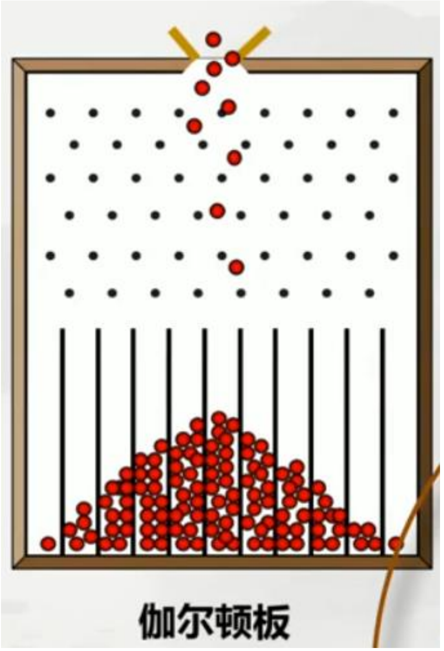
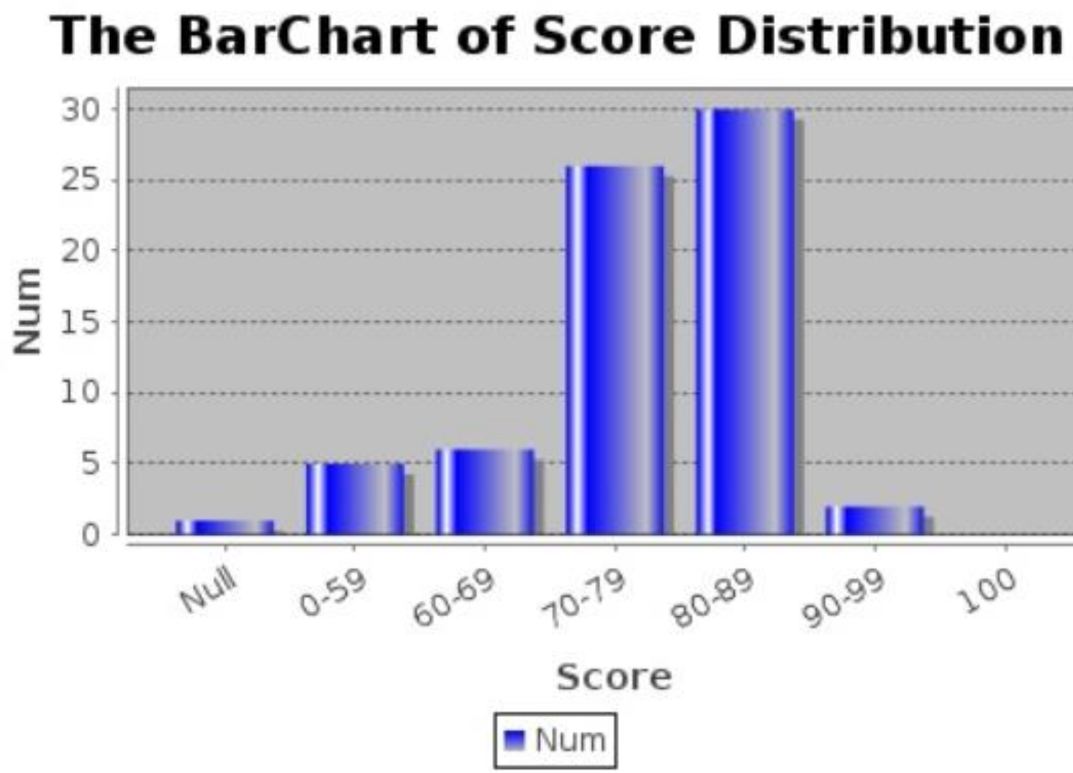
3.6 麦克斯韦速率分布

