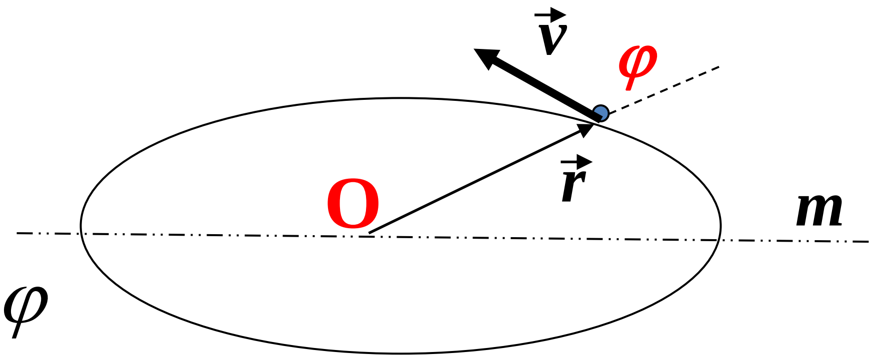
2.4 刚体定轴的角动量定理

复习：质点角动量

质点相对于某定点的角动量：



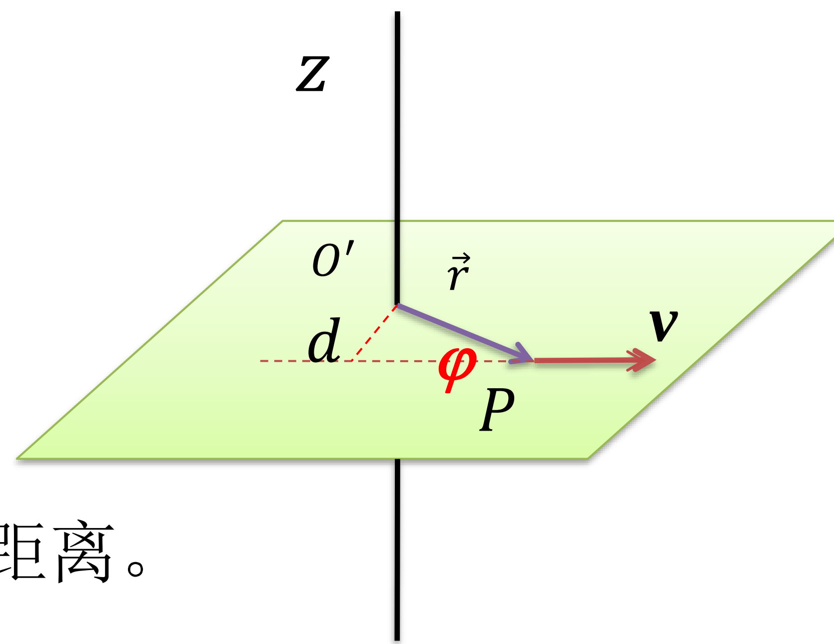
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

