2.2 刚体定轴转动动力学

力 → 改变质点的运动状态 → 质点获得加速度

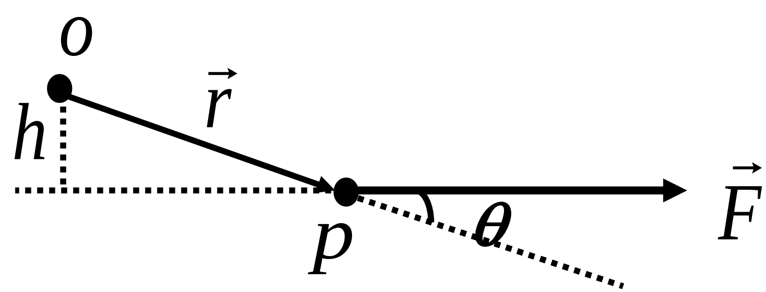
力矩 → 改变刚体的转动状态 → 刚体获得角加速度

对刚体定轴转动有影响的是力与转轴垂直的分量，且作用线不能通过转轴。

复习：力相对某一点的力矩： $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

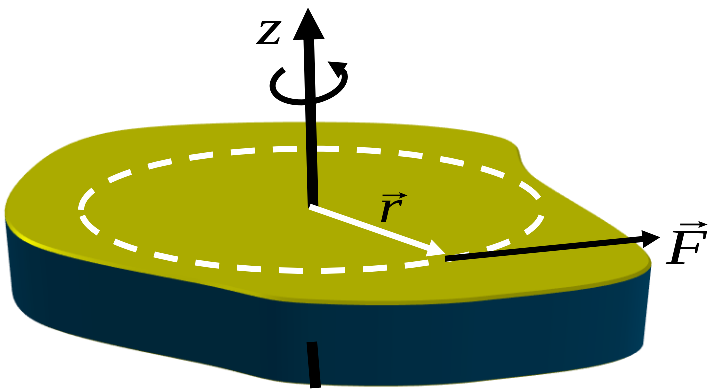
大小 $M=rF\sin\theta=Fh$

方向 右螺旋法则确定



2.2.1 相对固定轴的力矩

刚体的力矩：相对于**转轴**



1) 力在垂直于轴的平面内时

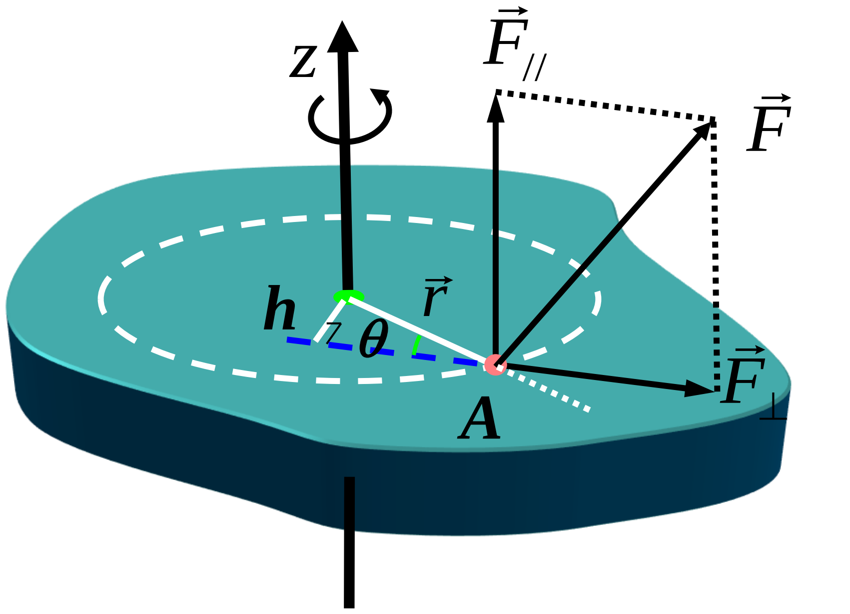
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

