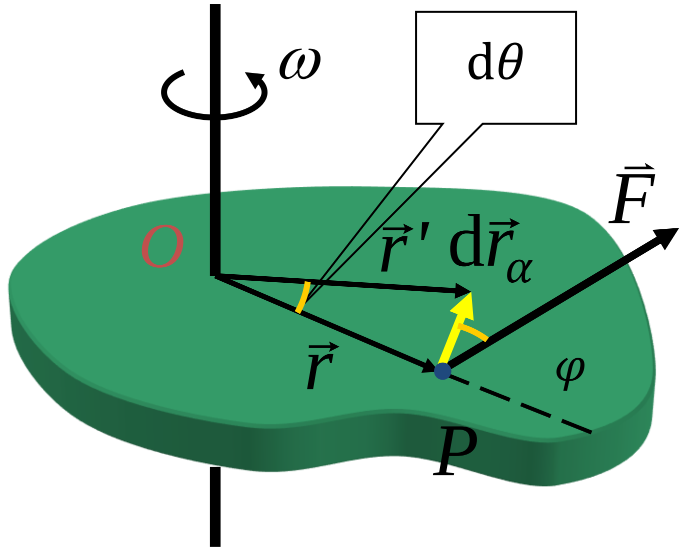
2.3.1 力矩的功

力矩的功： 本质上仍是力做功



元功：力产生位移**dr**：

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos\alpha dr$$
$$= F\sin\varphi\, r d\theta = M d\theta$$

推导中用到：

$$\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad dr = ds = rd\theta$$

有限过程的功：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

力矩的功率：

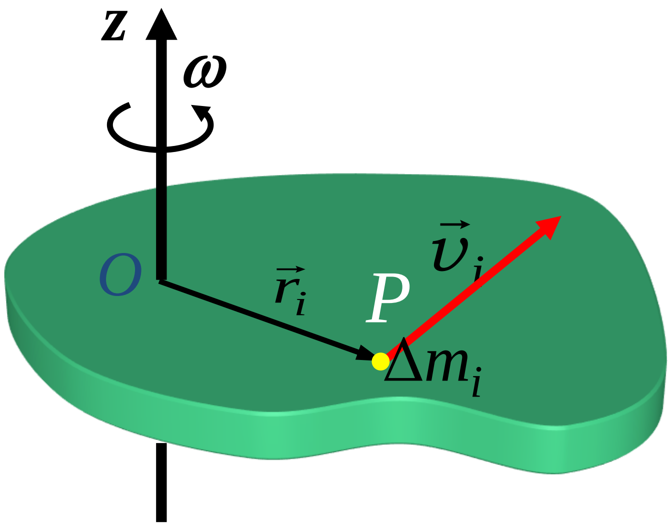
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Md\theta}{dt} = M\omega$$

对比质点力学?

2.3.2 刚体定轴转动动能定理

质元的动能：

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i {r_i}^2 \omega^2$$



刚体定轴转动总动能：

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i {r_i}^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i {r_i}^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

2.3.2 定轴转动的动能定理

定轴转动动能定理：

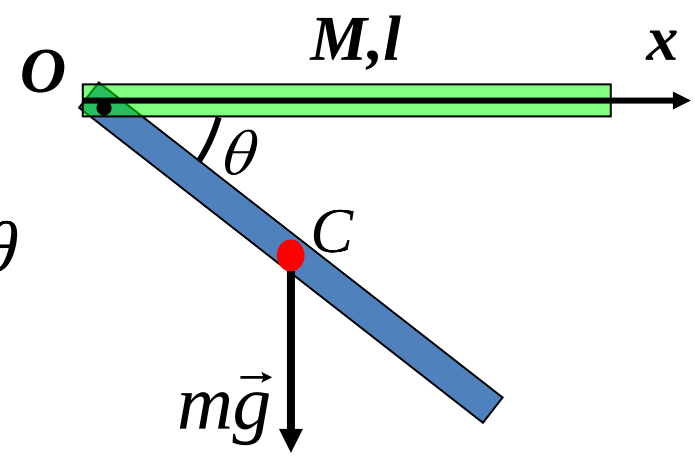
$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta = (I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}\theta = I\omega\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\frac{1}{2}I\omega^2) = \mathrm{d}E_k$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}W = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{d}(\frac{1}{2}I\omega^2) = \frac{1}{2}I{\omega_2}^2 - \frac{1}{2}I{\omega_1}^2 = \Delta E_k$$

