第五章 静电场

5.1 力-场强

5.2 场强性质

5.3 能-电势

场强与电势

主要内容

5.5静电场中导体

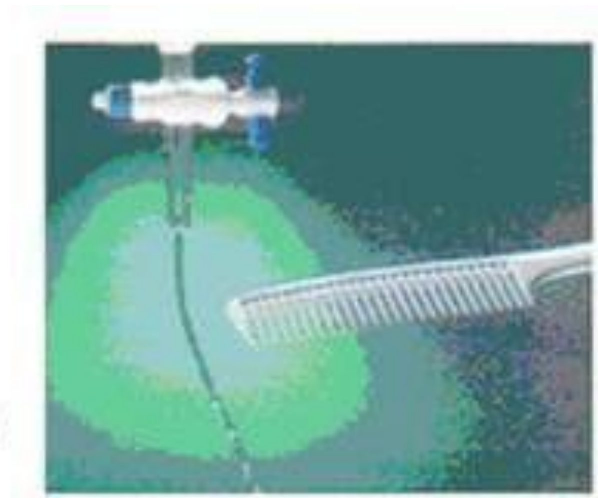
5.6静电场电介质

5.7电容 电场能量

5.0　静电场

静电场：相对观察者静止的电荷激发的电场。

梳子vs地球



库仑定律 → 力 → 场强$\vec{E}$ → 高斯定理

库仑定律 → 功 → 电势U → 环路定理

5.1.1　两种电荷

电荷： 实验证明，自然界只存在两种电荷，分别称为正电荷和负电荷。同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

电荷守恒定律： 物理学中的基本定律之一

在一个与外界没有电荷交换的系统内，无论进行怎样的物理过程，系统内正、负电荷量的代数和总是保持不变。

例：放射性衰变　$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$

钍元素

电荷不会因为运动状态(速度)发生变化。

5.1.1　两种电荷

电荷的量子化：

物体所带电荷量只能取电子或质子电荷量的整数倍值。电荷量的这种只能取分立的、不连续量值的性质。

$$q = \pm Ne$$

1906-1917年，密立根用液滴法首先从实验上证明了，微小粒子带电量的变化不连续。

了解：夸克具有分数电荷，为**2/3e**或**-1/3e**

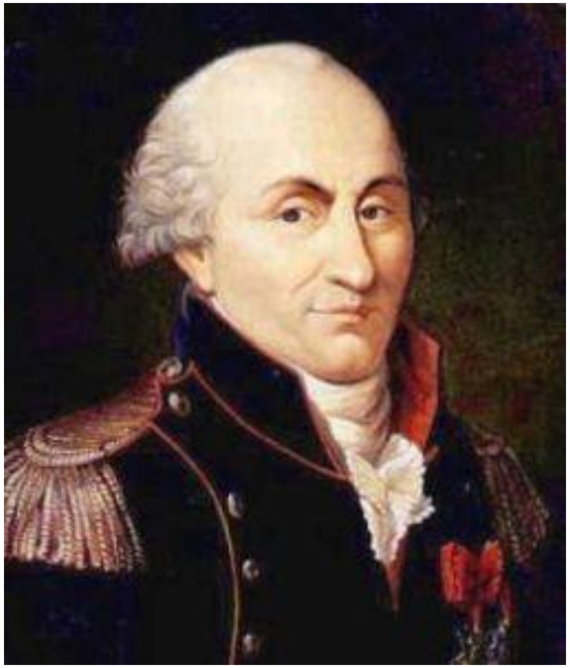
5.1.2　库仑定律

点电荷：

当带电体的形状和大小与它们之间的距离相比允许忽略时，可以把带电体看作点电荷。

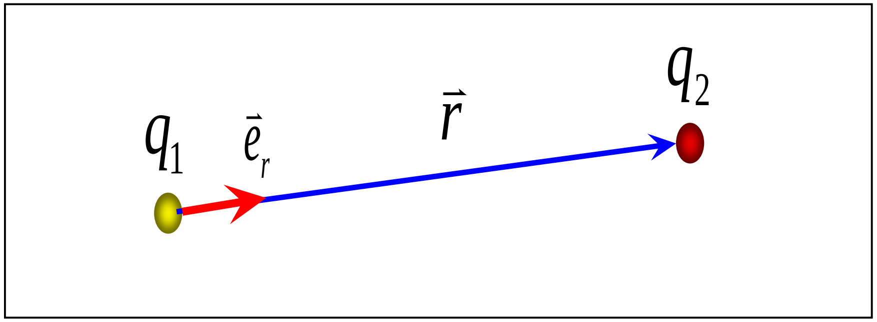
库仑定律：

1785年，法国物理学家库仑通过扭称实验总结出点电荷之间相互作用的静电力所服从的基本规律。



5.1.2 库仑定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



真空介电常数（真空电容率）：

$$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 * 10^9$$

万有引力： $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ $\quad G = 6.67 * 10^{-11}$

电子质量：**$9*10^{-31}$kg** 质子质量：**$1.6*10^{-27}$kg**

电子电荷：**$-1.6*10^{-19}$C** 质子电荷：**$1.6*10^{-19}$C**

单个电子与单个质子之间的电磁力是引力**10^{40}**倍。

5.1.3　真空中静电场

超距作用？　电荷⇄电荷

近距作用：力线和场的概念。法拉第提出。

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

电场是物质存在的一种形态。它分布在一定范围的空间里，并和一切物质一样，具有能量、动量、质量等属性。

狭义相对论：不可以瞬间传递信息。

5.1.3　真空中静电场

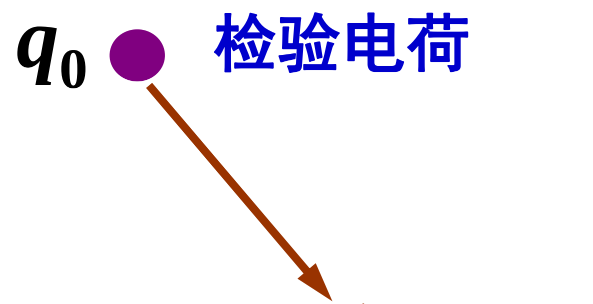
电荷 ⇔ 电场 ⇔ 电荷

检验电荷 q_0

本身携带电荷足够小，占据空间也足够小，放在电场中不会对原有电场有显著的影响。

电场强度：

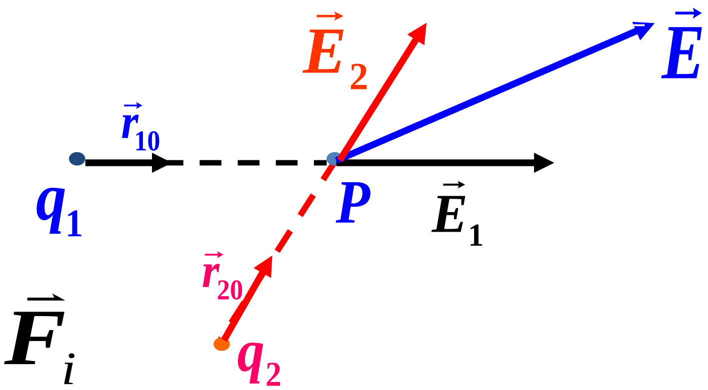
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



匀强电场：电场的大小方向不随空间位置变化。

5.1.4 场强叠加原理

场强的叠加原理



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

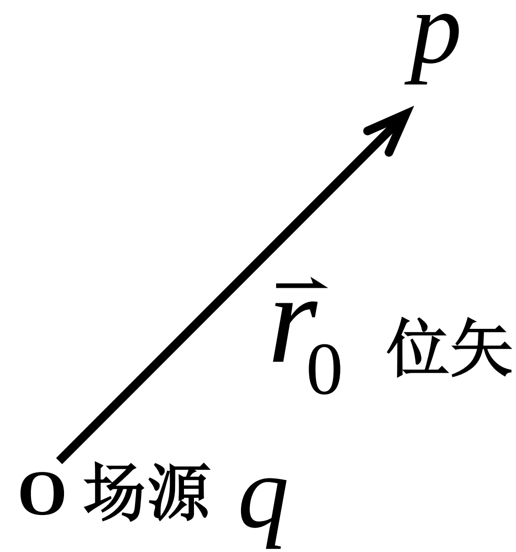
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