2) 力不在垂直于轴的平面内时

需将力分别向**垂直于轴**以及**平行于轴**方向做正交分解

对轴的有效力矩应为：

$$M=rF_{\perp}\sin\theta=F_{\perp}h$$

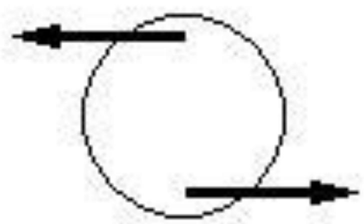


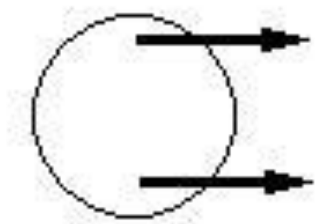
3) 力矩迭加原理：

$$\vec{M}=\sum\vec{M}_i$$

判断题： $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ $\vec{M}=\sum\vec{M}_i$

合外力为零，合外力矩是否为零？
合外力矩为零，合外力是否为零？





外力为零时：质心运动状态不变
力矩不为零：圆盘转动状态改变

外力不为零：质心运动状态改变
力矩不为零，圆盘转动状态改变

2.2.1 相对固定轴的力矩

均匀细棒绕过端点且的水平固定轴转动，其受到的**重力矩**可以视为**重力全部作用在质心处时**的力矩。

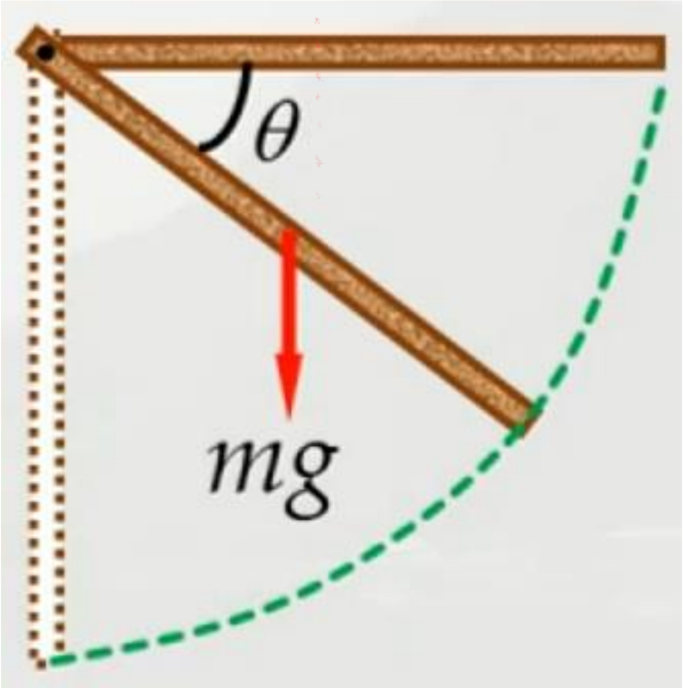
证明：距离转轴x处，杆上质元

$dm = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$相对转轴的力矩大小为

$$\mathrm{d}M = \left(\frac{m}{l}\mathrm{d}xg\right)x\cos\theta$$

整个杆受到的力矩大小

$$\int_0^l \frac{m}{l}\mathrm{d}x\, gx\cos\theta = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$



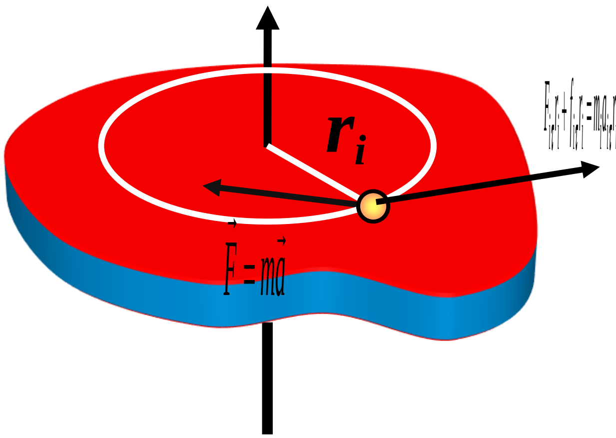
力矩方向：向内

这与作用在质心处，大小为mg的力产生的力矩相同

2.2.2 刚体定轴转动定律

牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$

刚体转动定律 $M = I\beta$



第 i 个质元受力 $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i\vec{a}_i$

切线方向受力 $F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i a_{i\tau}$

在上式两边同乘以 r_i $F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = m_i a_{i\tau} r_i = m_i r_i^2 \beta$

