{n}$. Его проекция на ось x в силу (23.07) и (15.08) равна

$$({}^2 N \cdot \vec{n})_x = N_{xx} n_x + N_{xy} n_y + N_{xz} n_z = [\vec{r}, \vec{t}_x]_x n_x + \\ + [\vec{r}, \vec{t}_y]_x n_y + [\vec{r}, \vec{t}_z]_x n_z = [\vec{r}, \vec{t}_x n_x + \vec{t}_y n_y + \vec{t}_z n_z]_x.$$

Но вектор $\vec{t}_x n_x + \vec{t}_y n_y + \vec{t}_z n_z = \vec{t}$ есть сила максвелловских натяжений, действующая на единичную площадку с нормалью \vec{n} . Поэтому

$$(2)N \cdot \vec{n} = [\vec{r}, \vec{t}] \quad (23.14)$$

есть поверхностная плотность момента этих сил, так что

$$\vec{K} = \oint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{t}] d\sigma \quad (23.15)$$

есть полный момент сил максвелловских натяжений, приложенных к поверхности σ объема V .

С другой стороны, тензор $(2)N$ с составляющими

$$-N_{\alpha\lambda} = x_\beta (-t_{\lambda\gamma}) - x_\gamma (-t_{\lambda\beta})$$

можно рассматривать как тензор плотности потока момента электромагнитного импульса, а (23.13) — как поток момента электромагнитного импульса через поверхность σ , взятый со знаком минус.

Пользуясь первым истолкованием величины \vec{K} , уравнение (23.12) можно формулировать так: изменение в единицу времени полного момента импульса в объеме V , равного сумме моментов импульса частиц и электромагнитного поля в этом объеме, равно сумме главного момента сторонних сил, действующих на частицы в объеме V , и главного момента поверхностных сил максвелловских натяжений, действующих на границу объема.

При второй интерпретации \vec{K} уравнение (23.12) запишем в форме

$$\vec{K}^{\text{стр.}} = \frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_f) + \oint_{\sigma} (- (2)N) \vec{n} d\sigma, \quad (23.16)$$

то есть главный момент сторонних сил идет на изменение полного момента импульса в объеме V и на поток электромагнитного момента импульса через поверхность σ , ограничивающую объем V . Предполагается, что частицы не пересекают поверхности σ и не переносят через нее момент импульса.

Если сторонних сил нет и поверхность σ охватывает все поле так, что на σ $(2)N = 0$ (система замкнутая), то

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_f) = 0, \quad \vec{L} + \vec{L}_f = \text{const}, \quad (23.17)$$

то есть сохраняется полный момент импульса, равный сумме моментов импульса частиц и поля. Так как в процессе движения момент импульса поля может превращаться в момент импульса частиц и обратно (происходит качественное изменение момента импульса), то следует говорить о законе сохранения и превращения момента импульса.

§ 24. Исторические замечания

Количественное изучение электромагнитных явлений началось с работ Шарля Огюстена Кулона (1736—1806), который в серии работ, опубликованных в 1784—1789 гг., доложил о закономерностях электрических и магнитных взаимодействий. Еще ранее Ф. У. Эпинус (1724—1802) положил в основу учения об электрических и магнитных явлениях представление о силах дальнодействия. Сходство закона Кулона с законом тяготения усилило позиции сторонников дальнодействия и до работы М. Фарадея, а также и некоторое время после них математическая теория электрических и магнитных явлений строилась целиком на основе этого представления.

В 1791 году Луиджи Гальвани (1737—1798) открыл электрический ток. Правильное толкование опытов Гальвани дал в 1792 году Александр Вольта (1745—1827).

В 1820 году Ганс Христиан Эрстед (1777—1851) открыл действие электрического тока на магнитную стрелку — открыл магнитное поле электрического тока. В том же году Жан-Батист Био (1774—1862) и Феликс Савар (1791—1841) с помощью Пьера Симона Лапласа (1749—1827) установили закон силы, с которой ток действует на магнитный полюс. Однако только в 1826 году Колладон показал, что эта сила пропорциональна силе электрического тока. Таким образом, закон Био — Савара — Лапласа (задача 2, § 7) в окончательном виде получен в 1826 году (при этом понятие о напряженности поля еще не существовало, вместо \vec{B} давалась сила $\vec{F} = e_m \vec{B}$, с которой поле действует на магнитный полюс e_m).

В том же 1820 году несколько раньше Био и Савара, Андре-Мари Ампер (1775—1836) экспериментально установил закон взаимодействия токов. Ампер исследовал взаимодействие замкнутых линейных токов и, опираясь на принцип суперпозиции сил, пытался установить закон взаимодействия двух элементов тока. При этом он исходил из предположения, что силы взаимодействия элементов тока должны удовлетворять третьему закону Ньютона, поэтому полученное им выражение отличается от результатов, приведенных в задаче 4, § 7. Формулы задачи 4, § 7 были установлены в 1844 году Германом Грассманом (1809—1877). Отметим, что выражения Ампера и Грассмана отличаются на полный дифференциал некоторой функции и поэтому при вычислении взаимодействия двух замкнутых токов дают один и тот же результат (подробнее см. в книге: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, М., 1954).

Идею о близкодействии впервые высказал Михаил Фарадей (1791—1867). В период с 1831 по 1855 год он опубликовал свои «Экспериментальные исследования по электричеству»¹. В них он неоднократно возвращается к идеи близкодействия, вместе с которой в науку вошло представление о поле. Но в этот период поле рассматривалось как некоторое свойство специального материального носителя, заполняющего все пространство, — «электромагнитного эфира». Представления Фарадея о близкодействии и изображение поля силовыми линиями не встретили первоначально сочувствия у современников.

В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. Направление э. д. с. индукции определяется законом, установленным Эмилем Христиановичем Ленцом (1804—1865) в 1833 году². На работы Ленца опирался Франц Нейман (1798—1895), установивший в 1845 году закон электромагнитной индукции в форме (12.01).

Следует отметить, что Нейман исходил из представления о дальнодействии и опирался на формулу Ампера для взаимодействия токов. Другой

¹ М. Фарадей, Экспериментальные исследования по электричеству, т. 1, 2 и 3, изд. АН СССР, 1947—1959.

² Э. Х. Ленц, Избранные труды, изд. АН СССР 1950.

вывод формулы (12.01), основанный на законе сохранения энергии, дал Герман Гельмгольц (1821—1894) в мемуаре «О сохранении силы»¹, вышедшем в 1847 году и сыгравшем большую роль в установлении закона сохранения энергии. В нем было показано значение закона сохранения энергии в области электромагнитных явлений.

Идеи Фарадея о близкодействии были обобщены и развиты в стройную теорию электромагнитного поля в работах Джемса Клерка Максвелла². В работе «О фарадеевых силовых линиях» (1855—1856 гг.) Максвелл доказывает, что применение идеи о близкодействии в электростатике и магнетостатике приводит к результатам, тождественным результатам теорий, основанных на дальнодействии, и следовательно, в этой области оба метода равноправны.

В работах 1861—1862 годов под общим названием «О физических силовых линиях» Максвелл пытается дать механическую картину среды, носителя электромагнитного поля (эфира). В частности, он ставит себе задачей свести силы дальнодействия к напряжениям и давлениям в поле. Здесь впервые появляется тензор максвелловских напряжений, рассмотренный нами (для поля в вакууме) в § 15.

Несмотря на большие усилия, Максвеллу не удалось далеко продвинуться с конкретными механическими представлениями о поле в эфире. Поэтому он обратился к чисто феноменологической точке зрения, согласно которой механика среды, заполняющей пространство, не рассматривается.

Среда (эфир) служит носителем векторов поля \vec{E} , \vec{B} , а свойства поля характеризуются уравнениями, установленными из опыта. При этом Максвелл предполагает, что возможно механическое истолкование феноменологических уравнений поля на основе движений упругого эфира. На этой основе он в 1864 году развел (в работе «Динамическая теория электромагнитного поля») учение об электромагнитном поле. Поле в веществе Максвелл характеризует четырьмя векторами \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} и \vec{B} . Он устанавливает систему уравнений поля (несколько отличной от современной форме), вводит представление о плотности энергии поля. Кульминационным пунктом теории явилось предсказание существования электромагнитных волн и построение электромагнитной теории света.

Работы Максвелла по электромагнитному полю завершаются «Трактатом об электричестве и магнетизме» (2 тома, 1873), в котором подведены итоги развития теории. Для представлений Максвелла характерно перенесение электромагнитных явлений в промежуточную среду. Электрические заряды в его теории перестают самостоятельно существовать — они являются лишь особыми точками электрического поля, из которых выходят или в которые сходятся силовые линии.

Несмотря на отсутствие непосредственных экспериментальных подтверждений теории Максвелла, начало 80-х годов XIX в. ознаменовалось дальнейшим развитием этой теории. В 1874 году появилась диссертация Н. А. Умова «Уравнения движения энергии в телах». В ней дана наиболее общая формулировка закона сохранения энергии и проводится идея о движении энергии. При этом вводится вектор плотности потока энергии \vec{S} (см. § 14). Идеи Умова оказали серьезное влияние на развитие учения об электромагнитном поле. Опираясь на эти идеи, Джон Генри Пойнтинг (1852—1914) в работе «О переносе энергии в электромагнитном поле» (1884) дал весьма полную формулировку закона сохранения энергии для поля. В то же время к тем же результатам (но в более общей форме) пришел О. Хивисайд.

Окончательное утверждение теории Максвелла связано с экспериментальным открытием в 1887—1888 гг. Генрихом Герцем (1857—1894) электро-

¹ Г. Гельмгольц, О сохранении силы, Госиздат, М., 1922.

² Дж. Клерк Максвелл, Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, ГИТТЛ, М., 1952.

магнитных волн¹. В работе Герца «Силы электрических колебаний, рассматриваемые с точки зрения теории Максвелла» (1889) впервые система уравнений Максвелла для вакуума была написана в современном виде. Герцем заложен новый взгляд на теорию поля, согласно которому уравнения Максвелла выражают физические свойства электромагнитного поля, независимо от каких-либо механических представлений об эфире.

В конце XIX в. возникает и развивается электронная теория. Законы электролиза, открытые М. Фарадеем еще в 1834 году, не укладывались в рамки теории Максвелла. В 1881 году Г. Гельмгольц и Дж. Стони (1826—1911) показали, что законы электролиза непосредственно приводят к выводу об атомистическом строении электрического заряда. В 1895 году Генрих Антон Лоренц (1853—1928) в работе «Опыт теории электрических и оптических свойств движущихся тел» детально разработал новую теорию, являющуюся синтезом максвелловского учения об электромагнитном поле, и представления о реально существующих заряженных частицах (электронах). Электронная теория сыграла большую роль в понимании электромагнитных свойств веществ и подготовила почву для теории относительности Эйнштейна.

Теория Лоренца опиралась на представление о том, что электромагнитное поле есть свойство заполняющего все пространство неподвижного (не принимающего участия в движении тел) электромагнитного эфира, играющего роль абсолютной системы координат. Электромагнитное поле (характеризуемое векторами напряженности) создается в эфире движущимися заряженными частицами (электронами) и описывается уравнениями (22.01) и (22.02). Поле действует на электрон с силой, плотность которой определяется формулой Лоренца (15.11). Проблему динамики электрона разрабатывают Лоренц, Макс Абрагам (1875—1922) и др. Итоги исследований Лоренц опубликовал в 1909 году в монографии «Теория электронов и ее применения к явлениям света и теплового излучения»².

Электронная теория Лоренца встретилась с серьезными затруднениями при попытке построить электродинамику движущихся тел. Эти затруднения были разрешены Альбертом Эйнштейном (1879—1955) в его специальной теории относительности³ (1905). Эйнштейн показал, что уравнения (22.01) и (22.02) справедливы в любой инерциальной системе координат и скорость распространения поля инвариантна. Поэтому Эйнштейн отказался от представлений об эфире — носителе поля. После работ Эйнштейна постепенно создалось современное представление об электромагнитном поле как самостоятельном виде материи, не нуждающемся в особом носителе. На материальность поля указывал в 1909 году В. И. Ленин в работе «Материализм и эмпириокритицизм». Дальнейшие открытия, в частности рождение пар электрон-позитрон при поглощении света, заставили физиков признать материальность поля. Существенную роль в формулировке и пропаганде этого представления о поле сыграл академик С. И. Вавилов.

¹ H. Hertz, Untersuchungen über die ausbreitung der Elektrischen Kraft, Leipzig, 1892. См. также сборник «50 лет волн Герца», изд. АН СССР, М.—Л., 1938.

² Г. А. Лоренц, Теория электронов, ГТТИ, М.—Л., 1934.

³ А. Эйнштейн, К электродинамике движущихся тел. Русский перевод в сборнике «Принцип относительности», ОНТИ, 1935.

ГЛАВА II

СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

§ 25. Статическое электрическое и стационарное магнитное поля

Уравнения Максвелла — Лоренца характеризуют поля, меняющиеся с течением времени. Но мы рассмотрим прежде всего статические и стационарные поля — поля, создаваемые такими распределениями зарядов и токов, которые не меняются с течением времени. В этом случае плотность заряда, плотность тока, а также напряженности поля не зависят от времени. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (25.01)$$

и уравнения Максвелла — Лоренца (22.01) и (22.02) распадаются на две независимые группы:
уравнения электростатического поля

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (25.02)$$

и уравнения для стационарного магнитного поля

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (25.03)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (25.04)$$

Магнитное поле называется статическим, если отсутствует конвекционный ток ($\vec{j} = \vec{v} = 0$). Поле называется стационарным, если существуют неменяющиеся с течением времени потоки. Как видно из (25.04), стационарный ток не имеет источников, линии стационарного тока должны быть замкнутыми.

Из уравнений (25.02) и (25.03) видно, что электростатическое поле — потенциальное, а магнитное поле — вихревое. Источниками электростатического поля являются неподвижные заряды, а магнитное поле не имеет источников и создается токами.

§ 26. Электростатический потенциал

Из уравнения электростатического поля $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ следует, что электростатическое поле имеет потенциальный характер, то есть

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (26.01)$$

Скалярная функция координат φ называется электростатическим потенциалом. Введение электростатического потенциала упрощает вычисление напряженности поля. Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциалы двух или нескольких зарядов складываются алгебраически. Если \vec{E}_1 и \vec{E}_2 — напряженности поля, создаваемые двумя зарядами, то согласно (26.01) $\vec{E}_1 = -\operatorname{grad} \varphi_1$, $\vec{E}_2 = -\operatorname{grad} \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — соответственно потенциалы, создаваемые зарядами. Тогда полное поле

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\operatorname{grad} \varphi_1 - \operatorname{grad} \varphi_2 = -\operatorname{grad}(\varphi_1 + \varphi_2) = -\operatorname{grad} \varphi,$$

то есть определяется потенциалом $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Электростатический потенциал имеет простой физический смысл: работу, которую производит электростатическое поле при переносе единичного заряда из одной точки во вторую, равна разности потенциалов начальной и конечной точек пути и, следовательно, не зависит от формы пути. Действительно, замечая, что составляющая градиента по направлению l равна $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$, имеем

$$A'_{1,2} = \int_1^2 E_l dl = - \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (26.02)$$

Работа поля при передвижении заряда e будет в e раз больше

$$A_{12} = e A'_{12} = e (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (26.03)$$

Очевидно, что работа передвижения заряда в электростатическом поле по замкнутому контуру равна нулю.

С помощью (26.02) можно установить единицу разности потенциалов: разность потенциалов двух точек поля равна абсолютной единице (СГС), если работа переноса заряда в одну абсолютную единицу равна одному эргу. Практическая единица разности потенциалов (вольт) в 300 раз меньше абсолютной.

Предполагая, что заряды (источники поля) занимают конечную область пространства, введем условие нормировки потенциала: потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю

$$\varphi|_{r=\infty} = 0. \quad (26.04)$$

Тогда из (26.02) следует, что потенциал данной точки поля численно равен работе, которую производит поле при передвижении единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность.

Для характеристики распределения потенциала введем эквипотенциальные поверхности, то есть поверхности равного потенциала

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 = \text{const.} \quad (26.05)$$

Так как проекция напряженности поля на направление \vec{l} , согласно (26.01), равна

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad (26.06)$$

то проекция напряженности поля на любое направление, касательное к эквипотенциальной поверхности, равна нулю. Отсюда следует, что вектор напряженности электростатического поля в каждой точке поля перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, и направлен в сторону убывания потенциала. Обозначая через \vec{n} единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности, направленный в сторону возрастания потенциала, можно (26.01) переписать в форме

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n}, \quad (26.07)$$

явно указывающей направление вектора напряженности поля.

Задачи

1. Определить потенциал, создаваемый точечным зарядом e .

Решение. Согласно (1.05) напряженность поля точечного заряда равна $\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}^0$, если заряд поместить в начале координат. Так как работа переноса заряда не зависит от формы пути, то, перенося единичный положительный заряд из данной точки \vec{r} в бесконечность вдоль радиус-вектора, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \frac{e}{r^2} dr = \frac{e}{r}.$$

2. Определить потенциал системы точечных зарядов $e_1, e_2, \dots, e_a, \dots$, находящихся в точках $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_a, \dots$ соответственно.

Решение. Обозначая через $R_a = |\vec{r} - \vec{r}_a|$ расстояние точки A от заряда e_a , получим согласно результатам задачи 1 потенциал этого заряда в точке A

$$\varphi_a(\vec{r}) = \frac{e_a}{R_a}.$$

Согласно принципу наложения потенциал, создаваемый в точке A всеми зарядами, равен

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \varphi_a(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{R_a}.$$

§ 27. Уравнение Пуассона. Определение потенциала по заданному распределению заряда

Потенциал φ , создаваемый распределением заряда $\rho = \rho(\vec{r})$, удовлетворяет дифференциальному уравнению, называемому уравнением Пуассона. Подставляя (26.01) в первое уравнение (25.02) и замечая, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla^2$ есть операция Лапласа, получим

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho. \quad (27.01)$$

Это уравнение, выведенное впервые Пуассоном, однозначно определяет потенциал φ , если учесть естественное граничное условие (26.04). Частный случай уравнения Пуассона при $\rho = 0$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (27.02)$$

называется уравнением Лапласа.

Будем искать решение уравнения (27.01) в форме

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'. \quad (27.03)$$

Здесь \vec{r} — радиус-вектор точки A , в которой наблюдается поле, \vec{r}' — радиус-вектор элемента dV' объема заряда, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ — так называемая функция Грина. Интегрирование ведется по части объема заряда, для которой определяется потенциал. Если надо определить потенциал всего заряда, то интеграл берется по всему объему заряда. Тогда, поскольку вне объема заряда $\rho = 0$, интеграл можно распространить на все бесконечное пространство. Задача сводится к определению функции Грина. Применяя к (27.03) оператор Лапласа ∇^2 и пользуясь (27.01), получим

$$\int \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = -4\pi\rho(\vec{r}),$$

где дифференцирование G производится по аргументу \vec{r} , а интегрирование по \vec{r}' — по всему бесконечному пространству. Последнее уравнение должно выполняться для любой достаточно гладкой функции $\rho(\vec{r})$. Сравнивая его с определением (4.06) δ -функции Дирака, получим уравнение для функции Грина

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (27.04)$$

Таким образом, функция Грина удовлетворяет уравнению Пуассона для потенциала, созданного единичным положительным точечным зарядом.

Чтобы решить уравнение (27.04), воспользуемся тем обстоятельством, что функция $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ сферически симметрична и потенциал точечного заряда должен быть также сферически симметричным. Вводя

сферическую систему координат с началом в точке \vec{r}' и обозначив $|\vec{r} - \vec{r}'| = R$, приведем (27.04) для всех точек вне точечного заряда к виду

$$\nabla^2 G = \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) = 0 \quad (R > 0).$$

Общий интеграл этого уравнения равен $RG = C_1 R + C_2$, где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Введем нормировочное условие — потребуем, чтобы в бесконечности G исчезала. Тогда $C_1 = 0$ и

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{C_2}{R}.$$

Таким образом, функция Грина есть симметричная функция от \vec{r} и \vec{r}' , обращающаяся в бесконечность в точке $\vec{r} = \vec{r}'$, занимаемой точечным зарядом. Коэффициент C_2 определяется из условия, что электрическое поле, определяемое потенциалом G ,

$$E = -\frac{dG}{dR} = \frac{C_2}{R^2},$$

должно совпадать с полем $\frac{1}{R^2}$ единичного точечного заряда. Поэтому $C_2 = 1$ и функция Грина принимает вид

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (27.05)$$

Следовательно, электростатический потенциал произвольно распределенного заряда равен

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (27.06)$$

Это выражение можно истолковать согласно принципу суперпозиции потенциалов как алгебраическую сумму потенциалов $\frac{de}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, создаваемых в данной точке всеми бесконечно малыми элементами $de = \rho(\vec{r}') dV'$ заряда.

Функция Грина (27.05) обращается в бесконечность при $\vec{r} = \vec{r}'$. Поэтому возникает вопрос о применимости формулы (27.06) в том случае, когда точка наблюдения $A(\vec{r})$ лежит внутри объема V , занятого зарядом, и при интегрировании \vec{r}' принимает значение \vec{r} . Докажем, что формула (27.06) остается применимой и в этом случае.

Выберем точку A за начало сферической системы координат $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, θ , α . Тогда $dV' = R^2 \sin \theta dR d\theta d\alpha$ и $\rho(\vec{r}') = \rho(R, \theta, \alpha)$.

Потенциал в точке A равен

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R} = \int \int \int_{(V)} \rho(R, \vartheta, \alpha) R dR \sin \vartheta d\vartheta d\alpha.$$

Этот интеграл сходится, если плотность заряда ρ конечна во всем объеме V . Поэтому (27.06) определяет потенциал распределенного с плотностью ρ заряда в любой точке A пространства, как внешней, так и внутренней.

Если имеется система точечных зарядов, то плотность заряда определяется формулой (4.09)

$$\rho(\vec{r}') = \sum_a e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a),$$

подстановка которой в (27.06) дает потенциал системы точечных зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (27.07)$$

В частности, потенциал одного точечного заряда e , сосредоточенного в начале координат, равен

$$\varphi(\vec{r}) = eG(\vec{r}, 0) = \frac{e}{r}. \quad (27.08)$$

Из (27.08) видно, что для одного точечного заряда эквипотенциальные поверхности представляют собой семейство концентрических сферических поверхностей $r = \frac{e}{\varphi} = \text{const}$. Линии вектора напряженности E имеют вид прямолинейных лучей, расходящихся из заряда, и в каждой точке перпендикулярны к соответствующей эквипотенциальной поверхности (рис. 1).

Беря градиент от φ (27.06), получаем общее выражение для напряженности электростатического поля объемно распределенного заряда

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (27.09)$$

Задачи

1. Определить с помощью уравнения Пуассона потенциал и напряженность поля внутри и вне шара радиуса a , равномерно заряженного с плотностью ρ .

Решение. Потенциал равномерно заряженного шара сферически симметричен и, следовательно, должен зависеть только от расстояния r от центра шара. Выбирая сферическую систему координат с началом в центре шара, получим уравнение Пуассона для области внутри шара ($r \leq a$)

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 r \varphi_i}{dr^2} = -4\pi\rho.$$

Для области вне шара ($r \geq a$)

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 r \varphi_a}{dr^2} = 0.$$

Из последнего уравнения в связи с граничным условием (16.04) следует $\varphi_a = \frac{C_1}{r}$, а из первого —

$$\varphi_i = -\frac{2}{3} \pi \rho r^2 + C_3 + \frac{C_4}{r}.$$

Потенциал в центре шара ($r = 0$) должен быть конечен. Поэтому следует положить $C_4 = 0$. На границе шара φ и $\frac{d\varphi}{dr}$ должны быть непрерывны (в противном случае на границе шара поле или ρ принимали бы бесконечное значение), то есть

$$\text{при } r = a, \varphi_i = \varphi_a, \frac{d\varphi_i}{dr} = \frac{d\varphi_a}{dr};$$

отсюда получаем систему двух уравнений для определения C_1 и C_3 :

$$-\frac{2}{3} \pi \rho a^2 + C_3 = \frac{C_1}{a}, \quad -\frac{4}{3} \pi \rho a = -\frac{C_1}{a^2}.$$

Окончательно для потенциала поля имеем

$$\varphi_i = -\frac{2}{3} \pi \rho r^2 + 2\pi \rho a^2, \quad \varphi_a = \frac{e}{r}, \quad e = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho.$$

Напряженность поля (сравните задачу 2, § 3) равна

$$\vec{E}_i = +\frac{4}{3} \pi \rho \vec{r} \quad (r \leq a), \quad \vec{E}_a = \frac{e}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (r \geq a).$$

2. Определить потенциал заряда, распределенного с некоторой поверхностной плотностью $\eta(\vec{r})$ по поверхности σ .

Решение. На элементе поверхности $d\sigma'$ находится элемент заряда $de' = \eta(\vec{r}') d\sigma'$, который в точке \vec{r}' на расстоянии $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ создает потенциал $d\varphi(\vec{r}) = \frac{de'}{r}$. Складывая потенциалы, создаваемые всеми элементами заряда, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{de'}{R} = \int \frac{\eta(\vec{r}') d\sigma'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Тот же результат можно получить из (27.06), если учесть, что объемная плотность поверхности распределенного заряда может быть написана в форме $\rho = \eta(\vec{r}') \delta(n')$ (n' — расстояние по нормали от поверхности), а элемент объема $dV' = d\sigma' \cdot dn'$.

3. Диск радиуса a равномерно заряжен по поверхности с плотностью η . Определить поле на оси диска на расстоянии x .

Решение. В качестве элемента площади берем кольцо $d\sigma = 2\pi r dr$ (рис. 14). Следовательно,

$$\varphi' = 2\pi\eta \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = 2\pi\eta (\sqrt{a^2 + x^2} - |x|).$$

Поле по нормали равно

$$E'_n = E'_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + 2\pi\eta.$$

По другую сторону плоскости диска $x < 0$ и $|x| = -x$, так что

$$\varphi'' = 2\pi\eta(\sqrt{a^2 + x^2} + x), \quad E''_n = E''_x = -\frac{d\varphi''}{dx} = -\frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 2\pi\eta.$$

Отсюда следует, что при переходе через заряженную поверхность потенциал меняется непрерывно, а нормальная составляющая напряженности поля терпит разрыв, пропорциональный поверхностной плотности заряда

$$\Delta E_n = (E'_n - E''_n)_{x=0} = 4\pi\eta.$$

Если радиус диска неограниченно увеличивать, то диск превращается в равномерно заряженную плоскость. Потенциал поля при этом неограниченно возрастает (так как при $a \rightarrow \infty$ полный заряд $e = \pi a^2 \eta \rightarrow \infty$), но напряженность поля остается конечной, равной $E = E_n = \pm 2\pi\eta$.

4. Определить потенциал и эквипотенциальные поверхности заряда e , равномерно распределенного вдоль отрезка $2c$ (рис. 15) с линейной плотностью $q = \frac{e}{2c}$.

Решение. Вследствие осевой симметрии достаточно рассмотреть поле в плоскости, проходящей через ось x (на которой лежит отрезок $2c$).

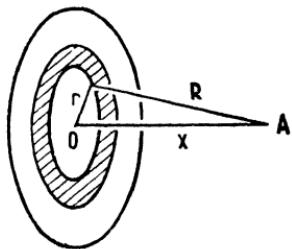


Рис. 14.

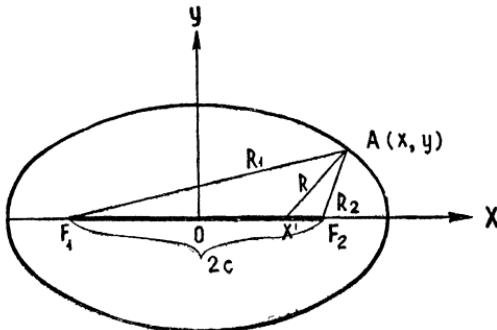


Рис. 15.

Выберем начало координат O в середине отрезка. Для потенциала в точке $A(x, y)$ имеем

$$\varphi = \frac{e}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{dx'}{R} = \frac{e}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}.$$

Интеграл приводится к элементарному подстановкой Эйлера $\xi = x - x' + \sqrt{(x-x')^2 + y^2}$ и дает

$$\varphi = \frac{e}{2c} \ln \frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}.$$

Линии равного потенциала в плоскости определяются уравнением

$$\frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=k=\text{const.}$$

Докажем, что это уравнение определяет семейство эллипсов с фокусами в точках F_1 и F_2 на концах отрезка $2c$. Обозначим через R_1 и R_2 расстояния точки A от концов F_1 и F_2 отрезка, а через x_1 и x_2 — проекции R_1 и R_2 на ось x . Тогда

$$k = \frac{x_1+R_1}{x_2+R_2} = \frac{R_2-x_2}{R_1-x_1}.$$

Последнее равенство вытекает из того, что $y^2=R_1^2-x_1^2=R_2^2-x_2^2$ или $(R_1+x_1)(R_1-x_1)=(R_2+x_2)(R_2-x_2)$. Имеем два уравнения:

$$R_1+x_1=kR_2+kx_2, \quad R_2-x_2=kR_1-kx_1.$$

Складывая эти уравнения и замечая, что $x_1-x_2=2c$, получим

$$R_1+R_2=2c \frac{k+1}{k-1}=2a.$$

Следовательно, точки $\varphi = \frac{e}{2c} \ln k = \text{const}$ лежат на эллипсе с большой полуосью a и линейным эксцентриситетом c . Из осевой симметрии следует, что эквипотенциальные поверхности суть вытянутые вдоль оси x конфокальные эллипсоиды вращения.

Потенциал в точке $A(x, y, z)$ равен

$$\varphi = \frac{e}{2c} \ln \frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}}.$$

Легко видеть, что линии вектора E расположены в меридиональных плоскостях, проходящих через ось вращения x_1 , и являются гиперболами с фокусами F_1 и F_2 .

5. Доказать, что в задаче 4 при $c \rightarrow 0$ ($e = \text{const}$) потенциал переходит в потенциал точечного заряда, а при $c \rightarrow \infty$ (но $q = \frac{e}{2c} = \text{const}$) — в потенциал бесконечной равномерно заряженной прямой (с точностью до бесконечной постоянной).

6. Доказать, что формула (27.09) применима для вычисления напряженности поля в точке $A(\vec{r})$, лежащей внутри области, занятой объемным зарядом.

(Решение подобно тому, которое дано в тексте параграфа).

§ 28. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Мультипольные потенциалы

Выражение (27.06) позволяет исследовать зависимость потенциала от координат точки наблюдения, если рассматривать поле на большом расстоянии от заряда (на расстоянии большом по сравнению с размерами a области, занятой зарядом).

Выберем начало координат внутри области, занятой зарядом. Пусть \vec{r}' — радиус-вектор элемента объема dV' заряда, а \vec{r} — радиус-

вектор точки наблюдения A . Согласно (27.06) потенциал в точке A равен

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (28.01)$$

При больших r ($r \gg a \gg r'$) функцию Грина можно разложить в ряд Тейлора по степеням координат x'_α ($\alpha = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{r}') &= G(\vec{r}) - \sum_\alpha x'_\alpha \frac{\partial G(\vec{r})}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta x'_\alpha x'_\beta \frac{\partial^2 G(\vec{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \\ &\dots = G(\vec{r}) - (\vec{r}' \nabla) G(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{r}' \nabla) (\vec{r}' \nabla) G(\vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (28.02)$$

Подставляя (28.02) в (28.01) и пользуясь тем, что $G(\vec{r}) = \frac{1}{r}$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' - \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \int x'_\alpha x'_\beta \rho(\vec{r}') dV' \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} + \dots = \\ &= \overset{(0)}{\varphi}(\vec{r}) + \overset{(1)}{\varphi}(\vec{r}) + \overset{(2)}{\varphi}(\vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (28.03)$$

Разложение (28.03) называется разложением по мультипольным потенциалам. Первый член можно написать в форме

$$\overset{(0)}{\varphi}(\vec{r}) = \frac{e}{r}, \quad e = \int \rho dV', \quad (28.04)$$

где e — полный заряд системы (распределения). Таким образом, $\overset{(0)}{\varphi}$ соответствует потенциалу точечного заряда („полюса“), равного полному заряду системы и расположенному в начале координат. Следующие члены разложения носят названия: $\overset{(1)}{\varphi}$ — дипольный потенциал, $\overset{(2)}{\varphi}$ — квадрупольный потенциал и вообще $\overset{(n)}{\varphi}$ — мультипольный потенциал.

Потенциал $\overset{(n)}{\varphi}$, как видно из (28.03), содержит производные от $G = \frac{1}{r}$ только порядка n и поэтому пропорционален $\frac{1}{r^{n+1}}$. Это значит, что зависимость потенциала от расстояния будет определяться в основном первым мультипольным потенциалом, не обращающимся в нуль. В зависимости от того, какой из потенциалов первый не обращается в нуль, система называется заряженной (ионом), диполем, квадруполем и т. д.

Если система не нейтральная (например, ионизированный атом или молекулярный ион), то на больших расстояниях потенциал будет

определяться членом φ . Если система нейтральная (атом или молекула), то $e=0$ и разложение будет начинаться по крайней мере с φ , то есть потенциал будет убывать с расстоянием по крайней мере как $\frac{1}{r^2}$. Какой из потенциалов будет первым, не обращающимся в нуль, зависит от распределения заряда в системе.

§ 29. Потенциал и напряженность поля диполя

Дипольный потенциал согласно (28.03) определяется формулой

$$^{(1)}\varphi(\vec{r}) = -\vec{p} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (29.01)$$

где вектор

$$\vec{p} = \int_{(V)} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (29.02)$$

называется дипольным моментом или моментом первого порядка системы зарядов.

Если система нейтральная ($e=0$), то дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Перенося начало координат в точку O' с радиус-вектором \vec{r}_0 , получим новый радиус-вектор заряда $\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{r}_0$ и новый дипольный момент

$$\vec{p}' = \int \vec{r}'' \rho dV'' = \int \vec{r}' \rho dV' - \vec{r}_0 \int \rho dV' = \int \vec{r}' \rho dV' = \vec{p},$$

так как

$$e = \int \rho dV' = 0.$$

Если имеется система точечных зарядов $\rho(\vec{r}') = \sum_a e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)$,

где \vec{r}_a — радиус-вектор заряда e_a , то

$$\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a. \quad (29.03)$$

Простейшая нейтральная система, имеющая момент 1-го порядка, состоит, очевидно, из двух зарядов, равных по величине, но противоположных по знаку ($e_1 = +e$, $e_2 = -e$). Для нее

$$\vec{p} = e(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = e\vec{r}_{21}, \quad (29.04)$$

то есть момент равен произведению положительного заряда на радиус-вектор положительного заряда относительно отрицательного. Отсюда и происходит название „дипольный момент“.

Напряженность поля диполя равна

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \quad (29.05)$$

(так как $\nabla(\vec{pr}) = \vec{p}$ и $\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$). Таким образом, напряженность поля диполя убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

Чтобы наглядно представить поле диполя, начертим линии вектора E . Из (29.05) видно, что поле диполя обладает осевой симметрией. Ось симметрии направлена по моменту \vec{p} . Поэтому достаточно рассмотреть поле в какой-либо плоскости, проходящей через эту ось.

Введем в плоскости полярные координаты r , ϑ (ϑ — угол, отсчитанный от направления \vec{p} и меняющийся в пределах от 0 до π). Тогда из (29.05)

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{r^3}. \quad (29.06)$$

Дифференциальное уравнение силовой линии согласно (1.06) имеет вид

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta} \quad \text{или} \quad \frac{dr}{2 \cos \vartheta} = \frac{r d\vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Отсюда

$$r = C \cos^2 \vartheta,$$

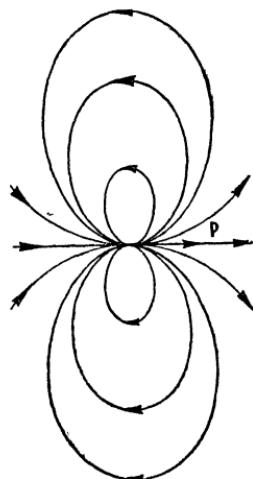


Рис. 16.

где C — постоянная интегрирования. Меняя C , получим семейство силовых линий диполя, изображенное на рисунке 16.

§ 30. Потенциал квадруполя

Если полный заряд системы и ее дипольный момент равны нулю, то разложение (28.03) начинается с члена

$$\overset{(2)}{\varphi}(r) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \int x'_\alpha x'_\beta p(r') dV' \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}. \quad (30.01)$$

Этот потенциал называется квадрупольным. Название происходит от того, что простейшей системой, для которой полный заряд и

дипольный момент равны нулю, но $\overset{(2)}{\varphi} \neq 0$, является система из двух равных антипараллельных диполей, заряды которых расположены по углам параллелограмма (рис. 17). Квадрупольный потенциал зависит от шести величин вида

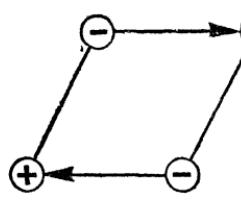


Рис. 17.

$$\int x'_\alpha x'_\beta p(r') dV',$$

образующих симметричный тензор 2-го ранга. Этот тензор называется квадрупольным моментом системы. Можно показать, что квадрупольный момент имеет только пять независимых компонент.

Определим компоненты квадрупольного момента формулами

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} = \int \rho(\vec{r}') (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV'. \quad (30.02)$$

Сумма его диагональных элементов равна нулю

$$\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} = 0, \quad (30.03)$$

поэтому независимых компонент только пять.

Квадрупольный потенциал можно написать в форме

$${}^{(2)}\vec{\varphi}(r) = \frac{1}{6} \sum_\alpha \sum_\beta Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot \frac{1}{r}, \quad (30.04)$$

что отличается от (30.01) членом, обращающимся в нуль.

§ 31. Энергия системы зарядов

Энергию системы зарядов можно определить, исходя из представления об энергии поля. Энергия поля системы зарядов, согласно (14.01) и (14.05) (магнитное поле отсутствует), равна

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (31.01)$$

где интегрирование производится по всему полю, то есть по бесконечному пространству. Если система состоит из двух частей 1 и 2, создающих в данной точке напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , то $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и энергия

$$W_e = W_1 + W_2 + W_{12}, \quad (31.02)$$

где

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV, \quad W_2 = \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV, \quad W_{12} = U = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV. \quad (31.03)$$

Предполагается, что части 1 и 2 не деформируемы и поле каждой из них не меняется от наличия другого заряда. Энергии W_1 и W_2 зависят только от свойств частей 1 и 2 и называются собственными энергиями этих частей. Энергия W_{12} зависит от обеих частей и называется их взаимной энергией. В отличие от собственной энергии, которая, очевидно, всегда положительна, взаимная энергия может быть отрицательной, так как $\vec{E}_1 \vec{E}_2 \leq 0$.

Энергия W_e есть собственная энергия всей системы зарядов. Из (31.02) видно, что собственная энергия системы складывается из собственных энергий ее частей и их взаимной энергии. Взаимная энергия должна зависеть от взаимного расположения частей системы и поэтому является их взаимной потенциальной энергией.

Приведем (31.01) к виду, явно содержащему заряды. Подставляя $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, получим

$$W_e = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \operatorname{grad} \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \vec{E} dV - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} (\vec{E} \varphi) dV.$$

Второй интеграл по формуле Остроградского равен интегралу от $E_n \varphi$ по бесконечно удаленной поверхности, ограничивающей поле, на которой произведение $E \varphi$ обращается в нуль. Поэтому интеграл равен нулю. В первый интеграл подставим $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, тогда энергия системы зарядов примет вид

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (31.04)$$

Интегрирование (31.04) можно проводить только по объему V , внутри которого ρ не равно нулю.

Выражение (31.04) может быть получено также вычислением работы, затрачиваемой на создание системы зарядов. Будем создавать данное распределение зарядов, подводя заряды из бесконечности.

Пусть в некоторый момент плотность заряда равна $\rho' = \lambda \rho$, где ρ — окончательная плотность и $0 < \lambda < 1$. Тогда согласно (27.06) потенциал в данной точке будет равен $\varphi' = \lambda \varphi$, где φ — окончательный потенциал. Подведем бесконечно малый заряд и распределим его в системе с плотностью $d\rho' = \rho d\lambda$. Из (26.03) работа, которую производят внешние силы против сил поля при переносе заряда $d\rho'$ из бесконечности ($\varphi_1 = 0$) в точку с потенциалом $\varphi_2 = \varphi'$, равна $\delta A = -d\rho'(\varphi_1 - \varphi_2) = d\rho' \varphi'$. В нашем случае заряд $d\rho'$ переносится в разные точки и распределяется по объему, так что

$$\delta A = \int_V d\rho' \varphi' dV = \lambda d\lambda \int_V \rho \varphi dV,$$

где λ меняется от 0 до 1. Поэтому, интегрируя по λ от 0 до 1, получим полную работу заряжения

$$A = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV,$$

которая, очевидно, равна электростатической энергии системы.

Этот вывод создает впечатление, что энергия системы зарядов локализована на зарядах. Однако энергию надо связывать не с зарядами, а с полем. В рамках электростатики оба представления правомерны. Перенос энергии полем (гл. I) показывает, что второе представление ближе к истине.

Для системы точечных зарядов $\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$. Подставив это в (31.04), получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a, \quad (31.05)$$

где φ_a — полный потенциал, создаваемый системой в точке, занимаемой зарядом с индексом a . Он равен

$$\varphi_a = \varphi'_a + \varphi''_a = \sum_b \frac{e_b}{R_{ab}} + \varphi''_a, \quad (31.06)$$

где $R_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$ — расстояние между зарядами e_a и e_b (суммирование производится по всем зарядам, кроме a -того), φ''_a — потенциал, создаваемый самим зарядом e_a .

Поскольку заряд e_a — точечный, потенциал φ''_a — бесконечно велик. Поэтому подстановка (31.06) в (31.05) позволяет разложить W_e на бесконечную (но постоянную) собственную энергию зарядов $\sum_a e_a \varphi''_a$ и их взаимную (потенциальную) энергию U , зависящую от конфигурации системы. Последняя равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi'_a = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \sum \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (31.07)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$U = \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (31.08)$$

Так как заряды могут иметь разные знаки, то взаимная энергия может быть как положительной, так и отрицательной. Появление бесконечной собственной энергии показывает, что представление о точечных зарядах имеет определенные границы применимости.

Задачи

1. Определить собственную энергию шара радиуса a , равномерно заряженного по объему с плотностью ρ .

Решение. Выберем в качестве элемента dV объем шарового слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Пользуясь выражением для потенциала шара (задача 1, § 27), получим согласно (31.04)

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^a \left(2\pi \rho a^2 - \frac{2}{3} \pi \rho r^2 \right) 4\pi r^2 dr = \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 a^5 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a},$$

где $e = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ — полный заряд шара. Заметим, что для вычисления по формуле (31.01) потребовалось бы учитывать поле как внутри, так и вне шара.

2. Определить собственную энергию заряда, распределенного с плотностью $\eta(r)$ по некоторой поверхности σ .

Решение. Будем рассматривать поверхностный заряд как заряд, распределенный в тонком слое. Положим в (31.04) $dV = d\sigma \cdot dn$ и $\rho \cdot dn = \eta$. Тогда

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma,$$

где интеграл распространен по всей поверхности.

3. Определить собственную энергию заряда e , распределенного с постоянной плотностью η по поверхности шара радиуса a .

Решение. Пользуясь результатом предыдущей задачи и тем, что потенциал поверхности заряженного шара равен $\frac{e}{r}$, получим

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(S)} \eta \varphi d\sigma = \frac{e}{2a} \int_{(S)} \eta d\sigma = \frac{e^2}{2a}.$$

§ 32. Энергия недеформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему

Рассмотрим недеформируемую (твёрдую) систему зарядов (систему, в которой внешние электрические силы не вызывают перераспределения зарядов). Вычислим энергию такой системы, находящейся во внешнем поле. Пусть $\varphi(\vec{R})$ — потенциал внешнего поля в точке \vec{R} . Энергия заряда $de = \rho dV'$, расположенного в элементе объема dV' , равна $\varphi(\vec{R}) de$, а полная потенциальная энергия системы во внешнем поле равна

$$U = \int \rho \varphi(\vec{R}) dV'. \quad (32.01)$$

Множитель $1/2$ отсутствует в согласии с (31.03).

Исследуем это выражение в предположении, что внешнее поле слабо меняется на протяжении области, занятой зарядом. Выберем внутри системы некоторую точку O с радиус-вектором \vec{r} за начало координат. Тогда $\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}'$. Разложив потенциал $\varphi(\vec{R})$ вблизи начала $O(\vec{r})$, получим

$$\varphi(\vec{R}) = \varphi(\vec{r}) + \vec{r}' \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x'_{\alpha} x'_{\beta} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \dots$$

Подстановка $\varphi(\vec{R})$ в (32.01) дает

$$U = \varphi(\vec{r}) \int \rho(\vec{r}') dV' + \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \int x'_{\alpha} x'_{\beta} \rho dV' + \dots = {}^0 U + {}^{(1)} U + {}^{(2)} U + \dots \quad (32.02)$$

Так как $\int \rho dV' = e$ есть полный заряд системы, то первый член равен

$${}^0 U = e \varphi(\vec{r}) \quad (32.03)$$

и выражает энергию, которой обладал бы заряд системы, будучи сосредоточенным в точке $O(\vec{r})$.

Поскольку $\text{grad } \varphi = -\vec{E}(r)$ и согласно (29.02) $\int \vec{r}' \rho dV' = \vec{p}$ есть дипольный момент системы, то энергия диполя во внешнем поле равна

$$^{(1)} U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(r) = -pE \cos \vartheta, \quad (32.04)$$

где ϑ — угол, образованный направлением диполя с направлением внешнего поля.

Третий член разложения (энергию квадруполя во внешнем поле) легко представить (см. § 30) в форме

$$^{(2)} U = \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (32.05)$$

Итак, энергию системы зарядов во внешнем поле можно представить как сумму энергии точечного заряда, равного полному заряду системы, энергии точечного диполя, энергии квадруполя и т. д.

Вычислим электрические силы, действующие на систему во внешнем поле. Пусть потенциальная энергия системы задана как функция координат q_α . Обобщенная сила, действующая на координату q_α , равна

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (32.06)$$

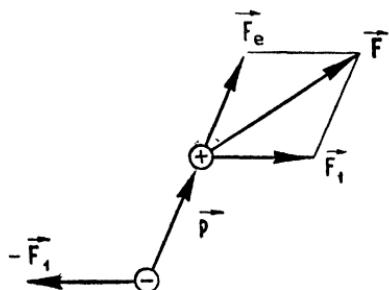


Рис. 18.

Если система нейтральная ($e = 0$), но $\vec{p} \neq 0$, то энергия $^{(1)} U$ (32.04) есть функция от координат диполя и от угла ϑ . Поэтому в неоднородном электрическом поле на диполь будет действовать сила

$$\vec{F}_e = -\nabla U = \nabla(p\vec{E}) = (\vec{p}\nabla)\vec{E} \quad (32.07)$$

(так как $\text{rot } \vec{E} = 0$). Кроме того, в любом поле на диполь действует пара сил с моментом

$$K = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -pE \sin \vartheta, \quad (32.08)$$

или в векторной форме

$$\vec{K} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (32.09)$$

Этот момент стремится повернуть диполь параллельно полю.

Наглядно эти силы легко представить для простейшего диполя во внешнем поле (рис. 18). Если поле однородное, то система сил приводится к паре сил с моментом \vec{K} . Если поле неоднородное, то система сил приводится к паре и равнодействующей \vec{F}_e .

Задачи

1. Определить взаимную энергию диполя \vec{p} и электрического заряда e , находящихся на расстоянии r друг от друга.

Решение. Заряд образует поле напряженностью $\vec{E} = \frac{er_0}{r^2}$. Согласно (32.04) взаимная энергия заряда и диполя равна

$$U^{(1)} = -\frac{e}{r^2} \vec{p} \cdot \vec{r} = -\frac{ep}{r^2} \cos \theta.$$

Тот же результат получится из (32.03), если подставить потенциал диполя из (29.01).

2. Определить взаимную энергию двух точечных диполей, находящихся на расстоянии r друг от друга.

Решение. Согласно (32.04) и (29.05)

$$U = -\vec{p}_2 \vec{E}_1 = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \vec{r})(\vec{p}_2 \vec{r})}{r^5},$$

где \vec{r} — радиус-вектор одного из диполей относительно другого.

§ 33. Энергия деформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему

Существующие в природе системы заряженных частиц, например атомы или молекулы, нельзя считать жесткими. Заряды в таких деформируемых системах могут смещаться относительно своих положений равновесия. Вследствие деформации системы в ней возникает дипольный момент, который в первом приближении пропорционален внешнему полю

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (\alpha > 0). \quad (33.01)$$

Коэффициент α называется поляризуемостью системы и имеет раз мерность объема. Для атомов α имеет величину порядка величины их объема ($\sim 10^{-24} \text{ см}^3$).

Система, в которой индуцированный момент параллелен полю, называется изотропной. Система, в которой \vec{p} не параллельно полю, называется анизотропной. Для анизотропных систем составляющие индуцированного дипольного момента являются линейными функциями составляющих напряженности поля

$$p_\beta = \sum_\gamma \alpha_{\beta\gamma} E_\gamma, \quad \beta = 1, 2, 3 \quad (33.02)$$

или

$$\vec{p} = {}^{(2)}\alpha \vec{E}. \quad (33.03)$$

Совокупность коэффициентов $\alpha_{\beta\gamma}$ образует симметричный тензор ${}^{(2)}\alpha$ поляризуемости системы.

Сила, действующая в поле на индуцированный момент, равна

$$F_\beta = (\vec{p} \nabla) E_\beta = \sum_{\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} E_\delta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma} = \sum_{\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} E_\delta \frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta},$$

так как в электростатическом поле $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ и, следовательно, $\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta}$. Переставляя знаки суммирования γ и δ и пользуясь симметрией тензора поляризуемости, получим

$$F_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \left(E_\delta \frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta} + E_\gamma \frac{\partial E_\delta}{\partial x_\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} E_\gamma E_\delta = - \frac{\partial U}{\partial x_\beta}.$$

Отсюда потенциальная энергия индуцированного диполя во внешнем поле

$$U_{\text{инд.}} = - \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} E_\gamma E_\delta = - \frac{1}{2} \vec{E}^{(2)} \alpha \vec{E}. \quad (33.04)$$

Для изотропной системы ($\alpha_{\gamma\delta} = \alpha \delta_{\gamma\delta}$)

$$U_{\text{инд.}} = - \frac{1}{2} \alpha E^2. \quad (33.05)$$

Так как энергия диполя во внешнем поле равна $-\vec{p} \vec{E} = -\vec{E}^{(2)} \alpha \vec{E}$, то разность

$$U_{\text{инд.}} - (-\vec{E}^{(2)} \alpha \vec{E}) = \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} \alpha_{\beta\gamma} E_\beta E_\gamma$$

надо рассматривать как упругую энергию деформированной внешним полем системы зарядов. Момент вращения, действующий на индуцированный диполь, согласно (32.09) и (33.03) равен

$$\vec{K} = [\vec{p}, \vec{E}] = [{}^{(2)}\alpha \vec{E}, \vec{E}]. \quad (33.06)$$

Момент \vec{K} равен нулю для изотропной системы (так как в этом случае вектор \vec{p} параллелен \vec{E}), но отличен от нуля для анизотропной системы.

§ 34. Векторный потенциал

Рассмотрим магнитное поле стационарного тока. Пусть плотность тока $\vec{j}(r)$ зависит только от координат и отлична от нуля в конечной области пространства. Поскольку стационарный ток не имеет источников, то

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (34.01)$$

и линии плотности стационарного тока замкнуты. Электрическое поле такого статического распределения заряда определяется формулами § 27.

Магнитное поле стационарного тока согласно (25.03) удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (34.02)$$

Последнее равенство показывает, что магнитное поле является вихревым. Поэтому можно положить

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (34.03)$$

Вектор \vec{A} называется векторным потенциалом магнитного поля. В случае стационарного поля \vec{A} зависит только от координат точки.

Векторный потенциал однозначно определяет напряженность магнитного поля. Магнитное поле определяет векторный потенциал с точностью до градиента некоторого скаляра. Действительно, векторный потенциал \vec{A}' , равный

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad (34.04)$$

где χ — некоторый скаляр, определяет то же самое поле:

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}.$$

Векторный потенциал можно сделать однозначным, если наложить на него добавочное условие

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (34.05)$$

называемое условием калибровки. Условие калибровки всегда может быть выполнено: если $\operatorname{div} \vec{A} = \omega \neq 0$, то всегда можно подобрать функцию¹ χ такую, что $\operatorname{div} \vec{A}' = 0$.

Для определения векторного потенциала подставим \vec{B} из (34.03) в первое уравнение (34.02). Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

В силу условия калибровки (34.05)

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (34.06)$$

¹ Из (34.04) следует, что $\operatorname{div} \vec{A}' = \omega + \nabla^2 \chi = 0$, поэтому χ — решение уравнения Пуассона $\nabla^2 \chi = -\omega$.

Это уравнение определяет векторный потенциал по заданному распределению тока. Оно аналогично уравнению Пуассона (27.01) для скалярного потенциала. Так как функция Грина для оператора Лапласа определена в § 27, то решение (34.06) можно написать сразу

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (34.07)$$

Убедимся, что условие калибровки (34.05) удовлетворяется. Обозначим через ∇ оператор, взятый по координатам точки наблюдения \vec{r} , а через ∇' — оператор, взятый по координатам точки источника \vec{r}' . Заметим, что в применении к функциям от $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\nabla = -\nabla'$$

и

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} = \nabla \cdot \frac{\vec{j}}{R} = \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{R} = -\nabla' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} + \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{R}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' = -\frac{1}{c} \int \operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{c} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{R} dV'.$$

Оператор ∇ введен под знак интеграла потому, что дифференцирование производится по \vec{r} , играющему роль параметра. Первый интеграл исчезает, так как его можно по формуле Остроградского преобразовать в интеграл по замкнутой поверхности, на которой нормальная составляющая тока обращается в нуль. Второй интеграл исчезает в силу (34.01). Поэтому условие калибровки выполнено.

Если ток линейный, то $\vec{j} dV = I d\vec{r}'$, где I — сила тока, $d\vec{r}' = d\vec{l}$ — элемент длины тока (см. задачу 2 § 7), и векторный потенциал приводится к виду

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_C \frac{d\vec{r}'}{R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (34.08)$$

(интегрирование производится по замкнутому контуру C линейного тока).

§ 35. Магнитное поле стационарного тока

Вычислим напряженность магнитного поля тока. В силу (34.03) и (34.07) имеем

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Но

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{R} = \left[\nabla \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \left[\vec{j}, \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3}.$$

Поэтому

$$\vec{B}(r) = \frac{1}{c} \int_{(V)} \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (35.01)$$

Формула (35.01) выражает закон Био и Савара. Ее можно истолковать как выражение принципа суперпозиции поля: магнитное поле некоторого объемно распределенного стационарного тока может быть получено путем векторного сложения элементарных полей

$$d\vec{B} = \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{cR^3} dV', \quad (35.02)$$

создаваемых элементами тока $\vec{j} dV'$. Уравнение (35.02) можно рассматривать как следствие выражения для магнитного поля медленно движущегося точечного заряда (§ 7).

Задачи

1. Определить векторный потенциал однородного магнитного поля ($\vec{B} = \text{const}$).

Решение. Так как $\operatorname{rot} [\vec{a}, \vec{r}] = \vec{a} \operatorname{div} \vec{r} - (\vec{a} \nabla) \vec{r} = 2\vec{a}$, то можно положить $2\vec{a} = \vec{B}$. Тогда

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}, \vec{r}], \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

2. Определить векторный потенциал, создаваемый прямолинейным отрезком линейного тока I длиной $2l$.

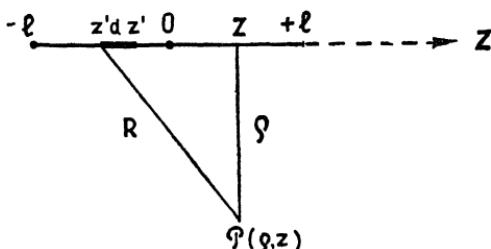


Рис. 19.

Решение. Выберем начало координат в центре отрезка, а ось z направим вдоль отрезка. Согласно (34.08) получим в точке $P(\rho, z)$ (рис. 19)

$$\vec{A}(\rho, \alpha, z) = \vec{k} \frac{I}{c} \int_{-l}^{+l} \frac{dz'}{\sqrt{(z' - z)^2 + \rho^2}} = \vec{k} \frac{I}{c} \ln \frac{\sqrt{(l - z)^2 + \rho^2} + l - z}{\sqrt{(l + z)^2 + \rho^2} - l - z}.$$

3. Определить магнитное поле бесконечного прямолинейного тока силой I .

Решение. Используем выражение для потенциала из предыдущей задачи. В нем положить сразу $l = \infty$ нельзя, так как тогда потенциал получается бесконечно большим (ср. аналогичную задачу электростатики, § 28). Поэтому сначала вычислим напряженность, а затем перейдем к пределу $l = \infty$.

Для бесконечного тока потенциал не должен зависеть от z . Поэтому положим $z = 0$. Тогда $A = A_z$ будет зависеть только от ρ . В цилиндрических координатах имеем

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \rho}, \quad B_\alpha = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \quad B_z = \frac{\partial A_\alpha}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha}.$$

При больших l $\sqrt{l^2 + \rho^2} = l \left(1 + \frac{\rho^2}{2l^2} + \dots\right)$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{l^2 + \rho^2} + l}{\sqrt{l^2 + \rho^2} - l} \approx \frac{2l}{\rho^2/2l} = \frac{4l^2}{\rho^2},$$

так что

$$A_z = \frac{2I}{c} (\ln 2l - \ln \rho).$$

Отсюда

$$B_\alpha = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{2I}{c\rho} = \frac{2I}{c \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad B_\rho = B_z = 0.$$

При переходе к $l = \infty$ результат не меняется (ср. с результатом, найденным в задаче 1, § 9).

4. Определить векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечного прямолинейного цилиндра радиуса a . По цилинду идет ток с плотностью $j = \frac{I}{\pi a^2}$.

Решение. Выберем ось цилиндра за полярную ось. Уравнение (34.06) напишем в цилиндрических координатах ρ, α, z .

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \vec{A}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Поле цилиндрического однородного тока цилиндрически симметрично и $A = A_z$ зависит только от ρ . Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = -\frac{4\pi}{c} j$$

и решения для внутренней и внешней областей будут

$$A_z^{(i)} = -\frac{\pi}{c} j \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2, \quad A_z^{(a)} = C_3 \ln \rho + C_4.$$

На оси тока ($\rho = 0$) потенциал должен быть конечным, поэтому $C_1 = 0$. Так как цилиндр бесконечен, считать $A_z^{(a)} = 0$ при $\rho = \infty$ нельзя. Используя условия непрерывности $A_z^{(i)} = A_z^{(a)}$ и $\frac{dA_z^{(i)}}{d\rho} = \frac{dA_z^{(a)}}{d\rho}$ при $\rho = a$, получим

$$A_z^{(i)} = \frac{I}{c} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) - \frac{2}{c} I \ln a + C_4, \quad A_z^{(a)} = C_4 - \frac{2}{c} I \ln \rho$$

(знание C_4 не существенно). Выражение для $A_z^{(a)}$ совпадает с полученным в задаче 3. Из выражения для $A_z^{(i)}$ получаем напряженность поля внутри цилиндра

$$B_\alpha^{(i)} = -\frac{\partial A_z^{(i)}}{\partial \rho} = \frac{2I}{ca^2} \rho.$$

§ 36. Магнитное поле на большом расстоянии от тока. Магнитный диполь

Исследование зависимости векторного потенциала или напряженности магнитного поля стационарного тока от координат точки наблюдения можно сделать в общем виде лишь для расстояний, больших по сравнению с размерами области, занятой током.

Рассмотрим линейный ток, векторный потенциал которого определяется формулой (34.08). Введем систему координат с началом O где-либо внутри системы токов. Так же как и в § 28, разложим функцию Грина $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ по степеням \vec{r}' и, подставив в (34.08), получим разложение векторного потенциала по мультипольным магнитным потенциалам

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{I}{cr} \oint d\vec{r}' - \frac{I}{c} \oint d\vec{r}' \left(\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) + \dots \quad (36.01)$$

Интеграл в первом члене, очевидно, обращается в нуль. Подынтегральная функция во втором члене может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} d\vec{r}' \left(\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ d\vec{r}' \left(\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) + \vec{r}' \left(d\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ d\vec{r}' \left(\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \vec{r}' \left(d\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} = \frac{1}{2} d \left\{ \vec{r}' \left(\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} - \frac{1}{2} \left[\nabla \frac{1}{r}, [\vec{r}', d\vec{r}'] \right], \end{aligned}$$

поэтому

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{I}{2c} \oint_c d \left\{ \vec{r}' \left(\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} - \frac{I}{2c} \oint_c \left[[\vec{r}', d\vec{r}'], \nabla \frac{1}{r} \right] + \dots$$

Первый интеграл опять исчезает как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала. Во втором члене введем вектор

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \oint_c \frac{1}{2} [\vec{r}', d\vec{r}'], \quad (36.02)$$

который называется магнитным дипольным моментом тока.

Если $\vec{m} \neq 0$, то первый, не обращающийся в нуль член разложения (36.01) векторного потенциала принимает вид

$$\overset{(1)}{\vec{A}}(\vec{r}) = - \left[\vec{m}, \nabla \frac{1}{r} \right]. \quad (36.03)$$

Это есть так называемый магнитный дипольный потенциал. Следующие члены разложения (36.01), приводящие к магнитным мультипольным потенциалам, рассматривать не будем.

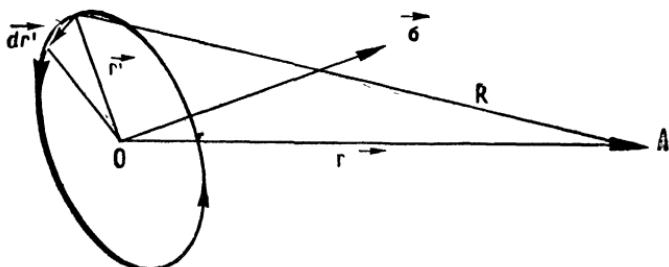


Рис. 20.

Интеграл в (36.02) равен площади $\vec{\sigma}$, обтекаемой током (рис. 20). Поэтому

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \vec{\sigma}, \quad (36.04)$$

то есть магнитный момент замкнутого линейного тока пропорционален произведению силы тока I на вектор обтекаемой площади.

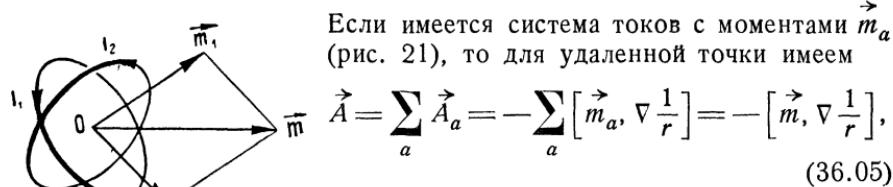


Рис. 21.

Если имеется система токов с моментами \vec{m}_a (рис. 21), то для удаленной точки имеем

$$\vec{A} = \sum_a \vec{A}_a = - \sum_a \left[\vec{m}_a, \nabla \frac{1}{r} \right] = - \left[\vec{m}, \nabla \frac{1}{r} \right], \quad (36.05)$$

где $\vec{m} = \sum_a \vec{m}_a$ — полный магнитный момент системы. Может оказаться, что магнитные

моменты токов взаимно компенсируются и $\vec{m} = 0$, тогда в разложении (36.01) главным будет следующий (квадрупольный) член.

Для объемно распределенного тока можно произвести замену $I d\vec{r}' = \vec{j} dV'$, где \vec{j} — плотность тока в элементе объема dV' . Тогда формула (36.02) дает выражение для магнитного момента объемно распределенного тока

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}', \vec{j}] dV'. \quad (36.06)$$

Вычислим магнитное поле, создаваемое магнитным диполем. Пользуясь тем, что

$$\text{rot} [\vec{m}, \vec{f}(r)] = [\nabla, [\vec{m}, \vec{f}]] = \vec{m} (\nabla \vec{f}) - (\vec{m} \nabla) \vec{f}, \vec{f} = \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

получим

$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}. \quad (36.07)$$

Итак, магнитное поле выражается через магнитный момент так же, как электрическое поле через электрический дипольный момент (29.05). Поэтому картина поля электрического диполя, полученная в § 29, целиком переносится на магнитный диполь.

Необходимо отметить, что картины поля магнитного и электрического диполей совпадают только на больших расстояниях от диполей. Вблизи диполей они существенно различаются: линии вектора \vec{B} замыкаются, а линии вектора \vec{E} начинаются и заканчиваются на зарядах, образующих диполь.

§ 37. Скалярный магнитный потенциал тока

Совпадение магнитного поля диполя (36.07) с электрическим полем диполя наводит на мысль ввести скалярный магнитный потенциал φ_m . Определим φ_m так, чтобы

$$\vec{B} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \quad (37.01)$$

Для магнитного диполя по аналогии с (29.01) можно положить

$$\varphi_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (37.02)$$

Магнитный потенциал φ_m в отличие от электростатического имеет бесконечное множество значений. Действительно, циркуляция электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Циркуляция же магнитного поля по замкнутому контуру, охватывающему ток, равна согласно (9.03) $\pm \frac{4\pi}{c} I$. Если за начальное значение магнитного потенциала взять (37.01), то после n обходов вокруг тока в исходной точке получим

$$\varphi'_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \pm \frac{4\pi}{c} In. \quad (37.03)$$

Магнитный потенциал можно считать однозначным, если условиться рассматривать лишь такие контуры, которые не пересекают некоторой поверхности, опирающейся на рассматриваемый замкнутый ток. Однако для вычисления поля по (37.02) многозначность магнитного потенциала не существенна.

Магнитным потенциалом можно воспользоваться для вычисления магнитного поля произвольного линейного тока на расстоянии, которое не велико по сравнению с размерами тока.

Допустим, что на контур C тока опирается некоторая поверхность σ , направление нормали \vec{n} к любому элементу которой свя-

зано с направлением тока правилом правого винта. Мысленно разобьем площадь поверхности двумя системами пересекающихся кривых на элементы площади $d\sigma$ (рис. 22). Допустим, что по каждой кривой текут два равных по величине I , но противоположно направленных тока. Введение таких токов позволяет считать каждый элемент площади $d\sigma$ поверхности обтекаемым замкнутым током I . При этом ток I по направлению совпадает с идущим по контуру C током. Ток, обтекающий площадку, обладает магнитным моментом

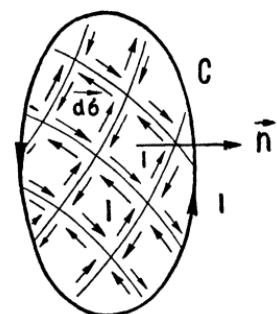


Рис. 22.

Таким образом, получается, что на поверхности σ распределен магнитный момент с поверхностью плотностью $\frac{I}{c} \vec{n}$. Эта поверхность называется двойным магнитным слоем или магнитным листком.

Площадка $d\sigma$ может быть сделана сколь угодно малой. Магнитный потенциал, создаваемый площадкой в точке r , равен согласно (37.02)

$$d\varphi_m = \frac{I}{c} \frac{\vec{n} \vec{R}}{R^3} d\sigma = \frac{I}{c} d\Omega, \quad (37.05)$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, \vec{r}' — радиус-вектор $d\sigma$, $d\Omega$ — телесный угол, под которым видна площадка $d\sigma$ из точки наблюдения. Телесный угол $d\Omega$ считается положительным, если луч зрения от $d\sigma$ к точке наблюдения образует острый угол с направлением нормали n к $d\sigma$. Полный потенциал, создаваемый всем двойным слоем, равен

$$\varphi_m = \frac{I}{c} \Omega(\vec{r}), \quad (37.06)$$

где Ω — телесный угол, под которым виден контур тока C . Если магнитный потенциал определен, то магнитное поле вычисляется по формуле (37.01).

Задачи

1. Определить магнитное поле на оси кругового тока радиуса a на расстоянии r от него (рис. 23).

Решение. Круговой ток эквивалентен двойному магнитному слою с плотностью $\frac{dm}{d\sigma} = \frac{I}{c} \vec{n}$. Из точки наблюдения A контур тока виден под

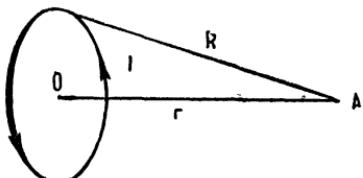


Рис. 23.

углом $\Omega = \frac{\sigma'}{R^2}$, где σ' — площадь сегмента сферы радиуса R , ограниченного контуром тока. Так как $d\sigma = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$, то

$$\Omega = \int_0^{\vartheta_0} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi (1 - \cos \vartheta_0).$$

Но $\cos \vartheta_0 = \frac{r}{R}$, $R = \sqrt{r^2 + a^2}$. Поэтому согласно (37.06) магнитный потенциал в точке наблюдения равен

$$\varphi_m = \frac{2\pi I}{c} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right).$$

Отсюда напряженность магнитного поля на оси равна

$$B_r = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{2m}{c(r^2 + a^2)^{3/2}},$$

где $m = \frac{I}{c} \pi a^2$ — магнитный момент тока.

2. Определить напряженность магнитного поля на оси кругового однослоиного соленоида радиуса a , имеющего длину l и n витков на единицу длины (рис. 24).

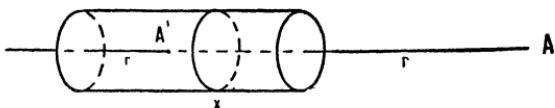


Рис. 24.

Решение. Из точки A вне соленоида сечение x видно под телесным углом $\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$. Магнитный потенциал равен

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(a)} &= \frac{2\pi In}{c} \int_{l+r}^r \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) dx = \\ &= \frac{2\pi In}{c} \{ \sqrt{a^2 + (l+r)^2} - \sqrt{a^2 + r^2} - l \}. \end{aligned}$$

Отсюда магнитное поле на оси вне соленоида равно

$$B_x^{(a)} = -\frac{\partial \varphi_m^{(a)}}{\partial r} = -\frac{2\pi In}{c} \left\{ \frac{l+r}{\sqrt{a^2 + (l+r)^2}} - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right\}.$$

Аналогично вычисляется поле на оси внутри соленоида. В этом случае точка A' (на расстоянии r от левого торца) делит соленоид на две части. Левая часть создает потенциал, который можно по-

лучить из выражения для $\varphi_m^{(a)}$, если положить $r = 0$ и заменить l через r :

$$\varphi_m^{(+)} = \frac{2\pi In}{c} \{ \sqrt{a^2 + r^2} - a - r \}.$$

Правая часть соленоида создает отрицательный потенциал (так как $\vec{n}\vec{R} < 0$), который получается так же, если положить $r = 0$ и l заменить через длину правой части $l - r$:

$$\varphi_m^{(-)} = + \frac{2\pi In}{c} \{ l - r - \sqrt{a^2 + (l - r)^2} + a \}.$$

Потенциал внутри соленоида равен

$$\varphi_m^{(l)} = \frac{2\pi In}{c} \{ l - 2r + \sqrt{a^2 + r^2} - \sqrt{a^2 + (l - r)^2} \};$$

напряженность

$$B_x^{(l)} = - \frac{\partial \varphi_m^{(l)}}{\partial r} = \frac{2\pi In}{c} \left\{ 2 + \frac{l - r}{\sqrt{a^2 + (l - r)^2}} - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right\}.$$

Если соленоид бесконечно длинный, то $r = \frac{l}{2} \rightarrow \infty$ и напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида равна

$$B = \frac{4\pi In}{c} = \frac{4\pi IN}{cl}, \quad N = n \cdot l.$$

§ 38. Магнитные свойства атомной системы

Применение результатов предыдущих параграфов к атомным системам встречает некоторое затруднение. Атом представляет собой динамическую систему, в которой вокруг положительного ядра с зарядом $+Ze$ движется Z электронов. Движущийся со скоростью \vec{v}_a точечный заряд, радиус-вектор которого меняется со временем $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$, создает ток с плотностью

$$j_a(\vec{r}, t) = \rho_a \vec{v}_a = e_a \vec{v}_a \delta(r - \vec{r}_a(t)). \quad (38.01)$$

Этот ток не стационарен и непосредственное применение к нему результатов § 35 и § 36 незаконно. Выясним, при каких условиях можно считать, что движущиеся точечные заряды создают стационарный ток.

В квантовой теории атома получается автоматически, что стационарному состоянию атома соответствуют некоторое статическое (не зависящее от времени) распределение отрицательного заряда электронной оболочки и некоторый стационарный замкнутый ток. В классической теории следует принять, что все заряды атома (или

молекулы) движутся все время в конечной области пространства и импульсы их остаются все время конечными. Такое движение называется стационарным (финитным). При этом все величины, связанные с зарядами, меняются в определенных конечных интервалах и можно рассматривать средние по времени значения этих величин.

Среднее по времени значение некоторой функции $\overline{f(\vec{r}, t)}$, меняющейся в конечных пределах, определяется формулой

$$\overline{f(\vec{r})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{r}, t) dt. \quad (38.02)$$

Промежуток времени T не обязательно бесконечен, но должен быть микроскопически большим, то есть содержать большое число периодов (или квазипериодов) движения зарядов.

Легко видеть, что если функция $f(\vec{r}, t)$ меняется лишь в конечных пределах, то среднее значение ее производной по времени обращается в нуль

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(\vec{r}, T) - f(\vec{r}, 0)}{T} = 0, \quad (38.03)$$

так как $f(\vec{r}, T)$ и $f(\vec{r}, 0)$ ограничены.

Покажем, что усредненные по времени заряды, токи и напряженности полей финитной системы зарядов будут стационарными. Усреднения по времени уравнение сохранения заряда и пользуясь тем, что знаки усреднения по времени и дифференцирования по координатам можно переставлять местами, получим

$$\overline{\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}} = \operatorname{div} \overline{\rho \vec{v}} + \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0.$$

Так как ρ меняется в конечных пределах и поэтому $\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0$, то

$$\operatorname{div} \overline{\rho \vec{v}} = 0. \quad (38.04)$$

Это уравнение совпадает с (34.01), если под \overline{j} понимать среднее значение $\overline{\rho \vec{v}} = \overline{\vec{v}}$.

Аналогичное уравнение может быть получено из (34.06) для среднего векторного потенциала

$$\nabla^2 \overline{\vec{A}} = -\frac{4\pi}{c} \overline{\vec{j}}. \quad (38.05)$$

Векторный потенциал финитно движущегося заряда получим используя (34.07).

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \overline{\vec{A}(\vec{r}, t)}^t = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\overline{e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)}^t}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\overline{e_a \vec{v}_a}^t}{c |\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{\vec{v}_a}{c} \varphi.\end{aligned}\quad (38.06)$$

Для системы зарядов надо просуммировать по всем зарядам. Далее, для системы зарядов

$$\int [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')] dV' = \sum_a e_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a]^t,$$

поэтому магнитный момент финитно движущейся системы зарядов равен

$$\vec{m} = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a]^t. \quad (38.07)$$

Последнее выражение можно связать с моментом импульса системы зарядов. Замечая, что

$$[\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \frac{\vec{L}_a}{\mu_a},$$

где \vec{L}_a — момент импульса и μ_a — масса заряда e_a , получим

$$\vec{m}_L = \sum_a \frac{e_a}{2\mu_a c} \vec{L}_a. \quad (38.08)$$

Этот магнитный момент, связанный с орбитальным движением зарядов, называется орбитальным магнитным моментом. Если у всех зарядов отношение $\frac{e_a}{\mu_a}$ одинаково (электроны в атоме или молекуле)

и равно $\frac{e}{\mu}$, то

$$\vec{m}_L = \frac{e}{2\mu c} \vec{L}, \quad (38.09)$$

где $\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a$ есть полный орбитальный момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно

$$\frac{m}{L} = \frac{e}{2\mu c}. \quad (38.10)$$

Исследование атомных спектров в начале 20-х годов нашего столетия показало, что электрон обладает собственным моментом импульса, не связанным с его поступательным движением. Обозначим этот собственный момент электрона, называемый спином, через \vec{S} . Со спином связан собственный магнитный момент электрона, равный

$$\vec{m}_s = \frac{e}{\mu c} \vec{S}. \quad (38.11)$$

Поэтому полный магнитный момент атомной системы определяется равенством

$$\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_s = \frac{e}{2\mu c} (\vec{L} + 2\vec{S}), \quad (38.12)$$

где \vec{L} — полный орбитальный, а $\vec{S} = \sum_a \vec{S}_a$ — полный спиновой момент электронов. Из (38.12) видно, что магнитный момент атома может быть равен нулю лишь в том случае, когда $\vec{L} + 2\vec{S} = 0$. Последнее имеет место, например, у атомов благородных газов (гелий, неон и т. д.), обладающих так называемыми замкнутыми электронными оболочками.

§ 39. Магнитная энергия стационарных токов

Энергия магнитного поля согласно (14.01) и (14.05) определяется выражением

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV, \quad (39.01)$$

где интегрирование производится по всему магнитному полю. Если магнитное поле создается двумя (или несколькими) системами токов, то магнитную энергию, подобно электрической, можно разложить на собственную и взаимную энергию систем.

В случае стационарных токов выражение (39.01) можно преобразовать так, что энергия будет явно выражена через плотность тока. Действительно, замечая, что

$$B^2 = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B} + \operatorname{div} [\vec{A}, \vec{B}]$$

получим

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B} dV + \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} [\vec{A}, \vec{B}] dV.$$

Здесь второй интеграл исчезает, так как по формуле Остроградского его можно преобразовать в интеграл по поверхности, охватывающей

все поле, на которой $[\vec{A}, \vec{B}]_n$ обращается в нуль. В первом интеграле в случае стационарных токов $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ и

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (39.02)$$

Выражение (39.02) для магнитной энергии тока напоминает (31.04) для электростатической энергии — разница заключается в замене φ через \vec{A} и ρ через $\frac{\vec{j}}{c}$.

Для системы финитно движущихся точечных зарядов получим

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{v}_a \vec{A}_a, \quad (39.03)$$

где \vec{A}_a — полный векторный потенциал в точке, занимаемой зарядом e_a .

Рассмотрим стационарный ток во внешнем магнитном поле. В этом случае магнитная (взаимная) энергия равна

$$U_m = W_m = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{A}(\vec{r}') dV', \quad (39.04)$$

где \vec{A} — векторный потенциал внешнего магнитного поля. Дальнейшее преобразование (39.04) удобнее сделать для линейных токов. Заменяя $\vec{j} dV'$ для линейного тока через $I d\vec{R}'$, получим

$$W_m = \frac{I}{c} \oint_C \vec{A}(\vec{R}') d\vec{R}', \quad (39.05)$$

где интегрирование производится по контуру тока C . Считая векторный потенциал медленно меняющимся с координатами в области пространства, занятого током, разложим $\vec{A}(\vec{R})$ в ряд вблизи некоторой точки $O(\vec{r})$, взятой за начало отсчета.

$$\vec{A}(\vec{R}) = \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}) + (\vec{r}' \nabla) \vec{A}(\vec{r}) + \dots$$

Подставив разложение в (39.05), получим (так как $d\vec{R}' = d\vec{r}'$)

$$W_m = \frac{I}{c} \vec{A}(\vec{r}) \oint dr' + \frac{I}{c} \oint dr' (\vec{r}' \nabla) \vec{A}(\vec{r}) + \dots$$

Первый интеграл обращается в нуль, а второй преобразуем так же, как в § 36 (с той разницей, что вместо вектора r , не зависящего

от \vec{r}' , стоит оператор ∇ , также не зависящий от \vec{r}'). Таким образом, для линейного стационарного тока

$$W_m = \oint_C d\vec{r}' (\vec{r} \nabla) \vec{A} = \frac{I}{2c} \oint_C [(\vec{r}', d\vec{r}') \nabla] \vec{A} = \frac{I}{2c} \oint_C [\vec{r}', d\vec{r}'] \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Так как множитель перед $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$ есть согласно (36.02) магнитный момент тока, то выражение для энергии магнитного диполя во внешнем магнитном поле принимает вид

$$W_m = \vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (39.06)$$

В отличие от энергии электрического диполя во внешнем поле (32.04) правая часть (39.06) имеет знак плюс. Это отличие объясняется тем, что магнитная энергия имеет смысл кинетической энергии (см. § 55 и 56).

§ 40. Исторические замечания

Понятие о потенциале возникло в классической механике. В 1777 году Ж. Л. Лагранж (1736—1813) показал, что силу тяготения, действующую на массу $m = 1$ со стороны других точечных масс, можно получить дифференцированием по координатам этой массы функции $\varphi = \sum_a \frac{m_a}{R_a}$. Особого

назования этой функции Лагранж не дал. В 1782 году П.-С. Лаплас перешел к непрерывному распределению масс и доказал, что функция

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$$

вне масс удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$ (символ ∇^2 был введен позже В. Гамильтоном). Лаплас решил знаменитую задачу о притяжении трехосным эллипсоидом точки вне его. Частный случай этой задачи рассмотрен в задаче 6 § 27.

В 1812 году С.-Д. Пуассон (1781—1840) показал, что в точках, в которых плотность масс отлична от нуля, функция φ удовлетворяет уравнению (27.01) $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$.

Учение о потенциале было разработано Георгом Грином. Его книга «Опыт приложения математического анализа к теории электричества и магнетизма» вышла в 1828 году. Независимо от Грина термин «потенциал» ввел К. Ф. Гаусс (1777—1855). Он разработал теорию потенциала в мемуаре «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния»¹⁾. В § 22—23 этого мемуара содержится известная теорема Гаусса о потоке вектора напряженности через замкнутую поверхность.

Работы Грина и Гаусса послужили источником многочисленных исследований по математической теории потенциала. С современным состоянием вопроса о потенциале можно ознакомиться по книгам: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, ГИТТЛ, 1946 и Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, ГИТТЛ, М., 1953.

¹⁾ Русский перевод см. в книге: К. Ф. Гаусс, Избранные труды по земному магнетизму, изд. АН СССР, 1952.

В работе Гаусса «Общая теория земного магнетизма» впервые устанавливается связь между работой потенциальной силы и изменением потенциала и, таким образом, дается физический смысл потенциалу. [Подробнее этот вопрос рассмотрен позже (в 1847 г.) Г. Гельмгольцем в работе «О сохранении силы】]. В той же работе Гаусс вводит понятие о мультипольных потенциалах и разлагает земной магнитный потенциал в ряд по мультипольным потенциалам. Эта задача по отношению к электростатическому потенциальну разобрана нами в § 28, 29, 30.

Магнитное поле тока исследовалось Био, Саваром и Лапласом, а взаимодействие токов — А. Ампером. Ампер ввел понятие магнитного момента замкнутого тока (§ 36) и двойного магнитного слоя (§ 37). Векторный потенциал магнитного поля тока ввел в 1845 году Ф. Э. Нейман (1798—1895).

Соотношение $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ установлено Максвеллом.

Заметим, что все работы по теории потенциала (Грин, Гаусс) и взаимодействию токов (Ампер, Био, Лаплас и др.) проводились на основе представлений о дальнодействии. Трактовка явлений с точки зрения близкодействия была дана в работах Максвелла.

Решение многих задач на вычисление различных полей можно найти в книгах: Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, ГИТТЛ, М.—Л., 1948; В. Смайт, Электростатика и электродинамика, Изд. иностранной литературы, М., 1954.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 41. Плоские линейно-поляризованные электромагнитные волны

В § 13 показано, что свободное электромагнитное поле должно распространяться со скоростью, равной электродинамической постоянной c . Рассмотрим более подробно свободное электромагнитное поле.

Общие уравнения свободного электромагнитного поля получаются из уравнений Максвелла — Лоренца, если положить $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \end{array} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{array} \right\} \text{(II)} \quad (41.01)$$

Установим уравнения, которым подчиняются напряженности поля \vec{E} и \vec{B} . Беря производную $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ от обоих членов второго уравнения (41.01, I) и пользуясь первым уравнением, имеем

$$\operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Так как $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$, то

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (41.02)$$

Аналогичному уравнению подчиняется вектор \vec{B} :

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (41.03)$$

Уравнение вида (41.02) называется волновым уравнением или уравнением Даламбера. Введем оператор Даламбера:

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (41.04)$$

Тогда волновое уравнение можно записать в форме

$$\square^2 \psi = 0, \quad (41.05)$$

где ψ обозначает \vec{E} или \vec{B} .

Рассмотрим электромагнитное поле, зависящее только от времени и одной из координат, например x . Такое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (41.06)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (41.07)$$

где f и g — произвольные функции¹⁾. Действительно, если введем новые переменные $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$, то

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

откуда и следует (41.07).

Решение $\psi = f(x - ct)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся со скоростью c в положительном направлении оси x . В момент $t = 0$ поле во всех точках произвольно выбранной плоскости x_0 имеет одно и то же значение $f(x_0)$ (поэтому волна называется плоской). С течением времени поле в плоскости x_0 будет изменяться, а значение $f(x_0)$ перейдет к моменту t в другую плоскость, координата x которой удовлетворяет соотношению $x - ct = x_0$. Другими словами, плоскость x , в которой поле имеет заданное значение $f(x_0)$, будет передвигаться вдоль оси x по закону $x = x_0 + ct$.

Аналогично решение $\psi = g(x + ct)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся со скоростью c в отрицательном направлении оси x .

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Если вектор \vec{E} остается коллинеарным постоянному единичному вектору \vec{e} , то волна называется линейно-поляризованной, а вектор \vec{e} называется вектором поляризации. Плоскую линейно-поляризованную волну можно записать в форме

$$\vec{E} = \vec{e} f(x - ct). \quad (41.08)$$

Обозначим через \vec{n} единичный вектор в направлении распространения волны, совпадающий с направлением нормали к волновой по-

¹⁾ Функции f и g можно определить, если в начальный момент $t = 0$ задано поле ψ и его производная $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ как функции x .

верхности $x = \text{const}$. Очевидно, $\vec{n} = \nabla x = \nabla(x - ct)$. Пользуясь (41.01), находим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{e} \nabla f(x - ct) = f' \vec{e} \cdot \vec{n} = 0, \quad \left(f' = \frac{df}{dx} \right). \quad (41.09)$$

Из (41.09) следует, что $\vec{e} \cdot \vec{n} = 0$, то есть электрическое поле перпендикулярно к направлению распространения. То же самое следует из уравнения $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ для магнитного поля. Итак, электромагнитные волны в вакууме всегда поперечные, то есть векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны к направлению распространения.

Найдем магнитную составляющую поля. Из второй группы уравнений (41.01) и (41.08) имеем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{e} f = -[\nabla f, \vec{e}] = -[\vec{n}, \vec{e}] f'(x - ct).$$

Поэтому

$$\vec{B} = [\vec{n}, \vec{e}] f(x - ct)$$

(постоянная интегрирования взята равной нулю, поскольку рассматривается лишь переменное поле). Окончательно,

$$\vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (41.10)$$

Аналогично для вектора \vec{E} получаем

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}]. \quad (41.11)$$

Равенства (41.10) и (41.11) совпадают с соотношениями (13.01), если положить согласно (13.03) $\vec{v} = \vec{cn}$. Таким образом, в плоской электромагнитной волне электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны. При этом

зависимость \vec{E} и \vec{B} от $x - ct$ одинаковая и в каждой точке в каждый момент времени напряженности равны одна другой по величине (рис. 25).

Легко видеть, что электромагнитная волна переносит с собой энергию и импульс, причем плотности потока энергии и импульса равны соответственно:

$$\vec{s} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{cE^2}{4\pi} \vec{n} = \frac{cB^2}{4\pi} \vec{n} = cwn, \quad \vec{g} = \frac{w}{c} \cdot \vec{n}. \quad (41.12)$$

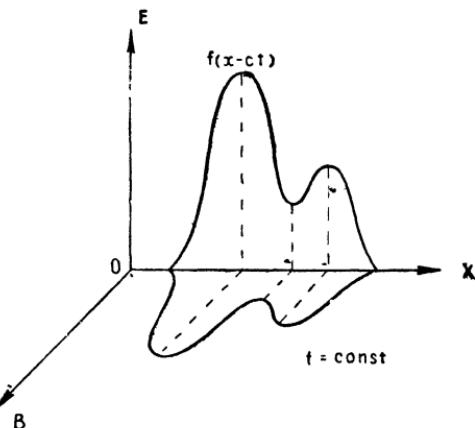


Рис. 25.

Задачи

1. Показать, что если плоская электромагнитная волна распространяется в направлении \vec{n} , не совпадающем ни с одной координатной осью, то ее уравнение можно написать в форме

$$\vec{E} = \vec{e}_f(\vec{n}\vec{r} - ct), \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}], \quad \vec{e} \cdot \vec{n} = 0.$$

Решение. Выберем направление \vec{n} за ось x' , тогда $\vec{E} = \vec{e}_f(x' - ct)$. Замечая, что $x' = \vec{n}\vec{r}$, где \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения, получим искомое уравнение.

2. Вывести уравнение (41.03).

3. Написать волновое уравнение в сферических координатах и исследовать решение, зависящее только от r и t .

Решение. Волновое уравнение в сферических координатах r, ϑ, α имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Если ψ зависит лишь от r и t , то оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Из него следует, что $r\psi = f(r - ct) + g(r + ct)$, где f и g — произвольные функции, которые надо выбрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия. Функция $f(r - ct)$ изображает сферическую волну, расходящуюся со скоростью c из начала координат по всем направлениям, а функция $g(r + ct)$ — сферическую волну, идущую из бесконечности и сжимающуюся к началу координат.

§ 42. Монохроматические плоские поляризованные волны

Волна, в которой поле меняется гармонически с некоторым периодом τ , называется монохроматической. Напряженности поля в такой волне меняются со временем по закону $\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \alpha\right)$, где α — начальная фаза. Напишем функцию $f(x - ct)$ в форме $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Тогда для монохроматической волны будем иметь

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right], \quad (42.01)$$

где \vec{E}_0 — постоянная амплитуда колебаний.

Введем циклическую частоту колебаний ω и волновое число k , определяемые равенствами

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad k = \frac{2\pi}{c\tau} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (42.02)$$

($\lambda = c\tau$ — длина волны). Согласно (42.01) и (41.10) имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}_0] \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (42.03)$$

Величина $\chi = \omega t - kx + \alpha$ называется фазой волны. Поверхность постоянной фазы $\chi = \chi_0 = \text{const}$ есть плоскость $kx = \omega t + \alpha - \chi_0$, передвигающаяся с «фазовой» скоростью $\frac{\omega}{k} = c$.

Если направление \vec{n} распространения волны не совпадает с какой-либо из осей координат, то уравнения волны (42.03) могут быть написаны в форме

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha), \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}_0] \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha). \quad (42.04)$$

Вектор

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (42.05)$$

называется волновым вектором.

В силу исторической традиции для линейно поляризованной волны плоскость, в которой лежит вектор \vec{E} , называют плоскостью колебаний, а плоскость, в которой лежит вектор \vec{B} , — плоскостью поляризации.

Часто пользуются комплексной формой уравнения монохроматической волны, которая имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (42.06)$$

Здесь $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{-i\alpha}$ — комплексный вектор. Чтобы получить (42.04), от выражения (42.06) надо взять вещественную часть.

Наряду с линейно- (или плоско-) поляризованными волнами существуют эллиптически поляризованные волны. Пусть в положительном направлении оси x одновременно распространяются две сдвинутые по фазе линейно-поляризованные волны, векторы поляризации которых \vec{e}_1 и \vec{e}_2 взаимно перпендикулярны:

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 a_1 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_2 a_2 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (42.07)$$

Если разность фаз $\alpha = 0$, то эти две волны, накладываясь, дают одну линейно-поляризованную волну с амплитудой $\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2$. Но если $\alpha \neq 0$, то в каждой точке пространства вектор напряженности \vec{E} вращается в плоскости $\vec{e}_1 \vec{e}_2$, причем его конец описывает эллипс. Полуси и ориентация эллипса определяются a_1 , a_2 и разностью фаз α . Такая волна называется эллиптически поляризованной. В частности, если $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, $\vec{E}_2 = \mp \vec{e}_2 a_2 \sin(\omega t - kx)$, а единичные векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 выбрать в качестве ортov осей y и z , то уравнение эллипса, описываемого концом вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, имеет вид

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} = 1. \quad (42.08)$$

Знаки \pm определяют направление вращения вектора \vec{E} . Эллиптическая поляризация называется правой (знак положительный), если для наблюдателя, смотрящего навстречу волне, вектор \vec{E} вращается по часовой стрелке. Поляризация называется левой, если вектор \vec{E} вращается против часовой стрелки.

Если $a_1 = a_2$, то эллипс превращается в круг (вектор \vec{E} не меняет своей величины). Такая волна называется поляризованной по кругу.

Задача

Определить расположение эллипса поляризации в случае произвольной разности фаз α .

Решение. Из (42.07) $E_z = a_2 (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha)$, где $\varphi = \omega t - kx$. Исключая фазу φ при помощи уравнения $\cos \varphi = \frac{E_y}{a_1}$, получим уравнение эллипса

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} - 2 \frac{E_y E_z}{a_1 a_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

§ 43. Общее решение волнового уравнения. Группы волн

Общее решение волнового уравнения (41.02) или (41.03) можно представить в форме наложения (суперпозиции) плоских монохроматических линейно-поляризованных волн с различными волновыми векторами \vec{k} , частотами $\omega = ck$ и направлениями поляризации

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (43.01)$$

Подобное разложение называется спектральным. Так как \vec{k} меняется, вообще говоря, непрерывно, вместо суммы следует писать трехкратный интеграл Фурье по всем трем составляющим вектора \vec{k} (по \vec{k} -пространству). Если потребовать, чтобы поле было вещественным, надо брать сумму (43.01) и комплексно сопряженной величины. Итак,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (d\vec{k}) \{ \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \}. \quad (43.02)$$

Здесь $\vec{E}(\vec{k})$ — комплексная амплитуда, \vec{E}^* — сопряженная величина, $(d\vec{k}) = dk_x dk_y dk_z$ — элемент объема в \vec{k} -пространстве. Аналогично пишется спектральное разложение магнитного поля.

Монохроматические плоские волны (42.06) не ограничены в пространстве и времени, поэтому они являются математической абстракцией, реализующейся с некоторым приближением. В природе источники излучают волновое поле всегда за конечное время. Поэтому поле всегда занимает конечную часть пространства. В этом случае говорят

о волновом пакете или группе волн. Группу волн всегда можно представить в форме спектрального разложения (43.02) по плоским волнам. Эти волны, налагаясь друг на друга, создают в данный момент в определенном объеме некоторое суммарное поле, а вне этого объема интерферируют так, что полностью гасят друг друга.

Пусть поле ψ (то есть \vec{E} или \vec{B}) представляется группой плоских волн, распространяющихся вдоль оси x ,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (43.03)$$

Амплитуда $\psi(k)$ равна

$$\psi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) e^{-i(kx - \omega t)} dx. \quad (43.04)$$

Последнее выражение легко получается из (43.03), если умножить (43.03) на $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-ik'x}$, проинтегрировать по всем x от $-\infty$ до $+\infty$ и учесть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k'). \quad (43.05)$$

Допустим, что волновые числа накладывающихся монохроматических волн лежат в интервале $k_0 - \frac{\Delta k}{2} \leq k \leq k_0 + \frac{\Delta k}{2}$, где $\Delta k \ll k_0$, а амплитуда $\psi(k) = \psi_0$ — одна и та же для всех k из этого интервала и равна нулю вне его. Так как Δk мало, то частоту ω , которая есть функция k , можно разложить в ряд по степени $k - k_0$

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (k - k_0) + \dots, \quad \omega_0 = \omega(k_0). \quad (43.06)$$

Теперь интеграл (43.03) дает

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{\psi_0}{(2\pi)^{1/2}} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(kx - \omega t)} dk = \\ &= \frac{\psi_0}{(2\pi)^{1/2}} e^{i(k_0 x - \omega t)} \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{+\frac{\Delta k}{2}} e^{i[x - (\frac{d\omega}{dk})_0 t] \xi} d\xi = \\ &= \frac{\psi_0 \Delta k}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sin \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2}}{\left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}, \end{aligned} \quad (43.07)$$

где $\xi = k - k_0$. Это есть «модулированная» плоская волна со средней «несущей» частотой ω_0 и соответствующим ей волновым числом k_0 . Но амплитуда волны

$$a(x, t) = \frac{\psi_0 \Delta k}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sin \chi}{\chi}, \quad \chi = \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2} \quad (43.08)$$

уже не постоянна в пространстве и времени. Она имеет резкий максимум при $\chi = 0$, то есть $x = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t$ (рис. 26). Это значит, что максимум $a(x, t)$ движется равномерно с так называемой групповой скоростью

$$v = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0. \quad (43.09)$$

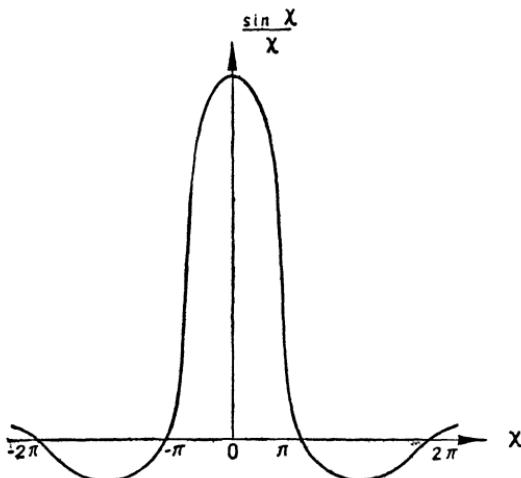


Рис. 26.

В случае волн в вакууме $\omega = ck$ и $v = c$, то есть групповая скорость совпадает с фазовой. При более сложной зависимости ω от k групповая скорость будет отлична от фазовой (см. гл. VIII):

Из рисунка 26 видно, что множитель a существенно отличен от нуля лишь в области первого максимума; он обращается в нуль

при $\chi = \Delta\chi = \pi$ и затем колеблется с быстро уменьшающейся амплитудой. Для момента t область Δx , в которой поле ψ существенно отлично от нуля, определяется из условия $\Delta\chi = \Delta x \cdot \frac{\Delta k}{2} \geq \pi$. Откуда $\Delta x \Delta k \geq 2\pi$. Аналогично при данном x длительность Δt группы волн во времени определяется из условия $|\Delta\chi| = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 \Delta t \frac{\Delta k}{2} \geq \pi$. Так как $\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 \Delta k = \Delta\omega$, то $\Delta\omega \Delta t \geq 2\pi$. Таким образом,

$$\Delta x \Delta k \geq 2\pi, \quad \Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi. \quad (43.10)$$

Эти «соотношения неопределенности» показывают, что чем меньше область пространства, в которой локализована группа волн, тем шире интервал волновых чисел этой группы; чем меньше длительность Δt группы волн, тем шире ее интервал частот.

§ 44. Скалярный и векторный электромагнитные потенциалы

Вернемся к вопросу о вычислении электромагнитного поля произвольно движущихся электрических зарядов. В общем случае электромагнитное поле заданного распределения заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ характеризуется уравнениями Максвелла — Лоренца

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{array} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{array} \right\} \text{(II)} \quad (44.01)$$

причем

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (44.02)$$

Так как ρ и \vec{j} отличны от нуля, то при выводе волновых уравнений с помощью (44.01) появятся производные от ρ и \vec{j} . Поэтому для определения поля по заданным ρ и \vec{j} обычно пользуются электромагнитными потенциалами, которые являются обобщением электростатического потенциала φ и векторного потенциала \vec{A} (гл. II) на случай переменного электромагнитного поля.

Рассмотрим вторую группу уравнений (44.01). Из $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ следует, что магнитное поле вихревое и можно положить

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (44.03)$$

Вектор \vec{A} зависит от координат и времени и называется электромагнитным векторным потенциалом. Подставив (44.03) в первое уравнение, находим

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ — потенциальный вектор, который можно положить равным $-\operatorname{grad} \varphi$. Таким образом,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (44.04)$$

Скаляр φ , зависящий от координат и времени, называется электромагнитным скалярным потенциалом.

Из (44.04) видно, что электрическое поле в общем случае определяется не только скалярным, но и векторным потенциалом \vec{A} . Член $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ определяет вихревую часть электрического поля, или, другими словами, его индукционную часть, циркуляция которой

(работа переноса единичного заряда) по замкнутому контуру отлична от нуля. Если \vec{A} не зависит от времени, то (44.04) переходит в уравнение (26.01) для статического электрического поля.

Чтобы определить потенциалы φ и \vec{A} , подставим (44.03) и (44.04) в уравнения (44.01). Замечая, что $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \\ &+ \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 4\pi\rho. \end{aligned} \right\} \quad (44.05)$$

Для разделения неизвестных введем дополнительное условие Лоренца (условие калибровки)

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (44.06)$$

Это условие обобщает условие (34.05) для векторного потенциала стационарного магнитного поля.

Возможность наложения условия (44.06) вытекает из того, что потенциалы полем определены неоднозначно. Действительно, электромагнитные потенциалы можно подвергнуть градиентному преобразованию

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (44.07)$$

(χ — произвольная функция координат и времени), при котором напряженности не изменяются,

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \\ \vec{E}' &= -\nabla \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \end{aligned}$$

Учитывая, что непосредственно измеряются только \vec{E} и \vec{B} , а потенциалы φ и \vec{A} имеют вспомогательный характер и непосредственно не измеряются, всегда можно выбрать функцию так, что будет выполнено условие Лоренца (44.06). В этом случае уравнения (44.05) принимают вид

$$\square^2 \vec{A} \equiv \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(r, t), \quad (44.08)$$

$$\square^2 \varphi \equiv \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(r, t). \quad (44.09)$$

Уравнения (44.08) и (44.09) являются обобщением уравнений Пуасона (27.01) и (34.06) и переходят в последние, если ρ и \vec{j} не зависят от времени. Они называются неоднородными уравнениями Даламбера или неоднородными волновыми уравнениями. При $\vec{j} = 0$ и $\rho = 0$ эти уравнения обращаются в обычные волновые уравнения.

Задачи

1. Доказать, что \vec{E} и \vec{B} удовлетворяют однородным волновым уравнениям, если этим уравнениям удовлетворяют \vec{A} и φ .

2. Показать, что при $\rho = 0$, $j = 0$ для электромагнитных потенциалов можно выбрать калибровку

$$\varphi = 0, \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

и получить результаты § 41. Показать, что поперечность электромагнитных волн вытекает из условия калибровки.

Решение. Очевидно, что условия $\varphi = 0, \operatorname{div} \vec{A} = 0$ сразу разделяют переменные в (44.05) и приводят к волновому уравнению для \vec{A} . Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , получим $\vec{A} = \vec{A}(x - ct)$. Далее, $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$. Следовательно, $A_x = 0$, то есть волна поперечная.

3. Показать, что для монохроматической плоской волны

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

имеют место соотношения

$$\vec{E} = ik \vec{A}, \quad \vec{B} = i[\vec{k}, \vec{A}].$$

4. Показать, что при условии (44.06) скалярный и векторный потенциалы монохроматической волны связаны соотношением $\vec{k} \cdot \vec{A} - \frac{\omega}{c} \varphi = 0$, которое приводит к поперечности волн.

5. Показать, что условие калибровки автоматически удовлетворяется, если φ и \vec{A} выразить через вектор Герца («поляризационный потенциал») \vec{Z} :

$$\varphi = -\operatorname{div} \vec{Z}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}.$$

6. Показать, что вектор Герца будет удовлетворять уравнению

$$\square \vec{Z} = -4\pi \vec{P},$$

если согласно закону сохранения заряда положить

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

(\vec{P} имеет смысл вектора электрической поляризации, то есть дипольного момента единицы объема).

§ 45. Запаздывающие и опережающие потенциалы

Определение электромагнитного поля по заданному распределению заряда и тока сводится к нахождению частных решений неоднородных волновых уравнений (44.08) и (44.09). Для определения потенциала воспользуемся методом, примененным в § 27: определим потенциал φ , создаваемый достаточно малым, квазиточечным источником, а затем, пользуясь принципом суперпозиции, определим потенциал произвольного распределения заряда.

Предположим, что плотность заряда во всем пространстве, кроме точки $Q(\vec{r}')$, равна нулю, а в точке $Q(\vec{r}')$ находится меняющийся со временем заряд $e(t)$. Тогда плотность заряда можно написать в форме $\rho(\vec{r}, t) = e(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Наше предположение противоречит закону сохранения заряда, однако вычисление поля переменного точечного источника имеет лишь вспомогательный характер — окончательный результат, полученный применением принципа суперпозиции, удовлетворяет закону сохранения заряда.

Потенциал переменного точечного источника удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi e(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (45.01)$$

Очевидно, что потенциал точечного заряда должен быть сферически симметричен и можно положить $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(R, t)$, где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ — расстояние точки наблюдения $A(\vec{r})$ от источника $Q(\vec{r}')$. Поэтому, написав ∇^2 в сферических координатах и учитывая, что $\rho = 0$ вне точки Q , получим

$$\frac{\partial^2 R\varphi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 R\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением (41.06). Поэтому его общий интеграл имеет вид $R\varphi = f\left(t - \frac{R}{c}\right) + g\left(t + \frac{R}{c}\right)$, откуда

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{g\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Рассмотрим сначала частное решение

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \quad (45.02)$$

Определим функцию f . Заметим, что при $R = 0$ должно удовлетворяться уравнение (45.01). При $R \rightarrow 0$ потенциал неограниченно возрастает и $\nabla^2 \varphi$ возрастает значительно быстрее, чем $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Поэтому

уравнение (45.01) переходит в уравнение для кулоновского потенциала

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e(t) \delta(\vec{R}).$$

Таким образом, при $R \rightarrow 0$ потенциал (45.02) должен переходить в кулоновский потенциал $\frac{e(t)}{R}$; поэтому $f(t) = e(t)$ и

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e(t - \frac{R}{c})}{R}. \quad (45.03)$$

Это значит, что потенциал в момент t в точках, находящихся на расстоянии R от заряда, определяется не величиной заряда $e(t)$, а величиной $e(t')$, где $t' = t - \frac{R}{c}$. Другими словами, поле заряда e распространяется из точки $Q(\vec{r}')$ в виде сферической волны, расширяющейся со скоростью $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, и достигает точки $A(\vec{r})$ не мгновенно, а запаздывая на время $t - t' = \frac{R}{c}$. Поэтому потенциал (45.03) называется запаздывающим.

Второе частное решение уравнения (45.01) приводит к опережающему потенциалу

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e(t + \frac{R}{c})}{R}, \quad (45.04)$$

определяющему потенциал в точке $A(\vec{r})$ в момент t через значение заряда в момент $t + \frac{R}{c}$.

Выбор одного из двух решений определяется начальными условиями задачи. Если дано распределение заряда ρ в пространстве для $t \geq 0$, дан потенциал φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ для момента $t = 0$ во всем пространстве, а требуется отыскать потенциал в любой момент $t > 0$, то решение уравнения (45.01) определяется однозначно в виде запаздывающего потенциала. Если дано ρ для $t \leq 0$, а надо определить потенциал φ для $t \geq 0$, то однозначным решением (45.01) будет опережающий потенциал.

Таким образом асимметрия решения во времени, содержащаяся в (45.03) или (45.04), есть следствие постановки задачи, известной под названием задачи Коши: даны начальные (или конечные) условия, требуется определить значения потенциала в будущем (или в прошлом). Исходные дифференциальные уравнения электродинамики (44.08) и (44.09) не содержат временной асимметрии, они полностью обратимы во времени.

Перейдем к общему случаю меняющегося со временем произвольного распределения заряда и тока. Бесконечно малый заряд

$d\varphi' = \rho(\vec{r}', t') dV'$, находящийся в элементе объема dV' около точки $Q(\vec{r}')$, создает в точке $A(\vec{r})$ в момент t согласно (45.03) запаздывающий потенциал

$$d\varphi(\vec{r}, t) = \frac{d\varphi'}{R} = \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV,$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ — расстояние QA . Полный потенциал в точке A равен

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_{(V')} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) dV'}{R}, \quad (45.05)$$

где интегрирование производится по всему пространству, точнее, по всем точкам $Q(\vec{r}')$, которые имели заряд в соответствующий «эффективный» момент

$$t' = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \quad (45.06)$$

Уравнение для векторного потенциала (44.08) по форме совпадает с уравнением для φ . Поэтому его решение может быть также представлено в форме запаздывающего потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV'. \quad (45.07)$$

Чтобы получить общий интеграл неоднородного волнового уравнения, надо к частному решению неоднородного уравнения прибавить общий интеграл однородного уравнения. Последний можно взять в форме суммы плоских волн, как это сделано в § 43. Выбирая соответствующим образом амплитуды волн, можно удовлетворить заданным начальным условиям.

Задачи

1. Показать, что запаздывающий потенциал (45.05) удовлетворяет уравнению (44.09).

Решение. Обозначив $\rho' = \rho(\vec{r}', t')$, где $t' = t - \frac{R}{c}$, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, имеем

$$\nabla^2 \varphi = \int dV' \nabla^2 \frac{\rho'}{R} = \int dV' \left\{ \rho' \nabla^2 \frac{1}{R} + 2\nabla \frac{1}{R} \cdot \nabla \rho' + \frac{1}{R} \nabla^2 \rho' \right\}.$$

Но

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \nabla \rho' = \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\vec{R}}{R} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial t},$$

$$\nabla^2 \rho' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t'^2} - \frac{2}{cR} \frac{\partial \rho'}{\partial t}.$$

поэтому

$$\nabla^2 \varphi = \int dV' \left\{ \rho' \nabla^2 \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \right\}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int \frac{dV'}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}.$$

Поэтому

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int \rho' \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = -4\pi\rho(\vec{r}, t),$$

так как по (4.11)

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R}) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

2. Доказать, что потенциалы (45.05) и (45.07) удовлетворяют условию калибровки (44.06).

Решение. Введем $\vec{j}' = \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{div} \frac{\vec{j}'}{R} dV' = \frac{1}{c} \int \left(\vec{j}' \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j}' \right) dV'.$$

Здесь $\operatorname{div} \vec{j}' = \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla R$. Перейдем от дифференцирования по координатам точки A к дифференцированию по координатам \vec{r}' точки Q . Пользуясь равенством $\nabla = -\nabla'$, имеем

$$\operatorname{div} \vec{j}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla R = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla' R = -\{\operatorname{div}' \vec{j}' - (\operatorname{div}' \vec{j}')_{t'} = \text{const}\}.$$

Последняя дивергенция берется при $t' = t - \frac{R}{c} = \text{const}$. Теперь

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\vec{j}' \nabla' \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \nabla' \vec{j}' + \frac{1}{R} (\nabla' \vec{j}')_{t' = \text{const}} \right\} dV' = \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\operatorname{div}' \frac{\vec{j}'}{R} + \frac{(\operatorname{div}' \vec{j}')_{t'}}{R} \right\} dV'. \end{aligned}$$

Первый член равен нулю, так как может быть преобразован по формуле Остроградского в интеграл по поверхности, охватывающей все поле, на которой $j'_n = 0$. Так как

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int \frac{1}{R} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dV',$$

то

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} \left\{ (\operatorname{div}' \vec{j}')_{t' = \text{const}} + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \right\} dV'.$$

Следовательно, условие (44.06) выполнено, если ρ' и \vec{j}' удовлетворяют закону сохранения заряда.

