쌍곡 기하와 Lorentz 공간 간의 관계와 그 활용

2018160005	2020160027	2022160012	2022160025
임윤상	박예영	박세준	김상준

새로운 기하

유클리드가 주장한 5가지 공준은 다음과 같다.

1. 서로 다른 두 점이 주어졌을 때, 그 두 점을 잇는 직선을 그을 수 있다.
2. 임의의 선분은 더 연장할 수 있다.
3. 서로 다른 두 점 A, B에 대해, 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AB}$를 한 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.
4. 모든 직각은 서로 같다.
5. **두 직선이 한 직선과 만날 때, 같은 쪽에 있는 내각의 합이 2직각(180°)보다 작으면 이 두 직선을 연장할 때 2직각보다 작은 내각을 이루는 쪽에서 반드시 만난다.**

이는 "평행선 공준"이라 불리며 나머지 공준과 독립임이 밝혀졌다. 이로부터 비롯된 기하 중 하나인 쌍곡기하(hyperbolic geometry)의 성질들을 살펴보고 더 나아가 Lorentz 평면,공간과 그 관계, 그리고 그 활용으로 특수 상대성 이론에 대해 알아보고자 한다.

쌍곡 평면의 여러가지 성질들

다음을 만족하는 평면의 성질을 살펴보자.

$$\mathcal{U} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; v > 0\}\,,\;\; E = \frac{1}{v^2},\; F = 0,\; G = \frac{1}{v^2}$$

쌍곡평면의 geodesic

geodesic을 만족하기 위한 두 조건으로부터 다음을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$
$$\rightarrow \;\; \frac{d}{dt}(E\dot{u}) \;=\; \frac{2}{v^3}\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{v^2}\ddot{u} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)$$
$$\rightarrow \;\; \frac{d}{dt}(G\dot{v}) \;=\; \frac{2}{v^3}\dot{v}^2 + \frac{1}{v^2}\ddot{v} = -\frac{2}{2v^3}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$$
$$\rightarrow \;\; \frac{1}{v^3}(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + \frac{1}{v^2}\ddot{v} = 0$$

이후 식 정리를 통해 y축과 평행한 반직선과 중심이 x축에 있는 반원이 geodesic임을 알 수 있다.

쌍곡평면의 거리 및 각도

geodesic 위의 두 점에 대한 거리를 알아보자.

1. u 좌표가 동일할 때: $\gamma(u(t), v(t)) = (u_0, t)$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{v^2}}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t}dt = \ln t_1 - \ln t_0$$

2. 아닐 때: $\gamma(u(t), v(t\!u_0 + r\tanh t, r\,\mathrm{sech}\, t)$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{v^2}}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{r^2\,\mathrm{sech}^2\, t(\mathrm{sech}^2\, t + \tanh^2 t)}{r^2\,\mathrm{sech}^2\, t}}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} 1dt = t_1 - t_0 \\ &= \cosh^{-1}(\cosh(t_1 - t_0)) \end{aligned}$$
$$= \cosh^{-1}\left(1 + \frac{(u(t_1) - u(t_0))^2 + (v(t_1) - v(t_0))^2}{2v(t_0)v(t_1)}\right)$$

두 벡터 w_1, w_2가 이루는 각은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{w_{1u}w_{2u} + w_{1v}w_{2v}}{\sqrt{w_{1u}^2 + w_{1v}^2} + \sqrt{w_{2u}^2 + w_{2v}^2}}\right)$$

따라서 유클리드 평면에서의 각과 완전히 일치함을 알 수 있다.

Lorentz 평면의 성질

Lorentz 평면에서의 metric은 $ds^2 = dx^2 - dt^2$을 만족하며, PSD가 아니지만 두 점 사이의 거리를 $d = \sqrt{x^2 - t^2}$의 형태로 간주할 수 있다. $(d \in \mathbb{C})$

