

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный социально-педагогический университет»

Факультет математики, информатики и физики
Научно-учебная лаборатория физики низкоразмерных систем

Е.И. Кухарь

Лекции по учебной дисциплине

«ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Электродинамика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Волгоград, 2017

УДК 537.8

ББК 22.313

К 957

Кухарь, Е.И.

Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. /
Е.И. Кухарь – Волгоград, 2017, 57 стр.

Учебное пособие

Учебное пособие содержит курс лекций по классической электродинамике. Целью учебного пособия является помощь студентам в усвоении материала, а также в подготовке к экзамену по указанному разделу теоретической физики.

Предназначено для студентов старших курсов физических факультетов педагогических вузов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проектной части государственного задания, код проекта: 3.2797.2017/4.6.

© Кухарь Е.И., 2017

© ВГСПУ, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§1. Постулаты специальной теории относительности	5
§2. Преобразования Лоренца	5
§3. Следствия преобразований Лоренца	7
§4. Интервал	11
§5. Четырехмерные векторы и тензоры	12
§6. Релятивистская динамика	15
§7. Заряд в электромагнитном поле	18
§8. Калибровочная инвариантность	20
§9. Уравнения движения в 4-виде	21
§10. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля	22
§11. Движение зарядов в стационарном электромагнитном поле	24
§12. Действие для электромагнитного поля	27
§13. Уравнения Максвелла	29
§14. Следствия уравнений Максвелла	32
§15. Дельта-функция	34
§16. Электростатическое поле	35
§17. Рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле. Формула Резерфорда	40
§18. Постоянное (квазистатическое) магнитное поле	42
§19. Электромагнитные волны	46
§20. Метод запаздывающих потенциалов	47
§21. Дипольное излучение	51
Перечень вопросов к экзамену	54
Список литературы	57

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие содержит курс лекций по классической электродинамике. Существует большое количество учебников по указанному разделу теоретической физики [1–8], в которых соответствующий материал представлен широко и полно. Тем не менее, большой объем материала, содержащийся в классических учебниках, может вызвать у студентов некоторые трудности в тех случаях, когда необходимо повторение материала в краткие сроки, например, перед подготовкой к экзамену. В связи с этим возникает потребность в учебном пособии, изложение теоретического материала в котором удовлетворяет следующим условиям:

- отражение наиболее важных моментов, на которые следует обратить внимание;
- наличие подробных математических преобразований, приводящих к количественной форме физических законов, описывающих те или иные явления;
- максимальное соответствие содержания, используемых обозначений, последовательности и логики изложения фактическому содержанию лекций.

Основной целью настоящего учебного пособия является помощь студентам в усвоении материала и в подготовке к экзамену по дисциплине "Основы теоретической физики". Пособие также позволит восполнить пробелы, если таковые возникли после прослушивания лекций по данному предмету. Для наиболее же полного и всестороннего понимания курса следует обратиться к классическим учебникам [1–8].

Содержание учебного пособия соответствует программе дисциплины "Основы теоретической физики" для студентов педагогических вузов, обучающихся по направлению "Физика". Предназначено для студентов старших курсов физических факультетов педвузов. Оно может оказаться полезным при повторении курса и подготовке к вступительным экзаменам в аспирантуру.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проектной части государственного задания, код проекта: 3.2797.2017/4.6.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 1. Постулаты специальной теории относительности

Опыт показывает [9–11]:

(1) справедливость принципа относительности: все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (ИСО), т.е. уравнения, описывающие законы природы инвариантны (inv) относительно преобразований координат и времени;

(2) справедливость теории близкодействия: если с одной из взаимодействующих частиц происходит изменение, то на другой частице это отражается спустя конечное время $\tau = r/c$, где r – расстояние между частицами, c – скорость сигнала, являющаяся конечной предельной величиной, не зависящей от выбора ИСО: $c = \text{inv}$.

Существует процесс – распространение света – для объяснения которого сформировались две концепции. Корпускулярная теория удовлетворяет требованию (1), но классический закон преобразования скоростей не позволяет объяснить свойство (2).

Волновая теория, основанная на уравнениях Максвелла (УМ), требует конечности скорости света: $c \sim 3 \cdot 10^{10}$ см/с, что удовлетворяет свойству (2), но УМ не инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, что противоречит требованию (1).

Выводы:

- нарушается классический закон преобразования скоростей: $\mathbf{v} \neq \mathbf{V} + \mathbf{v}'$;
- нарушаются преобразования Галилея;
- время не является инвариантом по отношению к преобразованиям ИСО.

§ 2. Преобразования Лоренца

Из принципа относительности (постулат (1)) следует, что преобразования координат-времени являются линейными:

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta t' , \\ t = \lambda x' + \mu t' , \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ – функции \mathbf{V} – скорости ИСО.

Пусть в начальный момент времени начало подвижной ИСО K' совпадает с началом неподвижной ИСО K – точкой O , из которой пущен световой сигнал. Тогда, согласно принципу инвариантности скорости света (постулат (2)), для положительного направления оси Ox имеем: $x - ct = 0$ и $x' - ct' = 0$, и для отрицательного направления оси Ox : $x + ct = 0$ и $x' + ct' = 0$. Последние соотношения позволяют записать: $x - ct = a(x' - ct')$

и $x + ct = b(x' + ct')$. Тогда из (2.1) следует, что

$$\alpha = \frac{a+b}{2} = \mu, \quad \lambda = \frac{a-b}{2c} = \frac{\beta}{c^2},$$

и вместо системы (2.1) получим:

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta t' , \\ t = \frac{\beta}{c^2} x' + \alpha t' . \end{cases} \quad (2.2)$$

Рассмотрим движение начала отсчета ИСО K' в ИСО K : $x' = 0 \Rightarrow x = Vt$. Из этого условия находим: $\beta = V\alpha$, тогда вместо (2.2) имеем:

$$\begin{cases} x = \alpha (x' + Vt') , \\ t = \alpha \left(\frac{V}{c^2} x' + t' \right) . \end{cases} \quad (2.3)$$

Пусть теперь $t' = 0$, тогда $x = \alpha(V)x'$. Если изменить направление движения ИСО K' на противоположное, то получим: $x = \alpha(-V)x'$. Меняя дополнительно направление осей Ox и Ox' , имеем: $-x = -\alpha(-V)x'$ или $x = \alpha(-V)x'$. Но одновременное изменение направлений скорости ИСО и координатных осей приводит к исходной ситуации, следовательно функция $\alpha(V)$ является четной: $\alpha(-V) = \alpha(V)$.

Обратные преобразования координат-времени получаются из (2.3) путем замены: $V \rightarrow -V$. Учитывая четность функции $\alpha(V)$, запишем:

$$\begin{cases} x' = \alpha (x - Vt) , \\ t' = \alpha \left(-\frac{V}{c^2} x + t \right) . \end{cases} \quad (2.4)$$

Разрешая систему (2.4) относительно переменных x и t , получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\alpha \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)} , \\ t = \frac{\frac{V}{c^2} x' + t'}{\alpha \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)} . \end{cases} \quad (2.5)$$

Сравнивая (2.3) и (2.5), находим:

$$\alpha(V) = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Также отметим, что поперечные по отношению к скорости ИСО координаты не меняются:

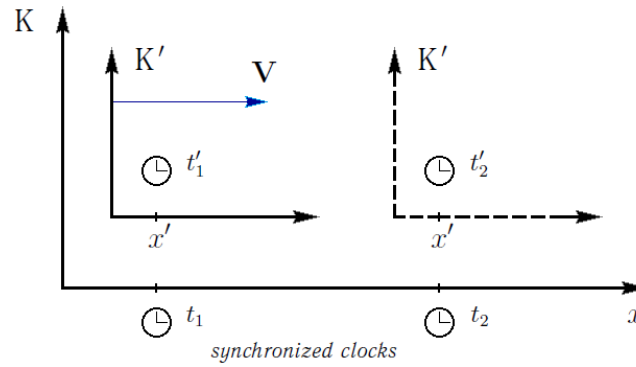


Рис. 1.

$y = y'$ и $z = z'$. Таким образом, окончательно получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & y = y', \quad z = z', \\ t = \frac{\frac{V}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Преобразования (2.6) называются *преобразованиями Лоренца*. Раскладывая в ряд по параметру V/c формулы (2.6) и пренебрегая в случае малых скоростей ($V \ll c$) слагаемыми, содержащими множители V/c в степени 2 и выше, получим преобразования Галилея.

§ 3. Следствия преобразований Лоренца

(1) Релятивистское изменение промежутков времени

Пусть два события происходят в точке с фиксированной координатой в ИСО K' ($x' = \text{fix}$), движущейся со скоростью V относительно ИСО K (рис. 1). Согласно (2.6), для моментов времени этих событий в ИСО K можно записать:

$$t_1 = \frac{\frac{V}{c^2}x' + t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{\frac{V}{c^2}x' + t'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.2)$$

Пусть частица движется с произвольно меняющейся скоростью $v(t)$. Для малых промежутков времени dt систему отсчета, связанную с такой частицей можно считать ИСО. Тогда, согласно (3.2), имеем

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \quad (3.3)$$

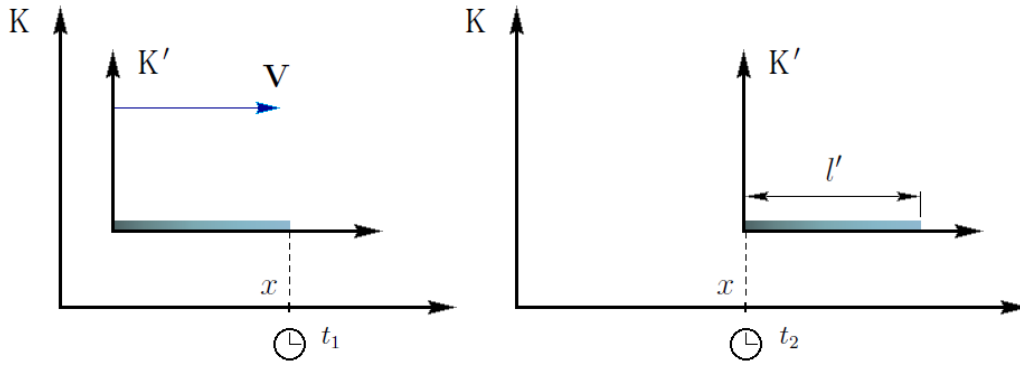


Рис. 2.

Промежуток времени между двумя событиями, измеренный в неинерциальной системе отсчета, связанной с частицей, всегда меньше промежутка времени между теми же событиями, измеренного в неподвижной ИСО:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt < t_2 - t_1. \quad (3.4)$$

(2) Релятивистское изменение расстояний

Пусть в ИСО К мимо точки с фиксированной координатой ($x = \text{fix}$) проходит отрезок, имеющий в ИСО К', связанной с этим отрезком, длину l (рис. 2). Время прохождения начала и конца отрезка в ИСО К мимо точки x обозначим соответственно t_1 и t_2 . В ситуации, когда $x = \text{fix}$, ввиду равноправности ИСО при одинаковых условиях, вместо (3.2) следует записать:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.5)$$

Умножив обе части (3.5) на скорость отрезка, получим:

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (3.6)$$

Для релятивистского изменения объема имеем:

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{V}' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (3.7)$$

При движении объемного тела со скоростью V вдоль горизонтальной оси относительно неподвижной ИСО К, данное тело будет повернутым на угол ϕ , удовлетворяющим условию $\sin \phi = V/c$ (рис. 3).

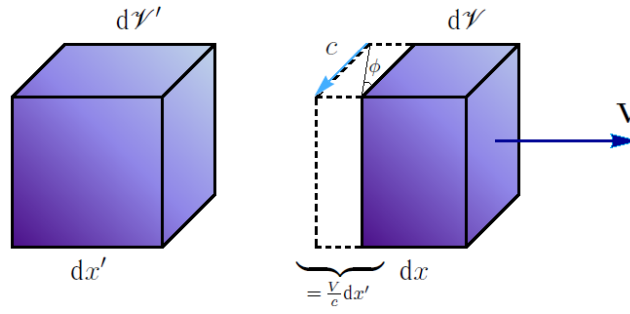


Рис. 3.

