0915 Class Activity

박예영

September 22, 2023

Parking function에 대해,
(1) 주차장소에 대한 선호도를 갖는 n대의 자동차가 일렬로 늘어선 n개의 주차공간에 주차하는 방법으로 정의한 것과
(2) 수열에 대한 조건으로 정의한 것이
왜 일치하는 지 설명하시오.

Proof. ($\Rightarrow$) 우리는 (1)번 정의를 만족시킨다면, (2)번 정의를 만족시킴을 보이면 됩니다. 즉, (2)번 정의를 만족시키지 않는 모든 수열은 (1)번 정의 또한 만족되지 않음을 보입시다.

먼저, (2)번 정의를 만족시키지 않는 수열 $(a_1, a_2, ..., a_n)$을 생각해 봅시다. 이 수열을 단조 증가하는 수열로 재배열 시켰을 때의 수열을 $(b_1, b_2, ..., b_n)$이라고 합시다. (2)번 정의를 만족시키지 않으므로, $(b_1, b_2, ..., b_n)$의 어떤 한 원소 b_i는 i보다 크다고 해봅시다. $(b_1, b_2, ..., b_n)$은 단조 증가하는 수열이라고 했으므로, b_i뒤에 있는 $b_{i+1}, b_{i+2}, ..., b_n$은 모두 i보다 큽니다. 다시 말해, $b_i \sim b_n$은 모두 i보다 큽니다.

즉, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ 중에서 i보다 큰 원소가 적어도 $n - i + 1$개 있음을 알 수 있습니다.

(1)번 정의에 의하면 $(a_1, a_2, ..., a_n)$은 각 차량이 원하는 주차공간 번호를 의미하는데, i번보다 큰 주차공간 번호를 원하는 차량이 적어도 $n - i + 1$대 있다는 뜻으로 해석할 수 있습니다.

이 $n - 1 + 1$대의 차량은 모두 i번보다 큰 번호를 선호하므로, i번 주차공간 뒤, 다시 말해, $(i + 1) \sim n$번의 주차공간에 주차를 할 수 밖에 없습니다.

가능한 주차공간은 $n - i$개가 있고, $n - i + 1$대의 차량이 주차를 하기에는 모자라므로 (1)번 정의를 만족하지 못함을 알 수 있습니다.

($\Leftarrow$) (2)번 정의를 만족시킨다면, (1)번 정의를 만족시킴을 보입시다. 즉, (1)번 정의를 만족시키지 못하면 (2)번 정의또한 만족시키지 못함을 보입시다.

그 말은 곧, i번 차가 들어왔는데 이 차가 원하는 주차공간의 번호부터 뒤에 있는 모든 주차공간이 가득 차서 더 이상 주차를 할 수 없다는 뜻이 됩니다.

각 차량 별로 원하는 주차공간 번호를 나타낸 수열 $(a_1, a_2, ..., a_n)$을 생각합시다. i번째 차량이 주차를 하려고 한다면, 그 이전에 $a_i \sim n$번의 주차공간이 모두 가득 차 있어야 합니다. 우리는 이 수열 $(a_1, a_2, ..., a_n)$를 단조 증가하도록 재배열한 수열 $(b_1, b_2, ..., b_n)$를 생각했을 때, 어떤 $b_j > j$임을 보이면 됩니다.

i번째 차량이 들어오기 전에 상황을 살펴봅시다. $(i-1)$대의 차량은 모두 잘 주차되어있고, 이때, $a_i \sim n$번의 주차공간은 모두 가득 차 있습니다. $(i-1)$번째 차량까지 주차를 했을 때 $p \sim n$번의 주차공간이 가득 차 있다고 하면, 이러한 p 중에서 가장 작은 것을 m이라고 합시다.

먼저, m은 1이 될 수 없습니다. $m = 1$이라고 하면 i번째 차량이 주차하기 이전부터 $1 \sim n$번의 주차공간이 모두 가득 차 있다는 뜻이 되는데, 이는 차량과 주차공간의 수가 맞지 않으므로 말이 되지 않습니다.

따라서 $m > 1$이라고 해봅시다. 즉, $(i-1)$번째 차량까지 주차를 했을 때, $m \sim n$번의 주차공간은 가득 차 있고, $(m-1)$번의 주차공간은 비어있습니다.

$1 \sim (i-1)$번째 차량들 중에서 m번 주차공간 이후에 주차한 차량들이 원했던 주차공간의 번호들은 모두 m보다 크거나 같습니다. 만약에 그러지 않았더라면, 즉, m번 주차공간 이후에 주차했던 차량이 원했던 주차공간의 번호가 m보다 작았더라면, 아무리 밀려나도 $(m-1)$번 주차공간에 주차를 할 수 있었으므로 말이 안됩니다.

$m \sim n$번 주차공간이 가득 차 있었으므로, 적어도 $n-m+1$대의 차량이 원했던 주차공간의 번호는 모두 m보다 크거나 같습니다. 우리는 a_i가 m보다 크거나 같다는 사실을 알고 있습니다. 즉, 우리는 적어도 $n-m+2$대의 차량(i번째 차량을 포함하여)이 m보다 크거나 같다는 사실을 알고 있습니다.

이제, $(a_1, a_2, ..., a_n)$을 단조 증가하도록 정렬한 $(b_1, b_2, ..., b_n)$을 봅시다. b_{m-1}을 봅시다. 이는 $(a_1, a_2, ..., a_n)$ 중에서 $n-m+2$번째로 큰 수이고, 우리는 m보다 크거나 같은 a_i가 적어도 $n-m+2$개 있다는 사실을 알고 있으므로, b_{m-1} 또한 m보다 크거나 같음을 알 수 있습니다.

따라서 이는 (2)번 정의를 만족하지 않는 수열임을 알 수 있습니다.

$\square$