连续带电体

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E}$$

5.1.4　场强叠加原理

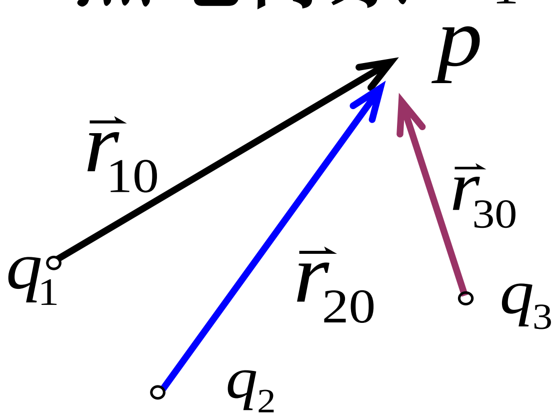
场强的叠加原理



1. 点电荷产生的场

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}_0$$

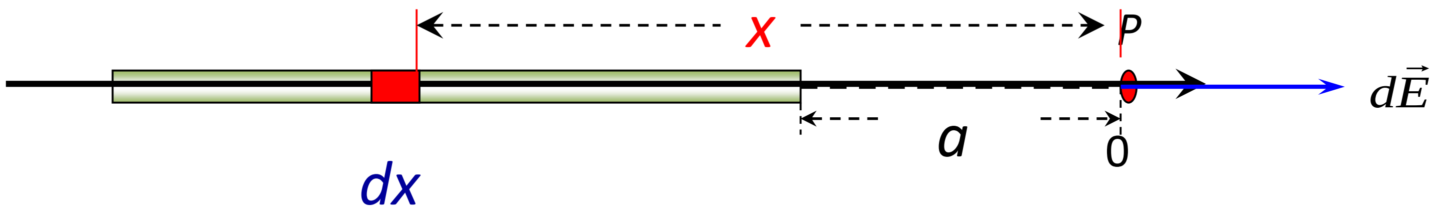
2. 点电荷系 $q_1, q_2, q_{3,} \cdots$ **的电场中的场强：**



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_{i0}$$

例题　设有一均匀带电直线，长度为L，总电荷量为q，求其延长线上距离右端a处的电场强度.

解:



建坐标系, 在坐标为 x 处取一线元 dx, 视为点电荷,电量为:

$$dq = \lambda dx, \qquad \lambda = \frac{q}{L}, \qquad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-(a+L)}^{-a}\frac{\lambda dx}{x^2}\vec{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(a+L)}\vec{i}$$

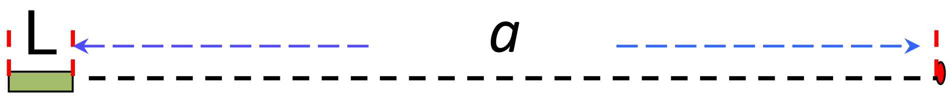
讨论：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(a+L)}\vec{i}$$

$L \ll a$时：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\vec{i}$$

可视为点电荷



5.1作业

5.23

5.24

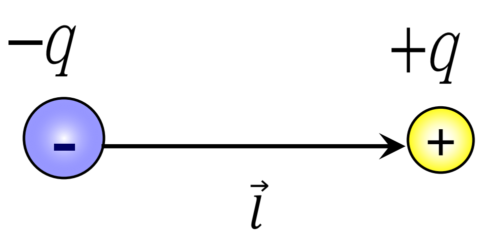
5.1.6 电偶极子

电偶极子： 两个相距 r_0 的等量异号点电荷，在空间产生电场。两个电荷中心到考虑点的距离比两个点电荷的距离大得多。

电偶极子的轴： 负电荷指向正电荷的矢量

电偶极矩(电矩): $\vec{p}_e = q\vec{l}$

与电偶极子产生电场，在外电场中受力和力矩等特性有关。



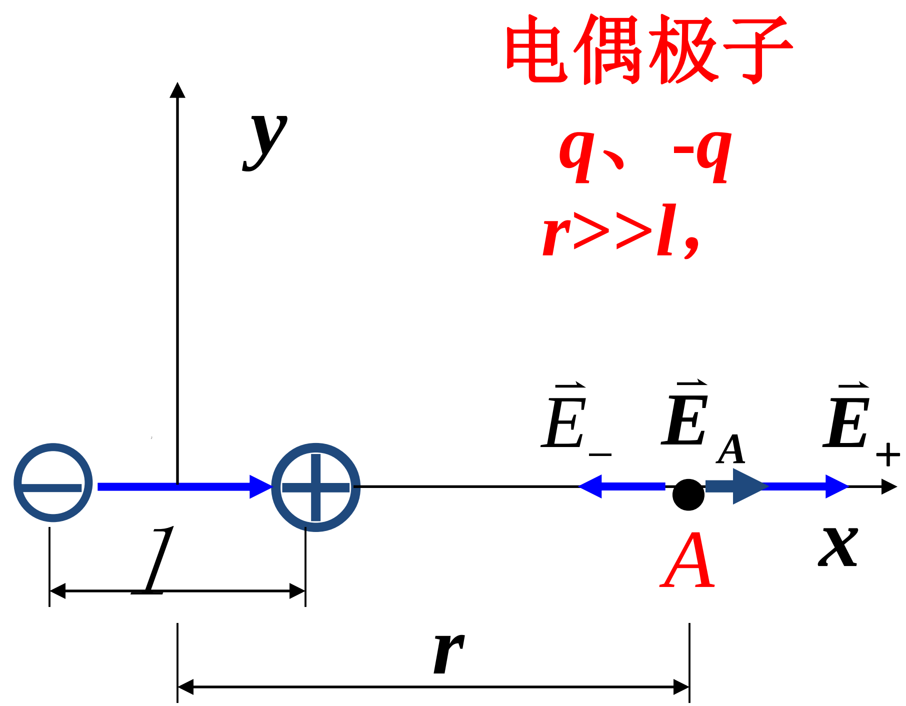
5.1.6　电偶极子

轴线延长线上一点的电场强度

设+q和-q 的场强

$$\vec{E}_{+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - \frac{l}{2})^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_{-} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (r + \frac{l}{2})^2}\vec{i}$$



5.1.6 电偶极子

轴线延长线上一点的电场强度

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]\vec{i} \qquad \mathbf{r>>l}$$

$$= \frac{2qrl}{4\pi\varepsilon_0 r^4(1-\frac{l}{2r})^2(1+\frac{l}{2r})^2}\vec{i} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}\vec{i}$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}_e}{r^3}$$

5.1.6 电偶极子

轴线中垂线上一点的电场强度

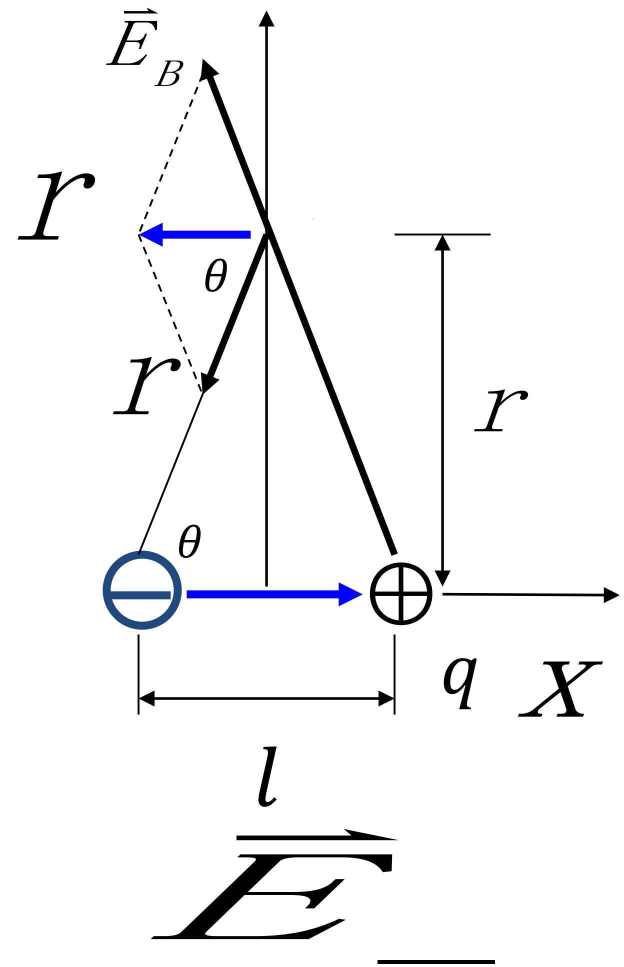
$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r^2 + l^2/4)}$$