(3) Релятивистское преобразование скоростей

Пусть частица движется в ИСО К со скоростью v_x . Относительно подвижной ИСО К' скорость этой частицы равна v'_x . Определим связь между этими скоростями. С помощью первого уравнения системы (2.6) вычисляем:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{v'_x + V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

С помощью второго уравнения системы (2.6) заменим находим:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (3.10)$$

Для поперечной по отношению к оси Ox составляющей скорости имеем

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^{-1} = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (3.11)$$

(4) Относительность одновременности

Пусть два события в ИСО К произошли в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. В подвижной ИСО К' координаты и время этих же событий равны (x'_1, t'_1) и (x'_2, t'_2) . С помощью преобразований Лоренца (2.6) находим

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{V}{c^2} (x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.12)$$

Если указанные события происходят одновременно в ИСО K' ($t'_1 = t'_2$) и являются пространственно разделенными в K' ($x'_1 \neq x'_2$), то эти события не будут происходить одновременно в ИСО K . Действительно, при ($t'_1 = t'_2$) из (3.12) следует

$$t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2} \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \neq 0. \quad (3.13)$$

Причем знак разности $t_2 - t_1$, как это видно из (3.13) определяется знаком разности координат $x'_2 - x'_1$. Если два события, происходящие в точках с координатами x'_1 и x'_2 в моменты времени t'_1 и t'_2 , причинно связаны, т.е. можно записать $x'_2 - x'_1 = v'(t'_2 - t'_1)$, где v' – скорость сигнала (отклика), то знак разности $t_2 - t_1$ от выбора ИСО зависеть не будет, что удовлетворяет принципу причинности. Действительно, из (3.12) следует

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1) \frac{1 + \frac{v'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.14)$$

(5) Эффект Доплера

Пусть плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси Ox . Наблюдатель, связанный с ИСО K' , движется со скоростью V . Фаза волны является инвариантом: $\omega t - k_x x = \text{inv}$, или

$$\omega t - k_x x = \omega' t' - k'_x x'. \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.15) Преобразования Лоренца (2.6), получаем

$$\left(\omega - \frac{\omega' + k'_x V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) t - \left(k_x - \frac{k'_x + \frac{V}{c^2} \omega'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) x = 0. \quad (3.16)$$

Поскольку время t и координата x являются в (3.16) произвольными, можно записать

$$\begin{cases} \omega = \frac{\omega' + k'_x V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ k_x = \frac{k'_x + \frac{V}{c^2} \omega'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3.17)$$

Для частоты волны, измеренной относительно подвижной системы отсчета K' получаем следующую формулу

$$\omega' = \frac{\omega - k_x V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (3.18)$$

где составляющая волнового вектора k_x равна $k_x = k \cos \theta = (\omega/c) \cos \theta$, θ – угол, определяющий направление движения наблюдателя в неподвижной ИСО К по отношению к оси Ox . Таким образом, для частоты ω' имеем

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \quad (3.19)$$

§ 4. Интервал

Пусть два события происходят в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в моменты времени t_1 и t_2 . Величина, равная

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} , \quad (4.1)$$

называется *интервалом* между данными событиями. Для бесконечно малых величин имеем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 . \quad (4.2)$$

С помощью преобразований Лоренца можно показать, что $ds = \text{inv}$.

Запишем интервал для мгновенной ИСО. Пусть частица движется со скоростью $\mathbf{v}(t)$, произвольно зависящей от времени. В течение малого промежутка времени скорость можно считать неизменной и связать с частицей ИСО. Подставляя в (4.2) перемещение частицы $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t) dt$, получим

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} . \quad (4.3)$$

Если частица проходит две точки пространства соответственно в моменты времени t_1 и t_2 , то интервал между этими точками равен

$$s_{12} = c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt . \quad (4.4)$$

§ 5. Четырехмерные векторы и тензоры

Четырехмерным вектором (*4-вектором*) A_i называется совокупность 4-х величин ($i = 1 - 4$), которые при переходе от одной ИСО к другой преобразуются с помощью соотношений:

$$A_1 = \frac{A'_1 - i\beta A'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \frac{i\beta A'_1 + A'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.1)$$

где $\beta = V/c < 1$.

Множество 4-векторов A_i называется *пространством Минковского*. Соотношения (5.1), называемые *преобразованиями Лоренца*, можно переписать в виде суммы

$$A_i = \alpha_{ik} A'_k, \quad (5.2)$$

где α_{ik} – матрица преобразований, равная

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Легко проверить, что $\det \alpha_{ik} = 1$. Следовательно, матрица, обратная (5.3), равна $\alpha_{ik}^{-1} = \alpha_{ik}^T = \alpha_{ki}$. В результате можно записать следующие соотношения

$$\alpha_{ik} \alpha_{nk} = \delta_{in}, \quad \alpha_{ki} \alpha_{kn} = \delta_{in}, \quad (5.4)$$

где δ_{in} – символ Кронекера. Если независимо от преобразований Лоренца установлено, что A_i – 4-вектор, то для A_i можно записать соотношения (5.2)

Теорема. *Скалярное произведение 4-векторов является инвариантом, $A_i B_i = \text{inv}$.*

Действительно, $A_i B_i = \alpha_{ik} \alpha_{in} A'_k B'_n = \delta_{kn} A'_k B'_n = A'_k B'_k$.

Теорема. *Уравнение, записанное в 4-виде инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца.*

Действительно, если верно выражение $A_i = 0$, то, согласно (5.2), $\alpha_{ik} A'_k = 0$. Умножив обе части последнего равенства на α_{in} и воспользовавшись соотношением (5.4), получим $A'_n = 0$, т.е. исходное остается справедливым относительно подвижной ИСО K' .

Четырехмерным тензором (*4-тензором*) A_{ik} 2-го ранга называется совокупность 16 величин ($i, k = 1 - 4$), которые при переходе от одной ИСО к другой преобразуются с помощью соотношений:

$$A_{ik} = \alpha_{in} \alpha_{ks} A'_{ns}, \quad (5.5)$$

т.е. также как произведения соответствующих компонент 4-векторов ($A_{ik} \rightarrow A_i A_k$).

Симметричный тензор ($A_{ik} = A_{ki}$) имеет 10 независимых компонент. *Антисимметричный тензор* ($A_{ik} = -A_{ki}$) имеет 6 независимых компонент.

Теорема. *Любой тензор 2-го ранга можно представить как сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Действительно, справедливо

$$A_{ik} = \frac{1}{2} (A_{ik} + A_{ki}) + \frac{1}{2} (A_{ik} - A_{ki}) .$$

Теорема. *Символ Кронекера является тензором 2-го ранга.*

Действительно, согласно (5.4), имеем $\alpha_{is}\alpha_{kn}\delta_{sn} = \alpha_{in}\alpha_{kn} = \delta_{ik}$.

Теорема. *Произведение симметричного и антисимметричного тензоров со сверткой по двум индексам дает ноль.*

Действительно, пусть $A_{ik} = A_{ki}$, $B_{ik} = -B_{ki}$. Следовательно, $A_{ik}B_{ik} = -A_{ki}B_{ki}$. Переобозначив индексы справа в последнем равенстве, запишем $A_{ik}B_{ik} = -A_{ik}B_{ik}$ или $A_{ik}B_{ik} = 0$.

Теорема. *Преобразования Лоренца приводят к повороту в пространстве Минковского на угол $i\phi$, где*

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} . \quad (5.6)$$

Обозначив $\cos(i\phi) \equiv \alpha_{11} > 1$, найдем $\sin(i\phi) \equiv \sqrt{1 - \cos^2(i\phi)} = \alpha_{14}$. Тогда вместо (5.1) получим следующую систему

$$\begin{cases} A_1 = A'_1 \cos(i\phi) - A'_4 \sin(i\phi) , \\ A_4 = A'_1 \sin(i\phi) + A'_4 \cos(i\phi) , \end{cases} \quad (5.7)$$

определяющую поворот пространства на угол $i\phi$, для которого справедливо $\operatorname{tg}(i\phi) = i\beta$. Отсюда следует соотношение (5.6).

Введем совокупность четырех величин:

$$x_i = (\mathbf{r} , \quad ict) . \quad (5.8)$$

Согласно (2.6) $x_i = \alpha_{ik}x'_k$, т.е. величина x_i образует 4-вектор, называемый *4-радиус-вектором*. Точка, положение которой задается 4-радиус-вектором называется *мировой точкой*. Мировая точка изображает событие, произошедшее в точке \mathbf{r} в момент времени t .

Теорема. *Квадрат интервала равен квадрату расстояния между мировыми точками, взятому с противоположным знаком*

$$dx_i^2 \equiv dx_i dx_i = |d\mathbf{r}|^2 - c^2 dt^2 = -ds^2 . \quad (5.9)$$

4-вектором скорости называется отношение

$$u_i = \frac{dx_i}{ds} . \quad (5.10)$$

Подставляя (4.3) и (5.8) в (5.10), получаем для 4-скорости

$$u_i = \frac{(\mathbf{v}/c, \quad i)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (5.11)$$

Легко показать, что

$$u_i^2 = -1 . \quad (5.12)$$

4-вектором ускорения называется отношение

$$w_i = \frac{du_i}{ds} . \quad (5.13)$$

Теорема. *4-ускорение всегда перпендикулярно 4-скорости.*

Утверждение следует из соотношения (5.12).

4-градиентом называется оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\nabla, \quad \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right) . \quad (5.14)$$

Можно показать, что компоненты 4-градиента образуют 4-вектор, т.е. справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial x'_k} . \quad (5.15)$$

Оператором д'Аламбера называется дифференциальный оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \text{inv} . \quad (5.16)$$

§ 6. Релятивистская динамика

Используем принцип наименьшего действия.

(1) Для любой механической системы существует интеграл \mathcal{S} , называемый действием и равный

$$\mathcal{S} = \int_{(AB)} \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) dt, \quad (6.1)$$

где $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$ – функция Лагранжа системы.

(2) Между положениями $x_i^{(1)}$ при $t = t_1$ и $x_i^{(2)}$ при $t = t_2$ система движется так, что действие имеет минимум: $\delta\mathcal{S} = 0$.

