0911 Class Activity

박예영

September 19, 2023

Let U_n be the number of unlabeled trees on n vertices. Prove that for $n > 3$,

$$\frac{n^{n-2}}{n!} < U_n < \binom{2n-2}{n-1}$$

.

Proof. 1. $n^{n-2} < U_n n!$

U_n의 원소 G의 각 정점마다 $1, 2, 3, ..., n$의 라벨을 부여하여, 이 G들을 모은 집합 S_n을 생각해봅시다. 이 집합은 원소 G 하나 당 라벨을 부여하는 방법이 총 $n!$가지 존재하므로, $|S_n| = U_n n!$입니다.

n개의 정점을 가지는 labeled tree의 집합을 T_n이라고 합시다.

S_n은 unlabeled tree의 각 정점에 라벨을 부여하여 모은 집합이므로, 명백히 $|T_n| \leq |S_n|$이 성립합니다.

S_n에 있는 일직선 모양의 두 그래프 G, G'을 생각해봅시다. G에는 $(1, 2, ..., n)$의 라벨이 부여되었고, G'에는 $(n, n-1, ..., 2, 1)$의 라벨이 부여되었습니다. 두 그래프 G와 G'은 서로 isomorphic하므로, $|S_n| \neq |T_n|$입니다. 따라서, $|T_n| < |S_n|$입니다.

2. $U_n < \binom{2n-2}{n-1}$

Rooted tree는 U_n의 원소 G의 특정한 한 정점에 라벨을 부여한 그래프입니다. 이 정점을 root라고 부릅니다. n개의 정점을 가진 rooted tree의 집합을 R_n이라고 합시다. R_n은 U_n의 원소 G의 한 정점에 라벨을 부여하여 모은 집합이므로, 명백히 $|U_n| < |R_n|$이 성립됩니다.

0을 $n-1$개, 1을 $n-1$개 사용하여 만든 수열 $(a_1, a_2, ..., a_{2n-2})$을 생각해봅시다. 이 수열들을 모은 집합을 A_n이라고 합시다.

$|A_n| = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \dbinom{2n-2}{n-1}$입니다.

한편, 다음과 같은 방법으로 A_n의 원소(수열)를 통해 rooted tree를 구성한다고 해봅시다.

1. root가 하나 존재한다고 해봅시다. 수열을 순서대로 보면서, 1이 나오면 한 정점에 간선을 잇습니다. 이때, 이을 수 있는 정점들 중 root와 가장 먼 정점에 간선을 잇습니다.

2. 0이 나오면 한 간선에 정점을 붙입니다. 이때, 붙일 수 있는 간선들 중에서 root와 정점의 거리가 가장 멀도록 하는 간선에 정점을 붙입니다.

Rooted tree T가 있다면, T를 만드는 수열이 존재함을 확인할 수 있습니다.

한편, 0으로 시작하는 수열은 위의 방법을 통해 rooted tree를 구성할 수 없습니다.

따라서 $|R_n| < |A_n|$입니다.

따라서, $|U_n| < |R_n| < |A_n| = \dbinom{2n-2}{n-1}$입니다. □