某个分子的运动方向和速率遵循力学规律，存在偶然性。

大量分子的平衡态速率分布遵循统计规律。

涨落现象： 观测值与统计值存在偏差。

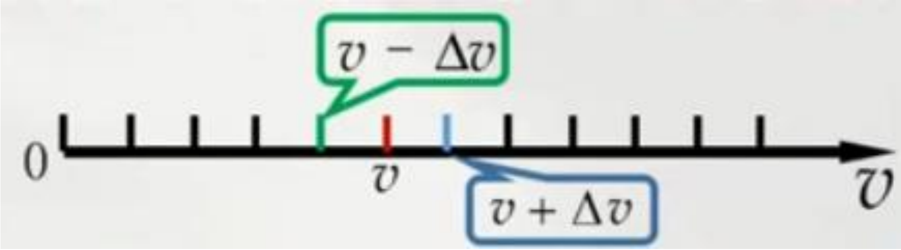




3.6　麦克斯韦速率分布

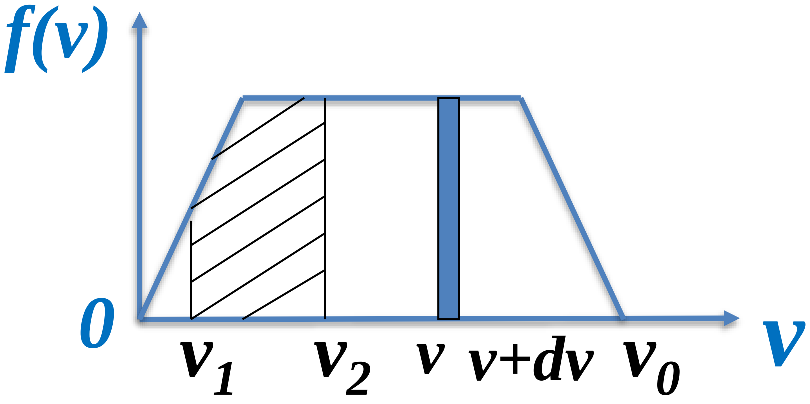
研究分子速率分布：按照速率区间分组。

N: 气体分子总数



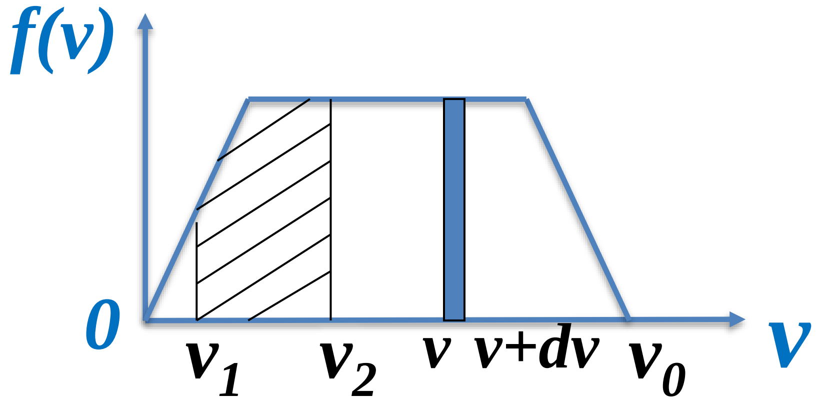
d*N*$_v$：速率分布在某区间 v ~v + dv内的分子数

d*N*$_v$**/*N***：此区间内的分子数占总分子数的百分比。



3.6 麦克斯韦速率分布

速率分布函数： 速率 v 附近的单位速率区间内分子数，占总分子数的比率。



$$f(v)dv = \frac{dN_v}{N} \quad f(v) = \frac{dN_v}{N dv}$$

归一化条件：

$$\int_0^N \frac{\mathrm{d}N_v}{N} = \int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1$$

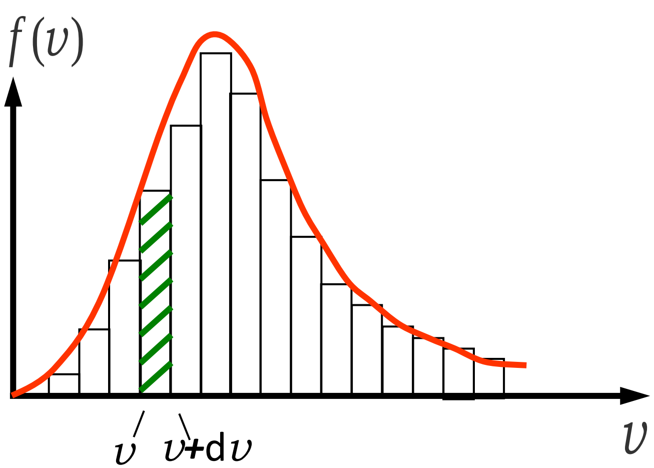
3.6 麦克斯韦速率分布

单个粒子的速度由于碰撞不断变化。大量粒子中处某一特定速度范围内的比例几乎不变。

1858年麦克斯韦理论推导出理想气体平衡态的速率分布函数：

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

$$\begin{cases} m\text{——分子质量} \\ k\text{——Boltzmann常量} \\ T\text{——温度} \end{cases}$$