Из принципа относительности следует, что $\mathcal{S} = \text{inv}$, поэтому действие должно выражаться через релятивистские инварианты. Для свободной частицы можно записать

$$\mathcal{S} = \alpha \int_{(AB)} ds. \quad (6.2)$$

Подставляя (4.3) в (6.2), получаем

$$\mathcal{S} = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (6.3)$$

Сравнивая (6.3) с (6.1) и учитывая, что прибавление константы к функции Лагранжа не меняет изучаемую механическую систему, запишем

$$\mathcal{L}(v) = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \lambda. \quad (6.4)$$

Согласно принципу соответствия при $v \ll c$ выражение (6.4) должно давать известную формулу $\mathcal{L}(v) = mv^2/2$. Из этого условия следует, что $\alpha = -mc$ и $\lambda = -\alpha c$. Окончательно функция Лагранжа свободной частицы имеет вид

$$\mathcal{L}(v) = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (6.5)$$

С помощью (6.5) найдем импульс частицы

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.6)$$

Для энергии свободной частицы получаем

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.7)$$

Кинетическая энергия частицы равна $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} - mc^2$. Кроме того, справедливо

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2}. \quad (6.8)$$

Введем 4-импульс

$$p_i = mc u_i. \quad (6.9)$$

Компоненты 4-импульса имеют вид

$$p_i = \left(\mathbf{p}, \quad \frac{i\mathcal{E}}{c} \right). \quad (6.10)$$

С помощью формул (6.9) и (6.10) также можно показать справедливость (6.8). Легко видеть, что p_i – 4-вектор, следовательно для компонент p_i можно записать преобразования Лоренца

$$p_i = \alpha_{ik} p'_k. \quad (6.11)$$

или

$$\begin{cases} p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \\ \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad (6.12)$$

4-тензором момента импульса называется

$$M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i. \quad (6.13)$$

Как видно из (6.13) 4-момент импульса представляет собой антисимметричный тензор, и, следовательно, имеет 6 независимых компонент. Компоненты тензора (6.13) равны

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icN_x \\ -M_z & 0 & M_x & icN_y \\ M_y & -M_x & 0 & icN_z \\ -icN_x & -icN_y & -icN_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

где $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ – вектор момента импульса частицы, $\mathbf{N} = (\mathcal{E}/c^2) \mathbf{r} - \mathbf{p}t$ – лоренцевский

момент. Преобразования Лоренца для 4-тензора момента импульса имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x = N'_x , \\ N_y = \frac{N'_y - \frac{V}{c^2} M'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \\ N_z = \frac{N'_z + \frac{V}{c^2} M'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = M'_x , \\ M_y = \frac{M'_y + V N'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \\ M_z = \frac{M'_z - V N'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Рассмотрим замкнутую систему нескольких частиц. Момент импульса такой системы остается величиной постоянной. Следовательно $\sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} = \text{const}$, или

$$\frac{1}{c^2} \sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} - t \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} = \text{const} , \quad (6.16)$$

где α – номер частицы. Разделим обе части уравнения (6.16) на энергию системы $\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} = \text{const}$. В результате получим

$$\frac{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}} - \frac{c^2 \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}} t = \text{const} . \quad (6.17)$$

Из (6.17) следует, что в указанных условиях точка с радиус-вектором

$$\mathbf{R}_c = \frac{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}} \quad (6.18)$$

движется равномерно и прямолинейно. Следовательно, радиус-вектор (6.18) указывает положение центра масс рассматриваемой системы.

Полная энергия системы частиц (составного тела) равна

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} c^2 + \sum_{\alpha} \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_p , \quad (6.19)$$

где $\mathcal{E}_{k\alpha}$ – кинетическая энергия частицы с номером α , \mathcal{E}_p – потенциальная энергия взаимодействия частиц. С помощью (6.19) определяем массу составного тела

$$m = \sum_{\alpha} m_{\alpha} + \frac{1}{c^2} \left(\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_p \right) . \quad (6.20)$$

Если выполняется неравенство

$$\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_p > 0 ,$$

то тело распадается на составные части без участия внешних сил. В этом случае масса исходного тела больше массы составных частей

$$m > \sum_{\alpha} m_{\alpha} .$$

Неравенство

$$\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_p < 0$$

соответствует связанной системе. В этом случае для распада такой системы ей необходимо сообщить энергию, превышающую энергию связи

$$\mathcal{E}_0 = \left| \sum_{\alpha} \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_p \right| .$$

Тогда масса исходного тела будет меньше массы составных частей

$$m < \sum_{\alpha} m_{\alpha} .$$

Таким образом дефект массы равен $\Delta m = \mathcal{E}_0/c^2$.

§ 7. Заряд в электромагнитном поле

Заряженные частицы взаимодействуют друг с другом посредством ЭМ поля: одна частица создает вокруг себя поле, со стороны которого действует некоторая сила на любую другую заряженную частицу, помещенную в это поле. Скорость распространения поля в пространстве совпадает со скоростью света c . Из-за конечности скорости света сила, действующая на частицу в данный момент, не определяется состоянием взаимодействующих частиц в этот же момент времени. Так изменение заряда одной частицы отражается на значении силы, действующей на другую частицу, лишь спустя промежуток времени, равный $\tau = r/c$, где r – расстояние между частицами. Это позволяет говорить об ЭМ поле как о физической реальности, материальной субстанции наряду с веществом.

Как показывает опыт, свойства частицы в отношении взаимодействия с ЭМ полем определяются одним скалярным параметром e , называемым *электрическим зарядом*. В свою очередь свойства ЭМ поля характеризуются 4-вектором $A_i(\mathbf{r}, t)$, называемым 4-потенциалом поля. Компоненты 4-потенциала поля равны

$$A_i = (\mathbf{A}, i\varphi) , \quad (7.1)$$

где \mathbf{A} и φ – векторный и скалярный потенциалы ЭМ поля соответственно.

Действие для заряженной частицы, движущейся в ЭМ поле, равно следующей сумме

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{ch}} + \mathcal{S}_{\text{ch-f}} + \mathcal{S}_{\text{f}} , \quad (7.2)$$

где \mathcal{S}_{ch} – действие, записанное для свободного заряда и равное (6.2), $\mathcal{S}_{\text{ch-f}}$ – действие, описывающее взаимодействие частицы и поля, \mathcal{S}_{f} – действие, записанное для поля, в отсутствие зарядов.

Считаем здесь ЭМ поле заданным так, что $\delta\mathcal{S}_{\text{f}} = 0$. Для того чтобы записать действие $\mathcal{S}_{\text{ch-f}}$, заметим, что величина $\mathcal{S}_{\text{ch-f}}$ должна включать перемещение частицы dx_i , ее заряд и 4-потенциал A_i . Кроме того, $\mathcal{S}_{\text{ch-f}} = \text{inv}$. Этим требованиям удовлетворяет следующее выражение

$$\mathcal{S}_{\text{ch-f}} = \frac{e}{c} \int A_i dx_i . \quad (7.3)$$

Используя (6.2) и (7.3), запишем действие для случая заданного ЭМ поля:

$$\mathcal{S} = \int_{\text{AB}} \left(-mc ds + \frac{e}{c} A_i dx_i \right) . \quad (7.4)$$

Из (7.4) определяем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi . \quad (7.5)$$

С помощью (7.5) находим, что обобщенный канонический импульс равен

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} , \quad (7.6)$$

где \mathbf{p} – импульс свободной частицы (6.6). Энергия заряда в ЭМ поле имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi . \quad (7.7)$$

Из принципа минимума действия следуют уравнения Лагранжа (уравнения движения):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = 0 . \quad (7.8)$$

Подставляя (7.6) в (7.8), получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{v} , \text{rot } \mathbf{A}] + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} - e \text{grad } \varphi . \quad (7.9)$$

Применяя в (7.9) следующую формулу

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} ,$$

запишем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] . \quad (7.10)$$

Таким образом, сила, действующая на заряд со стороны ЭМ поля состоит из двух частей: слагаемого, не зависящего от скорости, и слагаемого, пропорционального скорости заряда.

Введем силовые характеристики ЭМ поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi , \quad (7.11)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} . \quad (7.12)$$

Вектор \mathbf{E} , определяемый формулой (7.11) называется *напряженностью электрического поля*, вектор \mathbf{H} , определяемый формулой (7.12) называется *напряженностью магнитного поля*. Окончательно уравнение движения заряда в ЭМ поле имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] . \quad (7.13)$$

Используя (6.8), найдем скорость изменения энергии заряда в ЭМ поле.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c \frac{d}{dt} \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (7.14)$$

После подстановки (7.13) в (7.14), имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} . \quad (7.15)$$

Как видно из (7.15) работу по перемещению электрического заряда совершает только электрическая составляющая ЭМ поля.

§ 8. Калибровочная инвариантность

Физически ЭМ поле определяется тем и только тем, как оно действует на заряд. Следовательно, два ЭМ поля физически тождественны, если их векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} совпадают. Согласно определению этих векторов (7.11) и (7.12) одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы \mathbf{A} и φ . Действительно, пусть $f(\mathbf{r}, t)$ – произвольная функция. Прибавим 4-градиент этой функции к 4-потенциалу поля:

$$A'_i = A_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \quad (8.1)$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &\equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \text{grad } \varphi' = \mathbf{E} \\ \mathbf{H}' &\equiv \text{rot } \mathbf{A}' = \mathbf{H}\end{aligned}$$

Таким образом, 4-вектор потенциала A_i определен с точностью до прибавления 4-градиента произвольной скалярной функции. Данное свойство 4-потенциала (называемое *калибровочной инвариантностью*) становится также понятным, если вычислить вариацию действия для системы «заряд–поле» с учетом прибавления 4-градиента:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_{\text{ch-f}} &= \frac{e}{c} \int_{\text{AB}} A'_i dx_i = \frac{e}{c} \int_{\text{AB}} A_i dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \\ &= \frac{e}{c} \int_{\text{AB}} A_i dx_i + \frac{e}{c} \int_{f(A)}^{f(B)} df = \mathcal{S}_{\text{ch-f}} + \frac{e}{c} (f(A) - f(B)) .\end{aligned}$$

Поскольку $\delta f(A) = 0$ и $\delta f(B) = 0$, то $\delta \mathcal{S}'_{\text{ch-f}} = \delta \mathcal{S}_{\text{ch-f}}$. Следовательно, слагаемое $\partial_{x_i} f$ не меняет уравнений движений. Преобразования $A'_i = A_i + \partial_{x_i} f$ называются *градиентными* (калибровочными). Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} инвариантны относительно калибровочных преобразований. Физический смысл имеют только инвариантные относительно этих преобразований величины.

§ 9. Уравнения движения в 4-виде

Для определения законов движения зарядов в заданном ЭМ поле воспользуемся принципом наименьшего действия: $\delta \mathcal{S} = 0$, где

$$\delta \mathcal{S} = \int_{\text{AB}} -mc \delta(ds) + \frac{e}{c} \delta(A_i dx_i) . \quad (9.1)$$

Согласно (5.10),

$$\delta(ds) = \delta\left(\sqrt{-dx_i^2}\right) = -\frac{dx_i \delta(dx_i)}{\sqrt{-dx_i^2}} = -\frac{dx_i}{ds} \delta(dx_i) = -u_i \delta(dx_i) . \quad (9.2)$$

Подставляя (9.2) в (9.1), получаем

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{S} &= \int_{\text{AB}} mc u_i \delta(dx_i) + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i + \frac{e}{c} A_i \delta(dx_i) = \int_{\text{AB}} \left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) d(\delta x_i) + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i = \\ &= \underbrace{\left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i \Big|_A^B}_{=0} + \int_{\text{AB}} -d \left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i = \\ &= \int_{\text{AB}} \left(-mc du_i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k \right) \delta x_i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \delta x_i dx_k = \\ &= \int_{\text{AB}} \left(-\frac{dp_i}{ds} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k \right) \delta x_i ds .\end{aligned} \quad (9.3)$$

В (9.3) учтено, что $\delta x_i(A) = \delta x_i(B) = 0$. Из условия $\delta S = 0$ и (9.3) следует

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k. \quad (9.4)$$

Тензором ЭМ поля называется следующий антисимметричный 4-тензор

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \quad (9.5)$$

Используя (9.5), перепишем (9.4)

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \quad (9.6)$$

Выражение (9.6) является уравнением движения заряда в заданном ЭМ поле, записанном в 4-виде. Компоненты тензора (9.5) равны

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

С помощью (9.7) легко проверить, что 4-форма (9.6) содержит в себе уравнения (7.13) и (7.15).

§ 10. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля

Преобразования Лоренца для 4-потенциала имеют вид

$$\begin{cases} A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & A_y = A'_y, & A_z = A'_z, \\ \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad (10.1)$$

Запишем теперь преобразования Лоренца для тензора ЭМ поля $F_{ik} = \alpha_{in}\alpha_{ks}F'_{ns}$. Легко проверить, что для компонент тензора ЭМ поля справедливо

$$\begin{cases} E_x = E'_x, \\ E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = H'_x, \\ H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad (10.2)$$

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть в неподвижной ИСО K' отсутствует магнитное поле $\mathbf{H}' = 0$. Из (10.2) следует, что в подвижной ИСО K напряженность магнитного поля отлична от нуля, а ее компоненты равны ($\mathbf{V} \parallel Ox$)

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{V}{c}E_z, \quad H_z = \frac{V}{c}E_y.$$

или

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{E}]. \quad (10.3)$$

Пусть теперь в K' отсутствует электрическое поле $\mathbf{E}' = 0$. Из (10.2) следует, что в подвижной ИСО K напряженность электрического поля отлична от нуля, а ее компоненты равны

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{V}{c}H_z, \quad E_z = -\frac{V}{c}H_y.$$

или

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]. \quad (10.4)$$

Таким образом, если в некоторой ИСО векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны, но не равны ($V < c$), то существует такая ИСО K , относительно которой поле является либо электрическим, либо магнитным и наоборот.

