1106 Class Activity

박예영

November 12, 2023

Complete graph $G = K_4$의 induced subgraph로서 (한 점을 지워서 만든) cycle $H = C_3$를 생각해봅시다.
이들의 adjacency matrices A_G 와 A_H의 eigenvalues를 계산하여 Cauchy's interlace theorem이 성립하는 것을 확인해봅시다.

Proof. G와 H의 adjacency matrix A_G, A_H는 아래와 같다.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

먼저, A_G의 eigenvalue를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$(A_G - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3, -1, -1, -1$$

마찬가지로, A_H의 eigenvalue를 구하면 다음과 같다.

$$(A_H - \mu I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\mu & 1 & 1 \\ 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\mu & 1 & 1 \\ 1 & -\mu & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\mu^3 + 3\mu + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 2, -1, -1$$

Cauchy's Interlace Theorem에 의하면 A_G의 eigenvalue를 내림 차순으로 각각 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 라고 하고, A_H의 eigenvalue를 내림 차순으로 각각 μ_1, μ_2, μ_3라고 한다면, $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \mu_3 \geq \lambda_4$가 성립해야한다.
실제로, $3 \geq 2 \geq -1 \geq \cdots \geq -1$이 성립하므로 Cauchy's Interlace Theorem이 잘 적용됨을 확인할 수 있다.

$\square$