对所有质元求和

$$\sum F_{i\tau} r_i + \sum f_{i\tau} r_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\beta$$

内力矩之和为0

2.2.3 转动惯量

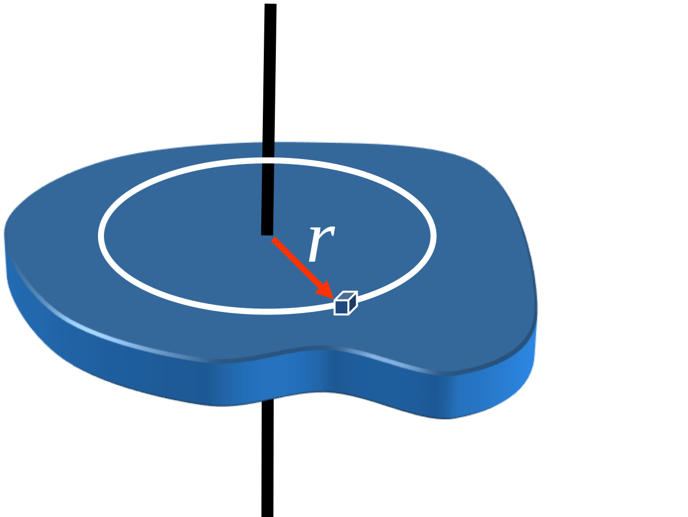
转动惯量： 物体保持原有转动状态不变的性质。

转动惯量计算：

$$
I = \begin{cases} \sum\limits_i \Delta m_i r_i^{\;2} & \text{(质量不连续分布)} \\ \sum\limits_i \Delta m_i r_i^{\;2} & \text{(质量连续分布)} \end{cases}
$$

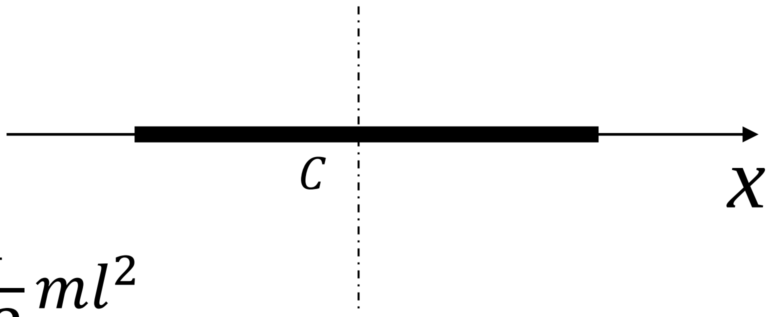
确定转动惯量的相关要素：

1) 总质量
2) 质量分布
3) 转轴的位置



2.2.3 转动惯量：转轴位置

例：质量 *m*、长 *l*的匀质细杆，转轴垂直细杆位于质心C、端点O、 过与质心O点相距为d的O’求细杆的转动惯量。



(a) 转轴位于质心C

$$I_C = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dm = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2$$

$$dm = \frac{m}{l} dx \quad \text{线}$$

$$dm = \frac{m}{S}\, dx\, dy \quad \text{面}$$

$$dm = \frac{m}{V}\, dx\, dy\, dz \quad \text{体}$$

(b) 转轴位于一端O

$$I_O = \int_0^l x^2 dm = \frac{m}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2$$

(c) 位于O’

$$I_{O'} = \int_{-(\frac{l}{2}-d)}^{\frac{l}{2}+d} x^2 dm = \frac{1}{12} ml^2 + md^2$$