Значения следующих выражений не зависят от выбора ИСО и называются *инвариантами поля*:

$$\begin{cases} E^2 - H^2 = \text{inv}, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv}. \end{cases} \quad (10.5)$$

Нижеприведенные утверждения являются следствием соотношений (10.5):

- Если в некоторой ИСО K' $E' > H'$, то для любой ИСО K справедливо: $E > H$,
- $\exists K' : E' < H' \Leftrightarrow \forall K : E < H$,
- $\exists K' : E' = H' \Leftrightarrow \forall K : E = H$,
- $\exists K' : E' \perp H' \wedge E' > H' \Rightarrow \exists K : H = 0$,
- $\exists K' : E' \perp H' \wedge E' < H' \Rightarrow \exists K : E = 0$,
- $\exists K' : E' \perp H' \wedge E' = H' \Rightarrow \forall K : E \perp H \wedge E = H$.

В последнем случае никаким выбором ИСО нельзя убрать ни магнитную составляющую, ни электрическую составляющую ЭМ поля. Особенности преобразований электрического и магнитного полей позволяют говорить о существовании единого ЭМ поля.

§ 11. Движение зарядов в стационарном электромагнитном поле

Для стационарного ЭМ поля выполняется $\partial_t \mathbf{A} = \partial_t \varphi = 0$. В этом случае

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Возможные калибровки для скалярного потенциала: $\varphi(\infty) = 0$ или $\varphi(0) = 0$. Потенциал φ может быть записан следующим образом

$$\varphi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (11.1)$$

Для однородного электрического поля имеем

$$\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}. \quad (11.2)$$

Для векторного потенциала воспользуемся теоремой Стокса из векторного анализа

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}, \quad (11.3)$$

где L – замкнутый контур, S – площадка, ограниченная контуром L (рис. 4), $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} \cdot dS$, dS – элемент площади, \mathbf{n} – нормальный орт к площадке S . Для однородного магнитного поля вместо (11.3) запишем

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}. \quad (11.4)$$

Площадь поверхности S равна

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{(L)} [\mathbf{r}, d\mathbf{r}]. \quad (11.5)$$

В силу произвольности контура L из (11.4) и (11.5) следует

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}, \mathbf{r}]. \quad (11.6)$$

(1) Рассмотрим движение заряда в стационарном электрическом поле $\mathbf{E} = (E, 0)$. Для начального импульса $\mathbf{p}(0) = (0, p_0)$ уравнения движения дают $\mathbf{p}(t) = (eEt, p_0)$. Используя второе соотношение (6.8), запишем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{c^2 t}{\sqrt{a^2 + c^2 t^2}}, \\ \dot{y} = \frac{c^2 \tau}{\sqrt{a^2 + c^2 t^2}}, \end{cases} \quad (11.7)$$

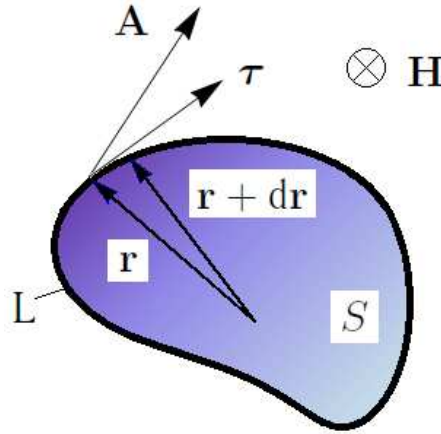


Рис. 4.

где обозначено $a = \mathcal{E}_0/eE$, $\tau = p_0/eE$, $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$. Решая (11.7), получаем

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1 + \frac{c^2t^2}{a^2}}, \\ y = c\tau \ln\left(\frac{ct}{a} + \sqrt{1 + \frac{c^2t^2}{a^2}}\right) \end{cases} \quad (11.8)$$

Из (11.8) находим уравнение траектории частицы

$$y(x) = c\tau \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$$

или

$$x(y) = a \operatorname{ch} \frac{y}{c\tau}. \quad (11.9)$$

(2) Пусть теперь частица движется в однородном магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Так как магнитное поле не совершает работы по перемещению заряда, \mathcal{E} , p , $v = \text{const}$. Тогда уравнение движения можно записать в следующем виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{ec}{\mathcal{E}} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \quad (11.10)$$

Уравнение (11.10) равносильно системе

$$\dot{v}_x = \frac{ec}{\mathcal{E}} v_y H, \quad \dot{v}_y = -\frac{ec}{\mathcal{E}} v_x H, \quad \dot{v}_z = 0. \quad (11.11)$$

Введем обозначения: $v_{\parallel} \equiv v_z = \text{const}$, $V \equiv v_x + iv_y$, $v_{\perp} \equiv |V| = \text{const}$, $\omega_c = ecH/\mathcal{E}$ – циклотронная частота. Тогда вместо системы (11.11) можно записать $\dot{V} = -i\omega_c V$, откуда

находим $V = V_0 e^{-i\omega_c t}$, где $V_0 = v_{\perp} e^{-i\alpha}$, α – произвольная константа, определяемая начальными условиями. Окончательно получаем $V = V_0 e^{-i(\omega_c t + \alpha)}$. Отделив действительную и мнимую части величины V и проинтегрировав по времени, найдем уравнения траектории частицы

$$\begin{cases} x = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \alpha) , \\ y = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \alpha) , \\ z = v_{\parallel} t . \end{cases} \quad (11.12)$$

Таким образом, заряд в однородном стационарном магнитном поле движется по винтовой линии с осью, параллельной вектору \mathbf{H} . Проекция частицы на плоскость xy описывает окружность $x^2 + y^2 = v_{\perp}^2 / \omega_c^2$ с частотой ω_c .

(3) Рассмотрим ситуацию, когда заряд движется в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$) со скоростью $v \ll c$. Тогда

$$\mathbf{p} \sim m\mathbf{v} , \quad \mathcal{E} \sim mc^2 , \quad \omega_c \sim \frac{eH}{mc} .$$

Считаем, что $\mathbf{v}(0) = 0$. Уравнения движения примут следующий вид

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = eE + \frac{eH}{c} v_y , \\ m\dot{v}_y = -\frac{eH}{c} v_x . \end{cases} \quad (11.13)$$

В комплексной форме имеем

$$\frac{dV}{dt} + i\omega_c V = \frac{eE}{m} . \quad (11.14)$$

Интегрирование в (11.14) дает

$$V = -\frac{ieE}{m\omega_c} (1 - e^{-i\omega_c t}) . \quad (11.15)$$

Отделив в (11.15) действительную и мнимую части и проинтегрировав по времени получим уравнение циклоиды

$$\begin{cases} x = -\frac{eE}{m\omega_c^2} \cos \omega_c t , \\ y = -\frac{eE}{m\omega_c^2} (\omega_c t - \sin \omega_c t) . \end{cases} \quad (11.16)$$

§ 12. Действие для электромагнитного поля

Представим действие для системы «заряженные частицы – ЭМ поле» в виде суммы (7.2), где \mathcal{S}_{ch} – действие, записанное для системы свободных частиц и равное сумме действий, записанных для каждой из частиц:

$$\mathcal{S}_{\text{ch}} = -c \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int ds_{\alpha} . \quad (12.1)$$

Аналогично для слагаемого $\mathcal{S}_{\text{ch-f}}$ запишем

$$\mathcal{S}_{\text{ch-f}} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int A_k(x_{i\alpha}) dx_{k\alpha} . \quad (12.2)$$

Считаем здесь, что движение частиц задано, т.е. $\delta\mathcal{S}_{\text{ch}} = 0$.

Объемной плотностью заряда называется суммарный заряд системы, приходящийся на единицу объема:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow \mathbf{r}} \frac{1}{V} \sum_{\alpha} e_{\alpha} , \quad (12.3)$$

откуда определяем

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} = \int_{(V)} \rho(\mathbf{r}) dV , \quad (12.4)$$

где V – объем, занимаемый системой.

Электрическим током называется упорядоченное движение заряженных частиц. *Плотностью электрического тока* называется величина, численно равная заряду, проходящему за единицу времени через единицу поперечного по отношению к направлению движения заряда сечения:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} , \quad (12.5)$$

где \mathbf{v} – скорость упорядоченного движения. Поток заряда через поверхность S (рис. 5), равный

$$\mathcal{J} = \int_{(S)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} , \quad (12.6)$$

называется *силой тока*.

4-вектором плотности тока называется величина

$$j_k = \rho \frac{dx_k}{dt} = (\mathbf{j} , ic\rho) . \quad (12.7)$$

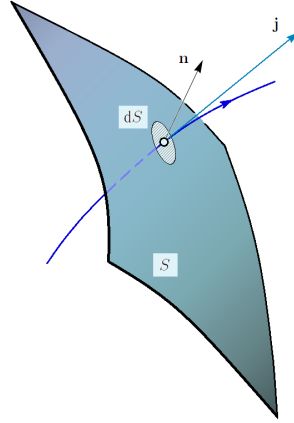


Рис. 5.

С помощью (3.3) и (3.7) легко проверить, что $\rho/dt = \text{inv}$, поэтому компоненты (12.7) составляют 4-вектор. Следовательно, для них можно записать преобразования Лоренца

$$\begin{cases} j_x = \frac{j'_x + V\rho'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & j_y = j'_y, & j_z = j'_z, \\ \rho = \frac{\rho' + \frac{V}{c^2}j'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad (12.8)$$

С помощью формул (12.2), (12.4) и (12.7) запишем выражение для действия $\mathcal{S}_{\text{ch-f}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{ch-f}} &= \frac{1}{c} \iiint \rho A_k dx_k d\mathcal{V} = \frac{1}{c^2} \int \rho \frac{dx_k}{dt} A_k d\Omega = \\ &= \frac{1}{c^2} \int j_k A_k d\Omega, \end{aligned} \quad (12.9)$$

где $d\Omega = c dt d\mathcal{V}$ – элемент 4-объема.

Слагаемое в (7.2), равное \mathcal{S}_f и определяющее свойства ЭМ поля в отсутствие электрических зарядов, должно удовлетворять следующим свойствам: (1) в подынтегральное выражение для \mathcal{S}_f входят функции квадратичные по полю, т.к. именно в этом случае после варьирования результат будет линеен по полю и соответствовать принципу суперпозиции; (2) действие не содержит потенциалы, т.к. они определены неоднозначно; (3) $\mathcal{S}_f = \text{inv}$. Из этих требований следует, что \mathcal{S}_f содержит скалярное произведение $F_{ik}F_{ik} = \text{inv}$. Запишем следующее выражение

$$\mathcal{S}_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}F_{ik} d\Omega. \quad (12.10)$$

Окончательно выражение для действия ЭМ поля в случае заданного движения зарядов имеет вид

$$\mathcal{S} = \frac{1}{c^2} \int \left(j_k A_k - \frac{c}{16\pi} F_{ik}F_{ik} \right) d\Omega. \quad (12.11)$$

§ 13. Уравнения Максвелла

(1) Первая пара УМ

Используя формулы (7.11) и (7.12), а также известные тождества из векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0,$$

получим

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (13.1)$$

Первая пара УМ (13.1) может быть записана в 4-виде

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{kn}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ni}}{\partial x_k} = 0. \quad (13.2)$$

Используя теорему Стокса из векторного анализа

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

запишем первое УМ в интегральной форме

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad (13.3)$$

где величина, равная

$$\Phi_m = \int_{(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S},$$

называется *поток магнитного поля* через поверхность S . Правая часть уравнения (13.3) имеет смысл работы электрического поля по перемещению единичного заряда вдоль неподвижного контура L , т.е. *электродвижущей силы* \mathcal{E} (ЭДС). Если электрическое поле является вихревым, то $\mathcal{E} \neq 0$. С другой стороны тот факт, что $\partial_t \Phi_m \neq 0$, говорит о нестационарности магнитного поля. Таким образом, из (13.3) следует закон ЭМ индукции: переменное магнитное поле индуцирует вихревое электрическое поле.