$$E_B = 2E_+ \cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_e}{r^3}}$$

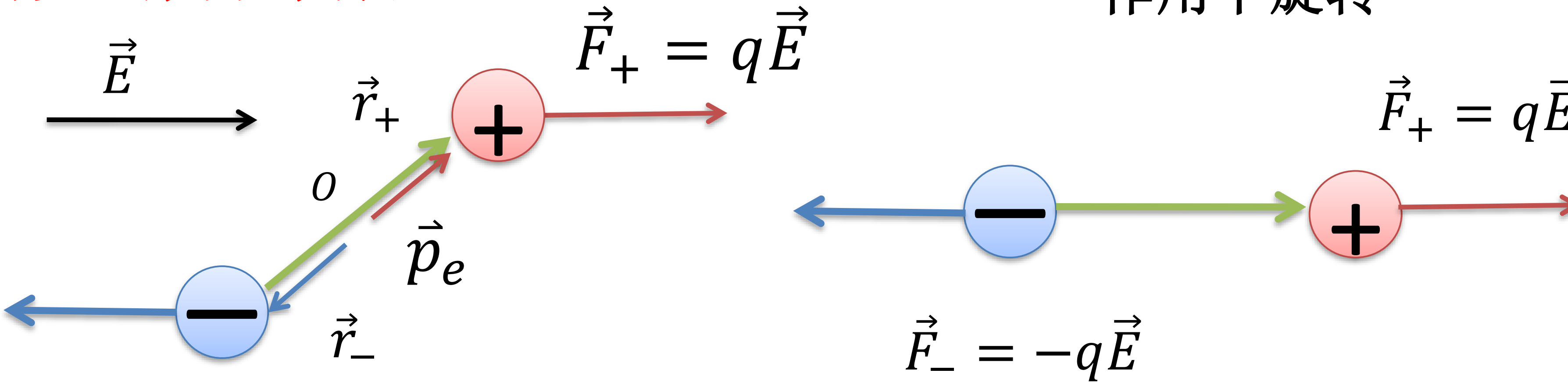
$$\therefore E \propto \frac{1}{r^3}$$



5.1.6 电偶极子

电偶极子在均匀外场中所受的力及力矩

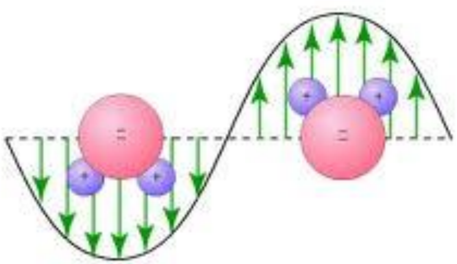
在力矩M的作用下旋转



$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \vec{r}_+ \times (q\vec{E}) + \vec{r}_- \times (-q\vec{E}) = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{e}} \times \vec{\boldsymbol{E}}$$

