

Chapter 3

이분그래프 Bipartite Graphs

A graph is bipartite, if its vertex set can be partitioned into two sets V_1 and V_2 in such a way that every edge of the graph joins a vertex in V_1 to a vertex in V_2 .

3.1 Bipartite graphs

1. 그래프가 이분그래프인 경우는, 두가지 색깔만을 이용하여 인접한 두 꼭짓점이 같은 색을 갖지 않도록 꼭짓점들을 색칠하는 방법이 존재하는 것과 일치합니다. 이 관점에서, bipartite는 bichromatic이라고 칭할 수 있겠습니다.

A graph is bipartite if and only if it is 2-colorable, i.e. its chromatic number is less than or equal to 2 (see §5.1).

2. The complete bipartite graph $K_{n,m}$ on m and n vertices is the bipartite graph $G = (V_1, V_2, E)$ where

- (a) V_1 and V_2 are vertex sets such that $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ and $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- (b) every edge in E connects every vertex in V_1 with all vertices in V_2 . Thus, $|E| = mn$.

3. A graph is bipartite if and only if its spectrum is symmetric (see §9).

3.2 Cycles of odd length

Lemma 3.1. *For every bipartite graph $G = (V_1, V_2, E)$,*

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \sum_{v \in V_2} \deg(v) = |E|.$$

Proof. For each $e \in E$, note that

$$+1 \bullet \text{---} \bullet +1$$

□

Proposition 3.2. *The cycle C_n is bipartite if and only if n is even.*

Proof. (\Leftarrow) Take $V_1 = \{1, 3, \dots, 2k-1\}$ and $V_2 = \{2, 4, \dots, 2k\}$. (\Rightarrow) Suppose that $n = 2k+1$ and it is bipartite and thus $V = V_1 \cup V_2$. Note that $\deg(v) = 2$ for all $v \in V$. Then, by the previous theorem $|V_1| = |V_2|$ and it contradicts to the assumption that n is odd. □

Theorem 3.3. *A connected graph is bipartite if and only if it contains no cycle of odd length.*

Proof. (\Rightarrow) See the above theorem. (\Leftarrow) For a fixed $v \in V$, we define

$$V_1 = \{u \in V : \text{the length of a shortest path from } v \text{ to } u \text{ is odd}\},$$

$$V_2 = \{u \in V : \text{the length of a shortest path from } v \text{ to } u \text{ is even}\}.$$

Now we show that there is no edge incident with two vertices $x, y \in V_1$ (or V_2) (why?). □

Proposition 3.4. 1. *All trees are bipartite.*

2. *For all $n \geq 1$, a $n \times n$ square grid graph (also called lattice graph) is bipartite.*

Proof. For (1), note that no trees contain cycles. For (2), take $V_1 = \{(x, y) : x + y \text{ is odd}\}$ and $V_2 = \{(x, y) : x + y \text{ is even}\}$. □

3.3 Degree sequences

The degree sequence of an undirected graph is a monotonic nonincreasing sequence of the vertex degrees of the graph.

정보다 크거나 같은 정수들로 구성된 유한수열이 주어졌을때, 과연 이 수열을 꼭짓점의 차수 수열로 갖는 단순 그래프가 존재할지 물어볼 수 있겠습니까 이 맥락에서 다음과 같은 결과들이 알려져있습니다

Theorem 3.5 (The Erdős-Gallai theorem 1960). *A sequence of non-negative integers $d_1 \geq \dots \geq d_n$ can be represented as the degree sequence of a finite simple graph on n vertices if and only if $d_1 + \dots + d_n$ is even and*

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$$

holds for every $1 \leq k \leq n$.

Theorem 3.6 (The Gale-Ryser theorem 1957). *A pair of sequences of nonnegative integers (a_1, \dots, a_n) and (b_1, \dots, b_n) with $a_1 \geq \dots \geq a_n$ is bigraphic (the degree sequence of a labeled simple bipartite graph) if and only if for all $1 \leq k \leq n$*

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^n \min(b_i, k) \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

Chapter 4

평면그래프 Planar graphs

A graph is planar, if it can be drawn in the plane with no edges crossing.