Используя теорему Гаусса-Остроградского из векторного анализа

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{H} dV,$$

найдем, что поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю (второе УМ в интегральной форме):

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (13.4)$$

Таким образом, силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.

(2) Вторая пара УМ

Считаем движение зарядов заданным ($\delta j_k = 0$). Тогда для нахождения уравнений ЭМ поля используем выражение для действия (12.11), варьируя только потенциалы ЭМ поля A_k :

$$\int \left(j_k \delta A_k - \frac{c}{8\pi} F_{ik} \delta F_{ik} \right) d\Omega = 0 . \quad (13.5)$$

Согласно (9.5)

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i .$$

Тогда вместо (13.5) имеем

$$\int \left(j_k \delta A_k - \frac{c}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k + \frac{c}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right) d\Omega = 0 . \quad (13.6)$$

Меняя в последнем слагаемом (13.6) местами индексы i и k и учитывая антисимметричность тензора ЭМ поля ($F_{ik} = -F_{ki}$), получим

$$\int \left(j_k \delta A_k + \frac{c}{4\pi} F_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k \right) d\Omega = 0 . \quad (13.7)$$

Преобразуем (13.7) к следующему виду

$$\int \left(j_k - \frac{c}{4\pi} \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_i} \right) \delta A_k d\Omega + \frac{c}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{ki} \delta A_k) d\Omega = 0 . \quad (13.8)$$

Для второго слагаемого (13.8) применяем 4-теорему Гаусса-Остроградского:

$$\int \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{ki} \delta A_k) d\Omega = \oint F_{ki} \delta A_k dS_i = 0 , \quad (13.9)$$

где dS_i – проекция элемента гиперповерхности на i -ю ось 4-пространства, а равенство интеграла нулю обусловлено заданностью потенциалов на границе 4-области интегрирования ($\delta A_k = 0$ на гиперповерхности). Из уравнений (13.8) и (13.9), а также из произвольности пределов интегрирования в (13.8) следует вторая пара УМ в 4-форме

$$\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_i} = \frac{4\pi}{c} j_k . \quad (13.10)$$

Нетрудно от 4-формы (13.10) перейти к трехмерной форме

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \end{cases} \quad (13.11)$$

Применяя к первому уравнению (13.11) теорему Стокса, приходим к третьему УМ в интегральной форме, которое является обобщением теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\oint_{(L)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}, \quad (13.12)$$

где величина, равная

$$\Phi_e = \int_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

называется *поток электрического поля* через поверхность S . Величина, равная $(4\pi)^{-1} \cdot \partial_t \Phi_e$ называется током смещения. Таким образом, согласно (13.12), магнитное поле появляется не только в случае наличия электрического тока силой \mathcal{J} , но и в случае переменного электрического поля ($\partial_t \Phi_e \neq 0$).

С помощью второго уравнения (13.11) и теоремы Гаусса-Остроградского приходим к четвертому УМ в интегральной форме, которое является обобщением электростатической теоремы Гаусса

$$\oint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha}. \quad (13.13)$$

Из (13.13) следует, что источниками силовых линий электрического поля являются заряженные частицы: силовые линии начинаются на частицах с положительным зарядом ($e_{\alpha} > 0$) и заканчиваются на частицах с отрицательным зарядом ($e_{\alpha} < 0$).

УМ (13.1) и (13.11) решают основную задачу электродинамики: по заданному распределению токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ определить векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в любой точке пространства \mathbf{r} и в любой момент времени t . УМ представляют собой систему 8 скалярных линейных уравнений, из которых, в силу выполнения следующих тождеств

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0,$$

независимыми являются только 6, т.е. столько, сколько независимых элементов у тензора ЭМ поля. Таким образом, указанная задача имеет однозначное решение.

§ 14. Следствия уравнений Максвелла

(1) Закон сохранения заряда

Взяв дивергенцию от обеих частей первого уравнения (13.11) и воспользовавшись вторым уравнением (13.11), приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (14.1)$$

Проинтегрировав (14.1) по объему и воспользовавшись теоремой Гаусса-Остроградского, получим следующее уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} e_{\alpha} = \oint_{(S)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (14.2)$$

которое означает, что скорость уменьшения заряда внутри некоторого объема V равна потоку этого заряда через поверхность S , ограничивающую объем V . Таким образом, (14.2) выражает закон сохранения электрического заряда. Уравнение (14.1) можно переписать в другой форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (14.3)$$

4-форма уравнения непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0. \quad (14.4)$$

Уравнение (14.4) легко доказать, продифференцировав (13.10) по x_k и приняв во внимание, что

$$\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_k \partial x_i} = -\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \stackrel{i \rightarrow k}{\underset{k \rightarrow i}{=}} -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_k \partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_k \partial x_i} = 0.$$

(2) Закон сохранения энергии

Рассмотрим систему движущихся зарядов e_{α} в ЭМ поле, которое совершает работу по их перемещению так, что скорость изменения энергии системы зарядов равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\alpha}, t). \quad (14.5)$$

Далее пользуемся первым и третьим УМ ((13.1) и (13.11)):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = \\
 &= \frac{c}{4\pi} \int \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} - \frac{c}{4\pi} \int \underbrace{\left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)}_{=0} \cdot \mathbf{H} d\mathcal{V} = \\
 &= \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) d\mathcal{V} - \frac{1}{4\pi} \int \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) d\mathcal{V} = \\
 &= -\frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] d\mathcal{V} - \frac{c}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int (E^2 + H^2) d\mathcal{V} = \\
 &= - \int \operatorname{div} \mathbf{P} d\mathcal{V} - \frac{\partial}{\partial t} \int w d\mathcal{V} .
 \end{aligned} \tag{14.6}$$

Перепишем (14.6) в следующем виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} , \tag{14.7}$$

где обозначено

$$W = \int w d\mathcal{V} , \quad w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} , \tag{14.8}$$

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] . \tag{14.9}$$

Если граница области интегрирования находится достаточно далеко от зарядов (в пределе – бесконечно далеко), то

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0 .$$

В этом случае из (14.7) следует, что сумма энергии частиц и величины W не меняется со временем: $\mathcal{E} + W = \text{const}$. Таким образом, величины W и w соответственно имеют смысл энергии и плотности энергии ЭМ поля.

Если в области, ограниченной замкнутой поверхностью S , отсутствуют заряды, то, согласно (14.7),

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} . \tag{14.10}$$

Согласно (14.10), абсолютное значение вектора \mathbf{P} , называемого *вектором Умова-Пойнтинга*, имеет смысл плотности потока энергии ЭМ поля, т.е. *интенсивности поля*.

(3) Закон сохранения импульса

Можно показать [1], что

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} p_{i\alpha} = -\frac{\partial}{\partial t} \int g_i d\mathcal{V} - \oint T_{ik} dS_k , \quad (i = 1, 2, 3) , \tag{14.11}$$

где \mathbf{g} – плотность импульса ЭМ поля, T_{ik} – максвелловский тензор напряжений:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] , \quad (14.12)$$

$$T_{ik} = w - \frac{E_i E_k + H_i H_k}{4\pi} . \quad (14.13)$$

Таким образом, ЭМ поле переносит энергию и импульс и, следовательно, является формой материи.

§ 15. Дельта-функция

Дельта-функцией называется следующая функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (15.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 . \quad (15.2)$$

Представления δ -функции:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{x} , \quad (15.3)$$

Фурье-представление:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk , \quad (15.4)$$

Лоренцевское представление:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \equiv \text{Im} \frac{1}{\pi} \frac{1}{x - i0} , \quad (15.5)$$

Гаусовское представление:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) , \quad (15.6)$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\text{ch}^2(x/\alpha)} , \quad (15.7)$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{\text{ch}(x/\alpha)} . \quad (15.8)$$

Свойства δ -функции:

$$\delta(-x) = \delta(x) , \quad (15.9)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) , \quad (15.10)$$

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|} , \quad (15.11)$$

где x_i – нули функции $\varphi(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x) , \quad (15.12)$$

$$\frac{1}{x - i0} = \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) . \quad (15.13)$$

Трёхмерная δ -функция:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) . \quad (15.14)$$

Используя δ -функцию можно записать для плотности точечного заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = e \delta(\mathbf{r}) . \quad (15.15)$$

Соответственно для системы точечных зарядов имеем

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) . \quad (15.16)$$

§ 16. Электростатическое поле

Рассмотрим ситуацию, когда $\mathbf{j} = 0$, $\partial_t \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{H} = 0$. Система УМ для электрической составляющей поля приобретет вид

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = 0 , \\ \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho . \end{cases} \quad (16.1)$$

Соответствующее поле называется *электростатическим*.

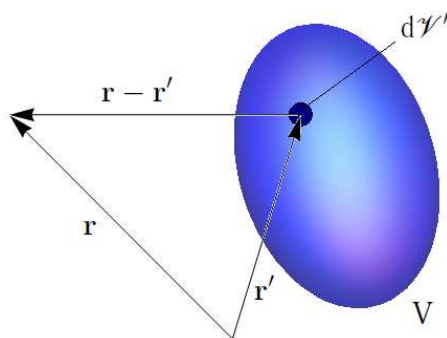


Рис. 6.

(1) Уравнение Пуассона

Из первого уравнения (16.1) следует, что электростатическое поле является потенциальным, а вектор \mathbf{E} можно записать как

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (16.2)$$

Подставив (16.2) во второе уравнение (16.1), запишем

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho. \quad (16.3)$$

Уравнение (16.3) называется уравнением Пуассона. Для нахождения интеграла этого уравнения, вычислим сначала поле точечного заряда, а для произвольной конфигурации зарядов применим принцип суперпозиции.

Поле точечного заряда можно найти, применив интегральную форму второго уравнения (16.1) (электростатическую теорему Гаусса), имеющую вид (13.13). В результате получим закон Кулона

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}. \quad (16.4)$$

Используя формулу (11.1), найдем потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{e}{r}. \quad (16.5)$$

В случае произвольной системы разобьем область V , заполненную зарядом, на малые элементы dV' (рис. 6). Заряд одного элемента равен

$$de = \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (16.6)$$

Согласно (16.5) потенциал поля, создаваемый данным элементом имеет вид

$$d\varphi = \frac{de}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (16.7)$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, потенциал поля, создаваемого всеми элементами области V , выразится интегралом

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (16.8)$$

Покажем, что, действительно, (16.8) является решением уравнения Пуассона (16.3). Для этого подействуем оператором Лапласа ∇^2 на функцию (16.8):

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (16.9)$$

Разложим $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ в интеграл Фурье:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathcal{K} , \quad (16.10)$$

где $d\mathcal{K} = dk_x dk_y dk_z$ – элемент объема в \mathbf{k} -пространстве. Из (16.10) находим

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} .$$

После замены переменных имеем

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathcal{V}}{r} . \quad (16.11)$$

Проведем интегрирование в сферической системе координат. В качестве вертикальной оси выберем направление вектора \mathbf{k} . Элемент объема равен $d\mathcal{V} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, где θ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{r} . Интегрирование по полярному углу ϕ дает множитель 2π . Тогда вместо (16.11) запишем

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty r dr \int_{-1}^1 e^{-ikr\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi^2 k} \text{Im} \int_0^\infty e^{ikr} dr . \quad (16.12)$$

Чтобы получить определенное значение интеграла (16.12), используем следующий прием

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi^2 k} \text{Im} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{i(k+i\alpha)r} dr = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 k} \text{Im} \left(\frac{i}{k + i0} \right) = \frac{1}{2\pi^2 k^2} . \end{aligned} \quad (16.13)$$

После подстановки (16.13) в (16.10) получаем:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathcal{K}}{k^2} , \quad (16.14)$$

Поддействовав оператором Лапласа на (16.14), находим

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\operatorname{div} (\operatorname{grad} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')})}{k^2} d\mathcal{K} = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{i \operatorname{div} (\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')})}{k^2} d\mathcal{K} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{i\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad} (e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')})}{k^2} d\mathcal{K} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2} \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathcal{K} = -\frac{1}{2\pi^2} \prod_{i=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_i(x_i - x'_i)} dk_i = \\
 &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (16.15)
 \end{aligned}$$

Подставив (16.15) в (16.9), получим

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathcal{V}' = -4\pi \rho(\mathbf{r}) . \quad (16.16)$$

Таким образом, функция (16.8) является решением уравнения (16.3).