3. Доказать, что если \vec{P} (плотность поляризации некоторого объема) меняется со временем, то вектор Герца (задачи 5, 6, § 45) равен

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \int \frac{\vec{P}(\vec{r}', t')}{R} dV', \quad t' = t - \frac{R}{c}.$$

§ 46. Запаздывающие потенциалы на большом расстоянии от системы зарядов

Вычисление запаздывающих потенциалов по формулам (45.05) и (45.07) затруднено тем, что интегрирование производится по зарядам ρ' и токам \vec{j}' , взятым в различные моменты времени $t' = t - \frac{R}{c}$. Значительное упрощение получается в двух предельных случаях: 1) если расстояние от точки наблюдения до системы, создающей поле, велико по сравнению с размерами системы и 2) если имеется движущийся точечный или квазиточечный заряд. Рассмотрим первый случай.

Пусть начало O системы отсчета выбрано внутри области, занятой системой зарядов, а \vec{r} и \vec{r}' — радиус-векторы точки наблюдения A и элемента объема dV' . Если размеры системы малы по сравнению с r , то есть $r' \leq a \ll r$, то потенциалы можно разлагать в ряд по степеням $\frac{a}{r}$. Этот метод был уже применен в § 28 и 36 для исследования стационарных полей.

Введем единичный вектор $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, тогда

$$R^2 = (\vec{r} - \vec{r}')^2 = r^2 + r'^2 - 2r(\vec{r} \cdot \vec{r}').$$

Разлагая R и $\frac{1}{R}$ в ряд по $\frac{r'}{r}$, получим

$$R = [r^2 - 2r(\vec{r} \cdot \vec{n}) + r'^2]^{\frac{1}{2}} = r - (\vec{r} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2r} [r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2] + \dots \quad (46.01)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{2r^3} [-r'^2 + 3(\vec{r} \cdot \vec{n})^2] - \dots \quad (46.02)$$

Будем вести разложение R до членов порядка $\frac{1}{r}$ включительно. Подставим R в выражение для плотности заряда $\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})$, которое разложим в ряд по степеням $\frac{r'}{r}$:

$$\begin{aligned} \rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) &= \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2}{2cr} + \dots\right) = \\ &= \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}') + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2}{2r} \right\} \frac{\dot{\rho}'}{c} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2 + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2}{r} (\vec{n} \cdot \vec{r}') \right\} \frac{\ddot{\rho}'}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

Здесь через ρ' обозначено ρ в момент $t' = t - \frac{r}{c}$, $\dot{\rho}'$ обозначает $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Разделив это разложение на R , получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho \left(\vec{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} &= \frac{1}{r} \left\{ \rho' + \frac{(\vec{n} \vec{r}')}{c} \dot{\rho}' + \frac{(\vec{n} \vec{r}')^2}{2c^2} \ddot{\rho}' + \dots \right\} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left\{ (\vec{n} \vec{r}') \rho' + \frac{3(\vec{n} \vec{r}')^2 - r'^2}{2c} \dot{\rho}' + \dots \right\} + \dots \quad (46.03) \end{aligned}$$

Разложение вектора $\frac{\vec{j}}{R}$ аналогично (46.03):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} &= \frac{1}{r} \left\{ \vec{j}' + \frac{\vec{n} \vec{r}'}{c} \dot{\vec{j}'} + \frac{(\vec{n} \vec{r}')^2}{2c^2} \ddot{\vec{j}'} + \dots \right\} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left\{ (\vec{n} \vec{r}') \vec{j}' + \frac{3(\vec{n} \vec{r}')^2 - r'^2}{2c} \dot{\vec{j}'} + \dots \right\}. \quad (46.04) \end{aligned}$$

Подставив (46.03) в (45.05) и вынеся операцию дифференцирования по времени за знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{r} \int \rho' dV' + \frac{\vec{n}}{cr} \frac{d}{dt} \int \vec{r}' \rho' dV' + \\ &+ \frac{1}{2rc^2} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{d^2}{dt^2} \int x'_\alpha x'_\beta \rho' dV' + \frac{\vec{n}}{r^2} \int \vec{r}' \rho' dV' + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \int \frac{3(\vec{n} \vec{r}')(\vec{n} \vec{r}') - r'^2}{2c} \rho' dV' + \dots \quad (46.05) \end{aligned}$$

Здесь $\int \rho' dV' = e$ есть полный заряд системы, а $\int \vec{r}' \rho' dV' = \vec{p}'$ согласно (29.02) есть дипольный момент системы, взятый в момент времени $t' = t - \frac{r}{c}$. Третий член приводится к квадрупольному моменту. Действительно, поле не изменится, если над потенциалами произвести градиентное преобразование с помощью некоторой функции χ , которую выберем равной

$$\chi = \frac{1}{2cr} \frac{d}{dt} \int \frac{r'^2}{3} \rho' dV'. \quad (46.06)$$

Приведем третий член (46.05), вычитая из него $\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$ и замечая, что $1 = n^2 = \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \delta_{\alpha\beta}$, к виду

$$\frac{1}{6r} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho' dV'.$$

Стоящая под знаком производной величина есть согласно (30.02) компонента $Q_{\alpha\beta}$ квадрупольного момента, взятая в момент времени $t' = t - \frac{r}{c}$. Выражение для потенциала принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{r} \left\{ e + \frac{\vec{n} \vec{p}'}{c} + \frac{1}{6c^2} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \ddot{Q}'_{\alpha\beta} + \dots \right\} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left\{ \vec{n} \vec{p}' + \frac{1}{3c} \left(\sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \dot{Q}'_{\alpha\beta} - \sum_\alpha \dot{Q}'_{\alpha\alpha} \right) + \dots \right\} + \dots \quad (46.07)\end{aligned}$$

Первые члены фигурных скобок — известные из второй главы потенциалы точечного заряда и диполя. Члены, обратно пропорциональные r , называются радиационными мультипольными потенциалами, так как они медленнее других членов убывают с расстоянием и определяют поле изучения (радиации) рассматриваемой системы. Член

$$\varphi_{\text{дип.}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n} \vec{p}'}{cr} \quad (46.08)$$

называется скалярным дипольным радиационным потенциалом, а член

$$\varphi_{\text{кв.}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \ddot{Q}'_{\alpha\beta} = \frac{\vec{n}^{(2)} \vec{Q}' \vec{n}}{c^2 r} \quad (46.09)$$

— скалярным квадрупольным радиационным потенциалом.

Векторный потенциал преобразуется аналогично (46.07). Подставим разложение (46.04) в (46.07). Вынося операцию дифференцирования по времени за знак интегрирования, получим

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int \vec{j}' dV' + \frac{1}{c^2 r} \frac{d}{dt} \int (\vec{n} \vec{r}') \vec{j}' dV' + \\ &+ \frac{1}{cr^2} \int (\vec{n} \vec{r}') \vec{j}' dV' + \dots \quad (46.10)\end{aligned}$$

Первый член (46.10) аналогичен первому члену в (36.01). Но в рассматриваемом случае ток \vec{j}' — переменный (может быть не замкнутым). Поэтому интеграл $\int \vec{j}' dV'$ не исчезает. Преобразуем его следующим образом:

$$\int \vec{j}' dV' = \sum_a e_a \vec{v}'_a = \frac{d}{dt} \sum_a e_a \vec{r}'_a = \frac{d \vec{p}'}{dt} = \dot{\vec{p}}'.$$

Первый член (46.10)

$$\vec{A}_{\text{дип.}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}' dV = \frac{\dot{\vec{p}}'}{cr} \quad (46.11)$$

есть так называемый векторный дипольный радиационный потенциал. Второй член (46.10) преобразуется аналогично преобразованию второго члена в (36.01)

$$\frac{1}{c} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' = \frac{1}{2c} \int \{\vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{j}'\vec{n})\} dV' + \\ + \left[\frac{1}{2c} \int [\vec{r}', \vec{j}'] dV', \vec{n} \right].$$

В этом выражении первый член правой части преобразуем, перейдя к точечным зарядам.

$$\frac{1}{2} \int \{\vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{j}'\vec{n})\} dV' = \frac{1}{2} \sum_a e_a \{\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{n}) + \vec{r}_a(\vec{v}_a\vec{n})\} = \\ = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_a e_a \vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{n}) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int \vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) \rho' dV'.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' = \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int \vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) \rho' dV' + [\vec{m}', \vec{n}'].$$

Здесь согласно (36.06) \vec{m}' — магнитный дипольный момент системы, взятый в момент t' . Поэтому

$$\frac{1}{c^2 r} \frac{d}{dt} \int \vec{j}'(\vec{r}\vec{n}) dV' = \frac{1}{2c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) \rho' dV' + \frac{1}{cr} [\vec{m}', \vec{n}]. \quad (46.12)$$

Первый член (46.12) содержит часть квадрупольного момента. Его можно преобразовать, учитывая, что нами было сделано калибровочное преобразование с функцией χ (46.06). К векторному потенциалу согласно (44.07) надо добавить $\text{grad } \chi$.

$$\text{grad } \chi = -\frac{1}{2c} \frac{\vec{n}}{r^2} \frac{d}{dt} \int \frac{\vec{r}'^2}{3} \rho' dV' - \frac{\vec{n}}{2c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \frac{\vec{r}'^2}{3} \rho' dV',$$

так как $\nabla \rho' = \dot{\rho}' \nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c} \dot{\rho}'$, $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$. Первый член складывается с первым членом второй фигурной скобки в выражении для \vec{A} ; второй член складывается с первым членом в (46.12) и образует вторую производную от тензора $Q_{\alpha\beta}$ квадрупольного момента:

$$\frac{1}{c^2 r} \frac{d}{dt} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' + \nabla \chi = \frac{1}{6c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \{3\vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) - \vec{r}'^2 \vec{n}\} \rho' dV' + \\ + \frac{1}{cr} [\vec{m}', \vec{n}] + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Интеграл, стоящий под знаком $\frac{d^2}{dt^2}$, равен, очевидно, произведению $\vec{n}^{(2)}Q$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{r} \left\{ \frac{\dot{\vec{p}}'}{c} + \frac{\vec{n}^{(2)}\ddot{Q}'}{6c^2} + \frac{[\dot{\vec{m}}, \vec{n}]}{c} + \dots \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{[\vec{m}', \vec{n}]}{c} + \frac{\vec{n}^{(2)}\dot{Q}'}{c} + \dots \right\} + \dots \quad (46.13)\end{aligned}$$

Первый член в первой фигурной скобке, как уже указано, есть дипольный радиационный потенциал; второй

$$\vec{A}_{\text{кв.}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}^{(2)}\ddot{Q}'}{6c^2r} \quad (46.14)$$

есть векторный квадрупольный радиационный потенциал; третий член

$$\vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{[\dot{\vec{m}}, \vec{n}]}{cr} \quad (46.15)$$

есть магнитный радиационный потенциал. Заметим, что имеют место соотношения

$$\varphi_{\text{дип.}} = \vec{n}\vec{A}_{\text{дип.}}, \quad \varphi_{\text{кв.}} = \vec{A}_{\text{кв.}}\vec{n}. \quad (46.16)$$

Первый член во второй фигурной скобке есть магнитный дипольный потенциал, взятый в момент t' .

Рассмотрим условия применимости нашего разложения. Если a — размеры области, занятой зарядами, то $p \sim ea$, ${}^{(2)}Q \sim ea^2$ и т. д. Соответствующие производные будут иметь порядки $\dot{p} \sim \frac{ea}{\tau}$, ${}^{(2)}\ddot{Q} \sim \frac{ea^2}{\tau^2}$, где τ — некоторое характеристическое время изменения системы. Если моменты меняются периодически, то τ есть период колебаний; если моменты меняются непериодически, то τ есть время, в течение которого они меняются заметным образом, например на порядок своей величины. В фигурных скобках в выражениях (46.07) и (46.13) мультипольные моменты делятся на различные степени скорости c и мы можем заключить, что в этих скобках производится разложение по степеням параметра $\frac{a}{c\tau}$. Разложение, очевидно, применимо, если

$$\frac{a}{c\tau} \ll 1. \quad (46.17)$$

Критерий (46.17) означает, что для применимости разложения надо, чтобы характеристическое время τ было велико по сравнению

со временем $\frac{a}{c}$ распространения поля через систему, то есть чтобы за время τ мультипольные моменты менялись незначительно. В случае периодического изменения моментов $ct = \lambda$ есть длина волны излучения. Поэтому (46.17) принимает вид

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1, \quad (46.18)$$

то есть размеры излучающей системы должны быть малы по сравнению с длиной волны излучения.

Заметив, что $a \sim vt$, где v есть скорость движения зарядов, можно написать критерий (46.17) в форме

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad (46.19)$$

показывающей, что разложение применимо, если скорость зарядов мала по сравнению со скоростью света.

Если (46.17) имеет место, то в фигурных скобках (46.13) можно ограничиться первыми членами разложения. Следующие члены будут играть главную роль, если в силу особо симметричного распределения заряда в системе первые члены исчезают. Если при этом

$$r \gg \lambda \gg a, \quad (46.20)$$

то членами порядка $\frac{1}{r^2}$ и высшими вообще можно пренебречь и рассматривать только радиационное поле. Область на больших расстояниях, для которой выполнено (46.20), называется волновой зоной; область, для которой имеет место $r \leq \lambda$, называется статической.

Задачи

1. Показать, что для точечного диполя вектор Герца (см. задачу § 45) равен

$$\vec{Z} = \frac{\vec{p}(t')}{r}.$$

2. Вывести дипольные радиационные потенциалы (46.08) и (46.11), пользуясь вектором Герца из предыдущей задачи.

§ 47. Электрическое дипольное излучение (диполь Герца)

Рассмотрим поле, соответствующее радиационным дипольным потенциалам. Допустим, что в начале координат расположен переменный во времени диполь с моментом $\vec{p}(t)$. Поле такого диполя впервые было изучено Генрихом Герцем (1887) и поэтому часто

пользуются термином «диполь Герца». Согласно (46.07) и (46.13) потенциалы переменного диполя определяются формулами

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n} \dot{\vec{p}'}}{cr} + \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}'}}{cr}. \quad (47.01)$$

Штрих у дипольного момента обозначает, что последний берется в момент времени $t' = t - \frac{r}{c}$. Дипольный статический член сохранен в выражении для φ , чтобы рассмотреть поле в статической зоне.

Поле вычисляется по формулам (44.03) и (44.04)

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (47.02)$$

При дифференцировании по координатам следует учитывать, что \vec{r} входит не только явно, но и неявно через t' . Поэтому

$$\nabla f(t') = \frac{df}{dt'} \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{df}{dt'} \vec{n}, \quad (47.03)$$

так как $\nabla r = \vec{n}$ и $\nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c}$. Вычислим сперва магнитное поле

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \frac{\dot{\vec{p}'}}{cr} = \frac{1}{c} \left[\nabla, \frac{\dot{\vec{p}'}}{r} \right] = \frac{1}{c} \left[\nabla \frac{1}{r}, \dot{\vec{p}'} \right] + \frac{1}{c} [\nabla r, \ddot{\vec{p}'}],$$

то есть

$$\vec{B} = \frac{[\dot{\vec{p}'}, \vec{n}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{\vec{p}'}, \vec{n}]}{c^2 r}. \quad (47.04)$$

Первый член (47.04) есть квазистационарное магнитное поле, соответствующее полю Био — Савара (7.03). Отличие состоит лишь в том, что учитывается запаздывание и ток выражен через производную по времени от дипольного момента. Второй член есть радиационное магнитное поле.

Рассмотрим электрическое поле. Вычислим $\nabla \varphi$ и $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

$$\nabla \varphi = \nabla \left(\frac{\vec{n} \dot{\vec{p}'}}{cr} + \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2} \right) = \left\{ \nabla \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{n} \dot{\vec{p}'}}{c} + \frac{\nabla (\vec{n} \dot{\vec{p}'})}{cr} \right\} + \nabla \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2}. \quad (47.05)$$

Но

$$\begin{aligned} \nabla (\vec{n} \dot{\vec{p}'}) &= \nabla \left(\frac{\vec{r} \dot{\vec{p}'}}{r} \right) = -\frac{\vec{r} (\vec{r} \dot{\vec{p}'})}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}'}}{r} + (\vec{n} \ddot{\vec{p}'}) \nabla r' = \\ &= \frac{\dot{\vec{p}'}}{r} - \frac{\vec{n} (\vec{n} \dot{\vec{p}'})}{r} - \frac{\vec{n} (\vec{n} \ddot{\vec{p}'})}{c}. \end{aligned}$$

Последний член в (47.05) есть поле диполя (см. § 29) плюс добавочный член, возникающий вследствие наличия \vec{r} в выражении для t'

$$\nabla \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2} = \frac{\vec{p}' - 3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}')}{r^3} - \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2} \cdot \frac{\vec{n}}{c}.$$

Поэтому (47.05) приводится к виду

$$\nabla \varphi = -\frac{\vec{n}(\vec{n} \vec{p}')}{c^2 r} + \frac{\vec{p}' - 3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}')}{cr^2} + \frac{\vec{p}' - 3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}')}{r^3}.$$

Далее,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{p}'}{cr} = \frac{\ddot{\vec{p}'}}{c^2 r},$$

поэтому

$$\vec{E} = \frac{\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \ddot{\vec{p}'}}{c^2 r} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \dot{\vec{p}'}}{cr^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \vec{p}'}{r^3}. \quad (47.06)$$

Первый член (47.06) есть радиационное поле; последний — поле электрического диполя с учетом того, что поле в момент t в точке \vec{r} определяется значением дипольного момента в предшествующий момент $t' = t - \frac{r}{c}$; средний член дает добавочное поле, исчезающее при $\vec{p}' = 0$.

Итак, поле переменного диполя можно разложить на два поля: квазистатическое и радиационное. Квазистатическое поле диполя равно

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{дип.}} &= \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \dot{\vec{p}'}}{cr^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \vec{p}'}{r^3}, \\ \vec{B}_{\text{дип.}} &= \frac{[\vec{p}', \vec{n}]}{cr^2}. \end{aligned} \right\} \quad (47.07)$$

Магнитное поле перпендикулярно к \vec{n} и \vec{p}' . Электрическое поле, зависящее от \vec{p}' , лежит в плоскости \vec{p}', \vec{n} . Поэтому эти электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны в любой точке пространства. Полное поле $\vec{E}_{\text{дип.}}$ будет перпендикулярно к $\vec{B}_{\text{дип.}}$ лишь в том случае, когда \vec{p}' параллельно \vec{p}' .

Радиационное поле переменного диполя выражается формулами

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \ddot{\vec{p}'}}{c^2 r} = \frac{1}{c^2 r} [[\vec{p}', \vec{n}] \vec{n}], \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2 r} [\vec{p}', \vec{n}]. \end{aligned} \right\} \quad (47.08)$$

Отсюда видно, что радиационное электромагнитное поле диполя обладает следующими свойствами:

1) Электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к радиус-вектору \vec{r} точки наблюдения относительно диполя,

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}], \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (47.09)$$

Формулы (47.09) совпадают с формулами (41.10) и (41.11) для плоской волны.

Если ввести сферическую систему координат с началом в диполе и в качестве полярной оси выбрать направление вектора \vec{p} , то электрическое поле будет направлено по меридиану в сторону возрастания полярного угла ϑ (угол между \vec{p} и \vec{n}), а магнитное поле — по параллели в сторону возрастания азимута α (рис. 27).

2) Электрическое и магнитное поля обратно пропорциональны расстоянию от переменного диполя и численно равны друг другу,

$$E = B = \frac{\ddot{p}'}{c^2 r} \sin \vartheta. \quad (47.10)$$

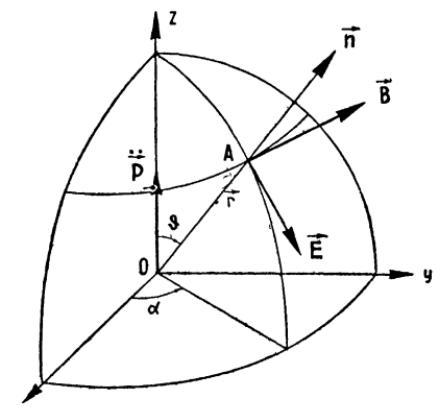


Рис. 27.

Если поле наблюдается в точке $A(\vec{r})$ в момент t , то значение \vec{p}' следует брать в момент $t' = t - \frac{r}{c}$. Это значение будет

одинаково и то же для сферы, радиус-

которой растет по закону $r = c(t - t')$. Таким образом, поверхности

постоянной «фазы» суть концентрические сферы и радиационное

поле образует сферическую волну, распространяющуюся во все

стороны от диполя со скоростью c .

Напряженности радиационного поля пропорциональны $\frac{1}{r}$. Квазистатическое поле (47.07) пропорционально $\frac{1}{r^2}$. Поэтому на больших расстояниях от диполя играет роль только радиационное поле.

Электромагнитное поле есть вид материи. Следовательно, диполь Герца непрерывно испускает по всем направлениям материю в виде электромагнитных волн. Излучаемое поле уносит с собой энергию и количество движения. Направление вектора Умова — Пойнтинга (плотности потока энергии) совпадает с направлением распространения волны в данной точке,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{[\vec{p}', \vec{n}]^2}{4\pi c^3 r^2} \cdot \vec{n} = \frac{\ddot{p}'^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n}. \quad (47.11)$$

Из (47.11) следует, что интенсивность излучения S обратно пропорциональна квадрату расстояния от диполя, равна нулю в направлениях к полюсам ($\vartheta = 0, \pi$) и достигает максимума в экваториальной плоскости ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$). Так как коэффициент при \vec{n} положителен, то вектор \vec{S} всегда направлен от переменного диполя, то есть переменный во времени диполь будет непрерывно терять энергию в виде электромагнитного излучения.

Вычислим полную энергию, излучаемую диполем в единицу времени и равную потоку \vec{S} через замкнутую поверхность, охватывающую диполь. Выберем сферу радиуса r с центром в диполе. Элемент поверхности $d\sigma = r^2 d\Omega \vec{n}$, где $d\Omega$ — телесный угол, под которым $d\sigma$ видно из начала координат. Количество энергии dJ , протекающей в единицу времени через элемент шаровой поверхности, равно

$$dJ = \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\ddot{p}'^2}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega. \quad (47.12)$$

Полная энергия, излучаемая диполем в единицу времени, получается интегрированием по всей поверхности сферы (по всему телесному углу). Так как $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$, то

$$dJ = \frac{\ddot{p}'^2}{4\pi c^3} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\alpha. \quad (47.13)$$

Интегрируя по ϑ от 0 до π , а по α — от 0 до 2π , получим

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{p}'^2. \quad (47.14)$$

Таким образом, излучаемая в единицу времени энергия определяется второй производной дипольного момента по времени. Излучаемая энергия равна нулю, если $\ddot{p}' = 0$.

Задача

Найти составляющие радиационного поля в декартовых координатах.

Решение. Выберем за ось z направление \vec{p}' (рис. 27). Согласно (47.08)

$$B_x = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{p}'_y n_z - \ddot{p}'_z n_y) = -\frac{\ddot{p}'_y}{c^2 r^2}, \quad B_y = \frac{\ddot{p}'_x}{c^2 r^2}, \quad B_z = 0.$$

$$E_x = [\vec{B}, \vec{n}]_x = \frac{\ddot{p}'}{c^2 r} \cdot \frac{xz}{r^2}, \quad E_y = \frac{\ddot{p}'}{c^2 r} \frac{yz}{r^2}, \quad E_z = -\frac{\ddot{p}'}{c^2 r} \frac{x^2 + y^2}{r^2}.$$

§ 48. Гармонически колеблющийся диполь

Применим результаты § 47 к диполю Герца, колеблющемуся гармонически,

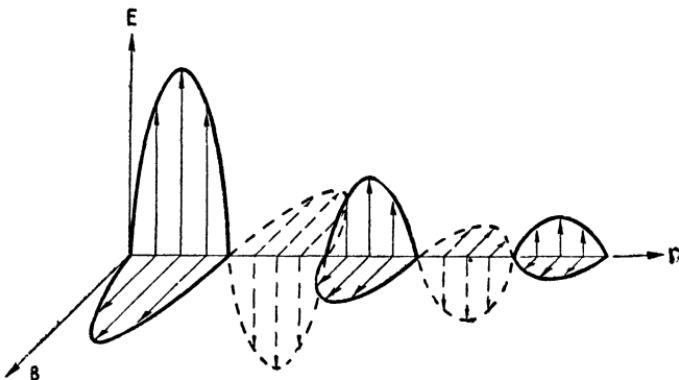
$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t. \quad (48.01)$$

Такой диполь служит простейшей моделью излучающего атома или антенны радиостанции. Если излучаемая диполем энергия непрерывно восполняется или мала по сравнению с энергией колеблющейся системы, то затуханием колебаний вследствие излучения за некоторый промежуток времени можно пренебречь. Тогда для нее применимо (48.01).

Согласно (47.10)

$$E = B = \frac{p_0 \omega^2}{c^2 r} \sin \vartheta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (48.02)$$

Отсюда следует, что частота излучения равна механической частоте колебаний диполя. Поле излучения меняется периодически во времени



с периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ и в пространстве с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально расстоянию от диполя (рис. 28).

Энергия, излучаемая в единицу времени внутрь телесного угла $d\Omega$, согласно (47.12) равна

$$d\mathcal{J} = \frac{p_0^2 \omega^4}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) d\Omega. \quad (48.03)$$

Излучение не равномерно в течение периода. В среднем по периоду оно равно

$$d\bar{\mathcal{J}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega, \quad (48.04)$$

так как $\overline{\sin^2 \omega t'} = \frac{1}{2}$. Полная энергия, излучаемая в среднем в единицу времени, получается интегрированием по всем направлениям и равна

$$\bar{\mathcal{J}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}, \quad (48.05)$$

то есть излучаемая энергия пропорциональна квадрату амплитуды дипольного момента и четвертой степени частоты колебаний. Поэтому при одинаковых амплитудах колебаний интенсивность излучения очень сильно растет с увеличением частоты.

В общем случае дипольный момент \vec{p} может меняться не гармонически. Тогда его можно разложить в ряд (или интеграл) Фурье по частотам:

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{p}_k e^{i\omega_k t}, \quad \vec{p}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{p}(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (48.06)$$

Так как \vec{p} — вещественно, то $\vec{p}_{-k} = \vec{p}_k^*$ (звездочка [*] обозначает комплексно сопряженную величину), $\omega_{-k} = -\omega_k$. В случае обыкновенного ряда Фурье $\omega_k = k\omega$, где ω — основная частота.

Вычислим среднее по времени от квадрата \vec{p} :

$$\begin{aligned} \bar{p}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k, l=-\infty}^{+\infty} \vec{p}_k \vec{p}_l \omega_k^2 \omega_l^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\omega_k + \omega_l)t} dt = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k, l} \vec{p}_k \vec{p}_l \omega_k^2 \omega_l^2 \delta(\omega_k + \omega_l), \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\omega_k + \omega_l)t} dt = \delta(\omega_k + \omega_l)$$

есть δ -функция. Таким образом, отличны от нуля лишь те члены, для которых $\omega_k + \omega_l = 0$, то есть $l = -k$, поэтому

$$\vec{p}_k \vec{p}_l = |\vec{p}_k|^2$$

и

$$\bar{p}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\vec{p}_k|^2 \omega_k^4 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |\vec{p}_k|^2 \omega_k^4. \quad (48.07)$$

Подставляя (48.07) в (47.14), получим

$$\bar{\mathcal{J}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k^2 \omega_k^4}{3c^3}, \quad (48.08)$$

то есть полная интенсивность излучения равна сумме интенсивностей отдельных гармонических составляющих.

§ 49. Квадрупольное и магнитное дипольное излучение

Если вторая производная дипольного момента системы обращается в нуль, то излучение возникает вследствие изменения квадрупольного или магнитного момента системы. В первом случае излучение называется электрическим квадрупольным, во втором — магнитным дипольным.

Рассмотрим поле излучения. На больших расстояниях $r \gg \lambda \gg a$ сферическую электромагнитную волну можно рассматривать как плоскую. Тогда согласно (41.11) электрическое поле связано с магнитным и вектором распространения волны \vec{n} соотношением

$$\vec{E} = [\vec{B}, \vec{n}]. \quad (49.01)$$

Поэтому для определения поля излучения достаточно найти магнитное поле. По (46.14) векторный квадрупольный потенциал равен

$$\vec{A}_{\text{кв.}} = \frac{\vec{n}^{(2)} \ddot{Q}'}{6c^2 r} = \frac{\ddot{\vec{Q}}'}{6c^2 r}, \quad (49.02)$$

где для удобства введен вектор

$$\vec{Q}' = \vec{n}^{(2)} Q'. \quad (49.03)$$

Поскольку мы ограничиваемся лишь полем излучения, при вычислении $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ r и \vec{n} надо считать постоянными, и зависимость $\vec{A}_{\text{кв.}}$ от r учитывать только через t' . Так как $\nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c}$, то

$$\vec{B} = \frac{1}{6c^2 r} [\nabla t', \vec{Q}'] = \frac{[\ddot{\vec{Q}}, \vec{n}]}{6c^3 r}, \quad \vec{E} = \frac{1}{6c^3 r} [[\ddot{\vec{Q}}', \vec{n}], \vec{n}]. \quad (49.04)$$

Сравнение (49.04) с (47.08) показывает, что поле излучения квадруполя получается из поля диполя заменой \vec{p}' вектором $\frac{\ddot{\vec{Q}'}}{6c}$. Но угловая зависимость поля (49.04) сложнее, чем в (47.08), так как вектор \vec{n} входит в определение \vec{Q}' .

Энергия, излучаемая в единицу времени внутрь телесного угла $d\Omega$, согласно (49.03) и (49.04) равна

$$d\mathcal{J} = \frac{1}{144\pi c^5} \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\gamma\delta} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta \right\} d\Omega. \quad (49.05)$$

Полная энергия излучения в единицу времени по всем направлениям получается интегрированием по всему телесному углу. Обозначим

среднее по всему телесному углу от некоторой f через \bar{f} . Тогда

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi} \int f d\Omega,$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{36c^5} \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\gamma} \overline{n_\beta n_\gamma} - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\gamma\delta} \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} \right\}. \quad (49.06)$$

Средние значения произведений n_α вычисляются следующим способом. Так как \vec{n} — единичный вектор, а $n_\alpha n_\beta$ — симметричный тензор, то $\overline{n_\alpha n_\beta}$ может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$, то есть $\overline{n_\alpha n_\beta} = a\delta_{\alpha\beta}$. Суммируя по $\alpha = \beta$ и пользуясь тем, что $\sum_\alpha n_\alpha^2 = 1$, получаем $a = \frac{1}{3}$. Далее, $n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta$ есть компоненты симметричного тензора четвертого ранга. В силу симметрии имеем $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = a'(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta})$. Суммируя по $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$, находим $a' = 1/15$. Фигурная скобка в (49.06) равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{15} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\gamma\delta} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}) &= \\ &= \frac{1}{5} \sum_{\alpha\beta} (\ddot{Q}'_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{15} \left(\sum_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\alpha} \right)^2 = \frac{1}{5} \sum_{\alpha\beta} (\ddot{Q}'_{\alpha\beta})^2, \end{aligned}$$

так как $\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} = 0$. Окончательно,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha\beta} (\ddot{Q}'_{\alpha\beta})^2. \quad (49.07)$$

Если $\vec{p} = 0$ и $\ddot{\vec{Q}} = 0$, но вторая производная от магнитного момента не исчезает, то существует магнитное дипольное излучение. Примером такой системы служит замкнутый линейный проводник («рамка»), по которому идет переменный ток (магнитный момент меняется со временем). Согласно (46.16) магнитные радиационные потенциалы равны

$$\varphi_m = 0, \quad \vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{[\vec{m}', \vec{n}]}{cr}. \quad (49.08)$$

Пренебрегая членами, содержащими степени $\frac{1}{r}$ выше первой, получим:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n}, \vec{m}'], \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A}_m = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{m}']]. \end{aligned} \right\} \quad (49.09)$$

Отсюда

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}], \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (49.10)$$

Как и следовало ожидать, электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и равны:

$$E = B = \frac{\ddot{m}'}{c^2 r} \sin \vartheta, \quad (49.11)$$

где ϑ — угол между \ddot{m}' и \ddot{r} . Если \ddot{m}' направить по полярной оси, то \vec{B} будет направлено по меридиану в сторону возрастания ϑ ,

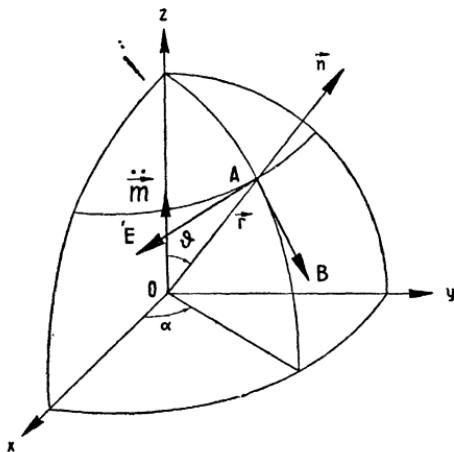


Рис. 29.

а \vec{E} — по параллели в сторону убывания азимута α (рис. 29). В формулах для интенсивности (47.12) и (47.14) заменяется \vec{p} на \vec{m}' :

$$d\mathcal{J} = \frac{\ddot{m}'^2}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega, \quad \mathcal{J} = \frac{2}{3c^3} \ddot{m}'^2. \quad (49.12)$$

§ 50. Радиационное поле и излучение ускоренно, но медленно движущегося заряда

Рассмотрим поле излучения ускоренно движущегося квазиточечного заряда. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Действительно, для равномерно движущегося заряда существует инерциальная система отсчета, в которой он неподвижен. Излучение же возникает лишь при ускоренном движении заряда.

Воспользуемся результатами § 47. Пусть имеется точечный заряд e , скорость которого $v \ll c$, но ускорение \ddot{v} отлично от нуля. Обозначим радиус-вектор заряда через r' . Если представить, что в начале координат расположен неподвижный заряд $-e$, то получим диполь

с моментом $\vec{p} = \vec{e}\vec{r}'$. Поэтому $\vec{p} = \vec{e}\vec{v}$. Подставив последнее в (47.08), найдем:

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 r} [\vec{v}', \vec{n}], \quad \vec{B} = \frac{e}{c^2 r} [\vec{v}', \vec{n}]. \quad (50.01)$$

Штрих в (50.01) обозначает, что ускорение заряда надо брать не в момент наблюдения t , а в момент $t' = t - \frac{r}{c}$. Если ось z считать направленной по \vec{v}' , то графически поле может быть представлено рисунком 27.

Согласно (47.11) и (47.14) вектор Умова — Пойнтинга и полная энергия, излучаемая ускоренно, но медленно движущимся зарядом в единицу времени по всем направлениям, равны

$$\vec{S} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{[\vec{v}', \vec{n}]^2}{r^2} \vec{n} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{\dot{v}'^2}{r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n}, \quad (50.02)$$

где ϑ — угол между \vec{v}' и \vec{n} ;

$$\mathcal{J} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}'^2. \quad (50.03)$$

Таким образом, энергия излучаемого электромагнитного поля зависит только от величины заряда и его ускорения.

§ 51. Исторические замечания

Существование электромагнитных волн теоретически было предсказано Максвеллом в 1864 году в работе «Динамическая теория электромагнитного поля». В третьей части работы Максвелл устанавливает основные уравнения, причем вместо уравнений второй группы пользуется выражениями (44.03) и (44.04). В шестой части работы Максвелл показывает, что при отсутствии зарядов система построенных им уравнений имеет решение в виде плоской волны, распространяющейся в вакууме со скоростью c . Сравнивая значение электродинамической постоянной со скоростью света, Максвелл приходит к выводу, что «совпадение результатов, по-видимому, показывает, что свет и магнетизм являются проявлением свойств одной и той же субстанции и что свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся через поле в соответствии с законами электромагнетизма». Таким образом была создана теория электромагнитных волн и электромагнитная теория света, значение которых в современной физике трудно переоценить. Представления Максвелла первоначально не встретили поддержки. Например, в 1888 году видный физик Э. Кон читал курс теоретической оптики на основе классической теории Юнга — Френеля, а Томсон (Кельвин) до конца своей жизни не принимал теории Максвелла.

Постепенно идеи Максвелла завоевали признание в широких кругах физиков. Существенную роль в их пропаганде сыграл А. Г. Столетов, разработавший (1871—1876) метод весьма точного измерения электродинамической постоянной. Совпадению значений электродинамической постоянной и скорости света в вакууме Столетов придавал особое значение, так как тогда это было единственной экспериментальной опорой электромагнитной теории света.

Перелом в отношении к теории Максвелла наступил в результате экспериментальных работ Герца, (1857—1894), предпринятых с целью доказательства существования магнитного поля, определяемого максвелловским током смещения, и электрического поля, определяемого магнитным током смещения. В работе «О весьма быстрых электрических колебаниях» Герц описывает открытый вибратор (диполь Герца), с помощью которого были обнаружены электромагнитные волны. В работах «Об электромагнитных волнах в воздухе и об их отражении» (1888) и «Силы электрических колебаний, рассмотренные с точки зрения теории Максвелла» (1889) Герц дает теорию излучения открытого вибратора, рассмотренную нами в § 47 и 48. Работа «О лучах электрической силы» (1889) завершает исследования Герца по электромагнитным волнам и доказательству совпадения их свойств с предсказанными теорией.

Результатом работ Герца явилось полное признание электромагнитной теории Максвелла, а после замечательных работ А. С. Попова развилась новая отрасль техники — радиотехника. В связи с теорией излучения антенн в радиотехнике были рассмотрены излучения квадруполя и магнитного диполя.

С развитием электронной теории возникла задача об излучении ускоренно движущегося заряда. Результаты, изложенные в § 50, были получены впервые Лармором в 1897 году.

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 52. Уравнения движения заряженной частицы в поле. Функция Лагранжа

Общая задача классической микроэлектродинамики состоит в определении поля движения заряженных частиц под действием сил заряженных частиц (§ 22). Эта задача не могла быть решена классической электродинамикой в общем виде. Рассмотрим здесь некоторые ее простейшие случаи в предположении, что движение частиц подчиняется установленным в § 19 законам, применимым при больших скоростях.

Уравнение движения квазиточечной частицы с зарядом e и массой покоя m_0 во внешнем электромагнитном поле согласно (22.04) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \right) = e \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right). \quad (52.01)$$

В механике широко используются уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (52.02)$$

где L — функция Лагранжа, q — одна из обобщенных координат, \dot{q} — обобщенная скорость. Найдем функцию Лагранжа, приводящую к уравнению движения (52.01).

При отсутствии внешнего поля уравнение (52.01) сводится к $\frac{d}{dt} \vec{p} = 0$. Импульс равен¹ $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$. Отсюда с точ-

¹ Под $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ понимается вектор с составляющими $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$. Аналогично $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ есть $\text{grad } L$.

ностью до постоянной функция Лагранжа свободной частицы равна

$$L = m_0 \int \frac{\vec{v} d\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (52.03)$$

Для частицы в электромагнитном поле положим

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + L'.$$

Тогда сила Лоренца, стоящая в правой части (52.01), равна

$$\vec{F} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}} + \frac{\partial L'}{\partial \vec{r}}, \quad (52.04)$$

Так как сила Лоренца содержит гироскопический член $[\vec{v}, \vec{B}]$, то L' должна содержать члены линейные относительно скорости. Поэтому положим

$$L' = \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} - e\varphi,$$

где φ и \vec{A} — соответственно скаляр и вектор, зависящие от координат частицы и времени. Определим φ и A путем сравнения (52.04) с (52.01). Согласно (52.04)

$$\vec{F} = -\frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \vec{A}) - e \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}.$$

Так как

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A},$$

то

$$\vec{F} = -e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \vec{A}) - \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A} \right\}.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \vec{A}) - \left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A} = \left[\vec{v}, \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{A} \right] \right] = [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}],$$

поэтому

$$\vec{F} = e \left\{ -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \text{rot } \vec{A} \right] \right\}. \quad (52.05)$$

Из сравнения (52.05) с (52.01) находим, что $-\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$, $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$, то есть φ и \vec{A} суть электромагнитные скалярный и векторный потенциалы поля. Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле принимает вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} - e\varphi. \quad (52.06)$$

При $v \ll c$ первый член переходит в $-m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$. Из (52.06) находим, что обобщенный импульс частицы в электромагнитном поле складывается из количества движения \vec{mv} и «потенциального импульса» $\frac{e}{c}\vec{A}$,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\vec{m}_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (52.07)$$

В заключение определим функцию Гамильтона

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (52.08)$$

На основании (52.07)

$$\sqrt{\frac{m_0 c^2}{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}.$$

Поэтому функция Гамильтона принимает вид

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi. \quad (52.09)$$

В случае поля, не зависящего от времени, H дает полную энергию частицы.

Задача

Доказать, что «естественные» уравнения движения частицы с переменной массой имеют обычный вид

$$\frac{d}{dt} (mv) = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n, \quad 0 = F_b,$$

где R — радиус кривизны траектории, m — масса, определяемая формулой (19.04).

Решение. Так как $\vec{v} = v\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к траектории, то

$$\frac{d}{dt} (mv) = \frac{d}{dt} (mv\vec{\tau}) = \vec{\tau} \frac{d}{dt} (mv) + mv \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{F}.$$

Но $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} \vec{v}$, поскольку $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} = \vec{k}$ — кривизна траектории, \vec{n} — единичный вектор главной нормали. Поэтому

$$\vec{\tau} \frac{d}{dt} (mv) + \vec{n} \frac{mv^2}{R} = \vec{F}.$$

Проектируя последнее на касательную, нормаль и бинормаль \vec{b} , получим искомые уравнения.

§ 53. Движение заряда в постоянном электрическом поле

Если частица движется в статическом электрическом поле, то энергия частицы сохраняется. Согласно (52.09) имеем:

$$W = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} + e\varphi = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2} + e\varphi_0, \quad (53.01)$$

где p_0 — начальный импульс частицы (в точке с потенциалом φ_0), а p — импульс в точке с потенциалом φ . Разность $e(\varphi_0 - \varphi) = A$ есть работа электрической силы.

Рассмотрим движение заряда в однородном электростатическом поле. Выберем ось x в направлении \vec{E} . Допустим, что в начальный момент $t = 0$ заряд имел координаты $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и начальные импульсы $p_{x0} = p_{z0} = 0$, $p_{y0} = p_0$. Тогда заряд будет двигаться в плоскости xy . Интегрируя уравнения движения

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad (53.02)$$

получим

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0.$$

Определим составляющие скорости заряда. Согласно (19.08)

$$\vec{v} = \frac{c^2}{W_k} \vec{p}.$$

Кинетическая энергия W_k равна

$$W_k = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2 + (eEt)^2} = \sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2}, \quad (53.03)$$

где W_0 — кинетическая энергия в начальный момент. Поэтому

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2}}. \quad (53.04)$$

Интегрируя (53.04) и учитывая начальные условия, находим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{eE} \sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2} - \frac{W_0}{eE}, \\ y &= \frac{p_0 c}{eE} \ln \left(\frac{ceEt}{W_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{ceEt}{W_0} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (53.05)$$

Выражение для x можно получить из (53.01), поскольку потенциал однородного поля равен $\varphi = -Ex$.

Кривая $x = f(t)$ представляет собой гиперболу, поэтому движение называется гиперболическим. Выразив t через y и подставив в выражение для x , получим уравнение траектории

$$x = \frac{W_0}{2eE} \left(e^{\frac{eEy}{p_0 c}} + e^{-\frac{eEy}{p_0 c}} - 2 \right), \quad (53.06)$$

которая является цепной линией.

Чтобы перейти к случаю малых скоростей ($v \ll c$), следует положить $p_0 = m_0 v$ и разложить (53.06) в ряд по степеням $\frac{1}{c}$. Тогда $W_0 = m_0 c^2$ и для траектории получается парабола

$$x = \frac{eE}{2m_0 v_0^2} y^2. \quad (53.07)$$

§ 54. Движение заряда в магнитном поле

Уравнение движения заряда в постоянном магнитном поле можно написать в форме

$$\frac{d\vec{mv}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (54.01)$$

Энергия частицы W в магнитном поле остается постоянной, так как действующая сила перпендикулярна к скорости и не производит работы. Поэтому масса $m = \frac{W}{c^2}$ постоянна и ее можно вынести за знак производной. Выбираем ось z в направлении поля \vec{B} . Введем обозначение

$$\omega = \frac{e}{mc} B = \frac{e}{m_0 c} B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (54.02)$$

Проектируя (54.01) на оси координат, получим

$$\frac{dx}{dt} = \omega \dot{y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega \dot{x}, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \quad (54.03)$$

Здесь \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} — проекции \vec{v} на оси координат. Из последнего уравнения следует, что вдоль оси z заряд движется равномерно, так что

$$z = z_0 + v_{0z} t, \quad (54.04)$$

где v_{0z} и z_0 — соответственно составляющая начальной скорости и начальная координата. Чтобы решить первые два уравнения, перейдем к комплексной переменной $\zeta = \dot{x} + i\dot{y}$. Тогда из (54.03)

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega \dot{y} - i\omega \dot{x} = -i\omega \zeta.$$

Отсюда

$$\zeta = \dot{x} + i\dot{y} = (v_{0x} + iv_{0y}) e^{-i\omega t}, \quad (54.05)$$

где v_{0x} и v_{0y} — начальные составляющие скорости (при $t = 0$). Интегрируя (54.05) и вводя начальные координаты x_0 и y_0 , найдем

$$(x - x_0) + i(y - y_0) = \frac{i}{\omega} (v_{0x} + iv_{0y}) (e^{-i\omega t} - 1). \quad (54.06)$$

Из (54.06) получается проекция траектории заряда на плоскость xy . Перенося постоянный член в левую часть и беря квадрат модуля,

имеем

$$\left(x - x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega}\right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\omega^2}, \quad (54.07)$$

где $v_{0\perp} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ — скорость частицы в плоскости xy . Уравнение (54.07) определяет окружность радиуса

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{m_0 v_{0\perp} c}{eB \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (54.08)$$

с центром в точке

$$\bar{x} = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}, \quad \bar{y} = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}. \quad (54.09)$$

Если $v_{0z} \neq 0$, то траектория заряда в однородном магнитном поле представляет собой винтовую линию с радиусом (54.08) и осью, направленной вдоль магнитного поля; если $v_{0z} = 0$, то заряд движется по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Отсюда вытекает способ получения заряженных частиц определенной скорости: если по окружности радиуса R расположить несколько узких радиальных диафрагм, то через диафрагмы смогут пройти лишь те частицы, скорость которых равна $v_0 = \frac{eB}{cm} R$.

Задачи

1. Пользуясь естественными уравнениями движения (задача, § 52), определить радиус кривизны траектории заряда в магнитном поле и показать, что скорость по величине остается постоянной.

2. Показать, что зависимость x и y от времени может быть представлена в форме

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega} [v_{0x} \sin \omega t - v_{0y} \cos \omega t + v_{0y}],$$

$$y = y_0 + \frac{1}{\omega} [v_{0x} \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t - v_{0x}],$$

где x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} — начальные координаты и скорости. За исходное уравнение взять (54.06).

§ 55. Изменение функции Лагранжа финитной системы частиц при внесении ее во внешнее поле. Теорема Лармора и индуцированный магнитный момент

Рассмотрим систему заряженных частиц, движущихся в конечной области пространства. Подобной системой может быть, например, атом или молекула. Согласно (52.06) лагранжеву функцию такой системы можно написать в форме

$$L = - \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \sum_a \left(\frac{e_a}{c} \vec{v}_a \vec{A}_a - e_a \varphi_a \right), \quad (55.01)$$

где a — номер частицы. Значок a при потенциалах означает, что они берутся в точке, занимаемой частицей с номером a . Потенциалы \vec{A} и φ создаются всеми зарядами системы, поэтому (55.01) учитывает взаимодействие частиц.

Допустим, что система вводится во внешнее медленно меняющееся электромагнитное поле, которое в пределах системы можно считать однородным. Теперь к потенциалам \vec{A}_a , φ_a внутреннего поля надо добавить потенциалы \vec{A}'_a , φ'_a внешнего поля. Если выбрать начало координат внутри системы, то

$$\varphi' = -\vec{E}\vec{r}, \quad \vec{A}' = \frac{1}{2}[\vec{B}, \vec{r}]. \quad (55.02)$$

Функция Лагранжа получит добавку

$$\Delta L = \sum_a \left(\frac{e_a}{c} \vec{v}_a \vec{A}'_a - e_a \varphi'_a \right).$$

Подставим сюда потенциалы (55.02), взятые в точке \vec{r}_a . После простых преобразований получим

$$\Delta L = \sum_a e_a \vec{r}_a \vec{E} + \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] \vec{B}. \quad (55.03)$$

Но $\sum_a e_a \vec{r}_a = \vec{p}$ есть электрический момент, а $\sum_a \frac{e}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \vec{m}$ есть магнитный момент системы. Поэтому

$$\Delta L = \vec{p} \vec{E} + \vec{m} \vec{B} = W_m - W_e. \quad (55.04)$$

Энергии электрического и магнитного диполей во внешнем поле согласно (32.04) и (32.06) равны $W_e = -\vec{p} \vec{E}$ и $W_m = +\vec{m} \vec{B}$. В (55.04) W_m и W_e вошли с разными знаками. Электрическая энергия W_e играет роль потенциальной энергии. Магнитную энергию W_m следует истолковать как аналог кинетической энергии.

Рассмотрим влияние магнитного поля на заряд, финитно движущийся в поле центральной силы. Начало координат выберем в центре сил. Если $v \ll c$ и магнитное поле однородно, то функцию Лагранжа можно написать в форме

$$L = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{e}{2c} [\vec{B}, \vec{r}] \vec{v} - e\varphi. \quad (55.05)$$

Перейдем от неподвижной системы координат K к системе координат K' , равномерно вращающейся вокруг начала O с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Скорость \vec{v}' частицы во вращающейся системе связана со скоростью \vec{v} в неподвижной системе формулой

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (55.06)$$

Чтобы получить лагранжеву функцию частицы в системе координат K' , подставим (55.06) в (55.05). После простых преобразований получим

$$L' = \frac{1}{2} m_0 v'^2 + m_0 \left[\vec{\omega} + \frac{e}{2m_0 c} \vec{B}, \vec{r} \right] (\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}]) - \frac{1}{2} m_0 [\vec{\omega}, \vec{r}]^2 - e\varphi.$$

Если положить

$$\vec{\omega} = -\frac{e}{2m_0 c} \vec{B}, \quad (55.07)$$

то в слабом магнитном поле (когда можно пренебречь членом с ω^2) функция L' примет вид

$$L' = \frac{1}{2} m_0 v'^2 - e\varphi. \quad (55.08)$$

Эта функция характеризует движение частицы в центральном поле φ при отсутствии магнитного поля.

Под действием поля частица описывает в системе K' некоторую траекторию. В системе координат K эта траектория будет вращаться вместе с K' с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Мы приходим таким образом к теореме Лармора: действие магнитного поля на финитно движущуюся заряженную частицу в первом приближении сводится к прецессии (вращению) траектории частицы вокруг направления поля с угловой скоростью (55.07). Последняя называется лармортской угловой скоростью.

Применимость теоремы Лармора определена требованием: отброшенный в L' квадратичный член должен быть мал по сравнению с линейным. Так как $v' \sim \omega_0 r$, где ω_0 — угловая скорость вращения заряда по первоначальной траектории, то должно быть

$$\frac{|[\vec{\omega}, \vec{r}]|^2}{|\vec{v}' [\vec{\omega}, \vec{r}]|} \approx \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (55.09)$$

или согласно (55.07)

$$B \ll \frac{2m_0 c \omega_0}{e}. \quad (55.10)$$

Если положить $\omega_0 = 10^{15}$ сек $^{-1}$, $\frac{e}{m_0 c} = 1,76 \cdot 10^7$ эл. магн. ед., то теорема Лармора справедлива при $B \ll 10^8$ гаусс.

Появление магнитной энергии в (55.04) и прецессии Лармора объясняется тем, что внесение системы во внешнее магнитное поле изменяет поле. Изменение магнитного поля индуцирует вихревое электрическое поле, а последнее изменяет энергию частицы. Работа поля за время одного оборота заряда по траектории согласно (12.01) равна $-\frac{e}{c} \frac{d\Phi}{dt}$. Если за время t_0 магнитное поле увеличивалось от

начального значения $B = 0$ до B , то полная работа э. д. с. индукции равна

$$A = -\frac{1}{\tau} \int_0^{t_0} \frac{e}{c} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{e}{c\tau} \Phi, \quad \Phi = \int B_n d\sigma \quad (55.11)$$

(Φ — магнитный поток через поверхность, ограниченную траекторией заряда). При выключении поля процесс проходит в обратном направлении и первоначальное состояние системы восстанавливается. Таким образом, создаваемый ларморовской прецессией добавочный ток можно истолковать как индукционный ток, вызванный изменением магнитного потока.

Ларморовская прецессия приводит к возникновению индуцированного магнитного момента. Орбитальный магнитный момент системы по (38.07) равен

$$\vec{m}_0 = \sum_a \frac{e_a}{2c} \overrightarrow{[\vec{r}_a, \vec{v}'_a]}^t.$$

В магнитном поле скорость заряда определяется выражением (55.06). Поэтому новый магнитный момент

$$\vec{m} = \sum_a \frac{e_a}{2c} \overrightarrow{[\vec{r}_a, \vec{v}_a]}^t = \vec{m}_0 - \sum_a \frac{e_a^2}{4m_a c^2} \overrightarrow{[\vec{r}_a [\vec{B}, \vec{r}_a]]}^t.$$

Выбираем ось z в направлении магнитного поля. Тогда

$$\overrightarrow{[\vec{r} [\vec{B}, \vec{r}]]}^t = \vec{B} \vec{r}^2 - (\vec{r} \vec{B}) \vec{r} = -i \vec{B}_z \vec{xz} - j \vec{B}_z \vec{yz} + k \vec{B}_z \vec{(x^2 + y^2)}.$$

При периодическом движении $\vec{xz} = \vec{yz} = 0$, а $\vec{x^2 + y^2} = \frac{2}{3} \vec{r}^2$. Поэтому

$$\vec{m} = \vec{m}_0 - \sum_a \frac{e_a^2}{6m_a c^2} \vec{r}_a^2 \vec{B}. \quad (55.12)$$

Таким образом, под действием магнитного поля в системе появляется индуцированный магнитный момент

$$\Delta \vec{m} = - \sum_a \frac{e_a^2}{6m_a c^2} \vec{r}_a^2 \cdot \vec{B}, \quad (55.13)$$

направление которого всегда противоположно направлению индуцирующего поля. Этот момент называется диамагнитным. По величине он всегда меньше \vec{m}_0 (кроме случая $\vec{m}_0 = 0$, когда система в отсутствии магнитного поля не обладает магнитным моментом).

Для атома, содержащего Z электронов, коэффициент при B (коэффициент магнитной поляризации) по порядку величины равен

$$\alpha_m = -\frac{e^2}{6m_e c^2} \bar{r}^2 Z \simeq -10^{-29} Z \text{ см}^3. \quad (55.14)$$

Здесь \bar{r}^2 — средний квадрат радиуса электронных орбит атома (порядка 10^{-16} см 2).

§ 56. Энергия и импульс медленно движущегося заряда. Электромагнитная масса

До сих пор при изучении движения заряда во внешнем поле не учитывалось собственное поле, создаваемое зарядом. Эффекты, обусловленные собственным полем движущейся микрочастицы (например, электрона или протона), существенно зависят от пространственной структуры заряда, и при анализе этого вопроса мы встречаемся с рядом фундаментальных затруднений. Чтобы войти в круг идей теории «классического электрона» Лоренца, рассмотрим случай медленно движущегося заряда ($v \ll c$).

Электрическое и магнитное поля заряда e , движущегося равномерно со скоростью \vec{v} ($v \ll c$), определяются формулами

$$\vec{E} = \frac{\vec{er}}{r^3}, \quad B = \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right] = \frac{e[\vec{v}, \vec{r}]}{cr^3}, \quad (56.01)$$

где \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения относительно центра заряда. Эти формулы справедливы для всех r , если заряд точечный; если заряд занимает объем радиуса a и распределен сферически симметрично, то формулы справедливы для $r \geq a$.

Энергию электрического поля заряда легко вычислить по формуле (31.01). В сферических координатах $dV = r^2 dr d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Энергия равна

$$W_e = \frac{e^2}{8\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2}. \quad (56.02)$$

Если заряд точечный, то нижний предел интеграла по r равен нулю и интеграл в (56.02) расходится. Это значит, что собственная электрическая энергия точечного заряда бесконечно велика. Масса заряда, пропорциональная его энергии, также будет бесконечной.

Чтобы избежать этого затруднения, классическая электронная теория считает заряженные микрочастицы малыми, но конечными. Предполагая распределение заряда неподвижного или медленно движущегося электрона сферически симметричным и пренебрегая энергией поля внутри электрона, проинтегрируем (56.02) от $r = a$. Тогда

$$W_e = \frac{e^2}{2a}. \quad (56.03)$$

Аналогично вычисляется магнитная энергия медленно движущегося электрона. Из (56.01) $B^2 = \frac{v^2}{c^2} E^2 \sin^2 \vartheta$, где ϑ — угол между направлениями \vec{r} и \vec{v} . Поэтому

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV = \frac{v}{8\pi c^2} \int E^2 \sin^2 \vartheta dV.$$

Выберем направление \vec{v} в качестве полярной оси сферической системы координат (ϑ будет полярным углом). Воспользуемся формулой

$$\int f(r) g(\vartheta) dV = \bar{g} \int f(r) dV, \quad (56.04)$$

где

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi} \int g(\vartheta) d\Omega$$

есть среднее значение функции $g(\vartheta)$ по телесному углу. Тогда

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3}; \quad \overline{\sin^2 \vartheta} = \frac{2}{3} \quad (56.05)$$

и

$$\frac{1}{8\pi} \int E^2 \sin^2 \vartheta dV = \overline{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{2}{3} W_e;$$

поэтому магнитная энергия равна

$$W_m = \frac{2}{3} \frac{W_e}{c^2} v^2 = \frac{1}{2} m_s v^2, \quad m_s = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2}. \quad (56.06)$$

Магнитная энергия (56.06), подобно кинетической энергии (при $v \ll c$), пропорциональна квадрату скорости. Д.-Д. Томсон истолковал ее как добавочную кинетическую энергию электрона, а величину m_s как электромагнитную массу.

Истолкование m_s как электромагнитной массы подтверждается и значением импульса поля, переносимого движущейся частицей. Согласно результатам задачи 1 § 15 этот импульс равен

$$\vec{G} = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2} \vec{v} = m_s \vec{v}. \quad (56.07)$$

Полная кинетическая энергия и импульс заряженной частицы (при $v \ll c$) равны

$$T = \frac{1}{2} (m' + m_s) v^2, \quad \vec{p} = (m' + m_s) \vec{v}, \quad (56.08)$$

где m' — некоторая масса неэлектромагнитного происхождения, которой обладала бы частица, если бы ее заряд равнялся нулю. Сумму $m' + m_s$ следует отождествить с наблюдавшейся на опыте массой покоя частицы m_0 . Таким образом, в физику вошло представление о «полевой» массе микрочастиц, определяемой энергией связанных с этой

микрочастицей полей. Электромагнитная масса — один из частных случаев полевой массы.

Подставим (56.03) в (56.06); получим

$$m_3 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2 a}. \quad (56.09)$$

Численный коэффициент в (56.09) зависит от распределения заряда внутри электрона. Множитель $\frac{2}{3}$ получен для модели шарового электрона, равномерно заряженного по поверхности. Выбор другого распределения заряда даст другой коэффициент.

Электромагнитная масса электрона связана с его радиусом a соотношением

$$m_3 \approx \frac{e^2}{c^2 a}. \quad (56.10)$$

Если, следуя Абрагаму, предположить, что вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение (что подтверждается расчетами академика Л. Д. Ландау, сделанными в последнее время методами квантовой электродинамики), то «классический радиус электрона» будет

$$a_e \approx \frac{e^2}{c^2 m_e} = 2,80 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (56.11)$$

(так как $m_e = m_3 = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ г}$).

Классический радиус электрона имеет смысл независимо от модели электрона, так как его можно ввести, не опираясь на представления об электромагнитной массе.

§ 57. Реакция поля, действующая на ускоренно, но медленно движущийся заряд

Ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитное поле. Вследствие потери энергии на излучение кинетическая энергия заряда должна уменьшаться. Чтобы правильно учесть сохранение энергии и импульса, необходимо учесть реакцию собственного поля заряда на его движение.

Согласно (14.10) и (18.05) законы сохранения энергии и импульса частицы и ее поля можно написать в форме

$$\frac{dW}{dt} = N - \frac{dW_f}{dt} - \mathcal{J}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - \frac{d\vec{G}}{dt} - \vec{F}'_i, \quad (57.01)$$

где W и \vec{p} — соответственно энергия и импульс частицы, W_f и G — те же величины для поля, \vec{F} — внешняя сила, действующая на частицу, N — ее мощность,

$$\mathcal{J} = \oint S_n d\sigma, \quad \vec{F}'_i = \oint (-^{(2)}t) \vec{n} d\sigma \quad (57.02)$$

— соответственно поток энергии и импульса поля в единицу времени. Таким образом,

$$\vec{F}_i = -\frac{d\vec{G}}{dt} - \vec{F}'_i \quad (57.03)$$

есть сила реакции, с которой собственное поле заряда действует на заряд. Эта сила самодействия заряда включает силу инерции электромагнитного происхождения и реакцию излучения. Величина

$$N_i = -\frac{dW_f}{dt} - \mathcal{J} \quad (57.04)$$

есть мощность реакции поля.

Для ускоренно, но медленно движущегося заряда из (56.06) и (56.07) получим

$$-\frac{d\vec{G}}{dt} = -m_s \vec{v}, \quad -\frac{dW_f}{dt} = -\frac{dW_m}{dt} = -m_s \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (57.05)$$

Величину $-m_s \vec{v}$ можно рассматривать как электромагнитную силу инерции, действующую на ускоренно движущийся заряд. Тогда $-\frac{dW_f}{dt}$ есть работа этой силы в единицу времени.

Вычисление реакции излучения \vec{F}'_i значительно труднее. Проще всего, следуя Планку, подобрать \vec{F}'_i так, чтобы выполнялось сохранение энергии.

Упростим уравнение сохранения энергии (57.01). Допустим, что движение частицы периодическое и для моментов t_1, t_2, \dots состояния движения заряда одинаковы (работа внешних сил компенсирует потерю энергии на излучение или энергией, излучаемой за период, можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией заряда). В силу периодичности, энергии заряда W и поля W_f также будут одинаковыми в моменты t_1, t_2, \dots . Поэтому работа, произведенная силой \vec{F}'_i в течение периода $t_2 - t_1$, должна быть равна излученной за это время энергии.

Энергия, испускаемая в единицу времени, по (50.02) равна

$$\mathcal{J} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2.$$

Поэтому

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}'_i \vec{v} dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2 dt. \quad (57.06)$$

Интегрируя по частям правую часть, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}'_i \vec{v} dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt.$$

Последнее соотношение будет удовлетворено, если допустить, что в каждый момент времени

$$\vec{F}'_i = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{v}. \quad (57.07)$$

Формула (57.07) дает искомую силу реакции излучения при периодическом движении заряда (при $v \ll c$), которая пропорциональна производной по времени от ускорения частицы.

Рассмотренный вывод (57.07) правомерен при условии, что сила реакции мала по сравнению с внешними силами. Для гармонически колеблющейся частицы это условие будет выполнено при не слишком высоких частотах. Если положить $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t$, то квазиупругая сила $\vec{F} = -m_0 \omega^2 \vec{r}$, а реакция излучения

$$\vec{F}'_i = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^3 \vec{r} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 \vec{v}. \quad (57.08)$$

Условие малости \vec{F}'_i дает $m_0 \omega^2 \gg \frac{2e^2}{3c^3} \omega^3$ или, вводя длину волны излучения $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$,

$$\lambda = \frac{c}{\omega} \gg \frac{2e^2}{3m_0 c^2} \approx a_e. \quad (57.09)$$

Таким образом, выражение (57.07) справедливо для волн, длина которых значительно превышает классический радиус электрона. Последнее выполняется для всех известных родов электромагнитного излучения, за исключением самых коротковолновых.

В силу (57.01) и (57.07) уравнение движения заряда под действием внешней силы \vec{F} ($v \ll c$) можно написать в форме

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}, \quad (57.10)$$

где m_0 — наблюдаемая масса, включающая в себя согласно § 56 электромагнитную массу.

Уравнение Лоренца (57.10) применимо при условии (57.09). Но при выводе (57.10) были сделаны предположения, из-за которых это уравнение, строго говоря, не применимо ни к точечному, ни к протяженному заряду. В случае протяженного заряда исходное выражение (50.03) недостаточно — необходимо учитывать высшие члены разложения радиационного поля. Последние приведут к добавочным членам реакции излучения, содержащим высшие производные ускорения по времени. Такие члены существенно зависят от структуры заряда и вряд ли могут иметь физический смысл.

В случае точечного заряда F'_i не зависит от размеров заряда, но электромагнитная масса m_0 оказывается бесконечно большой. Поэтому необходимо предположить, что неэлектромагнитная масса m' заряда принимает бесконечно большое отрицательное значение, чтобы

наблюдаемая масса $m_0 = m_s - |m'|$ была конечной. При этом предположении уравнение (57.10) можно было бы считать точным. Однако уравнение (57.10) третьего порядка. Общий интеграл его содержит девять произвольных постоянных и, чтобы определить движение,

надо задавать три начальных условия: $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ и $\vec{v} = \vec{v}_0$ при $t=0$. Но это, вообще говоря, противоречит механике, требующей задания только \vec{r}_0 и \vec{v}_0 . Противоречие с классической механикой выступает более явно, если заметить, что при отсутствии внешних сил (57.10), кроме решения, удовлетворяющего закону инерции, имеются решения, не удовлетворяющие ему. Таким образом, уравнение Лоренца имеет большее число решений, нежели это необходимо для описания движения.

Решения уравнения (57.10) можно разделить на «физические», имеющие физический смысл, и «нефизические», не имеющие его. Формально нефизические решения можно устраниТЬ соответствующим подбором постоянных интегрирования. В качестве примера рассмотрим движение заряда вдоль оси x при отсутствии внешних сил. В этом случае решение (57.10) имеет вид

$$x = x_0 + v_0 t + A e^{\frac{3m_0 c^3}{2e^2} t}.$$

Если $A \neq 0$, то есть ускорение в начальный момент было отлично от нуля (например, для $t \leq 0$ имелась сила, которая исчезла при $t > 0$), то скорость и ускорение с течением времени будут неограниченно расти. Это противоречит закону инерции. Следовательно, физическими решениями будут лишь те, для которых $A = 0$. Формальное устранение нефизических решений уравнения Лоренца оставляет чувство неудовлетворенности: уравнения, адекватно отражающие явления природы, не должны иметь абсурдных решений. Можно думать, что нефизические решения обусловлены бесконечной электромагнитной собственной массой точечной частицы. Конечная масса m_0 получена в результате вычитания двух бесконечностей m_s и $|m'|$, что математически не вполне корректно. Поэтому уравнение Лоренца следует применять с осторожностью.

§ 58. Естественная ширина спектральных линий

Во многих задачах реакцией излучения можно пренебречь. Однако в ряде случаев реакция излучения весьма существенна. Рассмотрим, например, вопрос о естественной ширине спектральных линий.

Простейшей моделью светового источника служит электрон, колеблющийся под влиянием квазиупругой силы $\vec{F} = -m_0 \omega_0^2 \vec{r}$. Если пренебречь реакцией излучения, то электрон будет колебаться гармонически с частотой ω_0 . Его излучение будет строго монохроматическим и иметь ту же частоту ω_0 (§ 49). В силу наличия тормоз-

зящей силы излучения амплитуда колебаний вибратора постепенно убывает. Пусть $v \ll c$ и электрон движется вдоль оси z . Воспользуемся уравнением (57.10)

$$m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_0 \omega_0^2 z + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3 z}{dt^3}. \quad (58.01)$$

Физическое решение этого уравнение (§ 57) будем искать в форме

$$z = A e^{i\omega t}. \quad (58.02)$$

Характеристическое уравнение для определения ω имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + i \frac{2e^2}{3m_0 c^3} \cdot \frac{\omega^3}{\omega_0^2} \right). \quad (58.03)$$

Уравнение (58.01) согласно (57.09) применимо при условии

$$\omega \ll \frac{c}{a_e} \approx \frac{3m_0 c^3}{2e^2}. \quad (58.04)$$

Поэтому по (58.03) ω мало отличается от ω_0 и с точностью до членов порядка γ получим

$$\omega = \omega_0 + i \frac{\gamma}{2}, \quad \gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \omega_0^2}{m_0 c^3}. \quad (58.05)$$

Следовательно,

$$z = z_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{\gamma}{2} t}, \quad (58.06)$$

то есть заряд совершает затухающее колебательное движение. Энергия его, усредненная по периоду $\frac{2\pi}{\omega_0}$, равна

$$W = \frac{1}{2} m_0 (\dot{z}^2 + \omega_0^2 z^2) = W_0 e^{-\gamma t}. \quad (58.07)$$

Энергия убывает со временем экспоненциально и уменьшается в e раз за $\tau = \frac{1}{\gamma}$. Так как по (58.04) $\frac{1}{\gamma} \gg \frac{1}{\omega_0}$, то время τ велико по сравнению с периодом. Это время можно назвать «временем жизни» возбужденного состояния вибратора. Заметим, что при $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ $1/\gamma = 4 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$, а при $\nu = 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ $\frac{1}{\gamma} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$. Таким образом, за время жизни $\frac{1}{\gamma}$ испускается $4 \cdot 10^7 - 4 \cdot 10^6$ длин волн видимого света.

Закон изменения энергии вибратора (58.07) можно получить также на основании (50.03). Пренебрегая затуханием, имеем

$$z = z_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \ddot{z} = -\omega_0^2 z_0 e^{i\omega_0 t},$$

$$-\frac{dW}{dt} = \mathcal{J} = \frac{2e^2}{3c^3} \quad \ddot{z}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^4 z_0^2}{c^3} = \gamma W,$$

откуда непосредственно следует (58.07).

Амплитуда колебаний напряженности поля, излучаемого вибратором, пропорциональна \ddot{z} . Поэтому со временем она убывает так же, как и амплитуда вибратора

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i\omega_0 t}. \quad (58.08)$$

Отсюда видно, что поле излучения \vec{E} представляет собой немонохроматическую группу волн (§ 43). Чтобы определить интенсивность $S(\omega)$ отдельных монохроматических составляющих группы, разложим (58.08) в интеграл Фурье

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (58.09)$$

где по (58.08)

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\vec{E}_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}. \quad (58.10)$$

Излучение электрона определяется вектором Умова — Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{c}{4\pi} \int \int d\omega d\omega' e^{i(\omega + \omega') t} \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega').$$

Среднее по времени значение S вычисляется так же, как это сделано в § 48, и равно

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \int \vec{E}(\omega) \vec{E}(-\omega) d\omega.$$

Условие вещественности поля (§ 43) дает $\vec{E}(-\omega) = \vec{E}^*(\omega)$. Поэтому

$$\bar{S} = \int \frac{c}{4\pi} |\vec{E}(\omega)|^2 d\omega. \quad (58.11)$$

Подынтегральная функция дает искомое распределение интенсивности излучения по частотам. Пользуясь (58.10), получим

$$S(\omega) = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}(\omega)|^2 = S_0 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (58.12)$$

Множитель S_0 выбран так, что полная интенсивность излучения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = S_0.$$

Реакция излучения, таким образом, сказывается в том, что квазиупруго связанный электрон колеблется с затуханием и вместо бесконечно узкой (монохроматической) спектральной линии частоты ω_0 испускает линию конечной ширины. Испускаемая линия имеет распределение интенсивности (58.12). При $\omega = \omega_0$ интенсивность

имеет максимум (рис. 30), равный $S(\omega_0) = \frac{2S_0}{\pi\gamma}$. Для $\omega - \omega_0 = \pm \frac{\gamma}{2}$ интенсивность равна половине своего максимального значения. Поэтому γ называется шириной спектральной линии. Следовательно, ширина спектральной линии равна обратной величине времени жизни возбужденного состояния.

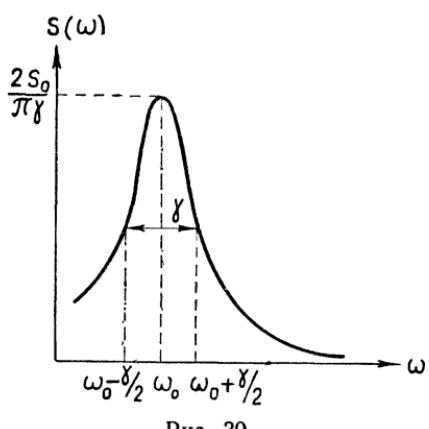


Рис. 30.

Ширина спектральной линии, обусловленная реакцией излучения («естественная» ширина) и выраженная в длинах волн, постоянна, не зависит от частоты и по порядку величины равна классическому радиусу электрона:

$$\Delta\lambda = \left| \Delta \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right) \right| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \gamma = \frac{4\pi e^2}{3m_0 c^2} \approx 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ Å}. \quad (58.13)$$

Строгая теория излучения атомными электронами дается квантовой электродинамикой. Вычисления с классическим гармоническим колебателем дают лишь грубую картину явления. Однако форма спектральной линии (58.12) оказывается такой же и в квантовой теории, только величина γ определяется вероятностью соответствующего квантового перехода.

§ 59. Рассеяние света свободным зарядом

Пусть на неподвижный заряд падает плоская линейно поляризованная монохроматическая электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \beta), \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \beta). \quad (59.01)$$

Под действием этой волны заряд придет в движение. Если приобретаемая зарядом скорость мала по сравнению со скоростью света, то силой Лоренца можно пренебречь по сравнению с электрической силой $e\vec{E}$. Можно также пренебречь смещением заряда при его колебаниях под влиянием поля. Тогда уравнение движения заряда принимает вид

$$m\vec{v} = e\vec{E} = e\vec{E}_0 \cos(\omega t + \beta). \quad (59.02)$$

Его решение

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m\omega^2} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \beta) \quad (59.03)$$

показывает, что заряд совершает гармонические колебания с частотой колебаний падающей волны ω и с разностью фаз π . Такой заряд

будет излучать вторичные волны с частотой колебаний ω (когерентные). Описанное явление называется рассеянием света.

Из (59.03) амплитуда скорости $v = \frac{eE_0}{m\omega}$. Условие $v \ll c$ даст для электрона $\frac{E_0}{\omega} \ll \frac{mc}{e} \sim 10^{-8}$. Для видимого света $\omega \sim 10^{15}$.

Поэтому условие $v \ll c$ выполнено для полей $E_0 \ll 10^7$ СГС.

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулами § 50. Подставив (59.02) в (50.02), находим поток энергии рассеянного излучения внутри телесного угла

$$d\mathcal{J} = S_n d\sigma = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\vec{E}, \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} E^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (59.04)$$

где θ — угол между направлением распространения \vec{n} рассеянной волны и электрическим полем \vec{E} падающей волны. Штрих в (59.04) обозначает, что для вычисления \mathcal{J} в точке $\vec{r} = \vec{nr}$ в момент t первичное поле \vec{E} надо взять в момент $t' = t - r/c$.

Рассеяние можно рассматривать как явление столкновения движущегося поля с рассеивающей системой. Будем характеризовать расстояние эффективным сечением. Дифференциальным эффективным сечением рассеяния $d\sigma_{\text{эфф}}$ называется отношение средней энергии $d\bar{\mathcal{J}}$, испускаемой рассеивающей системой в направлении телесного угла $d\Omega$ в единицу времени, к средней плотности потока энергии \bar{S} излучения, падающего на систему.

$$d\sigma_{\text{эфф}} = \frac{d\bar{\mathcal{J}}}{\bar{S}}. \quad (59.05)$$

Так как вектор Умова — Пойнтинга падающей волны $\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \bar{E}^2$, то дифференциальное сечение когерентного рассеяния свободным электроном равно

$$d\sigma_{\text{эфф}} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (59.06)$$

Интегрируя (59.06) по всему телесному углу, получим полное сечение

$$\sigma_{\text{эфф}} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} a_e^2. \quad (59.07)$$

Для электрона $\sigma_{\text{эфф}} = 6,57 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$.

Таким образом, эффективное сечение когерентного рассеяния свободным электроном не зависит от частоты и пропорционально квадрату классического радиуса электрона.

Найдем эффективное сечение для рассеяния неполяризованного света. Пусть волна распространяется по направлению \vec{k}_0 . Выберем плоскость $\vec{k}_0 \vec{n}$ за плоскость xy . Ось z направим по \vec{k}_0 . Тогда век-

тор \vec{E} лежит в плоскости xy и образует угол φ с осью y . Обозначим угол рассеяния (угол между \vec{n} и \vec{k}_0) через θ . Тогда $\cos \theta$ есть проекция \vec{n} на \vec{E} . С другой стороны, значение $\cos \theta$ можно найти, проектируя \vec{n} на ось y , а полученную проекцию — на \vec{E} . Таким образом, $\cos \theta = \sin \vartheta \cos \varphi$ и $\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$. Сделаем усреднение по всем направлениям поляризации в плоскости, перпендикулярной \vec{k}_0 . Так как $\overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}$, то

$$\overline{\sin^2 \theta} = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}. \quad (59.08)$$

Дифференциальное сечение рассеяния неполяризованной волны свободным зарядом принимает вид (формула Томсона)

$$d\sigma_{\text{эф}} = \frac{1}{2} a_e^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega. \quad (59.09)$$

Таким образом, максимальное рассеяние происходит в направлениях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$.

Задача

Определить напряженности \vec{E}_1 и \vec{B}_1 поля рассеянной свободным электроном волны.

Решение. Из (50.01) и (59.02)

$$\vec{E}_1 = \frac{e^2}{mc^2 r} [[\vec{E}', \vec{n}] \vec{n}], \quad \vec{B}_1 = \frac{e^2}{mc^2 r} [\vec{E}', \vec{n}], \quad \vec{E}' = \vec{E} \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

§ 60. Рассеяние коротких волн

Рассмотрим рассеяние плоских электромагнитных волн системой связанных зарядов (например, атомом). Так как система финитная, то существует по крайней мере одна частота ω_0 , характеризующая движение зарядов. Решение поставленной задачи в общем виде требует знания законов движения зарядов в системе.

Без детализации свойств системы могут быть рассмотрены лишь предельные случаи: 1) $\omega \gg \omega_0$ (ω — частота падающей волны) и 2) $\omega \ll \omega_0$.

Рассмотрим случай $\omega \gg \omega_0$, имеющий место при рассеянии рентгеновских лучей. Векторный потенциал рассеянного излучения на больших расстояниях от системы можно написать в форме

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', t') dV' = \frac{1}{cr} \sum_a e_a \vec{v}_a(t'). \quad (60.01)$$

Здесь согласно (46.01) $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{r}{c} - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} -$

единичный вектор в направлении рассеяния, а \vec{v}_a — скорость заряда с индексом a в поле первичной волны.

Поскольку $\omega \gg \omega_0$, то период $\frac{2\pi}{\omega_0}$ движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом первичного излучения. Поэтому взаимодействием между зарядами можно пренебречь и для промежутков времени $t \ll \frac{2\pi}{\omega_0}$ можно для каждого заряда системы написать уравнение движения в поле падающей волны в форме

$$m_a \frac{d\vec{v}'_a}{dt} = e_a \vec{E}_a = e_a \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

где $\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{n}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}_0$ — волновой вектор падающей волны. При интегрировании, так же как в § 59, можно считать, что $\vec{k} \cdot \vec{r}$ практически постоянно. Тогда

$$\vec{v}'_a = i \frac{e \vec{E}_0}{m_a \omega} e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Заменив в последнем выражении t через t' и подставив в (60.01), имеем

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{i \vec{E}_0}{c \omega r} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} e^{iq \cdot \vec{r}_a}, \quad (60.03)$$

где

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} (\vec{n} - \vec{n}_0) \quad (60.04)$$

— изменение волнового вектора при рассеянии.

Так как нас интересует лишь радиационное поле, то при дифференцировании \vec{A} следует учитывать зависимость от r только через t' ; члены, содержащие степени $\frac{1}{r}$ выше первой, надо отбросить. Тогда

$$\vec{B}'(\vec{r}, t) = \frac{[\vec{n}, \vec{E}_0]}{c^2 r} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} e^{iq \cdot \vec{r}_a}. \quad (60.05)$$

Поток энергии в элементе телесного угла $d\Omega$ в направлении \vec{n} равен

$$d\mathcal{J} = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}'|^2 r^2 d\Omega = \frac{[\vec{n}, \vec{E}_0]^2}{4\pi c^3 r} \left| \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} e^{iq \cdot \vec{r}_a} \right|^2. \quad (60.06)$$

Согласно (59.05) дифференциальное эффективное сечение получается

$$d\sigma_{\text{эфф}} = \overline{\left| \sum_a \frac{e_a^2}{m_a c^2} e^{iq \cdot \vec{r}_a} \right|^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (60.07)$$

Для системы, состоящей из Z одинаковых частиц (электронов), (60.07) можно переписать в форме

$$d\sigma_{\text{эфф.}} = a_e^2 \left| \sum_a e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_a} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega = a_e^2 \left\{ Z + 2 \sum_{a < b} \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_{ab}) \right\} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (60.08)$$

где

$$\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b.$$

Первый член в (60.08) определяет сумму потоков, рассеянных отдельными зарядами; второй — результат интерференции полей, рассеянных отдельными зарядами. Разность фаз двух рассеянных волн пропорциональна проекции расстояния между рассеивающими зарядами на вектор \vec{q} . Поэтому вектор \vec{q} можно назвать фазовым или дифракционным. Так как $(\vec{n} - \vec{n}_0)^2 = n^2 + n_0^2 - 2\vec{n}\vec{n}_0 = 2(1 - \cos \vartheta) = 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, где ϑ — угол рассеяния (угол между \vec{n} и \vec{n}_0), то

$$q = \frac{\omega}{c} |\vec{n} - \vec{n}_0| = 2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (60.09)$$

Выражение (60.08) значительно упрощается в двух предельных случаях. Если длина волны λ много больше размеров атома ($r_{ab} \ll a \ll \lambda$), то в силу (60.09) $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_{ab}) \approx 1$. Так как

$$\sum_{a \neq b}^Z \sum_{a \neq b}^Z 1 = Z(Z-1),$$

то сечение равно

$$d\sigma_{\text{эфф.}} = Z^2 a_e^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (60.10)$$

то есть сечение пропорционально квадрату числа рассеивающих центров. Если $\lambda \ll r_{ab}$, то $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_{ab})$ очень быстро меняется с изменением \vec{r}_{ab} . На опыте мы имеем дело со средним рассеянием большого числа различно расположенных рассеивающих центров (например, атомов), поэтому $\sum_{a \neq b} \sum_{a \neq b} \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}_{ab}) = 0$ и сечение рассеяния

$$d\sigma_{\text{эфф.}} = Z a_e^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (60.11)$$

пропорционально числу рассеивающих зарядов. Формула (60.11) не применима при малых углах рассеяния ϑ , так как в этом случае q уже не велико и $\vec{q} \cdot \vec{r}$ с расстоянием меняется не быстро.

При наличии множества различно ориентированных в пространстве одинаковых рассеивающих систем, нужно усреднить (считая

рассеивающие системы твердыми) по различным ориентациям. Вводя угол χ между \vec{q} и \vec{r}_{ab} , получим

$$\overline{\cos(\vec{q}\vec{r}_{ab})} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \cos(qr_{ab} \cos \chi) 2\pi \sin \chi d\chi = \frac{\sin qr_{ab}}{qr_{ab}}.$$

Так как падающее излучение, вообще говоря, не поляризовано, то надо усреднить по различным поляризациям падающих волн. Пользуясь (59.08), получим

$$d\sigma = a_e^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left[Z + 2 \sum_{a < b}^Z \sum_{a < b}^Z \frac{\sin qr_{ab}}{qr_{ab}} \right] d\Omega. \quad (60.12)$$

Наконец, если расстояния r_{ab} могут меняться, то, обозначив через $w d\tau$ вероятность определенного интервала $d\tau$ конфигурации зарядов, надо усреднить по всем конфигурациям. Среднее дифференциальное сечение рассеяния будет

$$d\sigma = a_e^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left\{ Z + \sum_{a \neq b}^Z \sum_{a \neq b}^Z \int \frac{\sin qr_{ab}}{qr_{ab}} w d\tau \right\}. \quad (60.13)$$

Член

$$F = \sum_{a \neq b}^Z \sum_{a \neq b}^Z \int \frac{\sin qr_{ab}}{qr_{ab}} w d\tau \quad (60.14)$$

зависит от распределения заряда в атоме и называется атомным множителем. При $\lambda \gg r_{ab}$ он стремится к значению

$$\sum_{a \neq b} \sum_{a \neq b} \int w d\tau = Z(Z - 1).$$

При $\lambda \ll r_{ab}$ подынтегральная функция быстро колеблется и интеграл в (60.14) исчезает.

§ 61. Рассеяние длинных волн

Рассмотрим качественно случай, когда частота света ω сравнима с характеристической частотой системы ω_0 . Будем предполагать, что размеры системы a малы по сравнению с длиной волны излучения ($a \ll \lambda$) и в пределах системы поле волны можно считать однородным.

Ограничимся случаем дипольного рассеяния и вычислим поле рассеянной волны. Заметим, что поле падающей волны индуцирует в системе мультипольные электрические и магнитные моменты. Диполь, индуцированный полем $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, равен

$$\vec{p} = {}^{(2)}\alpha \vec{E} = {}^{(2)}\alpha \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (61.01)$$

где $(^2)\alpha$ — тензор поляризуемости системы. Энергию, излучаемую в единицу времени внутрь телесного угла $d\Omega$, можно вычислить по формуле (47.13)

$$d\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi c^3} |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (61.02)$$

Эта формула учитывает как рассеяние когерентное, так и некогерентное. Пусть, например, тензор поляризуемости меняется с частотой ω_0

$$(^2)\alpha = (^2)\alpha_0 + (^2)\alpha_1 \cos \omega_0 t, \quad (61.03)$$

где $(^2)\alpha$ и $(^2)\alpha_1$ от времени явно не зависят и $(^2)\alpha_0 \gg (^2)\alpha_1$ (с подобным случаем мы встречаемся при рассмотрении собственных колебаний атомов в молекулах).

Теперь дипольный момент согласно (61.01) и (61.03) равен

$$\vec{p} = (^2)\alpha_0 \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} (^2)\alpha_1 \vec{E}_0 [e^{-i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}]. \quad (61.04)$$

Таким образом, индуцированный диполь колеблется с тремя частотами ω , $|\omega - \omega_0|$, $\omega + \omega_0$ и будет излучать поле трех частот.

Вторая производная от дипольного момента равна

$$\ddot{\vec{p}} = -e^{-i\omega t} \left\{ \omega^2 (^2)\alpha_0 \vec{E}_0 + \frac{1}{2} (^2)\alpha_1 \vec{E}_0 [(\omega + \omega_0)^2 e^{-i\omega_0 t} + (\omega - \omega_0)^2 e^{i\omega_0 t}] \right\}.$$

При вычислении интенсивности излучения в направлении \vec{n} следует учитывать, что векторы $(^2)\alpha_0 \vec{E}_0$ и $(^2)\alpha_1 \vec{E}_0$ могут иметь различные направления, а \vec{n} образует с ними углы θ_0 и θ_1 . Поэтому, беря квадрат модуля от $[\vec{p}, \vec{n}]$ и усредняя по периоду $\frac{2\pi}{\omega_0}$, получим

$$|\vec{[p, n]}|^2 = \omega^4 |(^2)\alpha_0 \vec{E}_0|^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{4} |(^2)\alpha_1 \vec{E}_0|^2 \{(\omega + \omega_0)^4 + (\omega - \omega_0)^4\} \sin^2 \theta_1.$$

Подставив последнее выражение в (61.02), получим интенсивность рассеянного излучения в направлении $d\Omega$

$$d\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi c^3} \left\{ \omega^4 |(^2)\alpha_0 \vec{E}_0|^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{4} |(^2)\alpha_1 \vec{E}_0|^2 [(\omega - \omega_0)^4 + (\omega + \omega_0)^4] \sin^2 \theta_1 \right\} d\Omega. \quad (61.05)$$

Первый член в (61.05) дает интенсивность когерентного рассеяния. Если система нейтральная, то при ω , стремящейся к нулю, поляризуемость $(^2)\alpha_0$ стремится к постоянному пределу (статическая поляризуемость). Поэтому при малых частотах ($\omega \ll \omega_0$) $(^2)\alpha_0$ можно считать не зависящей от частоты. Тогда интенсивность когерентного рассеяния будет пропорциональна четвертой степени частоты падающего излучения (закон Релея).

Два следующих члена в (61.05) дают смещенное излучение с частотами $|\omega - \omega_0|$ и $(\omega + \omega_0)$. Существование некогерентного, «комбинационного» рассеяния было доказано Мандельштамом и Ландсбергом в СССР и Раманом в Индии в 1928 году. Комбинационное рассеяние имеет существенное значение для исследования молекул.

§ 62. Рассеяние квазиупрого связанным зарядом

При отсутствии внешнего поля на квазиупрого связанный заряд действует квазиупругая сила $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{r}$ и сила реакции излучения. Предполагая силу реакции излучения малой, движение электрона в нулевом приближении будем считать гармоническим. Тогда для реакции излучения можно написать

$$\vec{F}'_i = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3} = -m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3}. \quad (62.01)$$

Эта сила имеет характер силы трения. Уравнение движения заряда во внешнем поле $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ принимает вид

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{\vec{E}_0}{m} e^{-i\omega t}. \quad (62.02)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} (\vec{a} e^{i\omega_0 t} + \vec{b} e^{-i\omega_0 t}) + \vec{r}_0 e^{-i\omega t}, \\ \vec{r}_0 &= \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (62.03)$$

где

Частота собственных колебаний равна $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$, но так как $\gamma \ll \omega_0$, то вместо ω' в (62.03) написано ω_0 .

Таким образом, под влиянием падающей волны электрон совершает движение, складывающееся из затухающего гармонического колебания с частотой ω_0 и незатухающего колебания с частотой ω падающей волны. Соответственно и вторичное излучение будет состоять из волн частоты ω (когерентное рассеяние) и волн частоты ω_0 (некогерентное рассеяние).

Рассмотрим когерентное рассеяние. Возьмем вещественную часть незатухающего члена (62.03). Получим

$$\vec{r} = \operatorname{Re} \vec{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{\frac{e\vec{E}_0}{m} \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad (62.04)$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (62.05)$$

Вычислив ускорение, получим для электрического поля и потока энергии внутри телесного угла $d\Omega$ значения

$$E' = \frac{e \sin \theta}{c^2 r} \dot{v} = - \frac{e^2}{mc^2 r} \frac{\omega^2 \sin \theta}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} E_0 \cos(\omega t' + \delta), \quad (62.06)$$

$$d\bar{\mathcal{J}} = \frac{c}{4\pi} |E'|^2 r^2 d\Omega = a_e^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \cdot \frac{c}{4\pi} E_0^2 d\Omega. \quad (62.07)$$

Дифференциальное эффективное сечение и полное эффективное сечение расстояния равны

$$d\sigma_{\text{эфф.}} = a_e^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} d\Omega, \quad \sigma_{\text{эфф.}} = \frac{8\pi}{3} a_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (62.08)$$

При $\omega \gg \omega_0$ (62.08) переходят в формулы (59.06) и (59.07) для сечения рассеяния на свободном электроне. При $\omega \ll \omega_0$ сечение рассеяния пропорционально ω^4 ,

$$\sigma_{\text{эфф.}} = \frac{8\pi}{3} a_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (62.09)$$

Из формулы (62.09), выведенной Релеем, следует, что короткие волны рассеиваются сильнее длинных.

При $\omega \approx \omega_0$ сечение имеет максимум

$$\sigma_{\text{эфф.}} = \frac{8\pi}{3} a_e^2 \frac{\omega^2}{\gamma^2}. \quad (62.10)$$

Рассеяние при $\omega = \omega_0$ называется резонансным. Так как вблизи резонанса $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$, то

$$\sigma_{\text{эфф.}} \approx \frac{2\pi}{3} a_e^2 \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (62.11)$$

§ 63. Пределы применимости микроскопической электродинамики. Понятие о квантовой электродинамике

Классическая микроскопическая электродинамика (электронная теория) объясняет широкий круг явлений. Однако эта теория встретилась с рядом затруднений.

Рассмотрим прежде всего затруднения, связанные с открытием новых свойств электромагнитного поля.

В первой четверти XX в. были открыты корпускулярные свойства света и волновые свойства микрочастиц. В результате этого развилось учение о единстве волновых и корпускулярных свойств не только для электромагнитного поля, но вообще для всех микробъектов.

В 1923 году Комптон установил, что рассеяние рентгеновских лучей на свободных электронах является некогерентным. Это противоречит результатам классической теории (§ 59). Объяснение «эффекта Комптона» было дано Комптоном и Дебаем на основе учения о корпускулярных свойствах света. Согласно учению о единстве корпускулярных и волновых свойств каждый микрообъект обладает свойствами частицы и свойствами поля. В частности, поток равномерно движущихся частиц можно рассматривать как неограниченную плоскую волну и, наоборот, неограниченную плоскую волну — как поток равномерно движущихся частиц. Связь между волновыми характеристиками (циклической частотой ω и волновым вектором \vec{k}) и корпускулярными характеристиками (энергией W и импульсом \vec{p}) дается соотношениями Эйнштейна — Де-Бройля:

$$W = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (\omega = ck), \quad (63.01)$$

где \hbar — так называемая квантовая постоянная

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}. \quad (63.02)$$

Частицы света носят название квантов света, или фотонов.

На основе представлений о фотонах рассеяние света на свободных электронах можно рассматривать как упругое столкновение фотона с электроном. Фотоны движутся со скоростью c . Поэтому масса покоя фотона равна нулю (§ 19), а масса при движении $m = \frac{\hbar\omega}{c^2}$. Импульс фотона равен

$$p = mc = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \quad (63.03)$$

где λ — длина волны. При столкновении фотона с покоящимся электроном фотон рассеивается под некоторым углом к первоначальному направлению движения. При этом фотон отдает электрону некоторую энергию. В силу соотношения $\omega = \frac{W}{\hbar}$ уменьшение энергии фотона приводит к уменьшению его частоты, то есть рассеяние становится некогерентным. Когерентное рассеяние оказывается возможным лишь на связанных частицах.

После открытия корпускулярных свойств электромагнитного поля возникла задача обобщения теории Максвелла — Лоренца с учетом корпускулярных свойств поля. Это потребовало введения существенно новых идей.

Чтобы кратко обрисовать идеи квантовой электродинамики, рассмотрим плоскую монохроматическую линейно поляризованную электромагнитную волну

$$\vec{A} = \vec{e}_{kj} A_k \{ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \gamma)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \gamma)} \}, \quad (63.04)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{A}_k \vec{e}_{kj} \{ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \gamma)} - e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \gamma)} \}. \quad (63.05)$$

Энергия объема V такой волны равна

$$W = \frac{\omega^2 A_k^2}{8\pi c^2} V. \quad (63.06)$$

С корпускулярной точки зрения такой волне сопоставляется поток фотонов, каждый из которых обладает энергией $\hbar\omega$. Обозначим через N_{kj} число фотонов в объеме V . Тогда энергия представится выражением

$$W = N_{kj}\hbar\omega. \quad (63.07)$$

Следовательно,

$$\frac{\omega^2 A_k^2}{8\pi c^2} V = N_{kj}\hbar\omega = N_{kj}\hbar ck, \quad (63.07)$$

откуда

$$A_k = \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2 N_{kj}}{\omega V}}. \quad (63.08)$$

Из (63.08) следует, что амплитуда волны не может иметь произвольных значений. Число фотонов N_{kj} есть всегда целое число и A_k может принимать лишь дискретный ряд значений, соответственно $N_{kj} = 0, 1, 2, 3, \dots$. Замена непрерывно меняющейся классической величины дискретной величиной называется квантованием этой величины. Можно сказать, что электромагнитные волны суть волны с квантованной амплитудой.

Однако такое введение квантования еще не является достаточно убедительным, так как навязано извне и не вытекает из самого математического аппарата. Строгое обоснование квантования поля дается методами квантовой электродинамики.

Выше было отмечено, что единство корпускулярных и волновых свойств имеет место не только для электромагнитного поля, но и для микрочастиц вещества. Поэтому микрочастицы (электроны, протоны и т. д.) не подчиняются законам классической механики. Законы движения микрочастиц даются квантовой механикой, учитывающей волновые свойства частиц наряду с их корпускулярными свойствами. Классическая электродинамика описывает движение микрочастиц методами классической механики и поэтому получает приближенные, а иногда и неверные результаты. Примером этому служит вывод о нестабильности ядерной модели атома Резерфорда. Вращающийся вокруг ядра электрон движется с ускорением и поэтому должен излучать электромагнитное поле (§ 50). В результате потери энергии электрон должен двигаться по спиральной орбите и упасть на ядро за время порядка 10^{-8} сек. В действительности движение электрона в стационарном состоянии таково, что пространственное распределение заряда и тока не меняется со временем и излучение отсутствует. В § 38 путем усреднения по времени нестационарный ток, образованный точечным зарядом (электроном), был заменен некоторым стационарным током, распределенным вдоль орбиты. Этот условный

стационарный ток был использован для установления магнитных свойств атомных систем (§ 38, 55). Однако в других задачах такие приемы далеко не всегда приводят к верным результатам.

Вторая группа затруднений связана с противоречиями в трактовке заряженных микрочастиц (§ 56, 57). Эти затруднения сохраняются и в квантовой теории.

Третья группа затруднений связана с открытием новых свойств микрочастиц, свойств, связанных с тем обстоятельством, что при больших энергиях число заряженных частиц перестает быть постоянным вследствие рождения электронно-позитронных пар.

§ 64. Исторические замечания

Вопрос о движении заряженных частиц в поле возник в 90-х годах XIX в. в связи с работами по измерению отношения $\frac{e}{m}$ для электрона. Понятие об электромагнитной массе заряженной частицы введено Дж. Дж. Томсоном (1856—1940) в 1881 году в работе «Электрические и магнитные действия, вызываемые движением заряженных тел».

Выражение для электромагнитной массы заряженного по поверхности шара (§ 56) было получено в 1889 году Хивисайдом.

В 1893 году Дж. Дж. Томсон обнаружил зависимость электромагнитной массы от скорости.

В 1901 году Кауфман, измеряя отношение $\frac{e}{m}$, экспериментально подтвердил зависимость массы от скорости.

М. Абрагам (1875—1922) в 1902—1903 гг. подробно проанализировал электромагнитную массу и создал динамику электронов, основанную на представлении о недеформируемом электроне.

В 1904 году Г. А. Лоренц для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона ввел предположение о сокращении длины движущегося в эфире тела. Исходя из этого предположения он построил новую динамику протяженного электрона и получил известную зависимость электромагнитной массы от скорости (19.04).

Через год после Лоренца Эйнштейн в работе «К электродинамике движущихся тел» показал, что масса любого тела должна меняться со скоростью по закону Лоренца.

Появление теории Абрагама и Лоренца вызвало оживленную полемику и серию экспериментальных работ по измерению массы электрона (Кауфмана — 1906 г., Бестельмайера — 1907 г., Бухерера — 1909 г. и др.), эксперименты решили спор в пользу формулы Лоренца — Эйнштейна.

Выражение для функции Лагранжа, выведенное в § 52, впервые получено М. Планком (1858—1947) в 1906 году.

Реакцию излучения на ускоренно движущийся электрон (§ 57) открыл Г. А. Лоренц. Вывод, приведенный в тексте, принадлежит Абрагаму.

Теория рассеяния электромагнитных волн гармоническим вибратором с учетом реакции излучения (§ 62) была развита Планком. Теория рассеяния света на свободном электроне была развита Дж. Дж. Томсоном (1903 г.). Эта теория позволила Томсону сделать оценку числа электронов в легких атомах.

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ГЛАВА V

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**§ 65. Микроскопическое и макроскопическое
электромагнитное поле**

Уравнения Максвелла — Лоренца (22.01) и (22.02) не применимы к исследованию явлений в веществе, так как внутри тела и даже внутри каждого атома тела все величины, входящие в уравнения микроскопического поля, являются сложными и быстро меняющимися функциями координат и времени.

Способ описания электромагнитных явлений в веществе был найден Максвеллом в 1855—1873 гг. Этот способ опирается на четыре вектора макроскопического электромагнитного поля: векторы напряженности \vec{E} , \vec{H} и векторы индукции \vec{D} , \vec{B} , которые удовлетворяют макроскопическим уравнениям Максвелла — Герца:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \end{array} \right\} \quad (\text{I}) \qquad \left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II}) \quad (65.01)$$

Векторы макроскопического поля \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} принципиально отличаются от напряженностей микроскопического поля (обозначим их \vec{E}' , \vec{B}'), входящих в уравнения (22.01) и (22.02). Достаточно указать, что даже в однородных телах (например, в диэлектрике между пластинами плоского конденсатора) напряженности микрополя \vec{E}' , \vec{B}' значительно изменяются как в пространстве (внутри атома и между атомами), так и со временем с частотами, характерными для внутриатомных процессов. Макроскопические же величины \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} или постоянны, или меняются в пространстве и времени настолько медленно, что их изменение можно непосредственно изме-

рить. Изменение макроскопических величин с течением времени определяется, вообще говоря, изменением внешних условий. Микроскопические величины меняются почти независимо от внешних условий, так как они определяются движением и расположением микрочастиц — электронов и атомных ядер.

Покажем, что уравнения Максвелла (65.01) могут быть получены из микроскопических уравнений (22.01) и (22.02) путем некоторого пространственно-временного усреднения.

Особенности, связанные с квантовыми эффектами, неявно учитываются уравнениями Максвелла через эмпирические коэффициенты, входящие в полную систему уравнений.

§ 66. Макроскопические (усредненные) величины

Связь между микроскопическими и макроскопическими величинами можно получить путем пространственно-временного усреднения уравнений Лоренца. Задача усреднения заключается в получении величин, непосредственно сравнимых с измеренными на опыте.

Допустим, что надо измерить вектор электрической напряженности в теле. Измерение производится посредством макроскопических приборов и сводится к измерению силы \vec{F} , действующей на некоторый пробный заряд e_0 . Если в качестве пробного заряда взять электрон или α -частицу, то можно измерить напряженность \vec{E}' микроскопического электрического поля. При макроскопических измерениях пробный заряд занимает объем V_0 , в котором содержится большое число атомов тела (в противном случае будет измеряться микроскопическое поле). С другой стороны, объем пробного заряда V_0 должен быть мал по сравнению с размерами тела, в котором измеряется поле (иначе невозможно найти распределение макроскопического поля внутри тела). Объемы V_0 , малые по сравнению с размерами тела, но большие по сравнению с размерами атомов, называются макроскопически малыми или физически бесконечно малыми.

Мгновенная сила, действующая на пробный заряд, равна

$$\vec{F} = \int_{(V_0)} \vec{F}' dV = \int_{(V_0)} \rho_0 \vec{E}' dV,$$

где $\vec{F}' dV = \rho_0 \vec{E}' dV$ — микроскопическая сила, действующая на объем dV пробного заряда, распределенного с плотностью ρ_0 . Не нарушая общности, можно считать, что пробный заряд распределен по объему V_0 равномерно. Тогда

$$\vec{F} = \rho_0 \int_{(V_0)} \vec{E}' dV.$$

Следует принять во внимание, что безынерционных физических приборов не существует и всякое измерение имеет свою длитель-

ность. Промежуток времени t_0 , в течение которого производится измерение, должен быть велик по сравнению с периодами изменения микроскопических полей, но мал по сравнению со временем изменения внешних воздействий или условий опыта. Такие промежутки времени называются макроскопически малыми (или физически бесконечно малыми).

Таким образом, измерение напряженности электрического поля сводится к измерению изменения количества движения пробного заряда за макроскопически малый промежуток времени:

$$\Delta(mv) = \vec{F}t_0 = p_0 \int_{(t_0)} dt \int_{(V_0)} \vec{E}' dV.$$

Напряженность \vec{E} макроскопического электрического поля получается делением \vec{F} на величину пробного заряда $e_0 = p_0 V_0$

$$\vec{E} = \frac{1}{t_0 V_0} \int_{(t_0)} dt \int_{(V_0)} \vec{E}' dV. \quad (66.01)$$

Заметим, что плотность пробного заряда в (66.01) не входит. Поэтому будем считать, что пробный заряд всегда можно выбрать настолько малым, чтобы он своим полем не вызывал изменений в распределении зарядов тела (не вызывал бы искажений микроскопического поля \vec{E}'). На самом деле электрический заряд имеет атомистическое строение и принципиально не существует сколь угодно малых пробных зарядов, распределенных равномерно по объему V_0 .

Поэтому величину \vec{E} , даваемую выражением (66.01), следует рассматривать как определение напряженности макроскопического электрического поля. Всякое измерение напряженности поля действительным пробным зарядом будет давать величину, несколько отличающуюся от \vec{E} , поскольку микроскопическое поле \vec{E}' изменяется под воздействием пробного заряда. Обычно считается, что искажение поля мало и измеряемая на опыте напряженность практически не отличается от идеальной макроскопической напряженности (66.01).

Таким образом, всякой микроскопической величине $f(\vec{r}, t) \equiv \bar{f}(x, y, z, t)$ можно сопоставить макроскопическую величину $\bar{f}(x, y, z, t)$, получающуюся путем усреднения по макроскопически малому объему V_0 , окружающему точку $\vec{r}(x, y, z)$, и макроскопически малому промежутку времени t_0 вблизи момента t :

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{V_0 t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} \int_{(V_0)} f(x + x', y + y', z + z', t + t') \times \times dx' dy' dz' dt'. \quad (66.02)$$

Здесь x , y , z — координаты некоторой точки внутри V_0 , например центра, если V_0 есть некоторая сфера радиуса a . Поэтому средние (макроскопические) величины можно рассматривать как функции точки \vec{r} тела и момента времени t , около которых производится усреднение. В действительности макроскопические величины суть функции области, по которой производится усреднение.

Усреднение, дифференцирование и интегрирование (66.02) по любому из четырех аргументов представляют собой при заданных V_0 и t_0 переместительные операции — производная от среднего значения равна среднему значению от производной, интеграл от среднего значения равняется среднему значению от интеграла

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\overline{\partial f}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\overline{\partial f}}{\partial t}, \quad \int \bar{f} dx = \overline{\int f dx} \quad (66.03)$$

и т. д.

Кроме того, среднее значение от суммы равно сумме средних значений, то есть

$$\overline{f \pm g} = \bar{f} \pm \bar{g}. \quad (66.04)$$

Постоянный# множитель можно выносить за знак усреднения

$$\overline{(cf)} = c\bar{f}, \quad c = \text{const.} \quad (66.05)$$

В силу перечисленных свойств имеем

$$\overline{\text{div } \vec{a}} = \text{div} \overrightarrow{\vec{a}}, \quad \overline{\text{rot } \vec{a}} = \text{rot} \overrightarrow{\vec{a}} \quad (66.06)$$

и т. д.

§ 67. Вторая группа уравнений Максвелла. Вектор магнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Вторая группа уравнений Максвелла получается путем усреднения второй группы уравнений Максвелла — Лоренца по макроскопически малому объему и промежутку времени. Пользуясь (66.03) и (66.06), получим

$$\overline{\text{rot} \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}} = \text{rot} \overrightarrow{\vec{E}'} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overrightarrow{\vec{B}'}}{\partial t} = 0, \quad \overline{\text{div} \vec{B}'} = \text{div} \overrightarrow{\vec{B}'} = 0.$$

Среднее значение напряженности микроскопического электрического поля $\vec{E}' = \overrightarrow{\vec{E}}$ по (66.01) есть напряженность макроскопического электрического поля. Среднее значение напряженности микроскопического магнитного поля $\vec{B}' = \overrightarrow{\vec{B}}$ в силу исторически сложившейся традиции принято называть вектором магнитной индукции.

Уравнения второй группы Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (67.01)$$

Формально эти уравнения совпадают со второй группой уравнений Максвелла — Лоренца, но принципиально отличаются от последних тем, что содержат макроскопические величины \vec{E} и \vec{B} . Первое уравнение показывает, что вихревое электрическое поле создается меняющейся со временем магнитной индукцией. Второе уравнение показывает, что магнитная индукция не имеет источников (то есть не существует «свободных» магнитных зарядов).

Из первого уравнения (67.01) вытекает закон электромагнитной индукции. Электродвижущая сила в замкнутом контуре C равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = \oint_C \vec{E} d\vec{r}.$$

По формуле Стокса и по (67.01) получим

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (67.02)$$

где

$$\Phi = \int_{(S)} B_n d\sigma \quad (67.03)$$

есть поток вектора магнитной индукции через поверхность σ , ограниченную контуром C .

Проинтегрируем $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ по произвольному объему V , ограниченному поверхностью σ . Пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\oint_{(S)} B_n d\sigma = 0 \quad (67.04)$$

— поток магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это эквивалентно утверждению, что линии вектора магнитной индукции замкнуты.

§ 68. Свободные и связанные заряды

Усредняя по макроскопически малому объему и промежутку времени уравнения первой группы Максвелла — Лоренца, получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho', \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}'. \quad (68.01)$$

Для усреднения зарядов и токов разделим все заряды в макроскопическом теле на свободные и связанные. Пусть микроскопическая плотность свободных зарядов равна ρ'_f , а микроскопическая плотность

связанных зарядов — ρ_g . Соответственно микроскопические плотности токов свободных и связанных зарядов будут $\vec{j}_f = \rho'_f \vec{v}_f$ и $\vec{j}'_g = \rho'_g \vec{v}'_g$.

В классической теории свободными зарядами называются заряды, способные под влиянием сколь угодно малых воздействий перемещаться внутри тела на макроскопические расстояния, практически от одной границы тела до другой. Таковы, например, электроны в металлах, ионы в газах и электролитах. К свободным зарядам относят также заряды, введенные в тело (или нанесенные на его поверхность). Связанными зарядами называются заряды, которые не могут свободно перемещаться в теле. Под влиянием внешних воздействий такие заряды могут лишь смещаться из своих положений равновесия на расстояния атомного порядка.

