

# Rapport

Ayawo Désiré Dandji  
Fenitra Ramiaramananana

December 2020

## 1 Sujet

Déterminer pour un graphe simple donné s'il est planaire ou pas.

## 2 Méthode utilisée :

Conception d'un algorithme basé sur le théorème de KURATOWSKI.

## 3 La planarité d'un graphe :

Un graphe est dit planaire lorsqu'il peut être dessiné dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent pas.

Le graphe isomorphe d'un graphe planaire qui est dessiné dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent est appelé un graphe plan.

## 4 Théorème de KURATOWSKI :

Kazimierz KURATOWSKI, un mathématicien polonais du 20ème siècle a démontré que pour qu'un graphe soit planaire, ce dernier ne doit contenir ni un sous-graphe qui soit subdivision du graphe complet possédant 5 sommets appelé  $K_5$  ni un sous-graphe qui soit subdivision du graphe complet biparti de 6 sommets ayant dans chacun des deux ensembles exactement 3 sommets, ce graphe appelé  $K_{3,3}$ . Les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  étant des graphes non planaires bien connus.

La subdivision d'un graphe étant un nouveau graphe obtenu en ajoutant un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes. Chacun de ces sommets ajoutés aura pour degré 2 dans un graphe simple non orienté.

## 5 Implémentation de l'algorithme de planarité:

Python3 est le langage de programmation utilisé pour réaliser cette tâche. Des bibliothèques externes ont été utilisées:

- Networkx pour la gestion basique des graphes.
- Matplotlib pour la représentation des images en images png.

Un module spécial nommé **planarity.py** a été créé pour l'implémentation de toutes les fonctions d'aide nécessaires pour la réalisation de la fonction principale **is-planar()**.

## 5.a Fonctionnement général

Sans trop rentrer dans les détails, pour vérifier si un graphe simple est planaire:

- Si le nombre de sommet est inférieur ou égale à 5 et qu'il ne s'agit pas du graphe K5, alors le graphe est planaire.
- Si le graphe est le K5, il n'est pas planaire
- Si le graphe a 6 sommets et qu'il n'est pas le graphe K3,3 alors il est planaire
- Si le graphe est le K3,3 alors il n'est pas planaire
- Si le nombre de sommets du graphe est supérieur à 6, on vérifie s'il ne contient pas de sous-graphe qui est une subdivision du graphe K5 ou du graphe K3,3. Si on trouve une subdivision alors le graphe n'est pas planaire. Dans le cas contraire, ce dernier est planaire.

## 5.b Détails du fonctionnement de la fonction de test de planarité is-planar :

### 5.b.1 Étape 1: Vérifier si le graphe est simple

Avec la classe Graph de Networks, nous pouvons instancier un graphe non orienté n'autorisant pas d'arêtes parallèles. Tout ce qui reste à faire c'est de vérifier grâce à une méthode d'instance au niveau de Networks nommé **number-of-selfloops()** que le nombre de boucle est égale à 0 pour conclure si le graphe est simple ou pas.

Si le graphe est vide alors il est simple.

### 5.b.2 Étape 2: Tester les cas simples de planarité

Une fonction spéciale nommée **simple-cases-of-planarity** a été créée à cet effet.

- Elle conclut que tout graphe K5 ou K3,3 n'est pas planaire (Deux fonctions **is-K-5()** et **is-K3-3()** ont été implémentées à cet effet).
- Sinon pour tout graphe ayant au maximum 6 sommets sans être une subdivision de K5 ou K3,3 est planaire.

### 5.b.3 Étape 3: Supprimer tous les sommets isolés:

Les sommets isolés n'ont aucun effet sur la planarité. Il s'agit des sommets de degré 0. On les supprime pour alléger les traitements. Cela se fait dans la fonction **graph-cleaning()**.

### 5.b.4 Étape 4 : Compter le nombre de sommets ayant pour degré minimum 3 ou 4

Cette étape est importante car elle permet de prédire rapidement l'absence de sous-graphe subdivision de K5 ou K3,3.

En effet,

- Pour tout graphe ne contenant pas au moins 5 sommets de degré 4 ne peut pas contenir de sous-graphe subdivision du graphe K5 parce que le graphe K5 est un graphe complet de 5 sommets dont chaque sommet a pour degré 4.
- Pour tout graphe ne contenant pas au moins 6 sommets de degré 3 ne peut pas contenir de sous-graphe subdivision du graphe complet biparti K3,3 parce que le graphe K3,3 possède 6 sommets de degré 3.
- Donc si pour un graphe donné, le nombre de sommets de degré 4 est inférieur à 5 et le nombre de sommets de degré 3 est inférieur à 6 alors le graphe est planaire.