电偶极子的轴与电场平行之前，
合力为零但是合力矩不为零。

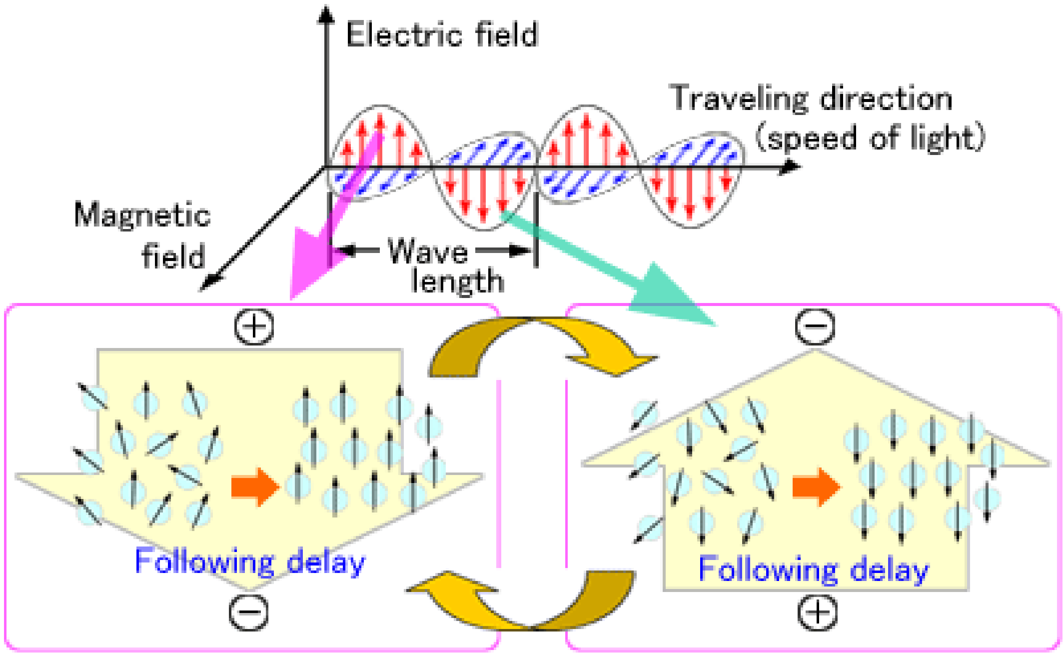
5.1.6 微波炉原理（了解）



微波:频率从300MHz至3000GHz范围的电磁波。

微波炉的微波频率2.450GHz,属于**非电离辐射。**

水分子（极性分子）在变化的电磁场中翻转，摩擦，使温度升高。



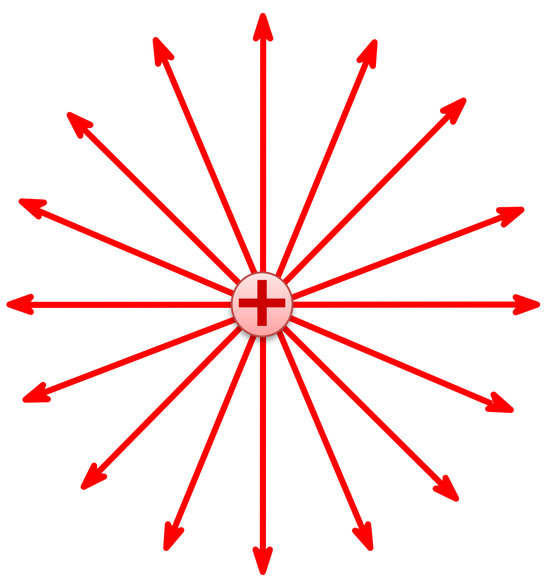
5.2.1 电场线

电场线： 用来形象描述场强分布的空间曲线

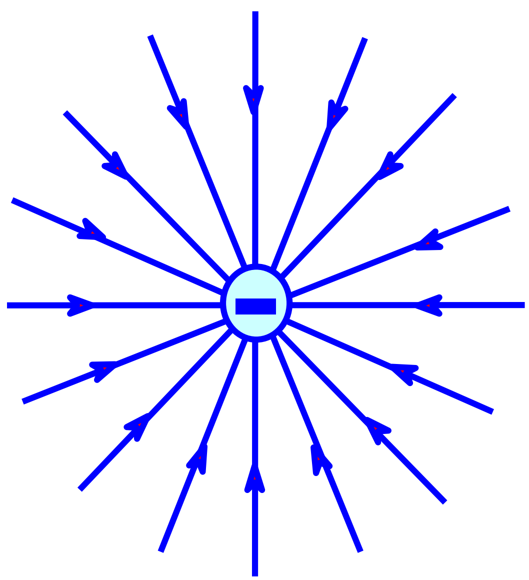
场强方向： 电场线上该点的**切线方向**

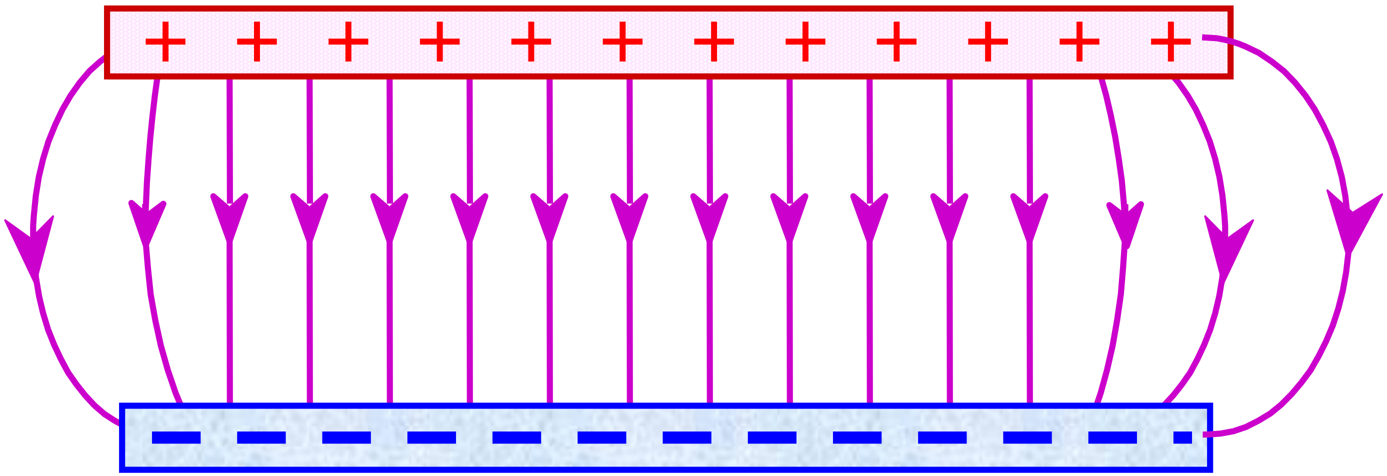
场强大小： 区域内电场线的**疏密程度**

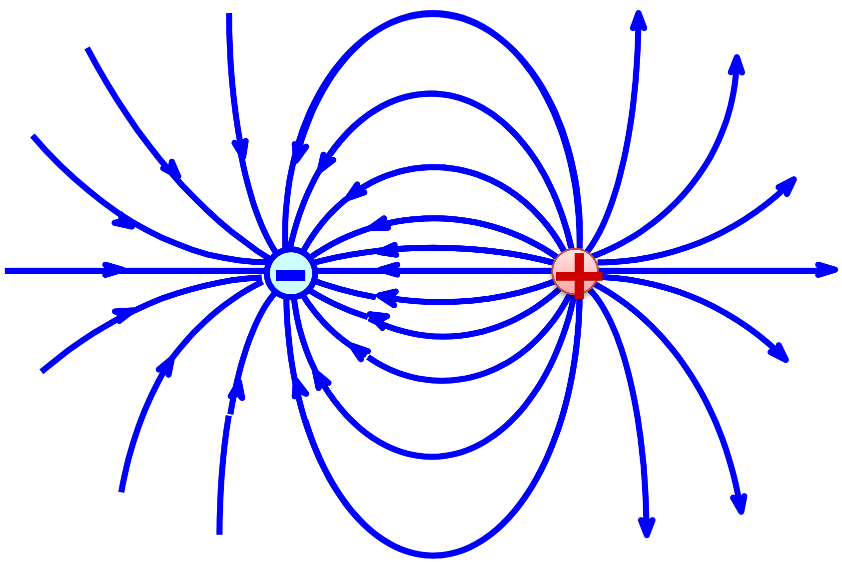
孤立正点电荷



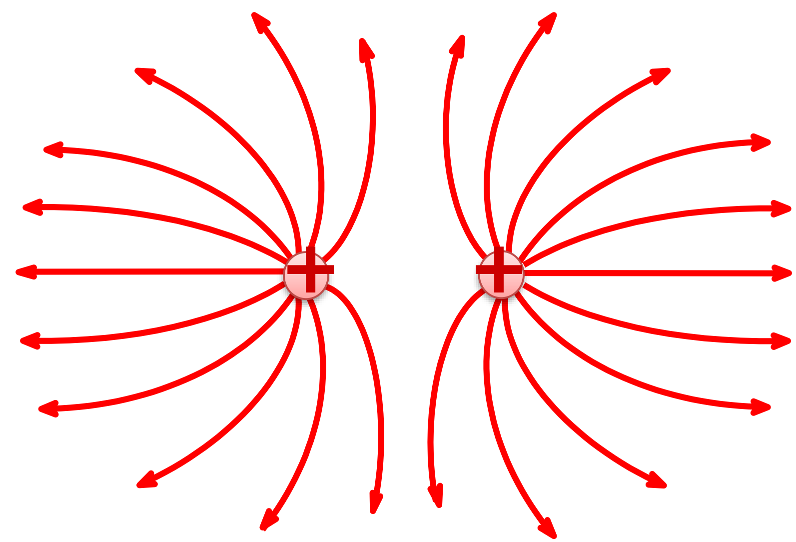
孤立负点电荷







始于正电荷，终于负电荷

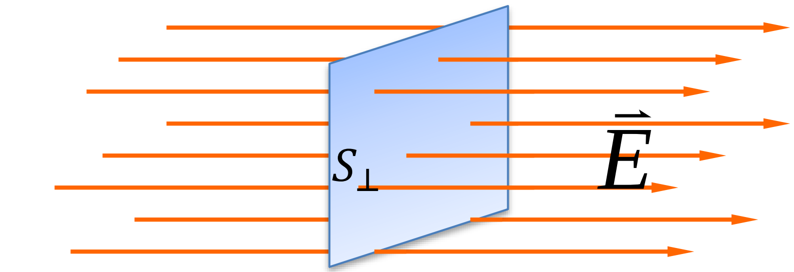


空间中连续，不相交

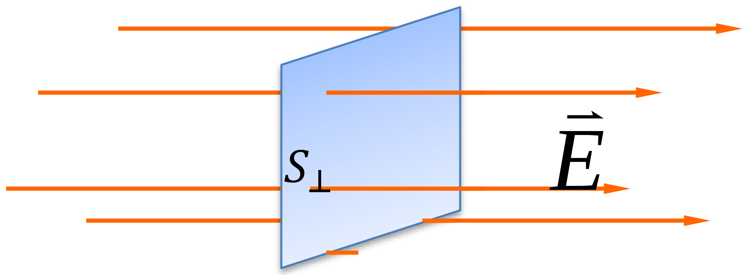
5.2.1 电场强度通量

电场强度大小： 过电场中某点，做垂直于该点电场线的单位面积面元，通过此面元的电场线数，即为此点的电场强度。

$$\Phi_e = ES_\perp \qquad E = \frac{d\Phi_e}{dS_\perp}$$