Можно считать, что макроскопическое тело состоит из электрически нейтральных атомов или молекул. Атом или молекула представляет собой сложную систему заряженных микрочастиц — положительных ядер и отрицательных электронов. Законы движения микрочастиц устанавливаются квантовой механикой. Позаимствуем из квантовой теории упрощенное представление о движении микрочастиц, согласно которому ядра колеблются около положений равновесия, а электроны движутся вокруг ядер и образуют объемные заряды, распределенные с постоянной плотностью и дающие стационарные токи. Под влиянием внешних воздействий изменяется движение зарядов и распределение плотности. При достаточно большом воздействии связанные заряды превращаются в свободные. Таким образом, разделение зарядов на свободные и связанные условно и зависит от воздействия на них. Это разделение может считаться достаточно определенным лишь в том случае, когда воздействия, например создаваемые в телах внешние поля, достаточно малы.

Усреднив микроскопические плотности зарядов и токов, получим макроскопические плотности свободных зарядов ρ_f , связанных зарядов ρ_g и соответствующие им плотности токов — $\vec{j}_f = \vec{j}$ (плотность тока проводимости) и \vec{j}'_g (плотность тока связанных зарядов)

$$\rho = \rho_f = \bar{\rho}_f, \quad \rho_g = \bar{\rho}'_g, \quad \vec{j} = \vec{j}_f = \overline{\rho'_f \vec{v}_f}, \quad \vec{j}'_g = \overline{\rho'_g \vec{v}'_g}. \quad (68.02)$$

Плотности заряда и тока свободных зарядов определяются распределением и движением свободных зарядов. Пусть n_a — число зарядов сорта a в кубическом сантиметре, \vec{v}_a — скорость этих зарядов. Тогда

$$\rho = \rho_f = \sum_a n_a e_a, \quad \vec{j} = \vec{j}_f = \sum_a n_a e_a \vec{v}_a \quad (68.03)$$

(суммирование производится по всем сортам зарядов). Связанные заряды требуют более детального рассмотрения (§ 69).

В случае слабых воздействий, когда превращений связанных зарядов в свободные (и обратно) не происходит, имеют место законы сохранения

$$\operatorname{div} \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j}_g + \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = 0. \quad (68.04)$$

Последнее уравнение удовлетворяется автоматически, если положить

$$\rho_g = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j}_g = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{I}, \quad (68.05)$$

где \vec{P} и \vec{I} — векторы электрической и магнитной поляризации (§ 69, 70).

§ 69. Векторы электрической поляризации и электрической индукции. Теорема Гаусса.

Макроскопическую плотность зарядов в теле можно представить в форме $\bar{\rho} = \rho_f + \rho_g$ (§ 68), тогда первое уравнение (68.01) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho_f + \rho_g). \quad (69.01)$$

Это значит, что источниками макроскопического электрического поля являются как свободные, так и связанные заряды. Вычислим среднее значение плотности связанных зарядов $\bar{\rho}_g$. Перенумеруем все сорта зарядов в молекулах тела $e_1, e_2, \dots, e_a, \dots$. Пусть \vec{r}_a — радиус-вектор заряда e_a относительно некоторого начала координат O (центра тяжести), выбранного внутри молекулы (атома), n_a — число атомов в кубическом сантиметре, содержащих заряд e_a .

Поверхность σ произвольного макроскопически малого объема V_0 разделит все молекулы на три типа: 1) молекулы, целиком находящиеся внутри объема V_0 , 2) молекулы, целиком находящиеся вне объема V_0 , и 3) молекулы, которые поверхностью σ разрезаются на две части. Часть молекулы, попадающую внутрь объема V_0 , условно назовем «хвостом». Хотя в целом молекулы электронейтральны, хвосты будут, вообще говоря, заряженными. Плотность связанных зарядов в объеме V_0 определяется суммой всех зарядов хвостов внутри поверхности σ , то есть

$$\rho_g = \frac{1}{V_0} \sum e_{\text{хв.}}$$

Заряд e_a будет находиться внутри объема V_0 , если начало координат O (центр тяжести молекулы) находится внутри цилиндра с образующей \vec{r}_a , построенного на элементе поверхности $d\sigma$ с нормалью \vec{v} (рис. 31). Объем цилиндра равен $-(\vec{r}_a \cdot \vec{v}) d\sigma$. Следовательно, заряд сорта a , вошедший в объем V_0 , равен произведению e_a на

число центров тяжести молекул, находящихся в этом цилиндре, т. е. равен $e_a n_a (\vec{r}_a \cdot \vec{v}) d\sigma$.

Просуммировав по всем сортам зарядов и проинтегрировав по поверхности σ , ограничивающей объем V_0 , получим полный заряд хвостов в этом объеме. По теореме Остроградского

$$\sum e_{\text{хв.}} = - \oint_{(\sigma)} \left(\sum_a e_a n_a \vec{r}_a \right) \vec{v} d\sigma = - \int_{(V_0)} dV \operatorname{div} \left(\sum_a e_a n_a \vec{r}_a \right).$$

Разделив это выражение на V_0 , получим мгновенную плотность зарядов,

$$\rho_g(t) = - \frac{1}{V_0} \int_{(V_0)} dV \operatorname{div} \left(\sum_a e_a n_a \vec{r}_a \right) = - \overline{\operatorname{div} \vec{P}'}^V = - \operatorname{div} \overline{\vec{P}'}^V.$$

Здесь

$$\overline{\vec{P}'} = \sum_a e_a n_a \vec{r}_a \quad (69.02)$$

есть вектор микроскопической электрической поляризации (микроскопический дипольный момент единицы объема). Интегрирование по объему с последующим делением на объем области интегрирования дает усреднение только по координатам (указано значком $\overline{}$ у черты, обозначающей усреднение). Так как усреднение по

времени не сделано, то $\overline{\vec{P}'}$ колеблется с атомными частотами. После усреднения по времени получим

$$\rho_g = - \operatorname{div} \overline{\vec{P}}, \quad (69.03)$$

где

$$\overline{\vec{P}} = \overline{\vec{P}'} = \sum_a \overline{e_a n_a \vec{r}_a} \quad (69.04)$$

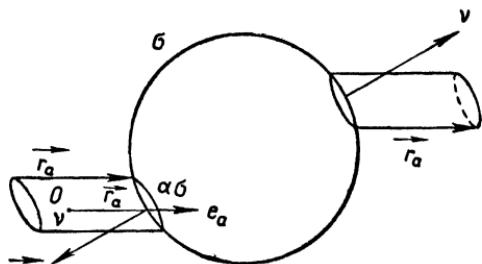


Рис. 31.

есть вектор электрической поляризации (дипольный момент единицы объема вещества).

Полная макроскопическая плотность заряда равна

$$\overline{\rho} = \rho_f + \rho_g = \rho_f - \operatorname{div} \overline{\vec{P}}. \quad (69.05)$$

Подставив (69.05) в (69.01) и соединив члены с дивергенцией, получим

$$\operatorname{div} \overline{\vec{D}} = 4\pi \rho_f, \quad (69.06)$$

где

$$\overline{\vec{D}} = \overline{\vec{E}} + 4\pi \overline{\vec{P}} \quad (69.07)$$

есть вектор электрической индукции (электрическое смещение Максвелла). Из (69.07) видно, что вектор электрической индукции связан

как с электрическим полем, так и с распределением зарядов в веществе. Уравнение (69.06) показывает, что электрическая индукция обусловлена только свободными зарядами.

Из (69.06) следует теорема Гаусса:

$$\oint_{(S)} D_n d\sigma = 4\pi e_f, \quad (69.08)$$

то есть поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность равен произведению 4π на свободный заряд $e_f = \int_V \rho_f dV$, находящийся внутри поверхности.

Уравнение (69.03) показывает, что связанные заряды сосредоточены там, где начинаются и оканчиваются линии вектора поляризации \vec{P} ($\text{div } \vec{P} \neq 0$). Знак минус указывает на то, что линии вектора поляризации начинаются на отрицательных связанных зарядах и оканчиваются на положительных.

§ 70. Вектор намагничивания и макроскопическое магнитное поле. Связанные магнитные заряды

Макроскопическую плотность тока можно написать в форме $\vec{j}' = j_f + j_g$, тогда второе уравнение (68.01) примет вид

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_g. \quad (70.01)$$

Таким образом, вихри магнитной индукции создаются изменением во времени макроскопического электрического поля и токами как свободных, так и связанных зарядов.

Вычислим среднее значение плотности тока связанных зарядов \vec{j}'_g . Заметим, что \vec{j}'_g состоит из двух частей — тока хвостов и тока поляризации.

Каждый заряд e_a образует ток $e_a \vec{v}_a n_a$. Заряды молекул, центры которых находятся в цилиндрах, построенных на $d\sigma$ (рис. 31), образуют в объеме V_0 ток хвостов — $\sum_a e_a \vec{v}_a n_a (\vec{r}_a \vec{v}) d\sigma$. Суммируя ток по всей поверхности и деля на объем V_0 , получим мгновенную плотность тока хвостов

$$\vec{j}'_{g, \text{хв.}} = -\frac{1}{V_0} \oint_{(S)} \sum_a e_a \vec{n}_a \vec{v}_a (\vec{r}_a \vec{v}) d\sigma.$$

Последнее выражение может быть преобразовано методом, примененным в § 36 при рассмотрении магнитного момента тока. Так как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\sum_a e_a \vec{v}_a (\vec{r}_a \vec{v}) n_a = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_a e_a n_a \vec{r}_a (\vec{r}_a \vec{v}) - c \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{v} [\vec{r}_a, \vec{v}_a]] n_a.$$

Здесь первый член исчезает при усреднении по времени, так как движение связанных зарядов финитно. Поэтому

$$\vec{j}_{g, \text{хв.}} = \vec{j}'_{g, \text{хв.}} = \frac{c}{V_0} \oint_{(\sigma)} \left[\vec{v}, \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] n_a}^t \right] d\sigma. \quad (70.02)$$

Введем микроскопический магнитный момент единицы объема

$$\vec{l}' = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] n_a. \quad (70.03)$$

По известной теореме

$$\frac{1}{V_0} \oint_{(\sigma)} [\vec{v}, \vec{l}'] d\sigma = \frac{1}{V_0} \int_{(V_0)} \text{rot} \vec{l}' dV = \overline{\text{rot} \vec{l}'}^V.$$

После усреднения по времени получим

$$\vec{j}_{g, \text{хв.}} = c \text{rot} \vec{l},$$

где

$$\vec{l} = \vec{l}' = \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] n_a} \quad (70.04)$$

есть вектор намагничивания (или намагничения) — макроскопический магнитный момент единицы объема тела. Выражение (70.04) соответствует гипотезе Ампера: намагниченность тела определяется магнитными моментами элементарных (электронных) токов, текущих в молекулах или атомах.

Под воздействием переменного внешнего поля распределение зарядов в молекулах становится нестационарным и возникает ток поляризации. Представим радиус-вектор \vec{r}_a заряда e_a в форме $\vec{r}_a = \vec{r}_{a0} + \vec{r}'_a$, где \vec{r}_{a0} — радиус-вектор «электрического центра тяжести орбиты», а \vec{r}'_a — мгновенный радиус-вектор заряда e_a относительно этого центра тяжести. Вектор \vec{r}'_a меняется периодически и среднее по времени $\overline{\vec{r}'_a}^t = 0$. Вектор \vec{r}_{a0} оказывается постоянным только в статических полях.

Производная по времени от микроскопического вектора поляризации (69.02) равна

$$\frac{\partial \vec{P}'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_a e_a n_a (\vec{r}_{a0} + \vec{r}'_a) = \sum_a e_a n_a \left(\frac{d\vec{r}_{a0}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_a}{dt} \right).$$

Так как $\frac{d\vec{r}'_a}{dt}$ есть периодическая функция времени, то $\overline{\frac{d\vec{r}'_a}{dt}} = 0$.

Среднее $\overline{\frac{d\vec{r}_{a0}}{dt}}$ отлично от нуля (радиус-вектор электрического центра тяжести орбиты меняется с изменением внешнего поля) и дает макроскопическую скорость смещения электрического центра тяжести орбиты заряда e_a . Производя усреднение по макроскопически малому объему, получим

$$\overline{\frac{\partial \vec{P}'}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} = \sum_a e_a \overline{n_a \frac{d\vec{r}_{a0}}{dt}}.$$

Правая часть есть искомый ток поляризации $\vec{j}_{g, \text{поляр.}}$, поэтому

$$\vec{j}_{g, \text{поляр.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (70.05)$$

Полная плотность тока связанных зарядов принимает вид

$$\vec{j}_g = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{I}, \quad (70.06)$$

что совпадает с (68.05).

Подставив (70.06) в (70.01), получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f. \quad (70.07)$$

Здесь \vec{D} — вектор электрической индукции, а вектор \vec{H} равен

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I} \quad (70.08)$$

и называется напряженностью макроскопического магнитного поля. Название вектора \vec{H} не соответствует содержанию его: вектор \vec{H} подобен вектору \vec{D} и состоит из величины \vec{B} , относящейся только к полю (хотя и называемой индукцией), и величины \vec{I} , определяемой только движением и распределением зарядов вещества. Поэтому в действительности \vec{H} есть индукция. Но в силу исторически сложившейся традиции вектор \vec{H} называют напряженностью, а вектор \vec{B} , аналогичный \vec{E} , называют индукцией.

Уравнение (70.07) показывает, что вихревое магнитное поле создается токами проводимости $\vec{j}_f = \vec{j}$ и полным током смещения. Величину

$$\vec{j}_{\text{смеш.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (70.09)$$

Максвелл назвал плотностью тока смещения. Ток смещения слагается из тока, связанного с изменением макроскопического электрического поля, и из тока смещения связанных зарядов.

Определим магнитодвижущую силу в макроскопическом магнитном поле формулой

$$\mathcal{E}_m = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r}, \quad (70.10)$$

где C — произвольный замкнутый контур. Применяя к (70.10) формулу Стокса и пользуясь (70.07), получим

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} \left(I + \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi_D}{dt} \right), \quad (70.11)$$

то есть магнитодвижущая сила, действующая в некотором контуре, пропорциональна полному току, идущему через площадь, ограниченную контуром. Полный ток слагается из тока проводимости

$$I = \int \vec{j}_{fn} d\sigma \quad (70.12)$$

и из тока смещения

$$I_{\text{смеш.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi_D}{dt}, \quad (70.13)$$

где

$$\psi_D = \int_S D_n d\sigma. \quad (70.14)$$

Подставив в уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ значение \vec{B} из (70.08), получим

$$\operatorname{div} \vec{H} = 4\pi\rho_m, \quad (70.15)$$

где

$$\rho_m = -\operatorname{div} \vec{I}. \quad (70.16)$$

Следовательно, магнитное поле H , в отличие от магнитной индукции, имеет источники. Плотность источников (связанных магнитных масс или зарядов) определяется дивергенцией вектора намагничивания (70.16).

Из (70.15) следует теорема Гаусса для магнитного поля

$$\oint_S H_n d\sigma = 4\pi e_m \quad (70.17)$$

— поток вектора напряженности магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен произведению 4π на полный «связанный магнитный заряд»

$$e_m = \int_V \rho_m dV, \quad (70.18)$$

находящейся внутри поверхности σ .

§ 71. Материальные соотношения. Электрические свойства тел

Восьми уравнений Максвелла недостаточно для определения двенадцати неизвестных, составляющих четырех векторов поля \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} . Необходимо установить добавочные связи между этими векторами. Эти добавочные связи называются материальными соотношениями или уравнениями состояния. Материальные соотношения зависят от природы вещества (материала), в котором рассматривается поле, и являются менее общими, нежели дифференциальные уравнения Максвелла.

Рассмотрим связь между вектором электрической поляризации вещества и напряженностью макроскопического электрического поля. В дальнейшем будем называть вещество диэлектриком, если рассматриваются только электрические свойства вещества, и магнетиком, если рассматриваются только его магнитные свойства.

Вектор поляризации (дипольный момент единицы объема) диэлектрика определяется формулой (69.04)

$$\vec{P} = \sum_a \overrightarrow{e_a r_a n_a}.$$

Вычисление этого вектора для произвольного диэлектрика представляет задачу микроскопической теории электрических и магнитных свойств тел (гл. VIII). Здесь же используем феноменологический метод установления связей: отвлекаясь от микростроения диэлектрика или магнетика, будем характеризовать связи между векторами поля и индукциями (или поляризациями) соотношениями, в которые входят численные коэффициенты, устанавливаемые для каждого вещества экспериментально.

Изменение напряженности \vec{E} поля сопровождается изменением электрических сил, действующих на заряды. Следовательно, должны изменяться радиус-векторы \vec{r}_a зарядов e_a , то есть \vec{r}_a будут функциями от \vec{E} . Это значит, что вектор поляризации должен быть некоторой функцией от \vec{E} : $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$. Вид этой функции различен для различных диэлектриков. Для слабых полей можно получить ее общее выражение, если разложить $\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}(E_x, E_y, E_z)$ в ряд и ограничиться первыми членами разложения. Для изотропных тел получаем

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \kappa \vec{E} + \dots \quad (71.01)$$

Здесь \vec{P}_0 есть вектор поляризации при $\vec{E} = 0$. Он называется вектором остаточной (или спонтанной) поляризации. Для большинства тел $P_0 = 0$. Коэффициент κ называется коэффициентом электрической поляризации вещества. При $\vec{P}_0 = 0$

$$\vec{P} = \kappa \vec{E}.$$

Опыт показывает, что для изотропных тел поляризация диэлектрика по направлению совпадает с направлением электрического поля. Поэтому κ есть положительная величина.

Подставив (71.01) в (69.07), получим электрическую индукцию

$$\vec{D} = 4\pi \vec{P}_0 + \epsilon \vec{E}, \quad (71.02)$$

где

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa \quad (71.03)$$

есть диэлектрический коэффициент (диэлектрическая постоянная или электрическая проницаемость) вещества. Так как для всех тел $\kappa \geq 0$, то $\epsilon \geq 1$. Для вакуума $\epsilon = 1$ ($\kappa = 0$). Диэлектрический коэффициент многих веществ зависит от температуры по закону

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\text{const}}{T}.$$

Для анизотропных тел (кристаллов) κ и ϵ уже не скаляры, а симметричные тензоры 2-го ранга. Поэтому вместо (71.02) имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} D_x &= 4\pi P_{ox} + \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= 4\pi P_{oy} + \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= 4\pi P_{oz} + \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \right\}, \quad (71.04)$$

причем

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha} (\alpha, \beta = x, y, z).$$

Таким образом, электрические свойства анизотропного тела характеризуются не одним коэффициентом ϵ , а шестью в общем случае различными коэффициентами $\epsilon_{\alpha\beta}$, отчего даже при $\vec{P}_0 = 0$ векторы \vec{D} , \vec{P} и \vec{E} не параллельны друг другу.

Вернемся к веществам, в которых может существовать остаточная поляризация. К ним относятся сегнетоэлектрики, искусственно приготовленные электреты, пьезоэлектрические кристаллы (пьезоэлектрики) и пироэлектрические кристаллы (пироэлектрики).

Сегнетоэлектрики названы так по их основному представителю — сегнетовой соли (двойной натриево-калиевой соли винной кислоты $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6$). Большое применение имеет титанат бария (BaTiO_3). Для сегнетоэлектриков характерно существование остаточной поляризации лишь в некоторой области температур. Обычно существует характерная температура θ , такая, что при $T < \theta$ вещество оказывается сегнетоэлектриком, а при $T > \theta$ остаточная поляризация исчезает.

зает и вещество перестает быть сегнетоэлектриком. С термодинамической точки зрения такой переход является фазовым переходом второго рода.

В сегнетоэлектрической области проявляется явление гистерезиса: поляризация зависит не только от поля, а от всей предшествовавшей истории данного образца и оказывается многозначной функцией поля. Если взять неполяризованный образец ($P_0 = 0$) и постепенно увеличивать поле \vec{E} внутри образца, то поляризация постепенно увеличивается и стремится к постоянному значению (насыщению) $P_{\text{нас.}} = P_s$ (рис. 32, кривая OAB). При уменьшении напряженности поля \vec{E}

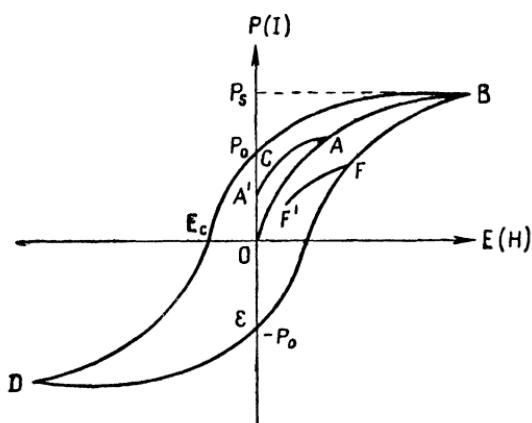


Рис. 32.

поляризация уменьшается медленнее, чем она возратилась, и при $E = 0$ каждая единица объема образца будет обладать остаточной поляризацией P_0 . Чтобы уничтожить остаточную поляризацию, надо создать поле \vec{E}_c (коэрцитивная сила), противоположное первоначальному. Увеличение обратного поля ведет к насыщению поляризации в направлении, противоположном первоначальному. Меняя напряженность

поля \vec{E} в обратном порядке, получим нижнюю кривую предельного цикла гистерезиса $BCD\&B$. Если не доводить поляризацию до насыщения, а начать уменьшать поле, например, в точке A или F , то изменение поляризации будет происходить соответственно по AA' или FF' .

Из вышеизложенного видно, что соотношение (71.01) применимо лишь в малой области изменения поля — вблизи какой-либо точки оси ординат, лежащей в интервале от $-P_0$ до $+P_0$.

Электретами называются электрически поляризованные тела, полученные при переводе в твердую фазу жидкости, состоящей из дипольных молекул. При этом отвердевание жидкости производится в сильном электрическом поле и диполи частично остаются закрепленными ориентированно.

Пьезоэлектриками называются ионные кристаллы, в которых под действием деформирующей силы (сжатия или растяжения) возникает дипольный электрический момент. В пироэлектриках дипольный электрический момент зависит от температуры. Пироэлектрический и пьезоэлектрический эффекты обычно связаны друг с другом.

§ 73. Магнетики

В § 70 показано, что магнитные свойства тел определяются вектором намагничивания \vec{I} . По аналогии с диэлектриками вектор намагничивания следовало бы рассматривать как функцию усредненного микроскопического поля, то есть как функцию индукции \vec{B} . Но по традиции считают \vec{I} функцией макроскопического поля \vec{H} : $\vec{I} = \vec{I}(\vec{H})$. При достаточно слабых полях в изотропных магнетиках

$$\vec{I} = \vec{I}_0 + \chi \vec{H} + \dots \quad (72.01)$$

Здесь \vec{I}_0 — остаточное (спонтанное) намагничивание, существующее лишь в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, χ — магнитная восприимчивость (для анизотропных тел χ — симметричный тензор второго ранга). Магнитная индукция

$$\vec{B} = 4\pi \vec{I}_0 + \mu \vec{H} + \dots, \quad (72.02)$$

где $\mu = 1 + 4\pi\chi$ — магнитная проницаемость среды.

В последнее время в электротехнической литературе величины χ и ϵ часто называют по аналогии с магнитными электрической восприимчивостью и электрической проницаемостью. Эти названия противоречат физическому смыслу этих величин. Действительно, соотношению $\vec{B} = \mu \vec{H}$ соответствует соотношение $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$ (так как аналогами являются \vec{E} и \vec{B} (соответственно \vec{H} и \vec{D})). Поэтому электрической проницаемостью следовало бы называть не ϵ , а $\frac{1}{\epsilon}$ — коэффициент, стоящий при \vec{D} .

Магнетики можно разделить на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

Диамагнетики характеризуются тем, что возникающее в магнитном поле намагничивание по направлению противоположно магнитному полю. Поэтому для них $\chi < 0$, $0 \leq \mu < 1$. Обычно вводят атомную (или грамм-молекулярную) восприимчивость $\chi_a = \chi \cdot \frac{A}{\rho}$, где A — атомный или молекулярный вес вещества, ρ — его плотность, а χ — восприимчивость единицы объема вещества. Диамагнитная восприимчивость не зависит от температуры и агрегатного состояния вещества. Порядок атомной восприимчивости χ_a — несколько миллионных долей единицы. Поэтому для диамагнетиков μ мало отличается от единицы.

В парамагнетиках возникающее под действием поля \vec{H} намагничивание по направлению совпадает с полем (изотропный парамагнетик), так что $\chi > 0$ и $\mu > 1$. Зависимость восприимчивости парамагнети-

ков от температуры дается законом Кюри — Вейса: $\chi = \frac{c}{T - \theta}$ ($T > \theta$), где c и θ — постоянные, характерные для данного парамагнетика.

Ферромагнетики характеризуются гистерезисом (рис. 32) и большим значением восприимчивости χ , зависящей от \vec{H} . К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель, гадолиний, их сплавы и некоторые соединения, а также некоторые сплавы неферромагнитных веществ (тройные сплавы Mn, Cu и Al). Последнее говорит о том, что ферромагнетизм — не атомное, а структурное свойство вещества. Для каждого ферромагнетика существует характерная ферромагнитная температура Кюри θ_f . При этой температуре происходит фазовый переход второго рода из ферромагнитного состояния (при $T < \theta_f$) в парамагнитное (при $T > \theta_f$). Парамагнитная температура Кюри θ_p всегда несколько выше температуры перехода θ_f . Например, для железа $\theta_f = 1043^\circ\text{K}$, $\theta_p = 1100^\circ\text{K}$. Кристаллы ферромагнетиков обладают сильно выраженной анизотропией.

Если ферромагнитное тело конечных размеров вводится во внешнее однородное магнитное поле \vec{H}_a и однородно намагничивается, то поле \vec{H} внутри тела связано с \vec{H}_a соотношением

$$\vec{H} = \vec{H}_a + \vec{H}_o = \vec{H}_a - N\vec{I}, \quad (72.03)$$

где $\vec{H}_o = -N\vec{I}$ — так называемое размагничающее или деполяризующее поле, создаваемое связанными магнитными зарядами на поверхности тела. Множитель N есть постоянная, зависящая от восприимчивости, геометрических размеров и формы образца и называемая размагничающим или деполяризующим фактором. Экспериментально измеряют зависимость \vec{B} от внешнего поля

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H}_a, \quad (72.04)$$

где μ_o — проницаемость, зависящая от вещества, формы и размеров тела. Легко видеть, что в области линейности

$$\mu_o = \frac{1 + 4\pi\chi}{1 + N\chi}. \quad (72.05)$$

§ 73. Обобщенный закон Ома

В электрическом поле движение свободных зарядов оказывается направленным, то есть возникает макроскопический электрический ток. Плотность тока свободных зарядов \vec{j} есть функция от напряженностей \vec{E} и \vec{H} . Влияние \vec{H} на \vec{j} незначительно и будет рассмотрено в § 122. Зависимость \vec{j} от напряженности \vec{E} при не очень больших \vec{E} линейная,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (73.01)$$

Коэффициент γ характеризует свойства вещества и называется коэффициентом электропроводности или удельной электропроводностью вещества. Соотношение (73.01) выражает закон Ома в дифференциальной форме. В случае анизотропного тела коэффициент электропроводности является симметричным тензором второго ранга.

Наряду с внешним электрическим полем ток свободных зарядов может быть вызван причинами неэлектрического происхождения, например градиентом концентрации, градиентом температуры, химическими силами и т. п. Все такие причины неэлектрического происхождения, вызывающие ток, по предложению И. Е. Тамма, называются сторонними. Сторонний ток можно написать по аналогии с (73.01) в форме

$$\vec{j}^{\text{стр.}} = \gamma \vec{E}^{\text{стр.}}, \quad (73.02)$$

где $\vec{E}^{\text{стр.}}$ — условно вводимое стороннее электродвижущее поле, характеризующее причины движения свободных зарядов. Полная плотность тока в изотропном теле равна

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}}).$$

Это соотношение выражает обобщенный закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент электропроводности в практических единицах имеет наименование $(\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$.

По величине γ все вещества делят на проводники $\gamma \geq 10^4 (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$, полупроводники $10^{-10} < \gamma < 10^4 (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$, изоляторы $\gamma < 10^{-10} (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$. Это деление основано также на зависимости γ от температуры. Твердые изоляторы и полупроводники обладают положительным температурным коэффициентом электропроводности $\left(\frac{d\gamma}{dT} > 0\right)$, металлические проводники — отрицательным $\left(\frac{d\gamma}{dT} < 0\right)$.

В зависимости от носителей тока различают проводимости: электронную (и дырочную), ионную и смешанную. Все металлы обладают электронной проводимостью. Проводимость полупроводников и изоляторов может быть электронной, ионной или смешанной. Ионная проводимость характерна для жидких электролитов. Подробнее природа электропроводности будет рассмотрена в главе VIII.

Для объемной плотности свободных зарядов $\rho_f = \rho$ не существует какого-либо соотношения связи с полем. Для однородного и изотропного тела $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Так как $\operatorname{div} \vec{j} = \gamma \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\gamma}{\epsilon} \rho$, то в силу закона сохранения получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\gamma}{\epsilon} \rho = 0. \quad (73.04)$$

Решая это уравнение, находим

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (73.05)$$

где ρ_0 — плотность заряда в начальный момент времени, а

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma}. \quad (73.06)$$

Из (73.05) следует, что в однородном и изотропном проводящем теле невозможно длительное существование объемного распределения свободного заряда. В каждой точке объема плотность ρ должна экспоненциально убывать вследствие взаимного расталкивания зарядов, которые выходят на поверхность тела. Скорость установления равновесия, при котором $\rho = 0$, тем больше, чем меньше время релаксации τ . Для металлов $\tau \approx 10^{16}$ СГС и, следовательно, $\tau \approx 10^{-17}$ сек (если $\epsilon \approx 1$). Для изоляторов соотношение (73.05) дает, например, $\tau \approx 2,5 \cdot 10^3$ сек, если $\gamma \approx 10^{-16} (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1} \approx 10^{-4}$ СГС, а $\epsilon = 3$.

§ 74. Условия на границе двух тел

С макроскопической точки зрения границу двух тел надо рассматривать как поверхность разрыва, на которой ϵ , μ , γ , а также векторы поля изменяются скачком. Дифференциальные уравнения

Максвелла на такой границе не применимы, так как входящие в них производные по координатам делаются бесконечными. Поэтому для границы двух тел устанавливаются граничные условия, которые являются своего рода предельной формой уравнений Максвелла.

Для вывода граничных условий допустим, что в слое толщиной Δn тело 1 непрерывно переходит в тело 2, то есть ϵ , μ , γ меняются непрерывно. На гра-

нице раздела 1-го и 2-го тел выберем малую площадку $\Delta\sigma$ (рис. 33). На этой площадке построим цилиндр высотой Δn так, чтобы площадка $\Delta\sigma$ находилась внутри цилиндра. Обозначим внешнюю нормаль к поверхности цилиндра через \vec{n} , а нормаль, проведенную к границе раздела из первой среды во вторую, через \vec{n}' . Интегрируя

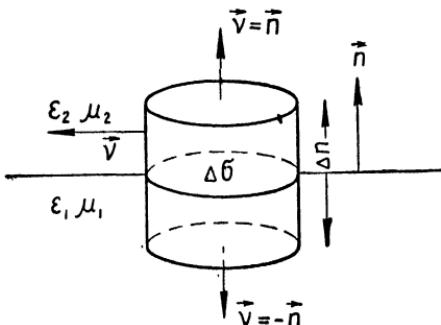


Рис. 33.

$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$ по объему цилиндра, получим

$$\int \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint D_v d\sigma = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta\sigma + \Psi_{\text{бок}} = \\ = 4\pi \int \rho dV = 4\pi \Delta e.$$

Здесь $\Psi_{\text{бок}}$ — поток индукции через боковую поверхность цилиндра, а Δe — свободный заряд внутри цилиндра. Если высоту цилиндра Δn стремить к нулю, то $\Psi_{\text{бок}}$ обращается в нуль. При этом Δe может не обращаться в нуль, так как на границе раздела может существовать свободный поверхностный заряд конечной плотности $\eta = \frac{\Delta e}{\Delta\sigma}$. Таким образом, в пределе получаем соотношение

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\eta, \quad (74.01)$$

показывающее, что нормальная составляющая вектора электрической индукции при переходе через границу раздела меняется скачком, если есть поверхностный свободный заряд.

Преобразуем уравнение (70.07). Интегрируя по объему цилиндра, получим

$$\int \operatorname{rot} \vec{H} dV = \oint_{(\sigma)} [\vec{v}, \vec{H}] d\sigma = [\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] \Delta\sigma + \int_{(\text{бок.})} [\vec{v}, \vec{H}] d\sigma = \\ = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} dV + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} dV.$$

При $\Delta n \rightarrow 0$ интеграл по боковой поверхности и $\int \vec{D} dV$ исчезают, а $\int \vec{j} dV = \vec{i} \Delta\sigma$, где \vec{i} — линейная плотность поверхностного тока на границе раздела. Окончательно имеем

$$[\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \quad (74.02)$$

Преобразуем это граничное условие. Разложим \vec{H} на составляющие вдоль касательной τ и нормали \vec{n} : $\vec{H} = H_\tau \vec{\tau} + H_n \vec{n}$. Подставим последнее в (74.02) и спроектируем на направление вектора $\vec{l} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$. Получим

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} l_t. \quad (74.03)$$

Таким образом, касательная составляющая магнитного поля меняется скачком, если есть поверхностный ток.

Аналогично из уравнений второй группы Максвелла (67.01) получаем

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (74.04)$$

то есть касательная составляющая \vec{E} и нормальная составляющая \vec{B} на границе двух сред непрерывны.

Применяя тот же метод к уравнениям (69.03) и (70.06), получим

$$P_{1n} - P_{2n} = \eta_g, \quad I_{2\tau} - I_{1\tau} = \frac{1}{c} i_{gl}. \quad (74.05)$$

Итак, плотность поверхностного связанныго заряда определяется скачком нормальной составляющей вектора поляризации, а поверхностная плотность тока связанных зарядов определяется скачком касательной составляющей вектора намагничивания.

На границе тела 1 и вакуума 2, в котором $\vec{I} = 0$, $\vec{P} = 0$, имеем

$$\eta_g = P_n, \quad \vec{i}_g = -[\vec{n}, \vec{H}], \quad (74.06)$$

то есть поверхностный связанный заряд определяется нормальной составляющей вектора поляризации, а поверхностный ток связанных зарядов определяется магнитной поляризацией вещества.

Из уравнения (70.16) получим

$$I_{1n} - I_{2n} = \eta_m. \quad (74.07)$$

Следовательно, поверхностная плотность η_m связанных магнитных зарядов определяется скачком нормальной составляющей вектора намагничивания.

Из граничных условий вытекает явление преломления силовых линий и линий индукции на границе двух сред. Так, например, пользуясь соотношениями $\vec{B} = \mu \vec{H}$, (74.03) при $i = 0$ и (74.04), получаем

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Введем углы α_1 и α_2 , образованные векторами \vec{B}_1 и \vec{B}_2 с нормалью \vec{n} так, что $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}}$. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (74.08)$$

то есть при переходе в среду с большей магнитной проницаемостью линии индукции преломляются, удаляясь от нормали, и при этом сгущаются. Аналогично получается преломление линий электрической индукции (если $\eta = 0$).

§ 75. Полная система уравнений Максвелла

Уравнения макроскопического электромагнитного поля в веществе можно записать в виде четырех групп уравнений Максвелла. Первая группа

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{I}) \quad (75.01)$$

определяет связь электрической индукции и макроскопического магнитного поля со свободными зарядами и токами проводимости. Вторая группа

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II}) \quad (75.02)$$

характеризует свойства поля. К уравнениям (75.01) и (75.02) добавляются материальные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I}, \\ \vec{j} &= \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стру.}}) \end{aligned} \right\} (\text{III}) \quad (75.03)$$

Для изотропных тел в малом интервале изменений поля имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= 4\pi \vec{P}_0 + \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = 4\pi \vec{I}_0 + \mu \vec{H}, \\ \vec{j} &= \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стру.}}), \end{aligned} \right\} (\text{III}') \quad (75.04)$$

которые справедливы при условии, что можно пренебречь гистерезисом. Для анизотропного вещества скаляры ϵ , μ , γ заменяются соответствующими тензорами второго ранга.

Если вещество неоднородно и есть явно выраженные границы раздела, то необходимо ввести граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 4\pi \eta, \quad [\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} i_l \\ \vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0, \quad [\vec{n}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1] = 0 \end{aligned} \right\} (\text{IV}) \quad (75.05)$$

или

$$\left. \begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi \eta, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_l \\ B_{2n} - B_{1n} &= 0, \quad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{aligned} \right\}, (\text{IV}') \quad (75.06)$$

где i_l — плотность поверхностного тока в направлении, перпендикулярном к $\vec{\tau}$.

Система уравнений (I—IV) выражает принцип причинности для макроскопического электромагнитного поля и позволяет однозначно вычислять электромагнитное поле в веществе. Область применимости этих уравнений не одинакова. Наиболее широка область применимости уравнений (I), (II) и (IV) групп. Уравнения (III) применимы лишь при условии, что можно пренебречь гистерезисом, последействием, дисперсией ϵ , μ и γ .

§ 76. Закон сохранения энергии для макроскопического поля

Макроскопическое поле есть усредненное микроскопическое поле. Однако плотность энергии макрополя нельзя получить усреднением плотности энергии микрополя, так как полная энергия, выраженная через квадраты микроскопических величин поля, не может быть представлена через усредненные величины. В нормальном состоянии макроскопического тела, соответствующем отсутствию электромагнитного возбуждения, то есть при $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$, $\vec{D} = 0$ и $\vec{H} = 0$ тело все же обладает электромагнитной энергией, так как \vec{E}'^2 и \vec{B}'^2 отличны от нуля. Энергия нормального состояния тела содержит собственную энергию всех составляющих его частиц, взаимные энергии электронов и ядер в атомах, атомов относительно друг друга, механическую энергию поступательного движения частиц и т. д. С макроскопической точки зрения эти составные части энергии микрополя рассматриваются как качественно различные формы энергии. Электромагнитной энергией тела с макроскопической точки зрения является лишь та часть энергии микрополя, которая соответствует переходу от нормального состояния тела к некоторому состоянию макроскопического электромагнитного возбуждения, в котором отлична от нуля хотя бы одна из макроскопических величин ρ , \vec{j} , η , \vec{i} , \vec{E} , \vec{B} и т. д. Эта макроскопическая электромагнитная энергия выражается квадратичной функцией макроскопических полей.

Найдем выражение для энергии макроскопического поля и формулировку закона сохранения энергии поля. Возьмем уравнения Максвелла

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H};$$

умножим скалярно первое на \vec{E} , а второе на \vec{H} и, сложив их, получим

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) - \vec{j} \vec{E}. \quad (76.01)$$

Допустим, что

$$\frac{1}{4\pi} (\vec{E} d\vec{D} + \vec{H} d\vec{B}) = d\omega \quad (76.02)$$

есть полный дифференциал. Тогда (76.01) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{S} - \vec{j} \vec{E}, \quad (76.03)$$

где

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (76.04)$$

Произведение $\vec{j} \vec{E}$ есть работа, произведенная макроскопическим полем над свободными зарядами в единице объема в единицу времени.

Поэтому w надо истолковать как плотность макроскопической электромагнитной энергии, а \vec{S} — как вектор плотности потока энергии (вектор Умова — Пойнтинга).

Для существования плотности энергии w необходимо, чтобы левая часть (76.02) была полным дифференциалом или чтобы из нее можно было выделить полный дифференциал. Если \vec{D} и \vec{B} зависят соответственно от \vec{E} и \vec{H} линейно и среда однородная и изотропная, то $\vec{E} d\vec{D} = \epsilon \vec{E} d\vec{E} = d \frac{\epsilon E^2}{2}$. Аналогично $\vec{H} d\vec{B} = d \frac{\mu H^2}{2}$. Поэтому

$$w = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}}{8\pi}. \quad (76.05)$$

В случае анизотропных тел $d\omega$ будет полным дифференциалом лишь при условии, что $(^2)\epsilon$ и $(^2)\mu$ — симметричные тензоры, то есть

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (76.06)$$

Действительно, если $\vec{E} d\vec{D} = d(\vec{E}\vec{D}) = \vec{D} d\vec{E}$ — полный дифференциал, то и $\vec{D} d\vec{E} = \sum_a D_a dE_a$ есть полный дифференциал. Тогда

$$\frac{\partial D_\beta}{\partial E_\alpha} = \frac{\partial D_\alpha}{\partial E_\beta}$$

то есть $\epsilon_{\beta\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}$. Аналогично для $(^2)\mu$.

Таким образом, для анизотропных тел

$$w = \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha, \beta} (\epsilon_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta + \mu_{\alpha\beta} H_\alpha H_\beta). \quad (76.07)$$

Если связь между индукциями и напряженностями нелинейная (сегнетоэлектрики, ферромагнетики), то согласно (76.02)

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\vec{D}} \vec{E} d\vec{D} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B}$$

(предполагается, что гистерезиса нет). При наличии гистерезиса можно написать $\frac{1}{4\pi} \vec{H} d\vec{B} = \frac{1}{4\pi} d(\vec{H} \vec{B} - \frac{1}{2} H^2) - \vec{I} d\vec{H}$. Интегрируя последнее по всей петле гистерезиса (рис. 32), получим

$$\frac{1}{4\pi} \oint \vec{H} d\vec{B} = - \oint \vec{I} d\vec{H} = - q_{\text{гист.}} \quad (76.09)$$

Интеграл в (76.09) равен площади петли гистерезиса и не обращается в нуль. Величина $q_{\text{гист.}}$ дает теплоту, выделяющуюся в единице объема тела при перемагничивании. Аналогично рассматривается теплота гистерезиса в сегнетоэлектриках.

Вернемся к выражению (76.03). При наличии сторонних э. д. с. $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$. Поэтому $\vec{j}\vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} - \vec{j}\vec{E}^{\text{ст}}$. Подставляя это в (76.03), получим

$$\vec{j}\vec{E}^{\text{ст}} = \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \frac{\vec{j}^2}{\gamma}. \quad (76.10)$$

Интегрируя (76.10) по некоторому объему тела V и применяя теорему Остроградского, имеем

$$N^{\text{ст}} = \int_V \vec{j}\vec{E}^{\text{ст}} dV = \frac{d}{dt} \int_V w dV + \oint_S S_n d\sigma + \int_V \frac{\vec{j}^2}{\gamma} dV. \quad (76.11)$$

Последний член

$$Q' = \int_V \frac{\vec{j}^2}{\gamma} dV \quad (76.12)$$

выражает теплоту Джоуля—Ленца, выделяющуюся в объеме тела в единицу времени.

Уравнение (76.11) выражает закон сохранения энергии: работа сторонних сил в объеме V идет на изменение энергии макроскопического поля в этом объеме, на поток электромагнитной энергии через поверхность S , ограничивающую объем, и на выделение теплоты Джоуля—Ленца. Заметим, что Q' всегда положительно, то есть в проводящем макроскопическом теле всегда происходит необратимый процесс превращения макроскопической электромагнитной энергии во внутреннюю энергию тела. Поскольку работа сторонних сил рассматривалась при постоянной температуре тела, электромагнитную энергию

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}}{8\pi} dV \quad (76.13)$$

следует рассматривать как часть свободной энергии тела. Так как ϵ и μ являются, вообще говоря, функциями абсолютной температуры T тела, то и электромагнитная энергия W есть функция не только \vec{E} и \vec{H} , но и T .

§ 77. Силы, действующие на тела в электрическом и магнитном полях

Рассмотрим несколько упрощенно силы, действующие на тело во внешнем поле (подробно этот вопрос разобран, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Электродинамика сплошных сред»). Будем рассматривать тело как совокупность молекул, обладающих электрическим моментом \vec{p} и магнитным моментом \vec{m} . Получим для электрической и магнитной сил, действующих в неоднородном поле

на диполи, по (32.07) выражения¹

$$\vec{F}'_e = (\vec{p}\nabla)\vec{E}'_\partial, \quad \vec{F}'_m = (\vec{m}, \nabla)\vec{H}'_\partial, \quad (77.01)$$

Здесь \vec{E}'_∂ и \vec{H}'_∂ — микрополя, действующие на каждую молекулу. Умножая выражения (77.01) на число молекул в единице объема и усредняя их по макроскопически малому объему, получим плотности сил, действующих в электрическом и магнитном полях на связанные заряды,

$$\vec{f}_g^{(e)} = \overline{(\vec{P}'\nabla)\vec{E}'_\partial}, \quad \vec{f}_g^{(m)} = \overline{(\vec{I}'\nabla)\vec{H}'_\partial}.$$

В первом приближении среднее от произведения можно заменить произведением средних значений и среднее значение действующего поля \vec{E}'_∂ заменить макроскопическим полем \vec{E} . Тогда

$$\vec{f}_g^{(e)} = (\vec{P}\nabla)\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{f}_g^{(m)} = (\vec{I}\nabla)\vec{H}. \quad (77.02)$$

Рассмотрим силу, действующую на магнетик. Вводя в (77.02) по (72.01) $\vec{I} = \vec{I}_0 + \chi\vec{H}$, где \vec{I}_0 — остаточное намагничивание, получим

$$\vec{f}_g^{(m)} = (\vec{I}_0\nabla)\vec{H} + \frac{\mu - 1}{4\pi}(\vec{H}\nabla)\vec{H}. \quad (77.03)$$

Если в объеме магнетика $\vec{j} = 0$ и $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$, то $\text{rot } \vec{H} = 0$ и, следовательно, $(\vec{H}\nabla)\vec{H} = \frac{1}{2}\nabla H^2 - [\vec{H}, \text{rot } \vec{H}] = \frac{1}{2}\nabla H^2$; поэтому

$$\vec{f}_g^{(m)} = (\vec{I}_0\nabla)\vec{H} + \frac{\mu - 1}{8\pi}\nabla H^2 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2. \quad (77.04)$$

Первый член в (77.04) отличен от нуля только для ферромагнетиков, второй — для любого магнетика. Для парамагнетиков $\mu - 1 > 0$, для диамагнетиков $\mu - 1 < 0$. Поэтому сила $\vec{f}_2 = \frac{\mu - 1}{8\pi}\nabla H^2$ увлекает пара- и ферромагнетики в области наибольшей напряженности поля, а диамагнетики — выталкивает из этих областей.

¹ Эти выражения справедливы для произвольного поля. Действительно, главный вектор сил, действующих на все заряды, равен $\vec{F}' = \sum_a e_a \vec{E}(\vec{r}_0 + \vec{r}_a)$,

где \vec{r}_0 — радиус-вектор центра молекулы, \vec{r}_a — радиус-вектор заряда e_a относительно этого центра. Разлагая \vec{F}' в ряд и пользуясь тем, что $\sum_a e_a = 0$, получим

$$\vec{F}' = \sum_a e_a (\vec{r}_a \nabla) \vec{E}(\vec{r}_0) = (\vec{p}\nabla) \vec{E}.$$

Выражение (77.03) не учитывает зависимости магнитной восприимчивости от объема и поэтому не содержит так называемых стрикционных сил, которые здесь не рассматриваются.

Проектируя $\vec{f}_g^{(m)}$ в (77.02) на произвольное направление \vec{a} , получим

$$\begin{aligned} f_a^{(m)} &= (\vec{I}\nabla)(\vec{a}\vec{H}) = \vec{I} \operatorname{grad} H_a = \\ &= \operatorname{div}(\vec{I}H_a) - H_a \operatorname{div} \vec{I}. \end{aligned}$$

Проекция силы, действующей на объем V магнита, равна

$$F_a^{(m)} = \int_V f_a^{(m)} dV = \oint_{(\vec{s})} I_n H_a d\sigma - \int_V H_a \operatorname{div} \vec{I} dV.$$

Здесь $I_n = \eta_m$ есть плотность поверхностных магнитных зарядов, $a - \operatorname{div} \vec{I} = \rho_m$ — плотность объемных магнитных зарядов. Поэтому

$$F_a^{(m)} = \vec{a} \int_V \rho_m \vec{H} dV + \vec{a} \oint_{(V)} \eta_m \vec{H} d\sigma.$$

Но \vec{a} — произвольный постоянный вектор, поэтому сила, действующая на магнит, равна

$$\vec{F}^{(m)} = \int_V \rho_m \vec{H} dV + \oint_{(V)} \eta_m \vec{H} d\sigma. \quad (77.05)$$

Отсюда следует, что плотности объемных и поверхностных сил, испытываемых магнитными зарядами магнита, равны

$$\vec{f}^{(m)} = \rho_m \vec{H}, \quad \vec{f}_{\sigma}^{(m)} = \eta_m \vec{H}. \quad (77.06)$$

Мы показали, таким образом, что магнитное поле действует на связанные магнитные заряды совершенно так же, как электрическое поле действует на электрические заряды. Однако в отличие от реально существующих электрических зарядов магнитные заряды фиктивны. Свободных магнитных зарядов в природе не существует, а связанные заряды определяются вектором намагничивания, то есть электрическим током.

Аналогично (77.03) для диэлектрика в электростатическом поле получим

$$f^{(e)} = (\vec{P}_0 \nabla) \vec{E} + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2. \quad (77.07)$$

Первый член в (77.07) отличен от нуля лишь для сегнетоэлектриков и электретов. Так как $\epsilon > 1$, диэлектрик (при $\vec{P}_0 = 0$) всегда будет увлекаться в область, где напряженность поля наибольшая.

В заключение рассмотрим силу, действующую на свободные заряды. Усреднив плотность силы Лоренца

$$\vec{f}' = \rho' \vec{E}' + \frac{1}{c} [\vec{j}', \vec{B}']$$

и заменив приближенно среднее от произведения произведением средних значений, получим макроскопическую силу

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}]. \quad (77.08)$$

Существенно отметить, что магнитная сила определяется вектором индукции \vec{B} .

§ 78. Исторические замечания

Влияние вещества на электрическое и магнитное поля было установлено М. Фарадеем. Многочисленные опыты, устанавливающие влияние среды на электрические явления (электростатическую индукцию), изложены Фарадеем в 11-й серии его «Экспериментальных исследований» (1837). В частности, он установил влияние диэлектрической прослойки на емкость сферического конденсатора. Им введены термины «диэлектрик», «диэлектрическая константа». Исследование влияния среды на поле привело Фарадея к формулировке принципа близкодействия, лежащего в основе современного учения о поле. Фарадея открыл влияние вещества на магнитное поле (1845) и установил существование диамагнитных и парамагнитных тел (термины предложены Фарадеем). Названия «магнитная проницаемость», «магнитная восприимчивость» предложены Томсоном (Кельвином).

Первые исследования свойств ферромагнетиков провел Александр Григорьевич Столетов и изложил в диссертации «Исследование о функции намагничения мягкого железа»¹. Гистерезис ферромагнетиков был открыт в 1880 году Варбургом (1846—1931) и независимо от него в 1882 году Юингом (1855—1935).

В 1895 году Пьер Кюри (1859—1906) нашел, что диамагнетизм независим от температуры, а парамагнитная восприимчивость подчиняется закону $\chi T = \text{const}$ (частный случай закона Кюри—Вейса). Кюри открыл также фазовый переход из ферромагнитного состояния в парамагнитное.

Гистерезис для сегнетоэлектриков был открыт значительно позже. Свойства сегнетовой соли исследованы И. В. Курчатовым с сотрудниками. Свойства титаната бария были изучены Б. М. Вулом и И. М. Гольдманом (1945).

Первые теоретические работы по магнетикам, основанные на представлении о дальнодействии, принадлежат Пуассону (1845). Теорию Пуассона применил к диэлектрикам Моссотти. Клаузиус (1822—1888) развил эту теорию в своих работах.

Законы электрического тока были установлены экспериментально и обоснованы теоретически в 1826—1827 гг. Омом (1787—1854). Закон выделения теплоты током найден экспериментально в 1841 году Джоулем (1818—1889) и более точно исследован академиком Э. Х. Ленцом.

Максвелл в своих работах опирался на идеи Фарадея о близкодействии и на математическую теорию Пуассона, Моссотти и других. Вместо сил Максвелл ввел соответствующие напряженности \vec{E} и \vec{H} и индукции \vec{B} и \vec{D} .

¹ А. Г. Столетов, Собрание сочинений, т. I, М.—Л., ГИТТЛ, 1939.

Максвелл открыл ток смещения, в результате чего уравнение (75.01) для магнитного поля приняло форму, симметричную уравнению электромагнитной индукции (75.02).

В уравнениях Максвелла для электромагнитного поля вещество характеризуется суммарным образом при помощи определяемых из опыта величин ϵ , μ и γ . При этом оставалось неясным, почему поле в веществе характеризуется не двумя напряженностями, как в вакууме, а четырьмя векторами \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} и \vec{D} . Неясной была также природа коэффициентов ϵ , μ , γ , характеризующих вещество.

Крупным шагом в развитии учения об электромагнитном поле явилась электронная теория Лоренца (§ 24). Эта теория позволила понять (по крайней мере в принципе) электромагнитные свойства вещества с микроскопической точки зрения и выяснила природу макроскопических величин как усредненных микроскопических напряженностей, а также величин \vec{D} и \vec{H} как смешанных величин, зависящих не только от поля, но и от вещества.

ГЛАВА VI

**СТАЦИОНАРНОЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ
МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ПОЛЕ**

§ 79. Электростатика и магнитостатика

Законы статических, стационарных и квазистационарных полей вытекают из уравнений Максвелла (§ 75). Статическое и стационарное поля не меняются с течением времени и $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Поэтому уравнения поля в 1-й и 2-й группах принимают вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (79.01)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (79.02)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (79.03)$$

Уравнения (79.01) представляют собой основные уравнения электростатики. Уравнения (79.02) — основные уравнения магнитного поля стационарных токов и постоянных магнитов. Уравнение (79.03) есть основное уравнение стационарных токов и выражает замкнутость линий тока.

Дифференциальные уравнения поля должны быть дополнены материальными соотношениями (уравнениями состояния) и граничными условиями. Материальные соотношения для диэлектриков и магнетиков согласно (75.03) имеют вид

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I}, \quad (79.04)$$

где \vec{P} и \vec{I} — векторы электрической и магнитной поляризаций, зависящие от свойств среды. Для изотропного диэлектрика или ферромагнетика, в котором существует остаточная поляризация, для слабых полей можно написать

$$\vec{D} = 4\pi \vec{P}_0 + \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = 4\pi \vec{I}_0 + \mu \vec{H}. \quad (79.05)$$

Здесь \vec{P}_0 и \vec{I}_0 — соответственно векторы остаточной (спонтанной), электрической и магнитной поляризаций, а ϵ и μ — электический коэффициент и магнитная проницаемость вещества. Кроме того, необходимо добавить уравнение для плотности тока

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стру.}}), \quad (79.06)$$

где $E^{\text{стру.}}$ — напряженность стороннего поля, а γ — коэффициент электропроводности вещества.

Границные условия имеют вид:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\eta, \quad E_{2t} - E_{1t} = 0, \quad (79.07)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (79.08)$$

$$j_{2n} = j_{1n}, \quad (79.09)$$

где η — поверхностная плотность свободных зарядов, i — поверхностная плотность свободных токов (в направлении, перпендикулярном к касательной \vec{t}). Нормаль \vec{n} направлена из первой среды во вторую.

Пользуясь уравнениями (79.02), (79.05) и (79.08), легко получить общие идеализированные уравнения поля постоянных магнитов. Постоянный магнит есть тело, в котором существует остаточное намагничивание \vec{I}_0 . В силу (79.05) система (79.02) принимает вид

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{H} = \frac{4\pi}{\mu} \rho_m. \quad (79.10)$$

Здесь $\rho_m = -\text{div } I_0$ есть плотность связанных магнитных зарядов. Вещество считается однородным, поэтому μ вынесено из-под знака дивергенции. Границные условия (79.08) принимают вид:

$$\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 4\pi\eta_{m_0}, \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (79.11)$$

где $\eta_{m_0} = I_{01} - I_{02}$ — поверхностная плотность связанных магнитных зарядов, обусловленная остаточным намагничиванием граничащих тел.

При отсутствии токов ($j = 0, i = 0$) уравнения (79.10) и (79.11) совпадают с уравнениями электростатики, с той лишь разницей, что магнитное поле постоянных магнитов определяется связанными магнитными зарядами, а электростатическое поле определяется как связанными, так и свободными зарядами. Поэтому при решении задачи электростатики одновременно решается задача магнитостатики. Основная задача электростатики — определить поле по заданному распределению зарядов.

§ 80. Влияние диэлектрика на электрическое поле

Электростатическое поле в произвольном (неоднородном) диэлектрике описывается уравнениями (79.01)

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (80.01)$$

где ρ — плотность свободных зарядов, которая предполагается заданной. Из второго уравнения следует, что \vec{E} есть потенциальный вектор и может быть выражен через электростатический потенциал

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (80.02)$$

Задача, таким образом, сводится к определению электростатического потенциала.

Подставим в (80.01) $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$; получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}). \quad (80.03)$$

Отсюда следует, что источниками электростатического поля являются свободные заряды ρ и связанные заряды $\rho_g = -\operatorname{div} \vec{P}$. Из (80.02) и (80.03) получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}), \quad (80.04)$$

определенное распределение потенциала в зависимости от распределения свободных зарядов и поляризации \vec{P} . Поляризация учитывает влияние диэлектрика на поле свободных зарядов.

В случае изотропного однородного диэлектрика, не обладающего сегнетоэлектрическими свойствами, поляризация пропорциональна напряженности или индукции,

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \vec{D}.$$

Поэтому объемная плотность связанных зарядов равна

$$\rho_g = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \operatorname{div} \vec{D}$$

или в силу (80.01)

$$\rho_g = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho. \quad (80.05)$$

Это значит, что возникающий в однородном диэлектрике связанный объемный заряд всегда противоположен по знаку свободному заряду в той же точке. Поэтому действие диэлектрика сводится к уменьшению абсолютной величины суммарного заряда, определяющего поле.

Суммарный заряд, стоящий в правой части уравнения Пуассона (80.04), в случае однородного диэлектрика равен

$$\rho - \operatorname{div} \vec{P} = \rho + \rho_g = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (80.06)$$

Уравнение Пуассона принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (80.07)$$

Тот же результат получается, если в (80.01) подставить $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и, считая $\epsilon = \text{const}$, разделить на ϵ .

Из (80.07) видно, что действие диэлектрика сводится к уменьшению свободных зарядов в ϵ раз. Для неограниченного однородного диэлектрика решение уравнения (80.07) получается из (27.06) заменой ρ через $\frac{\rho}{\epsilon}$.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (80.08)$$

Следовательно, потенциал системы свободных зарядов, погруженных в однородный и изотропный диэлектрик, в ϵ раз меньше потенциала, создаваемого тем же распределением заряда ρ в вакууме.

Обозначим через $\varphi_0(\vec{r})$ интеграл (27.06). Получим:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\epsilon} \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_0, \quad \text{где} \quad \vec{E}_0 = -\nabla \varphi_0$$

— поле при отсутствии диэлектрика. Но $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$. Следовательно, $\vec{D} = \vec{E}_0$. Таким образом, вектор электрической индукции есть напряженность электрического поля, создаваемого свободными зарядами в вакууме, что вытекает также из уравнения (80.01).

Для свободного точечного заряда e в диэлектрике

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon r}, \quad \vec{E} = \frac{e}{\epsilon r^2} \vec{r}_0 = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}. \quad (80.09)$$

Последней формулой обычно пользуются для определения диэлектрического коэффициента в элементарном курсе электричества.

§ 81. Неоднородные диэлектрики

Рассмотрим два типа неоднородных диэлектриков: 1) диэлектрики, в которых ϵ является непрерывной функцией координат и 2) диэлектрики, состоящие из разделенных резкими границами однородных частей, каждая из которых обладает своим значением диэлектрического коэффициента ϵ .

В первом случае потенциал определяется уравнением

$$\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} \varphi = -4\pi \rho, \quad (81.01)$$

из которого можно определить φ , если известны ρ и ε как функции координат.

Во втором случае потенциал в каждой однородной области удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_a = -\frac{4\pi}{\varepsilon_a} \rho, \quad (81.02)$$

где a — номер области. На границе каждой двух областей a и b надо учитывать граничные условия

$$D_{bn} - D_{an} = \varepsilon_b E_{bn} - \varepsilon_a E_{an} = 4\pi \eta_{ab}, \quad E_{bt} - E_{at} = 0, \quad (81.03)$$

и в бесконечности $\varphi = 0$.

Чтобы на границах областей поле было конечно, необходимо потребовать непрерывность потенциала на границе

$$\varphi_b = \varphi_a. \quad (81.04)$$

Это условие предполагает отсутствие двойных электрических слоев.

Задача

В бесконечный однородный диэлектрик с диэлектрическим коэффициентом ε_2 введен диэлектрический шар радиуса a с диэлектрическим коэффициентом ε_1 . В центре шара находится свободный точечный заряд e . Определить векторы \vec{D} , \vec{E} и поверхностный связанный заряд на границе диэлектриков.

Решение. Начало координат выберем в точке, занимаемой зарядом. В силу сферической симметрии $\nabla^2 \varphi$ сводится к $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi)$; поэтому потенциалы φ_1 и φ_2 в областях 1 и 2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \varphi_2) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \varphi_1) = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} \rho = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} e \delta(r). \quad (a)$$

Отсюда

$$\varphi_2 = \frac{C_2}{r} + C_3, \quad \varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + C_1. \quad (b)$$

Из условия $\varphi_2(\infty) = 0$ следует, что $C_3 = 0$. Касательные составляющие напряженностей равны нулю. Поэтому граничное условие $E_{2t} = E_{1t}$ автоматически выполнено. Постоянная C_2 определяется из граничного условия для индукции. Напряженности и векторы индукции согласно (б) равны

$$E_1 = E_{1r} = \frac{e}{\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2 = E_{2r} = \frac{C_2}{r^2}, \quad D_{1r} = \frac{e}{r^2}, \quad D_{2r} = \frac{\varepsilon_2 C_2}{r^2}. \quad (b)$$

Нормаль \vec{n} к границе раздела совпадает с \vec{r}_0 . Свободных поверхностных зарядов нет. Поэтому при $r = a$ $D_{2r} = D_{1r}$. Откуда $C_2 = \frac{e}{\varepsilon_2}$. Следовательно,

$$E_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 r^2}, \quad D_1 = D_2 = \frac{e}{r^2}. \quad (g)$$

Постоянная C_1 находится из условия непрерывности потенциала $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, то есть

$$\frac{e}{\varepsilon_1 a} + C_1 = \frac{e}{\varepsilon_2 a}, \quad C_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{e}{a}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{e}{a}, \quad \varphi_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 r}. \quad (\text{д})$$

Поверхностный связанный заряд на границе $r = a$

$$\eta_g = P_{1r} - P_{2r} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1r} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_{2r} = \frac{e}{4\pi a^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Следовательно, при $e > 0$, $\eta_g > 0$, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $\eta_g < 0$, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Картина линий векторов \vec{D} и \vec{E} в случае $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ изображена соответственно на

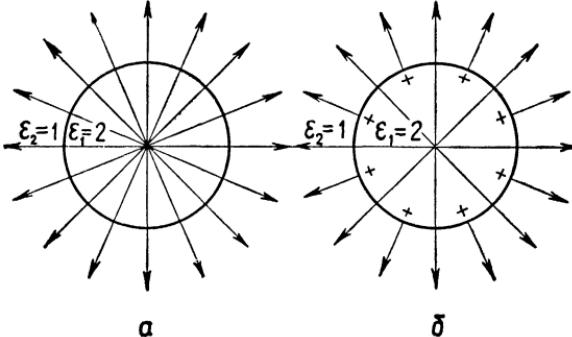


Рис. 34.

рисунке 34, а и б. На границе $r = a$ линии \vec{D} непрерывны, так как $\eta = 0$, а линии \vec{E} разрывны, так как $\eta_g \neq 0$.

§ 82. Потенциал поляризованной среды

В уравнении (80.04) \vec{P} содержит как поляризацию, индуцированную полем, так и остаточную поляризацию диэлектрика. Если ρ и \vec{P} отличны от нуля в конечной области диэлектрика, то потенциал

$$\varphi_1(\vec{r}) = \int \frac{\rho - \operatorname{div} \vec{P}}{R} dV', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (82.01)$$

Учитывая, что на границе раздела двух диэлектриков плотность связанныго заряда $\eta_g = P_{1n} - P_{2n}$, получим для потенциала поверхности заряда

$$\varphi_2(\vec{r}) = \oint_{(\sigma)} \frac{\eta + P_{1n} - P_{2n}}{R} d\sigma'. \quad (82.02)$$

Полный поляризационный потенциал, создаваемый первой областью, будет равен сумме объемного и поверхностного потенциалов,

$$\varphi_p(\vec{r}) = \int \frac{-\operatorname{div} \vec{P}_1}{R} dV' + \oint_{(\sigma)} \frac{P_{1n}}{R} d\sigma'. \quad (82.03)$$

Второй интеграл берется по всей поверхности, ограничивающей первую область. Учитывая, что в $\operatorname{div}' \vec{P}_1$ дифференцирование производится по \vec{r}' , имеем

$$\frac{1}{R} \operatorname{div}' \vec{P} = \operatorname{div}' \frac{\vec{P}}{R} - \vec{P} \nabla' \frac{1}{R}.$$

Интеграл по объему от $\operatorname{div}' \frac{\vec{P}}{R}$ преобразуется в поверхностный интеграл, который сокращается со вторым членом в (82.03). Поэтому потенциал поляризованной среды равен

$$\varphi_p(\vec{r}) = \int \vec{P} \nabla' \frac{1}{R} dV' = \int_{(V)} \frac{\vec{P} \vec{R}}{R^3} dV'. \quad (82.04)$$

Согласно (29.01) $d\varphi = \frac{\vec{P}' R}{R^3} dV'$ есть потенциал бесконечно малого диполя $d\vec{p} = \vec{P}' dV'$, находящегося в объеме dV' . Таким образом, потенциал φ_p поляризованного тела равен сумме потенциалов всех бесконечно малых диполей, из которых состоит полная поляризация.

§ 83. Диэлектрический шар в однородном поле

Предположим, что в неограниченной диэлектрической среде с коэффициентом ϵ_a имеется однородное электрическое поле $E_z = E_0$, направленное вдоль оси oz . Определим, как изменится это поле, если в среду внести диэлектрический шар радиуса a с диэлектрическим коэффициентом ϵ_i . Искомый потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ и на больших расстояниях от шара ($r \rightarrow \infty$) переходить в потенциал однородного поля

$$\varphi(z) = -E_0 z. \quad (83.01)$$

Внутри шара поле вызовет однородную поляризацию и останется однородным. Поэтому при $r \leq a$

$$\varphi_i = -C_1 z = -C_1 r \cos \theta \quad (83.02)$$

(центр шара выбран за начало сферической системы координат, а направление поля — за полярную ось). Вне шара потенциал будет определяться потенциалом (83.01) и потенциалом связанный поверхностью заряда, соответствующего некоторому диполю с моментом p , т. е. при $r \geq a$:

$$\varphi_a = -E_0 Z + \frac{p \cos \theta}{r^2} = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (83.03)$$

Очевидно, φ_i и φ_a удовлетворяют уравнению Лапласа.

Постоянные C_1 и p должны быть определены из граничных условий — условия непрерывности нормальной составляющей вектора индукции и условия непрерывности касательной составляющей напряженности. Из (83.02) и (83.03) для составляющих поля имеем

$$\begin{aligned} E_r^{(i)} &= -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = C_1 \cos \vartheta, \quad E_\vartheta^{(i)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta} = -C_1 \sin \vartheta, \\ E_r^{(a)} &= -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} = E_0 \cos \vartheta + \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \\ E_\vartheta^{(a)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta} = -E_0 \sin \vartheta + p \frac{\sin \vartheta}{r^3}. \end{aligned}$$

В силу симметрии азимутальная составляющая $E_\alpha = 0$. Из условия непрерывности $D_n = D_r$ и $E_t = E_\vartheta$ при $r = a$ получаем

$$\epsilon_i C_1 = \epsilon_a \left(E_0 + \frac{2p}{a^3} \right), \quad -C_1 = -E_0 + \frac{p}{a^3}.$$

Откуда

$$p = \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0, \quad C_1 = \frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0. \quad (83.04)$$

Потенциал и напряженность поля даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= -\frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 r \cos \vartheta, \\ \varphi_a &= -E_0 r \cos \vartheta + \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (83.05)$$

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(i)} &= \frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 \cos \vartheta, \quad E_\vartheta^{(i)} = -\frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 \sin \vartheta. \\ E_r^{(a)} &= E_0 \cos \vartheta + \frac{2(\epsilon_i - \epsilon_a)}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^3}, \\ E_\vartheta^{(a)} &= -E_0 \sin \vartheta + \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0 \frac{\sin \vartheta}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (83.06)$$

Дипольный момент p определяется связанным зарядом, возникшим на поверхности шара вследствие поляризации шара и окружающей среды. Радиальные составляющие векторов поляризации равны

$$P_r^{(i)} = \frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} E_r^{(i)}, \quad P_r^{(a)} = \frac{\epsilon_a - 1}{4\pi} E_r^{(a)},$$

откуда находим поверхностную плотность связанного заряда

$$\eta_g = (P_r^{(i)} - P_r^{(a)})_{r=a} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 \cos \vartheta = \frac{p}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cos \vartheta.$$

Таким образом, одна половина шара получает положительный заряд, а другая — отрицательный.

Задачи

1. В неограниченном однородном диэлектрике создано однородное поле E . В диэлектрике вырезана шаровая полость радиуса a . Определить напряженность поля в полости,

Решение. Полость можно рассматривать как диэлектрик с $\epsilon_l = 1$. Обозначим диэлектрический коэффициент среды через ϵ . Пользуясь (83.05), получим

$$\varphi_l = -\frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} Ez, \quad E^l = -\frac{\partial \varphi_l}{\partial z} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} E.$$

2. В неограниченном однородном диэлектрике создано однородное поле E . В диэлектрике вырезана цилиндрическая полость радиуса a с образующей l , параллельной полю. Определить напряженность поля на оси полости и рассмотреть случаи $l \gg a$ и $l \ll a$.

Решение. Напряженность поля внутри полости складывается из напряженности E и напряженностей E_+ и E_- полей, создаваемых поверхностными зарядами $\pm \eta$ на торцах цилиндра. Напряженность поля заряда $+\eta$ в точке x определяется формулой (задача 3, § 27):

$$E_+(x) = 2\pi\eta - \frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Напряженность поля заряда $-\eta$ в той же точке равна

$$E_-(x) = 2\pi\eta + \frac{2\pi\eta(x - l)}{\sqrt{a^2 + (x - l)^2}}.$$

Поэтому $E_l = E + E_+ + E_- = E + 4\pi\eta - \frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{2\pi\eta(x - l)}{\sqrt{a^2 + (x - l)^2}}$. Если $x \approx \frac{l}{2} \ll a$, то $E_l = E + 4\pi\eta = E + 4\pi P = D$. Если $x \approx \frac{l}{2} \gg a$, то $E_l = E + 4\pi\eta - 2\pi\eta \frac{x}{|x|} - 2\pi\eta \frac{l-x}{|l-x|} = E$. Таким образом, в вытянутой полости ($l \gg a$) действующая на пробный заряд e сила равна $F = eE_l = eE$. Отношение $\frac{F}{e}$ измеряет напряженность поля. В сплюснутой полости ($l \ll a$) $F = eE_l = eD$ и отношение $\frac{F}{e}$ измеряет индукцию.

§ 84. Энергия электрического поля в диэлектриках

Свободную энергию поля в диэлектрике можно определить по формуле

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV, \quad (84.01)$$

где интегрирование производится по всему объему, занятому полем. Это выражение удобно представить в форме интеграла по объему, занятому свободными зарядами. Допустим, что поверхностных зарядов нет (всякий поверхностный заряд будем считать распределенным в слое конечной толщины с конечной объемной плотностью). Так как $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$, то, повторяя рассуждения § 31, получим

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (84.02)$$

Отсюда можно перейти к случаю поверхностных зарядов. Пусть на поверхности $\rho = \eta\delta(n)$, где n — координата, отсчитанная по нормали к поверхности, η — поверхностная плотность свободных зарядов. Вблизи поверхности $dV = d\sigma dn$ ($d\sigma$ — элемент поверхности). Выделим область интегрирования в (84.02) непосредственно вблизи заряженной поверхности. Получим

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int_{(S)} \eta\varphi d\sigma. \quad (84.03)$$

Первый интеграл берется по всему объему, в котором свободный объемный заряд ρ отличен от нуля, второй — по всем поверхностям, на которых свободный поверхностный заряд отличен от нуля.

§ 85. Постоянные магниты

Остаточное намагничивание вещества характеризуется вектором остаточного намагничивания \vec{I}_0 (см. § 72). Плотность связанных магнитных зарядов определяется формулами

$$\rho_m = -\operatorname{div} \vec{I}_0, \quad \eta_m = I_{on}. \quad (85.01)$$

Для однородно намагниченного вдоль оси цилиндрического стержня (идеализированный пример, взятый для простоты рассмотрения)

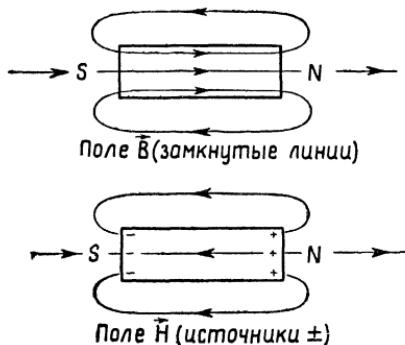
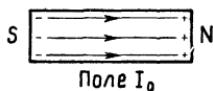


Рис. 35.

$\rho_m = 0$. На торцевых поверхностях такого стержня имеются поверхностные магнитные заряды с плотностью $\eta_m = \pm I_0$, которые образуют северный (положительный) и южный (отрицательный) полюсы магнита.

Намагничивание \vec{I}_0 направлено от южного полюса к северному. Линии вектора \vec{B} замкнуты и вне магнита проходят от северного полюса к южному, а внутри — от южного к северному.

Согласно (70.08) магнитное поле \vec{H} равно $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$. Источниками этого поля являются связанные магнитные заряды. Поэтому силовые линии его начинаются на положительных магнитных зарядах и

оканчиваются на отрицательных (рис. 35). Рисунок 35 сделан в предположении, что магнитная проницаемость среды равна единице, поэтому вне магнита $\vec{H} = \vec{B}$. Таким образом, внутри магнита поле \vec{H} направлено противоположно векторам \vec{B} и \vec{I} . Оно действует на маг-

нитные моменты атомов и уменьшает намагничивание. Вследствие этого в цилиндрическом стержне невозможно получить однородное намагничивание. Поэтому в общем случае магнитное поле будет определяться уравнениями (79.10) (при $j=0$, так как токов проводимости нет)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mu \vec{H} = 4\pi \rho_m \\ \text{и граничными условиями (79.11)} \quad \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} &= 4\pi \eta_m, \quad H_{2t} - H_{1t} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (85.02)$$

Считая магнитную проницаемость μ постоянной и одной и той же внутри и вне магнита, получим

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{4\pi}{\mu} \rho_m. \quad (85.03)$$

Так как $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, то можно ввести магнитный скалярный потенциал φ_m

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m \quad (85.04)$$

и строить магнитостатику в полной аналогии с электростатикой. Из (85.04) и (85.03) получается уравнение Пуассона для φ_m

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{4\pi}{\mu} \rho_m. \quad (85.05)$$

Следовательно, распределение потенциала в зависимости от плотности магнитных зарядов дается формулой

$$\varphi_m = \frac{1}{\mu} \int_V \frac{\rho_m}{R} dV' + \frac{1}{\mu} \oint_S \frac{\eta_m}{R} d\sigma, \quad (85.06)$$

где интегрирование производится соответственно по объему и по поверхности магнита. Отсюда видно, что магнитный потенциал в среде с магнитной проницаемостью μ в μ раз меньше потенциала, создаваемого тем же распределением ρ_m, η_m в вакууме.

Как и в § 82, потенциал (85.06) можно написать как потенциал магнитно-поляризованной среды

$$\varphi_m = \frac{1}{\mu} \int_V \frac{\vec{I}_0 \vec{R}}{R^3} dV', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (85.07)$$

На больших расстояниях от магнита $R \approx \text{const}$. Тогда

$$\varphi_m = \frac{\vec{m} \vec{R}}{\mu R^3}, \quad (85.08)$$

где

$$\vec{m} = \int_V \vec{I}_0 dV' \quad (85.09)$$

есть магнитный момент магнита. Потенциал (85.08) совпадает с рассмотренным в § 29 потенциалом диполя. Поэтому согласно (29.04) и (29.05) магнитное поле магнита на большом расстоянии определяется формулой

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m = \frac{3(\vec{m} \vec{R}) \vec{R}}{\mu R^6} - \frac{\vec{m}}{\mu R^3}. \quad (85.10)$$

Заметим, что если магнитные проницаемости магнита и окружающей среды различны, то простой зависимости поля магнита от проницаемости среды нет. Зависимость $H \sim \frac{1}{\mu}$ имеет место для внешнего поля длинных тонких магнитов.

Задачи

1. В неограниченной среде с магнитной проницаемостью μ_a создано однородное магнитное поле напряженностью \vec{H}_0 . Определить, как изменится поле, если в среду внести шарообразный магнетик радиуса a с магнитной проницаемостью μ_i .

Решение. Шар поляризуется однородно и получает магнитный дипольный момент $\vec{m} = \frac{\mu_i - \mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} a^3 \vec{H}_0$ (см. задачу § 83). Напряженность вне и внутри шара определяется формулами (в сферических координатах):

$$H_r^{(l)} = \frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} H_0 \cos \vartheta, \quad H_\vartheta^{(l)} = -\frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} H_0 \sin \vartheta,$$

$$H_r^{(a)} = H_0 \cos \vartheta + \frac{2m \cos \vartheta}{r^3}, \quad H_\vartheta^{(a)} = -H_0 \sin \vartheta + \frac{m \sin \vartheta}{r^3}.$$

2. Определить размагничивающее поле и размагничивающий фактор N для шарообразного магнетика задачи 1.

Решение. Согласно задаче 1 поле внутри шара

$$H^{(l)} = \frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} H_0.$$

С другой стороны, по (72.03) $\vec{H}^{(l)} = \vec{H}_0 - N \vec{I}$. Поэтому размагничивающее поле

$$\vec{H}_0 = -N \vec{I} = \vec{H}^{(l)} - \vec{H}_0 = \frac{\mu_a - \mu_i}{\mu_i + 2\mu_a} \vec{H}_0.$$

Так как $\vec{I} = \chi_i \vec{H}^{(l)} = \frac{\mu_i - 1}{4\pi} \vec{H}^{(l)}$, то $N = \frac{4\pi}{3} \frac{\mu_i - \mu_a}{\mu_a (\mu_i - 1)}$. Таким образом, размагничивающий фактор зависит от проницаемостей шара и окружающей среды (для тела произвольной формы N зависит еще и от формы тела). Если шар находится в вакууме (или воздухе), то $\mu_a = 1$ и $N = \frac{4\pi}{3}$.

3. Определить магнитное поле постоянного магнита, имеющего форму шара радиуса a , внутри которого создано однородное остаточное намагничивание \vec{I}_0 .

Решение. Поле внутри шара однородно, а вне шара совпадает с полем точечного диполя, с некоторым моментом \vec{m} . Обозначим через m

момент диполя, а через μ_i и μ_a — магнитные проницаемости вещества магнита и окружающего магнетика. В сферических координатах согласно (79.06) и (85.10) получим

$$B_r^{(i)} = 4\pi I_0 \cos \vartheta + \mu_i H^{(i)} \cos \vartheta, \quad H_r^{(a)} = \frac{2m \cos \vartheta}{r^3}, \quad H_\vartheta^{(a)} = \frac{m \sin \vartheta}{r^3}.$$

Из граничных условий (79.09) находим

$$4\pi I_0 + \mu_i H^{(i)} = \mu_a \frac{2m}{a^3}, \quad -H^{(i)} = \frac{m}{a^3},$$

откуда

$$\vec{m} = \frac{4\pi \vec{I}_0}{\mu_i + 2\mu_a} a^3.$$

$$H_r^{(a)} = \frac{8\pi I_0}{\mu_i + 2\mu_a} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos \vartheta, \quad H_\vartheta^{(a)} = \frac{4\pi I_0}{\mu_i + 2\mu_a} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \vartheta, \quad \vec{H}_i = -\frac{4\pi \vec{I}_0}{\mu_i + 2\mu_a}.$$

§ 86. Проводник в электрическом поле. Емкость

Рассмотрим незаряженный проводник произвольной формы в электрическом поле. При введении проводника в поле в проводнике возникает электрический ток с плотностью $\vec{j} = \gamma \vec{E}_i$ (\vec{E}_i — поле внутри проводника, приводящее к перераспределению свободного заряда и к установлению нового равновесия). В равновесном состоянии плотность тока в любой точке внутри проводника должна быть равна нулю. Поэтому и поле \vec{E}_i внутри проводника также равно нулю.

Заметим, что микроскопическое поле зарядов атомов не исчезает; обращается в нуль лишь макроскопическое поле \vec{E}_i . Равенство нулю поля \vec{E}_i обусловлено тем, что в результате перераспределения свободных зарядов (электронов проводимости) возникает добавочное поле, которое внутри проводника компенсирует внешнее поле. Перераспределение свободного заряда под действием внешнего поля называется электростатической индукцией.

Из $\vec{E}_i = 0$ следует, что вектор индукции внутри проводника также равен нулю. Следовательно, внутри проводника

$$\vec{E}_i = 0, \quad \vec{D}_i = 0, \quad \rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D}_i = 0. \quad (86.01)$$

Подобный результат был получен в § 73.

Так как $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, то из $\vec{E}_i = 0$ следует, что $\varphi = \text{const}$ (объем и поверхность проводника эквипотенциальны). Вне проводника потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ при граничном условии на поверхности σ проводника

$$\varphi|_{\sigma} = V, \quad (86.02)$$

где $V = \text{const}$ — потенциал проводника.

Распределение заряда на поверхности проводника определяется из граничного условия (79.07). Внутри проводника $D_t = 0$. Снаружи проводника $D_n = \epsilon E_n = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, где производная берется по внешней нормали к поверхности проводника, а ϵ — диэлектрический коэффициент окружающей среды. Поэтому

$$\eta = \frac{1}{4\pi} D_n = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (86.03)$$

Отсюда полный заряд проводника

$$e = -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \quad (86.04)$$

(интегрирование производится по всей поверхности проводника).

Рассмотрим уединенный заряженный до потенциала V проводник. Потенциал вне проводника удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ и граничному условию (86.02). Кроме того, должно быть

$$\varphi(\infty) = 0. \quad (86.05)$$

При условиях (86.02) и (86.05) решением уравнения Лапласа будет

$$\varphi(\vec{r}) = V \varphi_1(\vec{r}), \quad (86.06)$$

где $\varphi_1(\vec{r})$ — безразмерная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, условию (86.05) и граничному условию на поверхности проводника

$$\varphi_1|_{\sigma} = 1. \quad (86.07)$$

Подставим (86.06) в (86.04); получим

$$e = CV, \quad (86.08)$$

где

$$C = -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma. \quad (86.09)$$

Множитель C называется емкостью уединенного проводника. Если проводник находится в вакууме ($\epsilon = 1$), то его емкость

$$C_0 = -\frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma = \frac{C}{\epsilon} \quad (86.10)$$

зависит только от размеров и формы проводника и имеет размерность длины. Проводник, погруженный в среду с диэлектрическим коэффициентом ϵ , имеет емкость в ϵ раз большую.

Рассмотрим замкнутую полость внутри проводника. Если в полости нет зарядов, то потенциал в ней будет удовлетворять уравнению Лапласа. На границе полости потенциал должен иметь значение потенциала проводника V , поэтому и во всей полости потенциал будет равен V . Если поддерживать потенциал проводника постоянным (например, равным нулю), то изменения поля вне проводника не будут

влиять на потенциал в полости. На внутренней поверхности проводника плотность заряда равна нулю, так как поле в проводнике и в полости равно нулю.

Задачи

1. Определить емкость шара радиуса a .

Решение. Потенциал φ_1 , удовлетворяющий уравнению $\nabla^2\varphi = 0$ и условиям (86.07) и (86.05), имеет вид $\varphi_1 = \frac{a}{r}$ (начало координат взято в центре шара). Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{a}{r^2} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$C = \frac{\epsilon}{4\pi a} \oint_{(5)} d\sigma = \frac{\epsilon}{4\pi a} \cdot 4\pi a^2 = \epsilon a.$$

2. Определить емкость вытянутого эллипсоида вращения с полуосами a, b ($a > b$).

Решение. В задаче 4 § 27 показано, что заряд e , распределенный равномерно на отрезке длиной $2c$, образует поле, эквипотенциальные поверхности которого есть вытянутые эллипсоиды вращения. Если эквипотенциальную поверхность с полуосами a, b заполнить металлом, то распределение потенциала не изменится. Поэтому на поверхности эллипсоида потенциал равен

$$\varphi = V = \frac{e}{2c} \ln k.$$

Так как c — линейный эксцентриситет, а a — большая полуось, то $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. С другой стороны,

$$k = \frac{a+c}{a-c} = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Поэтому

$$V = \frac{e}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$C_0 = \frac{e}{V} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}}.$$

3. Доказать, что при $b = a$ емкость C_0 , полученная в предыдущей задаче, переходит в емкость шара ($C_0 = a$).

4. Определить емкость цилиндрического провода длиной $2a = l$. Радиус провода равен b .

Решение. Цилиндрический провод можно рассматривать как эллипсоид вращения, для которого $a \gg b$. Тогда

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \approx \frac{2a+...}{a\left(1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)} = \frac{2a+...}{a\left(1-1+\frac{b^2}{2a^2}+\dots\right)} \cong \frac{4a^2}{b^2} = \frac{l^2}{b^2}$$

и

$$C_0 = \frac{C}{\epsilon} \cong \frac{l}{2\ln \frac{l}{b}}.$$

5. Металлический шар радиуса a введен в однородное электрическое поле напряженностью $E_z = E_0$. Определить поле и распределение индукционного заряда на поверхности шара.

Решение. В электростатике незаряженный проводник можно рассматривать как вещество с $\epsilon = \infty$. Поэтому, полагая в (83.05) и (83.07) $\epsilon_l = \infty$, $\epsilon_a = \epsilon$ (диэлектрический коэффициент среды), получим

$$\varphi_l = 0, \quad \varphi_a = -E_0 r \cdot \cos \vartheta + a^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2}, \quad \eta = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \vartheta.$$

§ 87. Теорема о единственности решения электростатической задачи

Электростатическая задача заключается в определении потенциала $\varphi(r)$, создаваемого произвольным распределением объемных поверхностных и точечных зарядов в неоднородной диэлектрической среде. Теорема о единственности утверждает, что эта задача имеет только одно решение.

Рассмотрим задачу в предположении, что поле создается заряженными проводниками, диэлектрик — однороден. В этом случае задача имеет три формулировки.

1. Даны система проводников и их потенциалы $V_1, V_2, \dots, V_a, \dots$

Существует только один потенциал $\varphi(r)$ в среде, окружающей проводники, удовлетворяющий уравнению Лапласа и принимающий значения $V_1, V_2, \dots, V_a, \dots$ соответственно на поверхностях 1-го, 2-го, ... a -го, ... проводников и обращающийся в нуль в бесконечности.

Допустим, что существует второе решение φ' , удовлетворяющее уравнению Лапласа и тем же граничным условиям. Тогда функция $\psi = \varphi' - \varphi$ должна удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$ и обращаться в нуль на поверхностях всех проводников и в бесконечности. Рассмотрим энергию этого поля. Так как $\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{grad}^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi$, то, применяя формулу Остроградского, получим

$$8\pi \frac{W_e}{\epsilon} = \int \operatorname{grad}^2 \psi dV = \oint_{\Sigma} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma - \int \psi \nabla^2 \psi dV, \quad (87.01)$$

где поверхность Σ ограничивает весь объем (состоит из поверхностей проводников и бесконечно удаленной поверхности). Но во всем объеме $\nabla^2 \psi = 0$ и ψ обращается в нуль на всей поверхности Σ .

Поэтому $8\pi \frac{W_e}{\epsilon} = \int \operatorname{grad}^2 \psi dV = 0$, отсюда следует, что $\operatorname{grad} \psi = 0$, то есть $\psi = \text{const}$. Но на поверхностях проводников $\psi = 0$. Следовательно, $\psi = 0$ везде, а поэтому $\varphi' = \varphi$.

2. Даны заряды проводников $e_1, e_2, \dots, e_a, \dots$ Докажем единственность решения задачи. Допустим, что существуют два решения φ

и φ' , удовлетворяющие уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} d\sigma_a = \frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \varphi'}{\partial n_a} d\sigma_a = -e_a, \quad (a = 1, 2, \dots),$$

где σ_a — поверхность проводника. Кроме того, в бесконечности φ и φ' обращаются в нуль.

Разность $\psi = \varphi' - \varphi$ должна удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$ и условиям

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \psi}{\partial n_a} d\sigma_a = 0. \quad (87.02)$$

На поверхности каждого проводника потенциал ψ должен иметь постоянное значение ψ_a . Применим формулу (87.01). Объемный интеграл в ее правой части исчезает, так как $\nabla^2 \psi = 0$. Поверхностный интеграл разобьем на интегралы по поверхностям проводников и интеграл по бесконечно удаленной поверхности. Последний исчезает, так как $\psi(\infty) = 0$. Интеграл по поверхности каждого проводника исчезает в силу соотношения (87.02) и соотношения $\psi = \psi_a$.

$$\oint_{(\sigma_a)} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n_a} d\sigma_a = \psi_a \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \psi}{\partial n_a} d\sigma_a = 0.$$

Поэтому правая часть (87.01) исчезает. Следовательно, $\text{grad } \psi = 0$ и $\psi = \text{const}$, так как $\psi(\infty) = 0$, то $\psi = 0$ везде. Поэтому $\varphi = \varphi'$.

3. Возможны смешанные граничные условия — на одних проводниках заданы потенциалы, на других — заряды. Повторив рассуждения предыдущих задач, легко убедиться, что и в этом случае $\varphi' = \varphi$.

§ 88. Система двух проводников. Индукционные и потенциальные коэффициенты

Рассмотрим систему двух изолированных проводников произвольной формы и размеров, окруженных диэлектриком. Пусть первый проводник заряжен до потенциала V_1 , а второй — до потенциала V_2 . Потенциал $\varphi(r)$ вне проводников будет удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\varphi|_{\sigma_1} = V_1, \quad \varphi|_{\sigma_2} = V_2, \quad \varphi(\infty) = 0. \quad (88.01)$$

Допустим, что найдены два вспомогательных безразмерных потенциала $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1|_{\sigma_1} &= 1, & \varphi_1|_{\sigma_2} &= 0, & \varphi_1(\infty) &= 0, \\ \varphi_2|_{\sigma_1} &= 0, & \varphi_2|_{\sigma_2} &= 1, & \varphi_2(\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88.02)$$

Тогда искомый потенциал можно написать в форме

$$\varphi(\vec{r}) = V_1 \varphi_1 + V_2 \varphi_2. \quad (88.03)$$

Потенциал (88.03) удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям (88.01) в силу условий (88.02).

Плотность свободного заряда на поверхности первого проводника согласно (86.03) равна

$$\eta_1 = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} V_1 - \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} V_2, \quad (88.04)$$

где \vec{n}_1 — внешняя нормаль к поверхности первого проводника. Аналогично получим плотность заряда η_2 на поверхности второго проводника. Интегрируя теперь η_1 по поверхности σ_1 первого проводника и η_2 по поверхности σ_2 второго проводника, получим

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2, \\ e_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2, \end{aligned} \right\} \quad (88.05)$$

Соотношения (88.05) обобщают (86.08); коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} d\sigma_1, \\ C_{22} &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_2)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} d\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (88.06)$$

называются емкостными коэффициентами проводников. Коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} C_{12} &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma_1, \\ C_{21} &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (88.07)$$

называются индукционными коэффициентами.

Выясним физический смысл коэффициентов. Предположим, что потенциал первого проводника $V_1 = 1$, а второго $V_2 = 0$. Тогда (88.05) принимает вид

$$e_1 = C_{11}, \quad e_2 = C_{21}.$$

Таким образом, коэффициент емкости C_{11} численно равен заряду первого проводника, если его потенциал равен единице, а потенциал второго проводника равен нулю. Коэффициент индукции C_{21} численно равен заряду, появляющемуся на поверхности второго проводника, если потенциал первого проводника равен единице, а второго — нулю. Коэффициент C_{21} определяет индукционное действие первого проводника на второй. Аналогично C_{22} есть коэффициент емкости второго проводника, а C_{21} — коэффициент индукции второго проводника на первый. C_{11} и C_{22} — положительны.

Докажем, что

$$C_{12} = C_{21}.$$

В формуле Грина

$$\int (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{(\sigma)} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

произведем интегрирование по всему объему вне проводников. Тогда интегрирование по поверхности σ производится по бесконечно удаленной поверхности и по поверхностям σ_1 и σ_2 проводников. Положим $\psi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$; тогда $\nabla^2 \varphi_1 = 0$, $\nabla^2 \varphi_2 = 0$ и объемный интеграл обращается в нуль. Поверхностный интеграл, в силу граничных условий, будет

$$\oint_{(\sigma_1)} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma_1 - \oint_{(\sigma_2)} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 = \oint_{(\sigma_1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma_1 - \oint_{(\sigma_2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 = 0.$$

В силу определений (88.06) и (88.07) $C_{12} = C_{21}$.

Решая систему (88.05) относительно потенциалов проводников V_1 и V_2 , получим

$$V_1 = p_{11}e_1 + p_{12}e_2, \quad V_2 = p_{21}e_1 + p_{22}e_2. \quad (88.09)$$

Коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{C_{22}}{\Delta}, & p_{12} &= -\frac{C_{12}}{\Delta}, & p_{21} &= -\frac{C_{21}}{\Delta}, \\ p_{22} &= \frac{C_{11}}{\Delta}, & \Delta &= C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \end{aligned} \right\} \quad (88.10)$$

называются потенциальными коэффициентами (предполагается, что определитель $\Delta \neq 0$). Из (88.09) видно, что каждый из потенциалов V_1 и V_2 зависит от зарядов e_1 и e_2 . Так как $C_{12} = C_{21}$, то $p_{12} = p_{21}$. Это значит, что если заряд $e_1 = 1$ создает на втором незаряженном проводнике потенциал p_{21} , то и заряд $e_2 = 1$ создает на первом незаряженном проводнике потенциал p_{21} .

Рассмотрим знаки коэффициентов p_{ab} . Заметим, что в среде, где нет объемного заряда, потенциал не может иметь экстремума. Действительно, точка, в которой φ имеет минимум (или максимум), со всех сторон окружена областью, где падение потенциала направлено к ней или от нее. Следовательно, в этой точке сходятся линии сил и в ней находится отрицательный (положительный) заряд, что противоречит условию. Если первый проводник имеет заряд $e_1 > 0$, то изолированный и лишенный заряда второй проводник должен иметь меньший, но положительный потенциал, так как от поверхности первого проводника потенциал может лишь убывать и обращаться в нуль на бесконечности. Поэтому $V_1 > V_2 > 0$. Но при $e_2 = 0$, $V_1 = p_{11}e_1$, $V_2 = p_{21}e_1$. Следовательно,

$$p_{11} > 0, \quad p_{21} > 0, \quad p_{21} < p_{11}. \quad (88.11)$$

Аналогично доказывается, что $p_{21} > p_{12} > 0$. Поэтому определитель

$$\Delta' = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0.$$

Решая уравнение (88.09) относительно e_1 и e_2 , находим

$$C_{11} = \frac{p_{22}}{\Delta'}, \quad C_{22} = \frac{p_{11}}{\Delta'}, \quad C_{12} = -\frac{p_{12}}{\Delta'}, \quad C_{21} = -\frac{p_{21}}{\Delta'}. \quad (88.12)$$

Из (88.12) и (88.11) следует, что $C_{11} > 0$, $C_{22} > 0$, $C_{12} < 0$, $C_{21} < 0$, то есть индуцированный заряд всегда имеет знак, противоположный знаку индуцирующего.

Полученные результаты легко обобщаются на систему любого числа проводников. Обозначая заряд и потенциал проводника через e_a и V_a , получим

$$\left. \begin{aligned} e_a &= \sum_b C_{ab} V_b, \quad V_a = \sum_b p_{ab} e_b, \quad a, b = 1, 2, \dots, n \\ C_{ab} &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \varphi_b}{\partial n_a} d\sigma_a \end{aligned} \right\} \quad (88.13)$$

где n_a — нормаль к поверхности σ_a проводника a , φ_a — безразмерный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничным условиям, аналогичным условиям (88.02).

Задача

Два проводника с емкостями C_1 и C_2 помещены на расстоянии R друг от друга в среде с диэлектрическим коэффициентом ϵ . Предполагая, что R велико по сравнению с размерами проводников, определить коэффициенты C_{ab} .

Решение. Если $e_1 \neq 0$, $e_2 = 0$, то приближенно $V'_1 = \frac{e_1}{C_1}$. Потенциал, создаваемый первым проводником на расстоянии R , равен $\varphi'_2 = \frac{e_1}{R}$. Такой же потенциал будет иметь второй проводник, если пренебречь его поляризацией и изменением поля вдоль него. С другой стороны, если $e_1 = 0$, $e_2 \neq 0$, то приближенно потенциал второго проводника будет $V''_2 = \frac{e_2}{C_2}$, а потенциал первого — $\varphi''_1 = \frac{e_2}{R}$. Приближенные выражения потенциалов проводников при $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ равны

$$V_1 = \frac{e_1}{C_1} + \frac{e_2}{R}, \quad V_2 = \frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{C_2},$$

то есть

$$p_{11} = \frac{1}{C_1}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{R}, \quad p_{22} = \frac{1}{C_2}.$$

Отсюда по (88.12)

$$C_{11} = \frac{C_1}{1 - \frac{C_1 C_2}{R^2}}, \quad C_{22} = \frac{C_2}{1 - \frac{C_1 C_2}{R^2}}, \quad C_{12} = C_{21} = -\frac{C_1 C_2}{R} \frac{1}{1 - \frac{C_1 C_2}{R^2}}.$$

§ 89. Энергия системы проводников

Энергия поля системы заряженных проводников получается из формулы (84.03). Так как объемного заряда нет, то энергия равна

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma = \frac{1}{2} \sum_a \oint_{(a)} \eta \varphi d\sigma,$$

где интегрирование производится по поверхности проводника, а суммирование — по всем проводникам. На поверхности проводника $\varphi|_{(a)} = V_a$. Поэтому вынесем V_a за знак интеграла. Так как

$\int_{(a)} \eta d\sigma = e_a$ есть полный заряд проводника, энергия поля будет

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_a e_a V_a. \quad (89.01)$$

Подставим V_a из (88.13), получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{ab} p_{ab} e_a e_b. \quad (89.02)$$

Для двух проводников

$$W_e = \frac{1}{2} (p_{11} e_1^2 + 2p_{12} e_1 e_2 + p_{22} e_2^2) \quad (\text{так как } p_{21} = p_{12}).$$

Энергия W_e есть собственная энергия системы заряженных проводников и должна быть положительной. Переписав ее в форме

$$2W_e = p_{11} \left(e_1 + \frac{p_{12}}{p_{11}} e_2 \right)^2 + \left(p_{22} - \frac{p_{12}^2}{p_{11}} \right) e_2^2 > 0,$$

видим, что

$$p_{11} > 0, \quad p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0. \quad \text{Аналогично} \quad p_{22} > 0. \quad (89.03)$$

Рассмотрим другой вывод выражения для энергии системы двух проводников. Пусть сначала заряды и потенциалы обоих проводников равны нулю. Внесем на первый проводник заряд e_1 . Тогда потенциалы проводников станут равными $V'_1 = p_{11} e_1$, $V'_2 = p_{21} e_1$.

Работа заряжения первого проводника равна

$$A_1 = \frac{1}{2} \int \eta \varphi d\sigma = \frac{1}{2} V'_1 e_1 = \frac{1}{2} p_{11} e_1^2.$$

Будем постепенно увеличивать заряд второго проводника до e_2 . Когда заряд второго проводника равен e'_2 , его потенциал равен

$$V'_2 = p_{21} e_1 + p_{22} e'_2.$$

Работа переноса заряда de'_2 из бесконечности на второй проводник равна $\delta A_2 = V'_2 de'_2$. Поэтому полная работа заряжения второго про-

водника от заряда $e'_2 = 0$ до заряда $e'_2 = e_2$ равна

$$A_2 = \int_0^{e_2} (p_{21}e_1 + p_{22}e'_2) de'_2 = p_{21}e_1 e_2 + \frac{1}{2} p_{22}e_2^2.$$

Полная работа заряжения проводников равна энергии системы двух проводников

$$W_e = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} p_{11}e_1^2 + p_{21}e_1 e_2 + \frac{1}{2} p_{22}e_2^2.$$

Если заряжать сначала второй проводник, а затем первый, то получим

$$W'_e = \frac{1}{2} p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1 e_2 + \frac{1}{2} p_{22}e_2^2.$$

Так как энергия не зависит от пути процесса, то

$$W'_e = W_e.$$

Отсюда следует, что $p_{12} = p_{21}$ и в силу (88.12) $C_{12} = C_{21}$.

Выразим энергию системы проводников через потенциалы. Подставляя e_a из (88.13) в (89.01), получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{ab} V_a V_b. \quad (89.04)$$

Для уединенного проводника

$$W_e = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 = \frac{e_1^2}{2C_{11}}. \quad (89.05)$$

Задача

Определить энергию и емкость заряженного прямолинейного цилиндрического проводника радиуса a , длина которого l велика по сравнению с радиусом.

Решение. Если $l \gg a$, то влиянием концов цилиндра можно пренебречь и считать заряд распределенным равномерно вдоль цилиндра с плотностью $q = \frac{e}{l}$. Тогда поле будет радиально симметричным в области, для которой $r \leq l$. Напряженность поля будет равна $E_r = \frac{2q}{\epsilon r}$ (r — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра). На больших расстояниях ($r \gg l$) энергией поля можно пренебречь.

Поэтому приближенно (с логарифмической точностью)

$$W_e = \frac{\epsilon}{8\pi} \int_a^l E_r^2 dV = \frac{4q}{8\pi\epsilon} \int_a^l \frac{2\pi r l dr}{r^2} = \frac{e^2}{\epsilon l} \ln \frac{l}{a}.$$

Откуда согласно (89.05)

$$C_{11} = \frac{e^2}{2W_e} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{l}{a}},$$

что совпадает с результатом задачи 4 § 86.

§ 90. Конденсаторы

Особый интерес представляет система двух проводников, образующих конденсатор. Пусть первый проводник находится в замкнутой полости, вырезанной внутри второго (рис. 36). Пространство между проводниками может быть заполнено изолятором с диэлектрическим коэффициентом ϵ . Такая система называется замкнутым конденсатором, а проводники 1 и 2 — его обкладками. Пусть V_1 и V_2 — потенциалы проводников, а e_1 и e_2 — их заряды. Заряд e_2 складывается из заряда e'_2 , индуцированного зарядом e_1 на внутренней поверхности второго проводника, и из заряда e''_2 на его наружной поверхности. Приведем во втором проводнике замкнутую поверхность, охватывающую всю полость. Поток вектора индукции через эту поверхность будет равен $\psi_D = 4\pi(e_1 + e'_2)$. Но в проводнике $\vec{D} = 0$, поэтому $\psi_D = 0$. Следовательно, $e'_2 = -e_1$, т. е. индуцированный на внутренней поверхности второго проводника заряд равен по величине и противоположен по знаку индуцирующему заряду. Поэтому все линии индукции, начинающиеся на внутренней обкладке, будут оканчиваться на внешней.

Полный заряд второго проводника согласно (88.05) равен

$$e_2 = e'_2 + e''_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2. \quad (90.01)$$

С другой стороны, заряд e''_2 , расположенный на внешней поверхности проводника, не оказывает влияния на полость. Поле вне второго проводника зависит только от потенциала, размеров и формы внешней поверхности проводника. Поэтому можно написать

$$e''_2 = C'_{22}V_2, \quad (90.02)$$

где C'_{22} — есть емкость уединенного второго проводника. Поэтому из (90.01)

$$e'_2 = C_{21}V_1 + (C_{22} - C'_{22})V_2. \quad (90.03)$$

С другой стороны,

$$e_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2.$$

Следовательно,

$$e_1 + e'_2 = (C_{11} + C_{21})V_1 + (C_{12} + C_{22} - C'_{22})V_2 = 0. \quad (90.04)$$

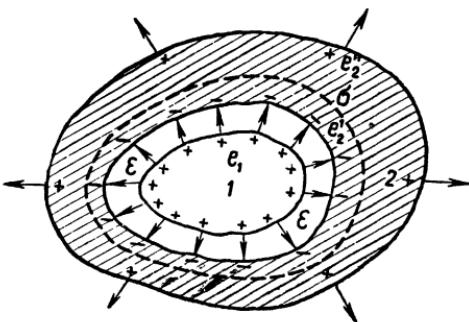


Рис. 36.

Равенство (90.04) должно выполняться при всех значениях потенциалов V_1 и V_2 . Поэтому

$$C_{11} + C_{21} = 0, \quad C_{22} + C_{12} - C'_{22} = 0.$$

Так как $C_{12} = C_{21}$, то для конденсатора

$$C_{11} = C_{22} - C'_{22} = -C_{12} = -C_{21} = C. \quad (90.05)$$

Тогда

$$e_1 = -e'_2 = C(V_2 - V_1). \quad (90.06)$$

Таким образом, заряд каждой из обкладок конденсатора пропорционален разности потенциалов обкладок. Общее значение C коэффициентов C_{11} , $C_{22} - C'_{22}$, $-C_{12}$ называется емкостью конденсатора. Заметим, что в случае замкнутого конденсатора

$$C_{22} = C_{11} + C'_{22} > C_{11} = C.$$

На практике обычно употребляются незамкнутые конденсаторы — системы двух проводников, форма и взаимное расположение которых таковы, что $|C_{12}|$ почти равно C_{11} (будем считать $C_{22} > C_{11}$). Чтобы C_{12} было сравнимо с C_{11} , надо проводники сблизить.

Энергию конденсатора можно написать согласно (89.04) и (90.05) в форме

$$W_e = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 + C_{12} V_1 V_2 + \frac{1}{2} C_{22} V_2^2 = \frac{1}{2} C'_{22} V_2^2 + \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2. \quad (90.07)$$

Поле замкнутого конденсатора распадается на поле внешнее и поле внутреннее. Первый член (90.07), зависящий от потенциала второго проводника и его емкости C'_{22} , есть энергия внешнего поля; второй член, зависящий от разности потенциалов проводников и емкости C , есть энергия внутреннего поля. Обычно C'_{22} мало по сравнению с C , и первым членом в (90.07) можно пренебречь. Поэтому считают, что энергия заряженного конденсатора равна $\frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$. Последнее выполняется точно лишь при $V_2 = 0$.

Для незамкнутого конденсатора $|C_{12}| \leq C_{11} \leq C_{22}$.

Энергию можно представить в форме

$$W_e = \frac{1}{2} (C_{11} - |C_{12}|) V_2^2 + \frac{1}{2} (C_{22} - |C_{12}|) V_2^2 + \frac{1}{2} |C_{12}| (V_1 - V_2)^2. \quad (90.08)$$

Если разности $C_{11} - |C_{12}|$ и $C_{22} - |C_{12}|$ малы по сравнению с $|C_{12}|$, и $V_1 - V_2$ порядка V_1 и V_2 , то значение энергии будет определять последний член.

Вышеизложенное отноится к конденсаторам, в которых для диэлектрика, расположенного между обкладками, имеется линейная

связь между \vec{D} и \vec{E} . Для сфернотоэлектриков связь между \vec{D} и \vec{E} нелинейная, поверхностная плотность заряда и заряд обкладки определяются формулами

$$\eta_1 = -\frac{1}{4\pi} D_{n1}, \quad e_1 = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\sigma_1} D_{1n} d\sigma. \quad (90.09)$$

Задачи

1. Сферический конденсатор состоит из двух концентрических сферических электродов (радиус внутреннего электрода равен R_1 , внутренний и внешний радиусы внешнего — соответственно R_2 и R_3). Промежуток между электродами заполнен диэлектриком с коэффициентом ϵ . Определить емкостные и индукционные коэффициенты.

Решение. Потенциал между обкладками удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = \frac{1}{r} \frac{d^2 r \varphi}{dr^2} = 0$ и граничным условиям

$$\varphi|_{R_1} = V_1, \quad \varphi|_{R_2} = V_2.$$

Поэтому

$$\varphi = a + \frac{b}{r},$$

где

$$a = \frac{V_2 R_2 - V_1 R_1}{R_2 - R_1}, \quad b = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}.$$

Поверхностные плотности зарядов равны

$$\eta_1 = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{R_1} = \frac{\epsilon b}{4\pi R_1^2}, \quad \eta'_2 = -\frac{\epsilon b}{4\pi R_2^2}.$$

Следовательно, заряды

$$e_1 = 4\pi R_1^2 \eta_1 = -e'_2 = -4\pi R_2^2 \eta'_2 = \frac{\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} (V_1 - V_2).$$

Отсюда

$$C_{11} = C_{22} - C'_{22} = -C_{12} = -C_{21} = C = \frac{\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Заряд на внешней поверхности наружного электрода равен $e''_2 = C'_{22} V_2$, где $C'_{22} = \epsilon' R_3$.

Если $R_2 - R_1 \ll R_1$, то относительная емкость $C_{22} - C'_{22} \gg C'_{22}$ (это неравенство усиливается, если коэффициент ϵ' диэлектрика внутри конденсатора больше коэффициента ϵ' диэлектрика вне конденсатора).

2. Определить емкостные и индукционные коэффициенты цилиндрического конденсатора, состоящего из двух коаксиальных цилиндров длины l и радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Промежуток между цилиндрами заполнен диэлектриком с коэффициентом ϵ . Влиянием концов цилиндров пренебречь.

Решение. Потенциал удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$ и граничным условиям $\varphi|_{R_1} = V_1$, $\varphi|_{R_2} = V_2$. Методом, аналогичным приме-

ненному в задаче 1, получаем

$$C = C_{11} = C_{22} - C'_{22} = -C_{12} = -C_{21} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

3. Определить емкость плоского конденсатора с площадью обкладки σ , в котором диэлектрик состоит из плоских слоев, параллельных обкладкам и имеющих диэлектрические коэффициенты $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_a, \dots$. Толщины слоев диэлектрика равны соответственно $d_1, d_2, \dots, d_a, \dots$, причем $\sum_a d_a = d$ есть расстояние между обкладками.

Решение. Проведем ось x нормально к плоскости обкладок. Если линейные размеры обкладок велики по сравнению с расстоянием d , то поле внутри конденсатора можно считать однородным. Тогда разность потенциалов

$$V_1 - V_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{D dx}{\epsilon} = D \int_0^d \frac{dx}{\epsilon} = D \sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a},$$

так как вектор индукции направлен по нормали и остается постоянным. Заряд обкладки равен

$$e = \sigma \eta = \sigma \frac{D}{4\pi} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a}},$$

откуда емкость

$$C = \frac{e}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a}.$$

В частности, для однослоиного конденсатора

$$C = \frac{\epsilon \sigma}{4\pi d}.$$

§ 91. Метод электрических изображений

Общие методы решения уравнения Лапласа при данных граничных условиях рассматриваются в курсах математической физики. В некоторых случаях решение задачи можно получить при помощи более простых методов, основанных на теореме о единственности решения электростатической задачи (§ 87).