4.1 Euler's formula

Theorem 4.1 (Euler's formula). *Any connected plane (p, q) -graph divides the plane into r regions, where*

$$p - q + r = 2.$$

This equation is also known as Euler's polyhedron formula.

Proof. If there is a cycle then remove an edge from it. Then, the remaining graph has $p' = p$ vertices, $q' = q - 1$ edges, and $r' = r - 1$ regions. Note that $p' - q' + r' = p - q + r$. Repeat this procedure until no cycles remain. Then the remaining graph is a tree and it has $|E| = |V| - 1$ with one region. Note that this argument works even for graphs with loops or multiple edges. Let us find some more proofs. \square

오일러는 정사면체, 정육면체와 같은 볼록 다면체 convex polyhedron에 대해, 정확히는 볼록 다면체의 표면에 대해, 다음과 같은 관계식이 항상 성립한다는 사실을 기술하였습니다 (1758).

$$V - E + F = 2$$

이를 오일러의 다면체 정리라고 합니다. 이때 나타나는 양 $\chi = V - E + F$ 을 오일러 지표 Euler characteristic이라고 부르는데 이는 위상수학적 불변량이 됩니다. 다면체의 한 면을 확장시켜 모든 나머지 점, 선, 면을 이 평면에 사영시키면 평면그래프를 얻을 수 있고, 이제 평면그래프에 대한 오일러 공식을 적용시켜서 다면체 정리를 얻을 수 있겠습니다. cf. 데카르트의 결손각 정리

Example 4.2. 1. 다섯개의 정다면체 regular polyhedron 표면에 대해 오일러의 다면체 정리를 확인해봅시다.

2. (볼록이 아닌 다면체 경우로) 사면체 두개가 한점에서 혹은 한 선분을 따라 붙은 다양체의 표면, 그리고 원환면 torus 을 다면체로 만든 후 그 표면의 오일러 지표를 계산해봅시다.

4.1.1 Chords of a circle

Theorem 4.3 (Chords of a circle). *Suppose we have n points around a circle and we join each pair of points by a chord such that no three chords intersect at the same point. The interior of the circle divided into*

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

regions.

Proof. 각 꼭짓점과 바로 옆의 두 꼭짓점을 이어서 원 안쪽에 n 각형을 만들면 이 n 각형의 선분과 원둘레로 만들어진 n 개의 조각이 나옵니다. 이제 n 각형 내부에 대해 생각해봅시다.

원 둘레의 나머지 모든 점들과 잇고 나면 이는 complete graph K_n 이 될텐데 내부에 생긴 교점마다 새로 꼭짓점을 부여하여 이를 평면그래프로 만들어봅시다. 새로 생긴 꼭짓점 원둘레의 두쌍의 점으로 만든 두개 직선마다 하나씩 생긴 교점들이므로, 이들의 개수는 $\binom{n}{4}$ 입니다. 따라서 이 평면그래프의 꼭짓점의 개수는

$$p = n + \binom{n}{4}.$$

원둘레를 따라 원래 있던 꼭짓점의 차수는 K_n 에서와 마찬가지로 $(n-1)$ 입니다. 새로 부여한 꼭짓점들의 차수는 두 직선이 교차하여 만든 점이므로 4입니다. 이에 handshaking lemma를 적용하여 선분의 개수를 구할 수 있습니다.

$$2q = (n-1)n + 4\binom{n}{4}.$$

이제 오일러의 공식을 적용하여 영역의 개수를 구해봅시다.

$$r = 2 - p + q = 2 - n + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

여기서 구한 영역의 개수는 그래프 외부 영역을 포함하고 있으므로, 하나를 빼고, n 각형의 제일 바깥쪽 선분들과 원둘레로 이루어진 영역 n 개를 더하여 원하는 영역의 개수를 구할 수 있습니다.

$$\left(2 - n + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}\right) - 1 + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

□

Example 4.4. Suppose n cuts are made across a pizza. Let p_n denote the maximum number of pieces which can result (this happens when no two cuts are parallel or meet outside the pizza, and no three are concurrent). Then,

$$p_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

See Anderson Exercise 3.15 and its answer. Alternatively, you can try to find a recurrence relation.