(2) Энергия электростатического поля

Положив во второй формуле (14.8) $H = 0$, получим плотность энергии электростатического поля: $w = E^2/8\pi$. Тогда энергия равна

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi d\mathcal{V} ,$$

где интегрирование ведется по всему пространству. Используем известное тождество из векторного анализа: $\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\varphi \mathbf{E}) - \varphi \operatorname{div} \mathbf{E}$, и теорему Гаусса-Остроградского.

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{E}}_{=4\pi\rho} d\mathcal{V} - \frac{1}{8\pi} \underbrace{\oint \varphi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}_{=0} . \quad (16.17)$$

Здесь учтено второе уравнение (16.1), а также тот факт, что на бесконечности поле обращается в ноль. В результате имеем

$$W_e = \frac{1}{2} \int \varphi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d\mathcal{V} . \quad (16.18)$$

В случае системы точечных зарядов используем формулу (15.16). После интегрирования вместо (16.18) получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \varphi(\mathbf{r}_{\alpha}) , \quad (16.19)$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_{\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|} . \quad (16.20)$$

(3) Дипольное приближение

Рассмотрим электронейтральную систему: $\sum_{\alpha} e_{\alpha} = 0$, заключенную в объеме V с характерным линейным размером a . Рассчитаем поле на таком расстоянии r от рассматриваемой системы, что выполняется условие $a \ll r$. Потенциал электростатического поля произвольной конфигурации зарядов является решением уравнения Пуассона (16.3), которое выражается интегралом (16.8). Указанное условие позволяет приближенно записать

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right)^{-1/2} d\mathcal{V}' \approx \\ &\approx \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}'}_{=0} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' . \end{aligned} \quad (16.21)$$

Интеграл

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d\mathcal{V} \quad (16.22)$$

называется дипольным моментом системы зарядов. Подставив в (16.22) в случае точечных зарядов формулу (15.16), получим для дипольного момента

$$\mathbf{d} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} . \quad (16.23)$$

Таким образом, потенциал поля системы зарядов в дипольном приближении равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} . \quad (16.24)$$

С помощью формулы (16.2) найдем вектор напряженности электрического поля в дипольном приближении

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{d} \right) . \quad (16.25)$$

(4) Электрический диполь во внешнем поле

Пусть система зарядов расположена во внешнем электростатическом поле, задаваемом потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$. Тогда суммарная потенциальная энергия заряженных частиц равна

$$U = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) . \quad (16.26)$$

В дипольном приближении имеем

$$U = \varphi(\mathbf{r}) \underbrace{\sum_{\alpha} e_{\alpha}}_{=0} + \text{grad } \varphi \cdot \underbrace{\sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}_{=\mathbf{d}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} . \quad (16.27)$$

Сила, действующая на систему со стороны внешнего поля, вычисляемая по формуле $\mathbf{F} = -\text{grad } U$, равна

$$\mathbf{F} = -\mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E} . \quad (16.28)$$

Таким образом, согласно (16.28), сила, действующая на электронейтральную систему, отлична от нуля, если внешнее электрическое поле является неоднородным.

§ 17. Рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле. Формула Резерфорда¹

Пусть частица, имеющая заряд e и массу m , движется в кулоновском поле массивной частицы с зарядом Q (последнюю будем называть мишенью). Движение легкой частицы рассмотрим в полярной системе координат, в центре которой находится мишень, полагаемая неподвижной. Полярную ось направим параллельно линии начального импульса \mathbf{p} налетающей частицы (рис. 7 а). Считаем также, что скорость частицы удовлетворяет условию $v \ll c$. Ее полная энергия равна

$$\mathcal{E} = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{eQ}{r} ,$$

где r – расстояние между частицами, ϕ – полярный угол. Пусть $\mathcal{E} > 0$, что означает отсутствие связи между частицами, т.е. рассеяние легкой частицы в поле мишени. Момент импульса налетающей частицы имеет вид $L = mr^2\dot{\phi}$.

Кинетическая энергия до рассеяния равна $T = p^2/2m$. Если b – прицельный параметр, т.е. расстояние между линией начального импульса частицы и полярной осью (рис. 7 а), то начальное значение момента импульса равно pb . Определим связь между прицельным параметром и углом рассеяния θ . Применив закон сохранения энергии, напомним

$$\frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{eQ}{r} = T . \quad (17.1)$$

Согласно закону сохранения момента импульса:

$$mr^2\dot{\phi} = b\sqrt{2mT} . \quad (17.2)$$

¹Содержание этого параграфа не входит в экзаменационные вопросы, поэтому при подготовке к экзамену данный параграф можно пропустить.

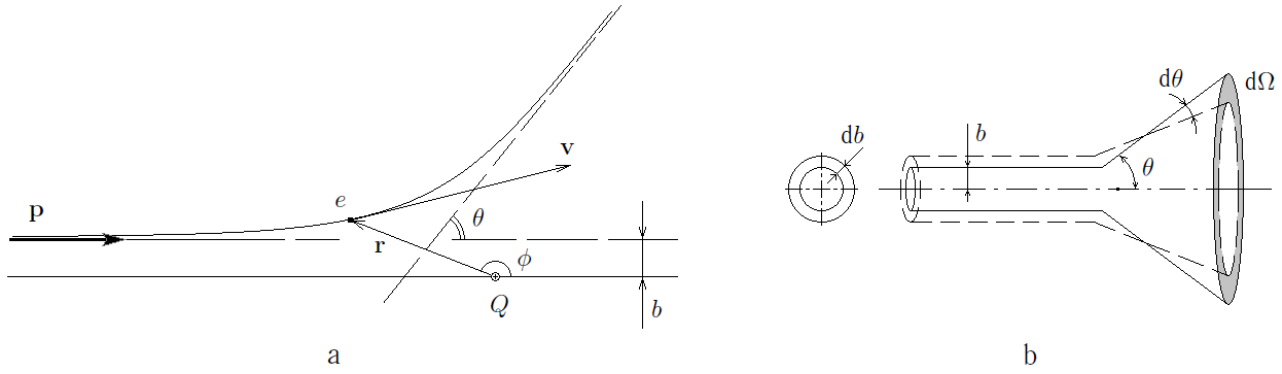


Рис. 7.

Выразив $\dot{\phi}$ из (17.2) и подставив в (17.1), получим

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{2T}{m} \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{eQ}{r} = T. \quad (17.3)$$

Перепишем (17.3), используя равенство $\dot{r} = \dot{\phi} \partial_{\phi} r$:

$$\frac{Tb^2}{r^4} \left(\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 \right) = T - \frac{eQ}{r}. \quad (17.4)$$

Введем безразмерные переменные: $\xi = b/r$, $a = eQ/2bT$. Тогда вместо (17.4) получим

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi} \right)^2 + \xi^2 = 1 - 2a\xi. \quad (17.5)$$

Разделив переменные в (17.5), имеем

$$\int_{\pi}^{\phi} d\phi = \pm \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + a^2 - (\xi + a)^2}}. \quad (17.6)$$

После интегрирования в (17.6) находим

$$\pm \arcsin \frac{\xi + a}{\sqrt{1 + a^2}} = \phi \pm \arcsin \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} - \pi. \quad (17.7)$$

Уравнение (17.7) имеет следующее решение

$$\pm (\xi + a) = -(\sin \phi \pm a \cos \phi), \quad (17.8)$$

причем для углов $0 < \phi < \pi$ знак «+» соответствует отрицательным значениям ξ . Так как $\xi > 0$, в (17.8) выберем знак «-». В результате получим

$$\xi = \sin \phi - a(1 + \cos \phi). \quad (17.9)$$

Если $\phi = \theta$, то $\xi = 0$, следовательно

$$\sin \theta = a(1 + \cos \theta), \quad (17.10)$$

откуда находим

$$b = \frac{eQ}{2T} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} . \quad (17.11)$$

Пусть на мишень налетает пучок частиц. Интенсивность пучка – число частиц, проходящих через единицу площади поперечного сечения за единицу времени – равна \mathcal{I} . Считаем, что частицы, рассеянные под углом θ внутри телесного угла $d\Omega$ (рис. 7 б), имели прицельный параметр b . Следовательно, до рассеяния эти частицы прошли сквозь кольцо площадью $2\pi b |db|$. Тогда количество частиц, влетающих за единицу времени внутри телесного угла $d\Omega$, равно

$$dN = 2\pi b \mathcal{I} |db| . \quad (17.12)$$

Сечением рассеяния называется величина, равная

$$d\sigma = \frac{dN}{\mathcal{I}} . \quad (17.13)$$

Сравнивая (17.12) и (17.13), получаем для сечения рассеяния

$$d\sigma = 2\pi b |db| . \quad (17.14)$$

После подстановки формулы (17.11) в (17.14) получим формулу Резерфорда

$$d\sigma = \left(\frac{eQ}{4T} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} , \quad (17.15)$$

где $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$.

§ 18. Постоянное (квазистатическое) магнитное поле

Пусть система электрических зарядов движется в ограниченной области пространства, например, в электрической цепи. Эффективное время движения равно τ . Рассмотрим магнитное поле такой системы за время $T \gg \tau$ и учтем, что приборы фиксируют усредненные за время T значения силовых характеристик, а именно

$$\langle F \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt . \quad (18.1)$$

Усредненное значение производной по времени от ограниченной функции равно нулю. Действительно,

$$\left\langle \frac{dF}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{F(0)}^{F(T)} dF = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F(T) - F(0)}{T} = 0 . \quad (18.2)$$

Усредним обе части первого уравнения (13.11) по времени и учтем, что $\langle \partial_t E \rangle = 0$. В результате получим

$$\text{rot } \langle \mathbf{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle . \quad (18.3)$$

Используем далее известное тождество из векторного анализа

$$\text{rot } (\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad } (\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} ,$$

а также кулоновскую калибровку.

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{A} = 0 , \\ \varphi = 0 . \end{cases} \quad (18.4)$$

В результате получим систему уравнений Пуассона для компонент векторного потенциала \mathbf{A}

$$\nabla^2 \langle \mathbf{A} \rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle . \quad (18.5)$$

Решением (18.5) является интеграл

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{c} \int_{(V)} \frac{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}') \rangle d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (18.6)$$

Взяв ротор от обеих частей (18.6), получим закон Био-Савара-Лапласа

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{c} \int_{(V)} \frac{[\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}') \rangle , \mathbf{r} - \mathbf{r}'] d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (18.7)$$

Для провода, по которому течет электрический ток силой \mathcal{I} формула (18.7) дает

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{I}}{c} \int_{(L)} \frac{[\mathbf{r}' - \mathbf{r} , d\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} , \quad (18.8)$$

где L – контур провода.