Рассмотрим метод электрических изображений. Этот метод сводится к подбору таких дополнительных точечных зарядов, которые вместе с заданными зарядами образуют поле, удовлетворяющее граничным условиям и уравнению Лапласа.

В качестве примера рассмотрим поле точечного заряда e в однородном изотропном диэлектрике. Пусть заряд находится в точке Q на расстоянии a от бесконечной плоскости, образующей поверхность некоторого проводника (рис. 37). Пусть потенциал φ равен нулю на поверхности проводника и в бесконечности (граничные условия).

Заряд e будет индуцировать на плоскости заряд $-e$. Чтобы удовлетворить граничному условию, введем электрическое изображение заряда e — фиктивный заряд $e' = -e$, расположенный в точке Q' , представляющий собой зеркальное отражение точки Q в плоской поверхности проводника. Потенциал, создаваемый зарядом e и его изображением e' , в точке A в диэлектрике равен

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (91.01)$$

где r и r' — расстояния точки A от точек Q и Q' . На поверхности проводника ($r = r'$) $\varphi = 0$, поэтому граничное условие выполнено. Кроме того, в бесконечности $\varphi = 0$ и $\nabla^2 \varphi = 0$ во всех точках диэлектрика, кроме точки Q . Внутри проводника $\varphi = 0$. В силу теоремы о единственности полученный потенциал дает искомое решение задачи.

Распределение заряда, индуцированного на граничной поверхности проводника, определяется формулой (86.03). Выбирая начало координат O в точке, делящей отрезок QQ' пополам, а направление OQ за ось x , получим

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + \rho^2}, \quad r' = \sqrt{(x+a)^2 + \rho^2}, \quad \rho^2 = y^2 + z^2$$

(x, y, z — координаты точки наблюдения A). Тогда

$$\eta = -\frac{\epsilon_1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=r'} = -\frac{\epsilon_1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{\frac{a}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}}. \quad (91.02)$$

Таким образом, η быстро убывает по мере удаления от точки O . Легко видеть, что полный индуцированный заряд равен $-e$; как и должно быть.

Заметим, что заряд e будет притягиваться к проводнику с силой $\frac{e^2}{(2a)^2}$ (сила изображения), а энергия взаимодействия заряда с поверхностью равна $\frac{e^2}{4a}$.

Таким же образом можно решить задачу, если заряд e находится на расстоянии a от плоской границы раздела двух диэлектриков. В среде, где находится заряд e , потенциал можно искать в форме суперпозиции потенциалов заряда e и фиктивного заряда e' , находящегося в точке Q' (зеркальном изображении Q), то есть

$$\varphi_1 = \frac{e}{\epsilon_1 r} + \frac{e'}{\epsilon_1 r'}. \quad (91.03)$$

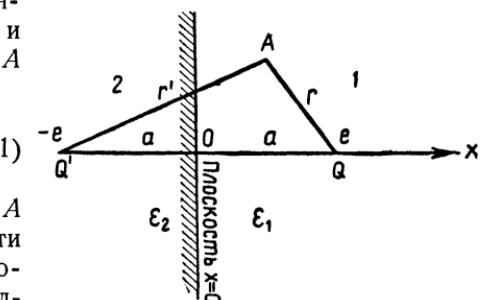


Рис. 37.

Потенциал во второй среде ищется как потенциал, создаваемый некоторым фиктивным зарядом e'' в точке Q

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\epsilon_2 r}. \quad (91.04)$$

На границе раздела ($x = 0, r = r'$) должны быть выполнены условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad D_{1n} = D_{2n}, \text{ то есть } D_{1x} = D_{2x}.$$

Откуда

$$\frac{e + e'}{\epsilon_1} = \frac{e''}{\epsilon_2}, \quad e - e' = e''.$$

Решая эту систему относительно e' и e'' , получим

$$e' = e \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad e'' = e \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (91.05)$$

Выше отмечалось, что в электростатике незаряженный проводник можно рассматривать как среду с бесконечной диэлектрической постоянной. Если положить в (91.05) $\epsilon_2 = \infty$, то получим $e' = -e$, $e'' = 2e$. Из (91.04) во второй среде $\varphi_2 = 0$ и (91.03) превращается в (91.01).

Задачи

1. Ось цилиндрического проводника радиуса a расположена параллельно проводимости поверхности на расстоянии d от нее ($d > a$). Заряд цилиндра на единицу длины равен q . Найти потенциал поля и емкость проводника.

Решение. Цилиндрический проводник можно заменить бесконечно тонкой прямолинейной нитью, расположенной параллельно плоскости на некотором расстоянии R от плоскости. Тогда потенциал в точке $A(x, y)$, находящейся на расстоянии r от нити и расстоянии r' от ее изображения в плоскости, равен

$$\varphi = \frac{2q}{\epsilon} \ln \frac{r'}{r}, \quad r = \sqrt{(x - R)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(x + R)^2 + y^2}.$$

На плоскости $r' = r$ и $\varphi = 0$; с другой стороны поверхность цилиндра будет эквипотенциальной поверхностью, если $R^2 = d^2 - a^2$. Тогда потенциал цилиндра и емкость на единицу длины равны

$$\varphi_{ц} = V = \frac{q}{\epsilon} \ln \frac{d + R}{d - R}, \quad C_1 = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon}{\ln \frac{d + R}{d - R}}.$$

2. Показать, что в предыдущей задаче при $d \rightarrow l$, где l — длина проводящего цилиндра ($l \gg a$), емкость $C = C_1 l$ стремится к емкости уединенного цилиндрического провода (задача 1, § 89).

§ 92. Механические силы в системе проводников

Индукционные и потенциальные коэффициенты зависят от размеров и взаимного расположения проводников. Если независимые параметры Q_a , характеризующие взаимное расположение и размеры проводников, взять в качестве обобщенных координат, то обобщенная сила F_a , изменяющая координату Q_a , может быть найдена из

работы $\delta A = \sum_{\alpha} F_{\alpha} dQ_{\alpha}$ (α — номер обобщенной координаты). Но работа равна изменению энергии системы зарядов (если заряд постоянен), то есть

$$\delta A = -dW_e = -\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_e dQ_{\alpha}.$$

Откуда

$$F_{\alpha} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{e=\text{const}}. \quad (92.01)$$

Подставляя сюда энергию из (89.02), получим

$$F_{\alpha} = -\frac{1}{2} \sum_{a, b} \frac{\partial p_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} e_a e_b. \quad (92.02)$$

Вычисление силы усложняется, если при передвижении проводников поддерживать постоянными их потенциалы. На поддержание потенциалов постоянными сторонние источники должны произвести дополнительную работу. Изменение заряда e_a проводника при изменении конфигурации (параметров Q_{α}) при $V = \text{const}$ равно

$$de_a = \sum_b V_b dC_{ab} = \sum_b V_b \sum_{\alpha} \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha}.$$

Работа сторонних сил при перезарядке проводника a равна

$$V_a de_a = \sum_b V_a V_b \sum_{\alpha} \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha}.$$

Полная работа, затрачиваемая на поддержание потенциалов постоянными, равна

$$\delta A' = \sum_a V_a de_a = \sum_a \sum_b V_a V_b \sum_{\alpha} \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha} = 2 \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{V=\text{const}} dQ_{\alpha}. \quad (92.03)$$

Изменение энергии dW_e слагается из работы $\delta A'$ дополнительного зарядения и работы δA , производимой системой, $dW_e = \delta A' - \delta A$. Откуда

$$\delta A = \sum_{\alpha} F_{\alpha} dQ_{\alpha} = \delta A' - dW_e = 2 \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial Q_{\alpha}} \right)_V dQ_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial Q_{\alpha}} \right)_V dQ_{\alpha},$$

то есть

$$\delta A = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{V=\text{const}} dQ_{\alpha}. \quad (92.04)$$

В силу (89.04)

$$F_{\alpha} = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{V=\text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} V_a V_b. \quad (92.05)$$

Задача

Определить силу, с которой притягиваются обкладки плоского конденсатора.

Решение. Обозначим через Q расстояние между обкладками. Энергия согласно задаче 3, § 91 равна

$$W_e = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{\epsilon\sigma}{8\pi Q} (V_1 - V_2)^2 \quad \text{или} \quad W_e = \frac{e^2}{2C} = \frac{2\pi Q}{\epsilon\sigma} e^2.$$

Отсюда при $V = \text{const}$

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial Q} = -\frac{\epsilon\sigma}{8\pi Q^2} (V_1 - V_2)^2 = -\frac{\epsilon E^2}{8\pi} \sigma,$$

где $E = \frac{V_1 - V_2}{Q}$ — напряженность поля между обкладками. Знак минус обозначает, что сила F стремится уменьшить параметр Q , то есть F есть сила притяжения. Сила, действующая на единицу площади обкладки, равна

$$p = \frac{F}{\sigma} = -\frac{\epsilon E^2}{8\pi} = -w_e.$$

При $e = \text{const}$ получим $F = -\frac{2\pi e^2}{\epsilon\sigma}$, что с помощью соотношения $e = C(V_1 - V_2)$ приводится к тому же результату.

§ 93. Постоянный электрический ток

Постоянный электрический ток течет по проводнику, если на концах его поддерживается постоянная разность потенциалов. Плотность постоянного тока в проводящем теле удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (93.01)$$

На границе двух тел должно удовлетворяться условие

$$j_{an} = j_{bn}. \quad (93.02)$$

Уравнение (93.01) показывает, что линии стационарного тока всегда замкнуты.

Плотность тока и количество теплоты, выделяемое током, определяются для изотропного проводника дифференциальными законами Ома и Ленца — Джоуля

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}}), \quad q = \frac{j^2}{\gamma}, \quad (93.03)$$

где $\vec{E}^{\text{стр.}}$ — напряженность стороннего поля.

Рассмотрим узел, в котором сходятся несколько токов. Вычислим силу тока через замкнутую поверхность σ , охватывающую узел. Получим

$$\oint_{(\sigma)} j_n d\sigma = \sum_a \int_{(\sigma_a)} j_n d\sigma = \sum_a I_a,$$

здесь I_a — сила тока, идущая через сечение проводника a . Так как \vec{n} внешняя нормаль, то ток считается положительным, если он течет от узла, и отрицательным, если он течет к узлу. По формуле Остроградского согласно (93.01) получим

$$\oint_{(S)} j_n d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{j} dV = 0.$$

Таким образом, алгебраическая сумма сил стационарных токов, сходящихся в узле, равна нулю (первый закон Кирхгофа)

$$\sum_a I_a = 0. \quad (93.04)$$

Найдем силу тока, возникающего в проводнике. Рассмотрим квазилинейный проводник. Квазилинейным проводником называется проводник, поперечное сечение $\sigma(s)$ которого и электропроводность $\gamma(s)$ зависят только от положения сечения, то есть от длины s , отсчитываемой вдоль линии, соединяющей центры сечений. Примером квазилинейного проводника служит обычный линейный проводник, представляющий собой однородный круговой цилиндр, длина которого велика по сравнению с диаметром.

В квазилинейном проводнике напряженности \vec{E} , $\vec{E}^{\text{стру}}$ и плотность тока \vec{j} постоянны во всех точках данного сечения и изменяются от сечения к сечению как функции от координаты s .

Если квазилинейный проводник граничит с изолятором, то на боковой поверхности его $j_n = 0$, линии тока проходят касательно к этой поверхности, образуя трубку тока.

Рассмотрим два сечения $\sigma_1(s_1)$ и $\sigma_2(s_2)$ квазилинейного проводника. Обозначим через I_1 и I_2 токи, идущие через эти сечения. Рассматривая участок, лежащий между сечениями как узел и пользуясь законом Кирхгофа, получим $I_2 = I_1$, то есть сила стационарного тока во всех сечениях неразветвленного квазилинейного проводника одинакова.

Проинтегрируем равенство

$$E_s + E_s^{\text{стру.}} = \frac{j}{\gamma} = \frac{j\sigma}{\gamma\sigma}$$

по s от сечения σ_1 до сечения σ_2 . Замечая, что $j\sigma = I = \text{const}$ и $E_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, имеем

$$\int_{s_1}^{s_2} (E_s + E_s^{\text{стру.}}) ds = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}^{\text{стру.}} = I \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\gamma\sigma}. \quad (93.05)$$

Здесь

$$R_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\gamma\sigma} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{12}^{\text{стру.}} = \int_{s_1}^{s_2} E_s^{\text{стру.}} ds \quad (93.06)$$

— сопротивление участка квазилинейного проводника и действующая на этом участке сторонняя э. д. с. Отсюда получается обобщенный закон Ома

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр.}}}{R_{12}}. \quad (93.07)$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = V_{12}$ называется напряжением на участке цепи.

Количество теплоты, выделяющееся в проводнике в единицу времени, равно

$$Q'_{12} = \int \frac{j^2}{\gamma} dV = R_{12} I^2, \quad (93.08)$$

так как

$$dV = \sigma \cdot ds \quad \text{и} \quad j^2 dV = I^2 \frac{ds}{\sigma}.$$

Из (93.07) следует, что для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ и сила тока отлична от нуля лишь в том случае, если в цепи существует сторонняя э. д. с.

Рассмотрим замкнутую неразветвленную цепь. Пусть на участке 1—2 действует стороннее поле $\vec{E}^{\text{стр.}}$, а вне участка $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$. Участок 1—2 цепи называется источником сторонней э. д. с., которая равна

$$\mathcal{E}^{\text{стр.}} = \oint E_s^{\text{стр.}} ds = \int_1^2 E_s^{\text{стр.}} ds. \quad (93.09)$$

Роль сторонней э. д. с. заключается в том, что она непрерывно вызывает движение положительных зарядов внутри источника в направлении от 1 к 2. Назовем точки 1 и 2 зажимами источника.

Применим (93.07) к внешнему участку цепи и ко всей цепи. Обозначим внешнее и внутреннее сопротивления участков через R_a и R_i , а через φ_1 и φ_2 — потенциалы на зажимах источника; получим

$$IR_a = \varphi_1 - \varphi_2, \quad I(R_a + R_i) = \mathcal{E}. \quad (93.10)$$

Следовательно,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{R_a}{R_a + R_i} \mathcal{E}. \quad (93.11)$$

Из (93.07) следует, что если $I = 0$, то $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}^{\text{стр.}}$; то есть сторонняя э. д. с. измеряется разностью потенциалов на зажимах источника, когда цепь разомкнута. Во внешней цепи потенциал падает в направлении тока, так что $\varphi_1 > \varphi_2$. Наоборот, внутри источника э. д. с. потенциал падает в направлении, противоположном направлению тока.

Задачи

1. Определить сопротивление изоляции кабеля длины l , состоящего из цилиндрического проводника радиуса a и цилиндрической изоляции с наружным радиусом b . Изоляция соприкасается с окружающей средой, которая считается хорошим проводником.

Решение. Обозначим электропроводность изоляции через γ . Боковая поверхность цилиндра радиуса r равна $2\pi rl$. Согласно (93.06) получим

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\gamma \cdot 2\pi rl} = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \frac{b}{a}.$$

2. В качестве заземления в почву зарыт металлический шар радиуса a . Определить сопротивление заземления.

Решение. Здесь координатой s квазилинейного проводника служит радиус r , $a \sigma = 4\pi r^2$. Поэтому

$$R = \int_a^\infty \frac{dr}{4\pi r^2 \gamma} = \frac{1}{4\pi\gamma a},$$

где γ — коэффициент электропроводности грунта. Из формулы видно, что существенна электропроводность непосредственно у поверхности шара.

§ 94. Превращение энергии в цепи постоянного тока

Закон сохранения энергии согласно (76.11) имеет вид:

$$N^{\text{стр.}} = \int \vec{j} \vec{E}^{\text{стр.}} dV = \frac{dW}{dt} + \oint_{(S)} S_n d\sigma + Q'. \quad (94.01)$$

Для стационарного поля $\frac{dW}{dt} = 0$. Рассмотрим поверхность, охватывающую все поле. Тогда $S_n = 0$ и, следовательно, $N^{\text{стр.}} = Q'$. Для квазилинейного неразветвленного проводника элемент объема можно взять в форме $dV = \sigma ds$. Тогда

$$N^{\text{стр.}} = \int_V \vec{j} \vec{E}^{\text{стр.}} dV = I \oint S_e^{\text{стр.}} ds = I \mathcal{E}^{\text{стр.}}, \quad (94.02)$$

где $\mathcal{E}^{\text{стр.}}$ — сторонняя э. д. с., действующая в цепи. Из $N^{\text{стр.}} = Q'$ в силу (93.08) вытекает закон Ома для замкнутой цепи $\mathcal{E}^{\text{стр.}} = RI$.

Работа сторонних сил производится лишь там, где $\vec{E}^{\text{стр.}} \neq 0$, а теплота Ленца — Джоуля выделяется во всем проводнике. Возникает вопрос: за счет чего выделяется теплота на тех участках цепи, где $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$?

Рассмотрим участок цилиндрического провода радиуса r и длины l . Пусть по участку идет ток силой I . На поверхности проводника напряженность магнитного поля приближенно равна (задача 1, § 9)

$$H = \frac{2I}{cr} = \frac{2\pi r j}{c}.$$

Если на участке $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$, то $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$ и вектор Умова — Пойнтинга равен

$$S = \frac{c}{4\pi\gamma} |\vec{j}, \vec{H}| = \frac{c}{4\pi\gamma} jH = \frac{j^2 r}{2\gamma}.$$

Вектор S направлен внутрь проводника (рис. 38), так как вектор \vec{E} направлен вдоль тока, а \vec{H} — по касательной к окружности, концентрической току, перпендикулярно к \vec{E} . Поэтому в единицу времени через поверхность проводника втекает энергия

$$\oint S_n d\sigma = S \cdot 2\pi r l = RI^2 = Q,$$

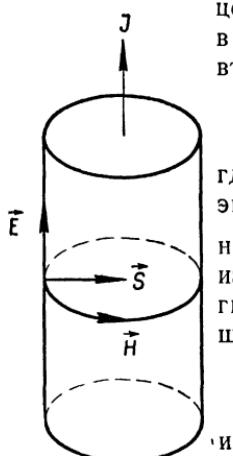


Рис. 38.

где R — сопротивление проводника. Таким образом, энергия, выделяющаяся в виде количества теплоты на участках, где $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$, втекает в проводник из окружающего поля. Но в окружающее поле энергия поступает из участков цепи, в которых совершается работа сторонних сил. Там, где

$$\vec{E}^{\text{стр.}} \neq 0, \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}^{\text{стр.}}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi\gamma} [\vec{j}, \vec{H}] - \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^{\text{стр.}}, \vec{H}].$$

Первый член правой части рассмотрен выше. Второй член представляет собой поток энергии из источника э. д. с. наружу, так как внутри источника э. д. с. $\vec{E}^{\text{стр.}}$ и \vec{j} , вообще говоря, параллельны. Вся вытекающая энергия возвращается в другие участки цепи (в которых $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$) и превращается там в теплоту. Действительно, если предположить, что источник э. д. с. имеет цилиндрическую форму (длина l' , радиус r) и магнитное поле на его поверхности определяется формулой $H = \frac{2I}{cr}$, то полный поток энергии, выходящий через боковую поверхность источника в единицу времени, равен

$$-\int \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^{\text{стр.}}, \vec{H}]_n d\sigma = \frac{c}{4\pi} E^{\text{стр.}} H 2\pi l' r = \mathcal{E}^{\text{стр.}} I$$

и равняется мощности сторонней э. д. с. $\mathcal{E}^{\text{стр.}} = E^{\text{стр.}} \cdot l'$.

§ 95. Термоэлектрические явления

В неравномерно нагретом теле (металле или полупроводнике) нет термодинамического равновесия для электронов. В таком теле появляется добавочный ток в направлении падения температуры. Плотность этого тока в первом приближении пропорциональна градиенту

температуры. Поэтому обобщенный закон Ома может быть написан в форме

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}} - \alpha \nabla T), \quad (95.01)$$

где α — величина, характеризующая термоэлектрические свойства вещества и имеющая смысл термо-э. д. с., рассчитанной на 1 градус.

Рассмотрим участок разомкнутой цепи, в котором $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$. Пусть рассматриваемый участок неоднороден, причем крайние проводники 1 (рис. 39) представляют собой одинаковые вещества. Пусть спаи b и c имеют температуры T_1 и T_2 , а температуры концов a и d цепи одинаковы. В такой разомкнутой цепи ($j = 0$) возникнет электрическое поле $\vec{E} = \alpha \nabla T$ и между точками a и d установится разность потенциалов

$$\mathcal{E}_T = \int_a^d E_s ds = \int_a^d \alpha \frac{dT}{ds} ds = \int_a^d \alpha dT,$$

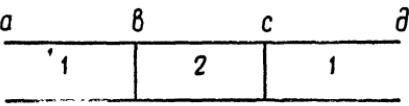


Рис. 39.

которая называется термоэлектродвижущей силой. Обозначим величину α в первом и втором веществах через α_1 и α_2 . Интегрирование от a до b и от b до d есть интегрирование по T от T_2 до T_1 в первом веществе, а интегрирование от b до c есть интегрирование по T от T_1 до T_2 во втором веществе. Поэтому

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT. \quad (95.02)$$

Зависимость термо-э. д. с. от температуры может быть получена, если известна зависимость α от T . Из (95.02) видно, что для получения термо-э. д. с. необходим не только градиент температуры, но и неоднородность цепи.

Рассмотрим энергетические превращения в цепи постоянного тока при наличии термо-э. д. с.. Согласно (76.03) изменение плотности энергии поля можно написать в форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Подставим сюда из (95.01) $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}^{\text{стр.}} + \alpha \nabla T$, получим мощность сторонних сил в единице объема

$$\vec{j} \cdot \vec{E}^{\text{стр.}} = \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \frac{j^2}{\gamma} + \alpha \vec{j} \cdot \nabla T. \quad (95.03)$$

Последний член в (95.03) определяет количество теплоты, выделяющееся при термоэлектрических явлениях в единицу времени в еди-

нице объема. Проинтегрируем (95.03) по некоторому объему, введя обозначения § 76, получим

$$N^{\text{стр.}} = \frac{dW}{dt} + \oint_{(S)} S_n d\sigma + \int_{(V)} \frac{j^2}{\gamma} dV + \int \alpha \vec{j} \nabla T dV. \quad (95.04)$$

Преобразуем это выражение для случая стационарного поля, когда

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Тогда

$$\vec{j} \alpha \nabla T = \operatorname{div} (\alpha T \vec{j}) - T \vec{j} \nabla \alpha$$

и

$$N^{\text{стр.}} = \oint_{(S)} (\vec{S} + \alpha T \vec{j})_n d\sigma + \int_{(V)} \frac{j^2}{\gamma} dV - \int T \vec{j} \nabla \alpha dV. \quad (95.05)$$

Последний член выражает так называемый эффект Томсона. Если проводник однороден, то изменение величины α определяется лишь изменением температуры

$$\nabla \alpha = \frac{d\alpha}{dT} \nabla T.$$

Поэтому в единице объема при наличии градиента температуры будет выделяться количество теплоты

$$q_T = \rho \vec{j} \nabla T, \quad \text{где} \quad \rho = -T \frac{d\alpha}{dT} \quad (95.06)$$

(ρ — коэффициент Томсона). При $\rho > 0$ количество теплоты выделяется в проводнике, если \vec{j} и ∇T параллельны, и поглощается — если \vec{j} и ∇T антипараллельны; при $\rho < 0$ — соотношения обратные.

Первый член правой части в (95.05) содержит сумму потока электромагнитной энергии и потока теплоты $\alpha T \vec{j}$, переносимого током. На границе объема V , где имеется контакт двух проводников, T и j_n непрерывны, величина же α различна. Поэтому поток количества теплоты, подводимого к контакту током в проводнике 1, будет $\alpha_1 T j_n$, а поток количества теплоты, отводимого от контакта током в проводнике 2, будет $\alpha_2 T j_n$. Таким образом, на единице площади контакта в единицу времени будет выделяться «тепло Пельтье»

$$q'_{12} = \Pi_{12} j_n, \quad \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (95.07)$$

где Π_{12} — коэффициент Пельтье.

Оба эффекта — Томсона и Пельтье — пропорциональны первой степени тока и меняют знак при изменении направления тока. Поэтому их можно исключить, беря полусумму тепловых эффектов для равных прямого и обратного токов. Эта полусумма равна теплоте Джоуля — Ленца.

Легко видеть, что коэффициенты Пельтье и Томсона связаны соотношением

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \frac{\Pi_{12}}{T}, \quad (95.08)$$

а термо-Э. д. с. выражается через коэффициент Пельтье соотношением Томсона

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT. \quad (95.09)$$

§ 96. Задача Бурсиана — Лангмюра (плоский диод)

Простейший электронный прибор — плоский диод — состоит из двух плоских параллельных электродов (катода и анода), помещенных в вакууме на расстоянии l друг от друга. К электродам приложено напряжение V_a . Катод нагрет и испускает термоэлектроны, вследствие чего через диод идет электрический ток. Определим плотность этого тока.

Эта задача впервые была решена Бурсианом в 1919 году. Позже она рассматривалась в более общей постановке рядом авторов: Богуславским, Лангмюром и др.

Пусть потенциалы катода и анода соответственно равны $\varphi_k = 0$ и $\varphi_a = V_a$. При больших анодных напряжениях все электроны, выходящие из катода, доходят до анода и плотность тока (ток насыщения) не зависит от V_a . Величина тока насыщения зависит лишь от эмиссионной способности катода и определяется формулой Ричардсона — Дэшмана (гл. VIII)

$$j_{\text{нас.}} = a T^2 e^{-\frac{b}{T}}, \quad (96.01)$$

где a — постоянная, T — абсолютная температура, $b = \frac{W}{k}$, W — работа выхода электрона из катода, k — постоянная Больцмана.

Рассмотрим изменение распределения потенциала $\varphi(x)$ между электродами при постепенном увеличении эмиссии электронов с повышением температуры T катода. Ограничимся случаем, когда V_a достаточно велико и начальными скоростями эмитированных электронов можно пренебречь.

При низких температурах эмиссии нет и $j = 0$. Поэтому между электродами нет объемного заряда. Потенциал зависит от x линейно $\varphi = \frac{V_a}{l} x$ (рис. 40, прямая 1). При некотором повышении температуры появляется ток, по величине совпадающий с $j_{\text{нас.}}$ (влияние объемного заряда еще не сказывается). По мере роста j растет и отрицательный объемный заряд, понижающий потенциал. Кривая $\varphi = \varphi(x)$ «провисает» относительно прямой 1. При дальнейшем увеличении объемного заряда напряженность поля у катода обращается

в нуль и может изменить свой знак. Минимум потенциала будет достигаться не у катода, а на некотором расстоянии от него (кривая 3). Плотность тока в диоде уменьшается, так как медленные электроны не могут преодолеть возникшее задерживающее поле и возвращаются на катод.

Найдем распределение потенциала. Плотность ρ объемного заряда равна $\rho = -en$, если n — число электронов в кубическом сантиметре.

Плотность тока равна $j = env$, где v — скорость электрона. В плоскости с потенциалом $\varphi(x)$ скорость электрона равна

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}.$$

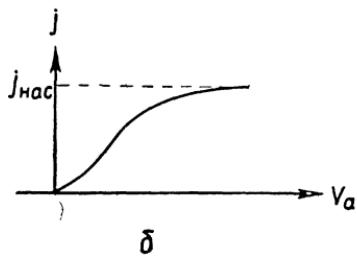
Поэтому плотность заряда равна

$$\rho = -en = -\frac{j}{v} = -j \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V_\varphi},$$

где j не зависит от x (для стационарного тока). Уравнение Пуассона принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= -4\pi\rho = \frac{4}{9} A \frac{j}{V_\varphi}, \\ A &= 9\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}. \end{aligned} \right\} \quad (96.02)$$

Рис. 40.



Нелинейное уравнение (96.02) проинтегрируем при следующих граничных условиях:

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \varphi(l) = V_a. \quad (96.03)$$

Второе условие соответствует упомянутому выше обращению поля в нуль на катоде и кривой 2 (рис. 40, a). Случай, соответствующий кривой 3, при сделанном предположении о нулевой начальной скорости электронов не осуществляется.

Умножим уравнение (96.02) на $2\frac{d\varphi}{dx}$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{16}{9} Aj \frac{d}{dx} \varphi^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{16}{9} Aj \varphi^{\frac{1}{2}} + C.$$

Из граничных условий при $x = 0$ следует $C = 0$. Поэтому

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{4}{3} (Aj)^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{4}}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3} \varphi^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} (Aj)^{\frac{1}{2}} x,$$

то есть

$$\varphi(x) = (Aj)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}.$$

Граничное условие при $x = l$ дает

$$V_a = (Aj)^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}}.$$

Отсюда

$$j = \frac{1}{A} \frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{l^2} = \frac{1}{9\pi} \left(\frac{2e}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{l^2}, \quad \varphi(x) = V_a \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (96.04)$$

Таким образом, для зависимости j от V_a имеет место «закон 3/2». При больших V_a рост j постепенно замедляется и достигает тока насыщения (96.01). Вольт-амперная характеристика диода изображена на рисунке 40, б.

§ 97. Влияние магнетика на магнитное поле тока

Рассмотрим влияние магнетика на магнитное поле тока. Уравнения постоянного магнитного поля тока, распределенного с плотностью \vec{j} , при отсутствии ферромагнетиков и поверхностных токов имеют вид (§ 79)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (97.01)$$

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}. \quad (97.02)$$

Если ток распределен в однородном магнетике с магнитной проницаемостью μ , то первое уравнение (97.01) дает

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (97.03)$$

Из $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ следует

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (97.04)$$

где \vec{A} — векторный потенциал магнитного поля тока.

В связи с условием калибровки (§ 34)

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (97.05)$$

получаем

$$\nabla^2 \vec{A} = - \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}, \quad (97.06)$$

поэтому потенциал в точке \vec{r} равен

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (97.07)$$

Отсюда следует, что магнитная индукция \vec{B} , создаваемая током в магнетике, в μ раз больше напряженности поля, созданного таким же током, распределенным в вакууме. Это объясняется тем, что напряженность \vec{H} создается только токами свободных зарядов, а индукция \vec{B} создается токами как свободных, так и связанных зарядов. Действительно, согласно (79.04) и (97.01)

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \text{rot } \vec{I}), \quad (97.08)$$

где \vec{I} — вектор намагничивания. Подставим \vec{B} из (97.04) в (97.08). Учитывая (97.05), получим

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \text{rot } \vec{I}). \quad (97.09)$$

Так что

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \text{rot } \vec{I}(\vec{r}')}{R} dV', \quad (97.10)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Для однородной неферромагнитной среды $\vec{I} = \frac{\mu-1}{4\pi} \vec{H}$. Плотность тока связанных зарядов пропорциональна плотности тока свободных зарядов

$$\vec{j}_g = \frac{\mu-1}{4\pi} c \text{rot } \vec{H} = (\mu-1) \vec{j}.$$

Полный ток равен

$$\vec{j} + \vec{j}_g = \mu \vec{j}. \quad (97.11)$$

Поэтому векторный потенциал возрастает в μ раз.

§ 98. Энергия магнитного поля токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции

Энергия магнитного поля тока, погруженного в магнетик, согласно (76.13) равна

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV.$$

Это выражение может быть преобразовано (§ 39) к виду

$$W_m = \frac{1}{2c} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (98.01)$$

Для системы проводников интеграл по объему разбивается на сумму интегралов по объему каждого проводника

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^n \int_{V_a} \vec{j}_a \vec{A} dV_a$$

Если проводники линейные, то $\int \vec{j}_a dV_a$ можно заменить через $I_a d\vec{r}_a$, где I_a — сила тока, идущего по проводнику a , $d\vec{r}_a$ — элемент длины этого проводника. Тогда

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^n I_a \oint_{C_a} \vec{A} d\vec{r}_a, \quad (98.02)$$

где интеграл берется по контуру C_a проводника a . По формуле Стокса

$$\oint_{C_a} \vec{A} d\vec{r}_a = \int_{(s_a)} \text{rot}_n \vec{A} d\sigma_a = \int_{(s_a)} B_n d\sigma_a = \Phi_a. \quad (98.03)$$

Величина Φ_a есть, очевидно, поток магнитной индукции, идущей через площадь s_a , охватываемую контуром тока a . Поэтому магнитная энергия равна

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^n I_a \Phi_a. \quad (98.04)$$

Рассмотрим систему двух замкнутых токов (рис. 41). Пусть в проводнике 1 идет ток I_1 . Поток магнитной индукции, пронизывающий площадь контура проводника 2, будет пропорционален I_1

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1.$$

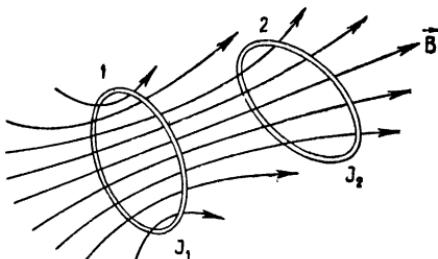


Рис. 41.

Коэффициент L_{21} называется коэффициентом индукции первого проводника на второй. Точно так же поток индукции, пронизывающий площадь, ограниченную контуром проводника 1, и обусловленный током I_2 во втором проводнике, равен

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2.$$

Кроме того, площадь, охваченная каждым проводником, пронизывается магнитным потоком, обусловленным собственным током. Собственные магнитные потоки равны

$$\Phi_{11} = \frac{1}{c} L_{11} I_1, \quad \Phi_{22} = \frac{1}{c} L_{22} I_2.$$

Коэффициенты L_{11} и L_{22} называются коэффициентами самоиндукции проводников 1 и 2. Полные потоки, идущие через площади, ограниченные токами 1 и 2, равны

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \frac{1}{c} (L_{11}I_1 + L_{12}I_2),$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = \frac{1}{c} (L_{21}I_1 + L_{22}I_2).$$

Для n проводников поток, проходящий через площадь контура a , есть линейная функция сил токов и равен

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} I_b. \quad (98.05)$$

Энергия системы токов принимает вид

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_a I_a \Phi_a = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} I_a I_b. \quad (98.06)$$

Заметим, что работа, которую надо затратить, чтобы перенести ток 2 из бесконечности в данное положение относительно тока 1, равна $\frac{1}{2c^2} L_{21} I_2 I_1$; работа переноса тока 1 из бесконечности в данное положение относительно тока 2 равна $\frac{1}{2c^2} L_{12} I_1 I_2$ (предполагается, что в процессе переноса $I_1 = \text{const}$ и $I_2 = \text{const}$). Так как энергия системы не зависит от пути ее построения, то названные работы равны. Следовательно, $L_{12} = L_{21}$. Поэтому коэффициент $L_{12} = L_{21}$ называется коэффициентом взаимной индукции проводников 1 и 2.

Так как $W_m \geq 0$, то для системы двух проводников должно выполняться неравенство $L_{11}L_{22} \geq L_{12}^2$ (§ 89).

Отношение

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

называется коэффициентом связи двух контуров.

§ 99. Вычисление коэффициентов взаимоиндукции и самоиндукции

Вычислим коэффициент взаимной индукции. Согласно (98.03) поток индукции, созданный током I_2 и пронизывающий площадь проводника 1, равен

$$\Phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 d\vec{r}_1, \quad \text{где} \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu I_2}{c} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2}{R}$$

есть векторный потенциал, создаваемый током I_2 . Поэтому

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2 = \frac{\mu I_2}{c} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{R}. \quad (99.01)$$

Здесь $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ есть расстояние между элементами $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ токов. Коэффициент взаимоиндукции равен

$$L_{12} = \mu \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{R} = L_{21}. \quad (99.02)$$

Из (99.02) видно, что L_{12} имеет размерность длины (измеряется в сантиметрах), пропорционален магнитной проницаемости магнетика и зависит от формы, взаимного расположения и размеров проводников.

Для вычисления коэффициента самоиндукции формула (99.02) непригодна, так как интеграл расходится. Чтобы вычислить L_{11} , найдем магнитную энергию, подставив (97.07) в (98.01).

$$W_m = \frac{1}{2c^2} L_{11} I_1^2 = \frac{\mu}{2c^2} \int_{(V)} \int_{(V)} \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}'}{R} dV dV'. \quad (99.03)$$

Поэтому

$$L_{11} = \frac{\mu}{I_1^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}'}{R} dV dV' = \frac{2c^2 W_m}{I_1^2}. \quad (99.04)$$

Задачи.

1. Определить коэффициент самоиндукции отрезка l линейного проводника радиуса a ($a \ll l$), по которому идет стационарный ток силой I .

Решение. Прямолинейный проводник длины l можно рассматривать как часть замкнутого проводника с током. На расстояниях $r \leq l$ магнитное поле будет совпадать с полем диполя и убывать как $\frac{1}{r^3}$. Поэтому энергией поля на таких расстояниях можно пренебречь. На расстояниях $r < l$ магнитное поле прямолинейного провода равно $H = \frac{2I}{cr}$. Магнитная энергия равна

$$W_m^{(a)} = \frac{\mu}{8\pi} \int_a^l H^2 2\pi lr dr = \frac{\mu I^2 l}{c^2} \int_a^l \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2}{c^2} l \ln \frac{l}{a},$$

где μ — магнитная проницаемость среды и a — радиус провода. Магнитной энергией внутри провода можно пренебречь. Теперь согласно (99.04) коэффициент самоиндукции приближенно (с логарифмической точностью) равен

$$L = 2\mu l \ln \frac{l}{a}.$$

2. Определить коэффициент самоиндукции длинного однослойного соленоида, имеющего N витков.

Решение. Напряженность магнитного поля внутри очень длинного соленоида можно считать равной напряженности на его оси (задача 2, § 37), $H = \frac{4\pi IN}{cl}$. Пренебрегая влиянием концов, магнитную энергию можно вычислить как произведение плотности энергии $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ на объем соленоида $V = ls$, где s — площадь поперечного сечения. Отсюда коэффициент самоиндукции равен

$$L = \frac{2c^2 W_m}{I^2} = \frac{2c^2}{I^2} \frac{\mu H^2}{8\pi} ls = \frac{4\pi\mu N^2 s}{l}.$$

3. Показать, что коэффициент взаимной индукции двух соленоидов, намотанных на одном и том же сердечнике, равен

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2 s}{l}.$$

§ 100. Квазистационарные токи

Для исследования переменных во времени токов необходимо пользоваться общей системой уравнений Максвелла. Однако задача значительно упрощается для так называемых квазистационарных токов (сравнительно медленно меняющихся с течением времени).

Обозначим период изменения тока (если ток периодически меняется со временем) через T . Если изменения тока не периодические, обозначим через T время, в течение которого ток изменяется на порядок своей величины. Линейные размеры системы (области, занятой током) обозначим через l . Тогда ток можно считать квазистационарным, если

$$cT \gg l. \quad (100.01)$$

Произведение cT есть расстояние, на которое распространяется поле за время T . Соотношение (100.01) показывает, что размеры системы малы и всякое изменение поля практически мгновенно охватывает всю систему проводников. Поэтому запаздыванием электромагнитных действий (гл. III) в такой системе можно пренебречь — можно считать, что во всех точках системы ток (или поле) в каждый момент времени находится в одной и той же фазе. Например, для промышленного переменного тока $T = \frac{1}{50}$ сек, а $cT = 6 \cdot 10^8 \text{ см} = 6000 \text{ км}$. Поэтому, если размеры тока $a \ll 6000 \text{ км}$, то можно считать ток квазистационарным.

Кроме условия квазистационарности (100.01), будем предполагать, что: 1) на границе области электромагнитное поле практически равно нулю; 2) проводники квазилинейны; 3) внутри проводников ток смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ мал по сравнению с током проводимости \vec{j} и током смещения можно пренебречь; если в цепь включен конденсатор (сосредоточенная емкость), то в конденсаторе можно пренебречь

током проводимости по сравнению с током смещения; 4) диэлектрики и проводники однородны.

Рассмотрим энергию квазистационарного тока.

Повторяя рассуждения § 39, в силу уравнения Максвелла получим

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} dV = \frac{1}{2c} \int_V \vec{A} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV.$$

Аналогично преобразуется выражение для электрической энергии.

Для переменного поля $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Предполагая, что объемных зарядов нет, получим

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \eta \varphi dV - \frac{1}{8\pi c} \int \vec{D} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV.$$

Полная энергия равна

$$\begin{aligned} W = W_e + W_m &= \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma + \frac{1}{2c} \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi c} \int \left(\vec{A} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{D} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV. \end{aligned}$$

Покажем, что последний член может быть опущен. Векторный потенциал, пренебрегая запаздыванием, можно представить в форме (97.07). Тогда

$$\int_V \left(\vec{A} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{D} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV = \frac{\epsilon \mu}{c} \int_V dV \int_{(V')} dV' \frac{1}{R} \left(\vec{j}' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t} \right),$$

где штрих означает, что функция зависит от радиус-вектора \vec{r}' элемента объема dV' . В проводниках, где нет сторонних сил, $\vec{j}' = \gamma \vec{E}'$. Поэтому правая часть обращается в нуль

$$\int_V dV \int_{(V')} dV' \frac{1}{R} \left(\vec{E}' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \right) = 0.$$

В этом легко убедиться, произведя в одном из членов замену аргументов \vec{r}' на \vec{r} и \vec{r} на \vec{r}' . Для тех объемов V_1 проводников, в которых действуют сторонние силы, будем иметь

$$\frac{\epsilon \mu \gamma}{c} \int_{(V_1)} dV \int_{(V_1)} dV' \frac{1}{R} \left(\vec{E}_{\text{струп.}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}_{\text{струп.}}}{\partial t} \right).$$

Но объем V_1 , в котором действуют сторонние силы, можно считать очень малым по сравнению с объемом V всех проводников системы. Поэтому этим членом можно пренебречь.

Таким образом, выражение для энергии квазистационарного поля по форме совпадает с выражением для энергии стационарного поля

$$W = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma + \frac{1}{2c} \int_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (100.02)$$

Для системы линейных проводников и конденсаторов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ab} p_{ab} e_a e_b + \frac{1}{2c^2} \sum_{ab} L_{ab} I_a I_b, \quad (100.03)$$

где p_{ab} — потенциальные коэффициенты, L_{ab} — коэффициенты взаимоиндукции и самоиндукции проводников.

Рассмотрим систему из емкости C , самоиндукции L , сопротивления R (рис. 42) и сосредоточенного источника сторонней э. д. с.

(емкостью и сопротивлением катушки самоиндукции пренебрегаем, сопротивление источника э. д. с. включаем в R). Энергия системы равна

$$W = \frac{1}{2c^2} L I^2 + \frac{e^2}{2C}, \quad (100.04)$$

где e — заряд одной из обкладок конденсатора.

Применим к системе закон сохранения энергии. На границе области в силу условия (1) вектор Умова —

Пойнтинга \vec{S} обращается в нуль (это значит, что система не излучает). Уравнение энергии принимает вид

$$N^{стп.} = \frac{dW}{dt} + Q'. \quad (100.05)$$

Согласно (93.08) и (94.02) для линейного проводника $N^{стп.} = I \mathcal{E}^{стп.}$ и $Q' = RI^2$; поэтому, подставив $N^{стп.}$, Q' и W в (100.05), получим

$$I \mathcal{E}^{стп.} = \frac{1}{c^2} L I \frac{dI}{dt} + \frac{e}{C} \frac{de}{dt} + RI^2.$$

Замечая, что $\frac{de}{dt} = -I$, получаем

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} + RI - \frac{e}{C} = \mathcal{E}^{стп.}. \quad (100.06)$$

Уравнение (100.06) выражает обобщенный закон Ома для цепи квазистационарного тока. Перепишем его в форме

$$I = \frac{\mathcal{E}^{стп.} + \frac{e}{C} - \frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt}}{R}. \quad (100.07)$$

В числителе имеем: стороннюю э. д. с., разность потенциалов $\frac{e}{C} = \varphi_1 - \varphi_2$ между обкладками конденсатора, электродвижущую силу индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} = -L' \frac{dI}{dt}, \quad (100.08)$$

возникающую в катушке самоиндукции при изменении силы тока (все величины выражены в абсолютной гауссовой системе единиц, а коэффициент самоиндукции $L' = \frac{L}{c^2}$ — в системе СГСЕ).

Можно получить более общее выражение для электродвижущей силы индукции из закона Фарадея (67.02). Согласно (98.05) э. д. с. индукции в проводнике a равна

$$\mathcal{E}_a^{\text{инд.}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_a}{dt} = -\frac{1}{c^2} \sum_b L_{ab} \frac{dI_b}{dt} - \frac{1}{c^2} \sum_b \frac{dL_{ab}}{dt} I_b. \quad (100.09)$$

Первый член определяет э. д. с. индукции, вызванную изменением силы тока в проводниках, а второй — изменением взаимного расположения и формы проводников с током.

В случае системы n неподвижных проводников, связанных друг с другом индуктивно, обобщенный закон Ома дает систему

$$R_a I_a = \mathcal{E}^{\text{стр.}} + V_a - \sum_{b=1}^n L'_{ab} \frac{dI_b}{dt} \quad (a = 1, 2, 3 \dots n); \quad (100.10)$$

член V_a отличен от нуля лишь для незамкнутого проводника и равен разности потенциалов на его концах.

§ 101. Процессы установления

Рассмотрим процесс установления стационарного тока. Допустим, что замыкается цепь, состоящая из последовательно включенных самоиндукции L и сопротивления R . Под R понимается полное омическое сопротивление цепи, включая и сопротивление источника постоянной э. д. с. \mathcal{E}_0 . Согласно (100.06) сила тока в цепи определяется дифференциальным уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0, \quad (101.01)$$

которое надо решить при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ сила тока $I = 0$. Решение имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (101.02)$$

Из (101.02) следует, что стационарное значение тока $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ устанавливается постепенно. Скорость установления определяется постоянной времени цепи

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (101.03)$$

Ток (101.02) можно рассматривать как сумму стационарного тока $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ и индукционного экстратока замыкания

$$I^{\text{инд.}} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (101.04)$$

имеющего противоположное I_0 направление. Индукционный ток замыкания постепенно затухает, через время $t = \tau$ он убывает в $e = 2,7183 \dots$ раза.

Аналогично можно рассмотреть процесс исчезновения тока. Допустим, что в цепи в момент $t = 0$ электродвижущая сила \mathcal{E}_0 обращается в нуль, но цепь остается замкнутой и ее сопротивление равно R . Решение уравнения (101.01) при $\mathcal{E}_0 = 0$ имеет вид

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (101.05)$$

где I_0 — сила тока в момент выключения э. д. с. Отсюда следует, что ток исчезает не сразу. Постоянная времени τ (время релаксации) пропорциональна самоиндукции L , так как именно э. д. с. самоиндукции вызывает растягивание процесса установления во времени.

С другой стороны, τ обратно пропорционально сопротивлению R , так как чем больше R , тем быстрее электромагнитная энергия расходуется на нагревание проводов.

Задачи.

1. Конденсатор емкости C с разностью потенциалов на пластинах V_0 разряжается через сопротивление R . Определить законы изменения заряда, тока и разности потенциалов. Самоиндукцией цепи пренебречь.

Решение. Так как $L = 0$, $\mathcal{E}^{\text{стр.}} = 0$ и $I = -\frac{de}{dt}$, то уравнение (100.06) приводится к виду

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e}{RC}.$$

Отсюда $e(t) = e_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, где $e_0 = CV_0$ — начальный заряд обкладки конденсатора. Поэтому

$$V = \frac{e}{C} = \frac{e_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I = -\frac{de}{dt} = \frac{e_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Таким образом, e , V и I убывают экспоненциально с постоянной времени $\tau = RC$.

2. Определить количество электричества e , проходящее через сечение проводника при изменении магнитного потока через ограниченную контуром проводника площадь.

Решение. Если сопротивление проводника R , то сила индукционного тока равна

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд.}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если поток индукции изменяется от Φ_0 до Φ , то

$$e = \int I dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\Phi = \frac{\Phi_0 - \Phi}{R}.$$

Установленной зависимостью пользуются для измерения магнитного поля (заряд e измеряют при помощи баллистического гальванометра).

3. Определить разрядный и зарядный токи плоского конденсатора, диэлектрик которого имеет удельное сопротивление γ .

Решение. Сопротивление конденсатора $R_C = \frac{d}{\gamma \sigma}$ (σ — площадь обкладки, d — расстояние между обкладками) можно считать включенным параллельно внешней цепи, сопротивление которой R_a . Поэтому полное сопротивление определяется из соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C}.$$

Пользуясь результатами задачи 1, получим

$$I_{\text{разр.}} = \frac{e_0}{C} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right) e^{-\frac{t}{C} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right)}.$$

Зарядный ток

$$I_{\text{зар.}} = V \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{C} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right)} \right),$$

где V — приложенное к обкладкам конденсатора напряжение.

§ 102. Свободные колебания в цепи с емкостью и самоиндукцией

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно включенных емкости C , сопротивления R и самоиндукции L (рис. 42). Пусть в начальный момент $t=0$ конденсатор заряжен (заряд обкладки e) и тока нет. Замечая, что $\mathcal{E}^{\text{стп.}}=0$ и $I=-\frac{de}{dt}$, уравнение (100.06) можно написать в форме

$$L \frac{d^2e}{dt^2} + R \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = 0. \quad (102.01)$$

Ищем частное решение этого уравнения в форме¹ $e = e^{\mu t}$. Характеристическое уравнение $L\mu^2 + R\mu + \frac{1}{C} = 0$ имеет корни

$$\mu = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (102.02)$$

Отсюда следует, что при $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \geq 0$ корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны. В случае разных корней общее решение имеет вид

$$e = C_1 e^{-|\mu_1|t} + C_2 e^{-|\mu_2|t} \quad (102.03)$$

и характеризует так называемый апериодический разряд конденсатора (см. задачи).

Рассмотрим случай комплексных корней, если $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$.

Введем обозначения

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad k = \frac{R}{2L}. \quad (102.04)$$

Тогда $\mu = -k \pm i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$. Общий интеграл может быть написан в форме

$$e = A_0 e^{-kt} \cos(\omega t + \alpha). \quad (102.05)$$

Начальная амплитуда A_0 и начальная фаза α — постоянные, определяемые начальными условиями. Таким образом, в контуре будут происходить затухающие колебания

(рис. 43) с циклической частотой ω . Из (102.04) получаем период затухающих колебаний (формула Томсона)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (102.06)$$

Амплитуда колебаний $A(t) = A_0 e^{-kt}$ убывает со временем по показательному закону. Затухание характеризуется обычно логарифмическим декрементом затухания

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = kT = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}. \quad (102.07)$$

¹ Буквой e обозначены и заряд и основание натуральных логарифмов ($e = 2,718 \dots$). Это не должно вызывать недоразумения, так как основание натурального логарифма всегда входит с буквенным показателем степени.

Поэтому затухающие колебания можно представить в форме

$$e = A_0 e^{-\delta \frac{t}{T}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right), \quad (102.08)$$

то есть затухание тем больше, чем больше логарифмический декремент затухания.

Если сопротивление R мало, колебания будут затухать медленно. Таким «незатухающим» колебанием соответствует период

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (102.09)$$

Переписав (102.04) в форме $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$, видим, что циклическая частота затухающих колебаний тем меньше, чем больше сопротивление R . При большом R ω обращается в нуль и колебательный разряд конденсатора переходит в апериодический.

Задачи

1. Показать, что если в начальный момент $t = 0$ $e = e_0$, $I = 0$, то сила тока при апериодическом разряде определяется формулой

$$I(t) = e_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \{e^{\mu_2 t} - e^{\mu_1 t}\},$$

где μ_1 и μ_2 — корни (102.02) характеристического уравнения.

2. Показать, что в случае равных корней характеристического уравнения $(R^2 = 4 \frac{L}{C})$ сила тока в контуре при начальных условиях $e = e_0$, $I = 0$ выражается формулой

$$I(t) = e_0 \mu_1^2 t e^{\mu_1 t}, \quad \mu_1 = -\frac{R}{2L}.$$

Указание. В формуле задачи 1 перейти к пределу при $\mu_2 = \mu_1$.

3. Показать, что при $L = 0$ результат задачи 1 переходит в результат задачи 1 § 101.

§ 103. Вынужденные колебания (переменный ток)

Предположим, что в цепи, состоящей из последовательно включенных самоиндукции L , емкости C и сопротивления R , действует сторонняя э. д. с., меняющаяся со временем гармонически с циклической частотой ω ,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (103.01)$$

Согласно (100.06) сила тока в цепи будет характеризоваться дифференциальным уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + RI - \frac{e}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (103.02)$$

Если взять производную по t и заменить $\frac{de}{dt}$ через I , то сила тока будет подчиняться уравнению второго порядка

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\omega \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

Однако удобнее решать уравнение (103.02), применяя метод комплексных решений. Напишем э. д. с. в комплексной форме $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$.

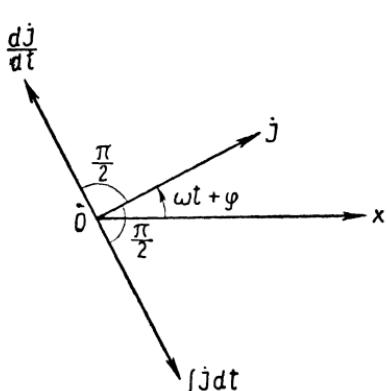


Рис. 44.

Так как $e = -\int I dt$, заменим (103.02) уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (103.03)$$

Здесь I — комплексная сила тока¹. Сила тока, определяемая уравнением (103.02), будет равна вещественной части I

$$I = \operatorname{Re} I.$$

Ищем решение (103.03) в форме

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (103.04)$$

где I_0 — постоянная комплексная амплитуда. Представим ее в форме $I_0 = |I_0| e^{i\varphi}$, где $|I_0|$ — модуль, а φ — фаза (начальная фаза тока). Тогда

$$I = |I_0| e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (103.05)$$

Комплексные числа будем изображать векторами на плоскости (рис. 44). Число I изобразится вектором длины $|I_0|$, образующим угол $\omega t + \varphi$ с неподвижным направлением OX . С течением времени угол $\omega t + \varphi$ изменяется и вектор I равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O . Проекция вектора на ось OX дает, очевидно, вещественную часть I . Искомый ток равен

$$I = \operatorname{Re} I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (103.06)$$

Таким образом, задача сводится к определению комплексной амплитуды тока. Возьмем производную по времени от (103.05). Так как $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, то

$$\frac{dI}{dt} = i\omega I_0 e^{i\varphi} = \omega I_0 e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (103.07)$$

¹ В электротехнике комплексное число, соответствующее вещественному числу a , обозначается \dot{a} .

Следовательно, дифференцирование комплексного вектора по времени сводится к умножению на ω и повороту в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$. Интегрируя \dot{I} , получим

$$-\dot{e} = \int \dot{I} dt = I_0 \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega} I_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (103.08)$$

то есть интегрирование тока по времени сводится к делению на ω и повороту вектора в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

Подставим (103.04) в (103.03). Получим комплексное уравнение

$$I \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right) = \mathcal{E} e^{i\omega t} = \mathcal{E}. \quad (103.09)$$

Величина

$$\dot{Z} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (103.10)$$

называется комплексным сопротивлением. Из (103.09) вытекает закон Ома в комплексной форме

$$\dot{I} = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{\dot{Z}} \quad \text{или} \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}. \quad (103.11)$$

Напишем комплексное сопротивление в форме

$$\dot{Z} = R + iX = Z e^{-i\varphi}, \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (103.12)$$

Вещественная часть комплексного сопротивления R называется активным сопротивлением, а мнимая часть X — реактивным сопротивлением. Из (103.12) получаем

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (103.13)$$

Уравнение (103.11) принимает вид

$$\dot{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (103.14)$$

Перейдем к вещественной части согласно (103.06); получим силу тока

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t + \varphi). \quad (103.15)$$

Амплитуда силы тока равна

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (103.16)$$

Величина Z называется кажущимся сопротивлением цепи или импедансом. Импеданс зависит не только от R , L и C цепи, но и от частоты ω .

Если цепь состоит из одной индуктивности, то $R = 0$, $\frac{1}{C} = 0$ и $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}$. Поэтому величина

$$X_L = \omega L \quad (103.17)$$

называется индуктивным сопротивлением самоиндукции. Если цепь состоит лишь из емкости C , то

$$R = 0, L = 0 \text{ и } I_0 = \omega C \mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{X_C};$$

поэтому величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (103.18)$$

называется емкостным сопротивлением. Из (103.17) и (103.18) видно, что с увеличением частоты индуктивное сопротивление возрастает, а емкостное уменьшается.

Сравнение (103.15) и (103.01) показывает, что сила тока отличается от электродвижущей силы по фазе на угол φ .

Из второго соотношения (103.13) видно, что если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то есть $X_L > X_C$, то ток отстает по фазе от электродвижущей силы, а если $X_L < X_C$, то опережает ее. При $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, то есть когда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (103.19)$$

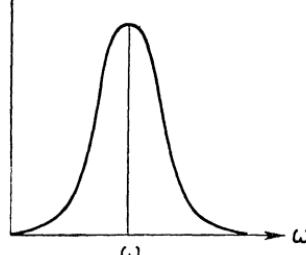


Рис. 45.

ток совпадает по фазе с электродвижущей силой, а кажущееся сопротивление достигает наименьшего значения R . При этом амплитуда тока достигает максимума и определяется формулой $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$. В этом случае говорят о резонансе. Зависимость амплитуды тока I_0 от частоты (резонансная кривая) изображена на рисунке 45. При $\omega = \omega_0$

напряжение (разность потенциалов) на концах катушки самоиндукции или между обкладками конденсатора может достигать очень больших значений. Действительно, согласно (103.08) для напряжения на емкости при резонансе имеем

$$V_{C \text{ рез.}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e_1}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 RC},$$

а для напряжения на индуктивности —

$$V_{L \text{ рез.}} = \left| L \frac{dI}{dt} \right| = \omega_0 L \frac{\mathcal{E}_0}{R} = V_{C \text{ рез.}}$$

Поэтому, если $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} > R$, то напряжения $V_{C \text{рез.}}$ и $V_{L \text{рез.}}$ будут больше амплитуды \mathcal{E}_0 , приложенной э. д. с.

Из рассмотренного метода комплексного переменного для синусоидальных токов вытекает метод векторных диаграмм. Уравнение (103.09) можно рассматривать как векторное уравнение, показывающее, что векторная сумма падения напряжения на омическом сопротивлении $R\dot{I}$, падения напряжения на индуктивности $i\omega L\dot{I}$ и падения напряжения на емкости $\frac{1}{i\omega C}\dot{I}$ равна комплексному вектору напряжения \mathcal{E} . Построим это векторное равенство графически (рис. 46), отложив вектор $R\dot{I}$ из точки O в произвольном направлении. Тогда вектор $i\omega L\dot{I}$ надо отложить под углом $+\frac{\pi}{2}$, а вектор $\frac{1}{i\omega C}\dot{I}$ — под углом $(-\frac{\pi}{2})$. Разность $i(\omega L - \frac{1}{\omega C})\dot{I}$ изобразится отрезком OA (если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$), а \mathcal{E} — диагональю OB прямоугольника, построенного на OA и $R\dot{I}$. Легко видеть, что длина этой диагонали равна

$$\mathcal{E}_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_0 Z.$$

Угол φ , показывающий, на сколько ток отстает по фазе от напряжения, определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{OA}{R\dot{I}} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

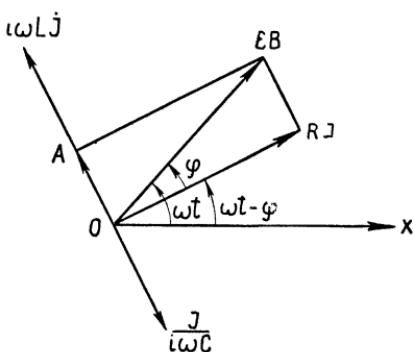


Рис. 46.

Таким образом, снова получены выражения (103.13) и (103.16).

В заключение отметим, что для разветвления цепи переменного тока емкость узла можно считать исчезающей малой. Поэтому первый закон Кирхгофа сохраняет свое значение, и его можно записать в комплексной форме

$$\sum_a \dot{I}_a = 0. \quad (103.20)$$

Задачи

1. В цепи переменного тока с последовательным соединением элементов R , L , C определить зависимость заряда e конденсатора от времени.

Решение. Согласно (103.08) и (103.14)

$$\dot{e} = \frac{i\dot{I}}{\omega} = \frac{\dot{I}}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}};$$

откуда

$$e = \operatorname{Re} \dot{e} = -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z} \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

2. Определить частоту ω_m , при которой амплитуда заряда e на обкладке конденсатора достигает максимума. Найти значение e_{\max} .

Указание. Разыскать минимум подкоренного выражения.

Ответ.

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2} = \omega_0^2 - 2k^2,$$

где k — коэффициент затухания контура;

$$e_{\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R \sqrt{\omega_0^2 - k^2}}.$$

3. Показать, что при параллельном соединении элементов цепи переменного тока с комплексными сопротивлениями $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots$ складываются

комплексные проводимости $\frac{1}{\dot{Z}_1},$

$\frac{1}{\dot{Z}_2}, \dots$ (рис. 47).

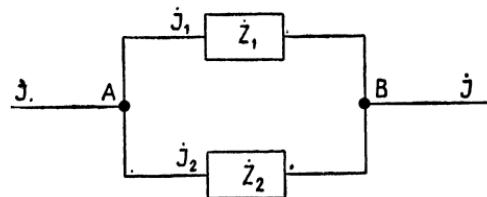


Рис. 47.

Решение. Для узла A согласно (103.20) имеем $i = i_1 + i_2 + \dots$. С другой стороны, если напряжение на AB равно \mathcal{E} , то $i_1 = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}_1}, i_2 = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}_2}, \dots$

Полагая, $I = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}}$, получим комплексную проводимость разветвления

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \dots$$

4. Определить комплексное сопротивление и импеданс контура, состоящего из параллельно включенных емкости C и самоиндукции L .

Решение. Так как проводимости емкости и самоиндукции соответственно равны

$$\frac{1}{\dot{Z}_1} = i\omega C \text{ и } \frac{1}{\dot{Z}_2} = \frac{1}{i\omega L} = -i \frac{1}{\omega L},$$

то проводимость разветвления и комплексная сила тока равны

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} = i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right),$$

$$I = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

Поэтому

$$Z = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}, \quad I = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \mathcal{E}_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Если $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, то импеданс такого контура бесконечно велик — контур может играть роль фильтра, не пропускающего колебания частоты ω_0 .

5. Для измерения активного сопротивления самоиндукции или емкости пользуются мостом Уитстона (рис. 48). Показать, что для того чтобы в ветви BD не было тока, необходимо выполнение следующего соотношения между комплексными сопротивлениями ветвей:

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_4}.$$

6. Для измерения емкости или самоиндукции неизвестную емкость C_x или самоиндукцию L_x (с учетом сопротивления R_x) берут в качестве одной из ветвей моста Уитстона (например, \dot{Z}_1). Ветви \dot{Z}_3 и \dot{Z}_4 делаются чисто активными ($\dot{Z}_3 = R_3$, $\dot{Z}_4 = R_4$), а в ветвь \dot{Z}_2 помещают эталон (C_2 или $R_2 + i\omega L_2$). Показать, что

$$R_x = \frac{R_3 R_2}{R_4}, \quad L_x = \frac{R_3}{R_4} L_2, \quad C_x = \frac{R_4}{R_2} \cdot C_2.$$

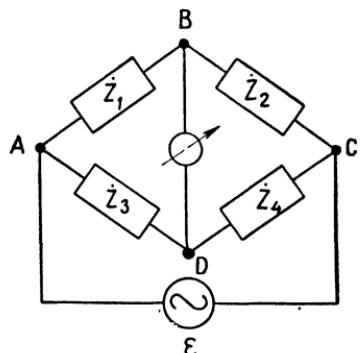


Рис. 48.

§ 104. Превращения энергии в цепи переменного тока

Рассмотрим произвольную цепь, содержащую сопротивления, емкости и самоиндукции и приключенную к источнику косинусоидальной э. д. с. частоты ω . Если цепь обладает комплексным сопротивлением \dot{Z} , то между приложенным напряжением V и током I возникает разность фаз φ ,

$$V = V_0 \cos \omega t, \quad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Согласно (94.02) мгновенная мощность (скорость поступления энергии в цепь) равна

$$N = VI = V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} V_0 I_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]. \quad (104.01)$$

Таким образом, мощность имеет постоянную составляющую $\frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi$ и переменную составляющую с циклической частотой 2ω . Если $\varphi \neq 0$, то в течение каждого периода имеются промежутки времени, в которые I и V имеют разные знаки (направления), а мощность, поступающая в цепь, отрицательна. В эти промежутки времени энергия, запасенная в самоиндукции и емкости, возвращается из цепи источнику напряжения,

Средняя или активная мощность, отдаваемая в цепь, получается усреднением по периоду

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi \quad (104.02)$$

($\cos \varphi$ называется коэффициентом мощности).

Количество теплоты, выделяющееся в цепи в единицу времени, определяется формулой (93.08)

$$Q = RI^2 = RI_0^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (104.03)$$

Среднее значение количества теплоты равно

$$\bar{Q} = RI_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} RI_0^2. \quad (104.04)$$

Обычно для переменного тока вводятся действующие (или эффективные) значения тока и напряжения

$$I_s = \sqrt{\bar{I}^2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad V_s = \sqrt{\bar{V}^2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}; \quad (104.05)$$

тогда $\bar{Q} = RI_s^2$. Следовательно, действующее значение переменного тока равно такому значению постоянного тока, при котором за время, равное одному периоду, выделяется такое же количество теплоты, как и для тока переменного. Действующие значения I_s и V_s измеряются тепловыми измерительными приборами.

§ 105. Исторические замечания

Сведения о развитии идей электродинамики были уже рассмотрены в § 24, 40, 51, 64 и 78. Здесь ограничимся краткой хронологической справкой.

Рассмотренная в § 79—85 феноменологическая теория поля в диэлектриках и магнетиках была основана Пуассоном, Клаузисом, Моссотти, Томсоном и развита Максвеллом.

Термоэлектрический ток был открыт Томасом Иоганном Зеебеком (1770—1831) в 1821 году. Открытие Зеебека сыграло большую роль в установлении закона Омом, а пользуясь термоэлектрической батареей, позволяющей получить стационарную э. д. с., Ом смог установить свой закон.

Термоэлектричество исследовал В. Томсон (1856). В 1863 году Авенариус (1835—1895) экспериментально показал, что дифференциальная термо-э. д. с.

есть линейная функция абсолютной температуры: $\frac{d\mathcal{E}}{dT} = a + bT$. Пельтье (1785—1845) в 1834 году открыл явление, названное его именем. Однако он дал этому явлению неправильное объяснение. Явление Пельтье исследовано Э. Х. Ленцом (1838). В 1853 году Квинтус-Ицилиус экспериментально показал, что тепло Пельтье пропорционально силе тока. Явление Томсона было

открыто в 1856 году. Несколько раньше (1854) В. Томсон построил термодинамическую теорию термоэлектрических явлений.

Исследование электрического тока стимулировалось расширением его технических применений. В 1832 году Шиллинг (1786—1857) изобрел первый действующий телеграф, в котором магнитная стрелка (указатель) отклонялась током. В 1837 году Морзе предложил телеграфный аппарат, а в 1844 году между Вашингтоном и Балтимором была открыта первая телеграфная линия, оборудованная аппаратами Морзе. В 50-х годах XIX в. началась прокладка трансатлантического кабеля, а с 1866 года действует регулярная трансатлантическая связь.

Силовое применение электрического тока началось в 1839 году, когда Б. С. Якоби (1801—1874) сконструировал первый электродвигатель.

Открытие Фарадеем закона электромагнитной индукции привело к созданию электромагнитных источников тока. Первыми появились машины с постоянными магнитами. В 1866 году Уайльд в Манчестере сконструировал первую динамо-машину с электромагнитом, имеющую независимое возбуждение. В это же время открыт принцип самовозбуждения остаточным полем (Вернер и Вильгельм Сименсы, Уитстон и др.).

Механическое выпрямление тока при помощи коллектора было предложено Пачинотти. Первая практически пригодная динамо-машина постоянного тока была построена независимо от Пачинотти бельгийцем Граммом в 1868 году.

В 70-х годах XIX в. делаются попытки передачи электрической энергии на расстояние. В 1880 году русский электротехник Д. А. Лачинов (1842—1902) высказал принцип: для экономически выгодной передачи электрической энергии на большие расстояния необходимо с увеличением расстояния и передаваемой мощности увеличивать напряжение. Первую передачу электрической энергии постоянным током осуществил Марсель Депре (1843—1918) в 1882 году.

Передача больших мощностей энергии с помощью постоянного тока сопряжена с рядом затруднений. Большие возможности в этом отношении открывало в то время применение переменного тока. Пионером в применении переменного тока был П. Н. Яблочкив (1847—1894). Он разработал первую систему электрического освещения (свечи Яблочкива). Эта система вытеснена впоследствии более совершенной, основанной на применении ламп накаливания, изобретенных в 1873 году А. Н. Лодыгиным (1847—1923).

Первые трансформаторы были созданы Яблочкивым в 1877 году и И. Ф. Усагиным (1855—1919) в 1882 году.

Победа переменного тока была обеспечена трудами М. О. Доливо-Добровольского (1862—1919). Доливо-Добровольский получил врачающееся магнитное поле с помощью трехфазного тока, построил первый асинхронный двигатель (1889), первым осуществил передачу электрической энергии на большое расстояние трехфазным током.

Первые задачи о распределении постоянного тока в сложных цепях были рассмотрены Омом, Поггендорфом, Уитстоном и др. Законы Кирхгофа (1824—1887) были сформулированы в 1845 году. В 1847 году Кирхгоф дал вывод своих законов и общее решение задачи о разветвлении токов.

Коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции введены в 1845 году Ф. Нейманом. Теорию процессов замыкания и размыкания тока в цепи с самоиндукцией (§ 101) рассмотрел Г. Гельмгольц в 1855 г. Однако утверждение о том, что разряд конденсатора носит колебательный характер, было высказано Гельмгольцем уже в 1847 г.

В 1853 году В. Томсон в работе «О преходящих электрических токах» дал теорию колебательного разряда и вывел формулу (102.06). Теория Томсона была подтверждена экспериментальными исследованиями В. Феддерсена в 1858—1862 годах.

В 1874 году Н. Н. Шиллер для определения емкости применил метод измерения периода разряда, а по емкости определил коэффициент ϵ диэлектрика конденсатора.

Вынужденные колебания в цепи с последовательно включенными емкостью и самоиндукцией рассматривали Максвелл, Обербек и ряд других авторов.

Общую теорию разветвления цепей переменного тока рассмотрел в 1886 году Релей (1842—1919).

После исследований по радиотехнике А. С. Попова (1859—1906) началось изучение колебаний в связанных и в нелинейных электрических цепях. Теория явлений в линейных связанных цепях была разработана в 1891 году Бьеркнесом (1862—1939) в работе «О затухании быстрых электрических колебаний». Дальнейшее развитие теории электрических колебаний связано с работами акад. Л. И. Мандельштама (1879—1944) и его школы.

Детальное изложение вопросов электрических колебаний читатель найдет в книге В. И. Калинина и Г. С. Герштейна «Введение в радиофизику», М., ГИТТЛ, 1957.

ГЛАВА VII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 106. Общие уравнения поля в веществе при отсутствии дисперсии

Распространение электромагнитных волн в веществе сопряжено с такими эффектами, как поглощение волн, дисперсия, двойное лучепреломление, вращение плоскости поляризации и др. Общие уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{aligned} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(II)} \quad (106.01)$$

позволяют вычислить поле, если известны материальные соотношения. Последние, как указывалось выше, зависят от свойств веществ и имеют границы применения более узкие в сравнении с границами применимости уравнений (106.01).

Будем предполагать, что связь между \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} и \vec{j} и \vec{E} в переменном электромагнитном поле остается такой же, как в постоянных полях со статическими значениями тензоров $(^2)\epsilon$, $(^2)\mu$ и $(^2)\gamma$, то есть

$$\vec{D} = (^2)\epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = (^2)\mu \vec{H}, \quad \vec{j} = (^2)\gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стру}}) \quad (106.02)$$

(предполагается, что вещество не обладает сегнетоэлектрическими и ферромагнитными свойствами). Соотношения (106.02) не применимы, если частота поля сравнима с собственными частотами электронных или ионных колебаний в веществе.

Зависимость материальных констант от частоты поля называется дисперсией. В настоящей главе будем предполагать, что частота поля лежит вне области дисперсии.

Предположим, что вещество однородно и изотропно и в нем отсутствуют объемные заряды ($\rho = 0$). Подставив (106.02) в (106.01),

получим

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}}), \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{I}') \\ (\text{II}') \end{array} \quad (106.03)$$

Рассмотрим решение этой системы методом электромагнитных потенциалов. Согласно (44.03) и (44.06)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (106.04)$$

Подставив (106.04) в (106.03, I'), получим

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi \mu \gamma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \vec{E}^{\text{стр.}}, \\ \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi \mu \gamma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения для φ и \vec{A} разделяются, если ввести условие калибровки потенциалов в форме

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi \mu \gamma}{c} \varphi = 0. \quad (106.05)$$

При $\epsilon = \mu = 1$, $\gamma = 0$ (106.05) переходит в условие калибровки (44.06) для потенциалов в вакууме. При условии (106.05) уравнения для потенциалов принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi \mu \gamma}{c} \vec{E}^{\text{стр.}}. \end{array} \right\} \quad (106.06)$$

От волновых уравнений (47.07–08) уравнения (106.06) отличаются первыми производными по времени и наличием $\vec{E}^{\text{стр.}}$. Уравнения (106.06) называют телеграфными.

Задача.

Показать, что напряженности \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют телеграфным уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}}), \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi \mu \gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{4\pi \gamma}{c} \operatorname{rot} \vec{E}^{\text{стр.}}. \end{aligned}$$

Указание. Применить метод § 41 или воспользоваться уравнениями (106.06).

§ 107. Распространение плоских волн в однородных изотропных изоляторах

Решим уравнения (106.01). Пусть $\rho = 0$ и $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ во всем объеме. Будем искать решение в форме монохроматической плоской волны

$$\vec{C} = \vec{C}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{C}_0 e^{i\psi}, \quad (107.01)$$

где \vec{C} — любой из векторов поля (\vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H}), ω — циклическая частота, \vec{k} — волновой вектор. Так как

$$\operatorname{div} \vec{C} = i\vec{k} \cdot \vec{C}, \quad \operatorname{rot} \vec{C} = i[\vec{k}, \vec{C}] \quad \text{и} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -i\omega \vec{C}, \quad (107.02)$$

то, учитывая, что $\vec{j} = {}^{(2)}\gamma \vec{E}$, приведем систему (106.01) к виду

$$\left. \begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0, \\ [\vec{k}, \vec{H}] + \frac{\omega}{c} \vec{D} + \frac{4\pi i}{c} {}^{(2)}\gamma \vec{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(I'')} \quad (107.03)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &- \frac{\omega}{c} \vec{B} = 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(II'')}$$

Из уравнений $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ и $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ следует, что векторы индукций \vec{D} и \vec{B} всегда перпендикулярны к волновому вектору. Что касается векторов \vec{E} и \vec{H} , то их направления зависят от свойств вещества. Вектор \vec{D} называется световым вектором. Для однородного и изотропного изолятора $\gamma = 0$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ и уравнения (107.03) принимают вид

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \quad (107.04)$$

$$[\vec{k}, \vec{H}] + \frac{\epsilon \omega}{c} \vec{E} = 0, \quad [\vec{k}, \vec{E}] - \frac{\mu \omega}{c} \vec{H} = 0. \quad (107.05)$$

В изотропной среде \vec{E} совпадает по направлению с \vec{D} , а \vec{H} с \vec{B} . Поэтому \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны к вектору \vec{k} . Из уравнений (107.05) видно, что \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны. Таким образом, в однородном изотропном диэлектрике соотношения между векторами \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} такие же, как и в вакууме.

Рассмотрим условие совместности уравнений (107.05). Найдя из второго уравнения \vec{H} и подставив в первое, получим

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}]] + \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} \vec{E} \equiv \left(\frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E} = 0.$$

Отсюда следует, что k равно

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (107.06)$$

Фазовая скорость распространения волны равна

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{\epsilon\mu}} \text{ см/сек.} \quad (107.07)$$

Формула (107.07), впервые полученная Максвеллом, дает зависимость скорости распространения волны от величин ϵ и μ . Для изоляторов вне области дисперсии $\epsilon > 1$ и $\mu \approx 1$, поэтому $u < c$.

Положим

$$\vec{k} = \frac{\omega}{u} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \vec{n} \quad (107.08)$$

(где \vec{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности в направлении распространения), тогда связь между векторами поля можно представить в форме

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\vec{n}, \vec{E}], \quad \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{n}, \vec{H}]. \quad (107.09)$$

Отсюда следует, что

$$w_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = w_m, \quad (107.10)$$

то есть плотность энергии электрической составляющей электромагнитной волны равна плотности энергии магнитной составляющей. Плотность потока энергии равна

$$S = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = u \vec{n} \frac{E^2}{4\pi} = w \vec{u} \quad (w = w_e + w_m). \quad (107.11)$$

§ 108. Отражение и преломление волн на границе раздела двух изоляторов. Формулы Френеля

Рассмотрим прохождение плоской монохроматической линейнополяризованной электромагнитной волны через границу раздела двух изотропных изоляторов. Будем считать, что для изоляторов $\mu_1 = \mu_2 \approx 1$, но $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Выберем ось z в направлении нормали к плоской границе раздела, проведенной из среды 1 в среду 2. На рисунке 49 изображена плоскость падения волны — плоскость xz , проходящая через направление нормали к границе раздела и волновой вектор \vec{k}_1 падающей волны. На границе раздела появляется преломленная волна, характеризуемая волновым вектором \vec{k}_2 , и отраженная волна, характеризуемая волновым вектором \vec{k}'_1 . Векторы \vec{k}_1 , \vec{k}'_1 и \vec{k}_2 лежат в плоскости падения и образуют с осью z соответственно углы α , α'' и β . Иногда вместо угла α'' вводят угол отражения $\alpha' = \pi - \alpha''$.

Согласно (107.06) и (107.07) фазовый множитель волны равен

$$\psi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \omega \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{u} - t \right).$$

Фазовые множители падающей, отраженной и преломленной волн можно написать в форме

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 = \omega \left(\frac{x \sin \alpha + z \cos \alpha}{u} - t \right), \\ \psi'_1 = \omega \left(\frac{x \sin \alpha'' + z \cos \alpha''}{u_1} - t \right), \\ \psi_2 = \omega \left(\frac{x \sin \beta + z \cos \beta}{u_2} - t \right), \end{array} \right\} \quad (108.01)$$

где $u_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}}$ и $u_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$ — скорости распространения волн в первой и второй среде ($\mu = 1$).

На границе раздела электромагнитное поле должно удовлетворять граничным условиям (75.06). Поле в среде 1 равно векторной сумме полей падающей и отраженной волн, а поле в среде 2 определяется только преломленной волной. Допустим, что поверхностных свободных зарядов и токов нет, а $\mu = 1$. Тогда граничные условия можно написать в форме:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 (E_1 + E'_1) = \epsilon_2 E_{2z}, \\ H_{1z} + H'_{1z} = H_{2z}, \end{array} \right\} \quad (108.02)$$

$$\left. \begin{array}{l} (E_1 + E'_1)_t = E_{2t}, \\ (H_1 + H'_{1t})_t = H_{2t}. \end{array} \right\} \quad (108.03)$$

Для выполнения граничных условий необходимо, чтобы на границе $z=0$ фазы волн ψ_1 , ψ'_1 и ψ_2 равнялись друг другу в любой момент времени. Это дает соотношение

$$\frac{\sin \alpha}{u_1} = \frac{\sin \alpha''}{u_1} = \frac{\sin \beta}{u_2}. \quad (108.04)$$

Так как $\sin \alpha'' = \sin(\pi - \alpha') = \sin \alpha'$, то отсюда следует, что $\alpha' = \alpha$, то есть угол отражения равен углу падения. Кроме того, из (108.04) вытекает соотношение

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = N_{12}. \quad (108.05)$$

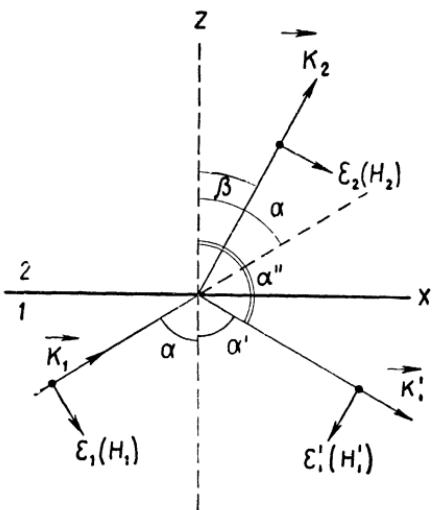


Рис. 49.

Здесь N_{12} есть показатель преломления второй среды относительно первой. Если первая среда вакуум ($\epsilon_1 = 1$), то

$$N = \sqrt{\epsilon_2} \quad (108.06)$$

есть показатель преломления второй среды.

Если $\mu \neq 1$, то $N = \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{c}{\mu}$. Соотношение (108.06) хорошо выполняется для тел, электрическая поляризация которых определяется только упругими смещениями электронов. Например, для газов Больцман получил следующие результаты:

	N	$\sqrt{\epsilon}$
Воздух	1,000294	1,000295
Водород H_2	1,000138	1,000132
Углекислота CO_2	1,000449	1,000473
Окись углерода CO	1,000340	1,000345

Для недипольных жидкостей соотношение (109.06) также согласуется с опытом. Например, для бензола $C_6H_6 N = 1,482$, а $\sqrt{\epsilon} = 1,489$. Однако для многих веществ, например для веществ, обладающих дипольными молекулами, соотношение (108.06) не выполняется, если под ϵ понимать диэлектрический коэффициент, измеренный в статических или квазистационарных полях. Так, для воды $N = 1,33$, а $\sqrt{\epsilon} = 9,0$. Объясняется это зависимостью ϵ от частоты поля (дисперсией), вследствие чего статическое значение ϵ существенно отличается от динамического ϵ при больших частотах. Соотношение Максвелла (108.06) оправдывается, если под ϵ понимать динамическое значение диэлектрического коэффициента (гл. VIII).

Вернемся к вопросу отражения и преломления света. На границе раздела фазовые множители ψ для всех волн одинаковы. Поэтому граничные условия можно писать сразу для амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн, которые обозначим через \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}_2 . Амплитуды магнитных составляющих будут выражаться через амплитуды электрических составляющих \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}'_1 , \mathcal{E}_2 формулами (107.09).

Рассмотрим два случая: 1) вектор электрического поля падающей волны (световой вектор) лежит в плоскости падения (падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения), 2) вектор электрического поля падающей волны перпендикулярен к плоскости падения (волна поляризована в плоскости падения).

В первом случае магнитные поля имеют составляющие только по оси y , поэтому касательные составляющие \vec{E} и \vec{H} соответственно равны (рис. 49)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{1x} &= \mathcal{E}_1 \cos \alpha, \quad \mathcal{E}'_{1x} = -\mathcal{E}'_1 \cos \alpha, \quad \mathcal{E}_{2x} = \mathcal{E}_2 \cos \beta, \\ H_{1y} &= H_1 = \sqrt{\epsilon_1} \mathcal{E}_1, \quad H'_{1y} = H'_1 = \sqrt{\epsilon'_1} \mathcal{E}'_1, \quad H_{2y} = H_2 = \sqrt{\epsilon_2} \mathcal{E}_2. \end{aligned} \right\} \quad (108.07)$$

Границные условия (108.03) принимают вид

$$(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1) \cos \alpha = \mathcal{E}_2 \cos \beta, \quad (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}'_1) \sin \beta = \mathcal{E}_2 \sin \alpha. \quad (108.08)$$

Последнее равенство получается из соотношения

$$V \bar{\varepsilon}_1 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}'_1) = V \bar{\varepsilon}_2 \mathcal{E}_2,$$

если принять во внимание (108.05). Уравнения (108.08) позволяют выразить амплитуды отраженной и преломленной волн через амплитуду падающей волны

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \quad (108.09)$$

Амплитуды магнитных составляющих получаются из (108.07).

Аналогично рассматривается второй случай, когда световой вектор перпендикулярен к плоскости падения, а вектор магнитного поля лежит в плоскости падения (на рисунке 49 эти векторы заключены в скобки). Составляющие вектора H равны

$$H_{1x} = H_1 \cos \alpha, \quad H'_{1x} = -H'_1 \cos \alpha, \quad H_{2x} = H_2 \cos \beta. \quad (108.10)$$

Электрические составляющие согласно (108.09) равны

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1y} &= \mathcal{E}_1 = -\frac{1}{V \bar{\varepsilon}_1} H_1, \quad \mathcal{E}'_{1y} = \mathcal{E}'_1 = \\ &= -\frac{1}{V \bar{\varepsilon}_1} H'_1, \quad \mathcal{E}_{2y} = \mathcal{E}_2 = -\frac{1}{V \bar{\varepsilon}_2} H_2. \end{aligned} \quad (108.11)$$

Границные условия (108.03) при учете (108.05) принимают вид

$$(H_1 + H'_1) \sin \alpha = H_2 \sin \beta, \quad (H_1 - H'_1) \cos \alpha = H_2 \cos \beta, \quad (108.12)$$

откуда

$$H'_1 = -H_1 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad H_2 = H_1 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (109.13)$$

Электрические напряженности вычисляются по формулам (108.11) и равны

$$\mathcal{E}'_{1y} = \mathcal{E}'_1 = -\mathcal{E}_1 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (108.14)$$

Заметим, что по (108.05)

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{N}. \quad (108.15)$$

Если среда 2 оптически более плотная, нежели среда 1 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и $N = N_{12} > 1$), то для всякого угла падения α существует действительный угол преломления. Если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, ($N < 1$), то при $\sin \alpha > N$ не существует вещественных β , удовлетворяющих соотношению (108.15), и возникает полное отражение. При вещественных α и β из (108.09) и (108.14) следует, что амплитуды \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}_2 отраженной и преломленной волн всегда вещественны, если \mathcal{E}_1 вещественно. Поэтому фазы преломленной и отраженной волн либо совпадают с фазой падающей, либо отличаются на π . Легко видеть, что преломленная волна совпадает по фазе с падающей.

Если вторая среда оптически более плотная ($N > 1$) и вектор \vec{E}_1 падающей волны перпендикулярен к плоскости падения, то $\sin(\alpha - \beta) > 0$ и из (108.14) следует, что отраженная волна отличается по фазе от падающей на π . Если $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ и вектор \vec{E}_1 падающей волны лежит в плоскости падения, то согласно (108.09) \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}_1 одного знака. Но из (108.07) видно, что проекции \vec{E}_1 и \vec{E}'_1 на ось x имеют разные знаки. Следовательно, волна испытывает скачок по фазе на π . При $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ скачка по фазе не будет.

Если вторая среда оптически менее плотна, чем первая, ($N < 1$, $\alpha < \beta$) и вектор \vec{E}_1 перпендикулярен к плоскости падения, то скачка фазы нет, если же вектор \vec{E}_1 лежит в плоскости падения, то фаза не меняется при $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ и изменяется на π при $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$.

Для характеристики отражения обычно вводится коэффициент отражения, равный отношению интенсивности отраженного пучка к интенсивности падающего,

$$R = \frac{S'}{S} = \frac{\mathcal{E}'^2}{\mathcal{E}_1^2}. \quad (108.16)$$

Обозначим через R_{\parallel} и R_{\perp} коэффициенты отражения волн, векторы \vec{E} которых лежат соответственно в плоскости падения и перпендикулярно к ней. Согласно (108.14) и (108.09) получим формулы Френеля

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}, \quad R_{\perp} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}. \quad (108.17)$$

Отсюда видно, что коэффициенты отражения симметричны относительно углов α и β и поэтому не зависят от того, падают ли волны на границу раздела из первой среды во вторую или наоборот.

Рассмотрим поведение коэффициентов отражения при увеличении угла падения α от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Так как $\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{N}$, то при $\alpha = 0$ угол β также равняется нулю. Выражения (108.17) принимают неопределенное значение вида $\frac{0}{0}$.

Раскрывая неопределенность по правилу Лопитала, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{R_{\perp}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha - \beta) \left(1 - \frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{\cos(\alpha + \beta) \left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\right)} = \\ &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \frac{N \cos \beta - \cos \alpha}{N \cos \beta + \cos \alpha} = \frac{N - 1}{N + 1}, \end{aligned}$$

так как $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{N \cos \beta}$. Тот же результат получается для $\sqrt{R_{\parallel}}$. Поэтому

$$R_{(\alpha=0)} = \left(\frac{N-1}{N+1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right)^2 = \left(\frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1} \right)^2. \quad (108.18)$$

При увеличении угла падения R_{\perp} монотонно увеличивается (рис. 50) от значения (108.18) до $R_{\perp} = 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Совсем иначе ведет себя коэффициент отражения волны, вектор которой \vec{E} которой параллелен плоскости падения. Как видно

из (108.17), при $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ коэффициент R_{\parallel} обращается в нуль. Подставим $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ в (108.05); находим, что R_{\parallel} исчезает, если угол падения α удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = N. \quad (108.19)$$

Угол падения $\alpha = \alpha_0$ называется углом полной поляризации, или углом Брюстера. Легко видеть, что в случае падения под углом α_0 луч отраженный и луч преломленный взаимно перпендикулярны. При дальнейшем увеличении угла падения R_{\parallel} возрастает и при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ равняется единице. При

падении под углом Брюстера α_0 падающая волна целиком переходит во вторую среду. В общем случае доля энергии, переходящей во вторую среду, определяется величиной

$$D = 1 - R, \quad (108.20)$$

которая называется коэффициентом прохождения или прозрачностью.

Закон Брюстера можно наглядно пояснить, если рассмотреть колебания электронов во второй среде под действием электрического поля преломленной волны. Колебания электронов возбуждают на поверхности раздела вторичную волну, возвращающуюся в первую среду (волна отраженная). В § 47 было показано, что колеблющийся диполь наиболее интенсивно излучает в плоскости, перпендикулярной к направлению колебаний, а в направлении колебаний излучения нет. При падении волны под углом Брюстера отраженный луч должен быть перпендикулярен к преломленному. Если вектор электрического

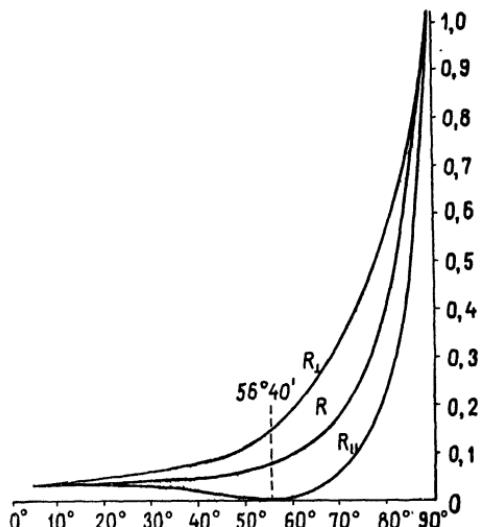


Рис. 50.

поля колеблется в плоскости падения, то отраженная волна должна была бы излучаться в направлении колебаний электронов, в котором излучения не может быть.

Пусть на границу раздела падает неполяризованная волна (естественный свет). Разложим вектор электрического поля на составляющие \mathcal{E}_{\parallel} и \mathcal{E}_{\perp} . Степень поляризации отраженного света можно определить величиной

$$P'_1 = \frac{\mathcal{E}'_{\perp}^2 - \mathcal{E}'_{\parallel}^2}{\mathcal{E}'_{\perp}^2 + \mathcal{E}'_{\parallel}^2} = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\perp} + R_{\parallel}}. \quad (108.21)$$

При нормальном падении $P'_1 = 0$, то есть отраженный свет остается неполяризованным. По мере увеличения угла падения P'_1 растет и при $\alpha = \alpha_0$ $P'_1 = 1$ (так как $R_{\parallel} = 0$), то есть отраженный свет полностью поляризован (вектор \vec{E} перпендикулярен к плоскости падения). При дальнейшем увеличении α поляризация уменьшается и равняется нулю при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Поляризация преломленного луча определяется отношением

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}_{2\perp}^2 - \mathcal{E}_{2\parallel}^2}{\mathcal{E}_{2\perp}^2 + \mathcal{E}_{2\parallel}^2} = \frac{D_{\perp} - D_{\parallel}}{D_{\perp} + D_{\parallel}} = \frac{R_{\parallel} - R_{\perp}}{2(R_{\parallel} + R_{\perp})}. \quad (108.22)$$

Поляризация P_2 равна нулю при $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = \alpha_0$ P_2 достигает максимального значения. Так как $R_{\parallel} \leq R_{\perp}$, то $P_2 < 0$, то есть проходящий луч поляризован так, что колебания \vec{E} происходят преимущественно в плоскости падения.

В заключение рассмотрим полное отражение, когда $N < 1$. Прельный угол α_1 полного отражения определяется из условия $\sin \alpha_1 = N$. Если $\alpha > \alpha_1$, то

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{N} > 1, \quad \text{а} \quad \cos \beta = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{N^2}\right)^{1/2}$$

есть мнимая величина. Положим $\cos \beta = i\mu$ и рассмотрим фазовый множитель волны во второй среде. Согласно (108.01)

$$\Phi_2 = e^{i\psi_2} = e^{-i\omega t} e^{i\omega \frac{x \sin \beta + z \cos \beta}{u_2}} = e^{-\frac{\mu\omega}{u_2} z} e^{i\left(\frac{x\omega \sin \alpha}{u_2 N} - \omega t\right)}. \quad (108.23)$$

Отсюда следует, что в направлении x , касательном к границе раздела, периодичность волны сохраняется, а в направлении оси z (в глубь среды 2) амплитуда волны экспоненциально убывает, уменьшаясь в $e = 2,718 \dots$ раз на пути

$$\delta = \frac{u_2}{\omega\mu} = \frac{\lambda_2 N}{2\pi \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}} \quad (108.24)$$

(λ_2 — длина волны во второй среде). При $\frac{N}{\sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}} \sim 1$, $\delta \sim \frac{\lambda_2}{2\pi}$,

что для видимого света ($\lambda \sim 10^{-5}$ см) дает $\delta \sim 10^{-6}$ см, то есть свет практически не проникает во вторую среду. Из формул Френеля следует, что R_{\parallel} и R_{\perp} при $\alpha > \alpha_1$ есть комплексные числа, но модули $|R_{\perp}|$ и $|R_{\parallel}|$ равны единице и интенсивность отраженной волны равна интенсивности падающей.

Задачи

1. Показать, что коэффициенты прохождения плоских поляризованных волн через границу раздела определяются формулами

$$D_{\perp} = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad D_{\parallel} = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta) \cos^2(\alpha - \beta)}.$$

Для доказательства использовать (108.17) и (108.20).

2. Определить коэффициент отражения линейно-поляризованного света, у которого вектор \vec{E} образует угол φ с нормалью к плоскости падения.

Решение. Параллельная и перпендикулярная составляющие светового вектора равны $E_{\parallel} = E \sin \varphi$, $E_{\perp} = E \cos \varphi$. Поэтому соответствующие интенсивности равны $S_{\parallel} = S \sin^2 \varphi$, $S_{\perp} = S \cos^2 \varphi$, (S — интенсивность падающего пучка). Полная интенсивность отраженного пучка

$$S'(\varphi) = R_{\parallel} S_{\parallel} + R_{\perp} S_{\perp} = (R_{\perp} \cos^2 \varphi + R_{\parallel} \sin^2 \varphi) S.$$

Коэффициент отражения равен

$$R(\varphi) = \frac{S'(\varphi)}{S} = R_{\perp} \cos^2 \varphi + R_{\parallel} \sin^2 \varphi.$$

3. Определить коэффициент отражения естественного света.

Решение. Естественный свет можно рассматривать как поляризованный с нерегулярно колеблющейся поляризацией. Поэтому усредним коэффициент отражения, полученный в задаче 2 по всем углам φ ; замечая, что

$$\overline{\cos^2 \varphi} = \overline{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2}, \text{ получим}$$

$$\bar{R} = \frac{1}{2} (R_{\parallel} + R_{\perp}).$$

§ 109. Распространение плоских волн в проводящих телах

Пусть проводимость однородного и изотропного вещества не равна нулю. При распространении электромагнитной волны в проводящем теле энергия волны будет постепенно переходить в теплоту — волна будет поглощаться. Поэтому чем больше проводимость тела, тем менее оно прозрачно.

Распространение плоских волн в проводящем теле описывается уравнениями (107.03). Так как

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

то (107.03) можно переписать аналогично (107.04), (107.05).

$$\vec{k} \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \vec{H} = 0, \quad (109.01)$$

$$[\vec{k}, \vec{H}] + \frac{\epsilon' \omega}{c} \vec{E} = 0, \quad [\vec{k}, \vec{E}] - \frac{\mu \omega}{c} \vec{H} = 0. \quad (109.02)$$

Здесь коэффициент ϵ заменен комплексным диэлектрическим коэффициентом

$$\epsilon' = \epsilon + \frac{4\pi\gamma}{\omega} i. \quad (109.03)$$

Из (109.02) вытекает условие совместности, определяющее волновое число k

$$k^2 = \frac{\epsilon' \mu \omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu + \frac{4\pi \mu \gamma \omega}{c^2} i. \quad (109.04)$$

Отсюда следует, что k есть комплексная величина. Положим

$$\vec{k} = (k' + ik'') \vec{n}, \quad \vec{n}^2 = 1. \quad (109.05)$$

Чтобы определить физический смысл мнимой части k'' волнового числа, подставим (109.05) в уравнение электрической составляющей волны

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-k'' \vec{n} \cdot \vec{r}} e^{i(k' \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (109.06)$$

Получилась плоская волна с волновым вектором \vec{k}' , амплитуда которой убывает экспоненциально по мере распространения волны в веществе

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-k'' \vec{n} \cdot \vec{r}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-k'' x}, \quad (x = \vec{n} \cdot \vec{r}). \quad (109.07)$$

Это значит, что волна постепенно поглощается.

Амплитуда магнитной составляющей согласно (109.02) также убывает экспоненциально

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu \omega} [\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}] = \frac{ck}{\mu \omega} [\vec{n}, \vec{\mathcal{E}}_0] e^{-k'' x}. \quad (109.08)$$

Подставив (109.05) в (109.04) и разделив вещественную и мнимую части, получим систему уравнений для определения k' и k''

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu, \quad k' k'' = \frac{2\pi \mu \gamma \omega}{c^2}. \quad (109.09)$$

Положим

$$k' = \frac{\omega}{c} N, \quad k'' = \frac{\omega}{c} x, \quad (109.10)$$

где N — показатель преломления, а x — коэффициент поглощения. Тогда выражения (109.09) приводятся к виду

$$N^2 - x^2 = \epsilon \mu, \quad Nx = \frac{2\pi \mu \gamma}{\omega} = \mu \gamma \tau, \quad (109.11)$$

где $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ — период колебаний волны. Решая эту систему, получим

$$N^2 = \frac{\mu}{2} \{ \sqrt{\epsilon^2 + 4\gamma^2 \tau^2} + \epsilon \}, \quad x^2 = \frac{\mu}{2} \{ \sqrt{\epsilon^2 + 4\gamma^2 \tau^2} - \epsilon \}. \quad (109.12)$$

В волновом числе k выделим фазу φ

$$k = |k| e^{i\varphi}, \quad |k| = \frac{\omega}{c} \sqrt{N^2 + x^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k''}{k'} = \frac{x}{N}. \quad (109.13)$$

Магнитную составляющую волны согласно (109.08) можно написать в виде

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} V \sqrt{N^2 + \kappa^2} [\vec{n}, \vec{\mathcal{E}}_0] e^{-\frac{\omega}{c} \vec{x} \cdot \vec{n}} \vec{r} e^{i[\omega(\frac{N\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} - t) + \varphi]}. \quad (109.14)$$

Электрическая составляющая согласно (109.06) и (109.10) равна

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \vec{x} \cdot \vec{n}} \vec{r} e^{i[\omega(\frac{N\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} - t)]}. \quad (109.15)$$

Отсюда видно, что магнитное поле опережает по фазе электрическое на угол φ (рис. 51). При $\gamma = 0$ $\kappa = 0$ и разность фаз исчезает.

Для металлов $\gamma \sim 5 \cdot 10^{17}$ СГС (например, для меди $\gamma = 5,14 \cdot 10^{17}$); поэтому для коротковолнового инфракрасного света (длина волны 1μ ,

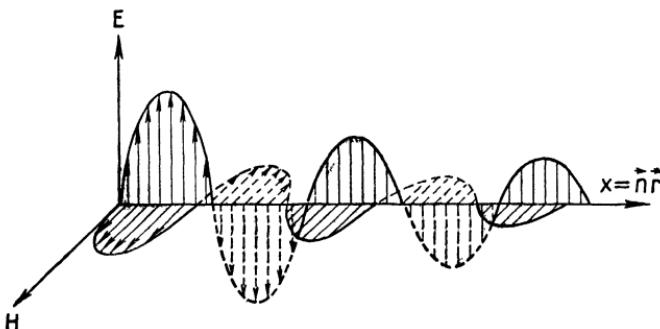


Рис. 51.

$\tau = \frac{\lambda}{c} = 3,3 \cdot 10^{-15}$ сек $) 2\gamma\tau \approx 3 \cdot 10^3$. Значение ε для металлов можно определить на основании их оптических свойств. Однако механизмы поляризации связанных зарядов для металлов и непроводников не могут существенно отличаться. Поэтому можно считать, что ε для металлов и непроводников — величины одного порядка. В таком случае для достаточно низких частот будет выполняться неравенство

$$2\gamma\tau = \frac{4\pi\gamma}{\omega} \gg \varepsilon, \quad (109.16)$$

тогда соотношения (109.12) и (109.13) упрощаются:

$$N = \kappa = V \mu \gamma \tau = \sqrt{\frac{2\pi\gamma\mu}{\omega}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad |k| = \sqrt{2 \frac{\omega}{c}} N. \quad (109.17)$$

Для высоких частот (ультрафиолетовых и рентгеновских лучей) соотношение (109.16) становится неверным. В предельном случае оно принимает вид $2\gamma\tau \ll \varepsilon$, то есть проводимость вещества перестает играть роль. Возьмем отношение средних по времени значений

плотностей магнитной и электрической энергий; согласно (109.14), (109.15) и (109.12) получим

$$\frac{\mu \bar{H}^2}{\epsilon \bar{E}^2} = \frac{N^2 + \chi^2}{\mu \epsilon} = \sqrt{1 + \left(\frac{2\gamma\tau}{\epsilon}\right)^2}. \quad (109.18)$$

Это значит, что в изоляторе ($\gamma = 0$) энергия магнитной составляющей равна энергии электрической составляющей. В металле при условии (109.16) почти вся энергия волны приходится на магнитную составляющую.

Для вычисления среднего по времени значения вектора Умова — Пойнтинга надо перемножить вещественные части (109.14) и (109.15) и усреднить по времени. Усреднение по времени дает множитель

$$(\S 104) \quad \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{N}{2\sqrt{N^2 + \chi^2}},$$

поэтому получим

$$S = \frac{cN}{8\pi\mu} E_0^2 e^{-2 \frac{\omega\chi}{c} x} = S_0 e^{-2 \frac{\omega\chi}{c} x} (x = \vec{n} \vec{r}). \quad (109.19)$$

Отсюда следует, что интенсивность волны убывает в $e = 2,718 \dots$ раз при прохождении слоя вещества толщиной

$$d = \frac{c}{2\omega\chi} \approx \frac{\lambda_0}{4\pi\chi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c\lambda_0}{\mu\gamma}}. \quad (109.20)$$

Здесь $\lambda_0 = c\tau$ — длина волны в вакууме. Для меди ($\gamma = 5,14 \cdot 10^{17}$) имеет место следующая зависимость глубины проникновения от λ_0 :

λ_0	$1 \mu = 10^{-4} \text{ см}$	1 см	$100 \text{ м} = 10^4 \text{ см}$
$4\pi d$	$2,4 \cdot 10^{-6} \text{ см}$	$2,4 \cdot 10^{-4} \text{ см}$	$0,024 \text{ см}$

Эти числа используются при оценке толщины листового металла, необходимого для экранирования волн соответствующей длины.

Вследствие непрозрачности металла для определения n и χ используется метод, основанный на отражении света от металлической поверхности. Уравнения (109.01) и (109.02) для волн в проводниках отличаются от соответствующих уравнений для волн в изоляторах лишь тем, что в них вместо действительных величин ϵ и k входят комплексные величины ϵ' и $k = k' + ik''$. Поэтому соотношения, полученные в § 108, остаются в силе (физический смысл, конечно, изменяется).

Рассмотрим коэффициент отражения нормально падающей волны. Если для вещества $\mu = 1$, то коэффициент отражения нормально падающей из вакуума волны может быть согласно (108.18) написан в форме

$$R = \left| \frac{N' - 1}{N' + 1} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{\epsilon'} - 1}{\sqrt{\epsilon''} + 1} \right|^2. \quad (109.21)$$

Здесь $N' = \sqrt{\epsilon'}$ — комплексный показатель преломления. В силу (109.04) и (109.05)

$$N' = \sqrt{\epsilon'} = N + ix. \quad (109.22)$$

Поэтому

$$R = \left| \frac{N - 1 + ix}{N + 1 + ix} \right|^2 = \frac{(N - 1)^2 + x^2}{(N + 1)^2 + x^2}. \quad (109.23)$$

Согласно (109.17) для неферромагнитных металлов, если выполнено условие (109.16), имеем

$$R = \frac{2\gamma\tau - 2\sqrt{\gamma\tau} + 1}{2\gamma\tau + 2\sqrt{\gamma\tau} + 1} \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\gamma\tau}} \quad (\gamma\tau \gg 1). \quad (109.24)$$

В длинноволновой инфракрасной области спектра ($\lambda \geq 12\mu$) формула (109.24) подтверждена опытами Гагена и Рубенса (1903). Однако она оказывается неверной в области коротких волн, начиная с волн видимого света. Так, при $\lambda = 589m\mu$ (желтая линия натрия) для меди $\gamma\tau = 1 \cdot 10^3$, а экспериментальное значение оказывается равным 2,66. Для совпадения этих величин в области коротких волн нужно учитывать дисперсию ϵ и γ .

Задачи

1. Проницаемость металла μ отлична от единицы. Показать, что коэффициент отражения волны при нормальном падении равен

$$R = \frac{(N - \mu)^2 + x^2}{(N + \mu)^2 + x^2}$$

Для доказательства надо воспользоваться граничными условиями (108.03) и соотношением (109.08).

2. Показать, что средняя энергия, теряемая волной на пути dx , равна количеству теплоты, выделяющемуся на этом пути.

Решение. Согласно (109.11) $N \cdot x = \frac{2\mu\gamma}{\omega}$. В силу (109.19) средняя энергия, теряемая волной на пути x , равна

$$-\frac{\partial S}{\partial x} dx = \frac{cN}{8\pi\mu} \mathcal{E}_0^2 \left(2 \frac{\omega x}{c}\right) e^{-2 \frac{\omega x}{c} x} = \frac{\gamma \mathcal{E}_0^2}{2} e^{-2 \frac{\omega x}{c} x} dx.$$

С другой стороны, количество теплоты, выделяющееся на единице площади слоя толщиной dx , по (109.15) равно

$$\overline{dq} = \frac{\overline{J}^2}{\gamma} dx = \gamma \overline{E}^2 dx = \gamma \mathcal{E}_0^2 e^{-2 \frac{\omega x}{c} x} \frac{1}{\cos^2(k'x - \omega t)} = \frac{\gamma \mathcal{E}_0^2}{2} e^{-2 \frac{\omega x}{c} x} dx,$$

что и требовалось доказать.

§ 110. Теорема Умова — Пойнтинга в комплексной форме

Пусть комплексные векторы \vec{E} , \vec{H} , \vec{j} меняются со временем по закону $e^{i\omega t}$, а $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$. Уравнения Максвелла (106.03) можно написать в форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{i\omega\epsilon}{c} \vec{E}, \quad (110.01)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H}. \quad (110.02)$$

Обычно нас интересуют вещественные части комплексных векторов. Если $f = f_0 e^{i\omega t}$, $g = g_0 e^{i\omega t}$, где f_0 и g_0 — комплексные амплитуды, то вещественные части равны

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + f^*), \quad \operatorname{Re} g = \frac{1}{2}(g + g^*).$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} g = \frac{1}{4}(fg + f^*g^* + fg^* + f^*g).$$

При вычислении среднего по периоду $\overline{e^{\pm i2\omega t}}^t = 0$. Следовательно,

$$\overline{\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} g}^t = \frac{1}{4} \overline{(fg^* + f^*g)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(fg^*), \quad (110.03)$$

так как f^*g есть комплексно сопряженное от fg^* . Напишем уравнение (110.01) в сопряженной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H}^* = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^* - \frac{i\omega\epsilon}{c} \vec{E}. \quad (110.04)$$

Умножив (110.04) на $\frac{c}{8\pi} \vec{E}$, а (110.02) на $-\frac{c}{8\pi} \vec{H}^*$ и сложив, получим

$$-\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \frac{1}{2} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \vec{j}^* \vec{E} + 2i\omega \left[\frac{\mu \vec{H} \vec{H}^*}{16\pi} - \epsilon \frac{\vec{E} \vec{E}^*}{16\pi} \right]. \quad (110.05)$$

Усредним выражение (110.05) по времени. Согласно (110.03)

$$\frac{1}{2} \overline{\vec{j}^* \vec{E}} = \frac{1}{2\gamma} \overline{\vec{j} \vec{j}^*} = \frac{\overline{(\operatorname{Re} \vec{j})^2}}{\gamma} = q. \quad (110.06)$$

Выражение (110.06) представляет собой количество теплоты, выделяющееся в единице объема в единицу времени. Слагаемые (110.05)

$$\frac{\mu \overline{\vec{H} \vec{H}^*}}{16\pi} = \frac{\mu}{8\pi} \overline{(\operatorname{Re} H)^2} = \overline{w_m}, \quad \frac{\epsilon \overline{\vec{E} \vec{E}^*}}{16\pi} = \frac{\epsilon}{8\pi} \overline{(\operatorname{Re} E)^2} = \overline{w}_\epsilon \quad (110.07)$$

суть средние плотности энергии магнитного и электрического полей.