大小： $L = pr\sin\varphi = mvr\sin\varphi$

方向： 右手螺旋法确定

质点相对于某定轴的角动量：

质点在与转轴垂直的平面内运动



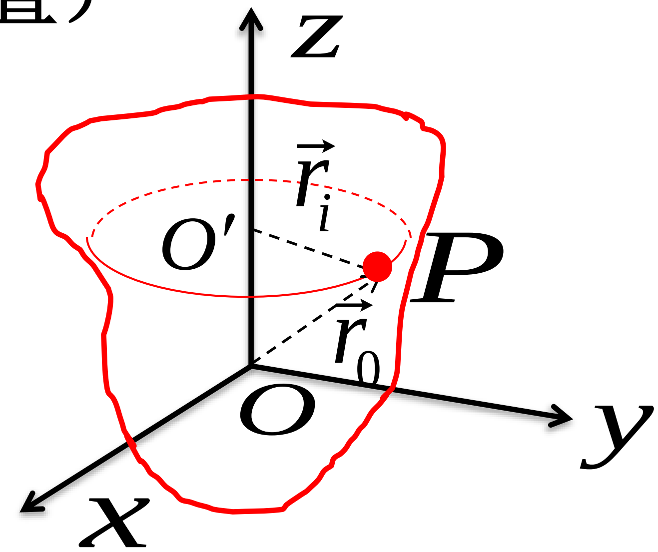
$$L = pr\sin\varphi = mvr\sin\varphi$$

$$= mvd$$

d是质点速度的直线与转轴的垂直距离。

2.4.1 刚体定轴转动的角动量

圆周运动的刚体，其质元相对转轴与转动平面交点的**角动量**：（位矢与速度垂直）



$$L_i = \Delta m_i \upsilon_i r_i = \Delta m_i r_i^{\ 2} \omega$$

刚体相对于定轴的角动量：

$$L = \sum_{\mathrm{i}} \Delta m_i r_i^{\ 2}\, \omega = I\omega$$

注：此角动量是相对于某转轴而言.

2.4.2 刚体角动量定理

刚体定轴转动的角动量定理：

$$M = I\beta = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{dt} \qquad \int_{t_1}^{t_2} M\,\mathrm{d}\,t = L_2 - L_1$$

刚体所受合外力矩等于其角动量的时间变化率。

合外力矩的冲量矩等于刚体角动量的增量。

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

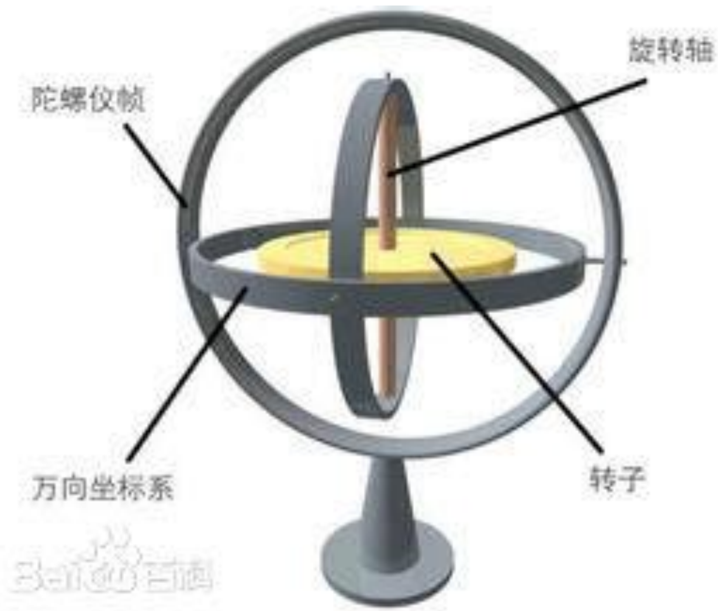
若 $M = 0$ $\longrightarrow$ $L = I\omega = \text{const.}$