Рассмотрим систему точечных зарядов:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \Rightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) ,$$

где $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_{\alpha})$. Тогда для потенциала (18.6) имеем

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \left\langle \frac{\mathbf{v}_{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|} \right\rangle . \quad (18.9)$$

Пусть a – эффективный линейный размер системы. Найдем магнитное поле, создаваемое данной системой, на расстояниях r , для которых выполнено условие $a \ll r$. В этом случае применим дипольное приближение.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{A} \rangle &= \frac{1}{cr} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}}{r^2} + \frac{r_{\alpha}^2}{r^2} \right)^{-1/2} \rangle \approx \\
 &\approx \frac{1}{cr} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \underbrace{\langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle}_{=0} + \frac{1}{cr^3} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \rangle = \frac{1}{2cr^3} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \rangle \stackrel{\mathbf{r}=\text{fix}}{=} \\
 &= \frac{1}{2cr^3} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \rangle = \\
 &= \frac{1}{2cr^3} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \rangle = \frac{1}{2cr^3} \left[\mathbf{r}, \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle [\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}] \rangle \right]. \quad (18.10)
 \end{aligned}$$

Магнитным моментом называется вектор, равный

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle [\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}] \rangle. \quad (18.11)$$

После подстановки (18.11) в (18.10) получаем

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (18.12)$$

С помощью формулы (7.12) найдем вектор напряженности магнитного поля рассматриваемой системы

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{m} \right). \quad (18.13)$$

Для непрерывно распределенного заряда с плотность $\rho(\mathbf{r})$ вместо (18.11) необходимо записать

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_{(V)} \rho(\mathbf{r}') \langle [\mathbf{r}', \mathbf{v}'] \rangle dV', \quad (18.14)$$

где $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'$. Из формулы (18.14) следует, что для провода, образующего замкнутый плоский контур L , по которому течет электрический ток силой \mathcal{J} , магнитный момент равен

$$\mathbf{m} = \frac{\mathcal{J}}{2c} \int_{(L)} [\mathbf{r}', d\mathbf{r}'] = \frac{\mathcal{J}\mathbf{S}}{c}. \quad (18.15)$$

Здесь $\mathbf{S} \equiv S\mathbf{n}$, S – площадь, ограниченная контуром L , \mathbf{n} – нормальный орт к плоскости на которой лежит провод.

Пусть теперь система с магнитным моментом \mathbf{m} помещена во внешнее магнитное поле с напряженностью \mathbf{H} . Вычислим средний момент силы, действующий на такую систему.

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} \langle [\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{F}_{\alpha}] \rangle. \quad (18.16)$$

Подставляя в (18.16) формулу (7.13), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle [\mathbf{r}_{\alpha}, [\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{H}]] \rangle = \frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} \rangle = \\
 &= \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{H} \rangle - \frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{H} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} \rangle = \\
 &= \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \underbrace{\langle \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{H}) \rangle}_{=0} + \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{H} \rangle - \\
 &\quad - \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{H} \underbrace{\langle \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{\alpha}^2) \rangle}_{=0} = -\frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} [\mathbf{H}, \langle [\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}] \rangle] . \quad (18.17)
 \end{aligned}$$

После учета в (18.17) формулы (18.11) получаем

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}, \mathbf{H}] . \quad (18.18)$$

Момент импульса системы равен

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} [\mathbf{r}_{\alpha}, m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}] . \quad (18.19)$$

Считаем далее, что удельный заряд одинаков для всех частиц системы: $e_{\alpha}/m_{\alpha} = e/m$.

Тогда магнитный момент равен

$$\mathbf{m} = \frac{e\mathbf{L}}{2mc} . \quad (18.20)$$

Подставляя (18.18) в уравнение движения ($\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$), получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{m}, \mathbf{H}] . \quad (18.21)$$

Используя (18.20), перепишем (18.21):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -[\Omega_{\Lambda}, \mathbf{L}] , \quad (18.22)$$

где Ω_{Λ} – ларморовская частота – частота прецессии вектора \mathbf{L} вокруг вектора \mathbf{H} , равная

$$\Omega_{\Lambda} = -\frac{e\mathbf{H}}{2mc} . \quad (18.23)$$

§ 19. Электромагнитные волны

Рассмотрим здесь ситуацию, когда электрические заряды отсутствуют, т.е. $\mathbf{j}, \rho = 0$.

Тогда УМ примут вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (19.1)$$

Переменные ЭМ поля, распространяющиеся отдельно от электрических зарядов, называются *ЭМ волнами*.

В силу неоднозначности потенциалов поля на последние всегда можно наложить некоторое дополнительное условие. Используем кулоновскую калибровку: $\varphi = 0$. Тогда $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial_t \mathbf{A}$. С другой стороны из второго уравнения (19.1) следует, что $\partial_t (\operatorname{div} \mathbf{A}) = 0$. То есть функция $\operatorname{div} \mathbf{A}$ явно зависит только от координат и ее всегда можно обратить в ноль прибавлением к вектору \mathbf{A} градиента некоторой не зависящей от времени функции, не меняя при этом φ . Таким образом, подберем такой потенциал \mathbf{A} , что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Из (19.1) следует следующее уравнение для вектора \mathbf{A}

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (19.2)$$

Такое же по форме уравнение легко получить для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Пусть F – одна из проекций векторов \mathbf{A} , \mathbf{E} или \mathbf{H} . Тогда

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F = 0. \quad (19.3)$$

Уравнение (19.3) называется *волновым уравнением*. В 4-форме волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0. \quad (19.4)$$

Если функция F , описывающая ЭМ волну можно представить в виде $F = F(x, t)$, то ЭМ волна называется *плоской* [1]. Для плоской ЭМ волны волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (19.5)$$

Общим решением (19.5) является следующая комбинация

$$F(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct), \quad (19.6)$$

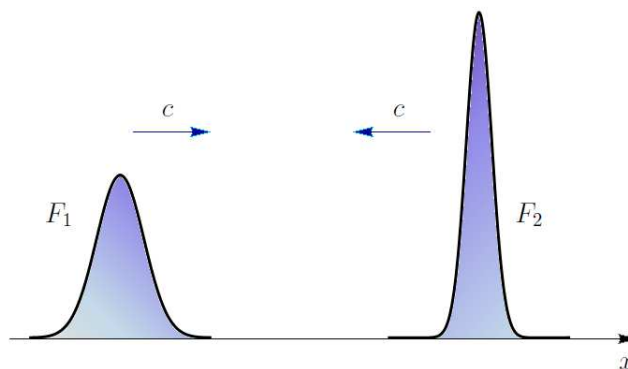


Рис. 8.

где $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ – произвольные функции. Функции $F_1(x - ct)$ и $F_2(x + ct)$ описывают ЭМ волны, распространяющиеся вдоль оси Ox на встречу друг к другу с фазовыми скоростями c (рис. 8).

Волна называется *монохроматической*, если зависимость ее компонентов от времени можно представить в виде

$$F(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (19.7)$$

где величина ω называется *частотой* волны. Уравнение плоской монохроматической волны имеет вид

$$F(\mathbf{r}, t) = F_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (19.8)$$

где вектор, равный

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad (19.9)$$

называется *волновым вектором*.

Свойства плоских ЭМ волн в вакууме

(1) Является поперечной

Действительно, из второго уравнения (19.1) и условия зависимости компонент поля только от одной координаты x следует, что $\partial_x E_x = 0$. Из-за отсутствия однородных полей $E_x = 0$, т.е. вектор \mathbf{E} перпендикулярен направлению распространения ($\mathbf{E} \perp Ox$). Для напряженности магнитного поля имеем

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \left[\mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right] = \pm \left[\mathbf{i}, -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}]. \quad (19.10)$$

Здесь \mathbf{i} и \mathbf{n} – соответственно орт, указывающий направление оси Ox , и орт, указывающий направление распространения волны ($\mathbf{n} = \pm \mathbf{i}$). Из (19.10) следует, что $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$.

(2) Из (19.10) следует, что $E = H$.

Подставив (19.10) в формулы (14.9) и (14.12), получим для вектора Умова-Пойнтинга и плотности импульса ЭМ поля следующие выражения

$$\mathbf{P} = cw \mathbf{n}, \quad \mathbf{g} = \frac{w}{c} \mathbf{n}, \quad (19.11)$$

где $w = E^2/4\pi$ – плотность энергии ЭМ поля в волне. Проинтегрировав вторую формулу (19.11) по объему, получим связь между энергией W и импульсом p ЭМ волны

$$W = pc. \quad (19.12)$$

(3) Фаза волны является инвариантом, следовательно $k_i x_i = \text{inv}$. Последнее равенство означает, что совокупность (19.13) является 4-вектором, который называется 4-волновым вектором. Поэтому для компонент k_i можно записать преобразования Лоренца (3.17), из которых следует эффект Доплера (3.19).

(4) Введем обозначение

$$k_i = \left(\mathbf{k}, \quad \frac{i\omega}{c} \right). \quad (19.13)$$

Из (19.9) и (19.13) следует, что

$$k_i^2 = 0 \quad (19.14)$$

(5) Для плоской монохроматической волны справедливо

$$k_i A_i = 0. \quad (19.15)$$

Результат (19.15) следует из (19.8) и уравнения (19.2).

§ 20. Метод запаздывающих потенциалов

Рассмотрим систему движущихся электрических зарядов и определим поле, которое они создают. Учтем также тот факт, что заряды, двигаясь в пространстве, могут излучать ЭМ волны. Используем здесь лоренцевскую калибровку

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (20.1)$$

Подставляя (9.5) в (13.10) и учитывая калибровку (20.1), получим

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} = -\frac{4\pi}{c} j_k. \quad (20.2)$$

Выражение (20.2) является уравнением д'Аламбера, записанным в 4-форме. В 3-форме уравнение д'Аламбера примет вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (20.3)$$

Для скалярного потенциала получаем

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (20.4)$$

Частные случаи уравнения (20.2)

(1) Уравнение Пуассона для скалярного потенциала (16.3), если

$$\mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

(2) Уравнение Пуассона для векторного потенциала (18.5), если

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

(3) Волновое уравнение (19.2), если

$$\varphi = 0, \quad \rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0.$$

Разобьем пространство, занятое зарядами, на малые элементы dV' , внутри одного из которых в момент времени t находится заряд de . После вычисления поля заряда de поле, создаваемое всей системой зарядов, найдется с помощью принципа суперпозиции. Пусть заряд de находится в начале системы координат $\mathbf{r}' = 0$ (рис. 9 а). Тогда плотность заряда выразится формулой

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) de(t). \quad (20.5)$$

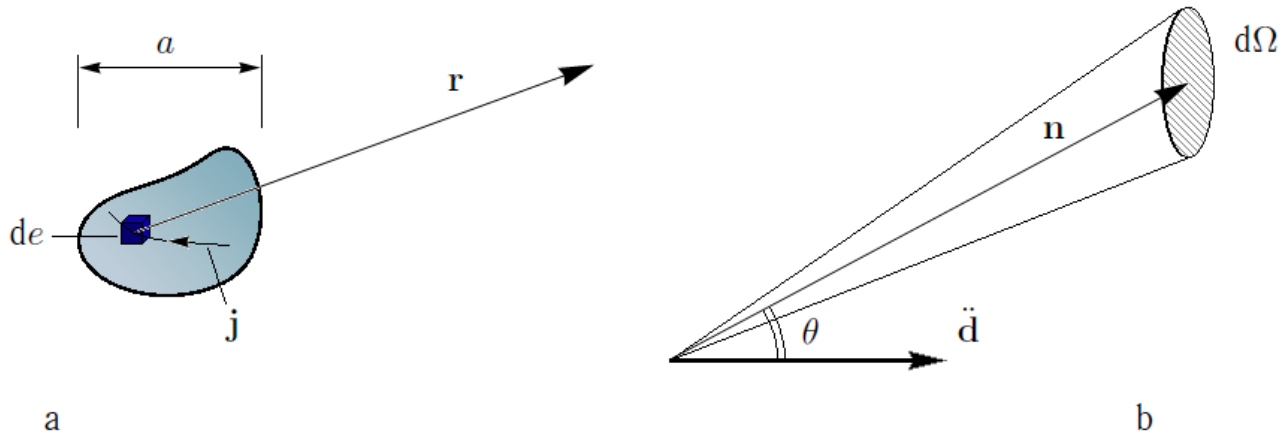


Рис. 9.