Введем комплексный вектор Умова — Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{\epsilon}{8\pi} \overline{[\vec{E}, \vec{H}^*]}^t. \quad (110.08)$$

Тогда

$$-\operatorname{div} \vec{S} = q + 2i\omega (\bar{w}_m - \bar{w}_e). \quad (110.09)$$

Интегрируя (110.09) по некоторому объему V и применяя теорему Остроградского, получим

$$-\oint S_n d\sigma = Q + 2i\omega (\bar{W}_m - \bar{W}_e), \quad (110.10)$$

где Q — количество теплоты, выделяющееся в объеме V , \bar{W}_m , \bar{W}_e — средние значения магнитной и электрической энергий в этом объеме. Таким образом, вещественная часть потока энергии, входящего в рассматриваемый объем, равна количеству теплоты Джоуля — Ленца, а мнимая часть пропорциональна разности средних значений энергии магнитного и электрического полей в этом объеме.

§ 111. Распределение переменного тока по сечению проводника (скин-эффект)

При рассмотрении квазистационарных токов (гл. VI) предполагалось, что переменный ток распределяется по сечению однородного проводника так же равномерно, как и постоянный. Однако для переменных токов распределение плотности тока по сечению неравномерно — плотность возрастает от оси проводника к периферии. При высоких частотах ток занимает только поверхностный слой толщиной в несколько микрон. Вследствие этого явление получило название скин-эффекта (от английского *skin* — кожа, поверхностный слой).

Рассмотрим цилиндрический проводник радиуса a . Электрическое поле направим вдоль оси z , совпадающей с осью проводника. Пусть $E^{\text{ст}} = 0$. Внутри проводника ток смещения мал по сравнению с током проводимости, поэтому током смещения можно пренебречь. Уравнение для электрического поля в проводнике напишем в форме (задача 1 § 106)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0;$$

так как $\gamma \vec{E} = \vec{j}$, то, умножив предыдущее уравнение на γ , получим

$$\nabla^2 \vec{j} - \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0. \quad (111.01)$$

Это есть основное уравнение, определяющее распределение тока. Допустим, что поле и ток зависят от времени гармонически, то есть

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{i\omega t}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (111.02)$$

Введем цилиндрические координаты и предположим, что проводник настолько длинный, что \vec{E} и \vec{j} можно считать не зависящими от z и азимута α . Тогда $j_z = j$ зависит только от расстояния r от оси проводника. Уравнение (111.01) принимает вид

$$\frac{d^2 j_{z0}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj_{z0}}{dr} - \frac{4\pi\mu\gamma\omega}{c^2} i j_{z0} = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (111.03)$$

так как в рассматриваемом случае

$$\nabla^2 j_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dj_z}{dr} \right).$$

С помощью новой переменной

$$\rho = r \sqrt{-i} \kappa, \quad \text{где} \quad \kappa^2 = \frac{4\pi\mu\gamma\omega}{c^2}, \quad (111.04)$$

уравнение (111.03) приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 j_{0z}}{dr^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dj_{0z}}{d\rho} + j_{0z} = 0. \quad (111.05)$$

Общее решение этого уравнения, как всякого линейного дифференциального уравнения второго порядка, имеет вид

$$j_{0z} = C_1 J_0(\rho) + C_2 K_0(\rho), \quad (111.06)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а J_0 и K_0 — два линейно-независимых частных решения. Решение $J_0(\rho)$ (бесселева функция нулевого порядка) выбирается так, чтобы при $\rho = 0$ (на оси цилиндра) оно оставалось конечным. Тогда второе независимое решение $K_0(\rho)$ при $\rho = 0$ обращается в бесконечность. Поэтому следует положить $C_2 = 0$. Итак, искомое решение имеет вид $j_{0z} = C_1 J_0(\rho)$.

В теории функций Бесселя доказывается, что $J_0(\rho)$ можно представить в форме ряда по четным степеням ρ

$$J_0(\rho) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \rho^{2v}}{2^{2v} (v!)^2} = 1 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^4 - \dots \quad (111.07)$$

Но аргумент ρ есть комплексная величина, определяемая формулой (111.04). Для такого аргумента функция $J_0(\rho)$ — комплексная. Для вещественной и мнимой частей функции $J_0(\kappa r \sqrt{-i})$ Томсон ввел обозначения $\operatorname{ber}(\kappa r)$ и $\operatorname{bei}(\kappa r)$, то есть

$$J_0(\kappa r \sqrt{-i}) = \operatorname{ber}(\kappa r) + i \operatorname{bei}(\kappa r). \quad (111.08)$$

Разложения функций $\text{ber}(xr)$ и $\text{bei}(xr)$ могут быть получены из выражения (111.07), если в него подставить

$$\rho = xr \sqrt{-i} = xr \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}(xr) &= \operatorname{Re} J_0(xr \sqrt{-i}) = 1 - \frac{(xr)^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{(xr)^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \\ \text{bei}(xr) &= \operatorname{Im} J_0(xr \sqrt{-i}) = \frac{(xr)^2}{2^2} - \frac{(xr)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \\ &\quad + \frac{(xr)^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (111.09)$$

При $r = 0$, $\text{ber}(xr) = 1$, а $\text{bei}(xr) = 0$. Поэтому $j_{0z}(0) = C_1 = j_0$ есть плотность тока на оси проводника. Плотность тока равна

$$j_z = j_{0z} e^{i\omega t} = j_0 J_0(xr \sqrt{-i}) e^{i\omega t}. \quad (111.10)$$

Из (111.10) видно, что при изменении r меняется не только амплитуда плотности тока, но и фаза. Отношение комплексной плотности тока на поверхности цилиндрического провода радиуса a и на оси его равно

$$\frac{j_z}{j_0} = J_0(xa \sqrt{-i}) \quad (111.11)$$

и зависит от величины

$$x = xa = \sqrt{\frac{4\pi\mu\gamma a^2\omega}{c^2}}. \quad (111.12)$$

Если $xa \ll 1$, то распределение тока почти равномерное по сечению; по мере увеличения xa распределение делается все более неравномерным.

Значения функций $\text{ber } x$ и $\text{bei } x$ для $x = 1, 2, \dots, 7$ даются в приводимой таблице (более подробные таблицы имеются в книге Е. Янке и Ф. Эмде «Таблицы функций с формулами и кривыми», М.—Л., ГИТТЛ, 1948, стр. 352 и следующие).

x	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$	x	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$
0	1,00	0	4	-2,56	2,29
1	0,98	0,25	5	-6,23	0,12
2	0,75	0,97	6	-8,86	-7,33
3	-0,22	1,94	7	-3,63	-21,24

При $x > 7$ можно воспользоваться асимптотической формулой

$$J_0(x \sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}. \quad (111.13)$$

Из таблицы и формулы (111.13) видно, что с увеличением x , то есть с увеличением частоты ω при данном радиусе a , плотность тока быстро возрастает к периферии проводника. Графики распределения j по сечению даны на рисунке 52.

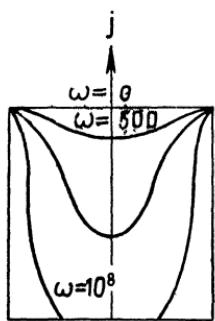


Рис. 52.

Комплексная амплитуда силы тока выражается интегралом по сечению

$$I_0 = \int j_{z0} d\sigma = 2\pi j_0 \int_0^a r J_0(\kappa r \sqrt{-i}) dr.$$

В теории функций Бесселя доказывается, что

$$\frac{d}{dx}(x \cdot J_1(x)) = x J_0(x),$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка. Поэтому

$$I_0 = \frac{2\pi a}{\kappa \sqrt{-i}} J_1(\kappa a \sqrt{-i}) j_0. \quad (111.14)$$

Для значений $x > 7$ можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$J_1(x \sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{9\pi}{8}\right)}. \quad (111.15)$$

Таблицы для вещественной и мнимой частей функции $\sqrt{-i} J_1(\kappa r \sqrt{-i})$ можно найти в вышеупомянутой книге Янке и Эмде. Пользуясь (111.14), можно по амплитуде тока найти j_0 .

Зная распределение тока по сечению, можно вычислить напряженности поля \vec{E} и \vec{H} . Электрическое поле вычисляется по формуле

$$E = E_z = \frac{j_z}{\gamma} = \frac{j_0}{\gamma} J_0(\kappa r \sqrt{-i}) e^{i\omega t} = \\ = I_0 \frac{\kappa \sqrt{-i}}{2\pi \gamma a} \frac{J_0(\kappa r \sqrt{-i})}{J_1(\kappa a \sqrt{-i})} e^{i\omega t}. \quad (111.16)$$

Магнитное поле в рассматриваемом случае сводится к азимутальной составляющей H_α и вычисляется (током смещения внутри металла пренебрегаем) из закона полного тока (70.11)

$$2\pi r H_\alpha(r) = \frac{4\pi}{c} I(r).$$

Заменив в (111.14) a через r , получим $I(r)$. Тогда

$$H_\alpha(r, t) = \frac{2}{cr} I(r) e^{i\omega t} = \frac{4\pi}{c \kappa \sqrt{-i}} J_1(\kappa r \sqrt{-i}) j_0 e^{i\omega t}. \quad (111.17)$$

Таким образом, задача о распределении тока и поля внутри проводника решена полностью.

Вследствие того что ток и магнитное поле распределяются внутри проводника неравномерно, активное сопротивление и индуктивность проводника для переменного тока отличаются от соответствующих значений для стационарного тока. Воспользуемся теоремой Умова — Пойнтинга в комплексной форме (§ 110). Эффективное активное сопротивление $R_{\text{эфф.}}$ и эффективную индуктивность $L_{\text{эфф.}}$ проводника можно определить через теплоту Джоуля — Ленца и магнитную энергию

$$Q' = \frac{1}{2} R_{\text{эфф.}} I_0^2, \quad W_m = \frac{1}{4c^2} L_{\text{эфф.}} I_0^2.$$

Поэтому (110.10) принимает вид

$$-\oint \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\sigma = \frac{1}{2} (R_{\text{эфф.}} + i\omega L_{\text{эфф.}}) I_0^2. \quad (111.18)$$

Энергия \bar{W}_e в проводнике мала по сравнению с \bar{W}_m , поэтому ею обычно пренебрегают. Левая часть (111.18) легко вычисляется.

Так как \vec{E} и \vec{H} на поверхности проводника ($r = a$) одинаковы во всех точках поверхности и взаимно перпендикулярны, то

$$\begin{aligned} -\int \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\sigma &= \\ &= \frac{c}{8\pi} (EH^*)_{r=a} \cdot 2\pi al = \\ &= \frac{l}{4\pi\gamma a} \times V - i \cdot \frac{J_0(\kappa a \sqrt{-i})}{J_1(\kappa a \sqrt{-i})} I_0^2. \end{aligned}$$

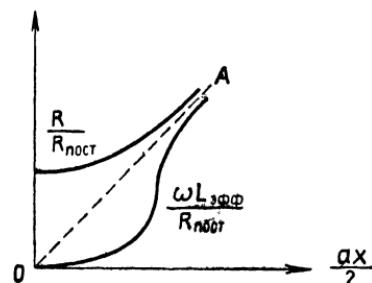


Рис. 56.

Здесь подставлено $H_a(a) = \frac{2I_0}{ca}$ и $E(a)$ из (111.16). Таким образом,

$$R_{\text{эфф.}} + i\omega L_{\text{эфф.}} = \frac{l}{2\pi\gamma a} \times V - i \frac{J_0(\kappa a \sqrt{-i})}{J_1(\kappa a \sqrt{-i})}. \quad (111.19)$$

Разделяя в этом выражении вещественную и мнимую части, находим $R_{\text{эфф.}}$ и $L_{\text{эфф.}}$.

Для больших значений κa , то есть для высоких частот, можно воспользоваться асимптотическими формулами (111.13) и (111.15). Тогда

$$R_{\text{эфф.}} = \omega L_{\text{эфф.}} = \frac{1}{2V^2} (\kappa a) R, \quad (111.20)$$

где $R = \frac{l}{\pi a^2 \gamma}$ — сопротивление цилиндрического проводника постоянному току, а κa — параметр, определенный формулой (111.12). Из (111.20) видно, что при больших частотах, когда $\kappa a \gg 1$, эффективное активное сопротивление $R_{\text{эфф.}}$ равно эффективному

индуктивному сопротивлению $\omega L_{\text{эфф.}}$ и оба они значительно превышают сопротивление R постоянному току. Наоборот, при $\omega \rightarrow 0$ $R_{\text{эфф.}}$ стремится к R , а $\omega L_{\text{эфф.}}$ стремится к нулю, так как $\omega \rightarrow 0$, а $L_{\text{эфф.}}$ — к постоянному значению (рис. 53).

§ 112. Распространение волн вдоль проводов

Чтобы ток можно было считать квазистационарным, должно быть выполнено условие $\lambda = cT \gg l$, где l — длина линии (§ 100). Если это условие не выполнено, то есть

$$l \gtrsim \lambda = cT, \quad (112.01)$$

то ток и поле не будут квазистационарными. В этом случае нельзя считать фазу тока или поля одинаковой во всех точках линии — всякое изменение электромагнитного состояния на каком-либо конце линии будет приводить к распространению волн вдоль линии.

Рассмотрим участок линии длиной dx (рис. 54). Обозначим через R_0 , C_0 и L_0 — сопротивление, емкость и самоиндукцию единицы

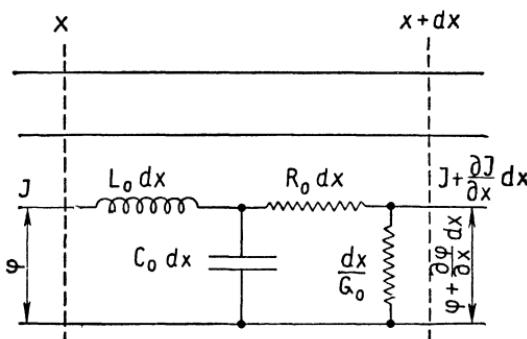


Рис. 54.

длины провода¹. Тогда падение потенциала на участке dx провода будет равно $R_0 I dx$, где I — сила тока. Электродвижущая сила самоиндукции равна $-L_0 dx \frac{\partial I}{\partial t}$. Поэтому полное падение потенциала на dx равно

$$-d\varphi = \left(R_0 I + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \right) dx.$$

¹ Приводимый вывод основных уравнений теории длинных линий сделан Кирхгофом еще до создания теории Максвелла и не является строгим, так как емкость C_0 и самоиндукция L_0 на единицу длины, строго говоря, условны: имеет смысл лишь емкость C и самоиндукция L всего провода. Кроме того, переменный во времени электромагнитный потенциал $\varphi(x, t)$ нельзя отождествлять с электростатическим потенциалом. Строгий вывод уравнений имеется в книгах: Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. IV, стр. 348—367, Арагам — Беккер, Теория электричества, § 67, 68, 69.

Отсюда получаем первое телеграфное уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} + R_0 I = 0. \quad (112.02)$$

Аналогично можно составить второе уравнение для тока. На длине dx сила тока будет уменьшаться на dI вследствие того, что часть входящего заряда будет идти на зарядение провода, а другая часть может теряться вследствие несовершенства изоляции. Если G_0 — проводимость среды на единицу длины, то утечка равна $G_0 dx \cdot \varphi$. Заряд элемента длины провода равен $C_0 dx \varphi$, а его изменение в единицу времени равно $C_0 dx \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. На основании закона сохранения заряда имеем

$$-dI = G_0 dx \varphi + C_0 dx \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

откуда следует второе телеграфное уравнение

$$C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + G_0 \varphi = 0. \quad (112.03)$$

Докажем, что система (112.02—112.03) имеет решением гармоническую волну частоты ω , распространяющуюся вдоль оси x . Как и в § 107, ищем решение в форме

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 e^{i\psi} = \dot{\varphi}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \dot{I} = \dot{I}_0 e^{i\psi} = \dot{I}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (112.04)$$

Подставив (112.04) в (112.02—112.03), получим систему однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}_0 \dot{I}_0 - ik \dot{\varphi}_0 &= 0, \\ -ik \dot{I}_0 + \dot{Y}_0 \dot{\varphi}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (112.05)$$

Здесь

$$\dot{Z}_0 = R_0 + i\omega L_0, \quad \dot{Y}_0 = G_0 + i\omega C_0 \quad (112.06)$$

(\dot{Z}_0 — сопротивление, а \dot{Y}_0 — полная проводимость на единицу длины линии). Система (112.05) имеет нетривиальное решение, если определитель коэффициентов равен нулю. Отсюда получается уравнение для комплексного волнового вектора

$$k^2 = -\dot{Z}_0 \dot{Y}_0. \quad (112.07)$$

Полагая $k = k' - ik''$, убеждаемся, что решение имеет форму затухающей гармонической волны, распространяющейся в направлении оси x :

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \dot{\varphi}_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}, \quad (112.08)$$

$$I = \frac{ik}{\dot{Z}_0} \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\dot{Y}_0}{\dot{Z}_0}} \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\dot{Y}_0}{\dot{Z}_0}} \dot{\varphi}_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}. \quad (112.09)$$

Соотношение (112.09) напоминает закон Ома. Величина

$$\dot{Z}_{\text{волн}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}} \quad (112.10)$$

называется волновым или характеристическим сопротивлением линии.

Для идеальной линии $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$, а k — вещественная величина, равная

$$k = \pm \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (112.11)$$

В такой линии волны не затухают ($k'' = 0$). Фазовая скорость распространения волны равна

$$u = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (112.12)$$

и определяется только параметрами линии. В случае однопроводной линии (задачи 4, § 87 и 1, § 99)

$$C_0 = \frac{\epsilon}{2 \ln \frac{l}{a}}, \quad L_0 = \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{l}{a}$$

(множитель $\frac{1}{c^2}$ появился потому, что L_0 выражено в электростатических единицах). Поэтому

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (112.12a)$$

Таким образом, скорость распространения волн вдоль провода определяется формулой Максвелла, содержащей лишь параметры ϵ и μ окружающей среды. Эта формула является точной и может быть выведена вполне строго.

Применим полученные результаты к простейшей радиотехнической антенне — прямолинейному проводу длины l . В установившемся состоянии в проводе должны образоваться стоячие волны вследствие отражения от концов. Действительно, складывая две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, получим

$$I = I_0 \sin(kx + \alpha) e^{i\omega t}, \quad (112.13)$$

где α — начальная фаза. Из телеграфных уравнений для идеальной линии ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) получаем

$$\varphi = i \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} I_0 \cos(kx + \alpha) e^{i\omega t} = \varphi_0 \cos(kx + \alpha) e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}. \quad (112.14)$$

Таким образом, фаза потенциала отличается от фазы тока на $\frac{\pi}{2}$ не только во времени, но и в пространстве, что характерно для стоячих волн.

Если прямолинейная антenna не заземлена, ток на обоих концах ее ($x = 0$ и l) должен равняться нулю. Это дает граничные условия

$$\sin \alpha = 0, \quad \sin(kl + \alpha) = 0. \quad (112.15)$$

Из первого следует, что $\alpha = 0$, из второго — $kl = n\pi$, где n — целое число. Это значит (поскольку $k = \frac{2\pi}{\lambda}$), что длина волны λ собственных колебаний не может принимать произвольных значений, а равна

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (112.16)$$

то есть в длине l антенны должно укладываться целое число полуволн. Если $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$, то $\omega = c$; поэтому собственные частоты будут равны

$$\omega = \omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{\pi c}{l} n. \quad (112.17)$$

При $n = 1$ имеем так называемый полуволновой диполь.

В более общем случае антenna состоит из вертикального провода длины l , нижний конец которого заземлен через сосредоточенную нагрузку, характеризуемую комплексным сопротивлением \dot{Z}_H . Так как нагрузка сосредоточенная, то можно считать, что ток в ней имеет то же значение, что и на поверхности земли ($x = 0$). Граничные условия можно написать в форме

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \quad \varphi = I \dot{Z}_H, \\ \text{при } x = l \quad I = 0. \end{array} \right\} \quad (112.18)$$

Второе условие согласно (112.13) дает $kl + \alpha = \frac{\omega}{c} l + \alpha = 0$, то есть

$$\alpha = -\frac{\omega}{c} l = -\frac{2\pi l}{\lambda}. \quad (112.19)$$

Применяя первое условие к (112.14), находим

$$\varphi_0 \cos \alpha e^{i \frac{\pi}{2}} = \dot{Z}_H I_0 \sin \alpha,$$

откуда в силу (112.19) получаем

$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c} = i \frac{I_0}{\varphi_0} \dot{Z}_H = i \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \dot{Z}_H. \quad (112.20)$$

Если провод непосредственно соединен с землей ($\dot{Z}_H = 0$), то (112.20) дает $\operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c} = 0$, откуда

$$\omega_n = \frac{\pi c}{2l} (2n - 1), \quad \lambda_n = \frac{4l}{2n - 1}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (112.21)$$

В этом случае собственная частота колебаний такова, что на длине l антенны укладывается нечетное число четвертей длины волны. Сила тока при $x = 0$ принимает максимальное значение (пучность).

Если сосредоточенная нагрузка состоит из последовательно включенных емкости C_H и самоиндукции L_H , то $\dot{Z}_H = i\left(\omega L_H - \frac{1}{\omega C_H}\right)$ и уравнение (112.20) принимает вид

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left(\omega L_H - \frac{1}{\omega C_H} \right). \quad (112.22)$$

Допустим, что правая часть уравнения (112.22) мала и частота ω по значению близка к (112.21). Положим

$$\frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2} (2n - 1) + \beta = \omega_n + \beta;$$

тогда (112.22) дает

$$\operatorname{tg} \beta \approx \beta = - \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left(\omega_n L_H - \frac{1}{\omega_n C_H} \right).$$

Поэтому приближенно

$$\omega = \frac{\pi c}{2l} (2n - 1) - \frac{c}{l} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left(\omega_n L_H - \frac{1}{\omega_n C_H} \right). \quad (112.23)$$

Отсюда видно, что последовательное включение L_H уменьшает частоту, то есть увеличивает длину волны. Такая самоиндукция L_H называется удлинительной. Последовательное включение емкости C_H увеличивает ω и уменьшает собственную длину волны. В общем случае результат зависит от знака разности $\omega_n L_H - \frac{1}{\omega_n C_H}$. Чтобы увеличить собственную волну антенны, нагрузку Z_H делают в виде параллельно включенных емкости и самоиндукции.

Таким образом, меняя параметры L_H и C_H нагрузки, можно настраивать antennу на различные частоты.

Задачи

1. Вывести уравнения, которым подчиняются потенциал φ и сила тока I длиной линии.

Решение. Дифференцируя (112.02) по x и подставляя $\frac{\partial I}{\partial x}$ из (112.03), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (L_0 G_0 + R_0 C_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - R_0 G_0 \varphi = 0.$$

Аналогично доказывается, что I удовлетворяет тому же уравнению. Для идеальной линии ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) получается уравнение Даламбера.

2. Определить дипольный момент полуволнового диполя, совершающего незатухающие колебания.

Решение. Для полуволнового диполя согласно (112.16) $\lambda = 2l$ и $k = \frac{\pi}{l}$; поэтому по (112.14) потенциал и линейная плотность заряда равны

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 \cos \frac{\pi x}{l} e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})},$$

$$q(x, t) = C_0 \varphi(x, t) = C_0 \varphi_0 \cos \frac{\pi x}{l} e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

Отсюда видно, что $|q|$ обращается в нуль при $x = \frac{l}{2}$ и достигает наибольшего значения при $x = 0$ и $x = l$. Полный заряд провода $e = \int_0^l q dx$ равен нулю, а дипольный момент (§ 29) равен

$$\dot{p}(t) = \int_0^l x q(x, t) dx = -\frac{2l^2}{\pi^2} C_0 \varphi_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

3. Определить энергию, излучаемую полуволновым диполем в единицу времени.

Решение. Согласно § 48 энергия, излучаемая диполем в единицу времени, равна

$$-\frac{dW}{dt} = \mathcal{I} = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2 p(t)}{dt^2} \right)^2.$$

На основании результатов задачи 2

$$p(t) = \operatorname{Re} \dot{p}(t) = \frac{2l^2}{\pi^2} C_0 \varphi_0 \sin \omega t,$$

где $\omega = uk = \frac{u\pi}{l}$. Поэтому излучаемая в единицу времени энергия равна

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi^2}{3c^3} \frac{u^4}{l^2} C_0^2 \varphi_0^2,$$

то есть пропорциональна квадрату амплитуды напряжения и обратно пропорциональна квадрату длины l диполя.

§ 113. Распространение электромагнитных волн в анизотропных телах

Анизотропные тела — кристаллы — характеризуются тем, что в них вектор электрической индукции \vec{D} не параллелен вектору напряженности поля \vec{E} , а вектор магнитной индукции \vec{B} не параллелен вектору \vec{H} . Рассмотрим наиболее простой, но нередкий случай, когда $\mu = 1$, $\gamma = 0$ и анизотропия сводится к электрической анизотропии: электрические свойства вещества определяются симметричным вещественным тензором диэлектрических коэффициентов

$$(2)\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}, & \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31}, & \varepsilon_{32}, & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}, \quad (113.01)$$

и составляющие векторов \vec{D} и \vec{E} связаны соотношением

$$D_k = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{kl} E_l, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (113.02)$$

Для изотропного тела $\epsilon_{kl} = \epsilon \delta_{kl}$, где δ_{kl} — единичный тензор.

Во всяком анизотропном теле существуют три направления, для которых вектор электрической индукции \vec{D} параллелен вектору электрического поля \vec{E} . Эти направления называются главными осями тензора $(^2)\epsilon$. С геометрической точки зрения тензор $(^2)\epsilon$ можно представить тензорным эллипсоидом. Выберем некоторое направление, характеризуемое единичным вектором \vec{v} . Компонента тензора ϵ в этом направлении будет равна

$$\epsilon_{vv} = \sum_{k,l} \epsilon_{kl} \alpha_{vk} \alpha_{vl}, \quad (113.03)$$

где α_{vk} косинус угла между \vec{v} и осью Ox_k . Если ввести переменные

$$x_k = \frac{\alpha_{vk}}{\sqrt{\epsilon_{vv}}}, \quad (113.04)$$

то соотношение (113.03) приведется к уравнению эллипса,

$$\sum_{k,l} \epsilon_{kl} x_k x_l = 1, \quad (113.05)$$

который называется эллипсом диэлектрических коэффициентов. Расстояние от точки $M(x_1, x_2, x_3)$, взятой на поверхности эллипса, до центра O эллипса (до начала координат) равно

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{vv}}}, \quad (113.06)$$

то есть обратно пропорционально квадратному корню из диэлектрического коэффициента в направлении \vec{v} . Оси симметрии эллипса (113.05) являются главными осями тензора $(^2)\epsilon$. Действительно, если эллипс отнести к его осям симметрии x' как к осям координат, то его уравнение примет вид

$$\epsilon'_{11} x'^2_1 + \epsilon'_{22} x'^2_2 + \epsilon'_{33} x'^2_3 = 1, \quad (113.07)$$

где $\epsilon'_{kk} = \epsilon'_k$ («главные компоненты тензора») согласно (113.06) суть обратные квадраты полуосей эллипса. В главных осях тензор (113.01) приводится к виду

$$(^2)\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_3 \end{pmatrix}. \quad (113.08)$$

Таким образом, если выбрать координатные оси, параллельные осям симметрии тензора $(^2)\epsilon$ (главным осям), то тензор приводится к диагональному виду (113.08). Соотношения (113.02) принимают вид

$$D_1 = \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2, \quad D_3 = \epsilon_3 E_3. \quad (113.09)$$

Штрихи в (113.09) опущены, так как в дальнейшем исследование проводится только в системе главных осей.

Распространение плоских гармонических волн в направлении \vec{n} (единичный вектор нормали к поверхности постоянной фазы) характеризуется согласно (107.03) уравнениями

$$\left. \begin{aligned} [\vec{n}, \vec{E}] - \frac{k_0}{k} \vec{H} &= 0, & [\vec{n}, \vec{H}] + \frac{k_0}{k} \vec{D} &= 0, \\ \vec{n} \vec{D} &= 0, & \vec{n} \vec{H} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (113.10)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $\vec{k} = k \vec{n}$.

Из (113.10) видно, что \vec{D} и \vec{H} перпендикулярны к \vec{n} . Вектор \vec{E} не перпендикулярен \vec{n} , хотя и лежит в плоскости \vec{D} , \vec{n} (рис. 55, а).

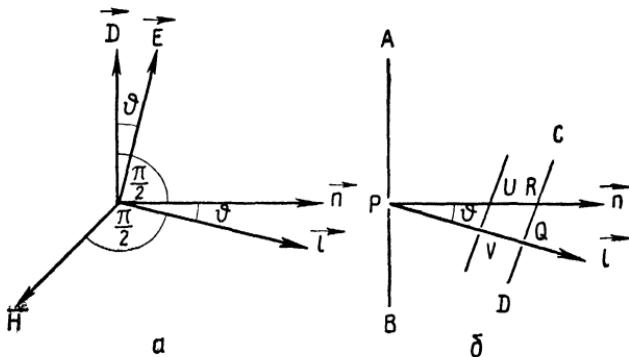


Рис. 55.

Только тогда, когда «световой вектор» \vec{D} совпадает с одним из главных направлений, вектор \vec{E} перпендикулярен к \vec{n} . Исключив из (113.10) \vec{H} , получим

$$\vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \vec{D} = 0. \quad (113.11)$$

Уравнение (113.11) — основное уравнение, определяющее фазовую скорость распространения электромагнитных волн в анизотропной среде в зависимости от направления \vec{n} .

Исследуем уравнение (113.11) для ряда частных случаев.

1. Пусть вектор \vec{D} направлен по главной оси x_1 , т. е.

$$D = D_1 = \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = D_3 = 0.$$

Тогда (113.11) распадается на три уравнения:

$$n_1(\vec{n}\vec{E}) - E_1 + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \epsilon_1 E_1 = 0,$$

$$n_2(\vec{n}\vec{E}) - E_2 = 0, \quad n_3(\vec{n}\vec{E}) - E_3 = 0.$$

Но

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = 0, \quad E_3 = \frac{D_3}{\epsilon_3} = 0;$$

поэтому либо

$$n_2 = n_3 = 0,$$

то есть волны распространяются в направлении колебаний (продольные волны), либо

$$(\vec{n}, \vec{E}) = 0, \quad (113.12)$$

то есть волны распространяются в направлении, перпендикулярном к направлению колебаний вектора \vec{E} . Если $n_2 = n_3 = 0$ (продольные волны), то $\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \epsilon_1 E_1 = 0$, откуда либо $E_1 = 0$ (волны вообще нет), либо $k = \infty$ (что не имеет смысла). Это значит, что в анизотропной среде продольные волны распространяться не могут. Для поперечных волн в силу (113.12) получаем

$$k = k_0 V \overline{\epsilon_1} = \frac{\omega}{c} V \overline{\epsilon_1}, \quad u_1 = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{V \overline{\epsilon_1}}, \quad (113.13)$$

то есть волны имеют ту фазовую скорость, которую они имели бы в изотропной среде с диэлектрическим коэффициентом ϵ_1 , соответствующим направлению колебаний D_1 . Итак, скорость распространения волн определяется направлением колебаний вектора \vec{D} . Тот же результат получается в случае колебаний, направленных по другим осям тензора $(^2\epsilon)$.

2. Пусть волны распространяются в направлении оси x_1 ($n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$). Тогда (113.11) дает

$$\begin{aligned} E_1 - E_1 + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 D_1 &= 0, & -E_2 + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 D_2 &= 0, \\ -E_3 + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 D_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что $D_1 = 0$, то есть вектор \vec{D} перпендикулярен к направлению распространения. Из двух других уравнений в силу (113.09) следует либо $k = k_2 = k_0 V \overline{\epsilon_2}$, либо $k = k_3 = k_0 V \overline{\epsilon_3}$. Это значит, когда волны распространяются в направлении $\vec{n} = n_1$ (колебания вектора \vec{D} происходят в плоскости x_2x_3), воз-

можны два случая: либо вектор \vec{D} направлен по $x_2 = y$ и скорость распространения равна

$$u_2 = \frac{\omega}{k_2} = \frac{c}{V_{\epsilon_2}},$$

либо вектор \vec{D} параллелен $x_3 = z$ и тогда скорость распространения равна

$$u_3 = \frac{\omega}{k_3} = \frac{c}{V_{\epsilon_3}}.$$

Таким образом, в направлении главной оси x могут распространяться лишь два волновых процесса: процесс со скоростью u_2 и с колебаниями светового вектора \vec{D} , параллельными x_2 , и процесс со скоростью u_3 и с колебаниями вектора \vec{D} , параллельными x_3 . Фазовая скорость распространения плоских волн определяется величиной ϵ в направлении вектора \vec{D} . Колебания вектора \vec{D} , параллельные одной из главных осей, могут распространяться по двум другим осям с одной и той же скоростью. Эти главные фазовые скорости распространения волн с вектором \vec{D} , параллельным оси x_k , равны

$$u_k = \frac{c}{V_{\epsilon_k}} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (113.14)$$

3. Рассмотрим общий случай. Введем фазовую скорость распространения волн

$$\vec{u} = \vec{u}n, \quad \frac{u}{c} = \frac{k_0}{k}. \quad (113.15)$$

Уравнение (113.11) принимает вид

$$\vec{n}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{E} + \frac{u^2}{c^2} \vec{D} = 0. \quad (113.16)$$

Исследуем зависимость скорости распространения u от направления распространения \vec{n} . Спроектируем (113.16) на ось x_k . Учитывая, что

$$D_k = \epsilon_k E_k \quad \text{и} \quad \epsilon_k = \frac{c^2}{u_k^2},$$

получим

$$n_k (\vec{n}\vec{E}) = \left(1 - \frac{u^2}{u_k^2}\right) E_k.$$

Последнее равенство умножим на $n_k \left(1 - \frac{u^2}{u_k^2}\right)^{-1}$ и просуммируем по k от 1 до 3. После деления на $(\vec{n}\vec{E}) = \sum_k n_k E_k$ получим

$$\sum_k \frac{n_k^2}{1 - \frac{u^2}{u_k^2}} = 1.$$

Учитывая, что $1 = \sum_k n_k^2$, имеем

$$\sum_{k=1}^3 \frac{n_k^2}{u_k^2 - u^2} = 0. \quad (113.17)$$

Это есть уравнение Френеля, определяющее u как функцию от \vec{n} . Сумма может равняться нулю лишь тогда, когда члены имеют разные знаки. Без ущерба для общности рассуждений можно перенумеровать главные оси так, чтобы $u_1 > u_2 > u_3$.

Тогда корень u' уравнения (113.17) будет лежать между u_1 и u_2 ($u_1 > u' > u_2$), а корень u'' — между u_2 и u_3 ($u_2 > u'' > u_3$). Когда направление распространения \vec{n} приближается к одному из главных направлений, фазовая скорость распространения приближается к одной из главных скоростей распространения (113.14).

Рассмотрим зависимость фазовой скорости u от направления вектора \vec{D} . В силу (113.10) вектор \vec{D} всегда перпендикулярен к направлению \vec{n} распространения фазы волны. Для всякого направления распространения \vec{n} существуют две скорости распространения, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям колебаний. Умножая (113.16) скалярно на \vec{D} и пользуясь тем, что $(\vec{n}, \vec{D}) = 0$, получим

$$\vec{E}\vec{D} = \frac{u^2}{c^2} D^2,$$

откуда, учитывая, что

$$E_k = \frac{D_k}{\epsilon_k} = \frac{u_k^2}{c^2} D_k,$$

находим

$$u^2 = \frac{1}{D^2} \sum_k u_k^2 D_k^2. \quad (113.18)$$

Легко видеть, что u зависит лишь от направления вектора \vec{D} . Введем единичный вектор \vec{d} , характеризующий направление колебаний

$$\vec{d} = \frac{\vec{D}}{D}. \quad (113.19)$$

Тогда

$$u^2 = \sum_{k=1}^3 u_k^2 d_k^2. \quad (113.20)$$

Докажем, что колебания векторов \vec{D}' и \vec{D}'' , способные распространяться в данном направлении \vec{n} соответственно со скоростями u'

и u'' , взаимно перпендикулярны. Согласно (113.16) векторы \vec{D}' , \vec{D}'' и скорости u' , u'' удовлетворяют уравнениям

$$\vec{n}(\vec{n}\vec{E}') - \vec{E}' + \frac{u'^2}{c^2}\vec{D}' = 0, \quad \vec{n}(\vec{n}\vec{E}'') - \vec{E}'' + \frac{u''^2}{c^2}\vec{D}'' = 0.$$

Умножим первое уравнение скалярно на \vec{D}'' , а второе на \vec{D}' , а затем вычтем одно из другого. Учитывая, что $\vec{n}\vec{D}' = \vec{n}\vec{D}'' = 0$, получим

$$\left(\frac{u'^2}{c^2} - \frac{u''^2}{c^2}\right)\vec{D}'\vec{D}'' = \vec{E}'\vec{D}'' - \vec{E}''\vec{D}'.$$

Правая часть равна нулю, так как

$$\vec{E}'\vec{D}'' = \sum_k \epsilon_k E'_k E''_k = \vec{D}'\vec{E}''.$$

Но

$$u' \neq u'',$$

поэтому

$$\vec{D}'\vec{D}'' = 0. \quad (113.21)$$

То есть колебания векторов \vec{D}' и \vec{D}'' взаимно перпендикулярны.

Итак, каждому направлению распространения \vec{n} соответствуют две скорости распространения, относящиеся к двум взаимно перпендикулярным направлениям колебаний вектора \vec{D} . Иначе говоря, две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, распространяются в данном направлении с различными скоростями. Можно сказать, что каждая составляющая вектора \vec{D} распространяется со свойственной ей скоростью u . Поэтому, рассматривая волну, распространяющуюся в направлении \vec{n} , можно \vec{D} разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие \vec{D}' и \vec{D}'' , лежащие в плоскости, перпендикулярной \vec{n} . Каждая из составляющих будет распространяться со свойственной ей скоростью, определяемой формулой (113.20). Длины волн этих составляющих ($\lambda' = \frac{2\pi}{\omega} u'$ и $\lambda'' = \frac{2\pi}{\omega} u''$) различные, поэтому в каждой точке среды составляющие будут иметь разность фаз. Складывая составляющие, получим эллиптически поляризованную волну (§ 42). Направление вращения поляризации будет зависеть от того, какая из составляющих имеет большую скорость распространения. Таким образом, если линейно-поляризованная волна падает нормально на плоскопараллельную анизотропную прозрачную пластинку, то плоскость поляризации прошёдшей через пластинку волны будет повернута на некоторый угол относительно плоскости поляризации падающей волны.

Вектор \vec{D} в анизотропных телах, вообще говоря, образует с вектором \vec{E} угол ϑ (рис. 55, б). Введем единичный вектор, лежащий в плоскости $\vec{D}\vec{n}$, но перпендикулярный к \vec{E} (угол между \vec{l} и \vec{n} равен ϑ). Вектор \vec{l} , нормальный к плоскости \vec{E}, \vec{H} , определяет направление лучей, соответствующих рассматриваемой волне. Следовательно, в анизотропной среде направление лучей и направление распространения волн не совпадают, но образуют (переменный) угол ϑ . Если вдоль \vec{l} поставить ряд диафрагм, то можно будет выделить луч, то есть, хотя плоскости волн перпендикулярны к \vec{n} , направление их перемещения совпадает с \vec{l} . Поток энергии в макроскопическом веществе определяется вектором (76.04),

$$\vec{s} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = S \vec{l} \quad (113.22)$$

и, следовательно, направление луча есть направление потока энергии. Скорость луча v численно равна отрезку PQ , проходящему в единицу времени. Очевидно,

$$v = \frac{u}{\cos \vartheta}. \quad (113.23)$$

Все свойства лучей легко выводятся из свойств волн. Данному направлению \vec{l} луча соответствуют две скорости распространения v' и v'' , каждая из которых соответствует одному из двух взаимно перпендикулярных векторов \vec{E}', \vec{E}'' . Преобразуем исходные уравнения (113.10) так, чтобы вместо \vec{n}, u входили \vec{l} и v . Умножим первое уравнение (113.10) на \vec{l} векторно. Пользуясь тем, что $\frac{k_0}{k} = \frac{u}{c}$, получим

$$\frac{u}{c} [\vec{l}, \vec{H}] = [\vec{l}, [\vec{n}, \vec{E}]] = \vec{n} (\vec{l}, \vec{E}) - \vec{E} (\vec{n}, \vec{l}) = -\vec{E} \cos \vartheta,$$

или согласно (113.23)

$$\vec{E} = -\frac{v}{c} [\vec{l}, \vec{H}].$$

Аналогично преобразуем и второе уравнение (113.10). В результате получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} [\vec{l}, \vec{H}] + \frac{c}{v} \vec{E} &= 0, & [\vec{l}, \vec{D}] - \frac{c}{v} \vec{H} &= 0, \\ \vec{l} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{l} \cdot \vec{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (113.24)$$

Система (113.24) эквивалентна системе (113.10). Сравнивая их, мы видим, что первая система получается из второй заменой $\vec{n}, \vec{E}, \vec{D}$,

$\frac{k_0}{c} = \frac{u}{c}$ соответственно через \vec{l} , \vec{D} , \vec{E} и $\frac{c}{v}$. Поэтому все следствия из (113.24) можно получить из следствий (113.10), произведя соответствующую замену. В силу (113.16) можно написать уравнение, определяющее лучевую скорость v по \vec{l} и \vec{E} .

$$\vec{l}(\vec{l}\vec{D}) - \vec{D} + \frac{c^2}{v^2} \vec{E} = 0. \quad (113.25)$$

Уравнение Френеля для волн (113.17) переходит в уравнение для лучей

$$\sum_k \frac{l_i^2}{\frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2}{v_k^2}} = 0.$$

Но \vec{E} и \vec{D} параллельны, когда вектор \vec{D} направлен по одной из главных осей тензора $(^{(2)}\epsilon)$. Поэтому в главных направлениях $\vartheta = 0$ и

$$v_k = u_k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_k}} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (113.26)$$

Окончательно уравнение Френеля для лучей можно написать в форме

$$\sum_{k=1}^3 \frac{l_k^2 v_k^2}{v_k^2 - v^2} = 0. \quad (113.27)$$

Это уравнение позволяет доказать, что лучевая скорость v есть скорость v_g группы волн. Действительно, так как $u = \frac{\omega}{k}$, то из (113.17) получим

$$\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2 k^2}{\omega^2 - u_i^2 k^2} = 0. \quad (113.28)$$

Уравнение (113.28) дает зависимость ω от k в неявной форме. Считая, что u_i не зависят от ω , можно вычислить составляющие групповой скорости $v_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$ и показать, что они удовлетворяют уравнению (113.27). Тем самым доказывается, что $\vec{v} = \vec{v}_g$.

Чтобы определить зависимость лучевой скорости v от направления вектора \vec{E} , введем единичный вектор этого направления

$$\vec{e} = \frac{\vec{E}}{E}. \quad (113.29)$$

Тогда из (113.18) будем иметь

$$\frac{c^2}{v^2} = \sum_i \frac{c^2}{v_i^2} \frac{E_i^2}{E^2},$$

откуда

$$\frac{1}{v^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{e_i^2}{v_i^2}. \quad (113.30)$$

Можно показать, что корням v' и v'' уравнения (113.27) соответствуют два взаимно перпендикулярных колебания \vec{E}' и \vec{E}'' , то есть

$$\vec{E}' \cdot \vec{E}'' = 0. \quad (113.31)$$

§ 114. Геометрическая интерпретация. Двухосные и одноосные кристаллы

Рассмотрим геометрическую интерпретацию аналитических зависимостей, полученных в предыдущем параграфе. Прежде всего рассмотрим соотношение (113.30). Введем вектор $\vec{r} = \vec{ev}$. Тогда

$x_i = ve_i$ и уравнение (113.30) принимает вид

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{v_i^2} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 e_i x_i^2 = 1. \quad (114.01)$$

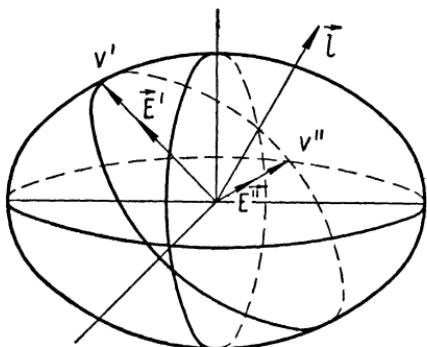


Рис. 56.

Это есть уравнение эллипсоида с полуосами v_1, v_2, v_3 , равными главным лучевым скоростям. Этот эллипсоид тождествен тензорному эллипсоиду (113.07). Проведем из центра эллипса радиус-вектор в направлении вектора \vec{E}' . Его длина от центра до пересечения с поверхностью эллипса равна скорости распространения v' колебания вектора \vec{E}' (рис. 56). Если дано направление луча \vec{l} , то оба колебания вектора \vec{E} , способные распространяться вдоль \vec{l} со скоростями v' и v'' , лежат в плоскости, перпендикулярной к \vec{l} . Эта плоскость, пересекаясь с эллипсом, дает эллиптическое сечение. Полуоси полученного эллипса определяют лучевые скорости v' и v'' . Так как одна из полуосей есть наибольший, а другая — наименьший радиус-вектор эллипса, то определяемые ими лучевые скорости будут наибольшей и наименьшей скоростями из всех скоростей распространения в данном направлении \vec{l} колебаний. Направления полуосей

дают направления \vec{E}' и \vec{E}'' . Скорости v' и v'' , вообще говоря, различные. Но существуют два направления \vec{l} , для которых нормальная плоскость дает круговые сечения. По отношению к лучам в этих направлениях анизотропное тело ведет себя как изотропное. Эти два направления, для которых колебания вектора \vec{E} могут иметь любые направления, называются оптическими осями кристалла. Если $v_1 > v_2 > v_3$, то оптические оси лежат в плоскости x_1x_3 , то есть в плоскости наибольшей и наименьшей скорости распространения.

Эллипсоид, определяемый уравнением (114.01), называется лучевым эллипсоидом.

Другое графическое представление распространения волн в анизотропной среде получается с помощью уравнения Френеля (113.27).

Обозначая

$$\vec{r} = \vec{l}v, \quad x_i = l_i v, \quad (114.02)$$

перепишем уравнение (113.27) в виде

$$\sum_{i=1}^3 \frac{v_i^2 x_i^2}{r^2 - v_i^2} = 0. \quad (114.03)$$

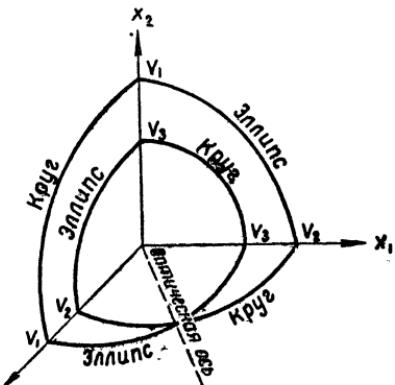


Рис. 57.

Это есть уравнение поверхности 4-го порядка, которая называется лучевой поверхностью (рис. 57). Каждому направлению соответствуют две лучевые скорости. В направлении x_1 распространяются со скоростями v_2 и v_3 лучи, для которых вектор \vec{E} параллелен x_2 или x_3 , в направлении x_2 — со скоростями v_1 и v_3 лучи, для которых вектор \vec{E} параллелен x_1 или x_3 , а в направлении x_3 — со скоростями v_1 и v_2 лучи, для которых вектор \vec{E} параллелен x_1 или x_2 . Чтобы яснее представить себе форму лучевой поверхности, рассмотрим сечения поверхности координатными плоскостями. Полагая в (114.03) $x_3 = 0$, получим

$$\frac{v_1^2 x_1^2}{r^2 - v_1^2} + \frac{v_2^2 x_2^2}{r^2 - v_2^2} = 0, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

После простых преобразований имеем

$$\frac{x_1^2}{v_2^2} + \frac{x_2^2}{v_1^2} = 1, \quad (114.04)$$

то есть сечение лучевой поверхности плоскостью x_1x_2 есть эллипс с полуосями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). Но полагая (114.03) $x_3 = 0$, мы

отбросили решение

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = v_3, \quad (114.05)$$

удовлетворяющее (114.03). Таким образом, плоскость x_1x_2 пересекает лучевую поверхность по кругу радиуса v_3 и по эллипсу (114.04). Аналогично плоскость x_2x_3 пересекает лучевую поверхность по кругу

$$x_2^2 + x_3^2 = v_1^2$$

и по эллипсу

$$\frac{x_2^2}{v_3^2} + \frac{x_3^2}{v_2^2} = 1,$$

а плоскость x_3x_1 пересекает лучевую поверхность по кругу

$$x_1^2 + x_3^2 = v_2^2$$

и по эллипсу

$$\frac{x_1^2}{v_3^2} + \frac{x_3^2}{v_1^2} = 1.$$

Таким образом, лучевая поверхность имеет форму, которую можно назвать двусторчатой. На рисунке 58, б изображено сечение лучевой

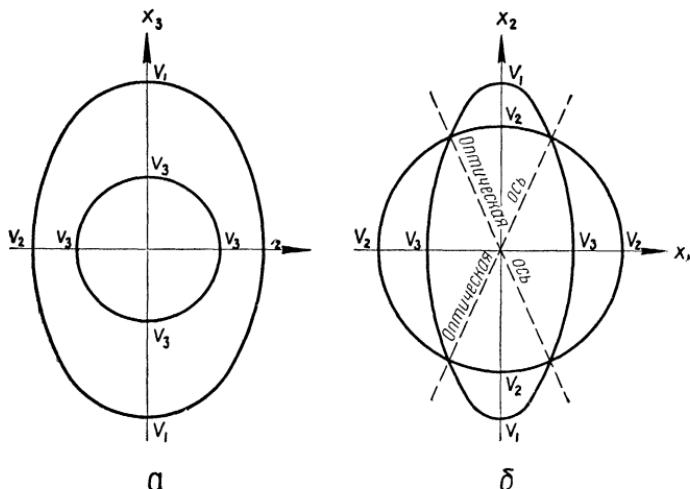


Рис. 58.

поверхности плоскостью x_1x_2 , а на рисунке 58, а — сечение плоскостью x_1x_3 . Точки пересечения окружности и эллипса в плоскости x_1x_3 соответствуют пересечениям оптических осей с лучевой поверхностью.

Аналогичные построения можно произвести, если рассматривать не лучи, а волны. Введем вектор

$$\vec{r} = u\vec{d}, \quad x_i = ud_i, \quad (114.06)$$

параллельный вектору индукции \vec{D} и численно равный фазовой скорости распространения u . Тогда равенство (113.20) запишется в виде

$$r^4 = \sum_{i=1}^3 u_i^2 x_i^2. \quad (114.07)$$

Уравнение (114.07) определяет поверхность, весьма похожую на эллипсоид и называемую овалоидом Френеля. К овалоиду применимо то же построение, что и к эллипсоиду (114.01). Полагая

$$\vec{r} = \vec{n}u, \quad x_i = n_i u, \quad (114.08)$$

уравнение (113.17) можно переписать в виде

$$\sum \frac{x_i^2}{r^2 - u_i^2} = 0. \quad (114.09)$$

Уравнение (114.09) выражает поверхность нормалей к волне. Эта поверхность имеет вид, аналогичный лучевой поверхности, но в сечениях вместо эллипсов получаются овалы. Направления распространения волн \vec{n} суть ортогональные траектории этой поверхности.

Наряду с двумя оптическими осями существуют два направления, при распространении вдоль которых волны могут иметь вектор \vec{D} , направленный как угодно в нормальных к этим направлениям плоскостях. Направления эти не совпадают с оптическими осями.

Между лучевой поверхностью и поверхностью нормалей к волне существует простое геометрическое соотношение. Пусть через некоторую точку проходит в направлении \vec{n} плоская волна. Отложим от этой точки вдоль \vec{n} две скорости u' и u'' распространения волн и проведем через концы отложенных векторов две нормальные к \vec{n} плоскости — волновые поверхности. Огибающая всех волновых поверхностей для всех возможных направлений вектора \vec{n} есть лучевая поверхность. Обратно, огибающая плоскостей, нормальных к лучам, есть поверхность нормалей к волне. Построив к лучевой поверхности касательную плоскость и опустив на нее из начала перпендикуляр, получим направление распространения волн. Заметим, что в точках пересечения лучевой поверхности с оптическими осями существует не одна касательная плоскость, а касательный конус.

Если два главных значения тензора $(2)_e$ равны, то тензорный эллипсоид (лучевой эллипсоид) из трехосного превращается в эллипсоид вращения. Если $v_1 = v_2 > v_3$, то оптические оси сливаются с осью x_3 (рис. 58, а). Если $v_1 > v_2 = v_3$, то оптические оси сливаются с осью x_1 . В первом случае лучевой эллипсоид есть сплюснутый эллипсоид вращения (вращение вокруг оси x_3), во втором случае — вытянутый эллипсоид вращения (вращение вокруг оси x_1). Так как в этих

случаях оптические оси сливаются, то кристалл называется одноосным. Эта единственная оптическая ось совпадает, очевидно, с осью вращения эллипсоида.

Лучевые поверхности одноосных кристаллов имеют вид, изображенный на рисунке 59. Кристаллы первого рода ($v_1 = v_2 > v_3$) назы-

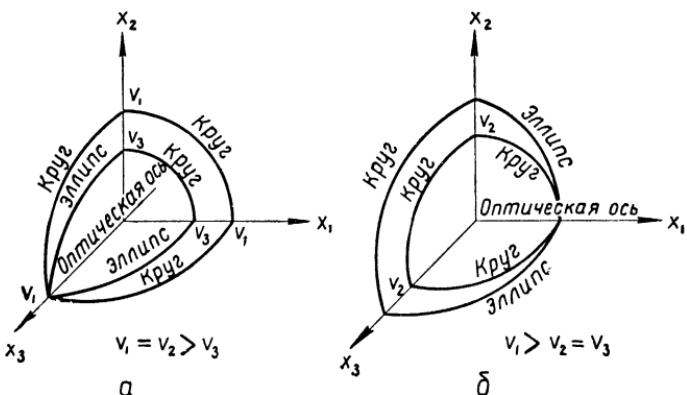


Рис. 59.

ваются положительными, кристаллы второго рода ($v_1 > v_2 = v_3$) — отрицательными.

Луч света, падающий на поверхность оптически одноосного кристалла, разделяется на два луча, распространяющихся с разной скоростью. Обыкновенный луч распространяется по направлению нормали к волне со скоростью, не зависящей от направления. Необыкновенный луч образует с нормалью некоторый угол и имеет скорость, зависящую от направления.

Материала к волне со скоростью, не зависящей от направления. Необыкновенный луч образует с нормалью некоторый угол и имеет скорость, зависящую от направления.

Задача.

На плоскую поверхность одноосного кристалла падает плоская волна. Определить ход лучей, если оптическая ось лежит в плоскости падения.

Решение. Для положительного кристалла можно сделать следующее построение (рис. 60).

Пусть MN — граница кристалла, OA — фронт падающей волны. Эллипс и круг с центром O представляют собой пересечение поверхности лучей, выходящих из O с плоскостью падения. Расстояние от центра O до лучевой поверхности лучи проходят за то же время, в течение которого волна вне кристалла проходит путь AO' . Прямые $O'B$ и $O'C$, касательные к сечениям лучевой поверхности в точках B и C , являются огибающими лучевых поверхностей и, следовательно, поверхностями нормалей. Отрезки OB и OC

дают направления параллельных лучей OB для обычного луча, OC — для необычного луча. Поскольку длина OC зависит от направления, то лучевая скорость также зависит от направления.

Ход лучей для отрицательного одноосного кристалла находится аналогично.

§ 115. Вращение плоскости поляризации

Электронная структура некоторых веществ такова, что тензор диэлектрических коэффициентов $(^2)\varepsilon$ может сделаться комплексным, что приводит к еще более сложной анизотропии. В простейшем случае тензор $(^2)\varepsilon$ эрмитов, то есть его диагональные элементы вещественны, а недиагональные, расположенные симметрично относительно главной диагонали, комплексно сопряжены

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}^*. \quad (115.01)$$

Разложим $(^2)\varepsilon$ на симметричную и антисимметричную части

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{lk}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{lk}) = \varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{kl}, \quad (115.02)$$

Здесь $\varepsilon'_{kl} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{lk})$ — вещественный симметричный тензор, а $\varepsilon''_{kl} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{lk}) = -\varepsilon''_{lk}$ — мнимый антисимметричный тензор. Таким образом, эрмитов тензор слагается из вещественного симметричного тензора $(^2)\varepsilon'$ и мнимого антисимметричного тензора $(^2)\varepsilon''$. Но антисимметричный трехмерный тензор эквивалентен аксиальному вектору. Поэтому, вводя

$$\varepsilon''_{23} = ig_1, \quad \varepsilon''_{31} = ig_2, \quad \varepsilon''_{12} = ig_3, \quad (115.03)$$

получим для индукции

$$D_1 = \sum_l \varepsilon_{ll} E_l = \sum_l \varepsilon'_{ll} E_l + i(g_3 E_2 - g_2 E_3),$$

то есть

$$D_1 = (^2\varepsilon' \vec{E})_1 + i[\vec{E}, \vec{g}]_1.$$

То же получим и для других компонент. Поэтому

$$\vec{D} = (^2\varepsilon' \vec{E}) + i[\vec{E}, \vec{g}]. \quad (115.04)$$

Член $(^2\varepsilon' \vec{E})$ совпадает с вектором \vec{E} по фазе, но отличен по направлению. Его роль рассмотрена в § 113 и 114. Второй член $i[\vec{E}, \vec{g}]$ отличен от \vec{E} по направлению и сдвинут относительно \vec{E} по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Присутствие члена $i[\vec{E}, \vec{g}]$ отражает особые свойства тела: линейно-поляризованный волна, распространяющаяся в теле, испытывает вращение плоскости поляризации. Тела, обладающие этим

свойством, то есть эрмитовой диэлектрической постоянной, называются гиротропными, а вектор \vec{g} называется гирацией или гирационным вектором.

Обычно вещества становятся гиротропными под влиянием внешних воздействий, причем направление воздействия определяет направление вектора гирации. Таким воздействием может быть внешнее магнитное поле или упругая деформация тела. В первом случае вектор гирации пропорционален \vec{H} , во втором — пропорционален напряжению, вызывающему деформацию сжатия или растяжения.

Допустим, что обыкновенный анизотропии нет и $\epsilon'_{kl} = \epsilon' \delta_{kl}$. Тогда ${}^{(2)}\epsilon'$ приводится к скаляру, а (115.04) принимает вид

$$\vec{D} = \epsilon' \vec{E} + i[\vec{E}, \vec{g}]. \quad (115.05)$$

Чтобы исследовать влияние гирационного члена, рассмотрим распространение плоской волны в гиротропном теле. Воспользуемся уравнениями (107.03) при $\mu = 1$, $\gamma = 0$

$$[\vec{k}, \vec{H}] + k_0 \vec{D} = 0, \quad [\vec{k}, \vec{E}] - k_0 \vec{H} = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (115.06)$$

Введем обозначение

$$\frac{\vec{k}}{k_0} = \vec{N} = N \vec{n}. \quad (115.07)$$

Умножим второе из уравнений (115.06) векторно на N и с помощью первого уравнения исключим \vec{H} . Получим уравнение

$$\vec{N}(\vec{N}\vec{E}) - N^2 \vec{E} + \vec{D} = 0. \quad (115.08)$$

Возьмем частный случай, когда вектор \vec{N} параллелен вектору гирации \vec{g} и оба они параллельны оси $x_3(z)$. Подставим в (115.08) \vec{D} из (115.05), получим

$$\vec{N}(\vec{N}\vec{E}) - N^2 \vec{E} + \epsilon' \vec{E} + i[\vec{E}, \vec{g}] = 0. \quad (115.09)$$

Проектируя последнее на оси и учитывая, что

$$N_x = N_y = 0, \quad N_z = N, \quad g_x = g_y = 0, \quad g_3 = g_z = g,$$

получим

$$(\epsilon' - N^2) E_x + ig E_y = 0, \quad (\epsilon' - N^2) E_y - ig E_x = 0, \quad \epsilon' E_z = 0. \quad (115.10)$$

Из последнего уравнения следует, что $E_z = 0$, то есть волны, распространяющиеся параллельно \vec{g} , поперечные. Составляющие E_x и E_y определяются из двух первых уравнений. Условие разрешимости этой однородной системы дает

$$N^2 = \epsilon' \pm g. \quad (115.11)$$

Так как

$$E_y = \frac{igE_x}{\epsilon' - N^2},$$

то

$$E_y = \mp iE_x = E_x e^{\mp i \frac{\pi}{2}}, \quad (115.12)$$

то есть E_y сдвинуто по фазе относительно E_x на $\frac{\pi}{2}$. При $N = N' = \sqrt{\epsilon' + g}$ и $N = N'' = \sqrt{\epsilon' - g}$ имеем волны

$$E'_x = E'_{ox} e^{i(k'z - \omega t)}, \quad E'_y = E'_{ox} e^{i(k'z - \omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (115.13)$$

$$E''_x = E''_{ox} e^{i(k''z - \omega t)}, \quad E''_y = E''_{ox} e^{i(k''z - \omega t + \frac{\pi}{2})}, \quad (115.14)$$

где $k' = k_0 N'$, $k'' = k_0 N''$. Линейно-поляризованные волны (115.13) и (115.14) сдвинуты по фазе на $\pm \frac{\pi}{2}$ и имеют одинаковые амплитуды.

Они дают две поляризованные по кругу волны, имеющие противоположные направления вращения (§ 42). Существенно, что волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях, распространяются в гиротропном веществе с различными фазовыми скоростями, равными

$$u' = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{N'} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon' + g}}, \quad u'' = \frac{\omega}{k''} = \frac{c}{N''} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon' - g}}. \quad (115.15)$$

Если в гиротропное вещество в направлении OZ входит линейно-поляризованная волна, например $E_x = E$, $E_y = 0$, то влияние гиротропности приводит к вращению плоскости поляризации. Действительно, в гиротропном веществе первичная линейно-поляризованная волна распадается на две волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Эти волны, имеющие одинаковые амплитуды, распространяются с различными скоростями u' и u'' . Складывая в некоторой точке z оба круговых колебания, получим линейное колебание, повернутое на некоторый угол относительно первоначальной плоскости колебаний. Изменение фазы поляризованных по кругу волн на расстоянии z равно $k'z$ и $k''z$ соответственно, а разность фаз равна $(k' - k'')z$. Угол вращения плоскости поляризации на единицу длины Δ равен полуразности фаз на единицу длины, то есть

$$\Delta = \frac{1}{2}(k' - k'') = \frac{\omega}{2c}(N' - N'') = \frac{\omega}{2c}(\sqrt{\epsilon' + g} - \sqrt{\epsilon' - g}). \quad (115.16)$$

Если $g \ll \epsilon'$, то

$$\Delta = \frac{\omega}{2c\sqrt{\epsilon'}} g \quad (115.17)$$

(вращение плоскости поляризации на единицу длины пропорционально вектору гирации).

Для анизотропного и гиротропного тела, для которого индукция определяется уравнением (115.04), каждому направлению распространения света \vec{n} соответствуют две скорости распространения u' и u'' . Каждой из этих скоростей соответствует два гармонических эллиптических колебания векторов \vec{D}' и \vec{D}'' , сводящихся в частных случаях к прямолинейным или поляризованным по кругу. Только эти два колебания могут с определенными скоростями распространяться в направлении \vec{n} . При распространении эллиптические колебания меняют наклон и отношение длин осей эллипса. Изменение наклона — следствие гиротропии, изменение отношения осей — следствие анизотропии, то есть тензорных свойств $(^2)\epsilon'$.

Кроме гиротропии, имеет место так называемое естественное вращение плоскости поляризации (естественная активность), характеризующееся тем, что прямолинейно-поляризованные волны любого направления испытывают одно и то же вращение плоскости поляризации. В этом случае нет определенного вектора гирации \vec{g} . Его роль играет вектор нормали \vec{n} . Если луч пройдет естественно-активную среду в прямом и обратном направлениях, то плоскость поляризации повернется на двойной угол. При нормальной гиротропии, рассмотренной выше, возвращение луча обратно восстанавливает первоначальную плоскость поляризации.

Естественная активность имеет место в тех случаях, когда вектор поляризации \vec{P} вещества зависит не только от \vec{E} , но и от его производных по координатам. Составляющие вектора индукции равны

$$D_k = \sum_l \epsilon_{kl} E_l + \sum_l \sum_m \epsilon'_{klm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}, \quad (115.18)$$

где ϵ'_{klm} — компоненты некоторого тензора 3-го ранга. В случае плоской волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_m} = ik_m \vec{E}.$$

Следовательно,

$$D_k = \sum_l \epsilon_{kl} E_l + i \sum_l \sum_m \epsilon'_{klm} k_m E_l. \quad (115.19)$$

Коэффициенты ϵ'_{klm} — вещественные, поэтому двойная сумма вещественна. Выражение (115.19) сходно с соответствующими соотношениями для анизотропно-гиротропной среды. Если $(^3)\epsilon'$ — антисимметричный тензор 3-го ранга

$$\epsilon'_{klm} = \epsilon'' (^3)\delta, \quad (115.20)$$

то

$$\delta_{123} = 1, \quad \delta_{klm} = -\delta_{lkm} = -\delta_{kml}, \quad (115.21)$$

то (115.19) можно представить в форме

$$\vec{D} = {}^{(2)}\varepsilon \vec{E} + i[\vec{E}, \vec{\Gamma}]. \quad (115.22)$$

Вектор гирации $\vec{\Gamma}$ равен

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma} n = \frac{\varepsilon'' \omega}{c} \vec{n}.$$

Соотношение (115.22) аналогично (115.04) и приводит к тем же следствиям. Но вектор гирации не имеет определенного направления в теле, а всегда параллелен вектору нормали к волне.

§ 116. Исторические замечания

Вскоре после создания электромагнитной теории света Максвелл показал, что основные соотношения оптики кристаллов, развитой Френелем на основе волновой упругой теории света, можно получить, если ввести анизотропию диэлектрических коэффициентов.

Во времена Максвелла следствиями электромагнитной теории света, доступными экспериментальной проверке, были: 1) утверждение о равенстве электродинамической постоянной и скорости света в вакууме и 2) соотношение Максвелла для показателя преломления $N^2 = \varepsilon \mu$.

Определением электродинамической постоянной занимались Вебер и Кольрауш (1856), Максвелл (1868), А. Г. Столетов (1881), Р. А. Колли (1885) и другие. Утверждение Максвелла было подтверждено с высокой степенью точности.

В 1872 году Л. Больцман осуществил проверку соотношения $N^2 = \varepsilon (\mu = 1)$ в области оптики. В области радиоволн такая работа проделана после открытия электромагнитных волн (§ 51). Для изучения преломления радиоволн Герц, например, воспользовался призмой из твердого изолятора (асфальта).

Проверку соотношения $N^2 = \varepsilon$ надо производить для волн возможно меньших частот, так как ε определяется для статических и медленно меняющихся полей. На это положение, предвидя значение дисперсии, указывал Максвелл. Для определения ε Н. И. Шиллер (1874) применил метод электрических колебаний конденсатора, а Лехер и П. Друде разработали способ определения ε при помощи изучения скорости распространения волн вдоль проводов.

В конце XIX в. особое значение приобрели работы, имеющие целью устранить разрыв между границами известных интервалов электромагнитных волн.

В 1895 году П. Н. Лебедев получил электромагнитные волны с длиной волны в 6 м.м. П. Н. Лебедев показал, что в двусных кристаллах серы эти волны испытывают двойное лучепреломление. Разрыв между радио- и инфракрасными волнами был заполнен в 1922 году А. А. Глаголовой-Аркадьевой, которая с помощью массового излучателя получила радиоволны длиной от $\lambda = 82 \mu$ до десятков миллиметров. В 1895 году Рентген открыл названное его именем излучение. По теории, высказанной в 1896 году Стоксом и развитой Вихертом (1896) и Д. Д. Томсоном (1897), излучение Рентгена является электромагнитным и возникает при торможении быстрых электронов в анодикоде рентгеновской трубки. Таким образом, было показано, что практически могут быть получены электромагнитные волны от произвольно длинных до сколь угодно коротких (граница в области коротких волн определяется кинетическими энергиями частиц, достигаемыми при современном состоянии ускорительной техники).

Коэффициент отражения света от неметаллического зеркала при нормальном падении был найден Юнгом. Формулы для отражения поляризованного света, падающего под углом, установил Френель (1831). Теория Френеля встретилась с трудностями, характерными для упругостной волновой теории. Согласно этой теории при прохождении света через границу раздела двух сред, кроме поперечных отраженной и преломленной волн, должны появляться продольные волны. Френель получил формулы для коэффициента отражения поперечных волн, отбросив те граничные условия, которые приводят к появлению продольных волн. Таким образом, вывод формул (108,17) Френелем не может считаться корректным. То же относится и к теории Франца Неймана (1832).

Строгое обоснование формул Френеля дано Г. А. Лоренцом в его докторской диссертации (1875). Лоренц вывел граничные условия на поверхности раздела двух сред и использовал их для установления коэффициента отражения. После того как Г. Герц и О. Хевисайд привели уравнение Максвелла к современной форме, вывод граничных условий очень упростился (§ 74).

Подробное исследование полного отражения было выполнено в 1908 году А. А. Эйхенвальдом.

Основы оптики металлов были даны Максвеллом и развиты П. Друде, В. Фогтом и другими. Результаты теории экспериментально подтверждены работами П. Друде (1890), Гагена и Рубенса (1903). Проблема распространения волн вдоль проводов возникла в телеграфии в связи с прокладкой длинных линий (например, трансатлантического кабеля в 1857—1858 гг.). Телеграфное уравнение (название предложено А. Пуанкаре) было выведено в 1855 году В. Томсоном и в более общем виде Г. Кирхгофом в 1857 году. О. Хевисайд для расчета устанавливающихся процессов в длинных линиях разработал специальный математический метод — так называемое операционное исчисление (1892). Значительно раньше (1862) операторный метод разрабатывался русским математиком М. Ващенко-Захарченко. Однако в то время этот метод не мог получить применения. Сейчас операционный метод широко применяется для решения задач о переходных процессах.

Естественная активность тел была открыта Араго в 1811 году. Связь оптической активности с геометрическим энантиоморфизмом кристаллов обнаружил в 1821 году Гершель. Л. Пастер (1868) выдвинул мысль, что активность возникает вследствие асимметрии строения молекул. В 1874 году Вант-Гофф и Ле-Бель независимо друг от друга ввели представление о стереоизомерах и связали оптическую активность органических соединений с молекулами, не обладающими зеркальной симметрией.

Теория естественного вращения плоскости поляризации с точки зрения волновой теории света была развита О. Френелем (1825). Изложенная в § 118 феноменологическая теория переносит в область электродинамики представления Френеля. Она была развита П. Друде (1892) и В. Фогтом (1899).

Вращение плоскости поляризации в изотропном веществе, находящемся в магнитном поле, было открыто Фарадеем в 1848 году. Открытие влияния электрического и магнитного полей на световые явления подготовило почву для электромагнитной теории света Максвелла.

ГЛАВА VIII

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВА

§ 117. Вводные замечания о строении атома

В главе V все заряды, входящие в состав вещества, были разделены на свободные и связанные. Влияние вещества на поле проявляется в возникновении тока проводимости и электрической и магнитной поляризаций

$$\vec{j} = \sum_a \overrightarrow{e_a n_a v_a}, \quad \vec{P} = \sum_a \overrightarrow{e_a n_a r_a}, \quad \vec{I} = \sum_a \frac{\overrightarrow{e_a n_a}}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a]. \quad (117.01)$$

Для вычисления выражений (117.01) необходимо знать распределение и движение заряженных частиц в веществе. При современном состоянии физика пользуется методом моделей. В основе всех моделей лежит представление о свойствах микрочастиц вещества и вытекающая из этих свойств структура атома.

Будем рассматривать ядро атома химического элемента как частицу, обладающую некоторой массой M , электрическим зарядом Ze_0 (Z — число Менделеева, $e_0 = 4,8 \cdot 10^{-10}$ CGS), собственным моментом количества движения (спином) $\vec{s}_\text{я}$ и собственным магнитным моментом $\vec{m}_\text{я}$. Электрон характеризуется массой покоя $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г (иногда мы будем обозначать ее μ), зарядом $e = -e_0$, собственным моментом количества движения (спином) \vec{s} и собственным магнитным моментом \vec{m}_e .

Атом элемента с числом Менделеева Z состоит из ядра и вращающихся вокруг него Z электронов. Электроны движутся в атоме стационарно (§ 63), и пространственное распределение плотности заряда и тока не меняется с течением времени. Энергия ϵ , которой обладает электрон, может принимать лишь дискретный ряд значений $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_n < \dots \leq 0$. Для атома водорода или водородоподобного иона уровни энергии выражаются формулой

$$\epsilon_n = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (117.02)$$

где n — главное квантовое число (номер уровня). Каждое стационарное состояние электрона характеризуется также величиной полного орбитального момента количества движения L и его проекции на произвольное направление L_z

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1), L_z = \hbar l_z. \quad (117.03)$$

Здесь \hbar — квантовая постоянная (63.02), l — орбитальное квантовое число ($l = 0, 1, 2, \dots (n-1)$, n — главное квантовое число), l_z — осевое квантовое число ($l_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$). Таким образом, каждому n соответствует $g_n = n^2$ различных «орбит», отличающихся квантовыми числами l и l_z .

Исследование распределения электронов в атомах показало, что на каждой «орбите», характеризуемой квантовыми числами n, l, l_z , может находиться не больше двух электронов. Это положение, открытое в 1925 году В. Паули, называется принципом Паули. Так, в атоме гелия ($Z = 2$) два электрона в нормальном состоянии помещаются на орбите $n = 1, l = 0, l_z = 0$. У атома лития ($Z = 3$) два электрона расположены так же, как у He, но третий электрон занимает орбиту $n = 2, l = 0, l_z = 0$.

Два электрона гелия в нормальном состоянии отличаются значением проекции их собственного момента импульса (спина). Проекция спина на направление z равна

$$s_z = \hbar \sigma, \quad (117.04)$$

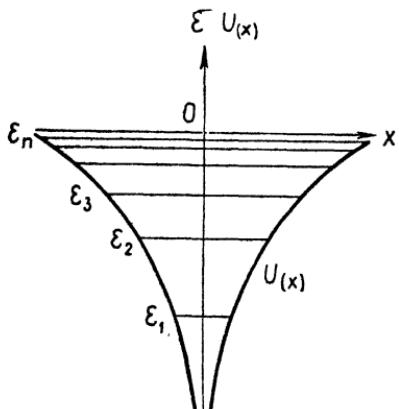


Рис. 61.

Электроны гелия характеризуются наборами квантовых чисел $n = 1, l = 0, l_z = 0, \sigma = \frac{1}{2}$ и $n = 1, l = 0, l_z = 0, \sigma = -\frac{1}{2}$. У лития добавляется электрон $n = 2, l = 0, l_z = 0, \sigma = \frac{1}{2}$. У берилля ($Z = 4$)

добавляется электрон в состоянии $n = 2, l = 0, l_z = 0, \sigma = -\frac{1}{2}$.

Анализируя таким способом элементы периодической системы, можно получить более точную формулировку принципа Паули: в квантовой системе может быть не больше одного электрона в состоянии, характеризуемом данным набором квантовых чисел n, l, l_z, σ . Наглядно энергетические уровни электронов в атоме можно характеризовать

схемой, изображенной на рисунке 61. Кривые $U(x)$ изображают потенциальную энергию электрона как функцию от координаты x (ядро находится в точке $x = 0$), горизонтальные прямые — уровни энергии.

§ 118. Квантовая статистика Ферми

Вычисление тока проводимости и электрической и магнитной поляризаций (по 117.01) требует усреднения по макроскопически малому объему и макроскопически малому промежутку времени. Такое усреднение часто сводится к усреднению по всем возможным состояниям, в которых могут находиться рассматриваемые заряженные частицы, и осуществляется статистическими методами.

Рассмотрим систему N одинаковых частиц, движущихся свободно внутри некоторого объема V . Обозначим через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_s, \dots$ значения энергий, которыми может обладать каждая из частиц. Допустим, что энергии ε_r образуют дискретный ряд. При данной энергии частица может иметь различные направления импульса и спина. Поэтому энергии ε_r будут соответствовать, вообще говоря, некоторое число g_r , различных состояний. Число g_r , различных состояний, обладающих одной и той же энергией ε_r , называется степенью вырождения (кратностью) уровня ε_r .

Обозначим число частиц, находящихся на уровне ε_r , через N_r . Числа $N_1, N_2, \dots, N_r, \dots$ суть числа распределения (§ 63). В результате столкновений между частицами устанавливается некоторое равновесное стационарное распределение. Пусть сталкиваются частицы в состояниях r и s . В результате столкновения частицы переходят в состояния r' и s' . Число таких столкновений пропорционально произведению чисел N_r и N_s сталкивающихся частиц. Если частицы подчиняются принципу Паули (§ 117), то переход в состояния r' и s' возможен только в том случае, если в этих состояниях есть свободные места. Пусть в состояниях r' и s' имеется $N_{r'}$ и $N_{s'}$ частиц. Число свободных мест в этих состояниях равно соответственно $(g_{r'} - N_{r'})$ и $(g_{s'} - N_{s'})$. Поэтому число переходов в единицу времени $r, s \rightarrow r', s'$ можно написать в форме

$$Z_{rs \rightarrow r's'} = A_{r's'}^{rs} N_r N_s (g_{r'} - N_{r'}) (g_{s'} - N_{s'}),$$

где $A_{r's'}^{rs}$ — вероятность перехода.

Число обратных переходов $r', s' \rightarrow r, s$ равно

$$Z_{r's' \rightarrow rs} = A_{rs}^{r's'} N_r N_{s'} (g_r - N_r) (g_s - N_s).$$

В квантовой теории доказывается, что вероятности прямых и обратных переходов одинаковы, то есть

$$A_{r's'}^{rs} = A_{rs}^{r's'}.$$

При равновесии числа прямых и обратных переходов равны

$$Z_{rs \rightarrow r's'} = Z_{r's' \rightarrow rs}.$$

Отсюда в связи с равенством $A_{rs}^{r's'} = A_{r's'}^{rs}$ получим

$$\frac{g_r - N_r}{N_r} \cdot \frac{g_s - N_s}{N_s} = \frac{g_{r'} - N_{r'}}{N_{r'}} \cdot \frac{g_{s'} - N_{s'}}{N_{s'}},$$

или

$$\ln\left(\frac{g_r}{N_r} - 1\right) + \ln\left(\frac{g_s}{N_s} - 1\right) = \ln\left(\frac{g_{r'}}{N_{r'}} - 1\right) + \ln\left(\frac{g_{s'}}{N_{s'}} - 1\right). \quad (118.01)$$

Равенство (118.01) показывает, что величина $\ln\left(\frac{g_r}{N_r} - 1\right)$ есть аддитивный интеграл движения: сумма таких величин сохраняется при столкновении частиц. Но аддитивные механические интегралы движения — это энергия, импульс и момент импульса. Поэтому $\ln\left(\frac{g_r}{N_r} - 1\right)$ может быть линейной функцией только от этих интегралов движения. Самым общим интегралом движения является энергия. При столкновении $\epsilon_r + \epsilon_s = \epsilon_{r'} + \epsilon_{s'}$, поэтому следует положить $\ln\left(\frac{g_r}{N_r} - 1\right) = \alpha + \beta \epsilon_r$, где α и β — не зависящие от r постоянные. Отсюда

$$N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta \epsilon_r} + 1}. \quad (118.02)$$

Формула (118.02) выражает равновесное квантовое распределение Ферми и характеризует распределение по состояниям частиц, подчиняющихся принципу Паули.

Постоянные α и β могут быть определены, если задано полное число частиц N и полная энергия газа \mathcal{E}

$$\sum_r N_r = \sum_r \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta \epsilon_r} + 1} = N, \quad (118.03)$$

$$\sum_r N_r \epsilon_r = \sum_r \frac{g_r \epsilon_r}{e^{\alpha + \beta \epsilon_r} + 1} = \mathcal{E} \quad (118.04)$$

(суммирование производится по всем возможным состояниям r). Если $e^\alpha \gg 1$, то единицей в знаменателе (118.02) можно пренебречь и (118.02) превращается в формулу Максвелла — Больцмана

$$N_r = g_r e^{-\alpha - \beta \epsilon_r}.$$

Распределение Максвелла — Больцмана для дискретных состояний пишут обычно в форме

$$N_r = g_r e^{\frac{\zeta - \epsilon_r}{kT}}, \quad (118.05)$$

где T — абсолютная температура, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана и ζ — химический потенциал (изобарно-изотермический потенциал Гиббса, отнесенный к одной частице). Сравнивая

эти два выражения, получаем $\beta = \frac{1}{kT}$, $\alpha = -\frac{\zeta}{kT}$. Распределение Ферми (118.02) принимает вид

$$N_r = \frac{g_r}{e^{\frac{\epsilon_r - \zeta}{kT}} + 1} = g_r f(\epsilon_r). \quad (118.06)$$

Потенциал ζ называют энергией (уровнем) Ферми.

Рассмотрим распределение Ферми при абсолютном нуле температуры. Так как в каждом невырожденном состоянии (§ 117) может находиться только одна частица, то N частиц займут N состояний с наименьшей энергией. Более высокие энергетические состояния будут пустыми. Действительно, при $T \rightarrow 0$ из (118.06) находим, что число частиц, приходящихся на одно невырожденное состояние, равно

$$f(\epsilon) = \frac{N_r}{g_r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \epsilon_r < \zeta_0, \\ 0, & \text{если } \epsilon_r > \zeta_0. \end{cases} \quad (118.07)$$

Здесь ζ_0 — значение потенциала (уровня Ферми) при $T=0$. Оно может быть определено из условия

$$\sum_r N_r = \sum_{(\epsilon_r < \zeta)} g_r = N. \quad (118.08)$$

График распределения Ферми при $T=0$ дан на рисунке 62 (сплошная линия). При повышении температуры некоторые частицы переходят в состояния с большей энергией. Вертикальный спад кривой заменяется плавным (пунктир). Область плавного перехода (размытость границы) порядка kT .

Чтобы определить ζ_0 , надо знать выражение для числа g_r состояний с энергией ϵ_r . В классической статистике для свободно движущихся в объеме V частиц интервал состояний определяется интервалом составляющих импульса

$$d\gamma = V dp_x dp_y dp_z.$$

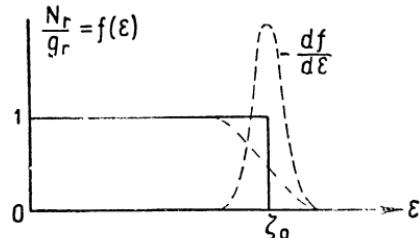


Рис. 62.

В квантовой теории импульс не может меняться произвольно. Если частица локализована в некотором интервале Δx координаты x , то соответствующий частице пакет волн де-Броиля будет слагаться из волн, для которых согласно (43.10) волновые числа лежат в интервале $\Delta k_x \geq \frac{2\pi}{\Delta x}$. Тогда в силу (63.01) импульс будет лежать в интервале $\Delta p_x = \hbar \Delta k_x \geq \frac{2\pi\hbar}{\Delta x}$. Это значит, что наименьший интервал состояний определяется из условия $\Delta x \Delta p_x = 2\pi\hbar$, или из условия

$$\Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \Delta z \Delta p_z = (2\pi\hbar)^3.$$

Поэтому в фазовом пространстве одной частицы на одно квантовое невырожденное состояние приходится объем $(2\pi\hbar)^3$. Так как частица со спином s^1 при импульсе p может находиться в одном из $G = 2s + 1$ состояний, отличающихся проекцией спина на данное направление, то для полного числа состояний свободной частицы в интервале $d\gamma$ фазового пространства получаем

$$dg = G \frac{d\gamma}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{GV dp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (118.09)$$

Заметим, что для электронов $s = \frac{1}{2}$ и $G = 2$.

В случае сферической симметрии элемент объема пространства импульсов можно взять в виде объема сферического слоя $4\pi p^2 dp$. Кроме того, импульс можно выразить через кинетическую энергию: $p = \sqrt{2m\epsilon}$. Тогда

$$dg = \frac{4\pi GV}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp = \rho d\epsilon, \quad \rho = C\epsilon^{1/2}, \quad C = \frac{G}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}. \quad (118.10)$$

Вычислим химический потенциал ζ в двух предельных случаях — при абсолютном нуле и при высокой температуре. Согласно (118.08) и (118.10) максимальный импульс p_0 частиц (например, электронов) газа при $T = 0$ определится из условия

$$N = \sum_r g_r = \int_0^{p_0} \frac{4\pi GV}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp = \frac{GVp_0^3}{6\pi^2\hbar^3}, \quad (118.11)$$

где N — полное число частиц в объеме V . Поэтому p_0 и максимальная кинетическая энергия $\zeta = \epsilon_{\max} = \frac{p_0^2}{2m}$ при $T = 0$ равны

$$p_0 = \hbar \left(\frac{6\pi^2 n}{G}\right)^{1/3}, \quad \zeta_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{G}\right)^{3/2}, \quad (118.12)$$

где $n = \frac{N}{V}$ — плотность частиц газа.

При достаточно высокой температуре распределение Ферми переходит в распределение Максвелла — Больцмана (118.05). В силу условия нормировки (118.03) и (118.10) имеем

$$\begin{aligned} N = \sum_r g_r e^{\frac{\zeta - \epsilon_r}{kT}} &= \frac{GV}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\zeta}{kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} = \\ &= GV \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\zeta}{kT}}, \end{aligned} \quad (118.13)$$

¹ Здесь s — спиновое квантовое число, принимающее целые или полуцелые значения. Спин равен $\hbar\sqrt{s(s+1)}$.

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Отсюда

$$\zeta = -kT \ln \left\{ \frac{G}{n} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right\} \quad (kT \gg \zeta_0). \quad (118.14)$$

Распределение Максвелла — Больцмана (118.05) имеет место при условии

$$e^\alpha = e^{-\frac{\zeta}{kT}} \gg 1.$$

Если

$$e^{-\frac{\zeta}{kT}} = \frac{G}{n} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \leqslant 1, \quad (118.15)$$

то справедливо распределение Ферми. В этом случае говорят о вырожденном газе. Из (118.15) видно, что газ будет вырожденным при низких температурах и высоких плотностях.

Можно ввести температуру вырождения или температуру Ферми. Определим ее условием

$$kT_F = \zeta_0. \quad (118.16)$$

Если $T \leq T_F$, то газ будет вырожденным; если $T \gg T_F$, то газ невырожденный. Согласно (118.12) для электронного газа имеем

$$T_F = 4.2 \cdot 10^{-11} n^{2/3} \quad (G = 2).$$

В области вырождения отклонение функции распределения от прямоугольной формы (рис. 62) мало и ζ остается близким к ζ_0 . Тогда можно получить разложение по степеням kT . Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \frac{d\varphi}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad (118.17)$$

где $\varphi(\varepsilon)$ — некоторая функция, обращающаяся в нуль при $\varepsilon = 0$, а $f(\varepsilon)$ — функция распределения Ферми (118.06). Проинтегрируем (118.17) по частям. Так как $f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$ исчезает на обоих пределах ($\varphi(0) = 0$ и $f(\infty) = 0$), получим

$$I = - \int_0^{\infty} \varphi \frac{df}{d\varepsilon} d\varepsilon.$$

Заметим, что $-\frac{df}{d\varepsilon}$ имеет острый максимум в области $\varepsilon = \zeta$ (рис. 62, пунктирная кривая). При $T \rightarrow 0$ $-\frac{df}{d\varepsilon}$ можно рассматривать как δ -функцию.

Разложим φ в ряд по степеням $\varepsilon - \zeta$.

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(\zeta) + (\varepsilon - \zeta) \varphi'(\zeta) + \frac{1}{2!} (\varepsilon - \zeta)^2 \varphi''(\zeta) + \dots$$

Тогда

$$I = L_0 \varphi(\zeta) + \sum_{v=1}^{\infty} L_v \varphi^{(v)}(\zeta), \quad L_v = -\frac{1}{v!} \int_0^{\infty} (\varepsilon - \zeta)^v \frac{df}{d\varepsilon} d\varepsilon. \quad (118.18)$$

При низких температурах нижний предел в L_v можно заменить через $-\infty$. Тогда $L_0 = -1$ и все L_v с нечетным v исчезают, так как $\frac{df}{d\varepsilon}$ есть четная функция от $\varepsilon - \zeta$. Вводя $x = \frac{\varepsilon - \zeta}{kT}$, находим

$$L_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon - \zeta)^2 \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \zeta}{kT}} + 1} d\varepsilon = \frac{(kT)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^x dx}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{6} (kT)^2.$$

Окончательно,

$$I = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \frac{d\varphi}{d\varepsilon} d\varepsilon = \varphi(\zeta) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \varphi''(\zeta) + \dots \quad (118.19)$$

Для вычисления ζ рассмотрим условие нормировки (118.04). Согласно (118.10) можно положить

$$\varphi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} dg(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \rho(\varepsilon) = C\varepsilon^{1/2}. \quad (118.20)$$

Тогда в силу (118.19)

$$N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\zeta} \rho(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{d\rho}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\zeta}. \quad (118.21)$$

Вычитая отсюда $N = \int_0^{\zeta_0} \rho(\varepsilon) d\varepsilon$ (значение при $T = 0$), получим

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \rho(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{d\rho}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\zeta} = 0, \quad (118.22)$$

или приближенно

$$(\zeta - \zeta_0) \rho(\zeta_0) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{d\rho}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\zeta} = 0. \quad (118.23)$$

Пользуясь выражением для ρ из (118.20), находим

$$\zeta = \zeta_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\zeta_0} \right)^2 \right] \quad (kT \ll \zeta_0), \quad (118.24)$$

где ζ_0 определяется формулой (118.12).

Задача

Определить среднюю энергию электронного газа при $T \ll T_F$ с точностью до T^2 включительно.

Решение. Полная энергия равна

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) \rho(\epsilon) d\epsilon.$$

Введем $\varphi(\epsilon) = \int_0^\epsilon \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon$. Тогда по формулам (118.19) и (118.10) получим

$$\mathcal{E} = \int_0^\zeta \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{d}{d\zeta} \rho(\zeta) = \int_0^\zeta \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon + \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \rho(\zeta).$$

В последнем члене $\rho(\zeta)$ можно заменить через $\rho(\zeta_0)$, так как нас интересует разложение \mathcal{E} лишь до T^2 включительно. При $T=0$

$$\mathcal{E}_0 = \int_0^{\zeta_0} \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon.$$

Поэтому согласно (118.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 &= \int_{\zeta_0}^\zeta \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon + \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \rho(\zeta) \simeq \\ &\simeq \zeta_0 \rho(\zeta_0) (\zeta - \zeta_0) + \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \rho(\zeta_0) = \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \rho(\zeta_0). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (118.10), (118.11) и (118.12) имеем

$$\mathcal{E}_0 = \frac{3}{5} N \zeta_0, \quad \rho(\zeta_0) = \frac{3N}{2\zeta_0}.$$

Энергия равна

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5} N \zeta_0 + \frac{\pi^2}{4} N \zeta_0 \left(\frac{kT}{\zeta_0} \right)^2.$$

Средняя энергия на одну частицу равна

$$\bar{\epsilon} = \frac{\mathcal{E}}{N} = \frac{3}{5} \zeta_0 + \frac{\pi^2}{4} \frac{k^2 T^2}{\zeta_0}.$$

§ 119. Общие соображения об электропроводности тел

Предположим, что в теле имеется только один сорт свободных зарядов (носителей тока). Если $n(\vec{p})$ — число носителей тока в единице объема с импульсом \vec{p} , e и m — соответственно заряд и масса носителя, то плотность тока равна

$$\vec{j} = \sum_{\vec{p}} e n(\vec{p}) \vec{v}, \quad (119.01)$$

где $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ — скорость носителя. При отсутствии внешнего поля свободные заряды движутся хаотически и $\vec{j} = 0$. Если в теле создать электрическое поле напряженности \vec{E} , то заряд будет двигаться с ускорением $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E}$. Это привело бы к неограниченному возрастанию тока, если бы не было столкновений зарядов с частицами тела. В результате этих столкновений энергия свободных зарядов отдается телу и происходит нагревание проводника. Потерю энергии можно охарактеризовать суммарным образом, введя некоторую силу трения \vec{F}' , действующую на свободный заряд и пропорциональную избыточной скорости $\vec{v} - \vec{v}_0$ (\vec{v}_0 — скорость «теплового» движения заряда).

$$\vec{F}' = -f(\vec{v} - \vec{v}_0),$$

где f — коэффициент трения, определяемый взаимодействием свободного носителя и кристаллической решетки тела. Поэтому изменение скорости будет определяться уравнением

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{f}{m} (\vec{v} - \vec{v}_0). \quad (119.02)$$

При отсутствии поля решение этого уравнения имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - (\vec{V} - \vec{v}_0) e^{-\frac{f}{m} t} \quad (119.03)$$

(\vec{V} — начальная скорость). Из (119.03) видно, что с течением времени скорость \vec{v} стремится к тепловой скорости \vec{v}_0 . Время релаксации для этого процесса равно

$$\tau = \frac{f}{m}. \quad (119.04)$$

При наличии внешнего поля \vec{E} устанавливается стационарное состояние $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \right)$. Откуда

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{e}{f} \vec{E} = \vec{v}_0 + \frac{e\tau}{m} \vec{E}. \quad (119.05)$$

Таким образом, мгновенная скорость носителя складывается из молекулярной (тепловой) скорости \vec{v}_0 и добавочной, упорядоченной скорости \vec{v}' — скорости дрейфа в электрическом поле

$$\vec{v}' = \frac{e\tau}{m} \vec{E}. \quad (119.06)$$

Величина

$$b(p) = \frac{e\tau(p)}{m} \vec{p} \quad (119.07)$$

называется подвижностью носителя (с данным импульсом p). Подвижность численно равна скорости дрейфа в поле с напряженностью $E = 1$. В слабых полях $v' \ll v_0$. Поэтому состояние движения носителя характеризуется его тепловым импульсом

$$\vec{p} = mv_0.$$

Плотность тока согласно (119.01) и (119.05) равна

$$\vec{j} = \sum_p en(p) \vec{v}_0 + \sum_p \frac{e^2}{m} n(p) \tau(p) \vec{E} = \sum_p \frac{e^2}{m} n(p) \tau(p) \vec{E}.$$

(Первый член исчезает в силу хаотичности теплового движения.) Введем среднюю подвижность носителя

$$b = \frac{e}{m} \bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_p \frac{e}{m} n(p) \tau(p), \quad (119.08)$$

где $n = \sum_p n(p)$ — число носителей в единице объема. Теперь

$$\vec{j} = enb \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (119.09)$$

то есть электропроводность равна

$$\gamma = enb = \frac{e^2}{m} \bar{\tau} n. \quad (119.10)$$

Если имеется несколько сортов носителей ($a = 1, 2, 3, \dots$), то

$$\gamma = \sum_a e_a n_a b_a = \sum_a \frac{e_a^2}{m} n_a \bar{\tau}_a, \quad (119.11)$$

где e_a и b_a — заряд и подвижность носителей сорта a , n_a — число носителей в единице объема. Таким образом, для определения электропроводности данного вещества надо знать природу носителей электрического тока, число носителей в единице объема и подвижность носителей.

В заключение отметим, что (119.10) позволяет оценить среднюю скорость дрейфа, если известна концентрация носителей. Для серебра

$$n \approx 6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}, \text{ а } \gamma = 6 \cdot 10^{17} \text{ СГС.}$$

Поэтому

$$b = \frac{r}{en} \approx \frac{6 \cdot 10^{17}}{5 \cdot 10^{-10} \cdot 6 \cdot 10^{22}} = 2 \cdot 10^4 \text{ СГС.}$$

При напряженности $E = 1 \text{ СГСЕ}$ $v' = b \approx 2 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

Эта величина на несколько порядков меньше средней тепловой скорости электронов.

§ 120. Зонная теория твердых тел

В изолированном атоме уровни энергии электронов дискретны и нижние уровни заполнены электронами (§ 117). Пусть N атомов элемента сближаются, образуя кристаллическую решетку. Тогда потенциальные поля отдельных атомов, накладываясь друг на друга, образуют периодическое поле кристаллической решетки. Ход потенциальной энергии электрона вдоль некоторого направления, проведенного через

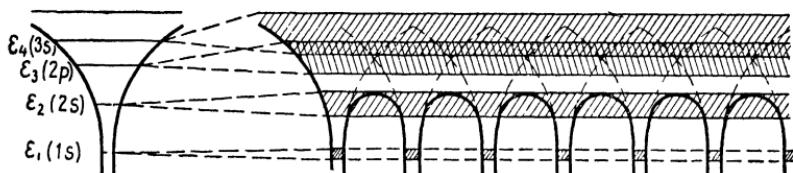


Рис. 63.

ядра атомов, изображен на рисунке 63 сплошной кривой (пунктир изображает потенциальную энергию в полях отдельных атомов).

Пусть на одном из уровней (например, ε_n) каждого атома до объединения атомов в решетку находилось по одному электрону. После объединения N атомов в решетку (взаимодействия атомов друг с другом не учитываем) получим N электронов, находящихся на N -кратном вырожденном уровне. Если принять во внимание взаимодействие атомов друг с другом, то окажется, что N -кратно вырожденный уровень энергии распадается на N близких уровней, образующих более или менее широкую зону. Внутри этой зоны уровни расположены так часто, что можно говорить о практически непрерывном спектре значений энергии.

Каждый невырожденный уровень энергии атома при объединении N атомов в решетку образует зону из N близких уровней, а g -кратно вырожденный уровень — зону из Ng близких уровней (g наложивающихся друг на друга простых зон). Число атомов в 1 см^3 твердого тела — порядка 10^{22} , следовательно, число уровней в невырожденной зоне также равно $N \sim 10^{22}$ (на 1 см^3). Так как уровни исходных атомов дискретны и разделены запрещенными интервалами энергии, то в кристалле между допустимыми зонами энергии остаются зоны, которым соответствуют запрещенные значения энергии. Чем выше

исходный уровень, тем более широкая зона получается из него при объединении атомов в кристаллическую решетку. С другой стороны, расстояния между соседними уровнями энергии атома уменьшаются с увеличением их энергии. Поэтому в кристалле нижние зоны разделены запрещенными областями энергии, а верхние зоны либо соприкасаются, либо перекрываются. На рисунке 63 допустимые зоны изображены штрихованными полосами.

Уровни энергии в различных зонах зависят от структуры кристаллической решетки и выражаются формулами, выводимыми методами квантовой механики. Для простой кубической решетки энергия валентного электрона, входящая в зону, возникшую из уровня ε_n изолированного атома и вычисленная в предположении, что взаимодействуют электроны только соседних атомов, равна

$$\varepsilon_{n\vec{x}} = \varepsilon_n - \alpha - 2\beta(\cos \kappa_1 + \cos \kappa_2 + \cos \kappa_3). \quad (120.01)$$

Здесь α и β — постоянные, имеющие размерность энергии, а составляющие κ_i вектора \vec{x} равны

$$\kappa_i = \frac{2\pi}{N_1} n_i. \quad (120.02)$$

При выводе (120. 01) в кристаллической решетке выделяется большой куб со стороной L , в ребре которого укладывается $N_1 = \frac{L}{a}$ (a — постоянная решетки) атомов. Числа n_i суть целые числа в интервале от $-\frac{N_1}{2}$ до $+\frac{N_1}{2}$.

При изменении чисел n_i энергия $\varepsilon_{n\vec{x}}$ пробегает дискретный ряд значений, образующих зону n . Число всех уровней, возникших из невырожденного атомного уровня ε_n при объединении N атомов в решетку, равно $N_1^3 = N$, то есть числу атомов, объединенных в куб со стороной L .

При малых n_i косинусы в (120. 01) разложим в ряд. Ограничиваюсь первыми членами разложения, получим энергию электрона вблизи нижнего края зоны ($n_i \approx 0$)

$$\varepsilon_{n\vec{x}} = \varepsilon_n - \alpha - 6\beta + \beta x^2, \quad (x^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2). \quad (120.03)$$

Вблизи верхней границы зоны ($n_i = \pm \frac{N_1}{2}$) можно положить $\kappa_i = \pm \pi \mp \kappa'_i$. Тогда

$$\varepsilon_{n\vec{x}} = \varepsilon_n - \alpha + 6\beta - \beta x'^2 \quad (120.04)$$

Выясним смысл этих выражений. В модели металла, предложенной Зоммерфельдом, электроны рассматриваются как свободно движущиеся. Потенциальная энергия электронов внутри металла считается постоянной, равной $-W_a$ (W_a порядка 10 эв), а на границе равна

нулю. Таким образом, в этой модели пренебрегается периодичностью электрического поля кристаллической решетки.

Так как электроны движутся в конечном объеме L^3 , их импульсы квантуются и равны

$$p_i = \frac{\hbar}{a} \mathbf{x}_i, \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{a} \vec{\mathbf{x}}, \quad (120.05)$$

где \mathbf{x}_i — числа, определяемые формулой (120.02). Поэтому энергия электрона в модели Зоммерфельда равна

$$\varepsilon_{n\vec{\mathbf{x}}} = \frac{p^2}{2m} - W_a = \frac{\hbar^2 \mathbf{x}^2}{2ma^2} - W_a. \quad (120.06)$$

Выражения (120. 03) и (120. 04) перепишем в форме

$$\varepsilon_{n\vec{\mathbf{x}}} = \varepsilon_n - \alpha \pm 6\beta \pm \frac{\hbar^2}{2m^* a^2} \vec{\mathbf{x}}^2. \quad (120.07)$$

Из сравнения (120. 06) и (120. 07) видно, что вблизи границ зоны электрон можно рассматривать как свободный с эффективной массой

$$m^* = \pm \frac{\hbar^2}{2a^2 \beta} = \pm \frac{6\hbar^2}{a^2 \Delta \varepsilon}, \quad (120.08)$$

положительной вблизи нижней границы зоны и отрицательной вблизи верхней. Здесь $\Delta \varepsilon = \varepsilon_{n\vec{\mathbf{x}}=0} - \varepsilon_{n\vec{\mathbf{x}}=\pm\pi} = 12\beta$ есть ширина зоны. Поэтому эффективная масса (при учете взаимодействия электрона с решеткой) обратно пропорциональна ширине зоны. В частности, m^* равна массе свободного электрона $0,9 \cdot 10^{-27}$ г при $a = 3 \cdot 10^{-8}$ см и $\Delta \varepsilon = 5$ эВ.

Внутри зоны свободных электронов каждому состоянию с импульсом $\vec{p} = \frac{\hbar}{a} \vec{\mathbf{x}}$ соответствует состояние с противоположным направлением импульса $-\vec{p}$. Аналогично и для зоны (120. 01), однако (120. 05) в этом случае уже не является точным импульсом электрона и называется квазиимпульсом.

Заметим, что зоны, возникающие из глубоких уровней электронов в атомах, получаются узкими, так как коэффициент β мал. Тогда эффективные массы m^* велики и обычные электрические поля, налагаемые на кристалл, не приводят к заметному движению электронов в решетке. Поэтому внутренние электроны динамически связаны в узлах решетки (это представление очень близко к классическому представлению о связанных электронах). Для валентных электронов $m^* \sim m$ и внешнее поле ускоряет эти электроны подобно свободным электронам в вакууме.

§ 121. Проводники и изоляторы. Полупроводники

Будем заполнять электронами уровни энергии в кристалле в порядке возрастания уровней. В каждом состоянии, определенном значением квазимпульса \vec{p}_x , могут находиться два электрона с противоположными спинами ($G = 2$). При низких температурах электроны заполняют наиболее глубокие уровни энергии кристалла, высокие уровни энергии останутся свободными.

Первую зону заполняют электроны из K -оболочки атома ($n = 1$, $l = 0$, так называемый $1s$ -уровень). Если K -оболочка атома содержала два электрона, то все уровни первой зоны будут заполнены электронами. Действительно, K -уровень расщепляется на N уровней зоны и может вместить $2N$ электронов. Но в N атомах имеется ровно $2N$ K -электронов. Поэтому все $2N$ состояний K -зоны будут заполнены. То же относится и к другим заполненным оболочкам атома. Наоборот, если уровень атома нецеликом занятен электронами, то соответствующая ему зона будет заполнена неполностью. На рисунке 64 изображено распределение электронов по зонам

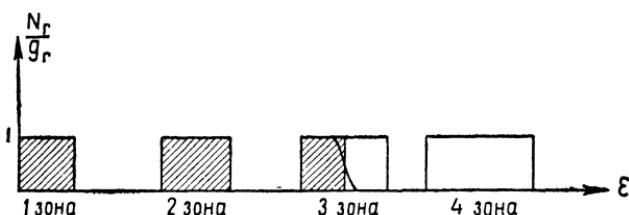


Рис. 64.

при $T = 0$. На оси абсцисс отложена энергия, на оси ординат — число электронов $\frac{N_r}{g_r}$ на один невырожденный уровень зоны. Допустимые значения $\frac{N_r}{g_r}$ ограничены прямоугольниками; энергетические зоны, занятые электронами, заштрихованы.

Электроны заполненной зоны не могут быть носителями тока даже при наличии внешнего электрического поля. Действительно, для появления тока, например по оси x , необходима асимметрия распределения — число электронов со скоростями $v_x > 0$ должно быть больше числа электронов со скоростями $v_x < 0$, то есть необходимо, чтобы часть электронов с квазимпульсами $p_x < 0$ перешла в область состояний с квазимпульсами $p_x > 0$. Однако по принципу Паули это невозможно, так как все состояния зоны с $p_x > 0$ заполнены.

Электроны верхней, частично заполненной, зоны могут ускоряться полем и быть носителями электрического тока. Электроны этой зоны возникли из валентных электронов изолированных атомов (или внутренних незаполненных оболочек, например, d -электроны ферромагнитных металлов).

Отсюда следует: а) если верхняя зона частично заполнена электронами, то кристалл обладает металлической проводимостью; б) если электроны целиком заполняют верхнюю зону, а следующая свободная зона отделена от нее конечным запрещенным энергетическим интервалом, то кристалл будет изолятором; в) если заполненная зона перекрывается с пустой, то кристалл обладает металлической проводимостью (рис. 65).

Для щелочных металлов половина мест в зоне, соответствующей уровню ns ($n=2$ для Li, $n=3$ для Na и т. д.), остается пустой.

Поэтому щелочные металлы — типичные проводники.

Типичными изоляторами должны быть ионные решетки типа NaCl. Кубическая решетка NaCl построена из двух простых решеток Na и Cl. В изолированном атоме Na верхний (валентный) уровень $3s$ содержит один электрон, а в атоме Cl верхний валентный уровень $3p$ содержит 5 электронов. До полного заполнения оболочки не хватает одного электрона. Будем считать, что энергия системы, состоящей из раздельных атомов Cl и Na, равна нулю. Уровень системы $\text{Na} + \text{Cl}$ находится на 5,2 эВ ниже нуля, а уровень $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ — на 3,8 эВ ниже нуля. Поэтому при разделении атомов устойчивым состоянием является состояние нейтральных атомов, а не ионов. Однако при сближении атомов взаимное расположение уровней $3s$ Na и $3p$ Cl изменяется на обратное. В ионной решетке каждый узел Cl^- окружен шестью ионами Na^+ , а каждый узел Na^+ — шестью ионами Cl^- . Вследствие этого энергия электронов в Cl^- понижается, а энергия электронов в Na повышается и в результате в реальном кристалле NaCl $3s$ -зона Na оказывается выше $3p$ -зоны Cl. Валентные $3s$ -электроны Na переходят в $3p$ -зону Cl, заполняя в ней все свободные уровни (рис. 66). Таким образом, $3s$ -зона Na в NaCl пуста, $3p$ -зона Cl целиком заполнена. Все $5N$ валентных электронов N атомов Cl и N валентных электронов Na движутся в кристалле NaCl по узлам простой решетки Cl. Следовательно, решетка NaCl состоит из ионов Na^+ и Cl^- . Ширина запрещенной области энергии равна

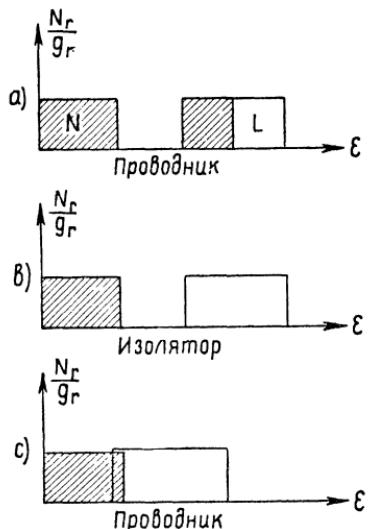


Рис. 65.

$3s$ Cl изменяется на обратное. В ионной решетке каждый узел Cl^- окружен шестью ионами Na^+ , а каждый узел Na^+ — шестью ионами Cl^- . Вследствие этого энергия электронов в Cl^- понижается, а энергия электронов в Na повышается и в результате в реальном кристалле NaCl $3s$ -зона Na оказывается выше $3p$ -зоны Cl. Валентные $3s$ -электроны Na переходят в $3p$ -зону Cl, заполняя в ней все свободные уровни (рис. 66). Таким образом, $3s$ -зона Na в NaCl пуста, $3p$ -зона Cl целиком заполнена. Все $5N$ валентных электронов N атомов Cl и N валентных электронов Na движутся в кристалле NaCl по узлам простой решетки Cl. Следовательно, решетка NaCl состоит из ионов Na^+ и Cl^- . Ширина запрещенной области энергии равна

$$W_L - W_N = \Delta W. \quad (121.02)$$

Здесь N и L обозначают соответственно нормальную (полностью заполненную) зону изолятора ($3p$ -зона для NaCl) и следующую полностью пустую зону проводимости ($3s$ -зона для NaCl), $W_N = \varepsilon_{\max}^N$

есть верхняя граница (потолок) нормальной зоны, $W_L = \mathcal{E}_{\min}^L$ — нижняя граница (дно) зоны проводимости. Ширина запрещенной зоны ΔW порядка нескольких электронвольт, поэтому NaCl является хорошим изолятором.

При известных условиях в изоляторе может появиться электрическая проводимость. Для этого надо перевести часть электронов из нормальной зоны N в зону проводимости L , то есть сделать их свободными. Осуществляется это либо нагреванием кристалла, либо освещением светом с циклической частотой $\omega \geq \omega_0 = \frac{\Delta W}{\hbar}$. В последнем случае происходит явление внутреннего фотоэффекта: электроны перебрасываются из зоны N в зону L .

Для температурного возбуждения проводимости необходимо, чтобы средняя энергия теплового движения kT была сравнима с ΔW . Это

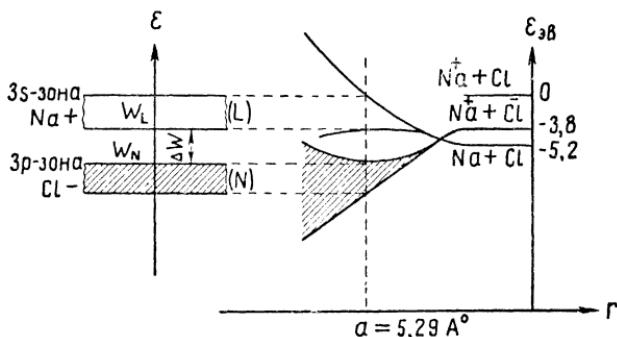


Рис. 66.