4.1.2 Area of a polygon

Theorem 4.5 (Pick's theorem). *The area of a polygon, all of whose vertices are lattice points in a coordinate plane is*

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1$$

where I is the number of lattice points in the interior and B being the number of lattice points on the boundary.

Proof.

□

Let us consider a planar simple polygon with a positively oriented (counterclockwise) sequence of points $P_i = (x_i, y_i)$ for $i = 1, \dots, n$ in a Cartesian coordinate system. We let $P_0 = P_n$ and $P_{n+1} = P_1$.

Theorem 4.6 (Shoelace formula). *The area of the polygon is given by*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \cdots + x_n y_1 - x_1 y_n) \end{aligned}$$

Note that it sums up the oriented areas A_i of triangles $\Delta OP_i P_{i+1}$:

4.1.3 Best way to lace your shoes

From What is the best way to lace your shoes? by Burkard Polster (Nature 2002), “The $2n$ eyelets of an idealized shoe are the points of intersection of two vertical lines and n equally spaced horizontal lines in the plane. The two columns of eyelets are one unit apart, and two adjacent rows of eyelets are a distance h apart. An n -lacing of our shoe is a closed path in the plane that consists of $2n$ line segments, the end points of which are the $2n$ eyelets.”

Theorem 4.7. *The number of n -lacings is*

$$\frac{(n!)^2}{2} \sum_{k=0}^m \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{k}^2$$

where $m = n/2$ for even n , and $m = (n-1)/2$ for odd n .

4.2 Planarity testing

Definition 4.8. *The degree of a region of a plane graph is the number of encounters with edges in a walk round the boundary of the region.*

Proposition 4.9. *Every planar graph whose regions all have even degree is bipartite.*

e.g. lattice graphs.

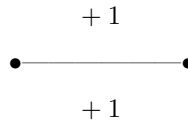
Lemma 4.10. *In a connected plane graph, the sum of degrees of the regions is $2|E|$.*

Proof. Just like the handshaking lemma (Theorem 1.1), we want to count the following set in two different ways

$$S = \{(e, r) \in E \times R : e \text{ is a part of the boundaries of } r\}$$

주의할 점으로, Figure 4.1에서 보듯, AFD 영역의 차수를 세기 위해서는 선분 AE를 두번 세어야하고, 집합 S는 이경우 같은 원소를 두개 갖고 있어야하는데...

Alternatively, for each $e \in E$, note that



□

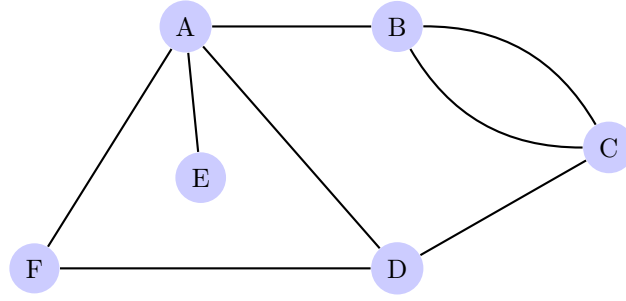


Figure 4.1: Degree of a region

Theorem 4.11. *For a connected simple planar G with $v \geq 3$ (therefore $e \geq 2$),*

1. $2e \geq 3f$.
2. $e \leq 3v - 6$.
3. $e \leq 2v - 4$, if G does not contain K_3 .
4. $f \leq 2v - 4$.

Proof. By Euler's formula, $|R| = 2 - |V| + |E|$. By the degree sum formula,

$$2|E| = \sum_{r \in R} \deg(r) \geq \sum_{r \in R} 3 = 3|R|.$$

Thus, $|R| \leq \frac{2}{3}|E|$. Using Euler's formula, we have $|E| \leq 3|V| - 6$. If G does not contain K_3 then we can use the fact $\deg(r) \geq 4$ for all $r \in R$. The last one follows from the degree sum formula. \square

Proposition 4.12. 1. K_5 is not planar.