单位面积上电场线多，场强大。



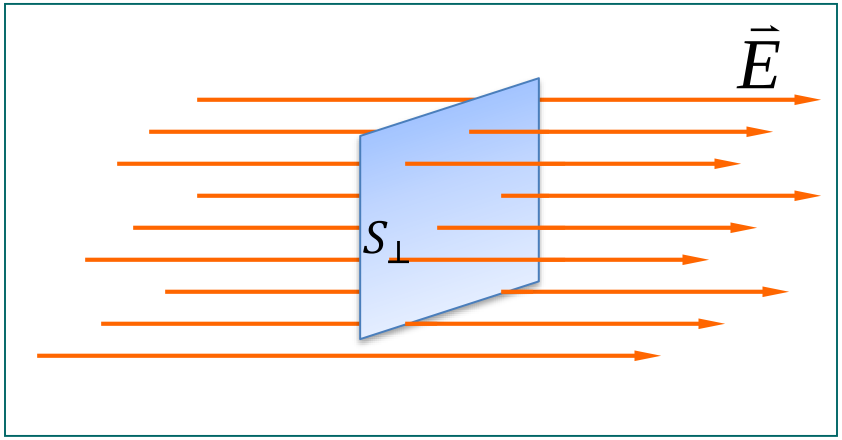
单位面积上电场线少，场强小。

5.2.1　电场强度通量

电场强度通量： 通过一个面的电场线数。

电场强度通量与面元的大小和取向有关。

- 均匀电场，$\vec{E}$ 垂直平面

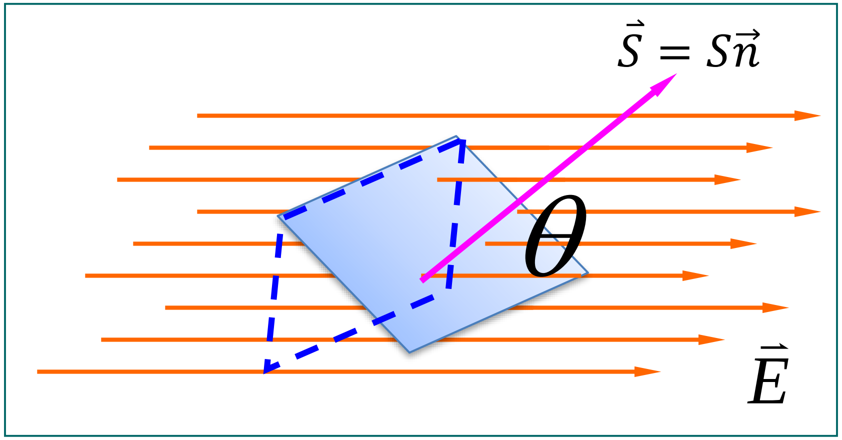


$$\Phi_{e} = ES_{\perp}$$

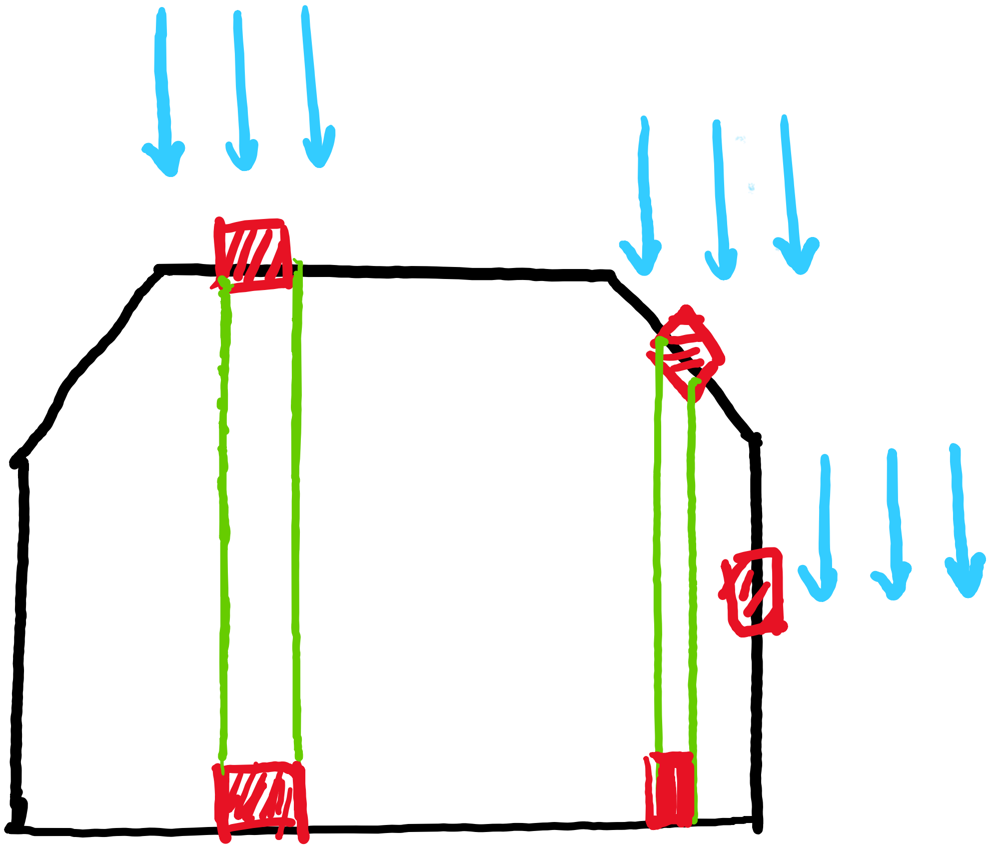
- 均匀电场，$\vec{E}$ 与平面夹角

$$\Phi_{e} = ES\cos\theta$$

$$= \vec{E}\cdot\vec{S}$$ 标量，有正负



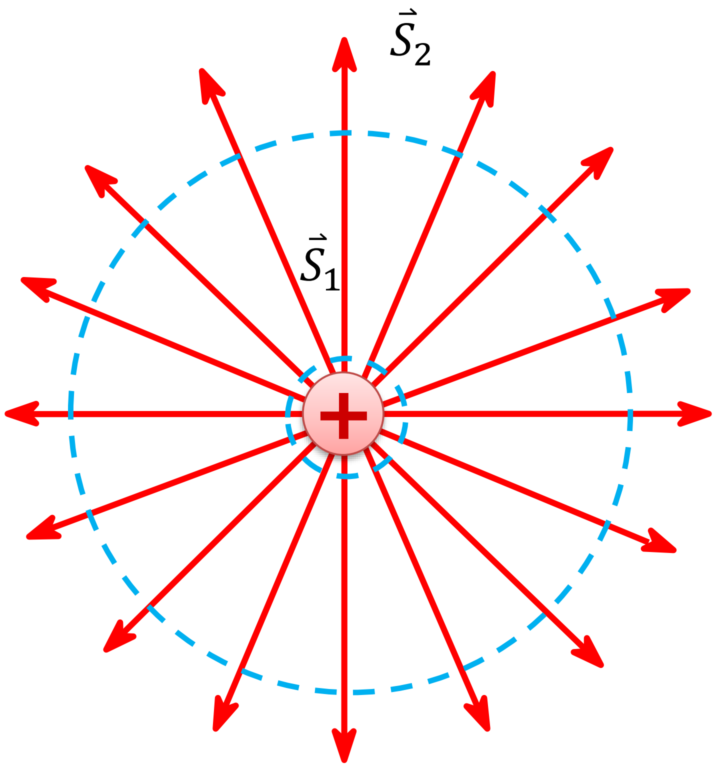
面元矢量$\vec{S}$，指向闭合曲面外法向。



屋顶有一个天窗忘了关，地面会有水渍：
侧面有同样大小的天窗忘了关，地上的水渍就会小一些
在**垂直的墙壁**上的窗户忘了关，地上是不会有水渍的。

5.2.1 电场强度通量

例题：求真空中通过闭合球形曲面的电场强度通量，与该曲面中心处所包围电荷的关系。



$$\Phi_{S_1} = E_1 4\pi {r_1}^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S_2} = E_2 4\pi {r_2}^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