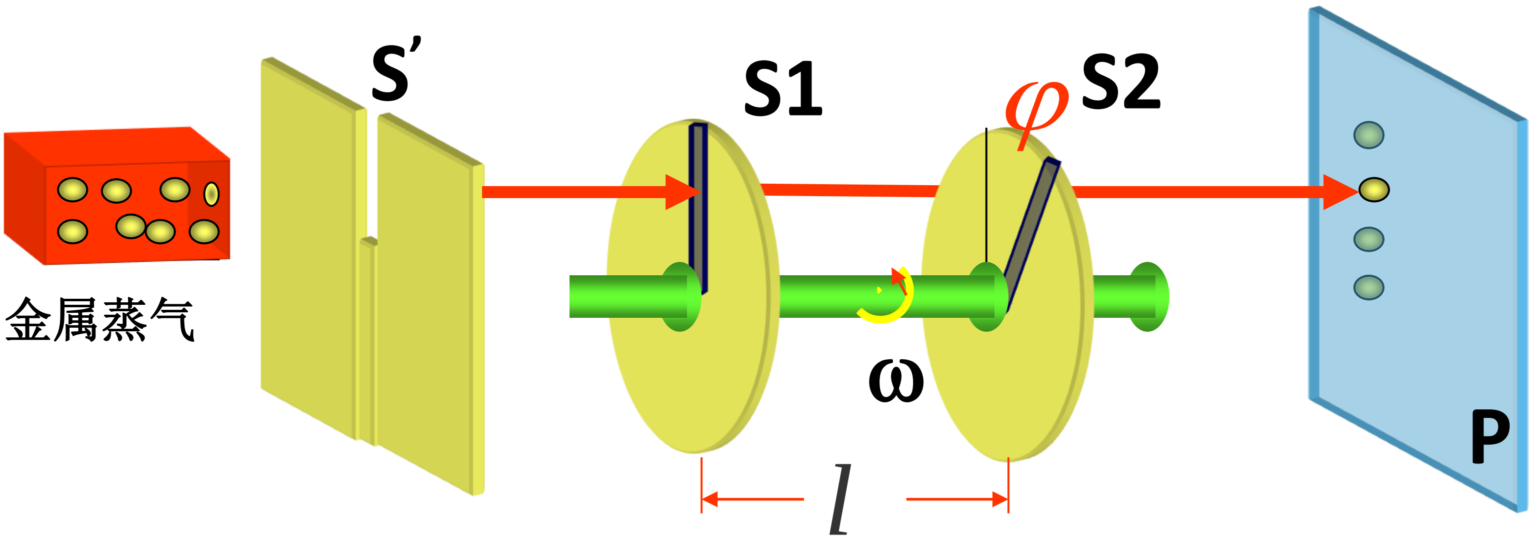
麦克斯韦（1831-1879），英国人。经典电动力学的创始人，统计物理学的奠基人之一

1861年世界上第一张彩色照片
苏格兰花格尼缎带

3.6 麦克斯韦速率分布

气体分子速率分布的实验测定：　　**兰眉尔脱实验**

两个共轴旋转的金属盘上分别有等宽的狭缝，两个狭缝错开一定角度。两个盘以角速度ω转动。仪器置于真空中。



不是所有速率的分子都能通过分子筛的。
可通过的分子速率需满足关系：

$$\frac{l}{v} = \frac{\varphi}{\omega} \qquad v = \frac{l}{\phi}\omega$$

改变ω等可让不同速率的分子通过，分别测出分子束强度。

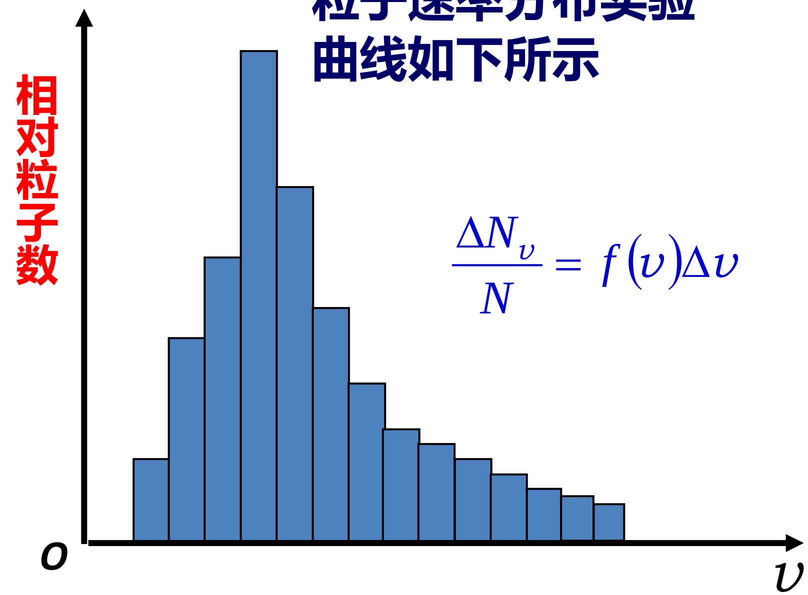
3.6 麦克斯韦速率分布

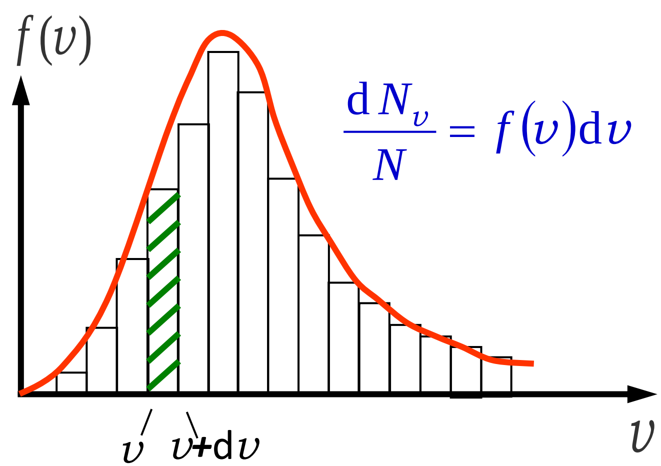
下面列出了Hg分子在某温度时不同速率的分子数占总分子的百分比。

$v(m/s)$	$\Delta N/N\%$
90以下	6.2
90 — 140	10.32
140 — 190	18.93
190 — 240	22.70
240 — 290	18.30
290 — 340	12.80
340 — 390	6.2
390以上	4.0

