0918 Class Activity

박예영

September 20, 2023

다음과 같이 정의된 수열 a_n의 일반항을 생성함수(generating function)방법을 이용하여 구해봅시다.

$$a_n - 3a_{n-1} = n^2 \text{ for } n > 0 \text{ and } a_0 = 1$$

Proof. 생성 함수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$를 생각해 봅시다.

Recurrence relation을 활용하기 위해, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 3a_{n-1})x^n$을 생각해봅시다.

이 식은 다음과 같이 변형시킬 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 3a_{n-1})x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - n)x^n + nx^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}
\end{aligned}$$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$이므로, 이를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= x^2 g^{''} + xg^{'} \\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

한편, 생성 함수 $f(x)$를 활용하여 같은 식을 다르게 변형시킬 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 3a_{n-1})x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} \\ &= f(x) - 1 - 3xf(x) \\ &= f(x)(1-3x) - 1\end{aligned}$$

따라서, $f(x)$는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x}{(1-x)^3} &= f(x)(1-3x) - 1 \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3(1-3x)} + \frac{1}{1-3x}\end{aligned}$$

우리는 a_n을 구하기 위해 $f(x)$를 다시 무한합 꼴로 고쳐야합니다. Geometric series를 이용하면 무한합 꼴로 쉽게 고칠 수 있으므로, 부분분수 분해를 통해 원하는 계수를 얻어내봅시다.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3(1-3x)} + \frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{(1-x)^3} + \frac{d}{1-3x} + \frac{1}{1-3x}\end{aligned}$$

이렇게 놓고, 계수 a, b, c, d를 구해봅시다.

$$\begin{aligned}\text{즉, } x^2 + x &= a(1-x)^2(1-3x) \\ &+ b(1-x)(1-3x) \\ &+ c(1-3x) \\ &+ d(1-x)^3\end{aligned}$$

를 만족시키는 계수 a, b, c, d를 구해봅시다.

먼저, 위의 식에 $x = 1$을 대입하면 $c = -1$임을 쉽게 알 수 있습니다.

또한, 위의 식에 $x = 1/3$을 대입하면 $d = 3/2$임을 알 수 있습니다.

이후, $x=0$을 대입하면 $a+b=-1/2$라는 식을 얻어낼 수 있습니다.

$x=2$를 대입하면 $6=-5a+5b+5-3/2 \rightarrow 5a-5b=-5/2 \rightarrow a-b=-1/2$를 얻어낼 수 있습니다.

따라서, $(a,b,c,d)=(-1/2,0,-1,3/2)$입니다.

이를 참고하여 $f(x)$를 고치면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a}{1-x}+\frac{b}{(1-x)^2}+\frac{c}{(1-x)^3}+\frac{d}{1-3x}+\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{2(1-x)}-\frac{2}{2(1-x)^3}+\frac{5}{2(1-3x)} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{5}{2}3^n\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n
\end{aligned}$$

따라서 $a_n=-\frac{1}{2}-\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{5}{2}3^n=\frac{5\cdot 3^n-n^2-3n-3}{2}$입니다. $\square$