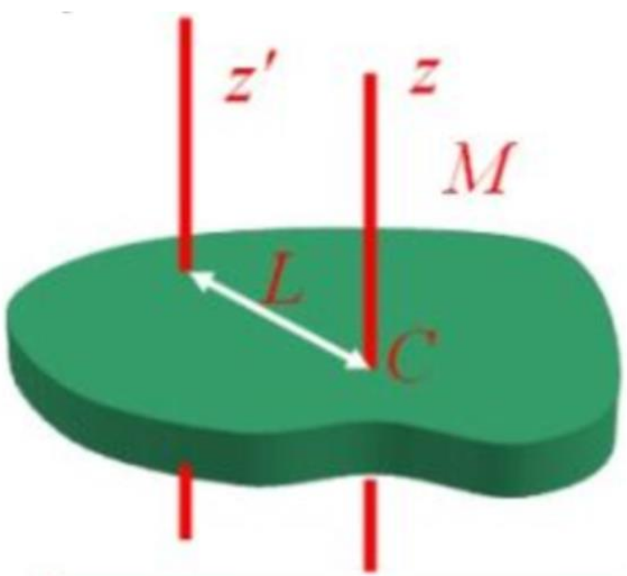
2.2.3 转动惯量：转轴位置

转轴位于质心C点：
$$I_C=\int_{-l/2}^{l/2}x^2dm=\frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2}x^2dx=\frac{1}{12}ml^2$$

转轴位于O'：
$$I_{O'}=\int_{-(\frac{l}{2}-d)}^{\frac{l}{2}+d}x^2dm=\frac{1}{12}ml^2+md^2$$