$\Delta v = 50m/s$

粒子速率分布实验曲线如下所示

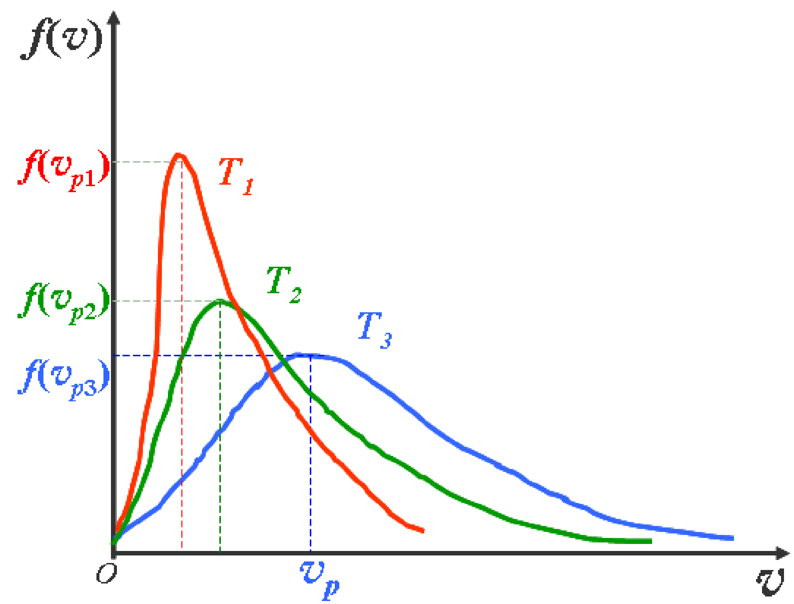




3.6 麦克斯韦速率分布

最概然速率v_P $\left.\dfrac{df(v)}{dv}\right|_{v=v_P}=0 \Rightarrow v_p=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}=\sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$

最概然分布： $f(v_p)=\dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{8m}{\pi kT}}$