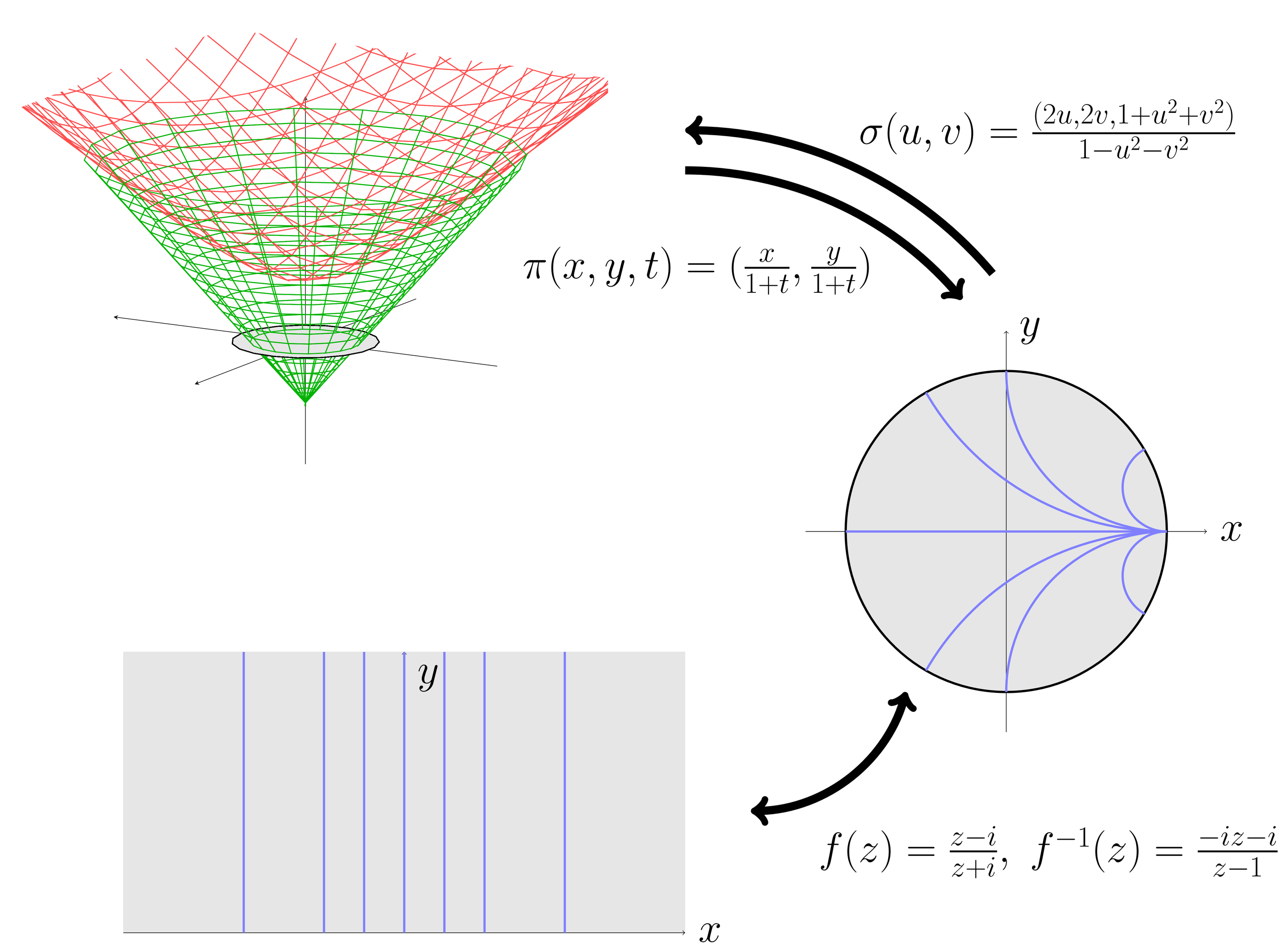
Lorentz 평면의 geodesic

E, F, G가 상수이므로 이에 대한 편미분값은 모두 0이다. 따라서

$$\frac{d}{dp}(E\dot{x} + F\dot{t}) = \frac{1}{2}(E_x\dot{x}^2 + 2F_x\dot{x}\dot{t} + G_x\dot{t}^2)$$
$$\frac{d}{dp}(F\dot{u} + G\dot{t}) = \frac{1}{2}(E_t\dot{x}^2 + 2F_t\dot{x}\dot{t} + G_t\dot{t}^2)$$

으로부터 $\ddot{x} = 0, \ddot{t} = 0$을 얻을 수 있고 geodesic은 $\gamma(p) = ax(p)t(p) + bx(p) + ct(p) + d$ (a, b, c, d는 상수)가 된다.