может быть выполнено лишь при высоких температурах, при которых кристаллы с $\Delta W \gg 1$ эв обычно разрушаются.

Если запрещенная зона ΔW достаточно узка, то кристалл будет изолятором при $T \ll \frac{\Delta W}{k}$. При $T \leq \frac{\Delta W}{k}$ часть электронов вследствие термического возбуждения перейдет из нормальной зоны в зону проводимости и кристалл сделается проводящим. При этом проводимость будет определяться не только электронами в зоне проводимости: вследствие ухода части электронов в нормальной зоне появится ряд незанятых уровней, поэтому внешнее электрическое поле вызовет в нормальной зоне электрический ток.

Для наглядного описания проводимости в нормальной зоне Гейзенберг предложил следующую схему: вместо перемещения электронов в почти заполненной N -зоне можно рассматривать перемещение свободных мест в этой зоне, так называемых «дырок».

Обозначим через n_x число электронов в состоянии x ($n_x \leq 1$, если под x понимать не только квазимпульс, но и квантовое число σ , характеризующее проекцию спина электрона).

Плотность электрического тока и плотность потока энергии электронов можно написать в форме

$$\vec{j} = -e_0 \sum_x n_x \vec{v}_x, \quad \vec{S} = \sum_x n_x (\epsilon_x - e_0 \varphi) \vec{v}_x. \quad (121.04)$$

Здесь — $e_0 \varphi$ — потенциальная энергия электрона во внешнем поле с потенциалом φ , а суммирование производится по всем состояниям x зоны. Для заполненной зоны $n_x = 1$, $\sum_x \vec{v}_x = 0$ и $\sum_x \epsilon_x = 0$ (так как $\epsilon_{-x} = \epsilon_{+x}$). Для почти заполненной зоны (121.04) можно переписать в форме

$$\vec{j} = -e_0 \sum_x \vec{v}_x + e_0 \sum_x (1 - n_x) \vec{v}_x = e_0 \sum_x (1 - n_x) \vec{v}_x, \quad (121.05)$$

$$\vec{S} = \sum_x (1 - n_x) (\epsilon_x - e\varphi_x) \vec{v}_x = \sum_x (1 - n_x) (\epsilon'_x + e_0 \varphi - W_N) \vec{v}_x \quad (121.06)$$

(так как для состояний с x , расположенных близко к потолку зоны, согласно (120.07) $\epsilon_x = W_N - \epsilon'_x = W_N - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \cdot x'^2$). Выражение (121.05) можно рассматривать как ток, а (121.06) — как поток энергии, обусловленный дырками (то есть свободными уровнями). Дырки ведут себя как частицы с зарядом $+e_0$, эффективной массой m^* , квазимпульсом $\vec{p}_x = \frac{\hbar \vec{x}'}{a}$, скоростью \vec{v}_x , кинетической энергией $\epsilon'_x = \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \vec{x}'^2$, потенциальной энергией $e_0 \varphi - W_N$ и плотностью $1 - n_x$.

Проводимость, обусловленную положительными дырками, называют проводимостью p -типа (p — positive). Электронная проводимость (отрицательные заряды) называется проводимостью n -типа (n — negative).

§ 122. Эффект Холла и определение концентрации и знака носителей тока

Как видно из (119.10), электропроводность не зависит от знака носителей тока. Для определения этого знака можно воспользоваться, например, эффектом Холла. Металл, через который пропускается электрический ток, поместим в магнитное поле. Средняя сила, действующая на носитель в электрическом и магнитном полях, равна

$$\vec{F}_a = e_a \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_a(p), \vec{H}] \right),$$

где a — номер сорта носителя, а $\vec{v}_a(p)$ — скорость дрейфа носителя, имеющего квазимпульс \vec{p} . Скорость дрейфа согласно § 119 равна

$$\vec{v}_a(p) = \frac{\vec{F}_a}{m_a} \tau_a(p) = \frac{e_a \tau_a(p)}{m_a} \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}_a(p)}{c}, \vec{H} \right] \right). \quad (122.01)$$

Таким образом, магнитное поле вызывает отклонение носителей тока в направлении, перпендикулярном к \vec{E} и \vec{H} .

Плотность тока, обусловленная носителями с квазимпульсом \vec{p} , равна

$$\begin{aligned}\vec{j}'(\vec{p}) &= \sum_a e_a n_a(\vec{p}) \vec{v}_a(\vec{p}) = \\ &= \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} n_a(\vec{p}) \tau_a(\vec{p}) \vec{E} + \frac{1}{c} \left[\sum_a \frac{e_a^2}{m_a} n_a(\vec{p}) \tau_a(\vec{p}) v_a(\vec{p}), \vec{H} \right].\end{aligned}$$

Чтобы исключить $\vec{v}_a(\vec{p})$, можно положить

$$\vec{v}_a(\vec{p}) = \frac{e_a}{m_a} \tau_a(\vec{p}) \vec{E}$$

(так как магнитная сила мала по сравнению с электрической). Тогда

$$\vec{j}'(\vec{p}) = \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} n_a(\vec{p}) \tau_a(\vec{p}) \vec{E} + \sum_a \frac{e_a^3}{cm_a^2} \tau_a^2(\vec{p}) [\vec{E}, \vec{H}].$$

Суммируя по всем \vec{p} и вводя средние величины

$$\bar{\tau}_a = \frac{1}{n_a} \sum_p n_a(\vec{p}) \tau_a(\vec{p}), \quad \bar{\tau}_a^2 = \frac{1}{n_a} \sum_p n_a(\vec{p}) \tau_a^2(\vec{p}), \quad (122.02)$$

где $n_a = \sum_p n_a(\vec{p})$ — число носителей сорта a в единице объема, получим полную плотность тока

$$\vec{j}' = \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} n_a \bar{\tau}_a \vec{E} + \sum_a \frac{e_a^3}{cm_a^2} n_a \bar{\tau}_a^2 [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (122.03)$$

Первый член в (122.03) согласно (119.11) есть плотность тока $\vec{j} = \gamma \vec{E}$; второй член есть ток Холла

$$\vec{j}_\perp = \sum_a \frac{e_a^3}{cm_a^2} n_a \bar{\tau}_a^2 [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{1}{\gamma} \sum_a \frac{e_a^3}{cm_a^2} n_a \bar{\tau}_a^2 [\vec{j}, \vec{H}]. \quad (122.04)$$

Обычно измеряют не ток Холла, а электрическое поле Холла \vec{E}_\perp , определяемое соотношением

$$\vec{j}_\perp = \gamma \vec{E}_\perp. \quad (122.05)$$

Из (122.05) и (122.04) имеем

$$\vec{E}_\perp = R [\vec{j}, \vec{H}], \quad (122.06)$$

где коэффициент Холла R равен

$$R = \frac{1}{\tau^2} \sum_a \frac{e_a^3}{cm_a^2} n_a \bar{\tau}_a^2 = \frac{\sum_a \frac{e_a^3}{cm_a^2} n_a \bar{\tau}_a^2}{\left(\sum_a \frac{e_a^2}{m_a} n_a \bar{\tau}_a \right)^2}. \quad (122.07)$$

Для одного сорта носителей формула (122.07) принимает вид

$$R = \frac{\bar{\tau}^2}{\tau^2} \frac{1}{enc}. \quad (122.08)$$

Таким образом, знак коэффициента Холла для одного сорта носителей целиком определяется знаком заряда носителя. В этом случае измерение R позволяет также определить концентрацию носителей. Действительно, $\bar{\tau}^2$ и τ^2 должны быть одного порядка величины.

Поэтому отношение $\frac{\bar{\tau}^2}{\tau^2}$ порядка единицы.

Для типичных (одновалентных) металлов $R < 0$. Например, для Na $R = -2,3 \cdot 10^{-3}$ (в СГСМ-единицах), для Ag $R = -0,001$, для Cu $R = -5,5 \cdot 10^{-3}$. Чтобы перевести эти цифры в абсолютные (гауссовые), надо разделить на $9 \cdot 10^{20}$. Концентрация электронов в серебре равна

$$n \approx \frac{1}{ceR} = \frac{9 \cdot 10^{20}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-3}} = 6,2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

С другой стороны, для серебра плотность $\delta = 10,5$, атомный вес $A = 107,9$. Поэтому число атомов в 1 см^3 равно $n_{\text{Ag}} = \frac{\delta}{A} N_A = = 5,9 \cdot 10^{22}$. Следовательно, в серебре концентрация свободных электронов равна концентрации атомов. Аналогичный вывод можно сделать для других металлов: в зону проводимости переходят все валентные электроны (в согласии с § 121).

Для многих металлов $R > 0$. Например, для Mo $R = +0,00126$, для Co $R = +0,0036$, для Fe $R = +0,008$. Для таких металлов надо допустить, что в них имеет место дырочная проводимость — в зоне проводимости заполнено больше половины всех уровней зоны (§ 121). Например, структура электронной оболочки атома железа дается формулой $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^6 (3d)^6 (4s)^2$. Здесь незаполнена зона возникает из $3d$ -уровней. Так как d -электронов ($l = 2$) может быть всего $2(2 \cdot 2 + 1) = 10$, то $3d$ -электроны заполняют $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ зоны $3d$ и имеет место дырочная проводимость. Для Co имеем семь $3d$ -электронов, степень заполнения $\frac{7}{10}$, для Ni степень заполнения $\frac{8}{10}$. Электронная конфигурация меди

$$(3s)^2 (3p)^6 (3d)^10 (4s);$$

d -зона полностью заполнена, а зона $4s$ заполнена наполовину. Поэтому для меди $R = -0,006$.

Для металла с перекрывающимися зонами, например для Ca или Zn, в некоторых направлениях потолок нижней N -зоны лежит выше дна верхней L -зоны. Поэтому некоторые электроны переходят на дно верхней зоны. В результате в кристалле появляется смешанная проводимость, обусловленная дырками в N -зоне и электронами в L -зоне. Для металлов, имеющих один носитель, электропроводность равна $\gamma = enb$. Поэтому в силу (122.08) получим при $\left(\frac{\tau^2}{\tau_+^2} = 1\right)$

$$b = cR\gamma, \quad (122.09)$$

откуда по экспериментальным данным можно оценить подвижность. Для двух сортов носителей, например электронов с концентрацией n_- и эффективной массой m_- и дырок с концентрацией n_+ и эффективной массой m_+ , коэффициент Холла согласно (122.07) равен

$$R = \frac{1}{e_0 c} \frac{\frac{n_+ \tau_+^2}{m_+^2} - \frac{n_- \tau_-^2}{m_-^2}}{\left(\frac{n_+ \tau_+}{m_+} + \frac{n_- \tau_-}{m_-}\right)^2}. \quad (122.10)$$

Из (122.10) видно, что в зависимости от знака разности, стоящей в числителе, то есть в зависимости от преобладающей роли дырок или электронов, коэффициент R может быть положительным или отрицательным.

Подвижность носителей в полупроводниках того же порядка, что и в металлах, но концентрация носителей в полупроводниках на несколько порядков меньше, чем в металлах. Поэтому значения постоянной R для чисто электронных или чисто дырочных полупроводников значительно больше, чем для металлов.

Для ионной проводимости R практически равно нулю. Наличие эффекта Холла служит доказательством того, что данное вещество имеет электронную или дырочную проводимость. Отсутствие эффекта Холла не доказывает ионной проводимости, так как возможна компенсация электронного и дырочного эффектов.

§ 123. Свободные электроны в металлах

Рассмотрим модель металла Зоммерфельда, в которой принимается во внимание лишь верхняя, не полностью заполненная электронами зона. Электроны в зоне рассматриваются как идеальный газ фермионов в потенциальной яме глубины W_a , образованной ионами кристаллической решетки. Такое представление правильно лишь в первом приближении. В действительности электроны в металле движутся в периодическом поле кристаллической решетки металла (§ 120) и

потенциальная энергия электрона быстро меняется при перемещении от одного иона к другому. Кроме того, электроны взаимодействуют друг с другом.

В модели Зоммерфельда периодическая потенциальная энергия электрона в поле ионов и других электронов заменяется некоторой средней постоянной потенциальной энергией $U = -W_a$. Эта энергия играет роль дна зоны. На границе металла она быстро возрастает до нуля в области порядка 10^{-8} см , образуя потенциальный барьер (рис. 67). Этот барьер обусловлен взаимодействием отрицательных электронов с положительными ионами металла. Главную часть этого взаимодействия составляет потенциальная энергия электрона, вышедшего из металла, и его электрического изображения в металле

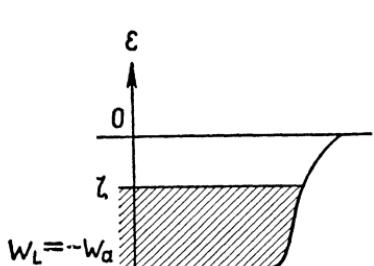


Рис. 67.

(§ 91), равная $U_{\text{из.}} = -\frac{e^2}{4x}$ (x — расстояние электрона от поверхности). Вне металла ($x > 0$) $U = 0$.

Энергию электрона в металле можно написать в форме (120.06)

$$\epsilon = \epsilon_p - W_a = \frac{p^2}{2m} - W_a, \quad (123.01)$$

где импульс p и энергия (если размеры L металла достаточно велики) меняются практически непрерывно.

Взаимодействие электронов с решеткой [в (123.01)] косвенно можно учесть, если ввести вместо m эффективную массу m^* .

Применим статистику Ферми к свободным электронам в металле. В § 122 показано, что число свободных электронов в металле равно числу валентных электронов. Например, для серебра $n = 5,9 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Пользуясь этим значением, вычислим химический потенциал (границу Ферми) при $T = 0$. Согласно (118.12) имеем

$$\zeta_0 = \epsilon_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{G} \right)^{\frac{2}{3}} = 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 5,3 \text{ эв.}$$

Следовательно, температура вырождения (118.17) равна

$$T_F = \frac{\zeta_0}{k} = 6 \cdot 10^4 \text{ град.}$$

Для других металлов получаются близкие к этому значения. Отсюда вытекает, что при всех нормальных температурах электронный газ в металлах в высокой степени вырожден. Кинетической энергии ϵ_{\max} соответствует скорость v_{\max} порядка 10^8 см/сек . Эта скорость значительно превышает среднюю тепловую скорость при нормальных температурах

$$\left(\bar{v} \approx \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 10^7 \text{ см/сек} \text{ при } T = 300^\circ \right).$$

При температурах $T \ll T_F$ график распределения имеет вид, изображенный на рисунке 62. Область размытости распределения имеет ширину порядка $2kT \ll \zeta_0$. Вследствие того что нижние состояния зоны почти до ζ_0 заполнены электронами, участвовать в явлении проводимости могут только те электроны, которые имеют энергию в области размытости распределения на границе Ферми. Эти же электроны участвуют в тепловом движении.

Средняя кинетическая энергия электронов единицы объема равна (задача § 118)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{\pi^2}{4} N k \frac{T^2}{T_F}. \quad (123.02)$$

Отсюда следует, что изохорная теплоемкость равна

$$c_V = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{\pi^2}{2} N k \frac{T}{T_F} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} R \frac{\text{кал}}{\text{град. моль}}. \quad (123.03)$$

Она линейно зависит от температуры и при $T = 0$ обращается в нуль в согласии с тепловой теоремой Нернста. Классическая теплоемкость того же числа N частиц одноатомного газа равна

$$c_{V \text{ класс}} = \frac{3}{2} N k.$$

Отношение теплоемкостей равно

$$\frac{c_V}{c_{V \text{ класс}}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{T_F}.$$

Так как

$$T_F \sim 5 \cdot 10^4,$$

то при температуре $T = 300^\circ$

$$\frac{c_V}{c_{V \text{ класс}}} \sim 2 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, при обычных температурах теплоемкость электронного газа составляет лишь несколько процентов от теплоемкости одноатомного газа в классической кинетической теории. Поэтому теплоемкость металла определяется теплоемкостью кристаллической решетки и при температурах, превышающих дебаевскую температуру θ , равна 6 кал/град. моль (правило Дюлонга и Пти). При $T \ll \theta$ теплоемкость решетки меняется пропорционально T^3 и при достаточно низких температурах делается меньше теплоемкости электронного газа.

§ 124. Собственные полупроводники

Если запрещенная зона энергий, разделяющая заполненную зону N и полностью пустую зону L , достаточно мала, то при низких температурах кристалл будет изолятором, а при высоких — полупроводником. При этом проводимость полупроводника обусловлена элек-

tronами в зоне проводимости и в меньшей степени дырками в нормальной зоне (так как эффективная масса электрона m_N в нормальной зоне значительно больше эффективной массы m_L в зоне проводимости).

Вычислим равновесную концентрацию электронов в зоне проводимости. При $T=0$ все n электроны в единице объема полностью заполняют зону N . При $T \neq 0$ они распределены по уровням двух зон N и L . Поэтому согласно (118.03) число электронов в единице объема равно

$$n = \sum_N \frac{g_r^{(N)}}{e^{\frac{\epsilon_r^{(N)} - \zeta}{kT}} + 1} + \sum_L \frac{g_r^{(L)}}{e^{\frac{\epsilon_r^{(L)} - \zeta}{kT}} + 1} = n_N^- + n_L^-. \quad (124.01)$$

Здесь $\epsilon_r^{(N)}$ и $\epsilon_r^{(L)}$ — энергии электронов в зонах N и L , а $g_r^{(N)}$ и $g_r^{(L)}$ — соответственно степени вырождения уровней в этих зонах; знаки \sum_N и \sum_L обозначают соответственно суммирование по всем уровням нормальной зоны и зоны проводимости. Уравнение (124.01) определяет химический потенциал (уровень Ферми). Так как при $T=0$ нормальная зона полностью заполнена, то

$$n = \sum_N g_r^{(N)} = g^{(N)}, \quad (124.02)$$

то есть число электронов равно числу состояний в нормальной зоне. Вычитая (124.02) из (124.01), получим условие нейтральности

$$\sum_N \frac{g_r^{(N)}}{e^{\frac{\epsilon_r^{(N)} - \zeta}{kT}} + 1} = \sum_L \frac{g_r^{(L)}}{e^{\frac{\epsilon_r^{(L)} - \zeta}{kT}} + 1}. \quad (124.03)$$

Здесь

$$n_r^+ = g_r^{(N)} - \frac{g_r^{(N)}}{e^{\frac{\epsilon_r^{(N)} - \zeta}{kT}} + 1} = \frac{g_r^{(N)}}{e^{\frac{\epsilon_r^{(N)} - \zeta}{kT}} + 1} \quad (124.04)$$

есть функция распределения дырок в нормальной зоне. Поэтому соотношение (124.03) выражает равенство числа дырок в нормальной зоне числу электронов в зоне проводимости. В полупроводниках концентрация электронов или дырок, как показывает измерение эффекта Холла, имеет порядок 10^{12} — 10^{18} см^{-3} . Так как число уровней в зоне порядка 10^{22} , то доля занятых состояний ничтожно мала и выражение (124.03) можно упростить. При тепловом возбуждении электроны в зону проводимости переходят из области, непосредственно прилегающей к верхней границе нормальной зоны, и располагаются

гаются на уровнях вблизи нижней границы зоны проводимости. Поэтому согласно (120.07) положим

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_r^{(N)} = W_N - \epsilon'_r, \quad \epsilon'_r = \frac{p^2}{2m_N}, \\ \epsilon_r^{(L)} = W_L + \epsilon_r, \quad \epsilon_r = \frac{p^2}{2m_L}. \end{array} \right\} \quad (124.05)$$

Здесь W_N — верхняя граница (потолок) нормальной зоны, W_L — нижняя граница (дно) зоны проводимости, m_N и m_L — эффективные массы. Условие нейтральности (124.03) принимает вид

$$n_N^+ = \sum_N \frac{g_r^{(N)}}{e^{\frac{\epsilon_r - W_N + \epsilon'_r}{kT}} + 1} = \sum_L \frac{g_r^{(L)}}{e^{\frac{\epsilon_r + W_L - \zeta}{kT}} + 1} = n_L^- \quad (124.06)$$

Если ζ лежит внутри запрещенной зоны на достаточно большом расстоянии от зон N и L , так что

$$\zeta - W_N \gg kT, \quad W_L - \zeta \gg kT, \quad (124.07)$$

то $e^{\frac{\zeta - W_N}{kT}} \gg 1$ и $e^{\frac{W_L - \zeta}{kT}} \gg 1$, то есть электронный газ в L -зоне и дырочный газ в N -зоне не вырождены. Тогда, пренебрегая единицами в знаменателе (124.06), получим

$$n_N^+ = \sum_N g_r^{(N)} e^{\frac{W_N - \zeta - \epsilon'_r}{kT}} = \sum_L g_r^{(L)} e^{\frac{\zeta - W_L - \epsilon_r}{kT}} = n_L^- \quad (124.08)$$

Введем статистические суммы

$$Z_N = \sum_N g_r^{(N)} e^{-\frac{\epsilon'_r}{kT}}, \quad Z_L = \sum_L g_r^{(L)} e^{-\frac{\epsilon_r}{kT}}; \quad (124.09)$$

получим

$$e^{\frac{W_N - \zeta}{kT}} Z_N = e^{\frac{\zeta - W_L}{kT}} Z_L,$$

откуда

$$\zeta = \frac{W_L + W_N}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{Z_L}{Z_N}. \quad (124.10)$$

Поскольку $\frac{Z_L}{Z_N} \approx 1$, то при $kT \ll \frac{W_L + W_N}{2}$ вторым членом можно пренебречь. Таким образом, уровень химического потенциала ζ лежит посередине запрещенной области. Если бы при $T=0$ нормальная зона не была заполнена, уровень лежал бы внутри этой зоны (как в металлах). Если бы при $T=0$ электроны были в зоне проводимости, то уровень ζ лежал бы в зоне L .

Вычислим Z_L и Z_N , пользуясь выражениями (124.05). Эти выражения справедливы только при p , близком к нулю ($\kappa \sim 0$, $\frac{\pi}{2}$). Но сумму по L (или N) можно распространить на всю зону, не сделав значительной ошибки, так как вклад уровней, отстоящих далеко от границы зоны, из-за множителя $e^{-\frac{p^2}{2kT}}$ мал. Заменив суммирование интегрированием, распространим сумму на бесконечную область. Тогда вычисление Z_L и Z_N аналогично вычислению интеграла (118.13). Получим

$$Z_L = \frac{G_L}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\frac{p^2}{2m_L kT}} = \frac{G_L}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi m_L kT)^{3/2}, \quad (124.11)$$

$$Z_N = \frac{G_N}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi m_N kT)^{3/2}. \quad (124.12)$$

Тогда

$$\zeta = \frac{1}{2}(W_L + W_N) - \frac{kT}{2} \ln \frac{G_L m_L^{3/2}}{G_N m_N^{3/2}}. \quad (124.13)$$

Так как $W_L - \zeta_{T=0} = \frac{\Delta W}{2} \gg kT$ ($\Delta W = W_L - W_N$ есть ширина запрещенной зоны энергии), то согласно (124.08) концентрация электронов в зоне проводимости и дырок в нормальной зоне равна

$$n_N^+ = n_L^- = Z_L e^{-\frac{W_L}{kT}} = (Z_L \cdot Z_N)^{1/2} e^{-\frac{\Delta W}{2kT}} = \\ = (G_L G_N)^{1/2} (m_L m_N)^{3/4} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}. \quad (124.14)$$

Отсюда видно, что энергия электронного возбуждения равна $\frac{\Delta W}{2}$.

При условии $\frac{1}{2}\Delta W \gg kT$, вытекающем из (124.07), функция распределения электронов в зоне проводимости и дырок в N -зоне — максвелловская.

$$n_r^- = g_r^{(L)} \left(\frac{G_N}{G_L}\right)^{1/2} \left(\frac{m_N}{m_L}\right)^{3/4} e^{-\frac{\Delta W}{2kT} - \frac{\epsilon_r}{kT}}, \quad (124.15)$$

$$n_r^+ = g_r^{(N)} \left(\frac{G_L}{G_N}\right)^{1/2} \left(\frac{m_L}{m_N}\right)^{3/4} e^{-\frac{\Delta W}{2kT} - \frac{\epsilon_r'}{kT}}.$$

Вводя подвижности электронов и дырок, электропроводность собственного полупроводника согласно (119.09) можно написать в форме

$$\gamma = e_0 (n_L^- b_L^- + n_N^+ b_N^+) = e_0 (G_L G_N)^{1/2} (m_L m_N)^{3/4} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (b_L^- + b_N^+) e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}. \quad (124.16)$$

Подвижности обычно являются степенными функциями T , поэтому основную роль в γ играет экспоненциальный множитель, вследствие чего электропроводность очень быстро возрастает с увеличением температуры.

§ 125. Примесные уровни. Акцепторы и доноры

Кристаллы обладают различными дефектами структуры, нарушающими идеальную периодичность решетки. Поэтому в таких кристаллах, кроме состояний (энергетических уровней), принадлежащих зонам, возникают особые локальные состояния. Электрон, находящийся на локальном уровне, не движется по всем узлам решетки, как это имеет место для зонных уровней, а остается локализованным на соответствующем дефекте структуры. Локальные уровни располагаются в запрещенных зонах и являются дискретными. Все локальные уровни независимо от их происхождения будем называть примесными.

Дефекты решетки, приводящие к возникновению дополнительных локальных уровней, могут иметь различную природу. Например, в ионных решетках типа M^+X^- могут существовать пустые анионные узлы, возникающие вследствие удаления иона металлоида X^- (аниона). Удаление иона X^- приводит к понижению уровней энергии электронов в соседних металлических ионах M^+ ниже дна зоны проводимости и появлению локального энергетического уровня, расположенного вблизи дна зоны проводимости. Этому уровню соответствует локальное электронное состояние, в котором электрон остается связанным с металлическими ионами, расположенными рядом с анионной дыркой.

Если из решетки удален ион M^+ (катион), то электронные уровни в соседних с дефектом анионных узлах повысятся. Это приводит к отделению от нижней зоны N дискретного уровня, расположенного выше потолка ее.

Образование вакантных узлов происходит при нагревании кристаллов вследствие диффузии наружу нейтральных атомов металлоида X или металла M . При удалении атома X в решетке остаются электроны, которые связываются на возникших локальных уровнях вблизи дна зоны проводимости. При удалении металлического атома M вместе с ним уходят электроны. Поэтому возникшее вблизи дефекта локальное состояние не будет содержать электронов. С другой стороны, нижняя (валентная) зона остается заполненной, так как из решетки вместе с атомом M удалены электроны, число которых не превышает числа состояний, отделившихся от зоны N и превратившихся в локальные состояния.

Итак, вследствие возникновения анионных или катионных дырок в решетке возникают дискретные локальные уровни — пустые вблизи потолка нормальной зоны или заполненные вблизи дна зоны проводимости

(рис. 68). Первые называются акцепторными уровнями (так как они могут захватывать электроны из нормальной зоны), а вторые называются донорными уровнями (так как могут отдавать электроны в зону проводимости).

Другой тип дефектов решетки получается при замене атомов данного элемента атомами другого элемента. Для примера рассмотрим влияние таких примесей на свойства германия и кремния. Эти

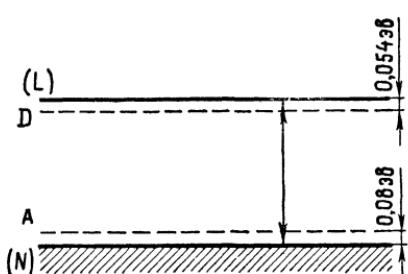


Рис. 68.

четырехвалентные элементы кристаллизуются в структуре алмаза, в которой каждый атом окружен четырьмя соседними и связан с ними простыми ковалентными связями (каждая простая ковалентная связь создается двумя электронами). Если один из атомов решетки заменить примесным атомом с валентностью, равной пяти, то последний потеряет избыточный электрон (оставшимся четырьмя валентностями

атом связывается с четырьмя соседними, подобно атомам основного вещества). Избыточный электрон будет двигаться в кулоновском электрическом поле, создаваемом примесным ионом. Этот электрон слабо связан, то есть уровень энергии, на котором он локализован, расположен вблизи дна зоны проводимости. Таким образом, локальное состояние, возникающее при замещении атома основного вещества (Ge или Si) атомом пятивалентного металлоида, будет донорным.

Оценить энергию такого примесного электрона можно с помощью элементарной теории Бора. Пусть орбита электрона имеет радиус большой по сравнению с постоянной решетки, а скорость движения электрона мала по сравнению со скоростями движения внутренних электронов атомов. Тогда можно считать приближенно, что электрон движется в непрерывной среде с диэлектрическим коэффициентом ϵ и имеет некоторую эффективную массу m^* . Получаем водородоподобный атом, в котором кулоновский потенциал центрального иона равен $\frac{e}{\epsilon r}$. Энергия первой боровской орбиты ($n = 1$) получится из формулы (117.02), если положить в ней $Z = 1$ и заменить e^2 через $\frac{e^2}{\epsilon}$, а m через m^* . Абсолютная величина ϵ_1 дает энергию ионизации (то есть энергию, необходимую для перевода электрона с уровня ϵ_1 на дно зоны проводимости).

$$W_L - W_D = \epsilon_D = |\epsilon_1| = \frac{m^* e^4}{2 \hbar^2 \epsilon^2} = 0,05 \text{ эв.} \quad (125.01)$$

Здесь для германия взято $\epsilon = 16$ и $m^* = m$. Электрон, действительно, оказывается слабо связанным. Однако надо проверить выполнение сделанных предположений.

Для германия радиус первой боровской орбиты и угловая скорость равны соответственно

$$a_1 = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} = 8,5 \text{ \AA}, \quad \omega_1 = \frac{me^4}{\hbar^3 \epsilon^2} = 1,6 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}. \quad (125.02)$$

Первая величина значительно больше постоянной решетки, а вторая значительно меньше частот обращения внутриатомных электронов. Следовательно, модель применима при достаточно большом ϵ . Если в решетке германия (или кремния) один из атомов заменить трехвалентным примесным атомом, то для образования четырех ковалентных связей у последнего не хватает электрона. С точки зрения заполненной валентной зоны недостаток электрона следует рассматривать как дырку. Таким образом, в случае трехвалентной примеси можно снова говорить о водородоподобном атome, в котором роль электрона играет положительная дырка, притягиваемая кулоновским потенциалом к центральному (отрицательному) иону. Ионизация такой системы заключается в переходе дырки в нормальную зону, что эквивалентно переходу электрона на локализованный уровень. Следовательно, трехвалентные примесные атомы будут служить акцепторами электронов. Энергия акцепторного уровня (то есть высота его над потолком нормальной зоны) может быть вычислена по формуле (125.01), если учесть, что эффективная масса дырки отличается от эффективной массы электрона. Для кремния при $\epsilon = 13$ и $m_+ = m$ получается $\epsilon_A = 0,08$ эВ, что совпадает с экспериментальным значением.

§ 126. Распределение равновесных носителей в примесных полупроводниках

Рассмотрим равновесное распределение электронов и дырок в примесном полупроводнике. Обозначим через n_D и n_A объемные концентрации доноров и акцепторов. Если концентрация примесей мала по сравнению с концентрацией атомов основного вещества, то примесные уровни будут изолированными (локализованными). При больших концентрациях примесей их уровни образуют примесные зоны.

Возьмем полупроводник с относительно малой концентрацией примесей и обозначим через W_D и W_A соответственно энергии донорных и акцепторных уровней, а через G_D и G_A — степени их вырождения. Для s -состояний $G = 2$. На примесном уровне не может быть больше одного электрона вследствие отталкивания электронов. Поэтому концентрации электронов на донорных и акцепторных уровнях при температуре T выражаются формулами

$$n_D^- = \frac{n_D}{\frac{W_D - \epsilon}{G_D} + 1}, \quad n_A^- = \frac{n_A}{\frac{W_A - \epsilon}{G_A} + 1}; \quad (126.01)$$

число дырок на донорных уровнях равно

$$n_D^+ = n_D - n_D^- = \frac{n_D}{\frac{\zeta - W_D}{G_D e^{\frac{kT}{kT}}} + 1} \quad (126.02)$$

(ζ — химический потенциал электронов). Обозначим концентрацию дырок в нормальной зоне n_N^+ , а концентрацию электронов в зоне проводимости через n_L^- . Условие нейтральности можно написать в форме

$$n_N^+ + n_D^+ = n_L^- + n_A^- \quad (126.03)$$

которое в силу (124.04), (126.01) и (126.02) принимает вид

$$\sum_N \frac{g_r^{(N)}}{e^{\frac{\zeta - \epsilon_r^N}{kT}} + 1} + \frac{n_D}{e^{\frac{\zeta - W_D}{kT}} + 1} = \sum_L \frac{g_r^{(L)}}{e^{\frac{\epsilon_r - \zeta}{kT}} + 1} + \frac{n_A}{\frac{1}{G_A} e^{\frac{W_A - \zeta}{kT}} + 1}. \quad (126.04)$$

Это уравнение для определения химического потенциала ζ из-за его сложности нельзя проанализировать в общем виде. Поэтому рассмотрим несколько предельных случаев. Заметим, что при $n_D = n_A = 0$ получается рассмотренный в § 124 случай собственного полупроводника.

Как и в § 124, заменим $\epsilon_r^N = W_N - \epsilon'_r$, $\epsilon_r^L = W_L + \epsilon_r$; допустим, что уровень химического потенциала ζ лежит в запрещенной зоне так, что

$$\zeta - W_N \gg kT, \quad W_L - \zeta \gg kT \quad (126.05)$$

(то есть электронный газ в L -зоне и дырочный газ в N -зоне предполагаются невырожденными). Тогда в силу (124.09) получим

$$Z_N e^{\frac{W_N - \zeta}{kT}} + \frac{n_D}{e^{\frac{\zeta - W_D}{kT}} + 1} = Z_L e^{\frac{\zeta - W_L}{kT}} + \frac{n_A}{\frac{1}{G_A} e^{\frac{W_A - \zeta}{kT}} + 1}. \quad (126.06)$$

Это уравнение все же слишком сложно для общего анализа. Поэтому рассмотрим отдельно полупроводники электронные (n -типа) и дырочные (p -типа).

Электронные полупроводники. Допустим, что акцепторных уровней нет ($n_A = 0$) и температура недостаточно высока для того, чтобы электроны в заметном числе переходили из N -зоны в зону проводимости [то есть $\zeta - W_N$ настолько больше kT , что

первым членом с Z_N в (126.06) можно пренебречь]. Тогда (126.06) приводится к квадратному уравнению, из которого получаем

$$\zeta = W_D + kT \ln \frac{1}{2G_D} \left(\sqrt{1 + \frac{4G_D n_D}{Z_L}} e^{\frac{W_L - W_D}{kT}} - 1 \right). \quad (126.07)$$

Рассмотрим предельные случаи для различных интервалов температур:

a) в области низких температур

$$e^{\frac{W_L - W_D}{kT}} \gg \frac{Z_L}{4G_D n_D}. \quad (126.08)$$

Тогда, пренебрегая единицами под знаком логарифма, имеем

$$\zeta = \frac{1}{2} (W_L + W_D) + \frac{kT}{2} \ln \frac{n_D}{G_D Z_L}. \quad (126.09)$$

Отсюда видно, что при $T=0$ уровень химического потенциала проходит точно посередине между дном зоны проводимости и локальными донорными уровнями. При низких температурах, пока $Z_L < \frac{n_D}{G_D}$, второй член правой части (126.09) положителен, а с увеличением T он меняет знак. Поэтому уровень ζ сначала поднимается выше $\zeta(0) = \frac{1}{2}(W_L + W_D)$, а затем опускается ниже (рис. 69, a).

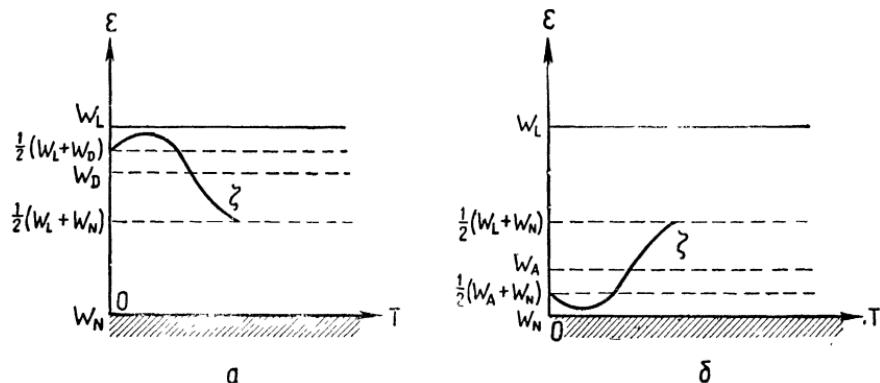


Рис. 69.

Концентрация свободных электронов в зоне проводимости меняется экспоненциально

$$n_L = Z_L e^{\frac{\zeta - W_L}{kT}} = \left(\frac{n_D Z_L}{G_D} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Delta W_D}{2kT}}, \quad (126.10)$$

где $\Delta W_D = W_L - W_D$ — расстояние дна зоны проводимости от донорного уровня. Так как концентрация n_D меняется от 10^{10} см^{-3}

(при меньших концентрациях значительно большую роль будет играть переход электронов из N -зоны) до 10^{21} см^{-3} , то при данной температуре n_L^- , а следовательно, и электропроводность γ может изменяться в 10^6 раз (для кремния даже в 10^9 раз).

Распределение электронов в зоне проводимости по энергии — максвелловское, то есть

$$n_L^-(\varepsilon) = g_r^{(L)} e^{\frac{\zeta - W_L - \epsilon_r''}{kT}}; \quad (126.11)$$

б) в области относительно высоких температур (но таких, что влиянием N -зоны по-прежнему можно пренебречь)

$$e^{\frac{W_L - W_D}{kT}} \ll \frac{Z_L}{4G_D n_D}. \quad (126.12)$$

Поэтому, разлагая корень в (126.07) в ряд, получим

$$\zeta \approx W_L - kT \ln \frac{Z_L}{n_D}. \quad (126.13)$$

Из условия (126.12) следует, что

$$W_L - kT \ln \frac{Z_L}{n_D} < W_D + kT \ln 4G_D.$$

Поэтому при таких температурах уровень ζ лежит значительно ниже донорных уровней и почти все электроны перейдут с донорных уровней в зону проводимости, то есть

$$n_L^- = Z_L e^{\frac{\zeta - W_L}{kT}} \approx n_D. \quad (126.14)$$

В этих случаях n_L^- практически не зависит от температуры.

При дальнейшем повышении температуры основную роль будет играть возбуждение электронов из нормальной зоны и химический потенциал ζ будет стремиться к значению, определяемому формулой (124.13).

Дырочные полупроводники. Положим в (126.06) $n_D = 0$. Пусть температура настолько мала, что переходов в L -зону нет ($W_L - \zeta \gg kT$); тогда получим

$$\zeta = W_A - kT \ln \frac{G_A}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4n_A}{G_A Z_N} e^{\frac{W_A - W_N}{kT}}} - 1 \right). \quad (126.15)$$

Поэтому в области низких температур, при которых

$$e^{\frac{W_A - W_N}{kT}} \gg \frac{G_A Z_N}{4n_A},$$

уровень химического потенциала

$$\zeta = \frac{W_A + W_N}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{G_A n_A}{Z_N} \quad (126.16)$$

проходит примерно посередине между верхним краем нормальной зоны и акцепторными уровнями. Концентрация дырок меняется экспоненциально

$$n_N^+ = Z_N e^{-\frac{W_N - \zeta}{kT}} = (G_A n_A Z_N)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Delta W_A}{2kT}}, \quad (126.17)$$

где $\Delta W_A = W_A - W_N$ — расстояние акцепторных уровней от потолка нормальной зоны (энергия возбуждения акцепторов), а Z_N определяется формулой (124.12). Распределение дырок по энергиям — максвелловское. Ход химического потенциала с повышением T изображен на рисунке 69, б. При температурах, удовлетворяющих неравенству

$e^{\frac{\Delta W_A}{kT}} \ll \frac{G_A Z_N}{4n_A}$, ζ поднимается выше уровней акцепторов и последние почти целиком заполняются электронами, концентрация дырок в зоне N делается постоянной, равной n_A .

При дальнейшем увеличении T , как и для электронного полупроводника, основную роль начинают играть переходы электронов из нормальной зоны в зону проводимости (если $n_N \gg n_A$) и химический потенциал стремится к значению (124.13).

Амфотерные полупроводники. В амфотерном полупроводнике имеются как примеси акцепторы, так и примеси доноры, причем $W_D > W_A$. Если $n_D > n_A$, то при $T=0$ электроны переходят с донорных уровней на акцепторные и заполняют их (так как равновесным состоянием является состояние с минимумом энергии). Следовательно, остается $n_D - n_A$ доноров, содержащих электроны. Такое тело при повышении температуры будет вести себя как электронный полупроводник с концентрацией доноров, зависящей от температуры. Если $n_A > n_D$, то при $T=0$ останутся свободные акцепторные уровни и при повышении температуры тело будет вести себя как дырочный полупроводник.

Все вышеприведенные рассуждения велись в предположении, что положения уровней W_L, W_N, \dots не зависят от температуры. В действительности положения этих уровней несколько меняются с температурой, так как с увеличением T изменяется амплитуда тепловых колебаний атомов и изменяются межатомные расстояния (постоянная решетки). Первый эффект вызывает расширение разрешенных зон (повышение потолка и понижение дна) с ростом температуры, второй эффект может приводить к изменению W_L и W_N в любую сторону в зависимости от конкретного хода границ зон. Из рисунка 67 видно, что малое увеличение постоянной решетки в кристалле NaCl

ведет к сужению $3p(\text{Cl}^-)$ и $3s(\text{Na}^+)$ зон, причем W_N увеличивается, а W_L остается практически неизменной.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим германий, у которого ширина запрещенной зоны $W_L - W_N = 0,785$ эв. При $T \approx 300^\circ$ концентрация электронов и дырок согласно (124.14) равна $n_N^+ = n_L^- = = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Так как энергия активации большинства химических примесей в германии не превышает 0,015 эв, то при этой температуре все примесные атомы ионизированы и концентрация электронов (или дырок) равна $n_L^- = n_D$ (или $n_N^+ = n_A$). Поэтому при концентрации примеси n_D (или n_A) $= 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (что составляет 0,001% от концентрации атомов германия), такой же будет и концентрация носителей. Это в 25 000 раз превышает концентрацию ($2 \cdot 10^{13}$) собственных носителей, следовательно, проводимость будет определяться исключительно примесями.

§ 127. Термоэлектронная эмиссия

Электроны внутри тела (металла, полупроводника или изолятора) удерживаются существующим на границе тела потенциальным барьером (§ 123). При повышении температуры возникает термоэлектронная эмиссия вследствие того, что некоторые электроны получают кинетическую энергию, превышающую высоту потенциального барьера. Рассмотрим сначала эмиссию из металлов.

При равновесии плотность электронного газа (пара) над поверхностью тела определяется из условия равенства химического потенциала электронов вне тела $\zeta^{(a)}$ и внутри тела $\zeta^{(i)}$

$$\zeta^{(a)} = \zeta^{(i)}. \quad (127.01)$$

Вне тела плотность n электронов мала, электронный газ невырожденный, поэтому имеет место максвелловское распределение скоростей. Химический потенциал определяется формулой (118.14), откуда

$$n = G \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\zeta(a)}{kT}}. \quad (127.02)$$

Здесь m — масса свободного электрона, $G = 2$.

Рассмотрим поток электронов. Выберем в качестве оси z нормаль к поверхности тела. Обозначим плотность потока электронов через \vec{q} . В равновесном состоянии поток электронов $q_z^{(a)}$, падающих извне, равен обратному потоку. Последний слагается из плотности q_z потока электронов, эмитированных телом, и плотности $Rq_z^{(a)}$ потока электронов, отраженных от поверхности тела (R — средний коэффициент отражения). Таким образом,

$$q_z^{(a)} = q_z + Rq_z^{(a)}.$$

Отсюда

$$q_z = (1 - R) q_z^{(a)} = D q_z^{(a)}. \quad (127.03)$$

Здесь $D = 1 - R$ есть средний коэффициент прохождения электрона через потенциальный барьер на границе тела (проницаемость барьера). С другой стороны, плотность потока электронов, падающих на поверхность тела извне, равна

$$q_z^{(a)} = n \bar{v}_z = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}, \quad (127.04)$$

где $\bar{v}_z = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$ есть среднее значение составляющей скорости по максвелловскому распределению. Пользуясь (127.03), (127.04) и (127.02), получим выражение для плотности j термоэлектронного тока

$$j = eq_z = DG \frac{emk^2}{4\pi^2\hbar^3} T^2 e^{-\frac{\zeta^{(i)}}{kT}}. \quad (127.05)$$

Для металла согласно модели Зоммерфельда $\zeta^{(i)}$ слабо зависит от температуры T и можно считать $\zeta^{(i)} = \zeta_0^{(i)}$. В § 123 ζ отсчитывалось от дна зоны проводимости, а в (127.02) за нулевой уровень энергия принята энергия покоящегося электрона вне металла. Поэтому вместо $\zeta^{(i)}$ надо взять $\zeta - |W_L| = -\Phi$. Величина

$$\Phi = |W_L| - \zeta = W_a - \zeta \quad (127.06)$$

мало зависит от температуры и называется эффективной работой выхода электрона из металла (рис. 67). Принимая $G = 2$, получим формулу Ричарсона — Дешмана

$$j = DAT^2 e^{-\frac{\Phi}{kT}}. \quad (127.07)$$

Здесь A — универсальная постоянная, равная

$$A = \frac{emk^2}{2\pi^2\hbar^3} = 120 \frac{a}{cm^2 \text{град}^2}. \quad (127.08)$$

Обычно проницаемость барьера D имеет значение, близкое к $1/2$, поэтому

$$DA \simeq 60 \frac{a}{cm^2 \text{град}^2}.$$

Однако при изменении формы потенциального барьера, например при наличии адсорбированного слоя на поверхности металла, проницаемость D может принимать другие значения ($D < 1$). Адсорбционные слои влияют на значение работы выхода Φ (на глубину W_a зоны проводимости), что существенно отражается на значении j , так как Φ стоит в показателе. Например, для вольфрама

$$\zeta = 5,81 \text{ эв}, \quad W_a = 10,35 \text{ эв}, \quad \Phi = 4,54 \text{ эв}, \quad AD \simeq 75 \frac{a}{cm^2 \text{град}^2}.$$

Если на поверхность вольфрама нанести мономолекулярный слой бария (или цезия), то Φ и DA принимают соответственно значения $1,56 \text{ эв}$ и $1,5 \frac{a}{\text{см}^2 \text{ град}^2}$ (или $1,36 \text{ эв}$ и $3,2 \frac{a}{\text{см}^2 \text{ град}^2}$). При температуре $T \approx 2000^\circ$ ($kT \approx 0,17 \text{ эв}$) эмиссия увеличивается при этом на несколько порядков, несмотря на уменьшение множителя DA .

Рассмотрим эмиссию из электронного примесного полупроводника. В области температур, в которой эмиссией из нормальной зоны можно пренебречь, в силу (126.09) имеем

$$\zeta^{(i)} = \frac{1}{2}(W_L + W_D) + \frac{kT}{2} \ln \frac{n_D}{G_D Z_L}.$$

В § 126 нулевой уровень энергии не фиксирован. Выберем за нулевой уровень энергию электрона вне нейтрального тела. Будем иметь $W_D < W_L < 0$. Поэтому

$$\frac{1}{2}(W_L + W_D) = -|W_L| - \frac{\Delta W_D}{2}.$$

Величина $|W_L| + \frac{\Delta W_D}{2}$ есть глубина уровня Ферми при абсолютном нуле температуры. Подставим $\zeta^{(i)}$ в (127.05). Получим (несколько обобщенную) формулу, выведенную впервые Т. П. Козляковской (1934)

$$j = D n_D^{1/2} A T^{5/4} e^{-\frac{|W_L| + \frac{1}{2} \Delta W_D}{kT}}, \quad (127.09)$$

где

$$A = \frac{G}{(G_D G_L)^{1/2}} \left(\frac{m}{m_L} \right)^{3/4} \frac{em^{1/4}}{\hbar^{5/2}} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{5/4}. \quad (127.10)$$

Таким образом, термоэлектронный ток пропорционален $n_D^{1/2}$. Роль работы выхода играет глубина уровня Ферми при $T = 0^\circ$. Полагая $m_L = m$, $G = G_D = G_L$, получим

$$A \approx 10^{-6} \frac{a}{\text{см}^{1/2} \cdot \text{град}^{5/4}}.$$

Заметим, что формула (127.09) справедлива в интервале температур более узком, нежели формула (127.07). В более общем случае в качестве $\zeta^{(i)}$ надо брать выражение (126.07). Это приводит к более сложной зависимости j от T и n_D .

§ 128. Влияние внешнего поля на функцию распределения частиц по состояниям

Рассмотрим процессы переноса в телах с помощью метода, развитого в теории металлов Г. А. Лоренцом и А. Зоммерфельдом. Этот метод основан на определении отклонения (под влиянием внешней силы F) функции распределения носителей от равновесного

значения. Обозначим функцию распределения через $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Для простоты рассмотрим один вид носителей — электроны или дырки. При отсутствии внешних воздействий ($F = 0$) в результате столкновений носителей с решеткой и друг с другом устанавливается равновесное распределение

$$f_0(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{dN_r}{dg}. \quad (\S \text{ 118}).$$

Внешние, не зависящие от времени силы вызывают отклонение от равновесного распределения. Столкновения же носителей стремятся восстановить равновесное распределение. В результате устанавливается некоторое стационарное (не зависящее от времени) распределение $f(\vec{r}, \vec{p})$. Стационарное распределение должно совпадать с тем, которое установилось бы под действием внешних сил, если бы они действовали в течение времени свободного пробега τ , то есть

$$f = f_0 + \tau \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{внешн.}}. \quad (128.01)$$

Здесь $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{внешн.}}$ — скорость изменения функции распределения под влиянием внешних сил. Чтобы определить эту скорость, заметим, что за время dt радиус-вектор \vec{r} и импульс \vec{p} каждого носителя получают соответственно приращения $\vec{v} dt$ и $\vec{F} dt$. В момент времени $t + dt$ в элементе фазового объема $d\gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z = dV d\omega$ будут находиться все носители, которые в момент t имели радиус-векторы $\vec{r} - \vec{v} dt$ и импульсы $\vec{p} - \vec{F} dt$. Поэтому изменение распределения под влиянием внешних сил равно

$$df = f(\vec{r} - \vec{v} dt, \vec{p} - \vec{F} dt) - f(\vec{r}, \vec{p}) = - \left(\vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \right) dt,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{внешн.}} = - \left(\vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \right). \quad (128.02)$$

Из (128.01) и (128.02) получается уравнение Лоренца, определяющее стационарную функцию распределения,

$$\vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = - \frac{f - f_0}{\tau}. \quad (128.03)$$

Уравнение (128.03) не определяет равновесного распределения f_0 , которое должно быть задано независимо. Параметр τ (время свободного пробега) зависит, вообще говоря, от \vec{p} и также должен быть определен независимо.

Если стационарное состояние еще не установилось, то скорость изменения распределения равна

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{внешн.}} - \frac{f - f_0}{\tau},$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = - \frac{f - f_0}{\tau}. \quad (128.04)$$

Допустим, что в начальный момент распределение носителей неравновесное, характеризуемое $f(0)$, но внешняя сила отсутствует. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{f - f_0}{\tau}, \quad (128.05)$$

откуда

$$f(t) = f_0 + [f(0) - f_0] e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (128.06)$$

Это значит, что вследствие столкновений неравновесная функция распределения за время порядка нескольких τ переходит в равновесную функцию распределения f_0 . Таким образом, время свободного пробега τ является временем релаксации для установления статистического равновесия.

Пусть рассматриваемое тело находится в постоянных электрическом и магнитном полях с напряженностями \vec{E} и \vec{H} . Тогда сила \vec{F} есть сила Лоренца

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{H} \right] \right).$$

Следуя Лоренцу, будем искать решение (128.03) в форме

$$f - f_0 = \vec{v} \vec{\chi} = \frac{\vec{p} \vec{\chi}}{m},$$

где $\vec{\chi}$ — вектор, определяющий отклонение стационарной функции распределения от равновесной. Тогда

$$\vec{v} \vec{\chi} = -\tau \left(\vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \right). \quad (128.08)$$

В правой части в членах, не зависящих от H , можно f приближенно заменить через f_0 . Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} + \frac{\vec{\chi}}{m} \simeq \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} + \frac{\vec{\chi}}{m} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} = \vec{v},$$

где ϵ — кинетическая энергия носителя, получим

$$\vec{v} \left(\vec{\chi} + \frac{e\tau}{cm} [\vec{H}, \vec{\chi}] \right) = -\tau \left(\frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}} + e\vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \vec{v}.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \vec{\chi} + \frac{e\tau}{cm} [\vec{H}, \vec{\chi}] &= -\tau \vec{\varphi}, \\ \vec{\varphi} &= \frac{\partial f_0}{\partial r} + e \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (128.09)$$

где

Это уравнение определяет искомую функцию $\vec{\chi}$. При $\vec{H} = 0$ $\vec{\chi} = -\tau \vec{\varphi}$.

§ 129. Электропроводность и теплопроводность металлов

В зоммерфельдовской модели металла имеется одна незаполненная сферически симметрическая зона проводимости. Энергия электрона (или дырки) в этой зоне равна $\epsilon = \frac{P^2}{2m}$. Будем считать, что магнитное поле отсутствует, а электрическое поле и градиент температуры направлены по оси x . Тогда плотность электрического тока и плотность потока энергии ϵ в направлении оси x будет определяться формулами

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \int e v_x f dg = \int e v_x (f_0 - \tau v \vec{\varphi}) dg, \\ S_x &= \int \epsilon v_x f dg = \int \epsilon v_x (f_0 - \tau v \vec{\varphi}) dg. \end{aligned} \right\} \quad (129.01)$$

Здесь $dg = \frac{G dp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3}$ — интервал состояний (интегрирование производится по всем состояниям). Так как f_0 — сферически симметричная функция, то интегралы от первых членов исчезают (как и должно быть, так как в равновесном состоянии все потоки должны равняться нулю). Пользуясь (128.09), получим

$$\left. \begin{aligned} j_x &= -e \int v_x \tau \vec{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial r} + e \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) dg, \\ S_x &= - \int \epsilon v_x \tau \vec{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial r} + e \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) dg. \end{aligned} \right\} \quad (129.02)$$

При отсутствии градиента температуры $\frac{\partial f_0}{\partial r} = 0$. Так как градиент температуры направлен по оси x , то

$$\frac{\partial f_0}{\partial r} = \vec{i} \frac{\partial f_0}{\partial x}$$

и

$$j_x = -e \int \tau v_x^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + e E_x \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) dg, \quad (129.03)$$

$$S_x = - \int \epsilon v_x^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + e E_x \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) dg. \quad (129.04)$$

Коэффициент при E_x в (129.03) определяет удельную электропроводность

$$\gamma = -e^2 \int \tau v_x^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\mu. \quad (129.05)$$

Заметим, что $d\mu = C\varepsilon^{1/2} d\varepsilon \frac{d\Omega}{4\pi}$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Поэтому среднее по телесному углу $\bar{v}_x^2 = \frac{1}{3} v^2 = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{m}$. Вместо τ введем длину свободного пробега $l(\varepsilon)$, зависящую от энергии частицы

$$l(\varepsilon) = \tau v; \quad (129.06)$$

тогда (129.05) примет вид

$$\gamma = \frac{2e^2}{3m} C \int_0^\infty \frac{l(\varepsilon)}{v(\varepsilon)} \varepsilon^{1/2} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon. \quad (129.07)$$

Этот интеграл можно вычислить приближенно. Учитывая, что $-\frac{df_0}{d\varepsilon}$ при температурах $T \ll T_F$ ведет себя как δ -функция (§ 118), имеющая острый максимум при $\varepsilon = \zeta_0$, имеем

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} C \zeta_0^{3/2} \frac{l(\zeta_0)}{v(\zeta_0)}. \quad (129.08)$$

Из (118.10) и (118.12) следует, что $\frac{2}{3} C \zeta_0^{3/2} = n$ (n — плотность электронов). Поэтому

$$\gamma = \frac{e^2}{m} \frac{l(\zeta_0) n}{v(\zeta_0)}. \quad (129.09)$$

Здесь l и v берутся для энергии, равной границе Ферми ζ_0 . Это объясняется тем, что в силу принципа Паули ускоряться электрическим полем могут лишь те электроны, энергии которых лежат вблизи границы Ферми.

Большую теплопроводность металлов в сравнении с теплопроводностью изоляторов можно объяснить предположением, что теплопроводность κ , обусловленная свободными электронами, значительно превышает теплопроводность κ_p решетки. Для вычисления κ преобразуем выражения (129.03) и (129.04). Функция f_0 зависит от x лишь через ζ и T . Пользуясь тем, что f_0 содержит ε , ζ и T только в комбинации $\xi = \frac{\varepsilon - \zeta}{kT}$, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial \zeta} = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{\varepsilon - \zeta}{T} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + eE_x \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\left(\frac{d\zeta}{dx} - eE_x + \frac{\varepsilon - \zeta}{T} \frac{dT}{dx} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Усреднение по углам дает $\bar{v}_x^2 = \frac{2\varepsilon}{3m}$ и $v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$. Поэтому (129.03) и (129.04) в силу (129.06) приводятся к виду

$$j = \frac{2eC}{3m} \left[\left(\frac{d\zeta}{dx} - eE_x - \frac{\zeta}{T} \frac{dT}{dx} \right) \int_0^\infty \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{s_{1/2}} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \int_0^\infty \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{s_{1/2}} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon \right], \quad (129.10)$$

$$S = \frac{2C}{3m} \left[\left(\frac{d\zeta}{dx} - eE_x - \frac{\zeta}{T} \frac{dT}{dx} \right) \int_0^\infty \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{s_{1/2}} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \int_0^\infty \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{s_{1/2}} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon \right]. \quad (129.11)$$

Учитывая, что $\frac{l}{v}$ медленно меняется с ε и $\frac{df_0}{d\varepsilon}$ ведет себя как δ -функция, интегралы в (129.10) и (129.11) можно представить в форме

$$\int_0^\infty \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{s_{1/2}} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{l(\zeta_0)}{v(\zeta_0)} K_r, \quad \text{где } K_r = \int_0^\infty \varepsilon^{s_{1/2}} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon. \quad (129.12)$$

Поэтому (129.10) и (129.11) переписываются в виде

$$j = \frac{2eC}{3m} \frac{l(\zeta_0)}{v(\zeta_0)} \left[\left(\frac{d\zeta}{dx} - eE_x - \frac{\zeta}{T} \frac{dT}{dx} \right) K_{s_{1/2}} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} K_{s_{1/2}} \right], \quad (129.13)$$

$$S = \frac{2C}{3m} \frac{l(\zeta_0)}{v(\zeta_0)} \left[\left(\frac{d\zeta}{dx} - eE_x - \frac{\zeta}{T} \frac{dT}{dx} \right) K_{s_{1/2}} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} K_{s_{1/2}} \right]. \quad (129.14)$$

Теплопроводность измеряется при $j = 0$, тогда из (129.13) находим

$$\frac{d\zeta}{dx} - eE_x - \frac{\zeta}{T} \frac{dT}{dx} = - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \frac{K_{s_{1/2}}}{K_{s_{1/2}}}.$$

Подстановка в (129.14) дает

$$S = - \frac{2C}{3m} \cdot \frac{l(\zeta_0)}{v(\zeta_0)} \cdot \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \left(\frac{K_{s_{1/2}}^2}{K_{s_{1/2}}} - K_{s_{1/2}} \right). \quad (129.15)$$

В том приближении, которое было применено при вычислении интеграла (129.07), скобка обращается в нуль. Поэтому необходимо использовать следующее приближение, рассмотренное в § 118. Согласно (118.19)

$$K_r \simeq -\zeta^r \left[1 + \frac{r(r-1)\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 \right]. \quad (129.16)$$

Учитывая, что $\frac{kT}{\zeta} \ll 1$, имеем

$$\frac{K_{\gamma/2}^2}{K_{\beta/2}} - K_{\gamma/2} \simeq \zeta^{\gamma/2} \left\{ \left[1 + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 6} \left(\frac{\pi kT}{\zeta} \right)^2 \right]^2 \left[1 + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} \left(\frac{\pi kT}{\zeta} \right)^2 \right]^{-1} - \left[1 + \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 6} \left(\frac{\pi kT}{\zeta} \right)^2 \right] \right\} \cong \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \zeta_0^{\gamma/2}.$$

Так как $\frac{2}{3} C \zeta_0^{\beta/2} = n$, находим

$$\kappa = - \frac{S}{\left(\frac{dT}{dx} \right)} = \frac{\pi^2}{3} \frac{l(\zeta_0) nk^2}{mv(\zeta_0)} T. \quad (129.17)$$

Это выражение совпадает с обычным выражением кинетической теории газов для теплопроводности $\kappa = \frac{1}{3} \bar{v} C_v$ (C_v — теплоемкость единицы объема), если в качестве теплоемкости взять выражение (123.03) для электронного газа, а под \bar{v} понимать скорость $v(\zeta_0)$ на границе Ферми.

Выражения (129.08) и (129.17) для γ и κ содержат неопределенную длину свободного пробега $l(\zeta_0)$ электронов. Ее можно исключить, взяв отношение $\frac{\kappa}{\gamma}$

$$\frac{\kappa}{\gamma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (129.18)$$

Таким образом, отношение $\frac{\kappa}{\gamma}$ пропорционально абсолютной температуре. Коэффициент пропорциональности есть универсальная постоянная, равная

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{R}{F} \right) = 2,7 \cdot 10^{-13} \frac{\text{сгс}}{\text{град}^2} = 2,45 \cdot 10^{-8} \frac{\text{вт ом}}{\text{град}^2}. \quad (129.19)$$

Постоянство выражения $\frac{\kappa}{\gamma T}$ было установлено экспериментально Видеманом и Францом еще до построения электронной теории проводимости металлов.

В приводимой ниже таблице¹ даны значения ряда величин для металлов 1-й группы. Число свободных электронов вычислялось в предположении, что на каждый атом приходится один свободный электрон зоны проводимости. Энергия Ферми ζ_0 и $v(\zeta_0)$ вычислялись по (118.12), длина свободного пробега $l(\zeta_0)$ — по (129.08) на основании экспериментального значения γ . Из таблицы видно, что экспе-

¹ Таблица заимствована из книги Ч. Киттеля «Введение в физику твердого тела», М., ГИТТЛ, 1957.

риментальные значения числа L находятся в хорошем согласии с приближенным теоретическим значением (129.19).

Металл	Число свободных электронов в см^3 $n \cdot 10^{22}$	Наблюдаемые значения γ при 0°C $\gamma \cdot 10^{-17}$ сгс	Энергия Ферми ζ_0 в эв	Скорость на границе Ферми $v (\zeta_0) \cdot 10^{-8}$ $\frac{\text{см}}{\text{сек}}$	$l (\zeta_0) \cdot 10^6$ см	При 0°C
						$L' = \frac{\gamma}{\gamma T} \cdot 10^8$ $\frac{\text{вт} \cdot \text{ом}}{\text{град}^2}$
Li	4,6	1,06	4,72	1,31	1,10	—
Na	2,5	2,09	3,12	1,07	3,50	—
K	1,3	1,47	2,14	0,85	3,70	—
Cu	8,5	5,76	7,04	1,58	4,20	2,23
Ag	5,8	6,12	5,51	1,40	5,70	2,31
Au	5,9	4,37	5,54	1,40	4,10	2,35

Кроме того, длина свободного пробега электронов в металле $l (\zeta_0)$ порядка сотни постоянных решетки. Заметим, что при расчете v и l бралась обычная масса электрона $0,9 \cdot 10^{-27}$ г. Цифры несколько изменятся, если взять эффективную массу и учесть, что $\frac{m^*}{m}$ для Си равняется 1,47 (эксперимент), а для Li, Na и K—соответственно 1,53, 0,94 и 0,58 (теория).

§ 130. Фононы и теплопроводность кристаллической решетки. Длина пробега электронов

Напомним кратко основания теории теплоемкости Дебая. Тепловое движение частиц твердого тела можно рассматривать как совокупность плоских (ультразвуковых) волн, распространяющихся по всем направлениям внутри тела. Длины этих волн лежат в интервале от некоторой минимальной λ_m , определяемой постоянной решетки, до сколь угодно больших. Частоты связаны с длиной волны обычным соотношением $v = \frac{u}{\lambda}$, где u — скорость распространения звука в данном веществе. Поэтому существует некоторая максимальная частота $v_{\max} = \frac{u}{\lambda_m}$.

Плоской звуковой волне можно сопоставить поток квазичастиц — фононов (квантов звука) подобно тому, как плоской электромагнитной волне соответствует поток фотонов. Фонон частоты v обладает энергией $e = hv = \hbar\omega$ ($\omega = 2\pi v$ — циклическая частота). Таким образом, тепловое движение в твердом теле можно рассматривать как хаотическое движение фононного газа. Распределение фононов по энергии определяется статистикой Бозе — Эйнштейна. При достаточно больших температурах ($T \gg \theta$) применима статистика Максвелла —

Больцмана. Здесь θ — характеристическая температура Дебая, равная

$$\theta = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k} = \frac{2\pi\hbar u}{k\lambda_m}. \quad (130.01)$$

Температуры Дебая для разных веществ различны. Например, для Ag $\theta = 215^\circ\text{K}$, для NaCl $\theta = 281^\circ\text{K}$, для алмаза $\theta = 1860^\circ\text{K}$. При температурах $T \gg \theta$ теплоемкость решетки определяется законом Дюлонга и Пти и для одноатомных твердых тел равна

$$3N_A k = 3R = 6 \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}}.$$

При $T \leq \theta$ теплоемкость зависит от температуры. При достаточно низких температурах теплоемкость пропорциональна T^3 .

С точки зрения представлений о фононном газе теплопроводность твердого тела можно рассматривать как перенос энергии фононами и применить обычную формулу кинетической теории, то есть

$$\kappa_{\text{реш}} = \kappa_{\text{фон}} = \frac{1}{3} \Lambda c. \quad (130.02)$$

Здесь Λ — средняя длина свободного пробега, C — теплоемкость фононов (решетки) на единицу объема, u — средняя скорость фононов (средняя скорость звука). По существу эта формула определяет среднюю длину свободного пробега фононов. Теоретически длина свободного пробега определяется рассеянием на неоднородностях структуры и рассеянием фононов на фононах. Последнее обусловлено тем, что колебания атомов или ионов в решетке ангармонические. Заметим, что при $T \gg \theta$ длина свободного пробега, обусловленная рассеянием фононов на фононах, пропорциональна $\frac{1}{T}$, что находится в согласии с опытом.

Длину свободного пробега фононов можно найти из экспериментальных данных для теплопроводности изоляторов. В изоляторах теплопроводность, связанная с электронами проводимости, отсутствует и вся теплопроводность сводится к теплопроводности решетки. При 0°C для кварца получается $\Lambda = 0,40 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, а для NaCl $\Lambda = 0,21 \cdot 10^{-6} \text{ см}$. Таким образом, Λ имеет порядок десятка постоянных решетки. Длина свободного пробега $l(\zeta_0)$ по таблице § 129 порядка $3 \cdot 10^{-6} \text{ см}$; отношение $\frac{c_{\text{эл}}}{c_{\text{реш}}} \simeq 3 \frac{T}{T_F} \simeq 2 \cdot 10^{-2}$ (§ 123).

Поэтому

$$\frac{c_{\text{эл}}}{c_{\text{реш}}} = \frac{\frac{1}{3} l v c_{\text{эл}}}{\frac{1}{3} \Lambda c_{\text{реш}}} \simeq \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^5} 2 \cdot 10^{-2} \sim 10^2,$$

то есть в чистых металлических проводниках электронная теплопроводность при комнатных температурах приблизительно на два порядка превышает фононную (решеточную).

Вернемся к электропроводности металлов. В классической теории электропроводности электроны сталкиваются с ионами решетки. Поэтому длина свободного пробега электронов l должна быть порядка постоянной решетки ($a \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см), что находится в противоречии с данными таблицы § 129. Наоборот, в зонной теории в идеально правильной кристаллической решетке пробег электрона бесконечно велик, так как уровни энергии зоны простираются на весь кристалл. Конечная длина свободного пробега получается лишь при учете искажений решетки. При отсутствии примесей наиболее существенные искажения, вызванные тепловым движением решетки, которые обусловливают упругое и неупругое рассеяние электронов.

С точки зрения представления о фононах можно говорить о рассеянии электронов на фононах. Энергии фононов относительно малы (не превышают $k\theta$, что при $\theta \sim 200^\circ\text{K}$ составляет около 0,01 эв), а энергии электронов порядка $\zeta_0 \sim 2-7$ эв. Поэтому изменение энергии электрона при столкновении с фононом относительно мало.

Импульсы фононов (их можно оценить по формуле $p_\Phi = \frac{\hbar}{\lambda} \leq \frac{\hbar}{a}$) того же порядка, что и импульсы электронов [см. (120.05)]. Поэтому в результате столкновения электрона с фононом будет происходить рассеяние электронов. Построенная на таких соображениях теория показывает, что при $T \gg \theta$ длина свободного пробега электрона равна

$$l_{\text{реш}} = l_0 \frac{\theta}{T}, \quad (130.03)$$

где l_0 — длина пробега при $T = \theta$. Для полупроводников зависимость $l \sim \frac{1}{T}$ сохраняется и при низких температурах $T \ll \theta$; для металлов при $T \ll \theta$

$$l_{\text{реш}} \simeq \frac{1}{T^5}. \quad (130.04)$$

Существенно, что при стремлении T к абсолютному нулю длина свободного пробега электронов, обусловленная столкновениями с фононами, неограниченно растет.

Для определения длины пробега электрона надо учсть рассеяние и на других дефектах решетки — нейтральные и ионизованные атомы примеси, пустые узлы решетки (§ 125), атомы или ионы, находящиеся в междоузлиях решетки, и различные искажения решетки, связанные с местными деформациями ее. Рассеяние электронов на некоторых из этих дефектов сохраняется и при $T = 0$.

Заметим, что обратные пробеги, обусловленные различными независимыми механизмами рассеяния, аддитивны, то есть

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{\text{реш}}} + \frac{1}{l_{\text{прим}}} + \frac{1}{l_{\text{искаж}}} + \dots \quad (130.05)$$

Поэтому удобно вместо электропроводности γ и теплопроводности χ рассматривать обратные величины — удельное сопротивление $\rho = \frac{1}{\gamma}$ и удельное тепловое сопротивление $\frac{1}{\chi}$. В силу (129.09), (130.05), (130.03) имеем

$$\rho = \frac{mv}{e^2 n} \cdot \frac{1}{l} = \frac{mv}{e^2 n} \frac{1}{l_{\text{реш.}}} + \frac{mv}{e^2 n} \frac{1}{l_{\text{искаж.}}} + \dots = \rho_0 \frac{T}{\theta} + \rho_1. \quad (130.06)$$

Здесь $\rho_0 \frac{T}{\theta}$ есть сопротивление, обусловленное тепловыми колебаниями решетки, а ρ_1 — всеми остальными факторами рассеяния. При низких температурах остаточное сопротивление ρ_1 обусловлено присмиями и искажениями решетки.

§ 131. Электропроводность полупроводников

Для полупроводников плотность тока и поток энергии будут определяться формулами (129.10) и (129.11), однако в качестве функции распределения f_0 надо взять функцию распределения Максвелла — Больцмана (§ 124 и 126)

$$f_0 = \frac{dn}{dg} = e^{\frac{\zeta - \varepsilon}{kT}}. \quad (131.01)$$

Распределение (131.01) отличается от распределения Ферми. В частности, производная $\frac{df_0}{d\varepsilon}$ при $\varepsilon = \zeta$ не имеет острого максимума. Поэтому метод оценки интегралов, использованный в § 129, не применим. Пользуясь тем, что $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{3}$ и $\tau = \frac{l}{v}$, для коэффициента электропроводности согласно (129.05) получим

$$\gamma = -e^2 \int \tau v_x^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} dg = -\frac{e^2}{3} \int l v \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} dg.$$

Вынося за знак интеграла среднее значение \bar{l} длины свободного пробега и вводя $v = \left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)^{1/2}$, $dg = C\varepsilon^{1/2} d\varepsilon$, получим

$$\gamma = -\frac{e^2}{3} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \bar{l} C \int_0^\infty \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon.$$

После интегрирования по частям имеем

$$\gamma = \frac{e^2}{3} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \bar{l} C \int_0^\infty f_0 d\varepsilon = \frac{e^2}{3} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \bar{l} \int \frac{f_0}{V\varepsilon} dg.$$

Так как

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{1}{n} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int \frac{f_0}{V\varepsilon} dg, \quad (131.02)$$

то γ можно представить в форме

$$\gamma = ebn = \frac{2}{3} \frac{e^2 n \bar{l}}{m} \left(\frac{1}{v} \right). \quad (131.03)$$

Отсюда следует, что подвижность носителей тока равна

$$b = \frac{2}{3} \frac{e \bar{l}}{m} \left(\frac{1}{v} \right) = \frac{4}{3} \frac{e \bar{l}}{(2\pi m k T)^{1/2}}, \quad (131.04)$$

так как согласно (131.02) и (118.15)

$$\left(\frac{1}{v} \right) = 2 \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{1/2}. \quad (131.05)$$

Если длина свободного пробега носителей обратно пропорциональна температуре, что имеет место для полупроводников с атомной решеткой (§ 130), то подвижность пропорциональна $\frac{1}{T^{3/2}}$. Например, для германия подвижности электронов и дырок равны

$$b_- = \frac{19 \cdot 10^6}{T^{3/2}} \frac{cm^2}{s \cdot сек}, \quad b_+ = \frac{9 \cdot 10^6}{T^{3/2}} \frac{cm^2}{s \cdot сек}.$$

Поэтому зависимость электропроводности от температуры в основном определяется экспоненциальной зависимостью концентрации носителей. Согласно (119.10), (126.10, 17) и (124.14) электропроводности донорного, акцепторного и собственного полупроводников, имеющих два сорта носителей (электроны и дырки), равны

$$\gamma_- = eb_- \left(\frac{n_D Z_L}{G_D} \right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta W_D}{2kT}}, \quad \gamma_+ = eb_+ \left(G_A n_A Z_N \right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta W_A}{2kT}}, \quad (131.06)$$

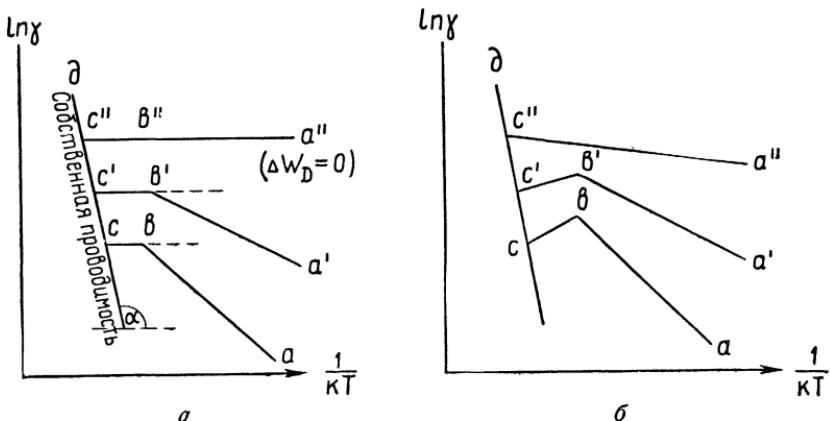
$$\gamma = e (G_L G_N)^{1/2} (m_L m_N)^{3/4} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (b_+ + b_-) e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}, \quad (131.07)$$

где Z_L и Z_N определяются формулами (124.11) и (124.12).

Обычно для изображения зависимости γ от T пользуются диаграммой, на осях которой откладывают $\frac{1}{kT}$ и $\ln \gamma$ (рис. 70, a). Если отвлечься от температурной зависимости предэкспоненциального множителя, то ход собственной проводимости изобразится прямой dc , для которой $\operatorname{tg} \alpha = -\Delta W$. При низких температурах имеет место примесная проводимость. Согласно (131.06) $\ln \gamma_{\pm}$ изображается прямой ab , наклон которой определяется энергией активации примесей ΔW_D (или ΔW_A).

С повышением температуры количество носителей увеличивается до тех пор, пока не наступает истощение примесных центров. Тогда согласно (126.14) $n_{\pm} \approx \text{const}$ и $\ln \gamma$ изображается горизонтальной прямой bc (так как собственная проводимость еще не скрывается). На участке cd температура настолько высока, что имеет

место собственная проводимость (131.07). При большей концентрации примесей $n_{D,A}$ участок abc располагается выше, так как $\ln \gamma$ содержит член $\frac{1}{2} \ln n_{D,A}$. Поэтому получаем ломаные $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... С увеличением $n_{D,A}$ изменяется наклон участка ab , поскольку энергия активации примесей зависит от их концентрации. Действительно,



энергия активации примесных уровней может зависеть от их взаимодействия, а последнее должно быть функцией $\xi = \frac{1}{d}$, где d — среднее расстояние между примесными центрами. Поэтому

$$\Delta W_{D,A}(\xi) = \Delta W_{D,A}^{\circ} + \left(\frac{\partial \Delta W}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \dots$$

Здесь $\Delta W_{D,A}^{\circ}$ — значение энергии возбуждения при исчезающей малой концентрации ($d = \infty$). Ограничивааясь первыми членами разложения и учитывая, что $d \sim (n_{D,A})^{-1/3}$, получим

$$\Delta W_{D,A} = \Delta W_{D,A}^{\circ} - \alpha \sqrt[3]{n_{D,A}}. \quad (131.08)$$

Для кремния $\Delta W_{D,A}^{\circ} = 0,054$ эв и $\alpha = 4,3 \cdot 10^{-8}$ эв · см. В силу зависимости (131.08) наклон участков ab с увеличением концентрации уменьшается. При концентрации примесей

$$n_D = \left(\frac{\Delta W^{\circ}}{\alpha} \right)^3 = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3} (\sim 0,005\%) \Delta W_D = 0,$$

концентрация электронов проводимости становится постоянной, не зависящей от температуры (прямая $a''b''c''$). При такой концентрации примесей кремний становится полуметаллом (электронный газ невырожденный, но плотность его не зависит от температуры).

Рассмотренная зависимость $\ln \gamma$ от $\frac{1}{T}$ искажается зависимостью от T предэкспоненциального множителя. При нормальных температурах для полупроводников с атомной решеткой (Ge, Si) $\frac{1}{b_T} \simeq aT^{3/2}$.

При понижении температуры $\frac{1}{b_T}$ убывает, так как уменьшается

эффективность теплового рассеяния и в атомных решетках преобладающее значение приобретает рассеяние на ионизированных примесях. Это рассеяние аналогично резерфордовскому рассеянию α -частиц ядрами: дырка (или электрон) движется в кулоновском поле иона по гиперболе, во внешнем (соответственно, внутреннем) фокусе которой находится ион. В этом случае эффективное сечение рассеяния пропорционально $\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2$, где Z — заряд иона и $\frac{1}{2}mv^2$ — кинетическая энергия носителя. Поэтому длина свободного пробега l носителя пропорциональна v^4 , а средняя длина пробега $\bar{l} \sim T^2$. Кроме того, средняя длина свободного пробега, обусловленного столкновениями с ионами, обратно пропорциональна их концентрации. Поэтому, учитывая (131.04), получим

$$b_{D,A} \sim \frac{T^{3/2}}{n_{D,A}}. \quad (131.09)$$

Если в рассеянии носителей тока участвуют оба механизма, тепловой (фононный) и ионный, то в первом приближении результирующая обратная подвижность равна сумме обратных подвижностей, обусловленных различными механизмами, то есть

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b_T} + \frac{1}{b_{D,A}} = a_1 T^{3/2} + a_2 \frac{n_{D,A}}{T^{3/2}}. \quad (131.10)$$

Зависимость $\ln b$ от T дана на рисунке 71. Из (131.10) видно, что положение максимума зависит от концентрации примесей: с увеличением концентрации примесей максимум смещается в сторону высоких температур.

В ионных кристаллах рассеяние носителей тока тепловыми колебаниями гораздо сильнее, чем в атомных решетках — взаимодействие носителей тока с ионами решетки сильнее, чем с нейтральными атомами. Поэтому подвижность носителей в ионных кристаллах обычно меньше, чем в атомных. Температурная зависимость подвижности

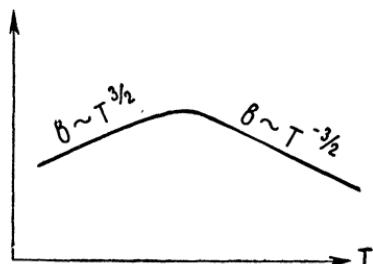


Рис. 71.

носителей определяется соотношениями

$$b \sim \frac{1}{T^{1/2}} \text{ при } T > \frac{\hbar\omega_0}{k} \quad \text{и} \quad b \sim e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} \text{ при } T < \frac{\hbar\omega_0}{k} \quad (131.11)$$

(ω_0 — максимальная частота продольных оптических колебаний решетки). При оптических колебаниях решетки соседние ионы разных знаков смещаются в противоположных направлениях (вследствие чего возникает электрический дипольный момент). При акустических колебаниях соседние ионы смещаются в одну и ту же сторону.

Следует отметить, что подвижности носителей в ионных кристаллах еще слабо изучены. По-видимому, в проводимости ионных кристаллов существенную роль играют так называемые поляроны, теория которых была развита С. И. Пекаром. Поляроном называется электрон, находящийся на энергетическом уровне, расположенном в запрещенной зоне ниже дна зоны проводимости. Этот энергетический уровень возник вследствие сильного взаимодействия электрона с продольными оптическими колебаниями решетки.

Вследствие диэлектрической поляризации кристалла полем электрона ионы решетки смещаются и колеблются не около узлов, а около смещенных положений равновесия. Энергия диссоциации полярона (расстояние поляронного энергетического уровня от нижнего края зоны проводимости) равна

$$\epsilon_{\text{пол.}} = -0,0544 \frac{m^* e^4}{\hbar^2} c^2 = -1,47 \frac{m^*}{m} c^2 \text{ эв}, \quad (131.12)$$

где m^* — эффективная, а m — обычная масса электрона; $c = \frac{1}{\epsilon_{\text{опт.}}} - \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon_{\text{опт.}} = N^2$ — оптический диэлектрический коэффициент кристалла, равный квадрату показателя преломления.

Равновесная концентрация поляронов определяется приближенно формулой

$$n_{\text{пол.}} = 2 \left(\frac{M k T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\zeta - \epsilon_{\text{пол.}}}{kT}}, \quad (131.13)$$

где M — эффективная масса полярона (M порядка нескольких сотен m). Из (131.14) и (126.10) видно, что $n_{\text{пол.}}$ может на несколько порядков превышать концентрации n_L^- электронов в зоне L . Вследствие трансляционной симметрии решетки поляроны могут передвигаться в кристалле, но подвижность их значительно меньше подвижности электронов (в NaCl $b_{\text{пол.}} \approx 372 \text{ СГСЕ} = 1,24 \frac{cm^2}{v \cdot \text{сек}}$).

Опыт показывает, что подвижность носителей тока в ионных кристаллах действительно значительно меньше подвижности носителей в атомных решетках. Поскольку равновесная концентрация поляронов приблизительно в 10^6 раз превышает концентрацию n_L^- , можно считать, что носителями тока в ионных кристаллах являются поляроны.

Влияние температурной зависимости подвижности на электропроводность приведет к некоторому искажению идеальной картины, рассмотренной выше (рис. 70, б).

§ 132. Теплопроводность полупроводников. Экситоны

В полупроводниках теплопроводность κ равна

$$\kappa = \kappa_p + \kappa_{\text{эл.}},$$

где κ_p — теплопроводность решетки, $\kappa_{\text{эл.}}$ — электронная теплопроводность. Обычно $\kappa_{\text{эл.}}$ значительно меньше κ_p . В случае, когда число свободных электронов велико ($n_L \sim 10^{18} - 10^{19} \text{ см}^{-3}$), $\kappa_{\text{эл.}}$ и κ_p могут быть одного порядка.

Механизм электронной теплопроводности в полупроводниках сложнее, чем в металлах: наряду с обычным механизмом, рассмотренным в § 129 в области высоких температур, имеет место перенос энергии экситонами и электронно-дырочными парами.

Обычная электронная (или дырочная) теплопроводность полупроводника может быть вычислена с помощью формул (129.10) и (129.11), если в качестве f_0 взять распределение Максвелла — Больцмана (131.01). Вычисления, аналогичные проведенным выше, дают

$$\kappa'_{\text{эл.}} = \frac{4}{3} \frac{n \bar{k}^2}{m^*} \left(\frac{1}{v} \right) T = \frac{8}{3} \frac{\bar{k} n k^2 T}{(2\pi m^* k T)^{1/2}}. \quad (132.01)$$

Поэтому имеет место соотношение, аналогичное закону Видемана и Франца

$$L = \frac{\kappa'_{\text{эл.}}}{\gamma T} = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 1,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{вт}\cdot\text{м}}{\text{град}^2}. \quad (132.02)$$

Электронная теплопроводность имеет место в области примесной проводимости. При повышении температуры вблизи области собственной проводимости начинает играть роль экситонная проводимость.

Представление об экситонах введено Я. И. Френкелем (1931). В результате теплового возбуждения электрона в нормальной зоне появляется дырка, а в зоне проводимости — электрон. В металлах электрон и дырку можно рассматривать независимо друг от друга, так как в них избыток заряда нейтрализуется благодаря соответствующему изменению плотности электронов проводимости (экранирование). Следовательно, в металлах два заряда будут взаимодействовать только на очень малом расстоянии. В полупроводниках и изоляторах подобное экранирование не происходит. Поэтому два заряда будут взаимодействовать на значительно больших расстояниях

(это обстоятельство учитывалось в § 125, когда рассматривалась энергия примесных электронов). Поэтому должны существовать состояния, в которых электрон и дырка движутся не независимо друг от друга, а вращаясь один вокруг другого, образуют подобие водородного атома. Такую модель экситона предложил Мотт. Энергию экситона получим, если к энергии возбуждения $\Delta W = W_L - W_N$ добавим квантованную энергию системы двух зарядов, определяемую формулой Бора (117.02). Вследствие поляризации атомов надо взять вместо e^2 величину $\frac{e^2}{\epsilon_{\text{опт}}}$, где $\epsilon_{\text{опт}}$ — оптический диэлектрический коэффициент вещества. Вводя вместо m приведенную массу

$$\mu = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-},$$

получим

$$\epsilon_n = \Delta W - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon_{\text{опт}}^2 n^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (132.03)$$

(n — главное квантовое число). В § 125 показано, что подобный метод рассмотрения допустим, если $\epsilon_{\text{опт}}$ достаточно велико. Из (132.03) вытекает существование экситонных уровней, расположенных в запрещенной зоне (ниже дна зоны проводимости). Существование этих уровней экспериментально доказано Гроссом. Для образования экситона необходима минимальная энергия

$$\epsilon_1 = \Delta W - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon_{\text{опт}}^2}$$

(ΔW — энергия возбуждения свободных электронов и дырок). Экситон может передвигаться как целое с некоторым импульсом \vec{p} и кинетической энергией

$$\epsilon = \frac{p^2}{2(m_+ + m_-)}.$$

Так как экситон нейтрален, то при его передвижении переносится лишь энергия, но не заряд. При наличии градиента температуры экситоны будут принимать участие в процессе теплопроводности. Они образуются преимущественно на горячем конце тела (при этом поглощается энергия $\epsilon_n + \epsilon$) и диффундируют к холодному. Там происходит рекомбинация электрона и дырки и выделяется энергия $\epsilon_n + \epsilon$. Так как $\epsilon_n + \epsilon \gg kT$, то энергия, переносимая экситоном, значительно больше энергии, переносимой электроном или дыркой в области примесной проводимости. Согласно Г. Е. Пикусу коэффициент экситонной теплопроводности равен

$$x_{\text{екс.}} = D_{\text{екс.}} k \left(\frac{\epsilon_1}{kT} + 2 \right)^2 n_{\text{екс.}}, \quad (132.04)$$

где $D_{\text{экс.}}$ — коэффициент диффузии экситонов, k — постоянная Больцмана, $n_{\text{экс.}}$ — концентрация экситонов при данной температуре, равная

$$n_{\text{экс.}} = 2 \left(\frac{m^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_1}{kT}}. \quad (132.05)$$

Коэффициент диффузии $D_{\text{экс.}}$, как показали А. И. Ансельм и Ю. А. Фирсов, близок к коэффициенту диффузии электронов и дырок и может быть значительно выше при равенстве их подвижностей.

При дальнейшем повышении температуры появляется теплопроводность, обусловленная свободными электронами в зоне L и дырками в зоне N . В области примесной проводимости, когда присутствуют одни электроны или одни дырки, поток этих носителей от горячего конца тела к холодному вызывает электрическое поле, уравновешивающее диффузию — устанавливается стационарное состояние, при котором через каждое сечение в обоих направлениях проходит одинаковое число носителей, но с разными кинетическими энергиями (§ 129). В области собственной проводимости число пар электрон — дырка, возникающих на горячем конце тела, будет больше, чем на холодном. В результате этого возникнет диффузия электронно-дырочных пар в направлении падения температуры. Диффузионный поток электронов вместе с дырками не переносит заряда и не создает противодействующего поля. Если подвижности b_- и b_+ электронов и дырок различны, то более быстрые из них уходят при диффузии вперед и создают электрическое поле, которое действует на заряды так, что устанавливается одинаковая скорость их диффузии (биполярная диффузия). На горячем конце тела будет поглощаться энергия

$\Delta\epsilon = \Delta W + \frac{p_+^2}{2m_+} + \frac{p_-^2}{2m_-}$, необходимая для создания пары электрон — дырка, а на холодном конце тела пары будут рекомбинировать и та же энергия будет выделяться. Переносимая парой энергия, как и в случае экситонов, значительно больше kT .

В 1940 году Б. И. Давыдов и И. М. Шмушкевич показали, что электропроводность, определяемая биполярной диффузией пар, равна

$$\kappa_{\text{пар}} = 4 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \frac{\gamma_+ \gamma_-}{\gamma_+ + \gamma_-} \left(\frac{\Delta W}{2kT} + 2 + r \right)^2, \quad (132.06)$$

где γ_+ и γ_- — удельные электропроводности, создаваемые в отдельности дырками и электронами, а r — показатель степени в выражении, дающем зависимость длины свободного пробега зарядов от энергии ($l \sim \epsilon^r$).

Экспериментальные исследования, проведенные академиком А. Ф. Иоффе и его сотрудниками, показали, что изложенные соображения находятся в хорошем согласии с опытом. В области примесной проводимости хорошо соблюдается соотношение (132.02).

Вблизи области собственной проводимости теплопроводность начинает расти значительно быстрее электропроводности. В области собственной проводимости $\chi_{\text{эл.}}$ достигает значений много больших, чем следует из (132.02).

§ 133. Контактные явления

Рассмотрим процессы на границе (контакте) двух тел, носителями тока в которых являются электроны или дырки. На границе тела существует потенциальный барьер, удерживающий электроны внутри тела, то есть имеется некоторая разность потенциалов между какой-либо точкой внутри тела и точкой вне тела. Обозначим через φ_i и φ_a соответственно потенциалы точек внутри и вне тела у его поверхности. Потенциальные энергии электрона в этих точках равны

$$P_i = -e_0 \varphi_i, \quad P_a = -e_0 \varphi_a, \quad (e_0 > 0). \quad (133.01)$$

Разность $P_a - P_i$ есть, очевидно, глубина дна зоны проводимости. Удобно принять определенную нормировку энергии. Примем потенциал достаточно удаленной от уединенного тела точки равным нулю. Тогда энергия, соответствующая дну зоны проводимости, равна $W_L = -W_a$, где W_a — глубина дна зоны проводимости. Кроме того,

$$P_a - P_i = W_a. \quad (133.02)$$

Рассмотрим контакт двух различных тел 1 и 2. Если тела длительно находились в соприкосновении, то в результате обмена электронами устанавливается термодинамическое равновесие. При этом разность $\varphi_{a1} - \varphi_{a2} = \frac{P_{a2} - P_{a1}}{e_0}$ называется внешней контактной разностью потенциалов, а $\varphi_{i1} - \varphi_{i2} = \frac{P_{i2} - P_{i1}}{e_0}$ — внутренней контактной разностью потенциалов. Имея в виду графические изображения, будем рассматривать потенциальные энергии P и к их разностям применять те же термины.

Чтобы вычислить контактные потенциалы, заметим, что в силу принятой нормировки при наличии внешнего поля химический потенциал электронов в теле равен

$$\zeta = \zeta_0 + P_i = \zeta_0 + P_a - W_a = P_a - \Phi. \quad (133.03)$$

Здесь ζ_0 — химический потенциал, отсчитываемый от дна зоны проводимости ($\zeta_0 > 0$ для металлов, $\zeta_0 < 0$ для полупроводников), $\Phi = W_a - \zeta_0$ — работа выхода электрона из тела (§ 127).

Равновесие при контакте двух или нескольких тел достигается тогда, когда химический потенциал электронов во всех частях системы имеет одно и то же значение, то есть

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \dots \quad (133.04)$$

Это есть обычное термодинамическое условие равновесия компоненты, способной существовать в нескольких фазах. Роль фаз в данном случае играют различные соприкасающиеся тела. Постоянство ζ можно получить из уравнения (129.10) при условии, что $j = 0$ и $\frac{dT}{dx} = 0$. Тогда

$$\frac{d\zeta_0}{dx} + e_0 E_x = \frac{d}{dx} (\zeta_0 - e_0 \varphi_i) = 0.$$

Отсюда вытекает постоянство $\zeta_0 - e_0 \varphi = \zeta_0 + P_i$ вдоль тела [в уравнении (129.10) заряд e заменен через $-e_0$].

Так как $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta}{dn} \frac{dn}{dx}$, где n — концентрация носителей ($e \geq 0$), уравнение (129.10) можно переписать в форме

$$\frac{j}{e} = -D \frac{dn}{dx} + nbE_x. \quad (133.05)$$

Здесь

$$D = -\frac{2C}{3m} \frac{d\zeta}{dn} \int_0^{\infty} \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{3/2} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad nb = -\frac{2eC}{3m} \int_0^{\infty} \frac{l(\varepsilon)}{v} \varepsilon^{3/2} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon. \quad (133.06)$$

Первый член в (133.05) дает диффузионный поток носителей, возникающий вследствие наличия градиента их концентрации; второй член определяет поток, возникающий вследствие дрейфа во внешнем поле. Коэффициенты D и b — соответственно коэффициент диффузии и подвижность носителей. Из (133.06) следует, что D и b связаны соотношением

$$D = \frac{b}{e} n \frac{d\zeta}{dn}. \quad (133.07)$$

Для достаточно высоких температур $\zeta = kT \ln n + \dots$, поэтому

$$D = \frac{bkT}{e}. \quad (133.08)$$

Соотношение (133.08) установлено А. Эйнштейном.

Заметим, что при наличии поля E_x условие $j = 0$ означает, что поток носителей, вызванный электрическим полем, компенсируется обратным диффузионным потоком.

Согласно (133.03) и (133.04) на границе двух тел $P_{a1} - \Phi_1 = P_{a2} - \Phi_2$. Откуда внешняя контактная разность

$$P_{12} = P_{a1} - P_{a2} = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (133.09)$$

определяется разностью работ выхода. Полученные соотношения для контакта двух металлов и металла с полупроводником представлены на рисунке 72 (в предположении, что $\Phi_1 > \Phi_2$). Так как работа выхода сильно зависит от состояния поверхности (адсорбированных слоев), то и внешняя контактная разность так же зависит от состояния поверхности.

Рассмотрим распределение заряда и потенциала в телах непосредственно вблизи контакта. Напряженность контактного электрического

поля в вакууме между двумя телами зависит от расстояния между их поверхностями. Предполагая поверхности тел плоскими и параллельными, имеем

$$E = E_n = -\frac{\Phi_{12}}{d} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{ed}. \quad (133.10)$$

Если допустить, что практически все падение потенциала происходит в промежутке d между телами, то поверхностный заряд, появляющийся на теле и определяемый избыточными электронами или дырками

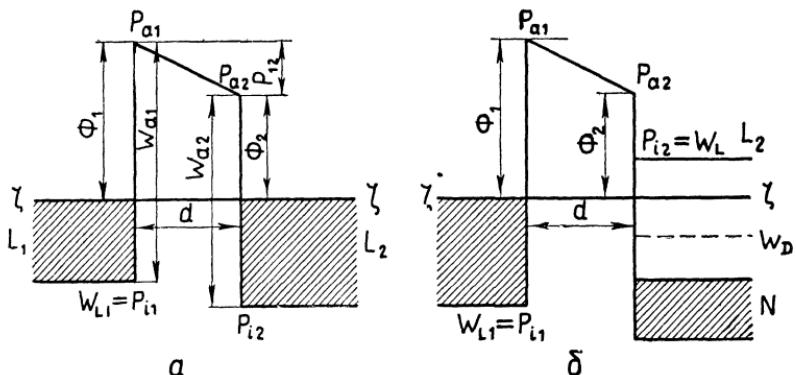


Рис. 72.

в поверхностном слое тела, равен согласно (86.04) $\frac{E_n}{4\pi}$. Поэтому поверхностная плотность избыточных носителей равна

$$n' = \frac{|\Phi_1 - \Phi_2|}{4\pi e^2 d}. \quad (133.11)$$

Отсюда при $\Phi_1 - \Phi_2 = 1 \text{ эв}$ и $d = 1 \text{ см}$, $n' = 5,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2}$. С уменьшением d поверхностная плотность растет и при $d \sim 10^{-7} \text{ см}$ (на таких расстояниях тела свободно обмениваются электронами)

$$n' \simeq 5,5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2} \quad (\Phi_1 - \Phi_2 = 1 \text{ эв}).$$

Толщину δ слоя, в котором располагаются избыточные носители, можно оценить с помощью соотношения $n' = n\delta$ (n — объемная концентрация носителей, которую можно считать практически равной концентрации вдали от поверхности тела). Для металлов с $n \simeq 10^{22} \text{ см}^{-3}$ при $d = 10^{-7} \text{ см}$ имеем $\delta \simeq 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ см}$. Это значит, что избыточные носители будут находиться на поверхностных атомах. Так как постоянная решетки $a \simeq 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, то один избыточный носитель будет находиться на $\frac{1}{a^2 n} \sim 200$ поверхностных атомах. Следовательно, изменение концентрации носителей (электронов) будет мало.

Совсем иные соотношения имеют место в полупроводнике. Если равновесная концентрация носителей $n \simeq 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $n' \simeq 5,5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$, то $\delta \simeq 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}$. Следовательно, область, занятая избыточными

носителями и электрическим контактным полем, проникает в полупроводник на значительную глубину. Так как $\delta \gg d$, то формула (133.11) уже несправедлива и требуется более точная оценка δ . Если при контакте полупроводник заряжается положительно (работа выхода полупроводника $\Phi_2 < \Phi_1$), то приконтактный слой толщиной δ будет обеднен электронами; в противном случае он обогащается ими.

Распределение потенциала в приконтактном слое (слое объемного заряда) определяется уравнением Пуассона (80.07). Для полупроводника n -типа плотность заряда $\rho = e(n_D^+ - n_L^-)$, где n_D^+ — концентрация ионизированных доноров, n_L^- — концентрация электронов в зоне проводимости. Вдали от поверхности $n_D^+ = n_L^- = n_{L0}^-$. Вблизи поверхности концентрации n_L^- и n_D^+ определяются формулами (126.10) и (126.02). В знаменателе формулы (126.02) надо пренебречь единицей и (ввиду наличия поля) W_L и W_D заменить через $W_L + P_i(x)$ и $W_D + P_i(x)$ соответственно. Получим

$$\left. \begin{aligned} n_L^- &= Z_L e^{\frac{\zeta - W_L - P_i(x)}{kT}} = n_{L0}^- e^{-\frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT}}, \\ n_D^+ &= \frac{n_D}{G_D} e^{\frac{W_D + P_i - \zeta}{kT}} = n_{D0}^+ e^{\frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT}}, \end{aligned} \right\} \quad (133.12)$$

где $n_{L0}^- = n_{D0}^+ = Z_L e^{\frac{\zeta - W_L - P_{i2}}{kT}}$ и P_{i2} — значение потенциальной энергии в полупроводнике вдали от контакта. Если $P_i(x) > P_{i2}$, то приконтактный слой имеет недостаток электронов (и увеличенное число ионизированных доноров); в противном случае имеет место избыток электронов. Таким образом, вводя вместо потенциала φ_i величину $-\frac{P_i(x)}{e_0}$, можно уравнение Пуассона написать в форме

$$\frac{d^2 P_i}{dx^2} = \frac{4\pi e_0^2}{\epsilon} n_{L0}^- \left(e^{\frac{P_i - P_{i2}}{kT}} - e^{-\frac{P_i - P_{i2}}{kT}} \right), \quad (133.13)$$

где ϵ — диэлектрический коэффициент полупроводника.

Рассмотрим случай относительно высоких температур, когда выполнено условие (126.12) и практически все доноры ионизированы. Это имеет место, например, в германии и кремнии при комнатной температуре. Тогда $n_{L0}^- = n_D^+ = n_D$. Предположим, что $P_i - P_{i2} > 0$, то есть приконтактный слой обеднен электронами. Так как $P_i - P_{i2} \gg kT$, то согласно (133.12) $n_L^-(x) \ll n_{L0}^- = n_D$. Поэтому плотностью заряда электронов можно пренебречь по сравнению с постоянной плотностью ионизированных доноров. Уравнение (133.13) принимает вид

$$\frac{d^2 P_i}{dx^2} = \frac{4\pi e_0^2 n_D}{\epsilon}. \quad (133.14)$$

В полупроводнике на расстояниях $x \geq \delta$ от границы с металлом поля не должно быть. Поэтому при $x = \delta$

$$P_i = P_{i2}, \quad E(\delta) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dP_i}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \quad (133.15)$$

Решение уравнения (133.14), удовлетворяющее граничным условиям (133.15), имеет вид

$$P_i(x) = \frac{2\pi e_0^2 n_D}{\epsilon} (\delta - x)^2 + P_{i2}. \quad (133.16)$$

На поверхности ($x = 0$) полупроводника $P_i = P_i(0) = P_a - W_{a2}$. Поэтому глубина проникновения поля в полупроводник равна

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon [P_i(0) - P_{i2}]}{2\pi e_0^2 n_D}}. \quad (133.17)$$

При тесном контакте полупроводника с металлом, когда $d \leq 10^{-7}$ см, основное падение потенциала происходит в полупроводнике. Потенциал на поверхности полупроводника практически равен потенциальну на поверхности металла I , поэтому $P_a = P_{a1}$ и согласно (133.09)

$$P_i(0) - P_{i2} = P_{a1} - (P_{i2} + W_{a2}) = P_{a1} - P_{a2} = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (133.18)$$

Окончательно,

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon (\Phi_1 - \Phi_2)}{2\pi e_0^2 n_D}}. \quad (133.19)$$

Из (133.19) следует, что δ растет с увеличением разности работ выхода и уменьшается с увеличением концентрации доноров (или носителей тока).

Из (133.16) и (133.03) видно, что потенциальная энергия электрона P_i и химический потенциал ζ в слое δ есть функции от координаты x . Соответствующие энергетические соотношения в приконтактном слое изображены на рисунке 73. На этом рисунке зазор между телами d и падение потенциала в нем не изображены, так как $d \ll \delta$. Кроме того, при выполнении условия (126.12) уровень ζ лежит значительно ниже донорных уровней (§ 126). На рисунке 73 изображены четыре случая контакта металла — полупроводник в предположении полной ионизации примесей, когда $n_D^+ = n_D^-$ или $n_A^- \approx n_A$. Если работа выхода металла Φ_1 больше работы выхода полупроводника Φ_2 , у границы в полупроводнике образуется слой δ положительного объемного заряда (рис. 73, а, б). Для электронного полупроводника (рис. 73, а) концентрация электронов в слое δ меньше, чем в объеме; этот слой обладает пониженной электропроводностью, вследствие чего называется запорным. Для дырочного полупроводника (рис. 73, б) слой δ имеет повышенное число дырок и является антизапорным, так как его проводимость больше, чем проводимость в объеме полупроводника.

Если $\Phi_1 < \Phi_2$, то на границе электронного полупроводника (рис. 73, *в*) образуется антизапорный слой, а на границе дырочного — запорный слой (рис. 73, *г*).

В заключение рассмотрим контакт двух полупроводников. Наиболее интересным случаем является так называемый «*n* — *p* переход» — контакт электронного (*n*) и дырочного (*p*) полупроводников.

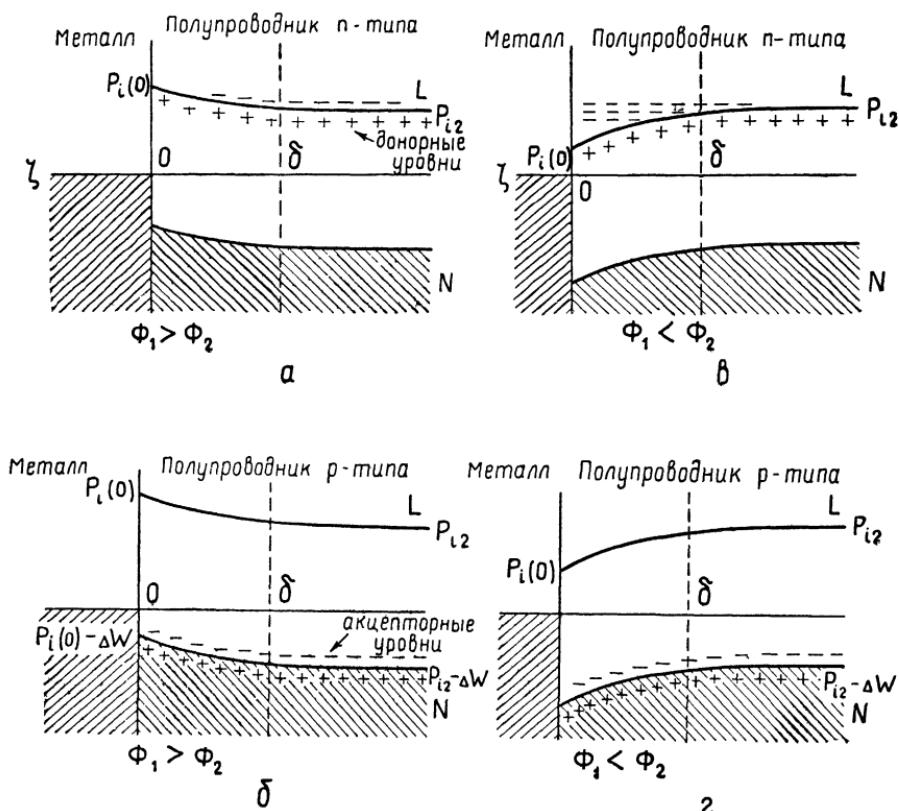


Рис. 73.

Подобный *n* — *p* переход может быть создан внутри полупроводника, если в одну часть образца внести донорную примесь, а в другую — акцепторную. При этом образуются области электронной и дырочной проводимости, между которыми создается переходная область, *n* — *p* переход, обладающая большим сопротивлением. Распределение концентрации носителей, ход химического и электрического потенциалов определяют распределение примесей. Рассмотрим полупроводник в области температур, в которой все примеси ионизированы, то есть все донорные уровни свободны, а акцепторные заняты электронами. Предположим для простоты, что изменение

концентрации примесей происходит скачком (рис. 74) так, что слева от плоскости $x=0$, $n_A \neq 0$, $n_D = 0$, а справа — $n_A = 0$, $n_D \neq 0$.

При термодинамическом равновесии в правой n -области химический потенциал проходит вблизи дна зоны проводимости, в левой p -области он проходит вблизи потолка заполненной зоны. Согласно (126.13) и (126.15) получим следующие выражения для расстояния

уровня химического потенциала от дна зоны проводимости L в n - и p -областях соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{10} &= W_L - \zeta_1 = kT \ln \frac{Z_L}{n_D}, \\ \zeta_{20} &= W_L - \zeta_2 = \Delta W - kT \ln \frac{Z_N}{n_A}. \end{aligned} \right\} \quad (133.20)$$

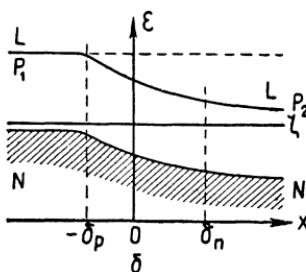


Рис. 74.

Через границу раздела $x=0$ справа налево проходит поток электронов, а в противоположном направлении — поток дырок. В результате этого у границы в p -области появится отрицательный объемный заряд, а в n -области — положительный. Это происходит до тех пор, пока созданное зарядом контактное поле не уравновесит оба потока. Учитывая потенциальную энергию электронов в контактном поле, получим

$$\zeta_1 = \zeta_{10} + P_1, \quad \zeta_2 = \zeta_{20} + P_2. \quad (133.21)$$

При равновесии $\zeta_1 = \zeta_2$, поэтому контактная разность равна

$$P_{12} = P_1 - P_2 = \zeta_{20} - \zeta_{10} = \Delta W - kT \ln \frac{Z_L Z_N}{n_D n_A} = kT \ln \frac{n_D n_A}{n^2}, \quad (133.22)$$

где $n = (Z_L Z_N)^{1/2} e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}$ есть концентрация носителей в собственном полупроводнике, в котором $n_L^- = n_N^+ = n$. Потенциальный барьер, образованный контактной разностью, препятствует движению дырок слева направо и электронов справа налево. Чтобы вычислить распределение потенциала, заметим, что объемный заряд в основном определяется ионизированными примесями, так как концентрации как электронов, так и дырок быстро падают при углублении в контактную область. Поэтому потенциальная энергия электронов определяется уравнением Пуассона

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2P}{dx^2} &= \frac{4\pi e_0^2}{\epsilon} n_D && \text{для } 0 \leq x \leq \delta_n \\ \frac{d^2P}{dx^2} &= -\frac{4\pi e_0^2}{\epsilon} n_A && \text{для } -\delta_p \leq x \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (133.23)$$

(δ_n и δ_p — толщины слоя объемного заряда в n - и p -областиах соответственно). Уравнение (133.23) решается при следующих граничных условиях:

$$\text{при } x = -\delta_p, P = P_1, \frac{dP}{dx} = 0; \text{ при } x = \delta_n, P = P_2, \frac{dP}{dx} = 0. \quad (133.24)$$

Решение имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } -\delta_p \leq x \leq 0, \quad P = P_1 - \frac{2\pi e_0^2}{\epsilon} n_A (\delta_p + x)^2 \\ \text{при } 0 \leq x \leq \delta_n, \quad P = P_2 + \frac{2\pi e_0^2}{\epsilon} n_D (\delta_n - x)^2 \end{array} \right\}. \quad (133.25)$$

На границе ($x = 0$) оба решения и первые производные должны совпадать. Из равенства $\frac{dP}{dx}$ при $x = 0$ имеем $n_A \delta_p = n_D \delta_n$. Введем полную толщину слоя объемного заряда $\delta = \delta_n + \delta_p$; тогда

$$\frac{\delta_n}{\delta} = \frac{n_A}{n_D + n_A}, \quad \frac{\delta_p}{\delta} = \frac{n_D}{n_D + n_A}. \quad (133.26)$$

Толщина слоя δ получается из равенства выражений (133.25) (при $x = 0$)

$$\delta = \left(\frac{\epsilon P_{12}}{2\pi e_0^2} \frac{n_D + n_A}{n_D n_A} \right)^{1/2}. \quad (133.27)$$

Полученные результаты представлены на рисунке 74.