Подстановка (20.5) в уравнение (20.4) дает

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t) \delta(\mathbf{r}) . \quad (20.6)$$

На больших расстояниях от системы зарядов ($r \gg a$) потенциал φ зависит только от абсолютного значения r . В этом случае волновое уравнение примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 .$$

или

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} . \quad (20.7)$$

Решением уравнения (20.7) является суперпозиция расходящейся и сходящейся сферических волн

$$\varphi(r, t) = \frac{F_1(r - ct)}{r} + \frac{F_2(r + ct)}{r} , \quad (20.8)$$

Первое слагаемое в (20.8) определяет потенциал в момент времени t и соответствует состоянию электрических зарядов в момент времени $t_1 = t - \frac{r}{c} < t$, где r/c – время запаздывания, равное времени достижения сигнала точки наблюдения \mathbf{r} . Данное слагаемое называется запаздывающим потенциалом.

Второе слагаемое (20.8) – опережающий потенциал – задает потенциал в точке \mathbf{r} в момент времени t и соответствует состоянию зарядов в момент времени $t_2 = t + \frac{r}{c} > t$. Наличие этого слагаемого нарушает принцип причинности: с электрическими зарядами ничего не произошло, а ЭМ волна уже возникла на бесконечности в соответствии с тем, что произойдет спустя время $t_2 - t$. В связи с этим необходимо положить $F_2 \equiv 0$. Таким образом, вместо (20.8) имеем

$$\varphi(r, t) = \frac{F_1(r - ct)}{r} , \quad (20.9)$$

Окружим теперь заряд de сферой S_0 объемом V_0 и радиусом $R \ll a$. Условие $r \ll a$ позволяет пренебречь слагаемым $c^{-2}\partial_t^2\varphi$ по сравнению с $\nabla^2\varphi$ в левой части (20.6). Тогда вместо (20.6) получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -4\pi de(t) \delta(\mathbf{r}) , \quad (20.10)$$

решением которого является кулоновский потенциал

$$\varphi = \frac{de(t)}{r} . \quad (20.11)$$

Решение, объединяющее предельные результаты (20.9) и (20.11), имеет вид

$$d\varphi = \frac{de(r-ct)}{r} . \quad (20.12)$$

Если сместить заряд de из начала системы координат, то вместо (20.12) получим

$$d\varphi = \frac{de\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} . \quad (20.13)$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, решением уравнения д'Аламбера является

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{(V)} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} . \quad (20.14)$$

Аналогично запишем интеграл уравнения (20.3):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{(V)} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} . \quad (20.15)$$

§ 21. Дипольное излучение

Рассмотрим ситуацию, когда электрические заряды движутся в ограниченном пространстве с эффективным линейным размером $a \ll r$. В этом случае интеграл (20.15) запишем в дипольном приближении. Возможность пренебречь слагаемым $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/c$, появляющимся в разложении подынтегрального выражения (20.15) в степенной ряд, по сравнению с r зависит от того, на сколько плотность тока \mathbf{j} быстро меняется за время

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'}{c} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

Пусть T – характерное время, в течение которого \mathbf{j} меняется значительно (например, полупериод колебаний). Тогда условием применимости дипольного приближения будет неравенство $\tau \ll T$. Легко это неравенство переписать следующим образом

$$a \ll \lambda , \quad (21.1)$$

где $\lambda \sim cT$. Например, для ЭМ волн в качестве параметра λ может выступать длина волны. Так как $r' \sim vT$, следовательно дипольное приближение оправдано для нерелятивистских скоростей частиц ($v \ll c$). Возможны следующие ситуации:

(а) $a \ll r \ll \lambda$ – ближняя зона излучения,

$$E, H \sim \frac{1}{r^2},$$

(б) $a \ll r \sim \lambda$ – индукционная зона излучения,

$$E, H \sim \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

(в) $a \ll \lambda \ll r$ – дальняя зона излучения,

$$E, H \sim \frac{1}{r}.$$

В дальней зоне на каждом малом участке волну можно рассматривать как плоскую. Для потенциала поля в этой зоне вместо (20.15) запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) d\mathcal{V}' = \frac{1}{cr} \int \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} = \\ &= \frac{1}{cr} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Напряженности электрического и магнитного полей соответственно равны

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{d}}]. \quad (21.3)$$

Вычислим количество энергии излучения, проходящей за единицу времени через площадку сферической поверхности радиуса r ($dS = r^2 d\Omega$)

$$d\mathcal{I} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (21.4)$$

где θ – угол между вектором $\ddot{\mathbf{d}}$ и направлением излучения (рис. 9 б). Подставив в (21.4) выражение для телесного угла $d\Omega$, запишем

$$d\mathcal{I} = \frac{1}{2c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} \right|^2 \sin^3 \theta d\theta. \quad (21.5)$$

После интегрирования в (21.5) получим полную мощность дипольного излучения

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} \right|^2. \quad (21.6)$$

Для одного заряда ($\mathbf{d} = e\mathbf{r}_1$) имеем

$$\mathcal{I} = \frac{2e^2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{r}}_1|^2. \quad (21.7)$$

Здесь \mathbf{r}_1 – координаты частицы. Согласно (21.7) заряд излучает ЭМ волны, если он движется ускоренно. Если заряд совершает гармонические колебания ($\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\omega^2\mathbf{r}_1$), то для мощности дипольного излучения получается следующее выражение

$$\mathcal{I} = \frac{2e^2\omega^4}{3c^3} r_1^2.$$

Средняя за период мощность излучения равна

$$\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{e^2\omega^4 A^2}{3c^3}, \quad (21.8)$$

где A – амплитуда колебаний частицы. Тот факт, что \mathcal{I} не зависит от расстояния r до зарядов означает, что в волновой зоне ЭМ поле оторвалось от системы зарядов и распространяется без энергетических потерь. При этом электрические заряды, излучившие ЭМ волну, могут исчезнуть (например, рекомбинировать), а ЭМ поле будет распространяться в виде волны независимо от дальнейшего состояния зарядов.

Перечень вопросов к экзамену

по дисциплине «ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»,

раздел «ЭЛЕКТРОДИНАМИКА»

1. Постулаты СТО. Преобразования Лоренца.
2. Следствия преобразований Лоренца. Относительность промежутков времени.
3. Следствия преобразований Лоренца. Относительность длины отрезков.
4. Релятивистское преобразование скоростей.
5. Следствия преобразований Лоренца. Относительность одновременности.
6. Эффект Доплера.
7. Интервал. Инвариантность интервала относительно преобразований Лоренца. Геометрический смысл интервала.
8. Четырехмерные векторы (4-векторы). Матрица преобразований Лоренца. Инвариантность скалярного произведения. 4-градиент. Оператор д'Аламбера.
9. Четырехмерные тензоры (4-тензоры). Симметричный и антисимметричный тензоры и их свойства. Символ Кронекера.
10. 4-вектор скорости и 4-ускорение.
11. Действие для свободной частицы. Функция Лагранжа. Принцип соответствия. Импульс и энергия свободной частицы. 4-импульс.
12. 4-тензор момента импульса и его свойства.
13. Система частиц. Центр инерции. Распад составной частицы. Дефект массы.
14. 4-потенциал электромагнитного поля. Действие для электрического заряда в заданном электромагнитном поле. Уравнения движения электрического заряда в электромагнитном поле. Напряженность электрического поля. Напряженность магнитного поля.

15. Калибровочная инвариантность. Кулоновская и Лоренцевская калибровки потенциалов электромагнитного поля.

16. Вывод уравнений движения электрического заряда в заданном электромагнитном поле в 4-форме из принципа наименьшего действия.

17. Тензор электромагнитного поля. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля. Инварианты поля.

18. Стационарное электромагнитное поле. Скалярный потенциал однородного электрического поля и векторный потенциал однородного магнитного поля.

19. Решение уравнения движения электрического заряда в однородном стационарном электрическом поле.

20. Решение уравнения движения электрического заряда в однородном стационарном магнитном поле.

21. Решение уравнения движения электрического заряда в однородных стационарных электрическом и магнитном полях с ортогональными силовыми линиями (нерелятивистский случай).

22. Действие для электромагнитного поля. 4-плотность тока.

23. Первая пара уравнений Максвелла. Дифференциальная и интегральная формы первой пары уравнений Максвелла. Физический смысл. Первая пара уравнений Максвелла в 4-форме.

24. Вторая пара уравнений Максвелла. Вывод второй пары уравнений Максвелла в 4-форме из принципа наименьшего действия.

25. Полная система уравнений Максвелла. Дифференциальная и интегральная формы, физический смысл. Ток смещения. Основная задача электродинамики.

26. Закон сохранения энергии для системы электрических зарядов, движущихся в электромагнитном поле. Плотность энергии электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойнтинга и его физический смысл.

27. Закон сохранения электрического заряда. Уравнение непрерывности в векторной и тензорной формах.

28. Дельта-функция. Свойства δ -функции. Различные представления δ -функции. Трёхмерная δ -функция.

29. Электростатическое поле и его свойства. Уравнение Пуассона. Закон Кулона. Решение уравнения Пуассона. Принцип суперпозиции.

30. Энергия поля системы неподвижных зарядов.

31. Дипольный момент. Электростатическое поле точечного электрического диполя.

32. Электрический диполь во внешнем электрическом поле. Потенциальная энергия диполя во внешнем электрическом поле. Сила, действующая на диполь со стороны неоднородного электрического поля.

33. Постоянное (квазистатическое) магнитное поле. Закон Био-Савара-Лапласа.

34. Магнитный момент. Векторный потенциал магнитного поля системы электрических зарядов с заданным магнитным моментом.

35. Система зарядов с заданным магнитным моментом во внешнем магнитном поле. Теорема Лармора. Диамагнетизм.

36. Волновое уравнение. 4-форма волнового уравнения. Общее решение волнового уравнения. Плоская электромагнитная волна и ее свойства. Монохроматическая электромагнитная волна. Эллиптически поляризованная волна.

37. Уравнение д'Аламбера. Тензорная форма уравнения д'Аламбера. Решение уравнения д'Аламбера. Запаздывающие потенциалы. Принцип причинности.

38. Дипольное излучение. Интенсивность дипольного излучения. Волновая зона.

Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Курс теоретической физики. Том II. Теория поля*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2006, 536 стр.
- [2] В.В. Мултановский, А.С. Василевский. *Курс теоретической физики для педвузов. Книга 2. Классическая электродинамика*. Москва, Дрофа, 2006, 347 стр.
- [3] М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. *Классическая электродинамика*. Санкт-Петербург, Лань, 2003, 398 стр.
- [4] В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер. *Сборник задач по электродинамике*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001, 165 с.
- [5] А.А. Власов. *Макроскопическая электродинамика*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 236 с.
- [6] Н.А. Попов. *Уравнения Максвелла*. Москва, Прометей, Московский педагогический государственный университет, 2012, 34 с.
- [7] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. *Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности*. Санкт-Петербург, Лань, 2010, 480 стр.
- [8] В.Г. Левич. *Курс теоретической физики. Том 1*. Москва, Наука, 1971, 912 стр.
- [9] Conference on the Michelson-Morley experiment. Held at the Mount Wilson Observatory, Pasadena, California, February 4 and 5, 1927.
- [10] R.S. Shankland, S.W. McCuskey, F.C. Leone, G. Kuerti. "New Analysis of the Interferometer Observations of Dayton C. Miller"// Rev. Mod. Phys. 27 (1955) 167.
- [11] H. Müller, P.L. Stanwix, M.E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger, E. Kovalchuk, A. Peters. "Tests of Relativity by Complementary Rotating Michelson-Morley Experiments"// Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 050401.