平行轴定理：通过刚体相对**质心轴**的转动惯量，可计算**与质心轴平行**的其他转轴的转动惯量。

$$I_{O'}=I_c+md^2$$

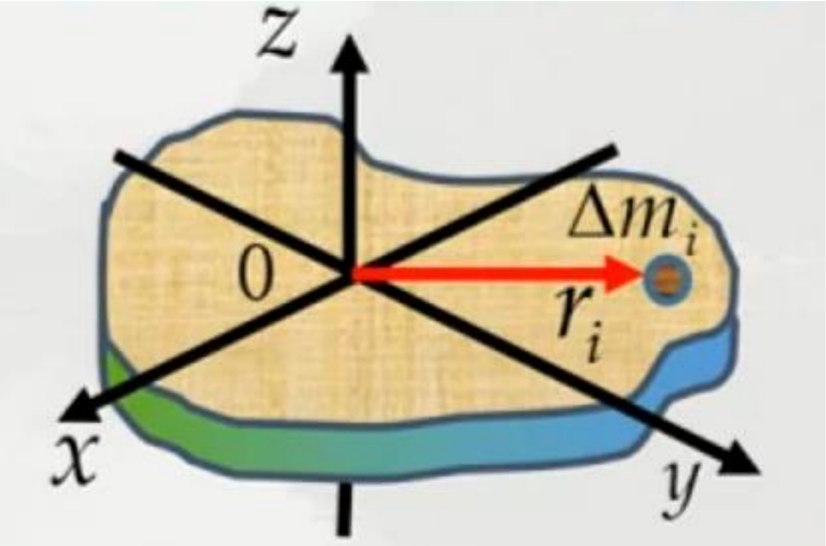


2.2.3 转动惯量：转轴位置（了解）

垂直轴定理：

计算关于与刚体**薄片垂直轴**的转动惯量。

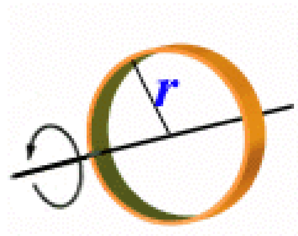
$$I = I_x + I_y$$

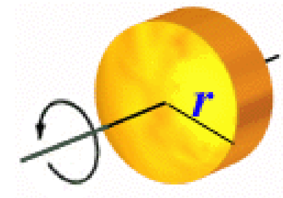


x，y是互相垂直且与垂直轴相交的轴。

2.2.3 转动惯量：质量分布（了解）

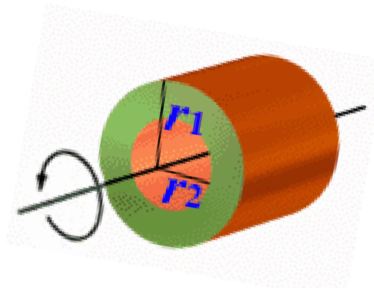
$$I_c = mr^2$$

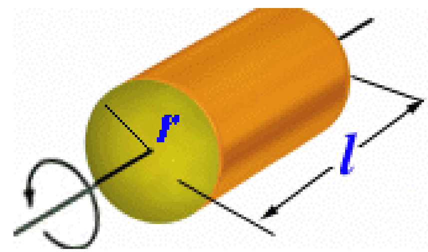




$$I_c = \frac{1}{2}mr^2$$

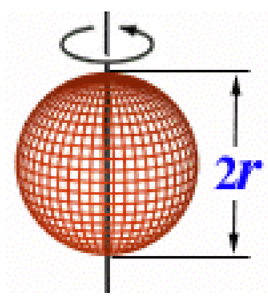
$$I_c = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$$

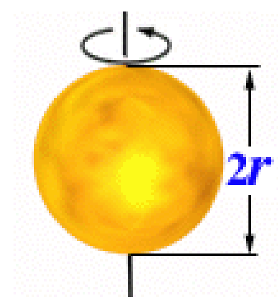




$$I_c = \frac{1}{2}mr^2$$

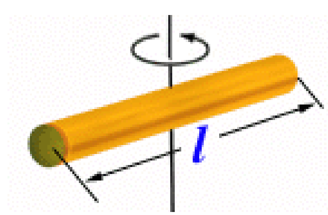
$$I_c = \frac{2}{3}mr^2$$

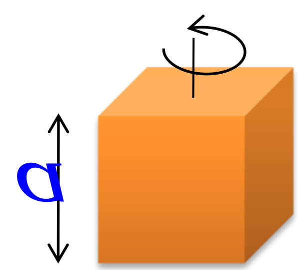




$$I_c = \frac{2}{5}mr^2$$

$$I_c = \frac{1}{12}ml^2$$



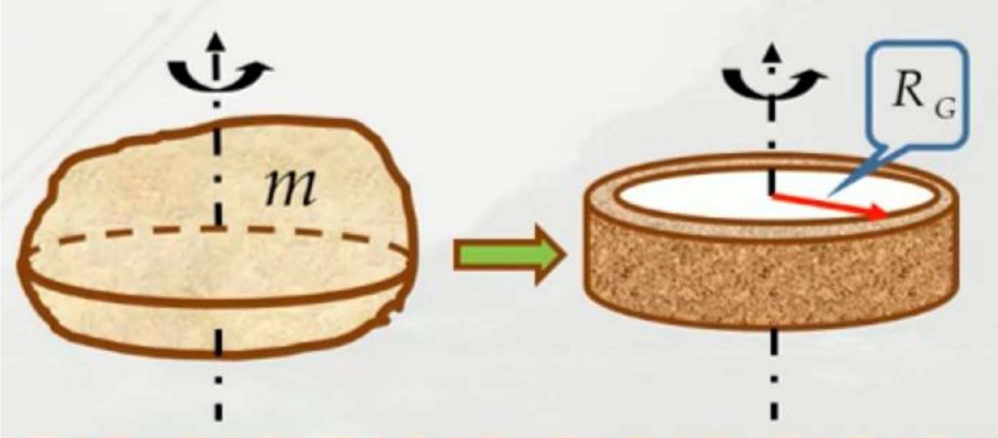


$$I_c = \frac{1}{6}ma^2$$

2.2.3 转动惯量：回转半径(了解)