2. $K_{3,3}$ is not planar.
3. The Petersen graph is not planar.

Proof. (1) Suppose K_5 is planar. Then, $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, which is a contradiction. Alternatively, if it is planar then $r = 7$ because $p = 5$ and $q = 10$. On the other hand, each region should have degree at least 3 and thus

$$2q \geq 3r$$

which is not possible.

(2) Suppose $K_{3,3}$ is planar. Then $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Note that $K_{3,3}$ is bipartite and thus does not contain C_3 . Alternatively, if it is planar then $r = 5$ because $p = 6$ and $q = 9$. It is bipartite and therefore does not have odd cycles. This shows that each region should have degree at least 4 and thus

$$2q \geq 4r,$$

which is not possible.

(3) If it is planar then $r = 7$ because $p = 10$ and $q = 15$. By observation, the shortest cycle length is 5 and thus the degree of a region is at least 5.

$$2q \geq 5r,$$

which is not possible. □

그래프의 평면성에 대해 다음과 같은 필요충분 조건이 알려져있습니다.

Theorem 4.13 (Kuratowski's theorem). *A graph is planar if and only if it does not contain a subdivision of K_5 or $K_{3,3}$ as a subgraph.*

cf. Mac Lane's planarity criterion.

4.3 Dense and sparse graphs

갖고 있는 선분의 수가 가능한 최대의 숫자에 가까운 그래프를 dense graph 조밀한 그래프 또는 밀집 그래프라고 하고, 그 반대의 경우를 sparse graph 성긴 그래프 또는 희소 그래프라고 합니다. 이 정의는 그리 명확하지 않은 채로 통용되는 편입니다.

4.3.1 Graph density

단순 그래프의 경우, 선분은 두개의 꼭짓점마다 하나씩 가능하므로 가능한 선분의 최대 개수는 $|V|(|V|-1)/2$ 가 되어 그래프의 밀도 density를 다음과 같이 정의할 수 있습니다. For undirected simple graphs, the graph density is

$$D = \frac{|E|}{\binom{|V|}{2}} = \frac{2|E|}{|V|(|V|-1)}.$$

밀도는 0과 1사이이며, complete graph K_n 의 경우 최대 밀도 1이되는 것을 확인할 수 있습니다.

유향 directed 그래프를 고려한다면, 두개의 꼭짓점마다 두 종류의 방향이 가능하므로 밀도는 다음과 같이 정의할 수 있습니다. For directed simple graphs, the graph density is

$$D = \frac{|E|}{2\binom{|V|}{2}} = \frac{|E|}{|V|(|V|-1)}.$$

4.3.2 Maximal planar graphs

A simple planar graph is called maximal planar, if adding an edge between any two non-adjacent vertices results in a non-planar graph. If a maximal planar graph has v vertices with $v > 2$, then it has precisely $3v - 6$ edges and $2v - 4$ faces (Theorem 4.11). All faces (including the outer one) are then bounded by three edges, explaining the alternative term plane triangulation.

Example 4.14. 1. K_4 and $K_5 \setminus e$ are maximal planar.

2. The octahedral graph and the Goldner–Harary graph are maximal planar.

평면 그래프에 대해서는, 꼭짓점의 개수가 2보다 많은 경우에 한정하여, 선분의 개수보다는 유한 영역의 개수를 이용하여 정의하는데, 앞서 Theorem 4.11에서 본 것과 같이 $|R| \leq 2|V| - 4$ 이고 그래프를 둘러싼 무한 영역을 제외하면 가능한 최대 유한 영역은 $2|V| - 5$ 입니다. 따라서 밀도는 다음과 같이 정의할 수 있겠습니다.

$$D = \frac{|R| - 1}{2|V| - 5} = \frac{|E| - |V| + 1}{2|V| - 5}$$

이 값은 0부터 1 사이로, 모든 수형도는 $D = 0$ 이고 maximal planar graphs의 경우 $D = 1$ 입니다. 이 값은 the meshedness coefficient로 알려져 있기도 합니다.