Задача

Определить для германия при $T = 300^\circ$ контактную разность $n - p$ перехода и толщины запорных слоев при $n_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $n_A = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $\Delta W = 0,72 \text{ эв}$, $\epsilon = 16,5$.

Решение. Согласно (124.11) и (124.12) имеем $Z_L = Z_N = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (при $G_L = G_N = 2$, $m_L = m_N = m$). Поэтому $n^2 = 6,3 \cdot 10^{26}$. Далее из (133.22) следует, что $P_{12} = 0,31 \text{ эв}$. Так как $n_A \gg n_D$, то $\delta_n \gg \delta_p$. Из (133.27) имеем

$$\delta \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ см} \text{ и } \delta_n \approx \delta, \text{ тогда как } \delta_p \approx \delta \frac{n_D}{n_A} \approx 8 \cdot 10^{-7} \text{ см}.$$

§ 134. Теория выпрямления на контакте двух тел

Проводимость контакта двух тел в прямом и обратном направлениях может быть различной. Это свойство контактов используется в технике для выпрямления переменных токов.

Рассмотрим влияние внешней разности потенциалов на контактную разность потенциалов металла и полупроводника. Пусть потенциал внешнего поля на поверхности металла φ_1 , а на поверхности полупроводника у контакта φ_2 . Потенциальные энергии электрона на этих поверхностях соответственно равны $P_{a1} = P_{a1}^0 - e_0 \varphi_1$ и $P_{a2} = P_{a2}^0 - e_0 \varphi_2$

(P_{a1}^0 и P_{a2}^0 — потенциальные энергии электрона при отсутствии внешнего поля). Контактная разность энергий равна

$$P_{12} = P_{a1} - P_{a2} = P_{a1}^0 - P_{a2}^0 - e_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Но по (133.09) $P_{a1}^0 - P_{a2}^0 = \Phi_1 - \Phi_2$ есть разность работ выхода, а $\varphi_1 - \varphi_2 = V$ — разность потенциалов на границе металла — проводник. Поэтому

$$P_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V. \quad (134.01)$$

Изменение P_{12} при наличии приложенной разности потенциалов вызывает изменение толщины слоя объемного заряда в полупроводнике. Учитывая, что $P_i(0) - P_{i2} = P_{12}$, из (133.17) для толщины слоя объемного заряда в случае полной ионизации доноров получим

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon(\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V)}{2\pi e^2 n_D}}. \quad (134.02)$$

Таким образом, с увеличением разности потенциалов толщина запорного слоя уменьшается, если $V > 0$, и увеличивается, если $V < 0$. При $e_0 V = \Phi_1 - \Phi_2$ запорный слой исчезает, напряжение V распределяется равномерно по толщине полупроводника.

Рассмотрим плотность тока, идущего через контакт при $V \neq 0$. Процесс прохождения электрического тока через контакт различен при различных соотношениях между средней длиной свободного пробега l электронов в полупроводнике и толщиной δ слоя объемного заряда. Если $l \geq \delta$, то столкновения электронов в слое не играют роли. При $l < \delta$ необходимо учитывать рассеяние электронов в слое объемного заряда. Пусть напряженность электрического поля такова, что энергия, приобретенная электроном в поле на длине свободного пробега, мала по сравнению со средней энергией теплового движения kT ,

$$e_0 E l \ll kT. \quad (134.03)$$

Если критерий (134.03) не выполнен, то в полупроводнике появляется нелинейная зависимость j от E .

Вычислим напряженность электрического поля в запорном слое полупроводника. Согласно (133.16)

$$E(x) = -\frac{d\varphi_t}{dx} = \frac{1}{e_0} \frac{dP_t}{dx} = -\frac{4\pi e_0^2 n_D}{\epsilon} (\delta - x) \quad (134.04)$$

(предполагается, что в полупроводнике n -типа доноры полностью ионизированы). На границе полупроводника ($x = 0$)

$$|E(0)| = \frac{4\pi e_0^2 n_D}{\epsilon} \delta. \quad (134.05)$$

Исключим отсюда $n_D \delta$ с помощью (134.02); получим

$$|E(0)| = \frac{2(\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V)}{e_0 \delta} = \left[\frac{8\pi n_D (\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V)}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (134.06)$$

Следовательно, $E_{\max} = \frac{2(\Phi_1 - \Phi_2)}{e_0 \delta}$. Критерий (134.03) принимает вид

$$l \ll \frac{kT}{2(\Phi_1 - \Phi_2)} \delta \quad \text{или} \quad \frac{\delta}{l} \frac{kT}{2(\Phi_1 - \Phi_2)} \gg 1. \quad (134.07)$$

Величина δ , как видно из (134.02), растет с уменьшением концентрации примесей. Следовательно, критерий (134.07) будет лучше выполнен для примесных полупроводников с малой концентрацией примеси и малой длиной свободного пробега (малой подвижностью). Например, для закиси меди (Cu_2O), являющейся дырочным полупроводником с подвижностью $b_+ \approx 60 \frac{\text{см}^2}{\text{в. сек}}$ и $\epsilon = 8,75$, $l = 4 \cdot 10^{-7} \text{ см}$. При концентрации дырок

$$n_N^+ \approx 10^{14} \text{ см}^{-3} \quad \text{и} \quad |\Phi_1 - \Phi_2| = 0,5 \text{ эв}, \quad \frac{\delta}{l} \frac{kT}{2|\Phi_1 - \Phi_2|} = 15,$$

то есть условие (134.07) хорошо выполняется. В германии, обладающем большой подвижностью носителей $b_- = 3500 \frac{\text{см}^2}{\text{в. сек}}$, $\epsilon = 16,5$, $l = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, при той же концентрации доноров $\frac{\delta}{l} \frac{kT}{2|\Phi_1 - \Phi_2|} = 0,41$. Так как $\frac{kT}{2|\Phi_1 - \Phi_2|} \leq 0,1$, то для таких полупроводников $l \geq \delta$. Поэтому электроны в запорном слое почти не рассеиваются решеткой. Такой запорный слой можно назвать тонким. Итак, если выполнено условие

$$l \gg \frac{kT}{2|\Phi_1 - \Phi_2|} \delta, \quad (134.08)$$

то все электроны, имеющие кинетическую энергию, превышающую потенциальный барьер запорного слоя, могут выйти из полупроводника. Если контакт с металлом хороший (зазор $d \leq 10^{-7} \text{ см}$), то электроны проникнут в металл. Для упрощения будем пренебрегать отражением электронов на границе (будем считать $D = 1$). Тогда ток, идущий через контакт в случае тонкого запорного слоя, равен $j = j_{21} - j_{12}$, где j_{21} — ток, идущий из полупроводника в металл, а j_{12} — ток, идущий из металла в полупроводник. Ток j_{21} дается формулой (127.05), где $\zeta^{(i)}$ согласно (133.03) равняется $\zeta^{(i)} = \zeta_{02} + P_{i2}(0) - e\varphi_2$ и ζ_{02} — химический потенциал, отсчитываемый от дна зоны проводимости. Поэтому

$$j_{21} = G \frac{emk^2}{4\pi^2 h^3} T^2 e^{\frac{\zeta_{02} + P_{i2}(0) - e\varphi_2}{kT}} \quad (134.09)$$

С другой стороны, ток j_{12} равен

$$j_{12} = G \frac{emk^2}{4\pi^2\hbar^3} T^2 e^{\frac{\zeta_{01} + P_{i1}(0) - e\varphi_1}{kT}}. \quad (134.10)$$

Так как $\zeta_{02} + P_{i2}(0) = \zeta_{01} + P_{i1}(0)$, то при $V = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $j_{21} = j_{12}$. Согласно (133.12) равновесная концентрация электронов в объеме полупроводника равна $n_L^- = Z_L \exp \frac{\zeta_{02} + P_{i2}}{kT}$, а $n_L^- \exp \frac{P_{i2}(0) - P_{i2}}{kT} = n_{L0}^-$ есть концентрация электронов на границе полупроводника. Учитывая, что $\bar{v}_x = \left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}$, можно (134.09) и (134.10) представить в форме (положив $\varphi_1 = 0$, $V = -\varphi_2$, $m_L = m$)

$$j_{21} = en_{L0}^- \bar{v}_x e^{\frac{eV}{kT}}, \quad j_{12} = en_{L0}^- \bar{v}_x. \quad (134.11)$$

Из (134.11) видно, что ток, идущий из металла в полупроводник, не зависит от приложенной разности потенциалов, тогда как ток, идущий из полупроводника в металл, экспоненциально зависит от разности потенциалов V . Результирующий ток равен

$$j = en_{L0}^- \bar{v}_x \left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right). \quad (134.12)$$

Вольт-амперная характеристика контакта (134.12) показывает, что при $V > 0$ поток электронов из полупроводника в металл экспоненциально увеличивается. Ток при этом течет из металла в полупроводник. Это направление тока называется пропускным.

Возрастание тока в пропускном направлении объясняется уменьшением потенциального барьера для выхода электронов из полупроводника в металл на величину eV . Наоборот, если $V < 0$ (запорное направление), то высота барьера увеличивается на $e|V|$. При $e|V| \gg kT$ ток равен j_{12} и не зависит от V .

Рассмотрим диффузионную теорию выпрямления, которая справедлива, когда длина пробега электронов l мала по сравнению с толщиной слоя объемного заряда. Этот случай соответствует условию (134.07). Плотность тока в полупроводнике определяется уравнением (133.05), которое в силу равенства $E_x = \frac{1}{e_0} \frac{dP_i}{dx}$ и (133.08) можно написать в форме

$$\frac{dn}{dx} + \frac{n}{kT} \frac{dP_i}{dx} = \frac{j}{e_0 D} \quad (134.13)$$

Здесь j — постоянная плотность тока. Потенциальная энергия P_i электрона определяется формулой (133.16), если считать, что все доноры ионизированы. Применяя метод вариации произвольной постоянной, получим решение (134.13) в виде

$$n(x) = \left[C(\delta) - \frac{j}{e_0 D} \int_x^\delta \exp \frac{P_i(x)}{kT} dx \right] \exp \left(-\frac{P_i(x)}{kT} \right).$$

Учитывая, что при $x = \delta$ $P_i(\delta) = P_{i2}$, $n = n_0$, находим $C(\delta) = -n_0 \exp \frac{P_{i2}}{kT}$. Поэтому плотность электронов в запорном слое определяется формулой

$$n(x) = \left[n_0 - \frac{j}{e_0 D} \int_0^\delta \exp \frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT} dx \right] \exp \left(-\frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT} \right), \quad (134.14)$$

откуда плотность тока равна

$$j = e_0 D \frac{n_0 - n(0) \exp \frac{P_i(0) - P_{i2}}{kT}}{\int_0^\delta \exp \frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT} dx}.$$

Если все падение потенциала приходится на запорный слой, то согласно (133.18) $P_i(0) - P_{i2} = \Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V$ и $n(0) \exp \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{kT} = n_0$; поэтому

$$j = e_0 D n_0 \frac{1 - e^{-\frac{e_0 V}{kT}}}{\int_0^\delta \exp \frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT} dx}. \quad (134.15)$$

Интеграл в знаменателе можно вычислить приближенно, вводя в качестве нового переменного $P(x) = P_i(x) - P_{i2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \exp \frac{P_i(x) - P_{i2}}{kT} dx &= \int_{P_i(0) - P_{i2}}^0 \exp \frac{P(x)}{kT} \frac{dx}{dP} dP \approx \\ &\approx \left(\frac{dx}{dP} \right)_0^0 \int_{\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V}^0 \exp \frac{P(x)}{kT} dP = \left(\frac{dx}{dP} \right)_0 kT \left[1 - e^{-\frac{\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V}{kT}} \right] \end{aligned}$$

$\left(\frac{dx}{dP} \right)_0$ медленно меняется по сравнению с $\exp \frac{P}{kT}$; поэтому значение $\frac{dx}{dP}$ при $x = 0$ можно вынести из-под знака интеграла. Считая, что $\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V \gg kT$, можно пренебречь в квадратной скобке единицей. Для плотности тока получаем

$$j = e_0 D \left(\frac{dP}{dx} \right)_0 \frac{n_0}{kT} e^{-\frac{\Phi_1 - \Phi_2 - e_0 V}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{e_0 V}{kT}} \right). \quad (134.16)$$

Здесь $E_0 = \frac{1}{e_0} \left(\frac{dP}{dx} \right)_0$ — напряженность поля на границе, определяемая формулой (134.06).

Полученная вольт-амперная характеристика (134.16) мало отличается от вольт-амперной характеристики (134.12). В пропускном направлении ($V > 0$) сопротивление запорного слоя экспоненциально

уменьшается вследствие уменьшения высоты потенциального барьера и увеличения концентрации электронов. В запорном направлении при больших V ($-e_0 V \gg kT$) ток $j = -eb_n E_0$ и согласно (134.06) пропорционален $V^{\frac{1}{2}}$.

Вольт-амперные характеристики контакта на границе металл — электронный полупроводник даны на рисунке 75 (a — по диодной, b — по диффузионной теории).

Рассмотренная теория применима и для контакта металла с дырочным полупроводником, если в последнем образуется запорный слой (то есть $\Phi_1 - \Phi_2 < 0$). При этом в (134.16)

концентрацию электронов на границе надо заменить концентрацией дырок $n_+(0)$ и вместо V писать $-V$. Когда полупроводник имеет положительный потенциал относительно металла ($V < 0$), высота потенциального барьера понижается, а дырки движутся к металлу (пропускное направление).

Если степень ионизации доноров (или акцепторов) не полная или на границе раздела имеются адсорбированные слои, создающие поверхностный заряд, то теория усложняется. Отсылаем читателя по этим вопросам к специальной литературе (§ 152).

Рассмотрим кратко контакт электронного и дырочного полупроводников ($p-n$ переход).

В кристалле с $p-n$ переходом дырки сосредоточены в p -области, а электроны проводимости — в n -области. Вследствие диффузии электроны и дырки в некотором количестве будут пересекать границу областей. Дырки, диффундируя в n -область, будут оставлять в p -области вблизи границы отрицательно заряженные ионы акцептора, а электроны, диффундируя в p -область, будут оставлять в n -области вблизи границы положительно заряженные ионы донора. Таким образом, на границе $n-p$ перехода образуется электростатический дипольный слой и связанное с ним электрическое поле, которое воспрепятствует дальнейшей диффузии носителей.

Взаимно компенсирующие токи, идущие через $p-n$ переход, существуют и при равновесии. Дырки из p -области, перейдя в n -область, рекомбинируют с электронами (с излучением фотонов или фононов). В результате возникает дырочный рекомбинационный ток j_1^+ . В n -области вследствие тепловых флуктуаций возникают дырки и электроны проводимости; возникшие дырки диффундируют в p -область, образуя ток j_2^+ . При равновесии токи j_1^+ и j_2^+ взаимно компенсируются.

Если к кристаллу приложить внешнее напряжение так, что потенциал n -области будет выше потенциала p -области, то разность потен-

циалов между областями увеличится. Ток j_1^+ сделается очень малым, так как дырки не смогут преодолеть потенциальный барьер. При противоположном знаке V потенциальный барьер снижается. Если расстояние, которое может пройти диффундирующая дырка до своей рекомбинации, велико по сравнению с шириной области объемного заряда дипольного слоя $p-n$ -перехода, то можно воспользоваться диодной теорией. Тогда результирующий дырочный ток из p -области в n -область согласно (134.12) равен

$$j^+ = j_1^+ - j_2^+ = j_2^+ \left(e^{\frac{e_0 V}{kT}} - 1 \right). \quad (134.17)$$

Аналогично ведет себя электронный ток, идущий через $p-n$ переход. Напряжение V , уменьшающее высоту потенциального барьера для дырок, уменьшает его и для электронов. Поэтому дырочный ток из p -области в n -область будет сопровождаться электронным током в противоположном направлении. Так как диодную теорию можно применить и к электронному току, то результирующий ток будет равен

$$j = j^+ + j^- = j_0 \left(e^{\frac{e_0 V_i}{kT}} - 1 \right), \quad (134.18)$$

где j_0 — сумма рекомбинационных токов при $V = 0$. Эта теория находится в согласии с опытом для $p-n$ переходов в германии.

§ 135. Термоэлектрические явления

Полная термо-Э. д. с. складывается из объемной части, возникающей в химически однородном проводнике вследствие наличия градиента температуры, и контактной, возникающей на контакте двух разных тел из-за температурной зависимости контактной разности потенциалов. Объемная часть обусловлена зависимостью от температуры энергии носителей и их концентрации. Последнее существенно для полупроводников: различие в концентрации носителей вызывает их диффузию, а вследствие диффузии возникает перераспределение заряда и, следовательно, термоэлектрическая разность потенциалов.

Плотность тока при наличии градиента температуры определяется формулой (129.10). Поскольку интегралы, входящие в (129.10),

отрицательны и $v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}$, можно написать

$$J = \frac{\sqrt{2} e^2 C}{3 \sqrt{m}} L_1 \left\{ E_x - \frac{1}{e_0} \left[\frac{d\zeta}{dx} + \frac{1}{T} \left(\frac{L_2}{L_1} - \zeta \right) \frac{dT}{dx} \right] \right\}, \quad (135.01)$$

где

$$L_n = - \int_0^\infty l_{\mathbf{s}} n \frac{df_0}{d\mathbf{s}} d\mathbf{s} \quad (135.02)$$

и

$$\frac{\sqrt{2}e^2C}{3\sqrt{m}}L_1 = \gamma$$

(γ — коэффициент электропроводности). Сравним (135.01) и (95.01). Так как $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta}{dT} \frac{dT}{dx}$, то дифференциальная объемная термо-Э. д. с. равна

$$\alpha_0 = \frac{1}{e} \left[\frac{d\zeta}{dT} + \frac{1}{T} \left(\frac{L_2}{L_1} - \zeta \right) \right]. \quad (135.03)$$

Внутренняя контактная разность потенциалов согласно (133.03) равна $\frac{1}{e}(\zeta_0 - \zeta)$, где ζ_0 — химический потенциал электронов второго тела, с которым находится в контакте рассматриваемый проводник. Поэтому вклад, вносимый приконтактной частью его в дифференциальную термо-Э. д. с., равен

$$\alpha_k = -\frac{1}{e} \frac{d\zeta}{dT}. \quad (135.04)$$

Складывая (135.04) с (135.03), получим

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_k = \frac{1}{eT} \left(\frac{L_2}{L_1} - \zeta \right). \quad (135.05)$$

Отсюда видно, что знак дифференциальной термо-Э. д. с. зависит от знака носителей тока. Тот же результат можно получить из (135.01), если рассмотреть разомкнутую цепь из двух различных проводящих тел, в которой крайние проводники одинаковые (рис. 39). Согласно (135.01) в разомкнутой цепи ($j = 0$) возникает электрическое поле

$$E_x = \frac{1}{e} \left[\frac{d\zeta}{dx} + \frac{1}{T} \left(\frac{L_2}{L_1} - \zeta \right) \frac{dT}{dx} \right]. \quad (135.06)$$

Проинтегрируем (135.06) по x от a до δ . Точки a и δ находятся в одном и том же веществе и имеют одинаковую температуру, поэтому

$$\int_a^\delta \frac{d\zeta}{dx} dx = \zeta_\delta - \zeta_a = 0.$$

В результате получим

$$\mathcal{E}_T = \int_a^\delta E_x dx = \int_a^\delta \frac{1}{eT} \left(\frac{L_2}{L_1} - \zeta \right) dT = \int_a^\delta \alpha dT. \quad (135.07)$$

Отсюда следует, что полная дифференциальная термо-Э. д. с. равна (135.05).

Применим полученные результаты к металлам. В приближении, которое допущено в § 129, можно в интеграле (135.02) вынести $l(\zeta)$

за знак интеграла; тогда в обозначениях (129.12) $\frac{L_2}{L_1} = \frac{K_2}{K_1}$. В первом приближении по (129.16) $\frac{K_2}{K_1} = \zeta$ и, следовательно, $\alpha = 0$.

В следующем приближении воспользуемся выражением (129.16) и учтем зависимость длины свободного пробега l от энергии. Так как при $\varepsilon = \zeta$ функция $-\frac{df}{d\varepsilon}$ имеет острый максимум, можно разложить l в ряд по степеням $\varepsilon - \zeta$, то есть $l(\varepsilon) = l(\zeta) + \frac{dl}{d\zeta}(\varepsilon - \zeta) + \dots$

Тогда

$$L_n = - \int_0^\infty l \varepsilon^n \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon = - \left(l - \zeta \frac{dl}{d\zeta} \right) K_n - \frac{dl}{d\zeta} K_{n+1} = \\ = l(\zeta) \zeta^n \left[1 + \frac{n(n-1)\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 + \frac{n\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 \cdot \frac{\zeta}{l} \frac{dl}{d\zeta} \right]; \quad (135.08)$$

поэтому

$$\frac{L_2}{L_1} = \zeta \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 + \frac{2}{3} \pi^2 \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 \frac{\zeta}{l} \frac{dl}{d\zeta} \right] \cdot \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 \frac{\zeta}{l} \frac{dl}{d\zeta} \right]^{-1} \simeq \\ \simeq \zeta \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\zeta} \right)^2 \left(1 + \frac{\zeta}{l} \frac{dl}{d\zeta} \right) \right].$$

Окончательно для металлов получаем

$$\alpha = \frac{\pi^2 k^2 T}{3e\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{l(\zeta)} \frac{dl(\zeta)}{d\zeta} \right). \quad (135.09)$$

Здесь с достаточным приближением ζ можно заменить значением ζ_0 при $T = 0$, поэтому α линейно зависит от T . Линейная зависимость от T дифференциальной термо-э. д. с. металлов выражает закон Авенариуса, установленный экспериментально. Для металлов можно считать $l \sim \varepsilon^2$. Следовательно,

$$\frac{\zeta}{l} \frac{dl}{d\zeta} = 2 \quad \text{и} \quad \alpha = \pi^2 \frac{k}{e} \frac{kT}{\zeta}. \quad (135.10)$$

По порядку величины $\alpha \simeq 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{град}}{\text{град}}$, что находится в хорошем согласии с опытными данными для щелочных металлов (за исключением Li).

Для контакта двух металлов, спаи которых поддерживаются при разных температурах T_1 и T_2 (рис. 39), согласно (95.02) и (135.10) получаем термо-э. д. с., равную

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT = \frac{\pi^2 k^2}{2e} \left(\frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_1} \right) (T_2^2 - T_1^2), \quad (135.11)$$

где ζ_1 и ζ_2 — энергии Ферми обоих металлов.

Из (95.06) и (95.07) получаем коэффициенты Томсона и Пельтье для металла

$$\rho = -T \frac{d\alpha}{dT} = -\alpha, \quad (135.12)$$

$$\Pi_{12} = -\frac{\pi^2 k^2}{e} \left(\frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_1} \right) T^2. \quad (135.13)$$

Перейдем к примесным полупроводникам с одним сортом носителей.

В этом случае распределение носителей максвелловское, $f_0 = e^{\frac{\zeta-\varepsilon}{kT}}$. Учитывая зависимость длины свободного пробега носителей от энергии, которая имеет вид $l = a\varepsilon^r$ (§ 132), получим

$$L_n = - \int_0^\infty a \varepsilon^{n+r} \frac{d}{d\varepsilon} e^{\frac{\zeta-\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \\ = a(n+r) \int_0^\infty \varepsilon^{n+r-1} e^{\frac{\zeta-\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = (n+r) a(kT)^{n+r} e^{\frac{\zeta}{kT}} \Gamma(n+r).$$

Здесь

$$\Gamma(n+r) = \int_0^\infty x^{n+r-1} e^{-x} dx$$

есть гамма-функция. Средняя длина свободного пробега равна

$$\bar{l} = - \int_0^\infty l \varepsilon \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon = L_1 = (1+r) a(kT)^{r+1} e^{\frac{\zeta}{kT}} \Gamma(1+r); \quad (135.14)$$

поэтому

$$L_n = \frac{n+r}{r} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(1+r)} \bar{l} (kT)^{n-1}. \quad (135.15)$$

Так как $\Gamma(r+2) = (r+1)\Gamma(r+1)$, то $\frac{L_2}{L_1} = (r+2)kT$. Следовательно, дифференциальная э. д. с. для полупроводника равна

$$\alpha = \frac{k}{e} \left(r + 2 - \frac{\zeta}{kT} \right). \quad (135.16)$$

Химический потенциал через концентрацию носителей выражается формулой (118.14). Поэтому

$$\alpha = \frac{k}{e} \left(r + 2 + \ln \frac{Z}{n} \right) = \frac{k}{e} \left[r + 2 + \ln \frac{G}{n} \left(\frac{m^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (135.17)$$

Исключая отсюда концентрацию носителей с помощью (126.10) или (126.17), получим

$$\alpha = \frac{k}{e} \left[r + 2 + \ln \left(\frac{G_D Z_L}{n_D} \right)^{1/2} + \frac{\Delta W_D}{2kT} \right]. \quad (135.18)$$

Для полупроводника *p*-типа Z_L , n_D , W_D , G_D заменяются соответственно через Z_N , n_A , W_A и $\frac{1}{G_A}$.

Полученные формулы не могут быть справедливы при очень низкой температуре, так как согласно (135.18) при $T \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow \infty$. Последнее противоречит принципу Нернста — Планка, из которого следует, что при $T \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$. Объясняется это тем, что при выводе формул предполагалось распределение электронов в *L*-зоне (или дырок в *N*-зоне) максвелловским до сколь угодно низких температур. Последнее, как известно, не соответствует действительности.

Выводы теории в ряде случаев хорошо согласуются с экспериментом, например, для WO_3 и V_2O_5 при $T > 243^\circ$ хорошо выполняется зависимость (135.18) от $\frac{1}{T}$. Для других полупроводников наблюдается значительное расхождение. Например, в Cu_2O α практически постоянна в широком интервале температур, хотя $\Delta W \neq 0$.

Расхождение теории с опытом в некоторой мере может быть объяснено тем, что в (135.10) и (135.16) не учтено указанное в 1946 году Л. Э. Гуревичем явление увлечения электронов фононами, которое приводит к возникновению термо-э. д. с. Если температура тела постоянна, то распределение скоростей фононов по направлениям изотропно (§ 130). При наличии градиента температуры число фононов, движущихся от горячего конца к холодному, больше числа фононов, движущихся в обратном направлении. Скорость v_d этого движения («дрейфа») можно оценить приближенно, если заметить, что плотность потока теплоты можно представить (при $T \gg \theta$, θ — лебаевская температура) в форме $S_T = c T v_d$, где c — теплоемкость единицы объема фононов (решетки). С другой стороны, согласно (130.02) $S_T = -\frac{1}{3} \Lambda u c \frac{dT}{dx}$, где Λ — длина свободного пробега фононов, u — скорость звука. Приравнивая оба выражения, получим

$$v_d = -\frac{\Lambda u}{3T} \frac{dT}{dx}. \quad (135.19)$$

Допустим, что электроны (или дырки) рассеиваются только при столкновениях с фононами (то есть нет рассеяния на каких-либо дефектах решетки). Тогда в стационарных условиях они также приобретут добавочную скорость v_d (эффект увлечения электронов фононами) и будут накапливаться на холодном конце тела. Вследствие перераспределения электронов возникнет электрическое поле E_Φ , которое будет препятствовать увлечению электронов и создаст их движение в обратном направлении со скоростью bE_Φ (b — подвижность электронов). Равновесие наступит при условии $v_d + bE_\Phi = 0$. Отсюда

$$E_\Phi = \frac{1}{3} \frac{\Lambda u}{bT} \frac{dT}{dx}. \quad (135.20)$$

Следовательно, дифференциальная термо-Э. д. с., вызванная увлечением электронов фононами, равна

$$\alpha_{\phi} = \frac{u \Lambda}{3bT} = \frac{1}{3} \frac{k}{e} \frac{m^* u^2}{kT} \frac{\tau'_{\phi}}{\tau} \quad (135.21)$$

[в выражении (135.21) произведена замена $\Lambda = u \tau'_{\phi}$, где τ'_{ϕ} — среднее время свободного пробега фононов и согласно (119.08) $b = \frac{e}{m^*} \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ — среднее время свободного пробега электрона].

Формула (135.21) может объяснить аномально большие значения α при низких температурах (у Ge $\alpha \sim 10 - 20 \frac{M\omega}{grad}$, у Si $\alpha \sim 50 \frac{M\omega}{grad}$), если правильно определить время релаксации τ_{ϕ} фононов. В (135.21) τ'_{ϕ} есть среднее время релаксации не для всех фононов, а лишь для тех, которые могут обмениваться энергией и импульсом с электронами. Электроны в зоне L (или дырки в зоне N) обладают энергией теплового движения и импульсами гораздо меньшими, нежели электроны в металле. Вследствие этого они могут взаимодействовать с немногими фононами еще меньшей энергии.

Пусть электрон с импульсом \vec{p} и энергией $\frac{p^2}{2m^*}$ поглощает фонон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\vec{\hbar q}$ (\vec{q} — волновой вектор фонона). Из законов сохранения импульса и энергии имеем

$$\frac{1}{2m^*} p^2 + \hbar\omega = \frac{1}{2m^*} (\vec{p} + \vec{\hbar q})^2 \text{ или } 2m\hbar\omega = \hbar^2 q^2 + 2\hbar q p \cos \vartheta,$$

где ϑ — угол между \vec{p} и \vec{q} . При отсутствии дисперсии звука для малых частот $\omega = qu$; поэтому

$$\hbar q = 2mu - 2p \cos \vartheta. \quad (135.22)$$

Но средняя скорость электронов значительно больше скорости звука u . При $T = 300^\circ \frac{v}{u} \sim 10 - 100$. Следовательно, $mu \ll p$ и можно пренебречь первым членом. Получаем для абсолютного значения

$$q < \frac{2p}{\hbar} = 2k, \quad (135.23)$$

то есть с электронами взаимодействуют лишь те фононы, волновой вектор которых меньше удвоенного волнового вектора электрона. Это значит, что τ'_{ϕ} есть время релаксации для фононов, длина волны которых больше длины волны тепловых электронов ($\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx 10^{-7} \text{ см}$ при $T = 300^\circ$) и во много раз больше постоянной решетки. Длинные волны рассеиваются слабее, нежели короткие. Поэтому время релаксации τ'_{ϕ} для таких фононов на несколько порядков больше, чем среднее время релаксации, получаемое из формулы теплопроводности решетки (130.02). Поэтому дифференциальная Э. д. с. α_{ϕ} , вызванная эффектом увлечения фононов, сильно возрастает.

При низких температурах τ'_ϕ пропорционально T^{-3} , тогда как для высоких $\tau'_\phi \sim \frac{1}{T}$. Для атомной решетки $\tau_\phi \sim \frac{1}{T^{3/2}}$. Поэтому в области высоких температур $\alpha_\phi \sim \frac{1}{T^{3/2}}$, а в области низких — $\alpha'_\phi \sim \frac{1}{T^{7/2}}$. Эта зависимость хорошо согласуется с экспериментом.

Задача

Определить дифференциальную термо-э. д. с. в теле с носителями двух знаков.

Решение. Для двух сортов носителей формулу (135.01), учитывая (135.05), можно написать в форме

$$j = (\gamma_+ + \gamma_-) E_x - \left(\frac{\gamma_+}{e_+} \frac{d\zeta}{dx} + \frac{\gamma_-}{e_-} \frac{d\zeta}{dx} \right) - (\gamma_+ \alpha_+ + \gamma_- \alpha_-) \frac{dT}{dx}.$$

Для разомкнутой цепи $j = 0$ и

$$E_x = \frac{\gamma_+ \alpha_+ + \gamma_- \alpha_-}{\gamma_+ + \gamma_-} \left(\frac{dT}{dx} \right) + \frac{\frac{\gamma_+}{e_+} \frac{d\zeta}{dx} + \frac{\gamma_-}{e_-} \frac{d\zeta}{dx}}{\gamma_+ + \gamma_-}.$$

Интегрируя последнее от a до δ , как при выводе (135.07) и учитывая, что точки a и δ находятся в одном и том же веществе и имеют одинаковые температуры, получим

$$\mathcal{E}_T = \int_a^\delta \frac{\gamma_+ \alpha_+ + \gamma_- \alpha_-}{\gamma_+ + \gamma_-} dT.$$

Отсюда следует, что дифференциальная э. д. с. равна

$$\alpha = \frac{\gamma_+ \alpha_+ + \gamma_- \alpha_-}{\gamma_+ + \gamma_-}.$$

Так как $\gamma_\pm = e_0 b_\pm n_\pm$, а α_+ и α_- различаются знаком, то можно написать

$$\alpha = \frac{\alpha_+ b_+ n_+ - \alpha_- b_- n_-}{b_+ n_+ + b_- n_-}.$$

Эта формула впервые выведена Н. Л. Писаренко.

§ 136. Различные типы дефектов в кристаллической решетке. Ионная проводимость кристаллов

Ионная проводимость, наблюдающаяся только в ионных кристаллах, всегда связана с образованием дефектов в кристаллической решетке.

Различают два типа дефектов в решетке. Один из них принято называть дефектами по Френкелю, другой — дефектами по Шоттки. В идеальной решетке все узлы заняты атомами или ионами. С повышением температуры возрастают амплитуды колебаний атомов около их средних положений равновесия и возникает некоторое отступление от точно периодического расположения атомов. При достаточно высоких температурах возникают дефекты другого типа — атомы (или ионы) могут уходить из узлов решетки, образуя вакантные узлы (дырки).

Рассмотрим простую кубическую решетку, содержащую один сорт атомов. Атом может покинуть свое нормальное положение (узел) и перейти в междоузлие. Таким образом возникает дефект по Френкелю, состоящий из вакантного узла решетки (дырки) и атома в междоузлии.

Другой тип дефектов получается следующим образом. Некоторые атомы, удаленные из узлов решетки, переносятся на поверхность кристалла и там образуют новые слои нормальной кристаллической решетки. В этом случае атомов в междоузлиях нет. Таким образом, дефект по Шоттки состоит только из вакантного узла решетки (дырки).

Определим равновесное число дефектов по Френкелю методом, аналогичным использованному в § 124. Поскольку в каждом узле или междоузельном положении равновесия может находиться только один атом, можно применить статистику Ферми. Пусть N — общее число атомов (равное числу узлов решетки) и $N' = \alpha N$ — общее число междоузлий (α — число положений равновесия в междоузлиях, приходящееся на один узел решетки). Обозначим энергию атома в узле через W , а в междоузлии — через W' (для простоты считаем α положений равновесия равносочленными). Тогда при температуре T число атомов в узлах n и число атомов в междоузлиях n' равны соответственно

$$n = \frac{N}{e^{\frac{W-\zeta}{kT}} + 1}, \quad n' = \frac{N'}{e^{\frac{W'-\zeta}{kT}} + 1}, \quad (136.01)$$

где ζ — химический потенциал атомов. Число вакантных узлов (дырок) равно

$$n_1 = N - n = \frac{N}{e^{\frac{\zeta-W}{kT}} + 1}. \quad (136.02)$$

Очевидно, $n_1 = n'$; поэтому

$$\frac{N}{e^{\frac{\zeta-W}{kT}} + 1} = \frac{N'}{e^{\frac{W'-\zeta}{kT}} + 1}. \quad (136.03)$$

Уравнение (136.03) определяет химический потенциал. Обычно можно считать, что $\zeta - W \gg kT$ и $W' - \zeta \gg kT$. Поэтому единицами в знаменателях (136.03) можно пренебречь и, следовательно, $Ne^{\frac{W-\zeta}{kT}} = N'e^{\frac{\zeta-W'}{kT}}$, а химический потенциал равен

$$\zeta = \frac{1}{2}(W + W') - \frac{kT}{2} \ln \frac{N'}{N}. \quad (136.04)$$

Отсюда число дефектов по Френкелю (при $W' - \zeta \gg kT$) равно

$$n' = N'e^{\frac{\zeta-W'}{kT}} = \sqrt{NN'} e^{-\frac{W_F}{2kT}} = \sqrt{\alpha} Ne^{-\frac{W_F}{2kT}}, \quad (136.05)$$

где $W_F = W' - W$ есть работа перевода атома из узла в междоузлие. Предполагается, что W_F не зависит от числа атомов, перешедших в междоузлие. Это может быть только при малых концентрациях дефектов, когда $n' \ll N$.

Определим число дефектов по Шоттки. Обозначим через W_S энергию переноса атома из узла внутри решетки на поверхность. Тогда число атомов, перешедших на поверхность (число дефектов по Шоттки), приближенно равно

$$n' = Ne^{-\frac{W_S}{kT}}. \quad (136.06)$$

Энергия W_S и W_F порядка 1 эв. Поэтому в кристалле преобладают обычно дефекты того типа, для которого энергия активации меньше. Дефекты по Френкелю могут возникать в любом месте кристалла. Дефекты по Шоттки сначала образуются вблизи поверхности кристалла или на поверхностях внутренних трещин, а затем диффундируют внутрь кристалла.

Атом, находящийся в узле решетки, и соседняя дырка могут поменяться местами. Атомы, находящиеся в междоузлиях, также могут менять свое местоположение. В обоих случаях будет наблюдаться диффузия атомов. Пусть ν — частота колебаний атомов, находящихся около положения равновесия. Два соседних положения равновесия атома разделены максимумом потенциальной энергии. Поэтому для перемещения атома из одного положения равновесия в другое необходимо преодолеть некоторый активационный барьер. Величину этого барьера обозначим через U . При температуре T атом долю

времени $e^{-\frac{U}{kT}}$ будет обладать энергией, достаточной, чтобы преодолеть барьер и перейти в соседнее положение равновесия. Поэтому вероятность перехода в единицу времени атома в соседнее положение равновесия равна

$$w = \nu e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (136.07)$$

Эта формула справедлива как для движения атомов в междоузлиях, так и для движения дырок (конечно, значения U и ν в этих случаях различны).

Применим полученные результаты к определению ионной электропроводности кристаллов.

В ионных кристаллах (например, типа M^+X^-) возможно образование двух сортов дефектов по Френкелю, так как и катионы и анионы могут переходить в междоузлия. Электрический ток может быть обусловлен как движением ионов в междоузлиях, так и движением вакантных узлов решетки. Энергии перевода катиона (W_F^+) и аниона (W_F^-) в междоузлие различны, если катион и анион обладают различными размерами. Число соответствующих дефектов согласно (136.05) экспоненциально зависит от W_F , поэтому электрическая

проводимость кристалла с дефектами по Френкелю будет обусловливаться только анионами или только катионами.

В ионных кристаллах с дефектами по Шоттки анионные и катионные вакантные узлы должны быть в одинаковом числе, иначе нарушится электрическая нейтральность кристалла. Следовательно, дефект по Шоттки в ионном кристалле состоит из двух отдельных вакантных узлов решетки — «cationной дырки» и «anionной дырки».

Если W есть работа, необходимая для перевода одного аниона и одного катиона на поверхность кристалла, то число двойных дефектов по Шоттки приближенно равно

$$n = Ne^{-\frac{W}{2kT}}, \quad (136.08)$$

где N — полное число пар ионов.

Вычислим скорость перемещения какого-либо типа дефектов ионной решетки в однородном электрическом поле. Пусть a — расстояние между соседними положениями равновесия иона. Если приложено электрическое поле E , то в направлении поля активационный барьер снижается на величину $\frac{1}{2}eEa$ (e — заряд иона), а в направлении противоположном — увеличивается на такую же величину. Поэтому согласно (136.07) вероятности перехода иона в единицу времени в соседнее положение равновесия по полю w_1 и против поля w_2 будут равны соответственно

$$w_1 = v e^{-\frac{U - \frac{1}{2}eEa}{kT}}, \quad w_2 = v e^{-\frac{U + \frac{1}{2}eEa}{kT}}. \quad (136.09)$$

Средняя скорость передвижения зарядов равна

$$\bar{v}' = a(w_1 - w_2) = a v e^{-\frac{U}{kT}} \left(e^{\frac{eEa}{2kT}} - e^{-\frac{eEa}{2kT}} \right). \quad (136.10)$$

Для обычно применяемых полей $eEa \ll kT$. Поэтому, разлагая скобку в ряд, получим (в первом приближении)

$$\bar{v}' = \frac{ea^2 v}{kT} e^{-\frac{U}{kT}} E. \quad (136.11)$$

Согласно определению (§ 119) подвижность равна

$$b = \frac{ea^2 v}{kT} e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (136.12)$$

Коэффициент электропроводности, обусловленный одним сортом дефектов решетки, равен $\gamma = eb n$ (n — концентрация дефектов). Согласно (136.05) и (136.08) n экспоненциально зависит от температуры. Поэтому

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{(\frac{W}{2} + U)}{kT}}, \quad \gamma_0 = \frac{Ne^2 a^2 v}{kT}, \quad (136.13)$$

где N — число пар ионов в 1 см³. Для проводимости, обусловленной движением ионов в междоузлиях, γ_0 должно содержать еще множитель $\sqrt{\alpha}$. Таким образом, зависимость ионной электропроводности твердых тел от температуры подобна зависимости электронной электропроводности полупроводников. Опыт хорошо подтверждает полученную зависимость. Так, в галогенидах серебра содержатся преимущественно дефекты по Френкелю.

§ 137. Электронная поляризация и диэлектрический коэффициент

Дипольный момент единицы объема вещества дается формулой (117.01). Однако применение (117.01) требует знания конкретных данных о строении вещества, поэтому теоретический анализ явлений в веществе основан на применении той или иной модели явления поляризации.

Макроскопическое вещество состоит из определенных одинаковых структурных единиц — атомов, молекул или ионов. Под влиянием электрического поля прежде всего возникает электронная поляризация этих структурных единиц — смещение электронов относительно положительных ядер. В случае ионных решеток твердых тел возможна ионная поляризация — смещение ионов решетки как целого. Поляризация смещения устанавливается весьма быстро. Время установления электронной поляризации сравнимо с периодом световых колебаний и составляет $10^{-14} — 10^{-15}$ сек, поляризация ионного смещения устанавливается за время, сравнимое с периодом собственных колебаний иона около положения равновесия и составляет $10^{-12} — 10^{-13}$ сек. Если молекулы обладают дипольными моментами, то возможна дипольная поляризация, обусловленная ориентацией диполей в электрическом поле. При свободном вращении время установления подобной поляризации порядка периода вращения молекул и составляет $10^{-11} — 10^{-12}$ сек. В конденсированных телах поляризация может быть связана с преодолением активационных барьеров, поэтому время релаксации значительно увеличивается.

Рассмотрим электронную поляризацию. Возникающий в электрическом поле индуцированный дипольный момент атомной системы пропорционален напряженности (§ 33)

$$\vec{p} = {}^{(2)}\alpha \vec{E}, \quad (137.01)$$

где ${}^{(2)}\alpha$ — тензор поляризуемости. Для изотропной системы ${}^{(2)}\alpha$ сводится к скаляру. Поляризуемость атома или иона может быть точно вычислена только методами квантовой механики. В качестве классической модели атома можно рассматривать систему квазиупругого связанных электронов. В этом случае поляризуемость изотропной

системы в статическом поле равна

$$\alpha = \sum_a \frac{e^2}{k_a}, \quad (137.02)$$

где k_a — коэффициент квазиупругой силы для электрона a .

В переменном поле $E = E_0 e^{i\omega t}$ смещение $\delta \vec{r}_a$ электрона из положения равновесия дается формулой (62.03)

$$\delta \vec{r}_a = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma_a \omega} \vec{E}, \quad (137.03)$$

где $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$ — собственная частота незатухающих колебаний электрона a , m — его масса. В (137.03) опущены затухающие члены. Индуцированный дипольный момент атомной системы равен

$$\vec{p} = \sum_a e_a (\vec{r}_a + \delta \vec{r}_a) = \sum_a e_a \vec{r}_a + \sum_a \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma_a \omega} \vec{E}.$$

Первый член дает постоянный дипольный момент \vec{p}_0 системы. Из второго члена получаем электронную поляризуемость

$$\alpha_{\text{эл.}} = \frac{e^2}{m} \sum_a \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma_a \omega}. \quad (137.04)$$

При $\omega = 0$ отсюда получается статическая поляризуемость (137.02).

При выводе (137.04) сделано предположение о том, что поле \vec{E} внутри атомной системы однородно.

Отметим, что квантовомеханическая формула очень близка к классической формуле (137.04) и имеет вид

$$\alpha_{\text{эл.}} = \frac{e^2}{m} \sum_{ij} \frac{f_{ij}}{\omega_{ij}^2 - \omega^2 - i\gamma_{ij} \omega}, \quad (137.05)$$

где ω_{ij} — частота перехода между уровнями i, j , а f_{ij} — коэффициент, называемый «силой осциллятора» ($f_{ij} < 1$).

Порядок величины статической электронной поляризуемости, например, для водорода, равен

$$\alpha_{\text{эл.}}^{(\text{H})} \simeq \frac{e^2}{m \omega_0^2} \simeq \frac{e^2}{m} \left(\frac{\hbar^3}{me^4} \right)^2 = \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right)^3 = a_{\text{H}}^3 \simeq 10^{-25} \text{ см}^3,$$

то есть поляризуемость порядка объема атома.

Поляризуемость должна возрастать с увеличением числа электронов в атоме и радиусов их орбит. При увеличении порядкового номера Z элемента число электронов увеличивается, но радиусы орбит уменьшаются. Поэтому поляризуемость может как возрастать,

так и уменьшаться. Например, для некоторых элементов во втором периоде периодической системы $\alpha \cdot 10^{24}$ имеет следующие значения:

элемент	Li	C	N	O	F	Ne
$\alpha_{\text{эл.}} \cdot 10^{24} \text{ см}^3$	0,079	0,96	0,96	0,64	0,4	0,394

При переходе от лития к углероду сказывается эффект увеличения числа электронов. Поляризуемости углерода и азота одинаковы, по-видимому, потому, что сжатие орбит компенсирует увеличение числа электронов. При дальнейшем увеличении Z преобладает эффект уменьшения радиусов орбит.

При ионизации атом теряет один или несколько внешних (валентных) электронов. Поэтому положительные ионы имеют меньшую поляризуемость, чем соответствующие атомы. Наоборот, поляризуемость отрицательных ионов больше поляризуемости атомов.

В случае достаточно разреженного недипольного газа можно считать, что поле, действующее на каждую молекулу, равно макроскопическому полю \vec{E} . Тогда диэлектрический коэффициент вычисляется по формуле $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$. Коэффициент поляризации единицы объема газа равен $\kappa = n\alpha_{\text{эл.}}$, где n — число частиц в единице объема. Поэтому

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{m} \sum_a \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma_a \omega}. \quad (137.06)$$

Таким образом, диэлектрический коэффициент в переменном поле оказывается комплексной функцией от частоты. Это обстоятельство, приводящее к дисперсии и поглощению электромагнитных волн, будет рассмотрено в § 143.

Для статических и медленно меняющихся полей

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \sum_a \frac{1}{\omega_a^2} = 1 + 4\pi n \alpha_{\text{ст.}}$$

Так как $\alpha \sim 10^{-24} \text{ см}^3$, то для недипольных газов при нормальных условиях получаем $\epsilon \approx 1$. Например, для азота при 20°C $\epsilon = 1,00058$.

§ 138. Отличие действующего поля от макроскопического. Формула Лоренца — Лоренца

Для конденсированных веществ (изоляторов) необходимо учитывать, что поле, действующее на отдельные заряды молекулы, не совпадает с макроскопическим (усредненным) полем \vec{E} . Поле, действующее на отдельные заряды, будем называть действующим или локальным и обозначать \vec{E}_d . Оно не совпадает с микроскопическим

полем \vec{E}' , так как последнее есть полное поле, создаваемое в данной точке в данный момент времени внешними источниками и всеми зарядами тела. Поле \vec{E}' существует и в том случае, когда тело находится в электрически невозбужденном состоянии (когда макроскопические величины \vec{E} , \vec{P} равны нулю), тогда как поле \vec{E}_d возникает лишь при электрическом возбуждении тела и зависит от внешнего поля.

Действующее поле в однородном неограниченном диэлектрике можно оценить методом, предложенным Г. А. Лоренцом. Вокруг точки, в которой определяется поле, проведем сферу радиуса a , выделяющую макроскопически малый объем. Среду, расположенную вне этого объема, можно считать непрерывной и характеризовать усредненной поляризацией \vec{P} . Поле в центре сферы получается путем суммирования полей всех зарядов, расположенных внутри и вне сферы, то есть

$$\vec{E}_d = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (138.01)$$

где \vec{E}_1 — напряженность суммарного поля зарядов внутри сферы, а \vec{E}_2 — напряженность поля, созданного в центре сферы средой, находящейся вне ее. Чтобы вычислить \vec{E}_2 , надо из макроскопического поля \vec{E} в однородной среде вычесть поле внутри поляризованного шара \vec{E}_w . Поле внутри однородно поляризованного шара с диэлектрическим коэффициентом $\epsilon_l = \epsilon$, находящегося в вакууме ($\epsilon_a = 1$), согласно (83.06) равно $E_z = \frac{3}{\epsilon + 2} E_0 (E = E_0)$. Поле внутри поляризованного шара, созданное самим шаром, равно

$$E_w = E_z - E_0 = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0.$$

С другой стороны, согласно (83.04) дипольный момент поляризованного шара равен $p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 E_0$. Поэтому

$$\vec{E}_w = -\frac{\vec{p}}{a^3} = -\frac{4}{3} \pi \vec{P},$$

где \vec{P} — дипольный момент единицы объема. Поле \vec{E}_2 , созданное однородной непрерывной средой в полости шара, можно написать в форме

$$\vec{E}_2 = \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P}. \quad (138.02)$$

Действующее поле равно

$$\vec{E}_d = \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P} + \vec{E}_1. \quad (138.03)$$

Поле \vec{E}_1 обусловлено молекулярными диполями, заполняющими шаровую область. Значение \vec{E}_1 зависит от расположения диполей в узлах решетки, то есть от структуры кристалла. Для простой кубической решетки $\vec{E}_1 = 0$, если считать все атомы точечными диполями, параллельными \vec{E} (оси z). Действительно, согласно (29.05) поле в узле решетки в центре шара равно

$$E_1 = \sum_a \left(\frac{3(\vec{p}_a \vec{r}_a) \vec{r}_a - \vec{p}_a r_a^2}{r_a^5} \right)_z = \sum_a \frac{3p_a z_a^2 - p_a r_a^2}{r_a^5},$$

где r_a — расстояние диполя a от центра. В силу симметрии решетки и полости

$$\sum_a \frac{x_a^2}{r_a^5} = \sum_a \frac{y_a^2}{r_a^5} = \sum_a \frac{z_a^2}{r_a^5};$$

поэтому

$$\sum_a \frac{r_a^2}{r_a^5} = 3 \sum_a \frac{z_a^2}{r_a^5}.$$

Так как все $p_a = p$, то $E_1 = 0$. То же самое получается для гранецентрированных и объемноцентрированных кубических решеток, а также для изотропных тел.

Индукционная поляризация молекул сорта i определяется полем $\vec{E}_\delta^{(i)}$, действующим в области, занятой молекулой, то есть

$$\vec{p}_i = \alpha_i \vec{E}_\delta^{(i)}.$$

Поэтому для вектора поляризации получим

$$\vec{P} = \sum_i n_i \alpha_i \vec{E}_\delta^{(i)}, \quad (138.04)$$

где n_i — число молекул сорта i в единице объема. Если структура решетки такова, что $\vec{E}_1^{(i)} = 0$, то $\vec{E}_\delta^{(i)} = \vec{E}_\delta = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi \vec{P}$; учитывая, что $\vec{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \vec{E}$, найдем

$$P = \frac{\epsilon-1}{4\pi} E = \sum_i n_i \alpha_i \left(E + \frac{4}{3} \pi \frac{\epsilon-1}{4\pi} E \right).$$

Решая это соотношение относительно поляризуемости единицы объема вещества $\sum_i n_i \alpha_i$, получим

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4\pi}{3} \sum_i n_i \alpha_i. \quad (138.05)$$

Выражение (138.05) устанавливает связь между диэлектрическим коэффициентом и поляризумостью молекул вещества. Если в диэлектрике поляризация чисто электронная, то $\epsilon = N^2$ (N — показатель преломления диэлектрика для света). Поэтому

$$\frac{N^2 - 1}{N^2 + 1} = \frac{4\pi}{3} \sum_i n_i \alpha_{i\text{эл.}} \quad (138.06)$$

Это соотношение называется формулой Лоренца—Лоренца. Соотношение (138.05), содержащее ϵ для статических или медленно меняющихся полей, носит название формулы Клаузиуса—Мосотти. Формула Лоренца—Лоренца позволяет определять электронные поляризумости молекул непосредственно по показателю преломления вещества.

Например, для воды $N = 1,334$. Следовательно, $\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} = 0,206$.

Учитывая, что плотность молекул в воде $n = 3,3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, получим $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3$.

Для химически однородного диэлектрика (состоящего из одного сорта молекул) $n = \frac{N_A}{M} \rho$, где ρ — плотность диэлектрика, M — молекулярный вес, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ — число Авогардо. Поэтому (138.06) можно переписать в форме

$$\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha \equiv R. \quad (138.07)$$

Величина $R = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha$, отличающаяся от электронной поляризумости одного моля вещества множителем $\frac{4\pi}{3}$, называется молекулярной рефракцией. По порядку величины R совпадает с объемом всех молекул в грамм-молекуле (так как $\alpha \sim a^3$). Поэтому можно ожидать, что $R \approx \frac{b}{4}$, где b — поправка на объем в уравнении Ван-дер-Ваальса. Эксперимент подтверждает этот вывод. Например, для CS_2 $R = 21,7 \text{ см}^3$, а $\frac{b}{4} = 19,5 \text{ см}^3$. Для H_2O $R = 3,7 \text{ см}^3$, $\frac{b}{4} = 7,7 \text{ см}^3$ (лучшего совпадения ожидать не приходится в силу грубоści исходных предположений).

Из (138.06) видно, что для химически неоднородных систем молекулярная рефракция складывается аддитивно из молекулярных рефракций составных частей. Во многих случаях рефракция химического соединения равняется сумме рефракций составных частей молекулы. В качестве таких составных частей можно брать образующие молекулу атомы, ионы или отдельные валентные связи. Это позволяет применять рефракции как вспомогательное средство при определении структуры молекул.

Задачи

1. Один из методов определения ϵ заключается в измерении емкости плоского конденсатора, между обкладками которого помещается плоскопараллельная пластинка исследуемого диэлектрика. Определить, какое влияние на измерение ϵ оказывает воздушный зазор между обкладками конденсатора и диэлектриком при больших и малых ϵ .

Решение. Конденсатор с воздушной и диэлектрической прослойками имеет емкость $C = \frac{\sigma}{4\pi \left(d' + \frac{d - d'}{\epsilon} \right)}$ (задача 3, § 90). Отсюда эффективный диэлектрический коэффициент равен

$$\epsilon_{\text{эфф}} = \frac{4\pi d \cdot C}{\sigma} = \frac{d}{d' + \frac{d - d'}{\epsilon}} = \frac{1}{x + \frac{1 - x'}{\epsilon}}, \quad \text{где } x = \frac{d'}{d} -$$

отношение толщины воздушной прослойки к расстоянию между обкладками конденсатора. Если $x \ll 1$ и $\epsilon \gg 1$, то $\epsilon_{\text{эфф}} \approx \frac{\epsilon}{1 - x} \approx \epsilon$. Если же $\epsilon \gg \frac{1}{x}$, то $\epsilon_{\text{эфф}} = \frac{1}{x}$ и измерение C не позволяет определить ϵ .

2. В однородно поляризованной среде с поляризацией $P_z = P$ образована шаровая полость радиуса a . Определить поле в центре шаровой полости.

Решение. Плотность поверхностного заряда $\eta = P_n = -P \cos \vartheta$, где ϑ — полярный угол (за ось z взято направление \vec{P}). Составляющая по оси z поля в центре шара, создаваемая элементом поверхности $d\sigma$, равна

$$dE_z = \frac{\eta d\sigma}{a^2} \cos \vartheta = -P \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} d\sigma.$$

Так как $d\sigma = 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta$, то

$$E_z = \int dE_z = -2\pi P \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{4\pi}{3} P.$$

§ 139. Ионная поляризация

У ионных кристаллов статический диэлектрический коэффициент в несколько раз больше квадрата коэффициента преломления. Например, для NaCl $\epsilon_{\text{ст}} = 5,62$, а $N^2 = 2,25$; для NaF $\epsilon_{\text{ст}} = 6,0$, $N^2 = 1,74$. Это различие объясняется наличием ионной поляризации — смещением ионов во внешнем электрическом поле и деформацией электронных оболочек ионов вследствие смещений. Рассмотрим, например, кристалл типа M^+X^- . Решетку такого кристалла можно рассматривать как две кубические решетки, построенные из ионов M^+ и X^- и вставленные одна в другую. Во внешнем однородном электрическом поле решетки из ионов противоположных знаков смеются как целое в противоположные стороны на отрезки z_\pm (ось z направим параллельно полю). Если $M_\pm \omega_0^2$ — коэффициент квазиупругой силы, возвращающей ион с массой M_\pm в положение равновесия, то на N ионов решетки будет действовать сила $-NM_\pm \omega_0^2 z_\pm$. Так как

Электрическая сила, действующая в поле на те же ионы, равна $\pm NeE_0$, то условия равновесия примут вид

$$-NM_+\omega_0^2z_+ + NeE_0 = 0, \quad -NM_-\omega_0^2z_- - NeE_0 = 0.$$

Отсюда полное относительное смещение ионов противоположного знака равно

$$z = z_+ - z_- = \frac{eE_0}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-} \right). \quad (139.01)$$

Ионная поляризация равна $P = \frac{ez}{V_0}$, где V_0 — объем, приходящийся на одну молекулу. Для структуры типа NaCl, в которой каждый ион окружен шестью ионами противоположного знака, расположенными от него на расстоянии a , $V_0 = 2a^3$. Поэтому для решетки типа NaCl

$$P = \frac{e^2}{2\omega_0^2 a^3} \left(\frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-} \right) E_0. \quad (139.02)$$

Отсюда часть диэлектрического коэффициента, обусловленная ионным смещением, равна

$$\Delta\epsilon_{\text{ион}} = \frac{4\pi P}{E_0} = \frac{2\pi e^2}{\omega_0^2 a^3} \left(\frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-} \right). \quad (139.03)$$

Эта формула, выведенная Борном, связывает $\Delta\epsilon$ с собственной частотой оптических колебаний (§ 131). При выводе ее ионы рассматривались как точечные и недеформирующиеся. Для NaCl имеем: $\omega_0 = 3,2 \cdot 10^{13}$, $a = 2,81 \cdot 10^{-8}$,

$$\Delta\epsilon_{\text{ион}} = \frac{6,28 (4,80 \cdot 10^{-10})^2}{(3,2 \cdot 10^{13})^2 (2,81 \cdot 10^{-8})^3 1,66 \cdot 10^{-24}} \left(\frac{1}{23} + \frac{1}{35,5} \right) = 2,7.$$

Наблюдаемое значение $\Delta\epsilon_{\text{NaCl}} = 5,62 - 2,25 = 3,37$. Согласие опыта с теорией можно считать достаточно хорошим, если учесть упрощения, сделанные при выводе.

§ 140. Термовая ионная поляризация. Диэлектрические потери

Электронная и ионная поляризации не зависят от температуры. Однако встречается поляризация, величина которой зависит от температуры. Рассмотрим случай тепловой ионной поляризации, которая определяется слабо связанными ионами. Для простоты возьмем в каждой кристаллической ячейке ионы только одного знака.

Пусть твердый диэлектрик содержит ионы с двумя равноценными положениями равновесия (то есть значения U_0 потенциальной энергии иона в этих положениях одинаковы). Пусть положения равновесия разделены потенциальным барьером. Обозначим через n число ионов

в единице объема. При отсутствии внешнего поля ионы в результате теплового движения равномерно распределяются между положениями равновесия. Поэтому можно допустить, что дипольные моменты соседних ячеек взаимно компенсируются и диэлектрик не поляризован.

При наличии внешнего поля \vec{E} появляется электрическая сила, стремящаяся передвинуть ионы в соседнее положение равновесия. В результате одновременного действия поля и теплового движения установится некоторое неравномерное распределение ионов — возникнет электрическая поляризация.

Выполним статистический подсчет распределения ионов. При наличии внешнего поля положения равновесия перестают быть равнозначными. Если δ — проекция расстояния между положениями равновесия на направление поля, то потенциальные энергии иона в двух положениях равновесия при наличии поля E будут соответственно равны

$$U_1 = U_0 + \frac{1}{2} eE\delta, \quad U_2 = U_0 - \frac{1}{2} eE\delta. \quad (140.01)$$

Поэтому числа ионов в положениях равновесия 1 и 2 равны

$$n_1 = Ae^{-\frac{U_1}{kT}} = Ae^{-\frac{U_0 + \frac{1}{2} eE\delta}{kT}}, \quad n_2 = Ae^{-\frac{U_2}{kT}} = Ae^{-\frac{U_0 - \frac{1}{2} eE\delta}{kT}}, \quad (140.02)$$

где A определяется из условия $n_1 + n_2 = n$:

$$A = ne^{\frac{U_0}{kT}} \left(e^{\frac{eE\delta}{2kT}} + e^{-\frac{eE\delta}{2kT}} \right)^{-1}. \quad (140.03)$$

Следовательно,

$$n_1 = n \frac{e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}}, \quad n_2 = n \frac{e^\eta}{e^\eta + e^{-\eta}}, \quad (140.04)$$

где

$$\eta = \frac{eE\delta}{2kT}. \quad (140.05)$$

Очевидно, при $\eta = 0$ (то есть $E = 0$) $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. С увеличением η (то есть с увеличением E или уменьшением T) n_1 уменьшается, стремясь к нулю, а n_2 возрастает, стремясь к n .

Каждый перемещенный ион создает в направлении поля дипольный момент $e\delta$. Поэтому электрический момент единицы объема равен

$$P = e\delta(n_2 - n_1) = e\delta n \operatorname{tgh} \eta = e\delta n L_{1/2}(\eta). \quad (140.06)$$

Здесь

$$L_{1/2}(\eta) = \operatorname{tgh} \eta = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}} \quad (140.07)$$

есть так называемый гиперболический тангенс. При $\eta = 0$ $P = 0$; с увеличением η поляризация растет, стремясь к насыщению при $\eta = \infty$

(рис. 76). Насыщение наступает тогда, когда все ионы перейдут во второе положение равновесия. Поляризация при насыщении равна $P_s = e\delta n$.

Заметим, что при нормальных температурах и не очень сильных полях насыщение не достигается. Полагая в (140.05) $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$, $\delta = 10^{-8} \text{ см}$, $T = 300^\circ$, получим $\eta = 5 \cdot 10^{-5} E$. Следовательно, $\eta = 1$ только для полей порядка $2 \cdot 10^4 \text{ ГС} = 6 \cdot 10^6 \text{ вольт/см}$, что, очевидно, недостижимо. Поэтому практически $\eta \ll 1$ и $\operatorname{tgh} \eta$ можно разложить в ряд по степеням η . В первом приближении $\operatorname{tgh} \eta \approx \eta$, тогда

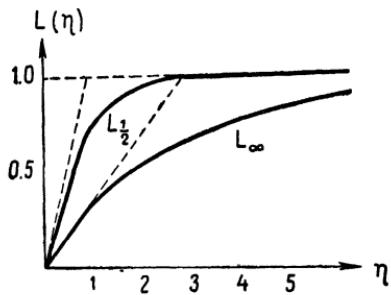


Рис. 76.

вавая электронную поляризацию рассматриваемый диэлектрик, найдем

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_{\text{эл}} + \frac{2\pi e^2 \delta^2 n}{kT}. \quad (140.10)$$

Третий член в (140.10) существенен. Действительно, при сделанных выше предположениях и $n = 10^{21}$ он дает

$$\Delta\epsilon = \frac{2\pi e^2 \delta^2 n}{kT} = \frac{6,28 (4,8 \cdot 10^{-10})^2 10^{-16} \cdot 10^{21}}{1,4 \cdot 10^{-16} \cdot 300} = 3,44.$$

В (140.10) не учитывалось отличие действующего поля от среднего. Если кристаллическая решетка такова, что поле $E_1 = 0$ (§ 138), то по (138.05) и (140.09) получим

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \left(\chi_{\text{эл}} + \frac{e^2 \delta^2 n}{2kT} \right). \quad (140.11)$$

Рассмотренная теория относится к статическим полям.

Для переменных полей необходимо учитывать кинетику установления ионной поляризации. Воспользуемся методом, примененным в § 136. Пусть U — высота активационного потенциального барьера, разделяющего положения равновесия 1 и 2 при $E = 0$. Согласно (136.09) вероятности переходов иона в единицу времени из положения равновесия 1 в положение равновесия 2 и обратно при наличии

поля E можно написать в форме

$$w_{1 \rightarrow 2} = v e^{-\frac{(U - \frac{1}{2}eE_0)}{kT}}, \quad w_{2 \rightarrow 1} = v e^{-\frac{(U + \frac{1}{2}eE_0)}{kT}}, \quad (140.12)$$

где v — частота колебаний около положения равновесия. Изменение чисел ионов в положениях 1 и 2 равно

$$\frac{dn_1}{dt} = -w_{1 \rightarrow 2} n_1 + w_{2 \rightarrow 1} n_2, \quad \frac{dn_2}{dt} = w_{1 \rightarrow 2} n_1 - w_{2 \rightarrow 1} n_2. \quad (140.13)$$

При равновесии $\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$ и $\frac{n_2}{n_1} = \frac{w_{1 \rightarrow 2}}{w_{2 \rightarrow 1}}$. Подставляя сюда значение w (140.12) и пользуясь тем, что $n_1 + n_2 = n$, получим соотношения (140.04). Так как $\eta = \frac{eE_0}{2kT} \ll 1$, можно (140.12) разложить в ряд по степени η и переписать (140.13) в форме

$$2\tau \frac{dn_1}{dt} = -(n_1 - n_2) - \eta(n_1 + n_2), \quad 2\tau \frac{dn_2}{dt} = n_1 - n_2 + \eta(n_1 + n_2). \quad (140.14)$$

Здесь

$$\tau = \frac{1}{2v} e^{\frac{U}{kT}} \quad (140.15)$$

есть некоторое время релаксации, экспоненциально растущее с уменьшением T . Из (140.14) получаем

$$\tau \frac{d}{dt}(n_2 - n_1) = -(n_2 - n_1) + \eta n. \quad (140.16)$$

Пусть η не зависит от времени (то есть $E = \text{const}$). Решая уравнение (140.16) (начальное условие $n_2 - n_1 = 0$ при $t = 0$), получим

$$n_2 - n_1 = \eta n \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);$$

откуда поляризация равна

$$P = e\delta(n_2 - n_1) = \frac{e^2 \delta^2 n}{2kT} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) E. \quad (140.17)$$

Из (140.17) следует, что статическая поляризация (140.08) устанавливается не сразу и время установления равно τ .

Рассмотрим случай переменного внешнего поля, меняющегося по закону $E = E_0 e^{i\omega t}$. Уравнение (140.16) принимает вид

$$\tau \frac{d}{dt}(n_2 - n_1) = -(n_2 - n_1) + \eta_0 n e^{i\omega t}, \quad \eta_0 = \frac{e\delta E_0}{2kT}. \quad (140.18)$$

Установившееся состояние будет иметь вид

$$n_2 - n_1 = \frac{n \eta_0 e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} = \frac{n e\delta}{1 + i\omega\tau} \cdot \frac{E}{2kT}. \quad (140.19)$$

Поэтому ионная поляризация и диэлектрический коэффициент в переменном поле соответственно равны

$$P = \frac{e^2 \delta^2 n}{2kT} \cdot \frac{E}{1 + i\omega\tau}, \quad (140.20)$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_{\text{эл}} + \frac{2\pi e^2 \delta^2 n}{kT} \cdot \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \quad (140.21)$$

Таким образом, диэлектрический коэффициент оказывается комплексным. Разделяя ϵ на вещественную и мнимую части, получим

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \operatorname{Re} \epsilon = 1 + 4\pi\chi_{\text{эл}} + \frac{2\pi e^2 \delta^2 n}{kT(1 + \omega^2 \tau^2)}, \\ \epsilon_2 &= -\operatorname{Im} \epsilon = \frac{2\pi e^2 \delta^2 n}{kT} \cdot \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (140.22)$$

С увеличением частоты поля вещественная часть монотонно уменьшается. Мнимая часть сначала возрастает от нуля до максимума (при $\omega = \frac{1}{\tau}$), а затем монотонно уменьшается до нуля.

Чтобы выяснить смысл мнимой части ϵ_2 , воспользуемся тем, что согласно (109.03) мнимая часть комплексной диэлектрической постоянной связана с проводимостью. Поэтому мнимую часть ϵ можно связать с некоторой эффективной проводимостью $\gamma_{\text{эфф}}$. Полагая согласно (109.03) $\frac{4\pi\gamma_{\text{эфф}}}{\omega} = \epsilon_2$, получим $\gamma_{\text{эфф}} = \frac{\omega\epsilon_2}{4\pi}$. Эта эффективная проводимость связана с током смещения. Так как в силу комплексности ϵ ток смещения по фазе отличается от напряженности, в диэлектрике энергия переменного электрического поля будет рассеиваться (диэлектрик нагревается). Это явление называется диэлектрическими потерями. Количество теплоты, выделяемое в единице объема в единицу времени, равно

$$Q' = \gamma_{\text{эфф}} E^2 = \frac{\epsilon_2 \omega}{4\pi} E^2 = \frac{\epsilon_1 E^2}{4\pi} \omega \operatorname{tg} \theta, \quad (140.23)$$

где θ (угол потерь) определяется равенством

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (140.24)$$

Как видно из (140.22), диэлектрические потери существенно зависят от времени релаксации τ , которое в свою очередь согласно (140.15) экспоненциально возрастает с уменьшением температуры.

Задача.

Диэлектрик плоского конденсатора состоит из двух параллельных слоев. Один из слоев имеет толщину d ($\epsilon \neq 0, \gamma = 0$), а другой — толщину xd ($\epsilon = 0, \gamma \neq 0$). Доказать, что такой конденсатор равнозначен конденсатору, у которого пространство между пластинками заполнено однородной средой с диэлектрическим коэффициентом $\epsilon' = \frac{\epsilon(1+x)}{1 + \frac{i\epsilon\omega x}{4\pi\gamma}}$ (задача Киттеля).

Решение. Рассматривая конденсатор как систему, состоящую из последовательно включенных емкости (с комплексным сопротивлением на единицу площади $\dot{Z}_C = -\frac{i}{\omega C} = -i \frac{4\pi d}{\epsilon \omega}$) и активного сопротивления ($\dot{Z}_R = \frac{d}{\gamma}$), найдем комплексное сопротивление $\dot{Z} = \frac{d}{\gamma} - i \frac{4\pi d}{\epsilon \omega}$. Приравнивая последнее комплексному сопротивлению $\dot{Z} = -i \frac{4\pi d (1+x)}{\epsilon' \omega}$ конденсатора с однородным диэлектриком, имеющим диэлектрический коэффициент ϵ' , получим искомое.

§ 141. Тепловая ориентационная поляризация

Рассмотрим газ, состоящий из дипольных молекул (например, CO, HCl, H₂O и др.). Молекулы газа могут свободно вращаться. Поэтому во внешнем электрическом поле дипольные моменты будут ориентироваться по полю (§ 32). При низких температурах и достаточно больших полях эта ориентация будет полная; дипольный момент единицы объема будет равен $P_s = pn$, где p — дипольный момент одной молекулы, а n — число молекул в единице объема. При повышении температуры оказывается дезориентирующее действие теплового движения и ориентация диполей не будет полной. Проекция дипольного момента \vec{p} молекулы на направление поля \vec{E} равна $p \cos \theta$, где θ — угол, образованный \vec{p} с направлением \vec{E} . Поэтому вектор поляризации равен

$$P_{\text{дип}} = \sum_{a=1}^n p \cos \theta_a = np \overline{\cos \theta}, \quad \overline{\cos \theta} = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n \cos \theta_a. \quad (141.01)$$

При отсутствии внешнего поля среднее значение $\overline{\cos \theta} = 0$ и $P_{\text{дип}} = 0$. Чтобы учесть действие внешнего поля, воспользуемся формулой Больцмана: вероятность того, что направление вектора \vec{p} лежит внутри телесного угла $d\Omega = \sin \theta d\theta d\alpha$ (за полярную ось выбрано направление \vec{E}), равна

$$dw(\theta, \alpha) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} d\Omega, \quad (141.02)$$

где статистический интеграл Z находится из условия $\int dw = 1$, так что

$$Z = \int_{(4\pi)} e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} d\Omega \quad (141.03)$$

(интеграл берется по всему телесному углу 4π). Среднее значение $\cos \theta$ равно

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1}{Z} \int_{(4\pi)} e^{-\frac{U(\theta)}{kT}} \cos \theta d\Omega. \quad (141.04)$$

Подставляя сюда потенциальную энергию диполя во внешнем электрическом поле (32.04)

$$U = -pE \cos \vartheta, \quad (141.05)$$

получим

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{Z} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\eta \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

где

$$\eta = \frac{pE}{kT}. \quad (141.06)$$

Легко видеть, что интеграл $\overline{\cos \vartheta}$ равен производной по η от Z :

$$Z = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\eta \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi \int_{-1}^{+1} e^{\eta x} dx = 2\pi \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{\eta}, \quad (141.07)$$

так что

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\eta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \eta} = \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} - \frac{1}{\eta} = L_\infty(\eta). \quad (141.08)$$

Подставив (141.08) в (141.01), получим выражение для поляризации

$$P_{\text{дип}} = P_s L_\infty(\eta) = np \left(\frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} - \frac{1}{\eta} \right). \quad (141.09)$$

Функция L_∞ (рис. 76), введенная П. Ланжевеном, при увеличении η от 0 до ∞ возрастает от 0 до 1, то есть с ростом η (увеличение E или уменьшение T) поляризация P стремится к насыщению P_s . Таким образом, зависимость аналогична зависимости для тепловой ионной поляризации $P_{\text{ион}}$ (§ 140). Некоторое различие объясняется тем, что для ионной поляризации рассматривались лишь два положения иона с различными энергиями, а в (141.05) угол ϑ меняется непрерывно и диполь имеет бесчисленное множество ориентаций.

Заметим, что на практике обычно $\eta \ll 1$. Действительно, $p \approx 10^{-18}$ СГС, поэтому $\eta = 1$ при $E = \frac{kT}{p} 300 \text{ в/см} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ в/см}$. При $T = 100^\circ$ $\eta = 1$ в поле $E = 5 \cdot 10^6 \text{ в/см}$. Следовательно, можно считать $\eta \ll 1$. Тогда, разлагая $L_\infty(\eta)$ в ряд по степеням η , получим

$$L_\infty(\eta) = \frac{\eta}{3} - \frac{\eta^3}{45} + \dots$$

В первом приближении

$$P_{\text{дип}} = \frac{np\eta}{3} = \frac{np^2}{3kT} E, \quad \chi_{\text{дип}} = \frac{np^2}{3kT}. \quad (141.10)$$

Таким образом, как и в случае поляризации ионного смещения, коэффициент поляризации меняется обратно пропорционально температуре.

Учитывая электронную поляризацию молекул, получим

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_{\text{эл}} + \frac{4\pi np^2}{3kT}. \quad (141.11)$$

Выражение (141.11) только численными коэффициентами отличается от (140.10). Установив экспериментально зависимость ε от T , можно определить $\alpha_{\text{эл}}$ и дипольный момент молекул. Действительно, зависимость $\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ от $\frac{1}{T}$ изображается прямой линией, тангенс угла наклона которой к оси $\frac{1}{T}$ дает $\frac{np^2}{3k}$, а начальная ордината (полученная экстраполяцией прямой) — электронную поляризуемость единицы объема $\chi_{\text{эл}}$. Таким методом получены следующие значения дипольных моментов:

газ	HCl	НBr	HJ	H ₂ O
$p \cdot 10^{18}$ сгс	1,03	0,78	0,38	1,87

При переходе к конденсированным — жидким и твердым — телам вычисление ориентационной поляризации значительно усложняется.

§ 142. Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектриками называются диэлектрики, в которых возможна самопроизвольная поляризация (§ 71). Необходимым условием существования сегнетоэлектрических свойств является отсутствие у кристалла центра симметрии, поэтому все сегнетоэлектрики обладают пьезоэлектрическими свойствами — поляризуются при деформации. Самопроизвольная поляризация сегнетоэлектриков возникает в определенных кристаллографических направлениях.

Рассмотрим объяснение сегнетоэлектрических свойств, отвлекаясь для упрощения от конкретных веществ. Возникновение сегнетоэлектрических свойств связано с действием внутреннего поля на слабо связанные ионы, смещение которых из одних равновесных положений в другие приводит к появлению электрической поляризации.

Следует иметь в виду, что ион может иметь несколько положений равновесия. Например, ион Ti^{4+} в BaTiO_3 (рис. 77) имеет шесть положений равновесия. Эти равновесия могут быть равноценными или неравноценными, то есть иметь одинаковую или различную глубину потенциальной ямы. Рассмотрим простейший случай, когда в каждой элементарной кристаллической ячейке имеется только один слабо связанный ион, имеющий два равноценных положения равновесия. Будем считать, что поле

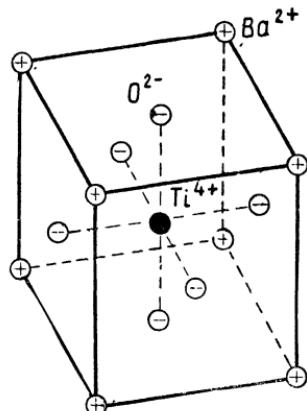


Рис. 77.

направлено по прямой, соединяющей оба положения равновесия иона. Кроме того, пренебрегаем анизотропией и не будем учитывать пьезоэлектрических явлений.

При таких предположениях поляризация сдвига слабо связанных ионов P_i , возникающая под влиянием действующего поля E_d , определяется формулой (140.06)

$$P_i = pn \operatorname{tgh} \frac{pE_d}{kT}, \quad p = e\delta. \quad (142.01)$$

Рассмотрим подробнее E_d . Полную поляризацию P можно разложить на поляризацию P_i смещения слабо связанных ионов и поляризацию P_e , обусловленную смещениями электронов и всех остальных ионов решетки (§ 139). Поляризация P_e пропорциональна действующему полю

$$P_e = \chi_e E_d, \quad (142.02)$$

где χ_e — не зависящая от температуры поляризуемость единицы объема, связанная со всеми видами поляризации, кроме поляризации смещения слабо связанных ионов. Поляризация P_e не направлена, поэтому вносимая ею в E_d часть равна по (138.02) полю Лоренца $\frac{4}{3}\pi P_e = -\frac{4}{3}\pi \chi_e E_d$. Поляризация ионного смещения P_i имеет направленный характер и не удовлетворяет условиям симметрии, рассмотренным в § 138. Поэтому она создает поле E_1 , пропорциональное P_i и равное

$$E_1 = \beta P_i, \quad (142.03)$$

где β — коэффициент, определяемый структурой элементарной ячейки, в частности числом слабо связанных ионов в ней. Теперь

$$E_d = E + \frac{4}{3}\pi \chi_e E_d + \beta P_i, \quad (142.04)$$

откуда

$$E_d = \frac{E + \beta P_i}{1 - \frac{4}{3}\pi \chi_e}. \quad (142.05)$$

Значение χ_e может быть определено путем измерения диэлектрического коэффициента при низких температурах, когда поляризация, обусловленная слабо связанными ионами, равна нулю (ионы «замораживаются» в своих потенциальных ямах). В таком случае, обозначая через ϵ_0 диэлектрический коэффициент при $T = 0^\circ$, можно воспользоваться формулой Клаузинса-Моссотти

$$\frac{4\pi}{3} \chi_e = \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2},$$

откуда

$$\frac{1}{1 - \frac{4}{3}\pi \chi_e} = 1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\chi_e}{1 - \frac{4}{3}\pi \chi_e} = \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi}. \quad (142.06)$$

Поэтому

$$E_d = \left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}\right)(E + \beta P_i). \quad (142.07)$$

Полная поляризация равна

$$P = P_e + P_i = \frac{\epsilon_0(E + \beta P_i)}{1 - \frac{4}{3}\pi\epsilon_0} + P_i = \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi} E + \left(1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi}\right) P_i. \quad (142.08)$$

Таким образом, дипольная поляризация, измеренная любым способом (например, по кривой гистерезиса), равна дипольной поляризации слабо связанных ионов, сложенной с поляризацией электронов и остальных ионов. Она равна $P' = \left(1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi}\right) P_i$. Диэлектрический коэффициент равен

$$\epsilon = \frac{D}{E} = \frac{E + 4\pi P}{E} = \epsilon_0 + 4\pi \frac{P_i}{E} \left(1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi}\right). \quad (142.09)$$

Вернемся к (142.07). Множитель $1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}$ значительно увеличивает E_d . Например, для $\text{BaTiO}_3 \epsilon_0 = 90$, $1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3} = 30,7$. Поэтому для нормальных температур $\frac{pE_d}{kT}$ уже не мало по сравнению с единицей и следует ожидать значительную ионную поляризацию.

Легко видеть, что наблюдаемые значения поляризации насыщения объясняются смещением слабо связанных ионов. Так, для $\text{BaTiO}_3 P_s = 4800 \text{ СГС}$. Объем элементарного куба (рис. 77) равен $(4 \cdot 10^{-8})^3 \text{ см}^3$; поэтому дипольный момент элементарного куба равен $3 \cdot 10^{-18} \text{ СГС}$. Считая, что вся поляризация обусловлена смещением центрального иона Ti^{4+} (что несколько преувеличивает его роль), получим для величины смещения $\delta = \frac{3 \cdot 10^{-18}}{4 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}} \text{ см} \approx 0,15 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

Последнее вполне допустимо, так как составляет 5% от ребра куба.

Чтобы определить ионную поляризацию P_i при данных E и T , надо решить систему уравнений (142.01) и (142.07). Решение можно найти графическим методом, предложенным Вейссом в теории ферромагнетизма. Введем обозначение

$$\eta = \frac{pE_d}{kT} = \left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}\right) \frac{p}{kT} (E + \beta P_i). \quad (142.10)$$

Тогда задача сводится к совместному решению системы

$$\frac{P}{P_s} = \operatorname{tgh} \eta, \quad (142.11)$$

$$\frac{P_i}{P_s} = b\eta - \frac{E}{\beta P_s}, \quad \left(b = \frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}\right)} \frac{kT}{p\beta P_s} = \frac{T}{\theta}\right). \quad (142.12)$$

Уравнение (142.12) получено из (142.07) решением относительно P_i . $P_s = np$ есть поляризация насыщения, поэтому βP_s есть максимальное поле E_1 , созданное слабо связанными ионами. Для определения поляризации P_i находим точку пересечения универсальной кривой (142.11) и прямой (142.12), построенных как функции вспомогательного аргумента η (рис. 78).

Допустим, что $E = 0$. Так как тангенс угла касательной к кривой (142.11) в начале координат равен 1, то при $b > 1$ ($E = 0$)

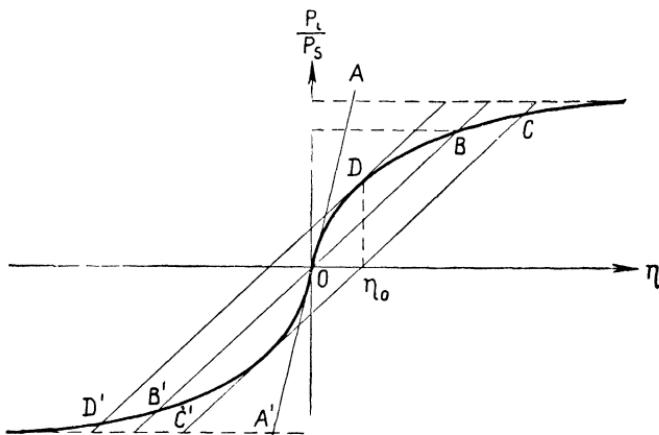


Рис. 78.

прямая (142.12), например $A'O A$, имеет только одну точку пересечения ($\eta = 0$) с кривой (142.11). Следовательно, вещество будет неполяризованным. При $b < 1$ прямая, например $B'OB$, имеет три точки пересечения B' , O и B с кривой. Однако можно показать, что лишь равноценные точки B и B' соответствуют максимуму энтропии системы и поэтому являются равновесными. Таким образом, при $b < 1$ имеет место самопроизвольная (остаточная) поляризация, значение которой дается ординатами точек B и B' . Будет ли иметь место случай B или B' (будет ли вещество поляризовано в данном направлении наиболее легкой поляризации или противоположном) — зависит от предшествующей истории образца.

Граница, разделяющая область самопроизвольной поляризации ($b < 1$) от области отсутствия последней ($b > 1$), находится из условия $b = 1$. В силу (142.12) соответствующая температура равна

$$\theta = \left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}\right) \frac{P_s \beta}{k} = \left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}\right) \frac{\beta P^2 n}{k}. \quad (142.13)$$

Температуру θ называют температурой Кюри. Физический смысл (142.13) заключается в том, что самопроизвольная поляризация исчезает, когда средняя энергия колебательного движения kT становится равной энергии $p\left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}\right)\beta P_s$ диполя во внутреннем поле.

При наличии поля ($E > 0$) прямая (142.12) проходит ниже прямой BB' (например, прямая CC'). Точка пересечения с кривой переходит в положение C и поляризация (при той же температуре) возрастает.

Найдем зависимость остаточной поляризации от температуры. Допустим, что T близка к θ . Тогда, разлагая $\operatorname{tgh} \eta$ в ряд, получим $\frac{P_t}{P_s} = \eta - \frac{\eta^3}{3} + \dots$. Так как при $E=0$ по (142.12) $\frac{P_t}{P_s} = b\eta$, то $b\eta = \eta - \frac{\eta^3}{3}$; откуда $\eta_0^2 = 3(1-b)$ и остаточная ионная поляризация равна

$$P_{t0} = P_s b \eta_0 = P_s b \sqrt{3(1-b)} = \\ = P_s \frac{T}{\theta} \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{\theta} \right)} \approx P_s \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{\theta} \right)}. \quad (142.14)$$

По мере приближения к точке Кюри поляризация уменьшается и при $T=\theta$ обращается в нуль, оставаясь равной нулю и при $T>\theta$.

Пользуясь рисунком 78, легко объяснить явление гистерезиса и оценить коэрцитивное поле E_c (§ 71). При уменьшении напряженности E поля точка пересечения прямой (142.12) с кривой скользит вдоль кривой до положения B , а после изменения направления E — до точки D (в которой прямая $D'D$ касается кривой). При дальнейшем увеличении $|E|$ остается только одна точка пересечения (левее D'). Следовательно, поляризация скачком меняет свой знак и величину — от значения, соответствующего точке D , до значения, соответствующего точке D' . Таким образом, получается кривая гистерезиса (рис. 79), на которой для удобства соответствующие точки обозначены теми же буквами. Эта кривая не совпадает точно с кривой на рисунке 35, так как относится к идеальному случаю.

Чтобы оценить величину коэрцитивного поля E_c , найдем координаты точки касания D . В точке D угловые коэффициенты кривой (142.11) и прямой (142.12) совпадают. Поэтому $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta_0} = b$, откуда $\operatorname{ch} \eta_0 = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Так как $\operatorname{ch}^2 \eta_0 - \operatorname{sh}^2 \eta_0 = 1$, то $\operatorname{sh} \eta_0 = \sqrt{\frac{1}{b} - 1}$ и $\operatorname{tgh} \eta_0 = \sqrt{1-b}$. Далее, $\eta_0 = \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{b}}$, где $\operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{b}}$ — функция, обратная гиперболическому косинусу. Для точки D получаем

$$\frac{P}{P_s} = b \eta_0 - \frac{E_c}{b P_s} = \operatorname{tgh} \eta_0 = \sqrt{1-b},$$

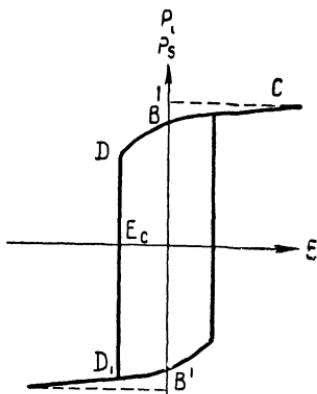


Рис. 79.

откуда

$$E_c = -\beta P_s \left(\sqrt{1-b} - b\eta_0 \right) = -\beta P_s \left(\sqrt{1-\frac{T}{\theta}} - \frac{T}{\theta} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\theta}{T}} \right). \quad (142.15)$$

Формула (142.15) дает зависимость коэрцитивного поля от температуры. Знак минус соответствует точке D . Очевидно, при $T=0$ коэрцитивное поле исчезает одновременно с остаточной поляризацией.

Рассмотрим свойства сегнетоэлектрика при температурах выше температуры Кюри. В этом случае поляризация во внешнем поле мала и $\operatorname{tgh} \eta \approx \eta$. Тогда $b\eta - \frac{E}{\beta P_s} = \eta$, откуда $\eta = \frac{E}{\beta P_s(b-1)}$. Ионная поляризация равна

$$P_i = P_s \eta = \frac{E}{\beta(b-1)} = \frac{\theta}{\beta(T-\theta)}, \quad (T > 0). \quad (142.16)$$

Пользуясь (142.09), получаем диэлектрический коэффициент при $T > 0$.

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{C}{T-\theta}, \quad \text{где } C = \frac{4\pi\theta}{\beta} \left(1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi} \right). \quad (142.17)$$

Из последнего соотношения и (142.13) находим

$$\beta = \frac{4\pi\theta}{C - \theta(\epsilon_0 - 1)}, \quad p^2 = \frac{k}{4\pi n} \frac{C - \theta(\epsilon_0 - 1)}{1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3}}. \quad (142.18)$$

Соотношения (142.18) позволяют определить коэффициент внутреннего поля β и дипольный момент ионного смещения p из опытных данных.

Для дигидрофосфата калия (KH_2PO_4), в котором поляризация обусловлена смещением ионов H , при температурах, не очень близких к точке Кюри, опыт дает

$$\epsilon = 4,5 + \frac{3100}{T-121}. \quad (142.19)$$

Следовательно, $C = 3100$, $\epsilon = 4,5$, $\theta = 121^\circ$. Это дает $\beta = 0,567$. Объем элементарной ячейки, содержащей четыре молекулы, равен $(7,43)^2 \cdot 6,97 \text{ \AA}^3$. Так как каждая молекула обладает двумя водородными связями, которые действуют как диполи, то $n = 2,08 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Поэтому по (142.17) получается дипольный момент поляризации водородной связи $p = 0,81 \cdot 10^{-18}$ СГС. Поляризация насыщения $P_{is} = pn = 2,08 \cdot 10^{22} \cdot 0,81 \cdot 10^{-18}$. Чтобы получить полную поляризацию, надо согласно (142.08) последнее умножить на

$$1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi} = 1,159.$$

Это дает

$$P_s = P_{is} \left(1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi} \right) = 19500 \text{ СГС.}$$

Рассмотренная теория относится к области внутри кристалла, в которой самопроизвольная поляризация имеет одно и то же направление. Такие области называются доменами. Обычно макроскопический кристалл распадается на ряд доменов, самопроизвольно поляризованных в различных направлениях, и поэтому в целом кристалл не поляризован. Однако можно вырастить кристаллы, весь объем которых занимает один домен. Переход в сегнетоэлектрическое состояние является фазовым переходом первого или второго рода. Например, кристаллы BaTiO₃ выше точки Кюри имеют кубическую симметрию, ниже ее — тетрагональную; переход кристалла в сегнетоэлектрическое состояние является переходом первого рода, но очень близким к переходу второго рода. При охлаждении ниже точки Кюри в различных частях кристалла в тетрагональную ось превращаются различные кубические оси. Поэтому вектор самопроизвольной поляризации \vec{P} будет располагаться в кристалле в различных направлениях в зависимости от направления тетрагональной оси. Другими словами, кристалл распадается на различно поляризованные домены. Как указали в 1930 году Я. И. Френкель и Я. Г. Дорфман, разделение на домены связано с тем обстоятельством, что при определенных размерах областей самопроизвольной поляризации сумма энергии поляризованной среды и поверхностной энергии на границах двух различно поляризованных областей достигает минимума.

Для кристалла, имеющего сложную доменную структуру, процесс поляризации заключается в трех процессах: 1) в увеличении поляризации каждого домена во внешнем поле, 2) в изменении направления поляризации доменов в соответствии с направлением внешнего поля и 3) в изменении объемов различных доменов — если поляризация домена ориентирована невыгодно относительно внешнего поля, то граница, разделяющая этот домен от соседнего, ориентированного более выгодно (с меньшей энергией во внешнем поле), перемещается так, что объем второго домена увеличивается за счет объема первого.

Задачи.

1. По данным Мерца для однодоменного кристалла BaTiO₃ диэлектрический коэффициент при температуре выше точки Кюри удовлетворяет соотношению

$$\epsilon = 90 + \frac{7 \cdot 10^4}{T - 393^\circ}.$$

Определить коэффициент внутреннего поля.

Решение. В силу (142.17) имеем

$$\beta = \frac{4\pi \frac{393}{7} 10^{-4}}{1 - \frac{393}{7} 10^{-4} (90 - 1)} = 0,142.$$

2. В элементарной ячейке BaTiO (рис. 77) ион Ti^{4+} имеет шесть положений равновесия, расположенных симметрично относительно центра (на направлениях, соединяющих ионы кислорода). Определить ионную поляризацию, если внешнее поле направлено вдоль одного из этих направлений (вдоль оси x).

Решение. Обозначим через n_1, n_2, \dots, n_6 числа ионов Ti^{4+} в единице объема в шести положениях равновесия. Имеем $\sum_{i=1}^6 n_i = n$. Если положения 1 и 2 расположены по линии действия поля, а положения 3, 4, 5, 6 — в перпендикулярной плоскости, то поле перебрасывает ионы из 1 в 2 или обратно, не меняя плотности ионов в положениях 3, 4, 5, 6. Поэтому

$$n_1 = \frac{1}{Z} e^{\frac{pE_\partial}{kT}}, \quad n_2 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{pE_\partial}{kT}}, \quad n_3 = \dots = n_6 = \frac{1}{Z}.$$

Из $\sum_i n_i = n$ находим $Z = n \left(4 + 2 \operatorname{ch} \frac{pE_\partial}{kT} \right)^{-1}$. Следовательно, поляризация смещения ионов Ti^{4+} равна

$$P_{ix} = p(n_1 - n_2) = np \frac{\operatorname{sh} \frac{pE_\partial}{kT}}{2 + \operatorname{ch} \frac{pE_\partial}{kT}}.$$

3. Показать, что температура Кюри и постоянная C в выражении для диэлектрического коэффициента BaTiO_3 выше точки Кюри определяются формулами

$$C = \frac{4\pi np^2}{3k} \left[1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi} \right] \left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3} \right), \quad \theta = \frac{\beta np^2}{3k} \left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3} \right).$$

Указание. Воспользоваться методом, примененным для вывода (142.17), но в качестве P_i взять значение P_{ix} из задачи 2.

4. Определить электрический момент элементарной ячейки и поляризацию насыщения BaTiO_3 , учитывая, что число диполей в 1 см³ $n = 1,56 \cdot 10^{22}$ см⁻³.

Решение. Пользуясь формулами задачи 3 и данными задачи 1, получаем

$$p = \left[\frac{3k}{4\pi n} \frac{C - \theta(\epsilon_0 - 1)}{\left(1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{3} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} = 1,56 \cdot 10^{-18},$$

$$P'_i = np \left(1 + \beta \frac{\epsilon_0 - 1}{4\pi} \right) = 49 \cdot 10^3 \text{ СГС.}$$

§ 143. Дисперсия и поглощение света

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном, но диспергирующем изоляторе. Показатель преломления вещества определяется уравнением (108.06)

$$N^2 = \epsilon.$$

Это соотношение оправдывается, если под ϵ понимать динамическое значение диэлектрического коэффициента. В области больших

периодов, превышающих время релаксации ионной поляризации, ε определяется как электронным, так и ионным смещением. Для высоких частот (видимый свет) период колебаний значительно меньше времени ионной релаксации (§ 140) и ионы не успевают смещаться под действием электрического поля волны, поэтому при таких частотах ε определяется только электронной поляризацией.

Из (137.06) видно, что диэлектрический коэффициент в переменном поле комплексный. В § 109 доказано, что в случае комплексного показателя N показателем преломления является его действительная часть, а мнимая часть его определяет показатель поглощения. В соответствии со (109.04) и (109.10) имеем

$$\dot{N}^2 = (N + i\kappa)^2 = \dot{\varepsilon} = 1 + \frac{4\pi ne^2}{m} \sum_a \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\gamma_a \omega}.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$N^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{4\pi ne^2}{m} \sum_a \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma_a^2 \omega^2}, \quad (143.01)$$

$$N\kappa = \frac{2\pi ne^2}{m} \sum_a \frac{\gamma_a \omega}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma_a^2 \omega^2}. \quad (143.02)$$

Рассмотрим общий ход показателя преломления N в прозрачной области. Тогда $(\omega_a^2 - \omega^2)^2 \gg \gamma_a^2 \omega^2$ и можно считать $\kappa \approx 0$. Поэтому

$$N^2 = 1 + \frac{4\pi ne^2}{m} \sum_a \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2}. \quad (143.03)$$

В не слишком плотных газах $N - 1 \ll 1$, поэтому формула (143.03) упрощается и принимает вид

$$N = 1 + \frac{2\pi ne^2}{m} \sum_a \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2}. \quad (143.04)$$



Рис. 80.

На рисунке 80 дан общий ход зависимости N от ω . Допустим, что собственные частоты колебаний электронов расположены в порядке $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_a < \dots$. Для малых частот света ($\omega \ll \omega_1$) получается статическое значение показателя преломления $N = \sqrt{\epsilon_{ст}}$. По мере приближения ω к первой линии поглощения ω_1 значение показателя преломления быстро возрастает, а за линией поглощения снова принимает малое значение. Это повторяется у каждой линии поглощения и показатель преломления во всей прозрачной области растет с увеличением частоты. Такая зависимость N от частоты называется нормальной дисперсией.

С увеличением частоты значение показателя преломления между линиями поглощения делается все меньше, так как слагаемые с $\omega_a < \omega$ отрицательны. Для частот света, превышающих максимальную собственную частоту, N делается меньше единицы. Поэтому для такого света при падении на границу вещества должно наблюдаться полное отражение. Это явление действительно наблюдается для рентгеновских лучей.

Рассмотрим ход показателей преломления и поглощения в области линии поглощения с помощью формул (143.01) и (143.02). Ограничимся областью частот вблизи собственной частоты ω_a . Предположим, что ϵ мало отличается от единицы (это имеет место, например, для газов). Тогда, пренебрегая κ в (143.01) и принимая $N=1$ в (143.02), получим

$$N = 1 + \frac{2\pi n e^2}{m} \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma_a^2 \omega^2}, \quad (143.05)$$

$$\kappa = \frac{2\pi n e^2}{m} \frac{\gamma_a \omega}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma_a^2 \omega^2}. \quad (143.06)$$

Введем безразмерную переменную $\xi = \frac{2}{\gamma_a} (\omega - \omega_a)$. Так как вблизи линии поглощения ω_a разность $\omega - \omega_a$ мала по сравнению с ω и ω_a , можно приближенно написать $\omega_a^2 - \omega^2 = -2\omega_a(\omega - \omega_a) = -\gamma_a \omega_a \xi$.

Тогда формулы (143.05) и (143.06) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} N - 1 &= -\frac{2\pi n e^2}{m \gamma_a \omega_a} \frac{\xi}{\xi^2 + 1}, \\ \kappa &= \frac{2\pi n e^2}{m \gamma_a \omega_a} \frac{1}{\xi^2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (143.07)$$

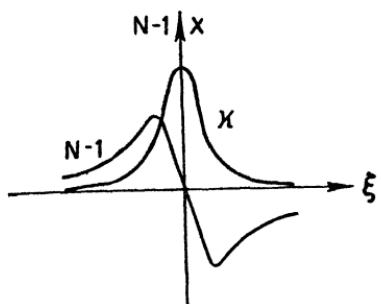


Рис. 81.

Зависимости $(N - 1)$ и κ от ξ изображены на рисунке 81. При $\xi = 0$ (то есть $\omega = \omega_a$) $N = 1$, а показатель поглощения достигает максимума; при $\xi = \pm 1$ показатель преломления принимает экстремальные значения, а показатель поглощения имеет значение, равное половине максимального. Между $\xi = -1$ и $\xi = +1$ показатель преломления с увеличением ω уменьшается. Такой ход N называется аномальной дисперсией.

Вследствие поглощения волна, проходя вещество, ослабляется. Зависимость усредненного вектора Умова — Пойнтинга S от пути x , пройденного в веществе, дается формулой (109.19). Поэтому энергия, поглощаемая на пути dx , равна

$$-\frac{dS}{dx} dx = 2 \frac{\omega \kappa}{c} S dx = \frac{4\pi n e^2}{mc} \frac{\gamma_a \omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \gamma_a^2 \omega^2} S dx. \quad (143.08)$$

Дальнейшие превращения этой энергии зависят от природы коэффициента γ_a . Вывод формулы для ε (137.06) опирался на формулу для δr_a (§ 62), которая предполагает, что затухание колебаний электрона обусловлено только реакцией излучения. В этом случае поглощенная энергия (143.08) тратится только на излучение рассеянного света, что имеет место в достаточно разреженных газах. Однако при увеличении плотности газа все большую роль играют так называемые «столкновения второго рода» возбужденных атомов, поглотивших излучение, с невозбужденными, при которых энергия возбуждения переходит в кинетическую энергию сталкивающихся атомов—поглощенная энергия излучения превращается в кинетическую энергию молекул газа.

§ 144. Влияние внешнего электрического поля на распространение света (эффект Керра)

Многие электрические изотропные вещества (например, нитробензол $C_6H_5NO_2$) под действием внешнего электрического поля получают свойства одноосных кристаллов (§ 114) с оптической осью, параллельной электрическому полю (эффект Керра). Вследствие этого свет, распространяющийся через такое вещество, испытывает двойное лучепреломление. Если внешнее поле E направлено по оси z , то показатели преломления N_z и $N_x = N_y$ (напомним, что индексы указывают направление светового вектора \vec{D} волны) связаны соотношением

$$N_z - N_x = K \overset{\circ}{N} E^2, \quad (144.01)$$

где $\overset{\circ}{N}$ — показатель преломления при отсутствии поля, а K — постоянная Керра для данного вещества.

Для объяснения эффекта Керра достаточно предположить, что молекулы данного вещества оптически анизотропны, то есть оптическая поляризуемость молекулы различна в разных направлениях и характеризуется тензором $(^2)\alpha$. Если молекулы вещества ориентированы одинаково, то поляризуемость единицы объема $(^2)x = (^2)\alpha \cdot n$ также будет тензором и вещество оказывается анизотропным. Однако в газах и жидкостях (за исключением так называемых „жидких кристаллов“) при отсутствии внешнего поля вследствие теплового движения существует полная дезориентация молекул. Под действием внешнего электрического поля молекулы ориентируются и возникает оптическая анизотропия.

Рассмотрим упрощенную теорию эффекта Керра, применимую к газам. Предположим, что тензоры оптической поляризуемости $(^2)\alpha$ и статической поляризуемости $(^2)\overset{\circ}{\alpha}$ молекулы одновременно приводятся к главным осям. Обозначим главные оси, связанные с молекулой,

через ξ , η , ζ или $\xi_\sigma (\sigma = 1, 2, 3)$. Тогда компоненты тензоров оптической и статической поляризуемости равны

$$\alpha_{\rho\sigma} = \alpha_{\rho\rho}\delta_{\rho\sigma} = \alpha_\rho\delta_{\rho\sigma}, \quad \overset{\circ}{\alpha}_{\rho\sigma} = \overset{\circ}{\alpha}_{\rho\rho}\delta_{\rho\sigma} = \overset{\circ}{\alpha}_\rho\delta_{\rho\sigma}, \quad (144.02)$$

где $\delta_{\rho\rho} = 1$ и $\delta_{\rho\sigma} = 0 (\rho \neq \sigma)$. В первом приближении можно считать, что поляризуемость $(^2)\alpha$ не зависит от внешнего поля (учет линейной

или квадратичной зависимости α от внешнего поля приводит к так называемому эффекту Фогта, который пренебрежимо мал).

Чтобы вычислить средние значения компонент оптической поляризуемости молекулы при наличии внешнего поля, надо усреднить $\alpha_{\rho\sigma}$ по распределению Больцмана (141.02)

$$d\omega(\alpha, \psi, \vartheta) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega. \quad (144.03)$$

Здесь $d\omega$ — вероятность определенной ориентации молекулы, характеризуемой углами Эйлера α , ψ , ϑ

(рис. 82), причем $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi d\alpha$ — телесный угол; U — потенциальная энергия молекулы во внешнем постоянном электрическом поле. Согласно (32.02) и (32.04) энергия U равна

$$U = - \sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} - \frac{1}{2} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \overset{\circ}{\alpha}_{\rho\sigma} E_{\rho} E_{\sigma} \equiv - \sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} - \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \overset{\circ}{\alpha}_{\sigma\sigma} E_{\sigma}^2 \quad (144.04)$$

(p_{σ} — составляющая дипольного момента молекулы вдоль оси ξ_{σ}). Первый член (144.04) учитывает энергию постоянного диполя молекулы во внешнем поле, второй — энергию индуцированного диполя. Поэтому выражение (144.04) учитывает ориентирующее действие внешнего поля на молекулы, возникающее как вследствие наличия дипольного момента, так и вследствие наличия анизотропии статической поляризуемости.

Обычно $E < 10^3$ СГС, $p \sim 10^{-18}$ СГС, $\overset{\circ}{\alpha} \sim 10^{-24}$ см³; при $T \approx 300^\circ$, $\frac{pE}{kT} \sim 10^{-2}$, $\frac{\overset{\circ}{\alpha} E^2}{kT} \sim 10^{-5}$. Поэтому в (144.03) $e^{-U/kT}$ можно разложить по степеням U/kT и ограничиться первыми членами разложения.

$$d\omega = \frac{1}{Z} \left\{ 1 + \frac{1}{kT} \sum_{\rho} p_{\rho} E_{\rho} + \frac{1}{2kT} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \overset{\circ}{\alpha}_{\rho\sigma} E_{\rho} E_{\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k^2 T^2} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} p_{\rho} p_{\sigma} E_{\rho} E_{\sigma} \right\} d\Omega.$$

Так как внешнее поле направлено по оси z , то $E_\rho = E(\rho z)$, где $(\rho z) = \cos(\hat{\rho}z)$ — косинус угла между осями ξ_ρ и z . Теперь

$$d\omega = \frac{1}{Z} \left\{ 1 + \frac{E}{kT} \sum_{\rho} p_{\rho} (\rho z) + \frac{E^2}{2kT} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \left(\dot{\alpha}_{\rho\sigma} + \frac{p_{\rho} p_{\sigma}}{kT} \right) (\rho z) (\sigma z) \right\} d\Omega. \quad (144.05)$$

Для вычисления Z воспользуемся условием нормировки. Обозначим через \bar{f} среднее по углам от функции $f(\psi, \vartheta, \alpha)$.

$$\bar{f} = \frac{\int f d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{8\pi^2} \int f d\Omega, \text{ т. к. } \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 8\pi^2. \quad (144.06)$$

Теперь

$$Z = \int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega \simeq \\ \simeq 8\pi^2 \left\{ 1 + \frac{E}{kT} \sum_{\rho} p_{\rho} (\overline{\rho z}) + \frac{E^2}{2kT} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \left(\dot{\alpha}_{\rho\sigma} + \frac{p_{\rho} p_{\sigma}}{kT} \right) \overline{(\rho z)(\sigma z)} \right\}. \quad (144.07)$$

Средние можно вычислить с помощью метода, рассмотренного в § 49. Тогда

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\sigma i}) &= (\bar{\sigma z}) = \overline{\cos \vartheta} = 0, & (\bar{\sigma i})^2 &= (\bar{\zeta z})^2 = \overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3} \\ (\bar{\rho i})(\bar{\sigma j}) &= \frac{1}{3} \delta_{\rho\sigma} \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (144.08)$$

Для трех сомножителей отличны от нуля лишь те средние, которые не содержат повторяющихся индексов

$$\overline{(\lambda i)(\rho j)(\sigma k)} = -\overline{(\lambda i)(\rho k)(\sigma j)} = \frac{1}{6}. \quad (144.09)$$

Наконец, для произведения четырех косинусов отличны от нуля лишь средние

$$\left. \begin{aligned} \overline{(\rho i)^4} &= \frac{1}{5}, & \overline{(\rho i)^2(\sigma i)^2} &= \overline{(\sigma i)^2(\sigma j)^2} = \frac{1}{15} \\ \overline{(\rho i)^2(\sigma j)^2} &= \frac{2}{15}, & \overline{(\rho i)(\rho j)(\sigma i)(\sigma j)} &= -\frac{1}{30} \end{aligned} \right\} \quad (144.10)$$

где $(\rho \neq \sigma)$, $(i \neq j)$. Поэтому статистический интеграл Z равен

$$Z = 8\pi^2 \left\{ 1 + \frac{E^2}{6kT} \sum_{\rho} \left(\dot{\alpha}_{\rho\rho} + \frac{p_{\rho}^2}{kT} \right) \right\} = 8\pi^2 \left\{ 1 + \frac{E^2}{2kT} \left(\dot{\alpha} + \frac{p^2}{3kT} \right) \right\}, \quad (144.11)$$

где $\overset{\circ}{\alpha} = \frac{1}{3} (\overset{\circ}{\alpha}_{11} + \overset{\circ}{\alpha}_{22} + \overset{\circ}{\alpha}_{33})$ — средняя поляризуемость молекулы. Так как член с E^2 мал, то

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ 1 - \frac{E^2}{2kT} \left(\overset{\circ}{\alpha} + \frac{p^2}{3kT} \right) \right\}. \quad (144.12)$$

Вычислим среднее оптического тензора поляризуемости при наличии внешнего поля. Компонента α_{lk} тензора по отношению к неподвижным осям l, k связана с компонентами $\alpha_{\rho\rho}$ в главных осях соотношением

$$\alpha_{lk} = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma\sigma} (\sigma l) (\sigma k).$$

Поэтому среднее значение по распределению (144.05) равно

$$\overline{\alpha_{lk}} = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma\sigma} \int (\sigma l) (\sigma k) dw.$$

Пользуясь (144.05), получим

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{lk}} &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma\sigma} \left\{ \overline{(\sigma l)(\sigma k)} + \frac{E}{kT} \sum_{\rho} p_{\rho} \overline{(\sigma l)(\sigma k)(\rho z)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E^2}{2kT} \sum_{\rho\tau} \left(\overset{\circ}{\alpha}_{\rho\tau} + \frac{p_{\rho} p_{\tau}}{kT} \right) \overline{(\sigma l)(\sigma k)(\rho z)(\tau z)} \right\}. \end{aligned} \quad (144.13)$$

Подставляя $\frac{1}{Z}$ из (144.12) и пользуясь формулами (144.08) — (144.10), находим

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_{xx} &= \bar{\alpha}_{yy} = \alpha + \frac{E^2}{kT} \left\{ \frac{1}{30} \sum_{\rho} \alpha_{\rho} \left(\overset{\circ}{\alpha}_{\rho} + \frac{p_{\rho}^2}{kT} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15} \sum_{\rho \neq \sigma} \sum_{\sigma} \alpha_{\rho} \left(\overset{\circ}{\alpha}_{\sigma} + \frac{p_{\sigma}^2}{kT} \right) - \frac{1}{6} \sum_{\rho} \left(\overset{\circ}{\alpha} + \frac{p^2}{3kT} \right) \alpha_{\rho} \right\}, \\ \bar{\alpha}_{zz} &= \alpha + \frac{E^2}{kT} \left\{ \frac{1}{10} \sum_{\rho} \alpha_{\rho} \left(\overset{\circ}{\alpha}_{\rho} + \frac{p_{\rho}^2}{kT} \right) - \frac{1}{6} \sum_{\rho} \alpha_{\rho} \left(\overset{\circ}{\alpha} + \frac{p^2}{3kT} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{30} \sum_{\rho \neq \sigma} \sum_{\sigma} \alpha_{\rho} \left(\overset{\circ}{\alpha}_{\sigma} + \frac{p_{\sigma}^2}{kT} \right) \right\}, \\ \alpha_{lk} &= 0 \quad (l \neq k), \quad \alpha = \frac{1}{3} (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = \frac{1}{3} (\alpha_{\xi} + \alpha_{\eta} + \alpha_{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (144.14)$$

Эти выражения можно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_{xx} &= \bar{\alpha}_{yy} = \alpha - \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_d) E^2 \\ \bar{\alpha}_{zz} &= \alpha + (\theta_0 + \theta_d) E^2, \end{aligned} \right\} \quad (144.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{45kT} \{(\alpha_\xi - \alpha_\eta)(\dot{\alpha}_\xi - \dot{\alpha}_\eta) + (\alpha_\eta - \alpha_\zeta)(\dot{\alpha}_\eta - \dot{\alpha}_\zeta) + (\alpha_\zeta - \alpha_\xi)(\dot{\alpha}_\zeta - \dot{\alpha}_\xi)\}, \\ \theta_\partial &= \frac{1}{45k^2T^2} \{(\alpha_\xi - \alpha_\eta)(p_\xi^2 - p_\eta^2) + (\alpha_\eta - \alpha_\zeta)(p_\eta^2 - p_\zeta^2) + (\alpha_\zeta - \alpha_\xi)(p_\zeta^2 - p_\xi^2)\}. \end{aligned} \right\} \quad (144.16)$$

Член θ_0 связан с ориентацией молекул в поле вследствие анизотропии статической поляризуемости. Если статическая поляризуемость изотропна, то $\theta_0 = 0$. Член θ_∂ связан с ориентацией молекул в поле вследствие наличия постоянного дипольного момента. Для молекул с изотропной оптической поляризуемостью θ_0 и θ_∂ равны нулю.