回转半径R_G：
为研究转动效果，将物体质量视为全部集中在距离转轴为R_G的圆周上。

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}$$



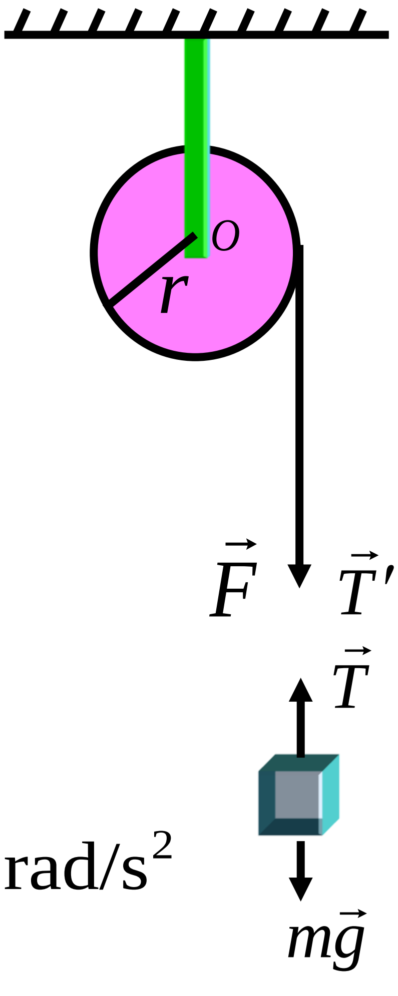
已知某结构的回转半径，可以估计估计不同质量情况下的转动惯量：

$$I = mR_g{}^2$$

例 一轻绳绕在半径 r =20 cm 的飞轮边缘，飞轮的转动惯量 I=0.5 kg·m²，飞轮与转轴间的摩擦不计，

求 (1)在绳端施以F=98 N 的拉力，飞轮的角加速度

(2) 如以重量P =98 N的物体挂在绳端，计算飞轮的角加速度



解 (1) $Fr = I\beta$

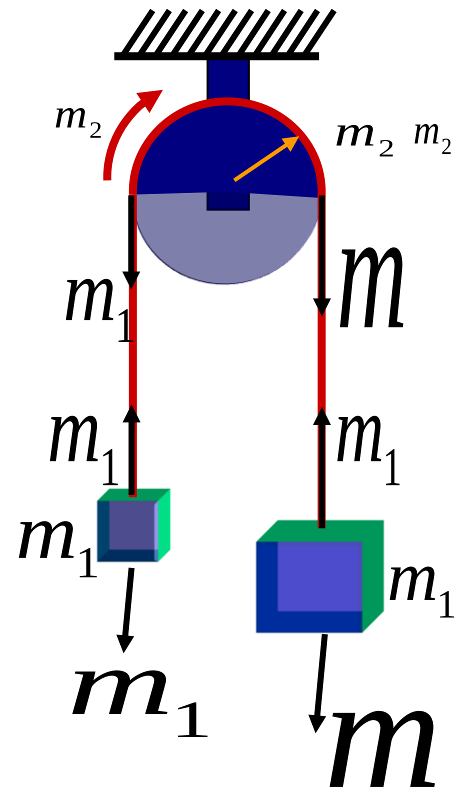
$$\beta = \frac{Fr}{I} = \frac{98 \times 0.2}{0.5} = 39.2\ \mathrm{rad/s^2}$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} mg - T &= ma \\ Tr &= I\beta \\ a &= r\beta \end{aligned}\right\} \quad \beta = \frac{mgr}{I + mr^2}$$

$$= \frac{98 \times 0.2}{0.5 + 10 \times 0.2^2} = 21.8\ \mathrm{rad/s^2}$$

例 一定滑轮质量为 m，半径为 r，不能伸长的轻绳两边系 m_1 和 m_2 的物体挂于滑轮上（$m_1 > m_2$），绳与滑轮间无相对滑动。求滑轮转动角速度随时间的变化。

解 假设滑轮顺时针转动为正方向。



物体 m_1 $\qquad m_1 g - T_1 = m_1 a$

物体 m_2 $\qquad T_2 - m_2 g = m_2 a$

滑轮 m $\qquad T_1 r - T_2 r = I\beta = \frac{1}{2} m r^2 \beta$

$$a = r\beta$$

求解可得：

$$\beta = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)r} \qquad \omega = \omega_0 + \beta\ t = \frac{(m_1 - m_2)gt}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)r}$$

2.2 作业

2.15

2.16