Ce calcul se fait dans la fonction **get-planarity-parameters()**.

### 5.b.5 Étape 5 : Détection de sous-graphe subdivision de graphe K5 ou K3,3

Pour tout graphe dont le nombre de sommets de degré 4 est supérieur ou égal à 5 ou le nombre de sommets de degré 3 est supérieur ou égal à 6, on procède à ces étapes dans la fonction **bad-subdivision()**:

1- On trouve tous les sous-graphes de nombre de sommets supérieur ou égal à 5. Cela grâce à la fonction **subgraph()** de Networkx et à la fonction **combinations()** du module itertools de python3.

2- Pour chacun de ces sous-graphes, on crée une copie grâce à une fonction **create-copy()** pour ne pas modifier le graphe initial.

3- On applique une fonction nommée **reducing()** sur la copie du sous-graphe. Cette fonction a pour objectif de partir d'une subdivision au graphe initial. Pour ce faire :

- On trouve tous les sommets de degré 2
- Pour chaque sommet de degré 2, on détecte ses 2 voisins
- Ensuite on crée une arête entre les 2 voisins
- Puis au final, on supprime le sommet de degré 2 en question.

4- Avec le graphe réduit obtenu, on vérifie tout simplement s'il s'agit d'un graphe K5 ou K3,3. Si le graphe initial avait un nombre de sommet de degré 4 supérieur ou égal à 5, on procède à vérifier si le graphe réduit est un K5. Par contre, si le graphe initial avait un nombre de sommet de degré 3 supérieur ou égal à 6, on procède à vérifier si le graphe réduit est un K3,3.

### 5.b.6 Étape 6 :

Si aucun contre-exemple n'a été trouvé alors le graphe est planaire.

## 5.c Les tests:

Un module de **graph-test.py** contient quelques graphes dont la planarité est testée.

Un module test.py permet de tester la planarité de n'importe quel graphe.

- Si un graphe est vraiment planaire alors la méthode **draw-planar()** de Networkx permet de donner sa représentation en image png. Et on affiche True comme solution pour dire le graphe est planaire.
- Si le graphe n'est pas planaire alors 3 sorties sont générées:

1) False pour dire le graphe n'est pas planaire.

2) Une image du sous-graphe subdivision de K5 ou K3,3 comme contre-exemple de planarité.

3) Une image du graphe K5 ou K3,3 qui constitue le graphe réduit du sous-graphe donné comme contre-exemple de planarité.

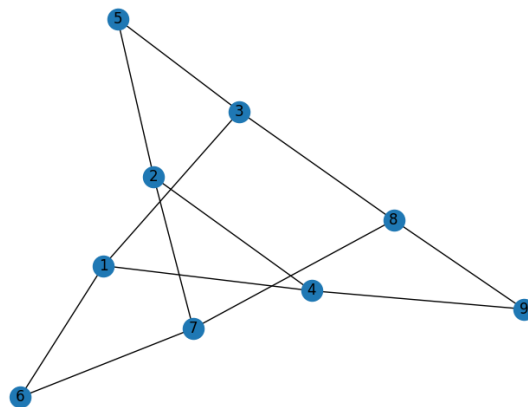
## 5.d Exemple de test: Graphe de Petersen

Le graphe de Petersen (non planaire) est un graphe particulier connu possédant 10 sommets et 15 arêtes et souvent utilisé comme contre exemple de la planarité.

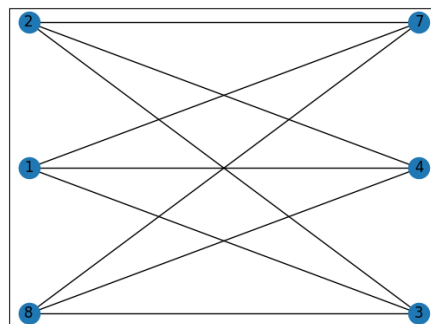
```

    TgProject --zsh-- 80x24
    Last login: Fri Dec 11 11:37:32 on ttys001
    pacome@Pacomes-MBP TgProject % python3.9 test.py
    False
    Response time 0.0960544310000001
    This graph contains a subdivision of K_3_3
    Sorry, this graph is not planar
    pacome@Pacomes-MBP TgProject %
  
```

figures 0: console d'exécution



figures 1: sous-graphe dérivé du graphe de Petersen



figures 2: graphe biparti K3,3 contenu dans le sous graphe de Petersen