点电荷在闭合曲面（高斯面）之外？

5.2.1 电场强度通量

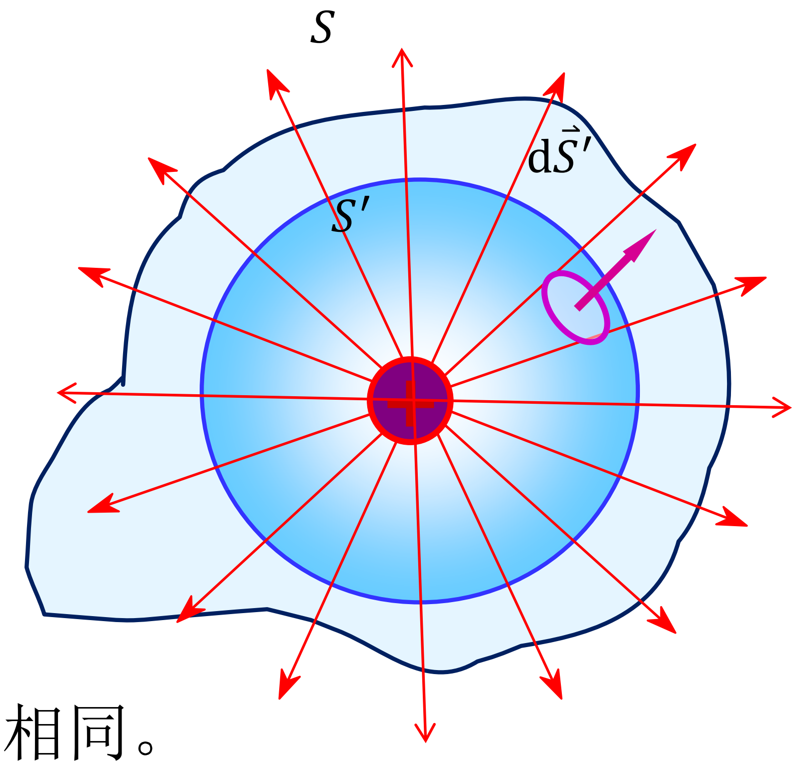
包含点电荷q的任一闭合曲面S内的电场强度通量

作一球面S’同样包含点电荷q

$$\Phi_{e_S} = \Phi_{e_{S'}}$$

$$\Phi_e = \oint_{S'} \vec{E}_{S'} \cdot d\vec{S}'$$

$$= \oint_{S'} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS' = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



电场线的连续性，穿入电场线个数相同。

5.2.1　电场强度通量

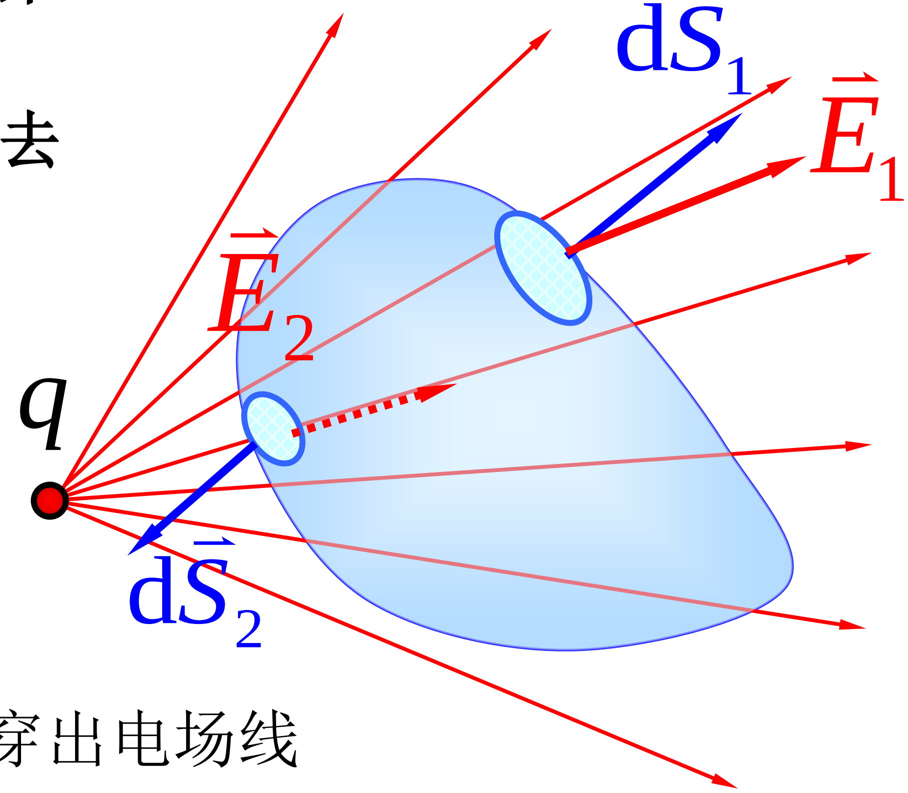
不包含点电荷q的任一闭合曲面S内的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$ 穿出来

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$ 穿进去

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



电场线的连续性，穿入电场线=穿出电场线

5.2.1　电场强度通量

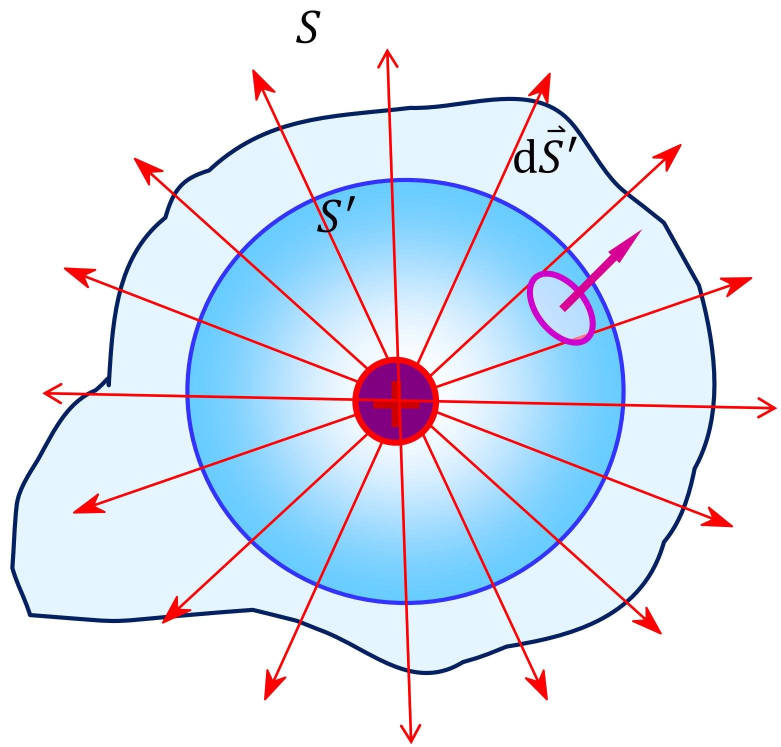
包含点电荷q的任一闭合曲面S内的电场强度通量

作一球面S’同样包含点电荷q

$$\Phi_{e_S} = \Phi_{e_{S'}}$$

$$\Phi_e = \oint_{S'} \vec{E}_{S'} \cdot \mathrm{d}\vec{S}'$$

$$= \oint_{S'} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}S' = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



电场强度对封闭曲面的通量只取决于该曲面内电荷的代数和，与曲面内电荷的位置分布情况无关，与封闭曲面外的电荷亦无关。

5.2.2　高斯定理

高斯定理的积分形式：　$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

真空中通过任意闭合曲面的电场强度通量，只取决于该曲面内电荷的代数和，与曲面内电荷的位置分布情况无关，与封闭曲面外的电荷亦无关。

卡尔·弗里德里希·高斯

（德国，1777-1855年）

“数学王子”