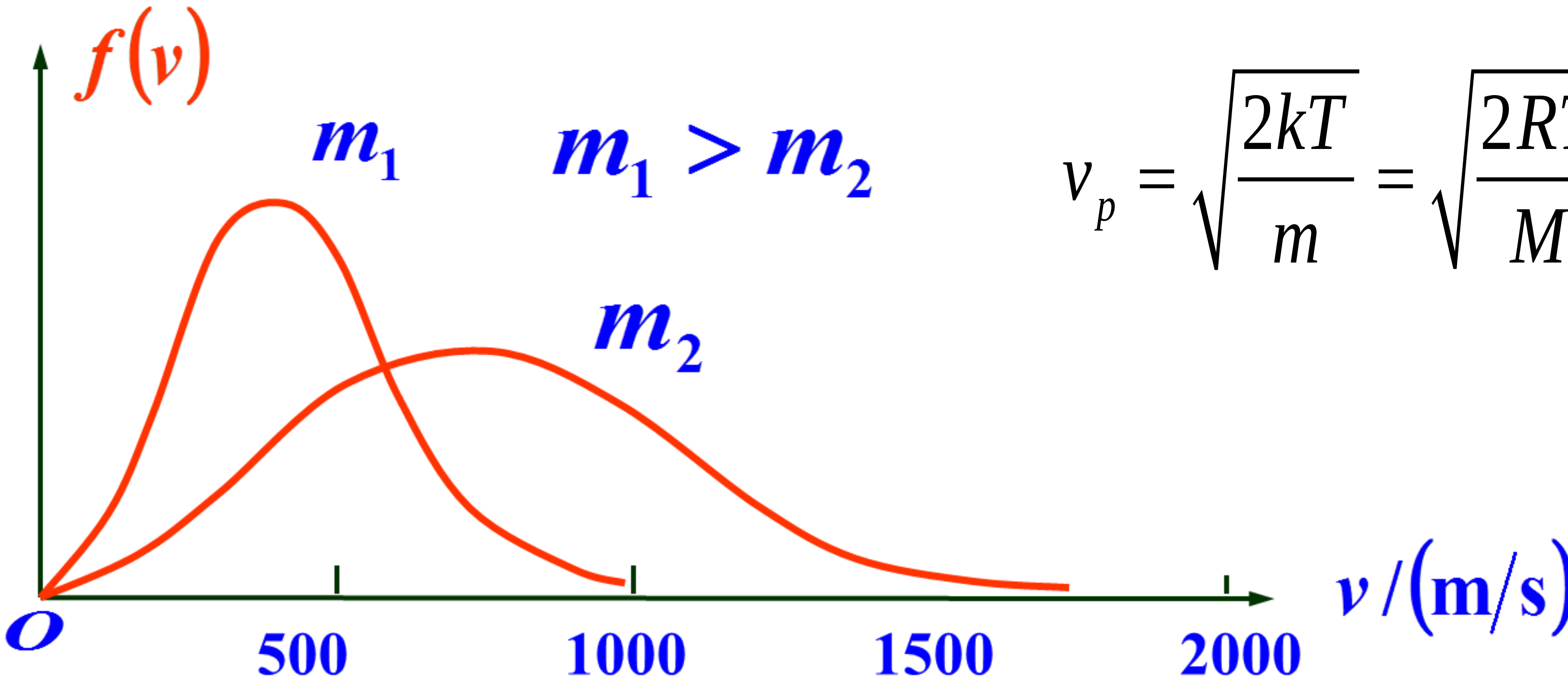
氧气73K,氧273K,氢273K

(1) v_p 随 T 升高增大，随m增大而减小。

(2) **温度越高，速率大的分子数越多**

3.6　麦克斯韦速率分布

麦克斯韦速率分布和气体分子质量 m 的关系



$m_1 > m_2$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

相同温度下，不同质量气体分子的麦克斯韦速率分布曲线

3.6 麦克斯韦速率分布

分子速率的三种统计平均值

(1) 方均根速率：压强，温度，平动动能

$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2 f(v)\,\mathrm{d}\,v=\frac{3kT}{m} \qquad \sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

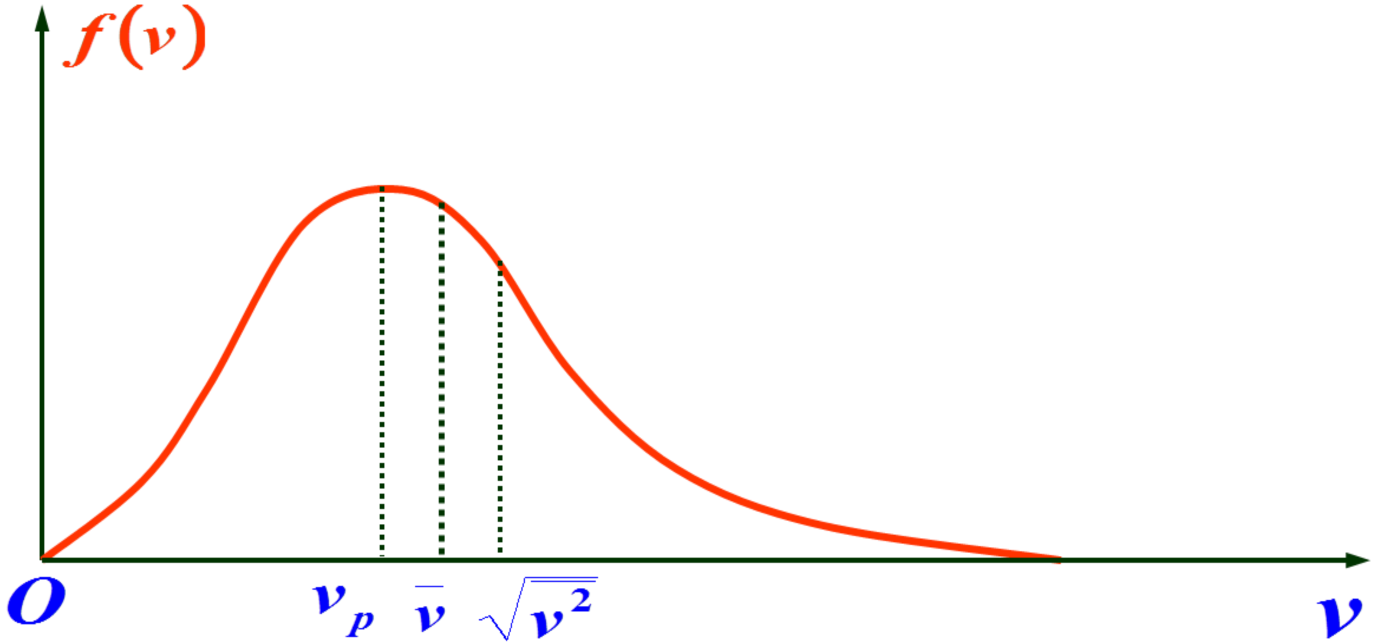
(2) 平均速率：分子输运，自由程

$$\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)\,\mathrm{d}\,v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\ m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

(3) 最概然速率：分子速率分布

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,v}\right|_{v=v_p}=0 \qquad v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}\approx 1\cdot 41\sqrt{\frac{RT}{M}}$$