刚体定轴转动，合外力矩作功等于刚体转动动能增量。

由于刚体内质元之间的距离保持不变，内力做功相互抵消，所有内力做功之和为零。

例 一根长为 l ,质量为 m 的均匀细直棒,可绕轴 O 在竖直平面内转动,初始时它在水平位置，求它由此下摆 θ 角时的 ω



解

$$W=\int_0^\theta M\mathrm{d}\theta=\int_0^\theta \frac{l}{2}mg\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}I\omega^2-0$$

$$W=\Delta E_k \qquad \omega=\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{1/2}$$

2.3.3 刚体机械能守恒

刚体的重力势能：

刚体中所有质元相对地球的重力势能之和。

$$E_p = \int (dm\,g)z = \int m \frac{(dm\,z)}{m} g = mz_c g$$

与质量集中于质心处的质点重力势能相同。

只有重力做功时，含刚体的物体机械能守恒：

重力是保守力。

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$$

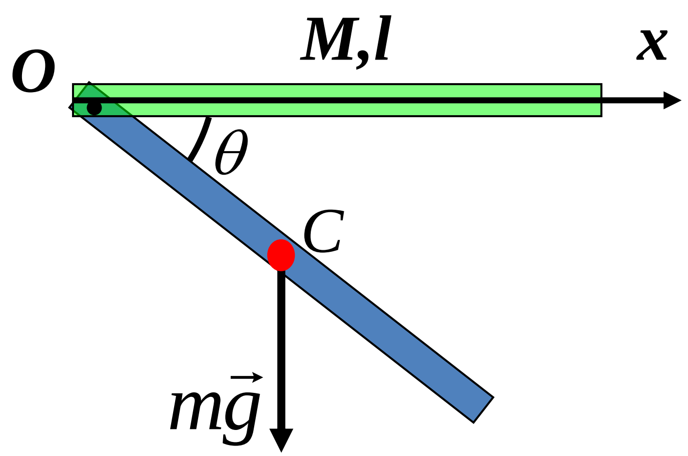
复习： 若质点系只有保守内力做功，机械能守恒。

2.3.3 刚体机械能守恒

例 一根长为 l ,质量为 m 的均匀细直棒,可绕轴 O 在竖直平面内转动,初始时它在水平位置，求它由此下摆至竖直位置的角速度大小。

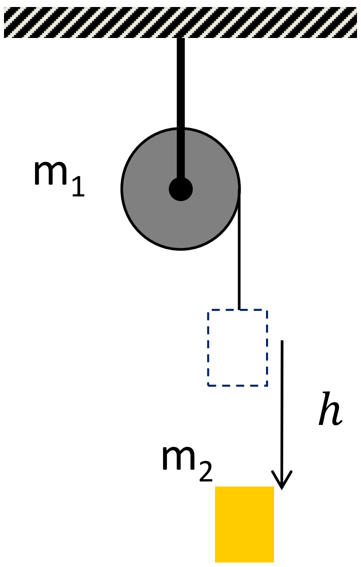
解： 初末机械能相同：

$$0 + mgl/2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + 0$$



2.3.3 刚体机械能守恒

例： **细绳的上端缠绕在质量为m_1，半径为R的定滑轮上，细绳的下端与质量为m_2的物体相连，系统初态静止。此后物体下落并带动定滑轮转动，求物体下落h高度时的速率v。**



解

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$E_{p1} = m_2 gh \qquad E_{p2} = 0$$

$$E_{k1} = 0 \qquad E_{k2} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$v = R\omega$$

$$\Rightarrow m_2 gh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{m_2 gh}{m_1 + 2m_2}}$$

2.3 刚体动能、机械能作业

2.19
2.20