高斯和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家。

5.2.2 高斯定理

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

高斯定理积分形式

若闭合曲面包围了电荷连续分布的物体：

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

高斯定理微分形式

（散度、有源场）

数学中的高斯散度定理：

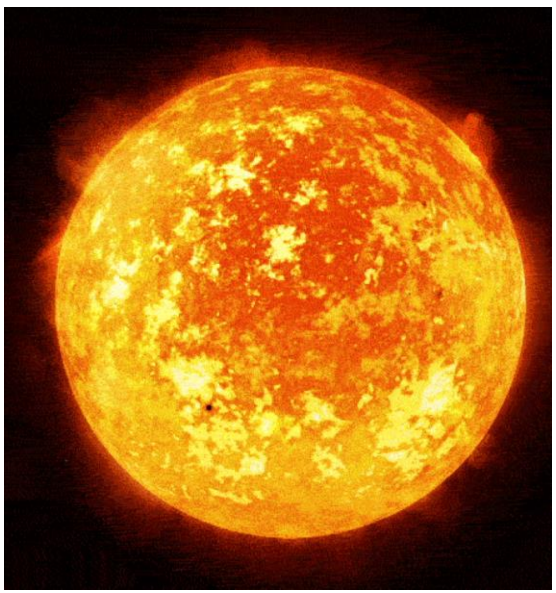
矢量穿过任意闭合曲面的通量等于矢量的散度对闭合面所包围的体积的积分

复习：散度、旋度

散度$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$： 标量，某点附近矢量场发散程度。

旋度$\vec{\nabla}\times\vec{E}$： 大小：某点附近矢量场旋转程度。

方向：旋转度最大环量的旋转轴。



5.2.2 高斯定理

利用高斯定理，求电场强度

特点：场源具有较高的对称性

步骤：

1.对称性分析，确定 $\vec{E}$ 的大小及方向分布特征

2.作形状规则的高斯面。面上的某些部分与场强垂直或平行较易于积分。

3.计算电通量和面内电荷，利用高斯定理求解场强

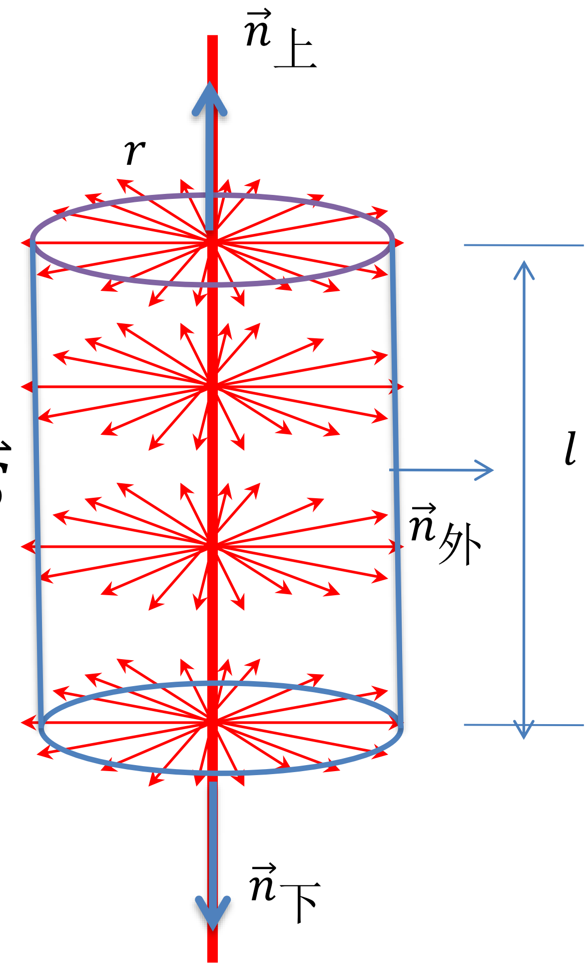
5.2.2　高斯定理

例：求无限长均匀带电直线外的场强。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{上} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{下} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{外} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{外} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E2\pi r l$$



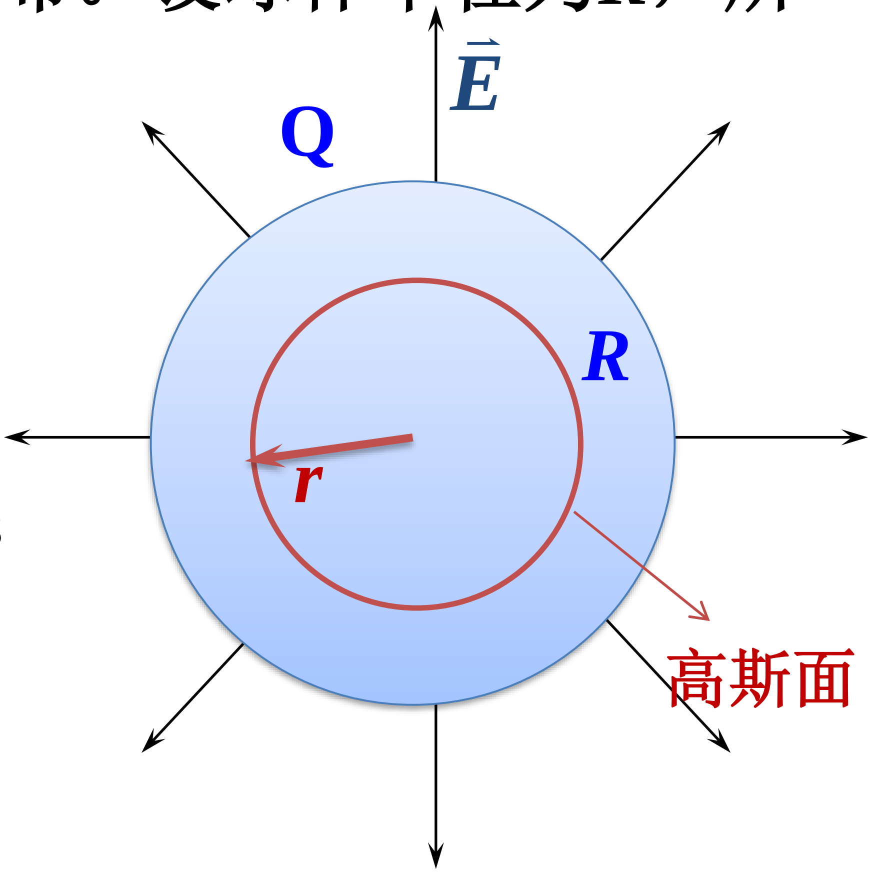
$$E2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