Вычислим показатели преломления. При отсутствии поля показатель преломления $\overset{\circ}{N}$ определяется уравнением Лоренца — Лоренца

$$\frac{\overset{\circ}{N}^2 - 1}{\overset{\circ}{N}^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} n_0 \alpha. \quad (144.17)$$

При наличии поля показатели преломления N_z и $N_x = N_y$ различны. Кроме того, вследствие электрострикции число молекул n в единице объема отлично от n_0 . Поэтому

$$\frac{N_z^2 - 1}{N_z^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} n \bar{\alpha}_{zz}, \quad \frac{N_x^2 - 1}{N_x^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} n \bar{\alpha}_{xx}. \quad (144.18)$$

Полагая $N_z = \overset{\circ}{N} + \Delta N_z$ и дифференцируя (144.18), находим

$$\frac{6\overset{\circ}{N} \Delta N_z}{(\overset{\circ}{N}^2 + 2)^2} = \frac{4\pi}{3} \Delta(n \bar{\alpha}_{zz}) = \frac{4\pi}{3} (n_0 \bar{\Delta\alpha}_{zz} + \Delta n \cdot \alpha),$$

где $\bar{\Delta\alpha}_{zz} = \bar{\alpha}_{zz} - \alpha$ и $\Delta n = n - n_0$. Разделив последнее выражение на (144.17), получим

$$\frac{\Delta N_z}{\overset{\circ}{N}} = \frac{N_z - \overset{\circ}{N}}{\overset{\circ}{N}} = \frac{(\overset{\circ}{N}^2 - 1)(\overset{\circ}{N}^2 + 2)}{6\overset{\circ}{N}^2} \left(\frac{\bar{\Delta\alpha}_{zz}}{\alpha} + \frac{\Delta n}{n_0} \right). \quad (144.19)$$

Аналогично

$$\frac{\Delta N_x}{\overset{\circ}{N}} = \frac{N_x - \overset{\circ}{N}}{\overset{\circ}{N}} = \frac{(\overset{\circ}{N}^2 - 1)(\overset{\circ}{N}^2 + 2)}{6\overset{\circ}{N}^2} \left(\frac{\bar{\Delta\alpha}_{xx}}{\alpha} + \frac{\Delta n}{n_0} \right). \quad (144.20)$$

Отсюда видно, что электрострикция изменяет показатели преломления на одно и то же слагаемое. Так как экспериментально изменяется разность $N_z - N_x$ (см. 144.01), то электрострикционный член выпадает. Далее, в (144.15) E означает действующее поле E_d . Для газа (изотропное тело) согласно (138.03)

$$E_d = E + \frac{4\pi}{3} P = E + \frac{\epsilon - 1}{3} E = \frac{\epsilon + 2}{3} E.$$

Беря разность (144.19) и (144.20) и подставляя $\Delta\bar{\alpha}_{xx}$ и $\Delta\bar{\alpha}_{zz}$ из (144.15), получим

$$N_z - N_x = \frac{(\overset{\circ}{N}^2 - 1)(\overset{\circ}{N}^2 + 2)}{4\overset{\circ}{N}} \cdot \frac{\theta_0 + \theta_\partial}{\alpha} \left(\frac{\epsilon + 2}{3} \right)^2 E^2. \quad (144.21)$$

С достаточной точностью $\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\overset{\circ}{N}^2 - 1}{n_0}$. Поэтому для постоянной Керра получим

$$K = \frac{\pi}{27} \left(\frac{\overset{\circ}{N}^2 + 2}{\overset{\circ}{N}} \right) (\epsilon + 2)^2 n_0 (\theta_0 + \theta_\partial) = K_0 + K_\partial. \quad (144.22)$$

Здесь K_0 связано с анизотропией статической поляризуемости, а K_∂ — с дипольной ориентацией.

Изложенная теория хорошо подтверждается экспериментом как по величине K , так и по температурной зависимости для дипольных и недипольных газов. В большинстве случаев $K > 0$, однако из (144.16) видно, что может быть $K < 0$. Для некоторых веществ значения постоянных Керра даны в приводимой таблице¹.

Вещество	$p \cdot 10^{18}$ СГС	$t^\circ \text{ C}$	$K \cdot 10^{15}$ при 760 м.м рт. ст. для $\lambda = 546 \text{ м}\mu$	$K_0 \cdot 10^{15}$	$K_\partial \cdot 10^{15}$
Кислород O_2	0	0	0,45	0,45	0
Азот N_2	0	{ 0 22}	0,30 0,14	0,30 0,14	0 0
Хлористый водород HCl	1,03	18	5,75	0,44	5,31
Четыреххлористый углерод CCl_4	0	99,4	$\pm 0,2$	$\pm 0,2$	0
Бензол C_6H_6	0	113,6	5,56	5,56	0
Нитробензол $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$	3,95	235,5	146	7	139

Из таблицы видно, что если $p \neq 0$, то $|K_\partial| \gg K_0$. Для жидкостей постоянная Керра приблизительно в 10^3 раз больше, чем для газов (в соответствии с увеличением плотности n_0). Однако для жидкостей ориентационная теория неприменима, так как молекулы не обладают свободой вращения (подробнее см. в упомянутой книге М. В. Волькенштейна).

Задача.

Определить постоянные Керра для молекул с аксиальной симметрией (например, N_2 , CO_2) вдали от линии поглощения.

¹ Таблица заимствована из книги М. Волькенштейн, Молекулярная оптика, М., ГИТТЛ, 1951.

Решение. Для аксиально-симметричной молекулы (ось молекулы ζ) $\alpha_\xi = \alpha_\eta \neq \alpha_\zeta$, $\dot{\alpha}_\xi = \dot{\alpha}_\eta \neq \dot{\alpha}_\zeta$, $p = p_\zeta$; поэтому

$$\theta_0 = \frac{2}{45kT} (\alpha_\zeta - \alpha_\xi) (\dot{\alpha}_\zeta - \dot{\alpha}_\xi), \quad \theta_\partial = \frac{2}{45k^2 T^2} (\alpha_\zeta - \alpha_\xi) p_\zeta^2.$$

Вдали от линии поглощения молекулы (приближенно)

$$\frac{\dot{\alpha}_\xi}{\alpha_\xi} = \frac{\dot{\alpha}_\eta}{\alpha_\eta} = \frac{\dot{\alpha}_\zeta}{\alpha_\zeta} = \frac{N_\infty^2 - 1}{N^2 - 1} \simeq \frac{N_\infty - 1}{N - 1} \quad (N_\infty^2 = \epsilon_{ct});$$

поэтому

$$K_0 = \frac{2\pi n}{15kT} \frac{N_\infty - 1}{N - 1} (\alpha_\zeta - \alpha_\xi)^2, \quad K_\partial = \frac{2\pi n}{15k^2 T^2} (\alpha_\zeta - \alpha_\xi) p_\zeta^2.$$

Знак K_∂ зависит от знака $\alpha_\zeta - \alpha_\xi$. Измеряя K_0 и K_∂ , можно определить p_ζ^2 и $\alpha_\zeta - \alpha_\xi$.

§ 145. Влияние внешнего магнитного поля. Эффект Фарадея и циклотронный резонанс

Рассмотрим влияние внешнего постоянного магнитного поля на распространение электромагнитной волны в диэлектрике или полупроводнике. Допустим, что внешнее магнитное поле направлено по оси z ($H_z = H$) и электрическое поле волны лежит в плоскости xy .

Уравнение движения квазиупругого связанного электрона (§ 62 и 137) можно написать в форме

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{f}{m} \dot{\vec{r}} + \omega_a^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_\partial + \frac{e}{mc} [\vec{r}, \vec{H}]. \quad (145.01)$$

Здесь ω_a — собственная частота колебаний, \vec{E}_∂ — действующее электрическое поле. Уравнение (145.01) в отличие от (63.02) содержит член с магнитным полем и вместо γ величину $\frac{f}{m}$, где f — коэффициент трения. Уравнение (145.01) можно применить как к связанным, так и к свободным электронам полупроводника. В последнем случае $\omega_a = 0$, а f — коэффициент, связанный с временем релаксации и подвижностью соотношениями (119.04) и (119.08) (под m следует понимать эффективную массу m^*).

Проектируя (145.01) на оси координат, получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{f}{m} \dot{x} + \omega_a^2 x &= \frac{e}{m} E_x^\partial + \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} + \frac{f}{m} \dot{y} + \omega_a^2 y &= \frac{e}{m} E_y^\partial - \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} + \frac{f}{m} \dot{z} + \omega_a^2 z &= \frac{e}{m} E_z^\partial = 0 \end{aligned} \right\} \quad (145.02)$$

Величина

$$\omega_c = \frac{eH_z}{mc} = 2\omega_L \quad (145.03)$$

называется «циклотронной частотой». Не ограничивая общности рассуждений, можно считать $z = 0$.

В § 115 показано, что в гиротропном веществе линейно-поляризованная волна распадается на две волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Так, волна $E_x = E_{x0} e^{i(\omega t - kz)}$, распространяющаяся параллельно оси z , распадается на две поляризованные по кругу волны (115.13) и (115.14), для которых составляющая E_y сдвинута по фазе относительно E_x на $\pm \frac{\pi}{2}$. Введем новые комплексные переменные $\zeta^\pm = x \pm iy$ (§ 54), удовлетворяющие в силу (145.02) уравнению

$$\ddot{\zeta}_a^\pm + \left(\frac{f_a}{m} \pm i\omega_c \right) \dot{\zeta}_a^\pm + \omega_a^2 \zeta_a^\pm = \frac{e}{m} (E_x^\partial \pm iE_y^\partial). \quad (145.04)$$

Знаки \pm соответствуют волнам, поляризованным по кругу в противоположных направлениях. Полагая $E_x^\partial \pm iE_y^\partial = \xi_\partial^\pm e^{i\omega t}$ и $\zeta^\pm = \xi_\zeta^\pm e^{i\omega t}$, получим

$$\zeta_\zeta^\pm = \frac{\frac{e}{m} (E_x^\partial \pm iE_y^\partial)}{\omega_a^2 - \omega^2 \mp \omega_c \omega + i \frac{f_a}{m} \omega}. \quad (145.05)$$

Выражение (145.05) обобщает (137.03) для поляризованной по кругу волны при наличии магнитного поля, делающего вещество гиротропным.

Результирующая поляризация определяется смещением всех электронов и всех ионов. Пусть в единице объема вещества имеется n_a электронов с собственной частотой ω_a и \bar{n}_b ионов с зарядами e_b и частотами $\bar{\omega}_b$. Тогда комплексная поляризуемость единицы объема равна

$$\kappa^\pm = \sum_a e n_a \frac{\zeta_a^\pm}{(E_x^\partial \pm iE_y^\partial)} + \sum_b e_b \bar{n}_b \frac{\bar{\zeta}_b^\pm}{(E_x^\partial \pm iE_y^\partial)}. \quad (145.06)$$

Для ионов можно считать (в силу их большой массы) $\bar{\omega}_c \simeq 0$; поэтому, пользуясь (145.05), получим

$$\kappa^\pm = \sum_a \frac{\frac{e^2}{m} n_a}{\omega_a^2 - \omega^2 \mp \omega_c \omega + i \frac{f_a}{m} \omega} + \sum_b \frac{\frac{e_b^2}{m_b} \bar{n}_b}{\bar{\omega}_b^2 - \omega^2 + i \frac{\bar{f}_b}{m_b} \omega}. \quad (145.07)$$

Отсюда видно, что различие в поляризуемости вещества для волн, поляризованных по кругу в противоположных направлениях, обусловлено только электронной поляризацией.

Учитывая отличие действующего поля E_∂ от среднего E , получим аналог формулы Лоренца-Лоренца для комплексного показателя N^\pm поляризованных по кругу волн.

$$\frac{(N^\pm)^2 - 1}{(N^\pm)^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \chi^\pm = \frac{4\pi}{3} \left\{ \sum_a \frac{\frac{e^2}{m} n_a}{\omega_a^2 - \omega^2 \mp \omega_c \omega + \frac{if_a}{m} \omega} + \sum_b \frac{\frac{e_b^2}{m_b} \bar{n}_b}{\bar{\omega}_b^2 - \omega^2 + i \frac{\bar{f}_b}{m_b} \omega} \right\}. \quad (145.08)$$

Согласно (115.16) угол поворота плоскости поляризации на единицу длины (удельный угол вращения) определяется разностью $N^- - N^+$ показателей преломления, то есть

$$\Delta = \frac{\omega}{2c} (N^- - N^+) = \frac{\omega}{4cN} [(N^-)^2 - (N^+)^2] \quad (145.09)$$

(так как $N^- + N^+ \simeq 2N$). Для упрощения будем пренебрегать затуханием, то есть положим $f_a = 0$. С достаточной точностью $[(N^+)^2 + 2][(N^-)^2 + 2] \simeq (N^2 + 2)^2$; поэтому

$$\frac{(N^-)^2 - 1}{(N^-)^2 + 2} - \frac{(N^+)^2 - 1}{(N^+)^2 + 2} = \frac{3}{(N^2 + 2)^2} [(N^-)^2 - (N^+)^2] = \frac{8\pi}{3} \sum_a \frac{e^2}{m} n_a \frac{\omega_c \omega}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 - \omega_c^2 \omega^2}, \quad (145.10)$$

следовательно,

$$\Delta = \frac{\omega^2 \omega_c}{cN} 2\pi \left(\frac{N^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{e^2}{m} \sum_a \frac{n_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 - \omega_c^2 \omega^2}. \quad (145.11)$$

Удельный угол вращения пропорционален напряженности магнитного поля, так как $\omega_c = \frac{e}{mc} H$.

Выражение (145.11) учитывает дисперсию эффекта Фарадея в областях ω , удаленных от собственных полос поглощения. Вблизи линии поглощения ω_a в сумме (145.08) надо оставить только один член и сохранить член $i \frac{f_a \omega}{m}$, учитывающий затухание. Полагая для газа $N^2 + 2 \simeq 3$ и заменяя вблизи ω_a разность $\omega_a^2 - \omega^2$ через $2\omega (\omega_a - \omega)$,

получим

$$(\dot{N}^-)^2 - (\dot{N}^+)^2 \simeq 2N(N^- - N^+) = 2\pi \frac{n_a e^2}{m\omega} \left\{ \frac{\omega_a - \omega - \frac{\omega_c}{2} - i\frac{f_a}{2m}}{\left(\omega_a - \omega - \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \frac{f_a^2}{4m^2}} - \frac{\omega_a - \omega + \frac{\omega_c}{2} - i\frac{f_a}{2m}}{\left(\omega_a - \omega + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \frac{f_a^2}{4m^2}} \right\}. \quad (145.12)$$

Вращение плоскости поляризации определяется действительной частью этого выражения. Подставляя ее в (145.09), находим

$$\Delta = \frac{\pi}{4cN} \cdot \frac{n_a e^2}{m} \left\{ \frac{\omega_a - \omega - \frac{\omega_c}{2}}{\left(\omega_a - \omega - \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \frac{f_a^2}{4m^2}} - \frac{\omega_a - \omega + \frac{\omega_c}{2}}{\left(\omega_a - \omega + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \frac{f_a^2}{4m^2}} \right\}. \quad (145.13)$$

Зависимость N^+ , N^- и $N^- - N^+$ от частоты в области линии поглощения показана на рисунке 83. Так как $n_a = f_a n$ (f_a — «сила осциллятора», n — число атомов в единице объема), то, измеряя ход Δ вблизи линии поглощения, можно определить силу осциллятора f_a .

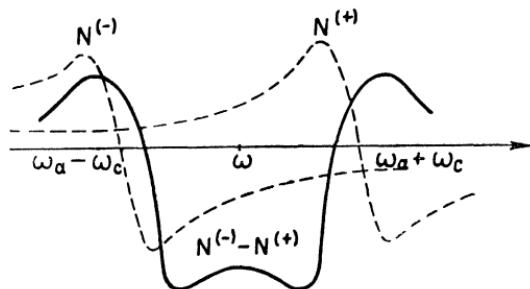


Рис. 83.

и молекул, результирующий электронный спин которых равен нулю.

Отношение $\frac{\Delta}{H} = R$ называется постоянной Верде; как видно из теории, R практически не зависит от температуры. Для волн длиной $\lambda = 486 \text{ мкм}$ $R = 0,0196'$ для воды и $0,0667'$ для CS_2 .

Изложенная теория применима и к свободным электронам в полупроводниках. Выше отмечалось, что в этом случае $\omega_a = 0$ и $m = m^*$. Отвлекаясь от различия между действующим и макроскопическим полями и предполагая, что электрическое высокочастотное поле направлено по оси x , можно систему (145.02) переписать в форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x + \frac{f}{m^*} v_x - \omega_c v_y &= \frac{e}{m^*} E_x \\ \dot{v}_y + \frac{f}{m^*} v_y + \omega_c v_x &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (145.14)$$

где $v_x = \dot{x}$ и $v_y = \dot{y}$ — составляющие скорости электрона. Пусть $E_x = E_0 e^{i\omega t}$, а v_x и v_y пропорциональны $e^{i\omega t}$. Вводя время релаксации $\tau = \frac{m^*}{f}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \left(i\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_x - \omega_c v_y &= \frac{e}{m^*} E_x, \\ \left(i\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_y + \omega_c v_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (145.15)$$

Отсюда

$$v_x = \frac{i\omega + \frac{1}{\tau}}{\left(i\omega + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_c^2} \frac{e}{m^*} E_x = \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} \frac{e\tau}{m^*} E_x. \quad (144.16)$$

Высокочастотная проводимость полупроводника будет равна

$$\gamma = \frac{j_x}{E_x} = \gamma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau}, \quad (145.17)$$

где $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m^*}$ — статическая проводимость вещества (n — число носителей тока в единице объема).

Высокочастотные потери в единице объема пропорциональны действительной части проводимости, которая согласно (145.17) равна

$$\gamma' = \operatorname{Re} \gamma = \gamma_0 \frac{1 + \omega^2\tau^2 + \omega_c^2\tau^2}{(1 + \omega_c^2\tau^2 - \omega^2\tau^2)^2 + 4\omega^2\tau^2}. \quad (145.18)$$

Отсюда видно, что при определенной частоте может наблюдаться резкий максимум поглощения. Этот эффект был предсказан в 1951 году Я. Г. Дорфманом и назван им диамагнитным резонансом, так как частота ω_c связана с ларморовской частотой ω_L соотношением $\omega_c = 2\omega_L$. В настоящее время этот эффект называют циклотронным резонансом, так как частота ω_c совпадает с частотой частицы, ускоряемой в циклотроне.

Действительно, при отсутствии внешнего электрического поля и силы трения электрон полупроводника в магнитном поле движется по окружности радиуса $R = \frac{m^* v_\perp c}{eH}$ (v_\perp — скорость, перпендикулярная к H) с постоянной частотой ω_c (§ 54). При $\omega \approx \omega_c$ возникает резонанс.

Рассмотрим несколько предельных случаев.

1) Пусть $\omega \ll \omega_c$ (сильное магнитное поле). Радиусы «циклотронных» орбит носителей тока малы и скорость v_x их «дрейфа» в электрическом поле также мала. Из (145.18) и (145.03) имеем $\gamma' \simeq \frac{\gamma_0}{\omega_c^2\tau^2} = \gamma_0 \frac{m^{*2}c^2}{e^2H^2}$. Следовательно, поглощение пропорционально H^{-2} .

2) Если $\omega \gg \omega_c$ (слабое магнитное поле), то γ практически не зависит от H , стремясь к нулю с увеличением ω .

3) При $\omega = \omega_c \gg \frac{1}{\tau}$ наблюдается резонансное циклотронное поглощение. В этом случае $\gamma'_{\text{рез}} = \frac{1}{2} \gamma_0$, то есть высокочастотная резонансная проводимость равна половине статической. С другой стороны, высокочастотная проводимость при отсутствии магнитного поля равна $\gamma'_{H=0} = \frac{\gamma_0}{\omega^2 \tau^2}$. Поэтому при резонансе

$$\frac{\gamma'_{\text{рез}}}{\gamma'_{H=0}} = \frac{1}{2} \omega_c^2 \tau^2. \quad (145.19)$$

Измерение этого отношения позволяет определить время релаксации (время свободного пробега) носителей тока.

Определение резонансной частоты ω_r в поле H позволяет измерить эффективную массу носителей тока, так как по (145.03) $m^* = \frac{eH}{c\omega_r}$. В 1955 году Киттель, Кип и Дрессельхауз наблюдали резонансное поглощение волн в кристаллах германия n -типа при частоте $9,05 \cdot 10^9 \text{ Гц}$, $H = 370 \text{ эрстед}$ и $T = 42^\circ$ (при измерениях частота оставалась постоянной, а менялась напряженность поля). Полуширина резонансной линии была порядка 100 эрстед . Отсюда эффективная масса электронов в зоне проводимости равна $m_L = 0,11 \text{ } m_e$, а время свободного пробега равно $\tau = 7 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$. В кристаллах p -типа при той же частоте наблюдались два резонансных максимума — для $H = 125 \text{ эрстед}$ и $H = 970 \text{ эрстед}$ с полуширинами резонансных линий 50 и 100 эрстед соответственно. Отсюда эффективные массы дырок равны $0,04 \text{ } m$ и $0,3 \text{ } m$, а время пробега равно $5 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$ и $2 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$. Дальнейшие исследования показали, что энергетические зоны германия имеют весьма сложную структуру и эффективная масса носителей анизотропна, то есть зависит от направления движения носителя в кристалле. Для анализа результатов этих исследований требуется более точная теория.

§ 146. Диамагнетизм.

Индуктированный магнитный момент атома, обусловленный прецессией электронных орбит вокруг направления магнитного поля, согласно (55.13) равен

$$\Delta \vec{m} = - \sum_{a=1}^Z \frac{e^2}{6mc^2} \bar{r}_a^2 \vec{H}, \quad (146.01)$$

где \bar{r}_a^2 — средний квадрат радиуса орбиты электрона a (суммирование производится по всем Z электронам атома). Вводя средний

квадрат радиуса орбит всех электронов атома $\bar{r}^2 = \frac{1}{Z} \sum_1^Z \bar{r}_a^2$, получим формулу П. Ланжевена (с учетом поправок В. Паули)

$$\vec{\Delta m} = -\frac{Ze^2}{6mc^2} \bar{r}^2 \vec{H}. \quad (146.02)$$

Такой диамагнитный момент возникает в магнитном поле у всякого атома независимо от наличия у него собственного магнитного момента. Собственный магнитный момент атома (если он существует) по порядку величины равен магнетону Бора ($0,9 \cdot 10^{-20}$ эрг/гаусс) и значительно превышает диамагнитный момент в обычных полях. Поэтому для того, чтобы вещество было диамагнитным, необходимо, чтобы атомы его не обладали собственными магнитными моментами. Диамагнитная восприимчивость на грамм-молекулу равна

$$\chi_A = -\frac{Ze^2 N_A}{6mc^2} \bar{r}^2 = -2,832 \cdot 10^{10} Z \bar{r}^2, \quad (146.03)$$

где N_A — число Авогадро. Для определения объемной восприимчивости надо N_A заменить числом n атомов в 1 см^3 .

Из (146.03) видно, что задача расчета диамагнитной восприимчивости сводится к вычислению \bar{r}^2 . Для этого надо знать распределение заряда электронов в данном атоме. Распределение электронного заряда может быть найдено методом квантовой механики. В приводимой таблице дается сравнение молярных диамагнитных восприимчивостей некоторых атомов (свободных) и ионов (в кристаллах), полученных экспериментально и вычисленных с помощью приближенного метода Хартри — Фока.

Атом или ион	$\chi_{\text{эксп}} \cdot 10^6 \frac{\text{см}^3}{\text{моль}}$	$\chi_{\text{теор}} \cdot 10^6 \frac{\text{см}^3}{\text{моль}}$	Атом или ион	$\chi_{\text{эксп}} \cdot 10^6 \frac{\text{см}^3}{\text{моль}}$	$\chi_{\text{теор}} \cdot 10^6 \frac{\text{см}^3}{\text{моль}}$
He	-1,9	—	Li^+	-0,7	-0,7
Ag	-19,4	-20,6	Na^+	-6,1	-4,9
Cl^-	-24,2	-30,4	K^+	-14,1	-15,3

Из таблицы видно, что согласие теории с опытом вполне удовлетворительное, если учесть упрощения, допускаемые при квантово-механической трактовке многоэлектронных систем.

Для вычисления диамагнетизма молекул формула (146.03) оказывается, вообще говоря, не применимой, так как при выводе (146.01) неявно предполагалось, что направление внешнего магнитного поля совпадает с осью симметрии системы. Последнее выполнено для сферически симметричных атомов, но обычно не выполнено для

молекул. Ван-Флек показал, что молекула в магнитном поле наряду с диамагнитным моментом (146.01) получает добавочный парамагнитный момент, имеющий порядок величины такой же, как диамагнитный. Поэтому вещество оказывается диамагнитным или парамагнитным в зависимости от того, какой из членов — ланжевеновский или ван-флековский — преобладает. Во всех случаях восприимчивость не зависит от температуры.

§ 147. Парамагнетизм

В § 38 отмечалось, что полный магнитный момент атомной системы определяется равенством

$$\vec{m} = -\frac{e_0}{2m_0c} (\vec{L} + 2\vec{S}). \quad (147.01)$$

Здесь m_0 — масса электрона, — e_0 — заряд электрона, \vec{L} и \vec{S} — орбитальный и спиновый моменты электронной оболочки атома. Полный механический момент количества движения электронов, равный $\vec{J} + \vec{L} = \vec{S}$, сохраняется. Поэтому вектор $\vec{L} + 2\vec{S}$ прецессирует вокруг направления \vec{J} . Вследствие этого среднее значение магнитного момента атома направлено антипараллельно \vec{J} и равно

$$\vec{m} = -g \frac{e_0}{2m_0c} \cdot \vec{J}, \quad (147.02)$$

где g — так называемый множитель Ланде или магнитомеханический фактор, возникающий при усреднении $\vec{L} + 2\vec{S}$. Теория магнитных свойств тел требует учета с самого начала квантовых свойств системы¹.

В квантовой теории \vec{J} является оператором, собственные значения квадрата которого и проекции на произвольное направление z определяются формулами

$$J^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad J_z = \hbar j_z. \quad (147.03)$$

Квантовое число j , характеризующее полный механический момент электронной оболочки атома, принимает или целые значения 0, 1, 2, ... (при четном числе электронов в атоме), или полуцелые значения $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ (при нечетном числе электронов в атоме). Магнитное квантовое число j_z принимает все значения, лежащие между $+j$ и $-j$ и отличающиеся на единицу, то есть $j_z = j, j-1, \dots, -j+1, -j$ (всего $2j+1$ значений).

¹ Действительно, даже теория диамагнетизма Ланжевена основывается на представлении о существовании дискретных орбит (состояний) электронов в атоме.

Проекция вектора \vec{m} на направление z равна

$$m_z = -g \frac{-e_0 \hbar}{2m_0 c} j_z = -gm_B j_z, \quad (147.04)$$

где

$$m_B = \frac{e\hbar}{2m_0 c} = 0,9 \cdot 10^{-20} \frac{\text{зрс}}{\text{заясс}} \quad (147.05)$$

есть магнетон Бора. Множитель Ланде g равен

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}, \quad (147.06)$$

где l — орбитальное квантовое число (всегда целое), характеризующее полный орбитальный момент количества движения электронной оболочки, а s — спиновое квантовое число, характеризующее полный спин электронов оболочки.

Из (147.03) видно, что J и J_z принимают лишь дискретные значения. Так как $J_z = J \cos \vartheta$, где ϑ — угол между направлением \vec{J} и осью \vec{Z} , то ориентация в пространстве механического момента (и связанного с ним магнитного) не произвольна — существует лишь дискретный ряд углов (квантование ориентации момента).

Заметим, что для атомов с нечетным числом Z электронов всегда $j \neq 0$, $g \neq 0$. Такие атомы всегда обладают собственным магнитным моментом и не могут быть диамагнитными. Для элементов первой группы периодической системы Д. И. Менделеева (щелочные элементы) Z — нечетное, в основном состоянии $j = \frac{1}{2}$, $l = 0$ (s -терм), $s = \frac{1}{2}$. Тогда по (147.06) и (147.04) $g = 2$, $j_z = \pm \frac{1}{2}$ и $|m_z| = m_B$, то есть собственный момент в основном состоянии равен магнетону Бора. При четном числе электронов возможно $J = 0$ (если $\vec{L} = -\vec{S}$ или $L = S = 0$, последнее имеет место для всех благородных газов, у которых полностью заполнены электронные оболочки). В этом случае $m = 0$ и атом диамагнитен.

Теория парамагнетизма строится так же, как теория ориентационной электрической поляризации: под действием внешнего магнитного поля магнитные дипольные моменты ориентируются по направлению поля, а тепловое движение оказывает на них дезориентирующее действие; в результате устанавливается некоторая равновесная магнитная поляризация вещества. Заметим, что тепловое движение оказывает не только дезориентирующее действие, но и помогает установлению равновесной ориентации. Действительно, магнитный момент \vec{m} параллелен механическому моменту \vec{J} . В магнитном поле момент обладает энергией

$$U_m = -\vec{m} \vec{H} = gm_B H j_z. \quad (147.07)$$

Следовательно, на момент действует пара сил

$$\vec{K} = [\vec{m}, \vec{H}]. \quad (147.08)$$

Под влиянием этой пары сил момент не может повернуться по полу, ибо \vec{K} перпендикулярно к \vec{J} и проекция $J_H = J_z$ будет сохранять постоянное значение. Магнитный момент будет прецессировать вокруг направления магнитного поля, сохраняя постоянный угол ϑ между \vec{m} и \vec{H} . Чтобы изменилась проекция m_z на направление поля, необходимо участие второго тела, которому атомная система могла бы отдать избыточное значение проекции момента J_z . В газах это осуществляется путем столкновений молекул, в кристаллах — в результате взаимодействия с решеткой.

Магнитный момент единицы объема вещества определяется формулой

$$I = nm \cos \vartheta = n m_z, \quad (147.09)$$

если магнитный момент частицы — атома или молекулы — свободно ориентируется в пространстве (n — число частиц в единице объема). Среднее значение $\cos \vartheta$ вычисляется с помощью формулы Больцмана. Но в отличие от электрической ориентационной дипольной поляризации $\cos \vartheta$ и потенциальная энергия U_m принимают дискретный ряд значений. Вероятность того, что частица имеет энергию U_{jz} (значение магнитного квантового числа j_z), равна

$$w(j_z) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U_{jz}}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{gm_B H}{kT} j_z}. \quad (147.09)$$

Статистическая сумма Z находится из условия $\sum_{j_z=-j}^{+j} w(j_z) = 1$ и равна

$$Z = \sum_{j_z=-j}^{+j} e^{-\eta' j_z} = \left(e^{\frac{2j+1}{2}\eta'} - e^{-\frac{2j+1}{2}\eta'} \right) \left(e^{\frac{\eta'}{2}} - e^{-\frac{\eta'}{2}} \right)^{-1}, \quad (147.10)$$

где

$$\eta' = \frac{gm_B H}{kT}.$$

Вектор намагничивания равен

$$I = n \sum_{j_z=-j}^{+j} m_z w(j_z) = -\frac{ngm_B}{Z} \sum_{j_z=-j}^{+j} j_z e^{-\eta' j_z} = ngm_B \frac{\partial \ln Z}{\partial \eta'} \quad (147.11)$$

(сумма в числителе равна $-\frac{\partial Z}{\partial \eta'}$). Подставляя сюда $\ln Z$ из (147.10), находим

$$I = gm_B n \left\{ \frac{2j+1}{2} \operatorname{cth} \frac{2j+1}{2} \eta' - \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\eta'}{2} \right\}.$$

Введем аргумент

$$\eta = \eta' j = \frac{gjm_B H}{kT}, \quad (147.12)$$

тогда

$$I = gjm_B n B_j(\eta). \quad (147.13)$$

Здесь

$$B_j(\eta) = \frac{2j+1}{2j} \operatorname{cth} \frac{2j+1}{2j} \eta - \frac{1}{2j} \operatorname{cth} \frac{\eta}{2j} \quad (147.14)$$

есть функция Бриллюэна. При $j = \frac{1}{2}$ (например, для щелочных атомов в нормальном состоянии) $B_j(\eta) = \operatorname{tgh} \eta = L_1(\eta)$. При $j \rightarrow \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} B_j(\eta) = \operatorname{cth} \eta - \frac{1}{\lim_{j \rightarrow \infty} 2j \operatorname{tgh} \frac{\eta}{2j}} = \operatorname{cth} \eta - \frac{1}{\eta} = L_\infty(\eta).$$

Таким образом, график функции Бриллюэна в общем случае лежит между $L_{1/2}(\eta)$ и $L_\infty(\eta)$ (рис. 76).

При $\eta \ll 1$ $\operatorname{cth} \eta \approx \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{3}$. Поэтому $B_j(\eta) \approx \frac{j(j+1)\eta}{3j^2}$. Подставляя последнее в (147.13), получаем восприимчивость в слабых полях (закон Кюри)

$$\chi = \frac{I}{H} = \frac{n j (j+1) g^2 m_B^2}{3kT} = \frac{n p^2 m_B^2}{3kT} = \frac{C}{T}. \quad (147.15)$$

Выражение (147.15) аналогично выражению (141.10) для коэффициента поляризации дипольного диэлектрика. Однако (147.15) имеет более широкую область применимости: формула (141.10) справедлива только для газов, а (147.15) — и для газов, и для тех конденсированных тел, в которых магнитный момент сохраняет свободу ориентации. Ориентация электрического диполя в конденсированных телах затруднена, так как при этом поворачивается вся молекула как целое. Ориентация магнитного момента связана только с изменением направления орбитального и спинового моментов.

Величина p в (147.15) равна

$$p = g \sqrt{j(j+1)}. \quad (147.16)$$

Она дает эффективное число магнетонов Бора, а pm_B есть эффективный магнитный момент атома (или иона).

Формула (147.15) дает правильный порядок величины восприимчивости. Действительно, полагая для твердого тела $n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $pm_B \sim 10^{-20} \text{ СГС}$, получим $\chi \sim \frac{1}{400T}$. Для $T = 300^\circ \text{K}$ $\chi \sim 10^{-5}$, а для

$T = 0,25^\circ$ $\chi \sim 10^{-2}$. Для трехвалентных ионов редких земель сравнение данных теории и опыта (при $T = 300^\circ$) приведено в таблице.

Ион	Электронная конфигурация	j	l	s	$\frac{P_{\text{вычисл.}}}{= g \sqrt{j(j+1)}}$	p , эксперимент. (приближ.)
Ce ³⁺	$4f^1 5s^2 p^6$	$5/2$	3	$1/2$	2,53	2,4
Pr ³⁺	$4f^2 5s^2 p^6$	4	5	1	3,58	3,5
Nd ³⁺	$4f^3 5s^2 p^6$	$9/2$	6	$3/2$	3,62	3,5
Pm ³⁺	$4f^4 5s^2 p^6$	4	6	2	2,68	—
Sm ³⁺	$4f^5 5s^2 p^6$	$5/2$	5	$5/2$	0,84	1,5
Eu ³⁺	$4f^6 5s^2 p^6$	0	3	0	0	3,4
Gd ³⁺	$4f^7 5s^2 p^6$	$7/2$	0	$7/2$	7,94	8,0
Tb ³⁺	$4f^8 5s^2 p^6$	6	3	3	9,72	9,5
Dy ³⁺	$4f^9 5s^2 p^6$	$15/2$	5	$7/2$	10,63	10,6
Ho ³⁺	$4f^{10} 5s^2 p^6$	8	6	2	10,60	10,4
Er ³⁺	$4f^{11} 5s^2 p^6$	$15/2$	6	$3/2$	9,57	9,5
Tu ³⁺	$4f^{12} 5s^2 p^6$	6	5	1	7,57	7,3
Yb ³⁺	$4f^{13} 5s^2 p^6$	$7/2$	3	$1/2$	4,54	4,5

В ионах редких земель внешние электронные оболочки $5s^2$ и $5p^6$ заполнены целиком и дают диамагнитный момент. Парамагнетизм этих ионов обусловлен постепенно застраивающейся $4f$ -оболочкой, расположенной глубоко в электронной оболочке иона и поэтому обладающей свободой вращения момента.

Теоретические значения p находятся в удовлетворительном согласии с опытом. Отклонение имеет место для ионов Sm и Eu. Однако можно показать, что это расхождение значительно уменьшается, если учесть термы с $j \geqslant \frac{7}{2}$ для Sm и $j \geqslant 1$ для Eu.

Рассмотрим вопрос о свободе вращения магнитных моментов ионов группы железа. Парамагнитные свойства этой группы обусловлены внешней $3d$ -оболочкой, которая постепенно заполняется электронами. Внешняя $3d$ -оболочка подвержена воздействию со стороны сильных локальных полей соседних частиц кристаллической решетки. Это приводит к разрушению связи между орбитальным \vec{L} и спиновым \vec{S} моментами. Поэтому орбитальный и спиновый магнитные моменты могут ориентироваться независимо друг от друга. С другой стороны, валентные $3d$ -электроны участвуют в образовании химических связей. Значит, пространственное распределение плотности $3d$ -электронов, а следовательно, и ориентация орбитальных моментов будут фиксированы. Поэтому надо ожидать, что свободой вращения в этих ионах будет обладать только спин и связанный

с ним момент. Эти соображения Зоммерфельда, Бозе и Стонера иллюстрируются приводимой таблицей. Из таблицы видно, что эффективное число магнетонов Бора для ионов группы железа хорошо согласуется с выражением

$$p' = 2 \sqrt{s(s+1)} \quad (147.17)$$

и хуже согласуется с выражением (147.16). Таким образом, для ионов группы железа свободой вращения обладает только спин, орбитальный момент «заморожен».

Ион	Электронная конфигурация	l	s	j	$p_{\text{вычисл.}} = g \sqrt{j(j+1)}$	$p'_{\text{вычисл.}} = 2 \sqrt{s(s+1)}$	$p_{\text{эксп.}}$	$g_{\text{эксп.}} = \frac{p_{\text{эксп.}}}{\sqrt{s(s+1)}}$
Ti ³⁺ , V ⁴⁺	3d ¹	2	1/2	1 ³ /2	1,55	1,73	1,8	—
V ³⁺	3d ²	3	1	2	1,63	2,83	2,0	1,98
Cr ³⁺ , V ²⁺	3d ³	3	3/2	3/2	0,77	3,87	3,8	1,97
Mn ³⁺ , Cr ²⁺	3d ⁴	2	2	0	0	4,90	4,9	2,0
Fe ³⁺ , Mn ²⁺	3d ⁵	0	5/2	5/2	5,92	5,92	5,9	2,0
Fe ²⁺	3d ⁶	2	2	4	6,70	4,90	5,4	2,2
Co ²⁺	3d ⁷	3	3/2	9/2	6,54	3,87	4,8	2,5
Ni ²⁺	3d ⁸	3	1	4	5,59	2,83	3,2	2,3
Cu ²⁺	3d ⁹	2	1/2	5/2	3,55	1,73	1,9	2,2

Отличие $g_{\text{эксп.}}$ от значения 2 объясняется тем, что при наличии спин-орбитального взаимодействия орбитальный момент получает частичную свободу вращения.

При анализе парамагнетизма не учитывались магнитные моменты ядер. Магнитный момент ядер примерно в 10^3 раз меньше магнетона Бора для электронов, поэтому ядерным парамагнетизмом можно пренебречь.

§ 148. Магнитомеханические и магниторезонансные явления

В § 147 показано, что магнитный момент атома однозначно связан с механическим моментом \vec{J}_a соотношением

$$\vec{m}_a = \gamma \vec{J}_a, \text{ где } \gamma = g \frac{e}{2m_0 c} = -g \frac{e_0}{2m_0 c}. \quad (148.01)$$

Существование этой связи обусловливает магнитомеханические и магниторезонансные эффекты. Магнитомеханические эффекты возникают

при изменении намагниченности тела. Суммируя (148.01) по всем атомам данного тела, получим

$$\vec{m} = \gamma \vec{J}_e, \quad (148.02)$$

где $\vec{m} = \sum_a \vec{m}_a$ и $\vec{J}_e = \sum_a \vec{J}_a$ — полный магнитный и полный механический моменты электронов тела соответственно. Отсюда видно, что всякое изменение магнитного момента \vec{m} тела должно сопровождаться изменением механического момента \vec{J}_e . Действительно, полный механический момент тела $\vec{J} + \vec{J}_e$ должен оставаться при намагничивании постоянным. Поэтому при изменении электронного механического момента \vec{J}_e на $\Delta \vec{J}_e$ тело должно приобрести в виде отдачи момент количества движения, равный

$$\Delta \vec{J} = -\Delta \vec{J}_e = -\frac{\Delta \vec{m}}{\gamma}. \quad (148.03)$$

Если тело подвешено на нити и изменение его намагничивания направлено параллельно нити (вертикально), то тело будет поворачиваться и закручивать нить (эффект Эйнштейна — де-Гааса). Обратный эффект — намагничивание тела при его вращении — называется эффектом Барнетта.

Угловая скорость вращения тела при эффекте Эйнштейна и де-Гааса определяется из соотношения

$$A\omega = \Delta \vec{J} = -\frac{\Delta \vec{m}}{\gamma},$$

где A — момент инерции тела относительно оси вращения. При закручивании нити возникает препятствующий закручиванию момент сил, равный $D\varphi$, где D — модуль кручения нити, а φ — угол закручивания. Максимальный угол закручивания получается из условия равенства кинетической энергии $\frac{1}{2} A\omega^2$ потенциальной упругой энергии кручения $\frac{1}{2} D\varphi^2$,

$$\frac{1}{2} D\varphi_{\max}^2 = \frac{1}{2} A\omega^2 = \frac{1}{2\gamma^2 A} (\Delta m)^2. \quad (148.05)$$

Легко видеть, что даже для ферромагнетиков (для которых Δm велико) амплитуда φ_{\max} относительно мала. Эйнштейн и де-Гаас для наблюдения эффекта применили метод резонанса: перемагничивание тела производилось переменным магнитным полем с частотой, равной собственной частоте $\sqrt{\frac{D}{A}}$ крутильных колебаний подвешенного тела. В результате такого опыта по (148.05) можно определить коэффициент γ , а по γ из (148.01) — магнитомеханический фактор g .

По значению g можно судить о роли орбит и спинов электронов в образовании магнитного момента атомов тела. Так, если орбитальный момент атома l равен нулю, то $j=s$ и $g=g_{\text{спин}}=2$. Если спиновый момент атома равен нулю ($s=0$), то $j=l$ и $g=g_{\text{орб}}=1$. Экспериментальные значения g для ферромагнетиков лежат в интервале от 1,85 до 2,0. Это доказывает, что ферромагнетизм в основном обусловлен спинами электронов. Отклонение g от значения, равного 2, указывает на то, что орбитальный магнитный момент способен к некоторой ориентации.

Рассмотрим влияние переменного магнитного поля на парамагнетик (или ферромагнетик), находящийся в постоянном магнитном поле. Направим переменное поле перпендикулярно постоянному полю. Магнитный момент атома или иона \vec{m} ориентируется во внешнем постоянном магнитном поле \vec{H} . При этом происходит расщепление энергетического уровня W_n согласно (147.07) по схеме

$$W_{nj_z} = W_n - \vec{m} \cdot \vec{H} = W_n + g m_B H j_z, \quad (148.06)$$

где W_n — энергия атомной системы при отсутствии магнитного поля. Расстояние между двумя соседними подуровнями равно $\Delta W = g m_B H$. Если, кроме постоянного поля, на тело действует переменное поле $H_x \sim e^{i\omega t}$, то при резонансе

$$\hbar\omega = g m_B H = \Delta W \quad (148.06)$$

атомы (или ионы) будут переходить из состояний (n, j_z) с меньшей энергией в состояния (n, j'_z) с большей энергией — будет наблюдаться резкий пик парамагнитного (или ферромагнитного) поглощения. Из (148.06) видно, что частота спинового резонанса ($g=2$) равна

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{\omega}{2\pi} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Гц}. \quad (148.07)$$

Для протонного спинового резонанса

$$\nu_{\text{рез}} = 4,26 \cdot 10^3 \text{ Гц}. \quad (148.08)$$

Разберем более подробно парамагнитный и ферромагнитный резонансы. Следуя Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу, будем рассматривать изменение вектора намагничивания \vec{I} . В магнитном поле \vec{H}_0 на магнитный момент \vec{m}_a действует пара сил с моментом $[\vec{m}_a, \vec{H}_0]$. Скорость изменения механического момента атома или иона будет равна

$$\frac{d\vec{J}_a}{dt} = [\vec{m}_a, \vec{H}_0]. \quad (148.09)$$

Суммируя (148.09) по всем атомам в единице объема вещества, получим

$$\frac{d\vec{J}_e}{dt} = [\vec{I}, \vec{H}_\partial]. \quad (148.09)$$

В силу соотношения (148.02) $\vec{I} = \gamma \vec{J}_e$. Поэтому

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \gamma [\vec{I}, \vec{H}_\partial]. \quad (148.10)$$

Отсюда следует, что если \vec{H}_∂ постоянно, то \vec{I} прецессирует вокруг направления поля \vec{H}_∂ . Уравнение (148.10) не учитывает релаксационных явлений.

Для парамагнетиков ($\mu - 1 \ll 1$) действующее поле H_∂ можно считать совпадающим с макроскопическим полем H . Если кроме постоянного поля H_z вдоль оси x действует переменное магнитное поле $H_x = H_x^{(0)} e^{i\omega t}$ (причем $H_x^{(0)} \ll H_z$), то, полагая в (148.10) $\vec{I} = \vec{I}_{\text{ст}} + \vec{a} e^{i\omega t}$ ($\vec{I}_{\text{ст}}$ — статическое намагничивание, созданное в направлении оси z постоянным полем H_z), получим систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} i\omega I_x = \omega_0 I_y \\ i\omega I_y = \gamma H_z - \omega_0 I_x \\ i\omega (I_z - I_{\text{ст}}) = -\gamma H_x I_y \end{array} \right\}, \quad (148.11)$$

где

$$\omega_0 = \gamma H_z = g \frac{e}{2m_0 c} H_z.$$

Так как $H_x \ll H_z$, то $I_y \ll I_z$ и правую часть третьего уравнения (148.11) можно считать равной нулю. Тогда $I_z = I_{\text{ст}} = \chi_0 H_z$, где χ_0 — статическая магнитная восприимчивость. Решая первые два уравнения относительно I_x и I_y , находим

$$I_x = \frac{\omega_0 \gamma I_{\text{ст}}}{\omega_0^2 - \omega^2} H_x = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} H_x, \quad I_y = i \chi_0 \frac{\omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} H_x. \quad (148.12)$$

Отсюда следует, что динамическая восприимчивость является эрмитовым тензором, причем

$$\chi_{xx} = \frac{I_x}{H_x} = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yx} = \chi_{xy}^* = \frac{I_y}{H_x} = i \chi_0 \frac{\omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (148.13)$$

Эрмитов характер динамической восприимчивости приводит к тому, что парамагнетик в магнитном поле становится гиротропным (§ 115, 145). При $\omega = \omega_0$ имеет место резонанс, χ_{ik} принимает бесконечно большое значение, обусловленное тем, что в предыду-

щей квазиклассической теории не учтены потери энергии переменного поля. Формально эти потери можно учесть, заменив в знаменателях (148.13) собственную частоту ω_0 комплексной собственной частотой $\dot{\omega}_0 = \omega_0 + i\omega_r$, где $\omega_r = \frac{2\pi}{\tau_r}$ — некоторая частота, а τ_r — время релаксации. Потери, учитываемые членом ω_r , определяются взаимодействием магнитных моментов с атомами решетки и друг с другом.

Измеряя резонансную частоту ω_0 в постоянном поле H_z (или резонансное поле H_z при постоянной ω), можно определить магнитомеханический фактор g для атомов (или ионов) данного вещества.

В ферромагнетиках действующее поле \vec{H}_θ отличается от среднего. Учитывая размагничивающее поле (§ 72), можно написать

$$H_x^\theta = H_x + N_1 I_x, \quad H_y^\theta = H_y + N_2 I_y, \quad H_z^\theta = H_z + N_3 I_z, \quad (148.14)$$

где коэффициенты N_1, N_2, N_3 (образующие тензор, приведенный к главным осям) зависят от формы образца ферромагнетика. При наличии постоянного поля H_z и переменного $H_x \sim e^{i\omega t}$ в силу (148.10) получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} i\omega I_x &= \gamma (I_y H_z + (N_3 - N_2) I_y I_z) \\ i\omega I_y &= \gamma (I_z H_x - I_x H_z) + \gamma (N_1 - N_3) I_z I_x \\ i\omega (I_z - I_{ct}) &= -\gamma I_y H_x + \gamma (N_2 - N_1) I_x I_y \end{aligned} \right\} \quad (148.15)$$

Так как H_z и $I_{ct} \gg H_x, I_x, I_y$, то правая часть третьего уравнения практически равна нулю. Тогда $I_z = I_{ct} = \gamma_0 H_z$. Из первых двух уравнений находим

$$\chi_{xx} = \frac{I_x}{H_x} = -\frac{\gamma^2 I_{ct} [H_z + (N_3 - N_2) I_{ct}]}{\gamma^2 [H_z + (N_3 - N_2) I_{ct}] [H_z + (N_3 - N_2) I_{ct}] - \omega^2}. \quad (148.16)$$

Резонансная частота равна

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{[H_z + (N_3 - N_2) I_{ct}] [H_z + (N_3 - N_2) I_{ct}]}. \quad (148.17)$$

Если образец ферромагнетика имеет форму тонкой пластинки, расположенной в плоскости yz (или xz), то $N_3 = 0$, $N_2 = 0$ и $N_1 = -4\pi$; поэтому

$$\omega_0^2 = \gamma^2 (H_z + 4\pi I_{ct}) H_z = \gamma^2 B_z H_z. \quad (148.18)$$

Таким образом, в ферромагнетиках резонансная частота зависит от формы тела. Последнее надо учитывать при измерении магнитомеханического фактора g . Для Fe, Co и Ni измерения дают значения g , равные 2,12—2,17, 2,22 и 2,2 соответственно. Эти значения заметно отличаются от полученных из магнитомеханических измерений ($g_{Fe} = 1,93$, $g_{Co} = 1,87$, $g_{Ni} = 1,92$). Причины такого отличия еще не ясны.

§ 149. Парамагнетизм металлов

Согласно обобщенной теории Ланжевена, изложенной в § 147, при $T \approx 300^\circ$ восприимчивость χ порядка 10^{-4} и меняется пропорционально $\frac{1}{T}$. Для большинства металлов восприимчивость $\chi \sim 10^{-6}$ и не зависит от температуры, что находится в противоречии с теорией Ланжевена. В. Паули показал, что это противоречие устраивается, если учесть принцип Паули и статистику электронов. Действительно, электроны в целиком заполненных зонах не могут вносить вклада в парамагнитный момент, так как каждый невырожденный уровень занят двумя электронами с противоположными направлениями спина и магнитного момента. То же самое относится к электронам, находящимся на более глубоких уровнях зоны проводимости. Ориентироваться в магнитном поле могут лишь электроны, энергия которых лежит вблизи уровня Ферми ζ в интервале порядка kT . Число этих электронов в 1 см^3 приблизительно равно $n \frac{kT}{\zeta_0}$. Так как $\frac{m_B H}{kT} \ll 1$, то вероятность параллельной ориентации вектора m_B превышает вероятность антипараллельной ориентации на величину порядка $\frac{m_B H}{kT}$. Парамагнитный момент единицы объема и восприимчивость равны

$$I = m_B \frac{m_B H}{kT} n \frac{kT}{\zeta_0} = \frac{n m_B^2}{\zeta_0} H = \frac{n m_B^2}{k T_F} H, \quad \chi = \frac{I}{H} = \frac{n m_B^2}{k T_F}. \quad (149.01)$$

Таким образом, χ не зависит от температуры и имеет порядок 10^{-6} , так как $T_F \sim 5 \cdot 10^4$.

Рассмотрим строгий вывод парамагнитного момента, обусловленного ориентацией магнитных моментов свободных электронов. Число электронов с магнитным моментом, ориентированным параллельно полю, и с энергией $\epsilon - m_B H$ равно $\frac{1}{2} f(\epsilon - m_B H) dg$; число электронов с магнитным моментом, ориентированным антипараллельно полю, и с энергией $\epsilon + m_B H$ равно $\frac{1}{2} f(\epsilon + m_B H) dg$ ($f(\epsilon) dg$ есть функция распределения Ферми (121.06)). Поэтому парамагнитный момент единицы объема равен

$$I = \frac{m_B}{2} \int f(\epsilon - m_B H) dg - \frac{m_B}{2} \int f(\epsilon + m_B H) dg.$$

Заметим, что $dg = \frac{d\epsilon}{d\epsilon} d\epsilon = \rho(\epsilon) d\epsilon$. Заменяя в первом интеграле $\epsilon - m_B H$ через ϵ , а во втором $\epsilon + m_B H$ через $-\epsilon$, получим

$$I = \frac{1}{2} m_B \int [\rho(\epsilon + m_B H) - \rho(\epsilon - m_B H)] f(\epsilon) d\epsilon.$$

Разложим $\rho(\varepsilon \pm m_B H)$ в ряд по степеням $m_B H$ (ограничиваясь первыми членами). Проинтегрируем последнее уравнение по частям, пользуясь тем, что на границах интегрирования 0 и ∞ произведение $\rho(\varepsilon) f(\varepsilon)$ обращается в нуль; получим

$$I = m_B^2 H \int \frac{d\rho}{d\varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon = -m_B^2 H \int \rho(\varepsilon) \frac{df}{d\varepsilon} d\varepsilon.$$

Так как $-\frac{df}{d\varepsilon}$ ведет себя как δ -функция, имея острый максимум при ε , равном химическому потенциалу ζ , то

$$I = m_B^2 H \rho(\zeta) = m_B^2 H \rho(\zeta_0),$$

где ζ_0 — значение химического потенциала при $T=0$. С другой стороны, по (118.10) и (118.13) $\rho(\zeta_0) = \frac{3}{2} \frac{n}{\zeta_0}$ (n — число электронов в 1 cm^3). Поэтому

$$I = \frac{3}{2} \frac{nm_B^2}{\zeta_0} H = \frac{3}{2} \frac{nm_B^2}{kT_F} H \quad \text{и} \quad \chi = \frac{3}{2} \frac{nm_B^2}{kT_F}. \quad (149.02)$$

В полученное выражение для χ надо внести две поправки.

1. Химический потенциал вычисляется в предположении, что масса носителя равна массе электрона m_0 . Это справедливо только для свободных электронов. В действительности электроны движутся в периодическом поле решетки (§ 120). Взаимодействие электрона с решеткой в первом приближении учитывается введением эффективной массы электрона m^* . В (149.02) вместо ζ_0 надо подставить значение ζ^* при $m = m^*$, равное по (118.12) $\zeta^* = \zeta_0 \frac{m_0}{m^*}$. Поэтому

$$\chi = \frac{3}{2} \frac{nm_B^2}{kT_F} \frac{m^*}{m_0}. \quad (149.03)$$

2. Л. Д. Ландау показал, что внешнее магнитное поле воздействует на поступательное движение свободных электронов, создавая некоторый диамагнитный момент. Пусть магнитное поле направлено по оси z . Тогда в плоскости xy электрон будет описывать круговую траекторию с циклотронной частотой $\omega_c = \frac{e_0 \hbar}{m^* c} H$. Движение электрона квантуется, поэтому энергию можно написать в форме

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{e_0 \hbar}{m^* c} H \left(n' + \frac{1}{2} \right), \quad (149.03)$$

где n' — колебательное квантовое число. Отсюда следует, что магнитный момент орбиты равен

$$m = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} = -\frac{e_0 \hbar}{m^* c} \left(n' + \frac{1}{2} \right) = -2m_B \left(n' + \frac{1}{2} \right) \frac{m_0}{m^*}. \quad (149.05)$$

Суммируя по всем электронам единицы объема (умножив на функцию распределения Ферми, суммируя по всем n' и интегрируя по p_z от $-\infty$ до $+\infty$), получим для диамагнитной восприимчивости

$$\chi_\delta = \frac{I_\delta}{H} = -\frac{nm_B^2}{2\xi^*} \left(\frac{m_0}{m^*} \right)^2 = -\frac{nm_B^2}{2kT_F} \left(\frac{m_0}{m^*} \right). \quad (149.06)$$

Парамагнитная восприимчивость свободных электронов металла равна

$$\chi_e = \chi_n + \chi_\delta = \frac{nm_B^2}{2kT_F} \left(3 \frac{m^*}{m_0} - \frac{m_0}{m^*} \right). \quad (149.07)$$

Отсюда следует, что при $\frac{m_0}{m^*} = \sqrt{3} = 1,73$ $\chi = 0$; при $\frac{m_0}{m^*} < 1,73$ электронный газ парамагнитен ($\chi > 0$); при $\frac{m_0}{m^*} > 1,73$ электронный газ диамагнитен ($\chi < 0$).

При сравнении изложенной теории с опытом следует учитывать, что такие металлы, как Li, Na, K, Rb, Cs, Fr, Cu, Ag, Au, Be, Mg, Ca, Zn, Sr, Cd, Ba, Hg, Ra, Al, Ge, In, Tl, Sn, As, Sb, Bi, Te, можно рассматривать в виде совокупности ионов, погруженных в электронный газ. Эти ионы имеют замкнутые оболочки и поэтому диамагнитны. Следовательно, восприимчивость металла равна $\chi_m = \chi_e + \chi_{\text{ион}}$, где χ_e определяется формулой (149.07), а $\chi_{\text{ион}} < 0$. Так, для калия $\chi_{\text{эксп}} = 35,5 \cdot 10^{-6}$. Вычисленное по формуле (149.07) при $m^* = m_0$ значение $\chi_e = 17,1 \cdot 10^{-6}$, то есть оказывается слишком низким. Если взять $\frac{m_0}{m^*} = 0,7$ (полученное из оптических констант металла), то по (149.07) получается $\chi_e = 31,0 \cdot 10^{-6}$, что ближе к опытному значению. Из сравнения теоретических и опытных χ_e следует, что для калия, натрия, рубидия и цезия $m^* > m_0$, а для магния $m^* \approx m_0$.

§ 150. Ферромагнетизм

Выше указывалось, что ферромагнитная поляризация обусловлена в основном ориентацией спин-магнитных моментов электронов. Действительно, в кристалле железа в узлах решетки расположены ионы Fe^{2+} , потерявшие два $4s$ -электрона. Ион Fe^{2+} имеет недостроенную $3d$ -оболочку (или шесть d -электронов). Co^{2+} и Ni^{2+} имеют соответственно 7 и 8 $3d$ -электронов. Эти d -электроны ответственны за ферромагнитные свойства. Поскольку для ионов решетки d -оболочка внешняя, d -электроны находятся под действием сильных полей соседних ионов. Вследствие этого орбитальный механический момент теряет свободу ориентации (замораживается), а спин может ориентироваться в поле. Следует подчеркнуть, что ферромагнетизм — не специфическое свойство атомов. В некотором смысле ферромаг-

нетизм — коллективное свойство атомов и структуры решетки. Например, сплав Гейслера (Cu_2MnAl) ферромагнитен, хотя и не содержит ферромагнитных элементов (марганец относится к переходным элементам и имеет недостроенную $3d$ -оболочку, но в чистом виде не является ферромагнитным).

Самопроизвольная ориентация формально может быть объяснена введением внутреннего ориентирующего поля (поля Вейсса). В первом приближении внутреннее ориентирующее поле H_W можно считать пропорциональным имеющемуся намагничиванию I , то есть

$$H_W = \gamma I, \quad (151.01)$$

где γ — множитель пропорциональности, смысл которого будет рассмотрен ниже.

Пусть каждый ион решетки ферромагнетика имеет только один электрон. Тогда намагничивание в действующем поле H_θ определяется функцией Бриллюэна (147.14) при $j=s=\frac{1}{2}$, то есть гиперболическим тангенсом

$$I = I_s \operatorname{tgh} \frac{m_B H_\theta}{kT}, \quad I_s = nm_B. \quad (150.02)$$

Здесь n — число ионов (число спиновых магнитных моментов m_B) в единице объема, I_s — намагничивание при насыщении. График функции (150.02) изображен на рисунке 78. Поскольку пара- и диамагнитная поляризация пренебрежимо малы, действующее поле равно

$$H_\theta = H + \gamma I, \quad (150.03)$$

где H — макроскопическое магнитное поле внутри ферромагнетика.

Намагничивание находится совместным решением уравнений (150.02) и (150.03) с помощью графического метода, изложенного в § 142. Результаты § 142 можно перенести на рассматриваемую модель ферромагнетика. Для этого надо P заменить через I , p через m_B , E через H и положить $\epsilon_0 = 1$.

Температура перехода из ферромагнитного состояния в парамагнитное (температура Кюри) определится равенством

$$\theta = \frac{m_B \beta I_s}{k} = \frac{\beta m_B^2 n}{k}. \quad (150.04)$$

Физический смысл этого соотношения прежний: самопроизвольная поляризация разрушается, когда средняя энергия теплового движения kT равна энергии $m_B H_{WS} = m_B \theta I_s$ во внутреннем поле при насыщении.

Соотношение (150.04) позволяет оценить внутреннее поле. Например, для железа ферромагнитная точка Кюри $\theta = 1043^\circ\text{K}$, поэтому

$$H_{WS} = \frac{k\theta}{m_B} = \frac{1.4 \cdot 10^{-16} \cdot 1043}{0.9 \cdot 10^{-20}} \simeq 1.6 \cdot 10^7 \text{ эрстед.}$$

Такое значение H_{WS} невозможно объяснить магнитным полем, создаваемым соседними ионами. Последнее по порядку величины равно

$$H \sim \frac{m_B}{a^3} \approx \frac{10^{-20}}{(10^{-8})^3} \simeq 10^4 \text{ эрстед}, \text{ то есть в } 10^3 \text{ раз меньше поля Вейсса.}$$

Оказывается, поле Вейсса не является магнитным. Я. Г. Дорфман в 1927 году пропускал пучок электронов через намагничиваемую никелевую фольгу. Наблюданное отклонение пучка электронов при намагничивании до насыщения соответствовало полю $H \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ эрстед}$. Это значит, что поле $\sim 10^6 - 10^7 \text{ эрстед}$ внутри ферромагнетиков не существует. В 1928 году Я. И. Френкель и В. Гайзенберг независимо друг от друга показали, что внутреннее поле Вейсса имеет квантовое происхождение.

При $T < \theta$ и $H = 0$ имеет место самопроизвольное намагничивание.

Зависимость самопроизвольного намагничивания от температуры вблизи точки Кюри определяется формулой (142.14)

$$I_0 = I_s \frac{T}{\theta} \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{\theta}\right)} \simeq I_s \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{\theta}\right)}. \quad (150.06)$$

Полученная зависимость I_0 от T хорошо согласуется с опытом вблизи θ . Исключение составляет численный коэффициент. Эксперимент дает $\left(\frac{I}{I_s}\right)^2 = \xi \left(\frac{T}{\theta}\right)^2 \left(1 - \frac{T}{\theta}\right)$, где $\xi > 3$. Например, $\xi = 4,475$ для Ni, $\xi = 5$ для Fe. Это показывает, что рассматриваемая модель ферромагнетика приближена. С. В. Вонсовский и К. Б. Власов показали (1953), что для металлических ферромагнетиков намагченность обусловлена не только $3d$ -электронами ионов, но отчасти и свободными $4s$ -электронами. Учет намагничивания свободных электронов увеличивает ξ в соответствии с опытом.

При температуре T , равной ферромагнитной точке Кюри θ , ферромагнетик превращается в парамагнетик (фазовый переход 2-го рода). При $T > \theta$ восприимчивость подчиняется закону Кюри — Вейсса (142.16)

$$\chi = \frac{C}{T - \theta_p}, \quad (150.07)$$

где

$$C = \frac{n_j(j+1) g^2 m_B^2}{3k} = \frac{np^2 m_B^2}{3k}. \quad (150.08)$$

Вывод, проведенный в § 142, приводит к равенству парамагнитной температуры Кюри θ_p и ферромагнитной температуры Кюри θ . Опыт показывает, что $\theta_p > \theta$ (см. таблицу). Противоречие это устраняется, если учесть флуктуации поля.

Таблица значений θ , θ_p , I_s , p и C для некоторых ферромагнетиков

Вещество	θ ° К	θ_p ° К	Намагниченность насыщения		p -эффект. число магнитонов Бора на атом	C
			300° К	0° К		
Fe	1043	1101	1707	1752	2,221	1,2676
Co	1993	1403—1428	1400	1446	1,716	1,2264
Ni	631	650	485	510	0,606	0,323
Gd	289	302	—	1980	7,10	7,87
Cu_2MnAl	603	—	430	(580)	(4,0)	—

Из теории Вейсса — Гайзенберга следует, что при температуре ниже точки Кюри ферромагнитное тело должно быть самопроизвольно намагниченено почти до насыщения. Однако на самом деле этого не наблюдается. Поэтому Вейсс предположил, что макроскопическое тело (моно- или поликристалл) состоит из ряда областей (доменов), самопроизвольно намагниченных в соответствии с температурой тела, но направления намагниченности различных доменов не параллельны друг другу.

Возникновение доменов иллюстрируется схемами на рисунке 84 (схемы изображают поперечное сечение ферромагнитного кристалла).

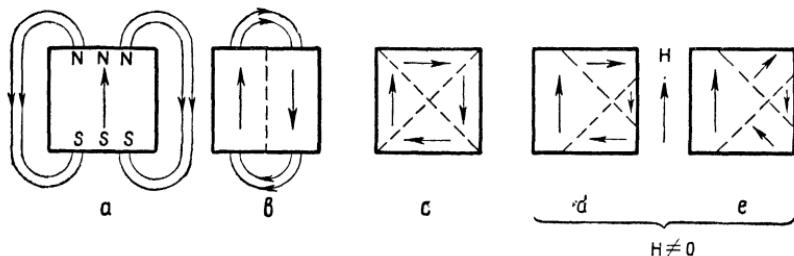


Рис. 84.

На рисунке 85, *a* изображен однодоменный кристалл, у которого (вследствие образования магнитных полюсов на поверхности) имеется значительная магнитная энергия $\frac{1}{8\pi} \int H^2 dV$. Если кристалл разбить на N доменов с противоположными направлениями намагничивания (рис. 85, *b*) или с направлениями, образующими замкнутый поток *I* (рис. 85, *c*), то магнитная энергия уменьшается приблизительно в N раз. Процесс дробления доменов продолжается до тех пор, пока энергия, необходимая для образования поверхностей раздела новых доменов, не станет больше уменьшения энергии магнитного поля. Исходя из таких соображений, можно показать, что размеры доменов порядка 10^{-3} см.

В теории сегнетоэлектриков (§ 142) отмечалось, что поляризация полидоменного тела при фиксированной температуре состоит из трех процессов. Для ферромагнетиков первый процесс (увеличение поляризации домена во внешнем поле) не играет существенной роли, так как домены уже намагниченны практически до насыщения. Поэтому процесс намагничивания ферромагнетика заключается: 1) в увеличении объема доменов, имеющих выгодную ориентацию во внешнем магнитном поле, за счет доменов с невыгодной ориентацией (процесс смещения границ, особенно существенный при малых и средних полях); 2) во вращении вектора намагничивания домена в направлении внешнего поля (в сильных полях). Эти два процесса иллюстрируются на рисунке 85, *d* (смещение границ) и на рисунке 85, *e* (вращение вектора \vec{I}).

§ 151. Антиферромагнетизм

Антиферромагнетики характеризуются наличием максимума на кривой зависимости восприимчивости от температуры (рис. 85). Температура θ , при которой χ достигает максимума, называется анти-

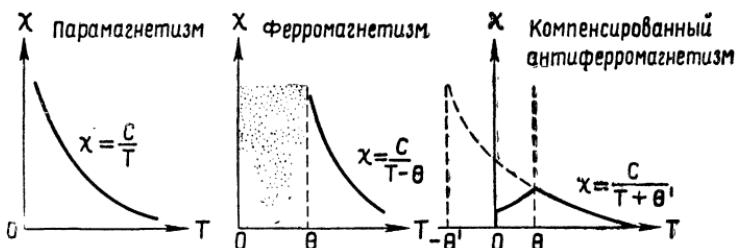


Рис. 85.

ферромагнитной точкой Кюри. При $T > \theta$ восприимчивость подчиняется закону Кюри — Вейссса с $\theta'_p < 0$. При $T < \theta$ ($\theta \ll |\theta'|$) магнитные свойства резко анизотропны.

Соображения, на основе которых может быть построена теория антиферромагнетизма, удобно проследить на примере магнетита Fe_3O_4 . Решетка магнетита состоит из ионов Fe^{2+} , Fe^{3+} и O^{2-} . Поэтому молекулу магнетита можно представить в виде $Fe^{2+}Fe_2^{3+}O_4^{2-}$. Следует ожидать, что магнитный момент кристалла магнетита, рассчитанный на одну молекулу, равен сумме ионных магнитных моментов. Ионы O^{2-} имеют замкнутые электронные оболочки, следовательно, магнитный момент Fe_3O_4 определяется ионами железа. Если для ионов Fe^{2+} и Fe^{3+} принять $g = 2$ и считать магнитные моменты ориентированными одинаково, то магнитный момент на молекулу равен $(4 + 2 \cdot 5)m_B = 14m_B$. Однако из намагничивания насыщения магнетита следует, что магнитный момент на одну молекулу равен

$4,08m_B$. Неэль предположил, что магнитные моменты ионов Fe^{3+} расположены антипараллельно. Тогда результирующий момент молекулы обусловлен лишь ионами Fe^{2+} и в согласии с опытом равен $4m_B$.

Таким образом, согласно Неэлю, в основном энергетическом состоянии кристалла антиферромагнетика кристаллическая решетка разбивается на две (или более) подрешетки с взаимно антипараллельно ориентированными спинами ионов (атомов). При этом возможны два случая — компенсированный антиферромагнетизм и некомпенсированный антиферромагнетизм. В первом случае подрешетки обладают одинаковыми моментами насыщения и суммарный момент кристалла равен нулю. В этом случае антиферромагнетик является слабо магнитным веществом. Примером может служить окись марганца $\text{Mn}^{2+}\text{O}^{2-}$. Решетка MnO изображена на рисунке 86. Во втором случае подрешетки обладают различными моментами насыщения и суммарный момент насыщения отличен от нуля. Такой антиферромагнетик принадлежит к числу сильно магнитных веществ (ферриты, магнетиты, висмутиды и др.). Примером служит упомянутый выше магнетит Fe_3O_4 . Ферриты можно рассматривать как магнетит $\text{FeO}\text{Fe}_2\text{O}_3$, в котором Fe^{2+} заменен ионом M двухвалентного металла (Mn , Co , Ni , Cu , Mg , Zn).

Ферриты получили распространение в радиотехнике: в отличие от металлических ферромагнетиков они обладают большим электрическим сопротивлением ($\frac{1}{\gamma} \sim 10^2 - 10^6 \text{ ом} \cdot \text{см}$, тогда как у железа $\frac{1}{\gamma} \sim 10^{-5} \text{ ом} \cdot \text{см}$).

В качестве простейшей модели антиферромагнетика рассмотрим решетку парамагнитных ионов, состоящую из двух подрешеток a и b (рис. 86). Подрешетки вставлены друг в друга так, что все ближайшие соседи иона подрешетки a являются ионами подрешетки b и наоборот. Предположим, что вейссово (немагнитное) поле ориентирует спины внутри каждой подрешетки параллельно, а спины разных подрешеток — антипараллельно. Если \vec{I}_a и \vec{I}_b — намагнченности (на единицу объема) для подрешеток a и b , то поля, действующие на ионы подрешеток a и b , соответственно равны

$$\vec{H}_a^0 = \vec{H} + \gamma_{aa}\vec{I}_a + \gamma_{ab}\vec{I}_b, \quad \vec{H}_b^0 = \vec{H} + \gamma_{ba}\vec{I}_a + \gamma_{bb}\vec{I}_b. \quad (151.01)$$

Здесь H — макроскопическое магнитное поле внутри тела, а γ_{ik} — постоянные внутреннего поля. Для упрощения примем $\gamma_{aa} = \gamma_{bb} = \gamma \geq 0$,

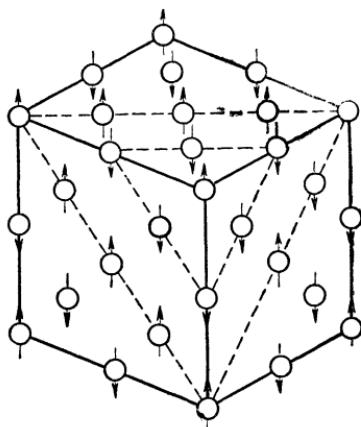


Рис. 86.

$\gamma_{ab} = \gamma_{ba} = -\gamma'$ ($\gamma' > 0$ и $|\gamma'| > |\gamma|$). Тогда

$$\vec{H}_a^\theta = \vec{H} + \gamma \vec{I}_a - \gamma' \vec{I}_b, \quad \vec{H}_b^\theta = \vec{H} - \gamma' \vec{I}_a + \gamma \vec{I}_b. \quad (151.02)$$

Намагниченности подрешеток будут определяться функциями Бриллюэна (147.14)

$$I_a = I_{as} B_{j_a} \left(\frac{m_a H_a^\theta}{kT} \right), \quad I_b = I_{bs} B_{j_b} \left(\frac{m_b H_b^\theta}{kT} \right), \quad (151.03)$$

где $m_a = g_a j_a m_B$ и $m_b = g_b j_b m_B$ — моменты ионов подрешеток a и b соответственно, $I_{as} = m_a n_a$, $I_{bs} = m_b n_b$ — магнитные моменты подрешеток при насыщении. Если $I_{as} = I_{bs}$, то имеет место компенсированный антиферромагнетизм, при $I_{as} \neq I_{bs}$ — некомпенсированный. В дальнейшем примем $m_a = m_b$, $j_a = j_b = j$, тогда подрешетки будут отличаться концентрациями ионов n_a и n_b . Полное намагничивание равно

$$\vec{I} = \vec{I}_a + \vec{I}_b. \quad (151.04)$$

При температуре выше антиферромагнитной точки Кюри θ тело будет находиться в парамагнитном состоянии. Действительно, при достаточно высоких температурах аргументы в (151.03) малы и B_j можно разложить в ряд. Так как при $\eta \ll 1$, $B_j(\eta) \simeq \frac{j(j+1)\eta}{3j^2}$ (§ 147), то (151.03) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} I_a &= \frac{C_a}{T} H_a^\theta = \frac{C_a}{T} (H + \gamma I_a - \gamma' I_b), \\ I_b &= \frac{C_b}{T} H_b^\theta = \frac{C_b}{T} (H - \gamma' I_a + \gamma I_b), \end{aligned} \right\} \quad (151.05)$$

где

$$C_a = n_a \frac{j(j+1) g^2 m_B^2}{3k}, \quad C_b = n_b \frac{j(j+1) g^2 m_B^2}{3k} \quad (151.06)$$

есть постоянные Кюри для подрешеток a и b . Перепишем систему (151.05) в форме

$$\left. \begin{aligned} (T - \gamma C_a) I_a + \gamma' C_a I_b &= C_a H, \\ \gamma' C_b I_a + (T - \gamma C_b) I_b &= C_b H. \end{aligned} \right\} \quad (151.07)$$

Антиферромагнитная точка Кюри — это температура, ниже которой каждая из подрешеток a и b обладает самопроизвольным магнитным моментом. Ниже температуры θ зависимость $I_{a,b}$ от $H_{a,b}^\theta$ дается формулами (151.03). Однако вблизи точки Кюри I_a и I_b далеки от насыщения. Поэтому можно считать, что аргументы в (151.03) малы и применимо линейное приближение. Тогда точка Кюри θ будет температурой, для которой при $H = 0$ система (151.07)

имеет нетривиальное решение ($I_a \neq 0$, $I_b \neq 0$). В этом случае определитель системы

$$\Delta = (T - \gamma C_a)(T - \gamma C_b) - \gamma'^2 C_a C_b = \\ = T^2 - \gamma(C_a + C_b) - (\gamma'^2 - \gamma^2) C_a C_b \quad (151.08)$$

должен обращаться в нуль. Отсюда температура перехода

$$\theta = \frac{\gamma}{2}(C_a + C_b) + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4}(C_a + C_b)^2 + (\gamma'^2 - \gamma^2) C_a C_b}. \quad (151.09)$$

Для компенсированных антиферромагнетиков с одним сортом парамагнитных ионов $C_a = C_b = C$. Тогда

$$\theta = (\gamma + \gamma') C. \quad (151.10)$$

Рассмотрим парамагнитные свойства выше точки Кюри. В этом случае вследствие дезориентирующего действия теплового движения самопроизвольная поляризация подрешеток разрушена. Из (151.07) находим

$$\vec{I}_a = \frac{C_a}{\Delta} [T - C_b(\gamma + \gamma')] \vec{H}, \quad \vec{I}_b = \frac{C_b}{\Delta} [T - C_a(\gamma + \gamma')] \vec{H}, \quad (151.11)$$

тогда

$$\vec{I} = \vec{I}_a + \vec{I}_b = \frac{(C_a + C_b) T - 2C_a C_b (\gamma + \gamma')}{\Delta} \vec{H}. \quad (151.12)$$

Возьмем величину, обратную восприимчивости, то есть $\frac{1}{\chi}$. Произведя деление, получим формулу Неэля

$$\frac{1}{\chi} = \frac{H}{T} = \frac{1}{C_a + C_b} \left(T + \theta' - \frac{s}{T + \theta'} \right), \quad (151.13)$$

где

$$\theta' = \frac{2C_a C_b \gamma' - (C_a^2 + C_b^2) \gamma}{C_a + C_b}, \quad s = \frac{C_a C_b}{(C_a + C_b)^2} (C_a - C_b)^2 (\gamma + \gamma'). \quad (151.14)$$

Для ферромагнетиков выше точки Кюри $\frac{1}{\chi}$ линейно зависит от T . $\left(\frac{1}{\chi} = \frac{T - \theta'}{C}\right)$. Для антиферромагнетиков температура θ' может иметь разные знаки. Кроме того, в выражении (151.13) появился добавочный член, вследствие чего зависимость $\frac{1}{\chi}$ от T не линейная, а имеет вогнутость со стороны оси T . Последнее находится в согласии с опытом.

Для компенсированного антиферромагнетика (с одним сортом парамагнитных ионов) $C_a = C_b = C$ и $s = 0$. Тогда

$$\chi(T) = \frac{2C}{T + \theta'}, \quad \text{где } \theta' = (\gamma' - \gamma) C. \quad (151.15)$$

Этот случай изображен на рисунке 85 при $\theta' > 0$ ($\gamma' > \gamma$).

Отношение $\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma' + \gamma}$ для компенсированных антиферромагнетиков может служить критерием для определения взаимодействия внутри подрешеток a и b . При $\gamma > 0$ имеем $\frac{\theta'}{\theta} < 1$. Однако эксперимент дает отношение $\frac{\theta'}{\theta}$ порядка 1,5—5. Это значит, что $\gamma = -|\gamma| < 0$, так что

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\gamma' + |\gamma|}{\gamma' - |\gamma|} > 1.$$

Отрицательный знак γ указывает на то, что антиферромагнитное взаимодействие имеет место не только между ионами разных подрешеток, но и между ионами одной и той же подрешетки.

Рассмотрим восприимчивость ниже точки Кюри θ . Заметим, что χ ниже точки Кюри определяется однозначно только для компенсированных антиферромагнетиков. Для некомпенсированных антиферромагнетиков при $T < \theta$, так же как и для ферромагнетиков, имеет место самопроизвольное намагничивание и гистерезис, поэтому χ зависит от процесса.

Пусть компенсированный антиферромагнетик имеет температуру $T = 0$. При $H = 0$ обе подрешетки имеют вдоль направления наиболее легкого намагничивания самопроизвольные моменты \vec{I}_a и $\vec{I}_b = -\vec{I}_a$. Обозначим это направление через x .

Если магнитное поле направлено перпендикулярно к оси намагничивания x (рис. 87 *a, б*), то моменты \vec{I}_a и \vec{I}_b поворачиваются

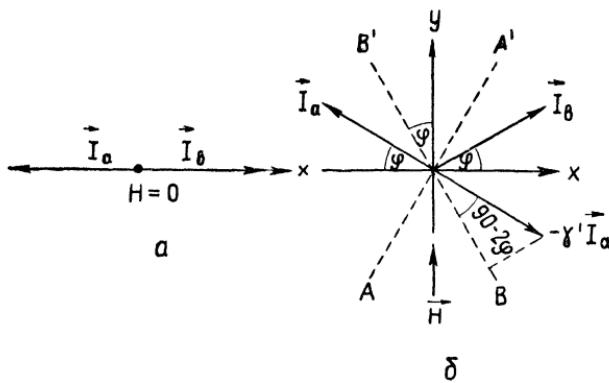


Рис. 87.

полем \vec{H} на угол φ так, что действующие поля \vec{H}_a^∂ и \vec{H}_b^∂ станут соответственно параллельны \vec{I}_a и \vec{I}_b . Это значит, что проекция \vec{H}_b^∂ на перпендикуляр BB' к \vec{I}_b должна равняться нулю. Но

$$H_{b\perp}^\partial = H \cos \varphi - \gamma' I_a \cos(90 - 2\varphi) = H \cos \varphi - \gamma' I_a \sin 2\varphi.$$

Аналогично проекция поля \vec{H}_a^θ на перпендикуляр AA' к \vec{I}_a равна $H_{a\perp}^\theta = H \cos \varphi - \gamma' I_b \sin 2\varphi$. Условия $H_{a\perp}^\theta = H_{b\perp}^\theta = 0$ дают $I_a = I_b = \frac{H \cos \varphi}{\gamma' \sin 2\varphi} = \frac{H}{2\gamma' \sin \varphi}$. Поэтому намагничивание в направлении поля равно

$$I_y = I_a \sin \varphi + I_b \sin \varphi = \frac{H}{\gamma'}.$$

Отсюда следует, что при $T=0$ восприимчивость χ в направлении, перпендикулярном к оси намагничивания, равна $\chi_\perp = \frac{I_y}{H} = \frac{1}{\gamma'}$. Но то же значение χ получается в точке Кюри $T=0$: из (151.15) $\chi(0) = \frac{2C}{\theta + \vartheta} = \frac{1}{\gamma'}$. Итак, восприимчивость χ_\perp ниже точки Кюри практически не зависит от температуры и равна

$$\chi_\perp = \frac{1}{\gamma'} \quad (T \leq 0). \quad (151.17)$$

С другой стороны, при $T=0$ продольная восприимчивость χ_{\parallel} в слабом поле H , параллельном оси x , равна нулю, так как при $T=0$ обе подрешетки намагниченны до насыщения в противоположные стороны и результирующая намагнченность отсутствует, то есть

$$\chi_{\parallel}(0) = 0. \quad (151.18)$$

Ван-Флек показал, что с повышением температуры $\chi_{\parallel}(T)$ плавно возрастает до значения

$$\chi_{\parallel}(0) = \chi_\perp(0) = \chi(0). \quad (151.19)$$

Таким образом, в точке Кюри анизотропии нет. Начиная от точки Кюри, анизотропия возрастает при понижении температуры.

Если магнитное поле направлено под углом ϑ к оси x , то восприимчивость равна

$$\chi = \chi_\perp \sin^2 \vartheta + \chi_{\parallel} \cos^2 \vartheta. \quad (151.20)$$

Для поликристаллического тела χ надо усреднить по всем направлениям оси x . Замечая, что $\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3}$ и $\overline{\sin^2 \vartheta} = \frac{2}{3}$, получим $\bar{\chi} = \frac{1}{3}(\chi_{\parallel} + 2\chi_\perp)$. При $T=0$ $\overline{\chi(0)} = \frac{2}{3}\chi_\perp = \frac{2}{3}\chi(0)$, что находится в хорошем согласии с опытом.

Для некомпенсированного антиферромагнетика при $T < 0$ будет иметь место самопроизвольное намагничивание, значение которого по (151.03) равно

$$I_0 = gjm_B \left[n_b B_j \left(\frac{gjm_B H_b^\theta}{kT} \right) - n_a B_j \left(\frac{gjm_B}{kT} H_a^\theta \right) \right]. \quad (151.21)$$

Здесь в качестве молекулярных полей H_a^∂ и H_b^∂ следует взять выражения, более общие, чем (151.02). При $H=0$

$$\vec{H}_a^\partial = \gamma_a \vec{I}_a - \gamma' \vec{I}_b, \quad \vec{H}_b^\partial = -\gamma' \vec{I}_a + \gamma_b \vec{I}_b, \quad \gamma_a \neq \gamma_b. \quad (151.22)$$

Из (151.21) видно, что при 0°K самопроизвольная намагниченность меняет знак при $\frac{n_a}{n_b} = 1$. Равенство $B_j \left(\frac{gjm_B H_a^\partial}{kT} \right) = B_j \left(\frac{gjm_B H_b^\partial}{kT} \right)$ для всех T справедливо при $H_a^\partial = H_b^\partial$. Последнее возможно при $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$.

Поэтому, если $\gamma_a \neq \gamma_b$, то $B_j \left(\frac{gjm_B H_a^\partial}{kT} \right) \neq B_j \left(\frac{gjm_B H_b^\partial}{kT} \right)$ при всех T за исключением $T=0$. В этом случае зависимость $I_0 = I_0(T)$ дается

кривой d на рисунке 88 ($n_a = n_b$, компенсированный антиферромагнетизм). Анализ, проведенный Нээлем, показывает, что в точке Кюри $T=\theta$ производная $\frac{dI_0}{dT}$ изменяет знак при $\frac{n_a}{n_b} = \frac{\gamma' + \gamma_b}{\gamma' + \gamma_a}$. Тогда при 0°K $I_0 \neq 0$ и зависимость $I_0 = I_0(T)$ дается кривой f . Если $\frac{n_a}{n_b}$ лежит между единицей и $\frac{\gamma' + \gamma_b}{\gamma' + \gamma_a}$, то кривая $I_0 = I_0(T)$ пересекает ось абсцисс при некоторой температуре θ'' (кривая e) и общая намагниченность меняет знак.

Температуру $T=\theta''$ называют точкой компенсации.

Если $\frac{n_a}{n_b} = \frac{\gamma' - \gamma_b}{\gamma' - \gamma_a}$, то $\frac{dI_0}{dT} = 0$ при 0°K . В этом случае зависимость $I_0 = I_0(T)$ такая же, как и у нормального ферромагнетика (кривая b). При отношении $\frac{n_a}{n_b}$, находящемся в пределах от 1 до $\frac{\gamma' - \gamma_b}{\gamma' - \gamma_a}$, $\left(\frac{dI_0}{dT} \right)_{T=0} > 0$ и кривая имеет форму c . Для $\frac{n_a}{n_b}$ более далеких от 1, чем $\frac{\gamma' + \gamma_b}{\gamma' + \gamma_a}$ или $\frac{\gamma' - \gamma_b}{\gamma' - \gamma_a}$, зависимость $I_0 = I_0(T)$ имеет более плавное изменение, чем у нормального ферромагнетика (кривые a и g). Если γ_a и γ_b отрицательны и $|\gamma_b| > |\gamma_a|$, то с ростом отношения $\frac{n_a}{n_b}$ порядок изменения кривых будет от g к a , тогда как при $|\gamma_a| > |\gamma_b|$ имеет место обратный порядок.

В заключение остановимся кратко на природе антиферромагнитного взаимодействия, то есть стремлении к антипараллельной ориентации спинов двух атомов. Рассмотрим, например, соседние ионы Mn^{2+} , O^{2-} и Mn^{2+} в кристалле MnO . Основное состояние катиона Mn^{2+} есть $3d^5$, в котором пять d -электронов имеют параллельные спины

$(s = \frac{5}{2})$ и магнитный момент $5m_B$. Основное состояние аниона O^{2-} — состояние $2p^6$, в котором шесть p -электронов образуют замкнутую p -оболочку. Если незаполненные d -состояния катионов перекрываются с заполненными p -состояниями анионов, то один из электронов O^{2-} может перейти в $3d$ -оболочку Mn. При этом возникает возбужденное состояние $3d^6$ иона Mn^+ , имеющее спин $s = 2$ (так как перешедший электрон должен иметь спин, антипараллельный спину остальных пяти d -электронов), и состояние $2p^5$ иона O^- , имеющее спин $\frac{1}{2}$ (остальные 4 электрона спарены). Оставшийся в O^- неспаренный электрон взаимодействует с одним из d -электронов второго иона Mn^{2+} . Ван-Флек показал, что минимум энергии взаимодействия будет в том случае, когда спины ионов Mn противоположны. Таким образом возникает антипараллельная (антиферромагнитная) ориентация спинов соседних катионов.

§ 152. Исторические замечания

Различие между микроскопическими и макроскопическими полями ввел Г. А. Лоренц. Он показал, что макроскопическое поле есть результат усреднения микрополя (гл. V). Тем самым задача установления электромагнитных свойств стала на твердую почву электронной теории. В конце XIX и начале XX в. теория опиралась на статическую модель атома типа Д. Томсона, что исключало возможность исследования магнитных свойств. Переход к новой модели атома был сделан П. Ланжевеном (1872—1946) в 1905 году в его теории магнитных свойств атомов. Ланжевен, возобновляя на новой основе теорию молекулярных токов Ампера, ввел представление о стационарных орбитах электронов.

Первая электронная теория металлов была создана Э. Рике, П. Друде и Д. Д. Томсоном (1900), которые предположили, что атомы металла отчасти диссоциированы, а отделившиеся электроны ведут себя как идеальный газ. Однако после первоначальных успехов теории выяснилось, что она встречается с фундаментальными затруднениями; например, теория оказалась не в состоянии установить необходимые условия для того, чтобы вещество было металлическим проводником или изолятором.

Более точный анализ электропроводности металлов, проведенный Г. А. Лоренцом в 1905 году и основанный на применении к свободным электронам распределения Максвелла — Больцмана, а также учета изменения функции распределения в поле (§ 128, 131), не улучшил, а ухудшил согласие с опытом.

Поворотным моментом в развитии теории металлов следует считать попытку Я. И. Френкеля подойти к свободным электронам металла с квантовой точки зрения: при сближении атомов металла орбиты внешних (валентных) электронов деформируются и электроны с энергией в несколько электронвольт движутся по орбитам, охватывающим не один, а много ионов металла.

Следующий решающий шаг был сделан А. Зоммерфельдом в 1927 году. Зоммерфельд применил методы, развитые Г. А. Лоренцом, и статистику Ферми к свободным электронам в металле и таким образом полностью разрешил затруднения с теплоемкостью. Эта теория, изложенная в § 123 и 129, еще не решала вопроса о причине существования изоляторов и проводников и формально вводила понятие о длине свободного пробега электронов. В том же 1927 году Я. И. Френкель указал новый метод определения длины

свободного пробега. Он рассматривал рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях решетки. Одновременно Л. Бриллюэн показал, что в периодической кристаллической решетке энергетический спектр свободных электронов распадается на ряд разрешенных зон. Другой подход к движению электронов в кристаллической решетке, примыкающий к идеям Я. И. Френкеля, был разработан Ф. Блохом (1928). Блох исходил из дискретных уровней отдельных атомов и показал, что при объединении атомов в решетку уровни превращаются в энергетические зоны (§ 120).

Идея Я. И. Френкеля об определении длины свободного пробега электронов была развита Ф. Блохом, Р. Пайерлом, Фрелихом, Б. И. Давыдовым и И. М. Шмушекевичем и другими, которые рассмотрели различные случаи взаимодействия свободных электронов с решеткой основного вещества и примесными атомами. [См. книги: Г. Бете и А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, ОНТИ, 1938; Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, Изд. иностр. лит., 1956].

А. Вильсон в 1931 году установил различие между металлами и изоляторами на основе зонной теории (§ 128) и ввел представление о собственных и примесных полупроводниках.

Ионная проводимость исследовалась В. К. Рентгеном, Р. В. Полем с сотрудниками, школой А. Ф. Иоффе. Основные идеи теории ионной проводимости твердых тел были разработаны Я. И. Френкелем (1926) и В. Шоттки (1930) (§ 136).

В 1938—1939 гг. А. Ф. Иоффе указал на связь выпрямляющих свойств с наличием контакта электронного и дырочного полупроводников. Это привело к разработке диффузионной и диодной теорий выпрямления в работах Б. И. Давыдова, Д. И. Блохинцева, С. И. Пекара, Н. Ф. Мотта, В. Шоттки и др. Начиная с 1947 года в работах Дж. Бардина, В. Шокли и других развивается теория *n-p-n*-перехода.

Элементарное изложение вопросов теории полупроводников и технических применений дано в книге А. Ф. Иоффе «Физика полупроводников», изд. АН СССР, М., 1957.

Зонная теория не учитывала дефектов решетки, которые существенным образом сказываются на электрических и магнитных свойствах вещества. Поэтому теорию пришлось дополнить введением различных дополнительных возбужденных состояний. В 1931 году Я. И. Френкель ввел представление об экситонах. В 1948—1950 гг. С. И. Пекар подробно развил теорию поляронов (§ 131), понятие о которых было сформулировано Л. Д. Ландау еще в тридцатых годах. В 1951 году Е. Ф. Гроссу удалось наблюдать спектр поглощения экситонов и тем самым непосредственно доказать правильность выражения (132.03) для энергии экситона.

Развитие теории поляризации диэлектриков происходило в тесной связи с теорией дисперсии света. Еще в 1875 году Г. Гельмгольц построил теорию дисперсии на основе механической теории света, но с формальным учетом затухания вибраторов. Теорию дисперсии развивали Г. А. Лоренц, П. Друде, Гольдгаммер, М. Планк и др. Нормальная дисперсия экспериментально исследована Кундтом, а аномальная — Вудом и Д. С. Рождественским.

Изложение вопросов молекулярной оптики (теорий явлений Керра, Фарадея и др.) имеется в книге М. В. Волькенштейна «Молекулярная оптика», ГИТГЛ, М. — Л., 1951.

Поляризация ионных кристаллов (с сильно связанными ионами) исследована М. Борном с сотрудниками. Теория тепловой ориентационной поляризации диэлектриков, содержащих свободно ориентирующиеся дипольные молекулы, развита П. Дебаем [П. Дебай, Полярные молекулы, ГНТИ, М. — Л., 1931].

Теория тепловой поляризации диэлектриков со слабо связанными ионами развивалась Г. И. Сканави и др.

Первый из известных сегнетоэлектриков — сегнетова соль — детально изучен в 1930—1934 гг. И. В. Курчатовым и его сотрудниками. Практически

важный сегнетоэлектрик — титанат бария — открыт в 1944 году Б. М. Вулом и И. М. Гольдманом.

Термодинамическая теория сегнетоэлектриков с учетом анизотропии и пьезоэффекта построена В. Л. Гинзбургом (1945). Приведенная в § 142 теория предложена Мезоном.

Первые теории диамагнетизма и ориентационного парамагнетизма были развиты Ланжевеном в 1904—1905 гг. Дальнейшее развитие тесно связано с развитием учения о строении атома. Уже в 1913 году Н. Бор из своей элементарной теории атома вывел значение кванта магнитного момента — магнетона Бора — и определил значение орбитальных моментов. В 1925 году Уленбек и Гаудсмит открыли спин электрона и его собственный магнитный момент, после чего Паули, Зоммерфельд, Стонер и другие построили теорию парамагнетизма атомов.

В 1927 году Паули и Френкель построили теорию спинового парамагнетизма свободных электронов в металлах. В 1930 году Л. Д. Ландау ввел поправку на диамагнетизм свободных электронов.

Первоначальная теория намагничивания ферромагнетиков была развита учеником Ланжевена П. Вейссом в 1907 году на основе представления о существовании молекулярного «вейссова» поля. Вейсс ввел также представление о разбиении макроскопического тела на домены, намагниченные до насыщения в различных направлениях.

Вопрос о природе элементарных магнетиков, ответственных за ферромагнетизм, был решен гиromагнитным опытом Эйнштейна и де-Гааса (1915). Опыт показал, что ферромагнетизм в основном обусловлен спинами электронов. В 1927 году Я. Г. Дорфман экспериментально доказал, что молекулярное поле Вейssa не является магнитным. Я. И. Френкель и В. Гайзенберг независимо друг от друга установили квантовую природу этого поля. Формальная теория анизотропии ферромагнитных и электрических свойств была разработана Акуловым и его школой. Первоначальное объяснение разбиения ферромагнетика на домены дано в 1930 году Я. И. Френкелем и Я. Г. Дорфманом и в 1932 году Ф. Блохом. Строгая теория магнитной структуры ферромагнетика построена Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем в 1945 году. На основе их результатов оказалось возможным построить теорию намагничивания путем смещения границ доменов (Ландау, Киттель и др.).

Подробное изложение вопросов магнетизма дано в книгах: С. В. Вонсовский и Я. С. Шур, Ферромагнетизм, ГИТТЛ, 1948; С. В. Вонсовский, Современное учение о магнетизме, ГИТТЛ, М.—Л., 1952; Я. Г. Дорфман, Магнитные свойства и строение вещества, М., ГИТТЛ, 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение	3
--------------------	---

Часть первая МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава I. Общие законы электромагнитного поля

§ 1. Электрическое поле и заряды	7
§ 2. Закон Кулона	9
§ 3. Принцип наложения полей. Теорема Гаусса	11
§ 4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (теорема о дивергенции электрического поля)	14
§ 5. Сила и плотность электрического тока. Закон сохранения электрического заряда	18
§ 6. Магнитное поле	19
§ 7. Принцип суперпозиции для магнитного поля. Закон Био — Савара	22
§ 8. Связь вихря магнитного поля с полным током. Первая группа уравнений Максвелла — Лоренца	24
§ 9. Электродвижущая и магнитодвижущая силы и закон полного тока	26
§ 10. Закон непрерывности магнитного потока	29
§ 11. Связь вихря электрического поля с магнитным током смещения. Вторая группа уравнений Максвелла — Лоренца	30
§ 12. Закон электромагнитной индукции в интегральной форме	32
§ 13. Скорость распространения электромагнитного поля. Электромагнитные волны. Электромагнитная теория света	34
§ 14. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Плотность электромагнитной энергии. Вектор Умова — Пойнтинга	36
§ 15. Закон сохранения импульса (количества движения). Электромагнитный импульс. Тензор плотности потока импульса	39
§ 16. Электромагнитная масса. Пропорциональность массы и энергии	45
§ 17. Натяжения Максвелла	46
§ 18. Закон сохранения импульса для поля и частиц	48
§ 19. Основные законы механики быстро движущихся частиц	50
§ 20. Дефект массы и энергия связи	54
§ 21. Перенос материи при взаимодействии	56
§ 22. Полная система уравнений Максвелла — Лоренца	57
§ 23. Закон сохранения момента импульса. Момент импульса электромагнитного поля	59
§ 24. Исторические замечания	63

Глава II. Статические и стационарные поля

§ 25. Статическое электрическое и стационарное магнитное поля	66
§ 26. Электростатический потенциал	67
§ 27. Уравнение Пуассона. Определение потенциала по заданному распределению заряда	69
§ 28. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Мультипольные потенциалы	74
§ 29. Потенциал и напряженность поля диполя	76
§ 30. Потенциал квадруполя	77
§ 31. Энергия системы зарядов	78
§ 32. Энергия недеформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему	81
§ 33. Энергия деформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему	83
§ 34. Векторный потенциал	84
§ 35. Магнитное поле стационарного тока	86
§ 36. Магнитное поле на большом расстоянии от тока. Магнитный диполь	89
§ 37. Скалярный магнитный потенциал тока	91
§ 38. Магнитные свойства атомной системы	94
§ 39. Магнитная энергия стационарных токов	97
§ 40. Исторические замечания	99

Глава III. Электромагнитные волны и теория излучения

§ 41. Плоские линейно-поляризованные электромагнитные волны	101
§ 42. Монохроматические плоские поляризованные волны	104
§ 43. Общее решение волнового уравнения. Группы волн	106
§ 44. Скалярный и векторный электромагнитные потенциалы	109
§ 45. Запаздывающие и опережающие потенциалы	112
§ 46. Запаздывающие потенциалы на большом расстоянии от системы зарядов	116
§ 47. Электрическое дипольное излучение (диполь Герца)	121
§ 48. Гармонически колеблющийся диполь	126
§ 49. Квадрупольное и магнитное дипольное излучение	128
§ 50. Радиационное поле. Излучение ускоренно, но медленно движущегося заряда	130
§ 51. Исторические замечания	131

Глава IV. Движение зарядов в электромагнитном поле. Пределы применимости классической электродинамики

§ 52. Уравнения движения заряженной частицы в поле. Функция Лагранжа	133
§ 53. Движение заряда в постоянном электрическом поле	136
§ 54. Движение заряда в магнитном поле	137
§ 55. Изменение функции Лагранжа финитной системы частиц при внесении ее во внешнее поле. Теорема Лармора и индуцированный магнитный момент	138
§ 56. Энергия и импульс медленно движущегося заряда. Электромагнитная масса	142
§ 57. Реакция поля, действующая на ускоренно, но медленно движущийся заряд	144
§ 58. Естественная ширина спектральных линий	147
§ 59. Рассеяние света свободным зарядом	150
§ 60. Рассеяние коротких волн	152

§ 61. Рассеяние длинных волн	155
§ 62. Рассеяние квазиупруго связанным зарядом	157
§ 63. Пределы применимости микроскопической электродинамики. Понятие о квантовой электродинамике	158
§ 64. Исторические замечания	161

Ч а с т ь в т о р а я

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Г л а в а V. Общие законы макроскопического электромагнитного поля

§ 65. Микроскопическое и макроскопическое электромагнитное поле	162
§ 66. Макроскопические (усредненные) величины	163
§ 67. Вторая группа уравнений Максвелла. Вектор магнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея	165
§ 68. Свободные и связанные заряды	166
§ 69. Векторы электрической поляризации и электрической индукции. Теорема Гаусса	168
§ 70. Вектор намагничивания и макроскопическое магнитное поле. Связанные магнитные заряды	170
§ 71. Материальные соотношения. Электрические свойства тел	174
§ 72. Магнетики	177
§ 73. Обобщенный закон Ома	178
§ 74. Условия на границе двух тел	180
§ 75. Полная система уравнений Максвелла	182
§ 76. Закон сохранения энергии для макроскопического поля	184
§ 77. Силы, действующие на тела в электрическом и магнитном полях	186
§ 78. Исторические замечания	189

Г л а в а VI. Стационарное и квазистационарное макроскопическое поле

§ 79. Электростатика и магнитостатика	191
§ 80. Влияние диэлектрика на электрическое поле	193
§ 81. Неоднородные диэлектрики	194
§ 82. Потенциал поляризованной среды	196
§ 83. Диэлектрический шар в однородном поле	197
§ 84. Энергия электрического поля в диэлектриках	199
§ 85. Постоянные магниты	200
§ 86. Проводник в электрическом поле. Емкость	203
§ 87. Теорема о единственности решения электростатической задачи	206
§ 88. Система двух проводников. Индукционные и потенциальные коэффициенты	207
§ 89. Энергия системы проводников	211
§ 90. Конденсаторы	213
§ 91. Метод электрических изображений	216
§ 92. Механические силы в системе проводников	218
§ 93. Постоянный электрический ток	220
§ 94. Превращение энергии в цепи постоянного тока	223
§ 95. Термоэлектрические явления	224
§ 96. Задача Бурсиана — Лангмюра (плоский диод)	227
§ 97. Влияние магнетика на магнитное поле тока	229
§ 98. Энергия магнитного поля токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции	230
§ 99. Вычисление коэффициентов взаимной индукции и самоиндукции	232
§ 100. Квазистационарные токи	234
§ 101. Процессы установления	237

§ 102. Свободные колебания в цепи с емкостью и самоиндукцией	239
§ 103. Вынужденные колебания (переменный ток)	241
§ 104. Превращения энергии в цепи переменного тока	247
§ 105. Исторические замечания	248

Г л а в а VII. Электромагнитные волны в веществе

§ 106. Общие уравнения поля в веществе при отсутствии дисперсии	251
§ 107. Распространение плоских волн в однородных изотропных изоляторах	253
§ 108. Отражение и преломление волн на границе раздела двух изоляторов. Формулы Френеля	254
§ 109. Распространение плоских волн в проводящих телах	261
§ 110. Теорема Умова — Пойнтинга в комплексной форме	266
§ 111. Распределение переменного тока по сечению проводника (скин-эффект)	267
§ 112. Распространение волн вдоль проводов	272
§ 113. Распространение электромагнитных волн в анизотропных телах . .	277
§ 114. Геометрическая интерпретация. Двусосные и одноосные кристаллы	286
§ 115. Вращение плоскости поляризации	291
§ 116. Исторические замечания	295

Г л а в а VIII. Микроскопическая теория электромагнитных свойств вещества

§ 117. Вводные замечания о строении атома	297
§ 118. Квантовая статистика Ферми	299
§ 119. Общие соображения об электропроводности тел	306
§ 120. Зонная теория твердых тел	308
§ 121. Проводники и изоляторы. Полупроводники	311
§ 122. Эффект Холла и определение концентрации и знака носителей тока	314
§ 123. Свободные электроны в металлах	317
§ 124. Собственные полупроводники	319
§ 125. Примесные уровни. Акцепторы и доноры	323
§ 126. Распределение равновесных носителей в примесных полупроводниках	325
§ 127. Термоэлектронная эмиссия	330
§ 128. Влияние внешнего поля на функцию распределения частиц по состояниям	332
§ 129. Электропроводность и теплопроводность металлов	335
§ 130. Фононы и теплопроводность кристаллической решетки. Длина пробега электронов	339
§ 131. Электропроводность полупроводников	342
§ 132. Теплопроводность полупроводников. Экситоны	347
§ 133. Контактные явления	350
§ 134. Теория выпрямления на контакте двух тел	357
§ 135. Термоэлектрические явления	363
§ 136. Различные типы дефектов в кристаллической решетке. Ионная проводимость кристаллов	369
§ 137. Электронная поляризация и диэлектрический коэффициент	373
§ 138. Отличие действующего поля от макроскопического. Формула Лоренца — Лоренца	375
§ 139. Ионная поляризация	379
§ 140. Тепловая ионная поляризация. Диэлектрические потери	380
§ 141. Тепловая ориентационная поляризация	385
§ 142. Сегнетоэлектрики	387

§ 143. Дисперсия и поглощение света	394
§ 144. Влияние внешнего электрического поля на распространение света (эффект Керра)	397
§ 145. Влияние внешнего магнитного поля. Эффект Фарадея и циклотронный резонанс	403
§ 146. Диамагнетизм	408
§ 147. Парамагнетизм	410
§ 148. Магнитомеханические и магниторезонансные явления	415
§ 149. Парамагнетизм металлов	420
§ 150. Ферромагнетизм	422
§ 151. Антиферромагнетизм	426
§ 152. Исторические замечания	433

Сергей Валентинович Измайлов

КУРС ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Редактор *Л. П. Святков*

Переплет художника *В. Т. Сидоренко*

Художественный редактор *Б. Л. Николаев*

Технический редактор *М. Д. Козловская*

Корректор *Т. А. Кузнецова*

* * *

Сдано в набор 18/IV 1961 г. Подписано к печати 16/I 1962 г. 60 × 90^{1/4}. Печ. л. 27,5.
Уч.-изд. л. 25,79. Тираж 14 000 экз. Заказ № 2465

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

* * *

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена без переплета 77 коп., переплёт 15 коп.