2.4.2 刚体角动量守恒定律

2.4.2 刚体角动量守恒定律

陀螺仪: 主要是由一个位于轴心且可旋转的转子构成。

原理： 转子高速旋转时，角动量很大，**旋转轴会一直稳定指向一个方向**。转子的角动量要够大。不然，只要一个很小的力矩，就会严重影响到它的稳定性。



鸟类-自带陀螺仪

例:人和转盘的转动惯量为J_0 ,哑铃的质量为m

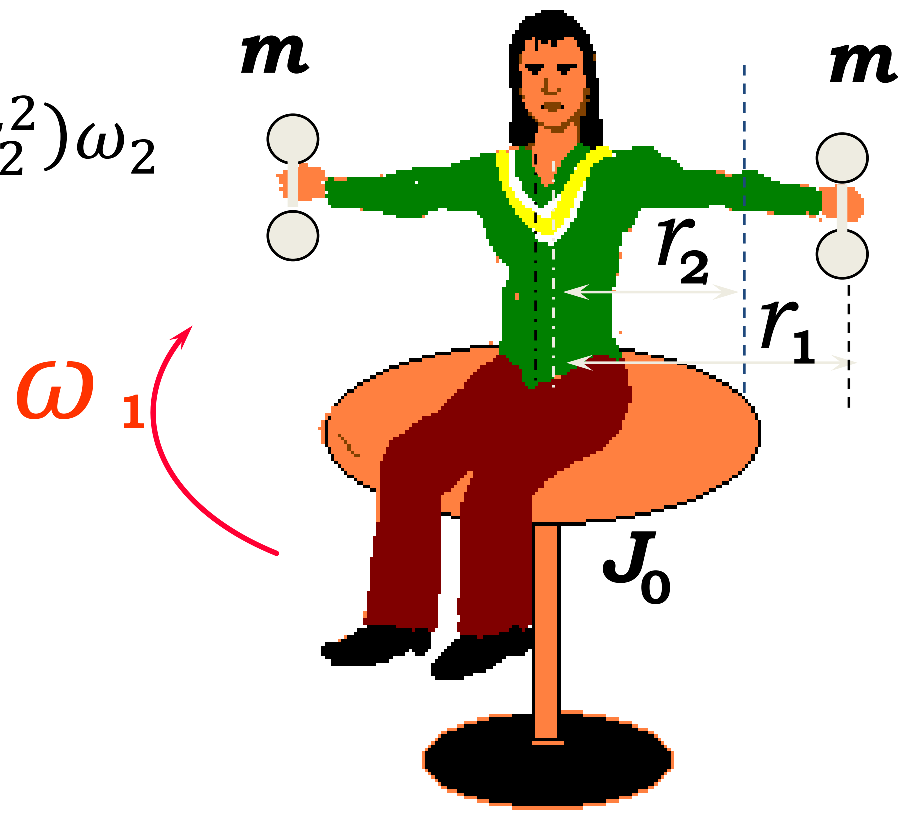
初始转速为 ω_1。求：双臂收缩由 r_1 变为r_2 时的

角速度及机械能增量。

解：由角动量守恒

$$(J_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (J_0 + 2mr_2^2)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{J_0 + 2mr_1^2}{J_0 + 2mr_2^2}\omega_1$$



$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(J_0 + 2mr_2^2)\omega_2^2 - \frac{1}{2}(J_0 + 2mr_1^2)\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(J_0 + 2mr_1^2)\omega_1^2\left(\frac{J_0 + 2mr_1^2}{J_0 + 2mr_2^2} - 1\right) > 0$$

非保守内力（运动员）作正功 ，机械能增加
双臂收缩这一个过程中，人体无法视为刚体，
不能应用刚体的动能定理。

但是角动量依然守恒，角动量定理对转动惯量是否为定值没有限制，可应用于非刚体。

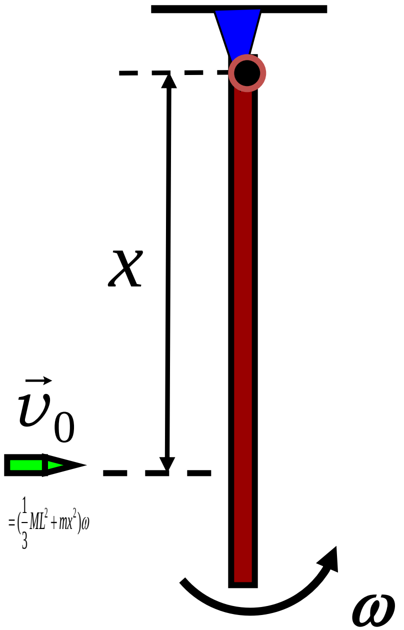
例 一均质棒,长度为 L,质量为M,现有一子弹在距轴为 x处水平射入细棒,子弹的质量为 m ,速度为 v_0 .求子弹细棒共同的角速度 ω

解:

因子弹、细棒碰撞时间极短，可认为细棒在射入瞬间没有角位移。

重力及支持力相对转轴力矩为零，角动量守恒。相对转轴的角动量为：

$$mv_0x = I\omega = (\frac{1}{3}ML^2 + mx^2)\omega$$



$$\omega = \frac{mv_0x}{\frac{1}{3}ML^2 + mx^2}$$

作业

2.22

2.23