3차원 Lorentz 공간과 쌍곡 평면의 isometry



쌍곡 평면과 3차원 Lorentz 공간의 관계

3차원 Lorentz 공간 $\mathbb{L}^3$는 다음과 같이 정의된다:

$$\mathbb{L}^3 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2\}.$$

여기에서 원점과의 거리가 i이면서 $t > 0$인 $\mathbf{H}$는 위의 붉은 쌍곡면이다. 이를 $(0,0,-1)$을 기준으로 $xy-$plane에 사영을 하면 이는 $B_1(0,0)$ 에 들어가게 되고 이를 (u,v)로 두었을 때 다음과 같이 σ가 정의된다.

$$(x,y,t) = \sigma(u,v) = \left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right)$$

이를 통해 u와 v로 미분을 하면 다음과 같은 식이 나온다:

$$\sigma_u = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(1+u^2-v^2, 2uv, 2u),$$
$$\sigma_v = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(2uv, 1-u^2+v^2, 2v).$$

이를 통해 E, F, G를 구하면 다음과 같이 나온다:

$$E = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2},\;\; F = 0,\;\; G = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}$$

E, F, G를 구할 때 로렌츠 공간의 metric을 적용하여 구함에 유의하자. 이 model은 Poincaré disk model이라고 불리우며, 앞에서 언급했던 Poincaré half-plane model과 자연스러운 isomorphism이 있다. 자세한 내용은 을 보면 알 수 있다.

Lorentz 평면(공간)을 통한 시공간의 표현

특수 상대성 이론에서 시공간을 Lorentz 평면(공간)의 형태로 표현하며, 벡터($\overrightarrow{v}$)들을 원점으로부터의 거리로 다음과 같이 구분한다.

- light-like vector $(d(0, \overrightarrow{v}) = 0)$
- space-like vector $(d(0, \overrightarrow{v}) > 0)$
- time-like vector $(d(0, \overrightarrow{v}) < 0)$

등속 운동에서의 상대적 속도

관찰자 O와 O에서 등속도로 멀어지고 있는 관찰자 $\bar{O}$를 설정하면 O의 시각에서 O, $\bar{O}$가 관찰한 사건 p의 위치와 시간은 각각 $x(p), t(p)$ and $\bar{x}(p), \bar{t}(p)$로 표현될 수 있다..

특수 상대성 이론에서의 가정

1. 모든 관성계는 동등하다.
2. 빛의 속도는 일정하다.

첫번째 가정에 의해서 두 관성계 사이에는 metric을 보존하는 변환이 존재하는데, 따라서 우리는 이 변환을 Poincaré 변환으로로 생각할 수 있다..

O가 보는 $\bar{O}$의 속력

$\alpha = \beta = 1$인 특수 Lorentz 변환은 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(p) \\ \bar{t}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p) \\ t(p) \end{bmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

$\bar{O}$의 궤적을 매개변수 s로 나타내면, $\bar{x}(s) = 0$, $\bar{t}(s) = s$이다.

$$\begin{bmatrix} x(p) \\ t(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}$$

$x(s) = \sinh\phi \cdot s$, $t(s) = \cosh\phi \cdot s$이므로, O가 보는 $\bar{O}$의 속력은 $v = \tanh\phi$이다.

특수 상대성 이론의 주요 사실

1. 모든 입자의 속력은 1보다 작다.($\|\tanh(\phi)\| < 1$)
2. 빛의 속력은 모든 관성계에서 1이다.($dx^2 - dt^2 = 0$)
3. 한 관찰자의 입장에서 동시에 일어난 다른 위치에서의 사건이 다른 관찰자의 입장에서는 동시에 일어나지 않을 수 있다.
4. 한 관찰자의 입장에서 같은 장소에서 시차를 두고 발생한 두 사건이 다른 관찰자 입장에서 더 긴 시차를 두고 다른 장소에서 발생한 사건으로 인식된다.
5. 한 관찰자 입장에서 같은 시간에 발생한 서로 다른 위치에서의 사건 사이의 거리가 다른 관찰자 입장에서는 $\sqrt{1-v^2}$배로 감소되어 보인다.

참조

De Risi, V. The development of Euclidean axiomatics. Arch. Hist. Exact Sci. 70, 618p (2016). https://doi.org/10.1007/s00407-015-0173-9

http://newton.kias.re.kr/~kuessner/buch/HypGeom.pdf

Virginie Charette, Todd A. Drumm, Dieter Brill, Closed time-like curves in flat Lorentz space–times, Journal of Geometry and Physics, Volume 46, Issues 3–4, 2003, Pages 394-408, ISSN 0393-0440, https://doi.org/10.1016/S0393-0440(02)00153-5

양성덕의 미분 기하 강의 1편