3.6 麦克斯韦速率分布



某一温度下分子速率的三个统计值

$$\sqrt{\overline{v^2}} > \bar{v} > v_p$$

2020年度天津市职工月平均工资为6777元

3.6 麦克斯韦速率分布

例题：

$$f(v)dv = \frac{dN}{N}$$

气体中速率在*v—v+dv*间的分子数的比率

$$N \cdot f(v)dv = dN$$

分布在v 附近 v—v + dv 间隔内的分子数

$$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$$

速率分布在 v1—v2 之间的分子数

3.6 麦克斯韦速率分布

例题： H_2在0^0C时方均根速率、平均速率和最概然速率

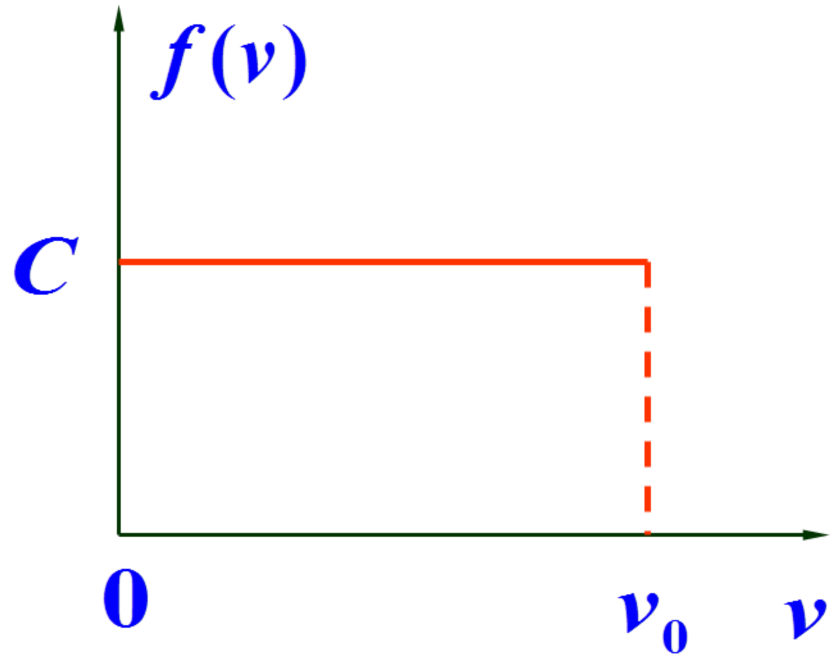
$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.3 \times 273}{2 \times 10^{-3}}} = 1843\mathrm{m/s}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1698\mathrm{m/s}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 1502\mathrm{m/s}$$

3.6 麦克斯韦速率分布

例题： 大量粒子的速率分布曲线如图所示，求：(1)*C*; (2)平均速率、方均根速率。



解：(1)由速率分布曲线可得：

$$\begin{cases} f(v)=C & (0\le v\le v_0) \\ f(v)=0 & (v>v_0) \end{cases}$$

根据速率分布的归一化条件，可得：

$$\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v=1 \longrightarrow \int_0^{v_0} C\,\mathrm{d}v=1 \longrightarrow C=\frac{1}{v_0}$$

(2)粒子的平均速率

$$\bar{v}=\int_0^{v_0} vf(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} vC\,\mathrm{d}v=\frac{1}{v_0}\int_0^{v_0} v\,\mathrm{d}v=\frac{v_0}{2}$$

$$\overline{v^2}=\int_0^{v_0} v^2 f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} v^2C\,\mathrm{d}v=\frac{1}{v_0}\int_0^{v_0} v^2\,\mathrm{d}v=\frac{v_0^2}{3}$$

粒子的方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\frac{v_0}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}v_0}{3}$$

3.6　麦克斯韦速率分布

作业：3.22

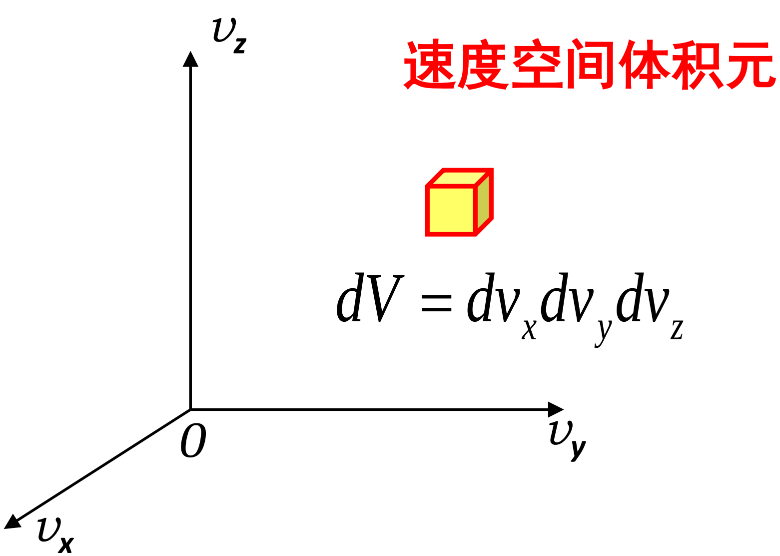
3.7 玻耳兹曼分布（了解）

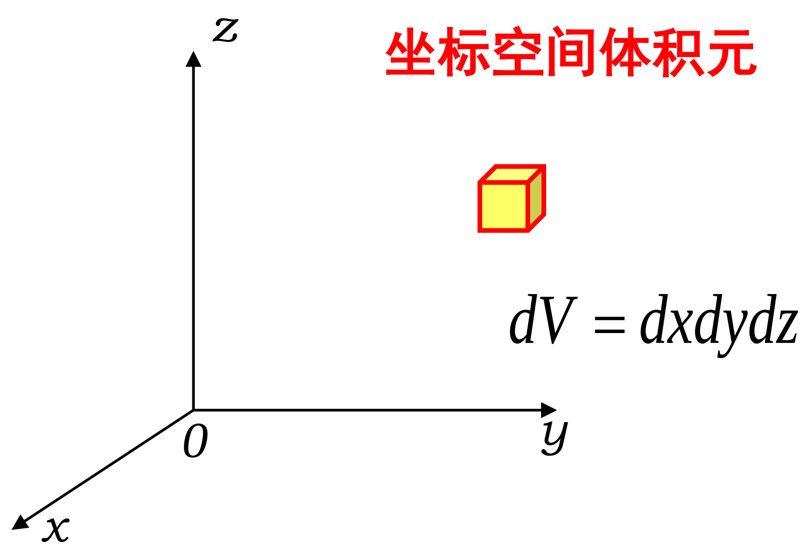
麦克斯韦速率分布中分子只有动能。但如果气体在重力场中运动？

玻尔兹曼考虑了分子既有动能又有势能的情况。

动能是速度的函数，势能是位置的函数。

既要考虑分子的速度分布，又要考虑空间分布。

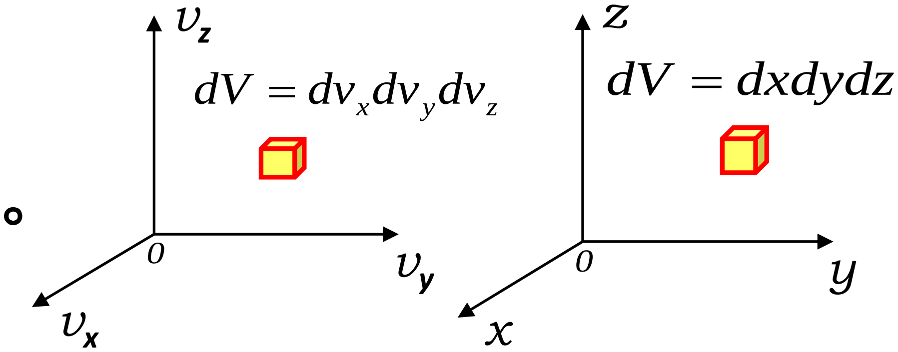




3.7 玻耳兹曼分布（了解）

玻尔兹曼分布：

分子数在平衡态按能量的分布。



$$\mathrm{d}N = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-\varepsilon}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy d_z$$

总能量$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p$

能量最低原理！

ε_k: 动能　ε_p： 势能

n_0： ε_p=0处，单位体积内的分子总数(包含各种速度）。

3.7 等温气压公式（了解）

空间体积元内的分子数 （对速度空间积分）

$$dN' = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\iiint e^{\frac{-\varepsilon_K}{kT}}dv_x dv_y dv_z e^{\frac{-\varepsilon_p}{kT}}dxdydz$$

$$= n_0 e^{\frac{-\varepsilon_p}{kT}}dxdydz$$

单位体积内的分子数： $n = \frac{dN'}{dxdydz} = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}$

重力场中的分子分布： $n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$

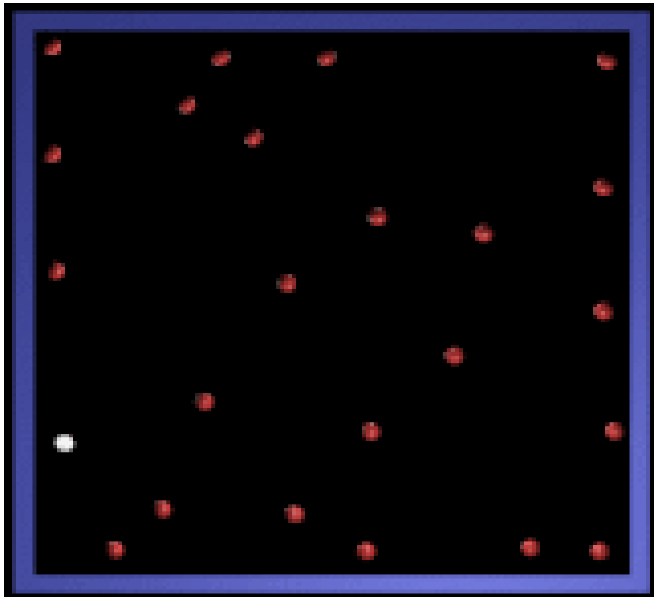
等温气压公式：

$$p = nkT \qquad p = n_0 kT e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

升高100米，大气压强降低133帕，可粗略估计高度变化。

3.8 平均碰撞频率和自由程

氮气常温时平均速率达到476m/s，大于声速。但气味的传递速度？



平均自由程： $\bar{\lambda}$

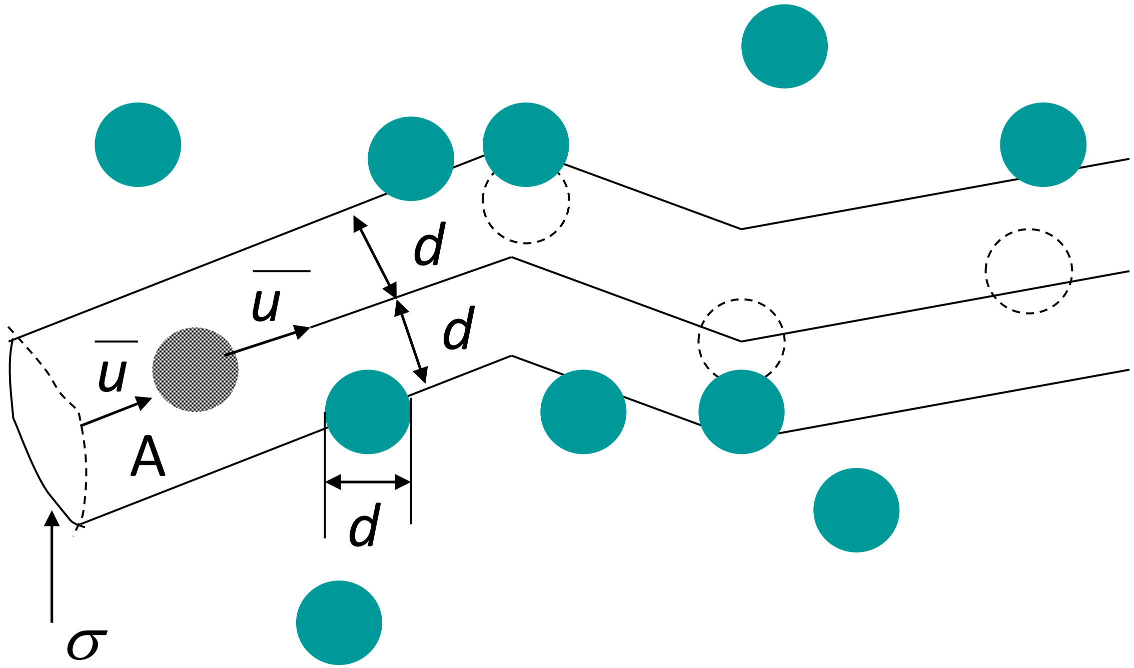
一个分子连续两次碰撞之间经历的平均自由路程。

平均碰撞频率：

一个分子单位时间里受到平均碰撞次数$\bar{Z}$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$$

3.8 平均碰撞频率和自由程



设直径为d的分子***A*** 以相对平均速率v 运动，其它分子静止。运动方向上，以 ***d*** 为半径的圆柱体内分子都将与分子***A*** 碰撞。该圆柱体的面积 σ叫碰撞截面

$$\sigma = \pi d^2$$

3.8 平均碰撞频率和自由程

碰撞频率： 每秒内运动分子碰撞次数

$$\bar{Z} = (\pi d^2)\bar{v}n \qquad \text{(每秒截面内能进入的分子数)}$$

考虑其他分子也在运动，碰撞次数修正：

$$\bar{Z} = \sqrt{2}n\pi d^2\bar{v}$$

平均自由程为：

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}p\pi d^2} \qquad p = nkT$$

0摄氏度，1标准大气压，分子直径$3.5\times10^{-10}m$。
平均碰撞频率: 65亿次/秒。平均自由程：$6.9\times10^{-8}m$

例题：

一定量的理想气体，在容积不变的条件下，温度升高时，分子的平均碰撞频率$\bar{Z}$和平均自由程$\bar{\lambda}$的变化情况：

A. $\bar{Z}$增加， $\bar{\lambda}$ 不变
B. $\bar{Z}$不变， $\bar{\lambda}$增加
C. $\bar{Z}$增加， $\bar{\lambda}$ 增加
D. $\bar{Z}$不变， $\bar{\lambda}$ 不变

$$\bar{Z} = \sqrt{2} n \pi d^2 \bar{v}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$$

3.8　平均碰撞频率和自由程

3.25

3.26