5.2.2　高斯定理

例题：求均匀带电球体内外的电场强度

均匀带电的球体内外的场强分布。设球体半径为R，所带总带电为Q



(1) r<R

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

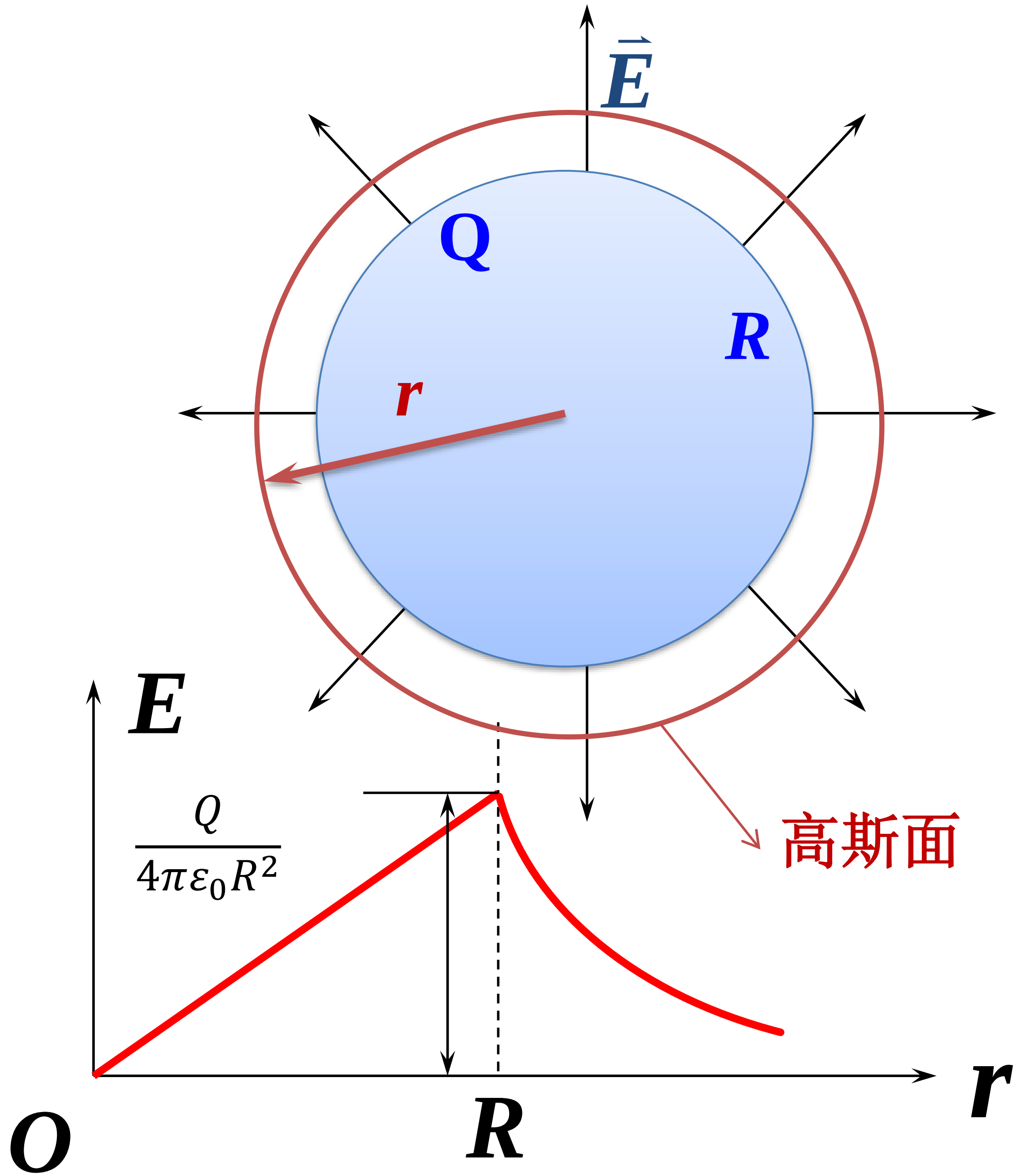
$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$$

（2）r>R

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_i$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



5.2.2 高斯定理

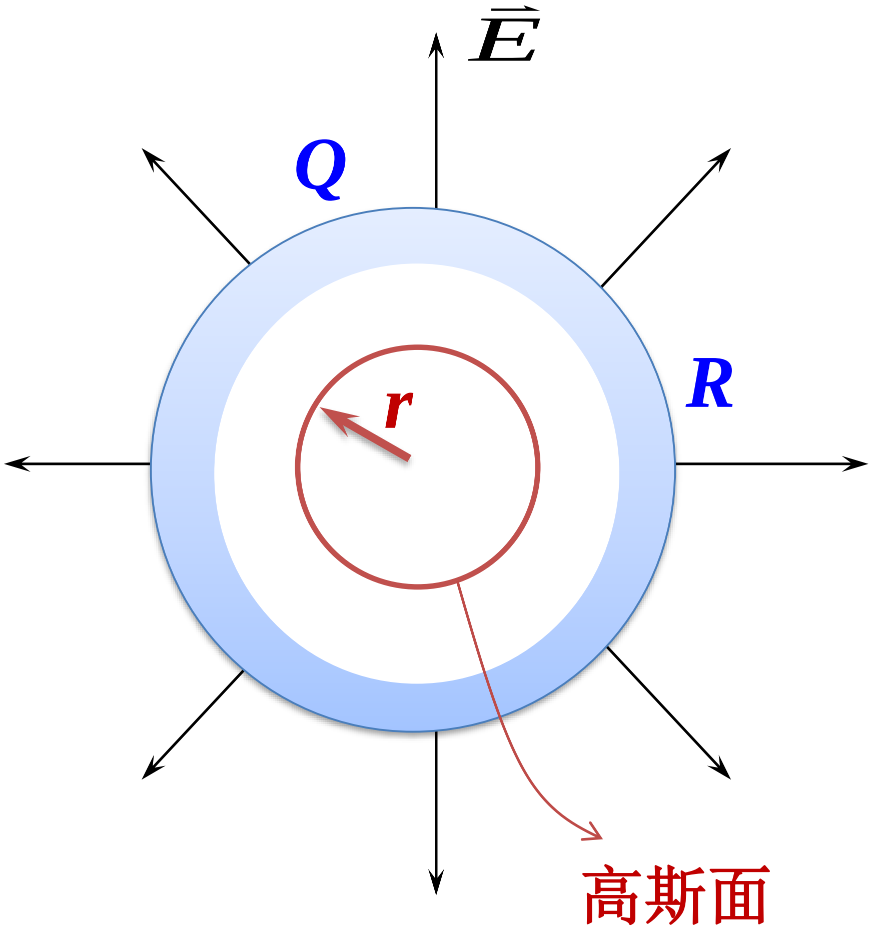
如果是球壳?

(1) r<R

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_i = 0$$

$\Rightarrow$ $E = 0$



5.2.2 高斯定理

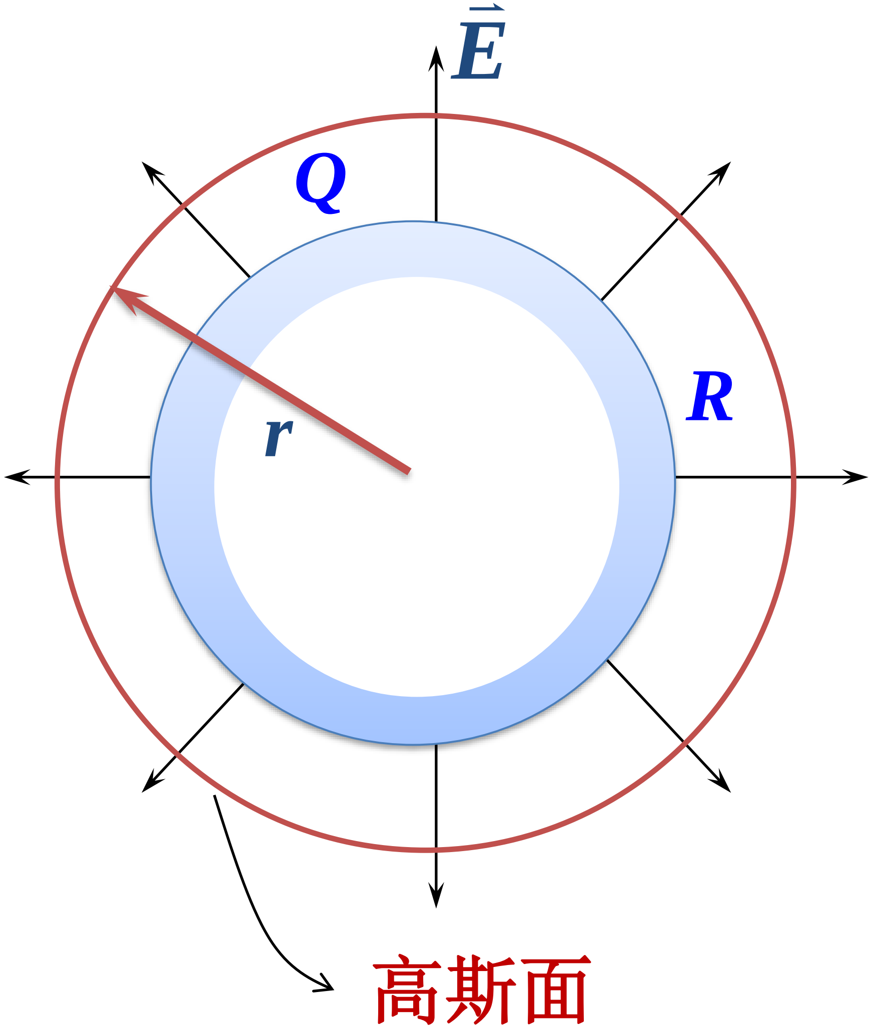
如果是球壳?

(2) r>R

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



5.2.3 环路定理

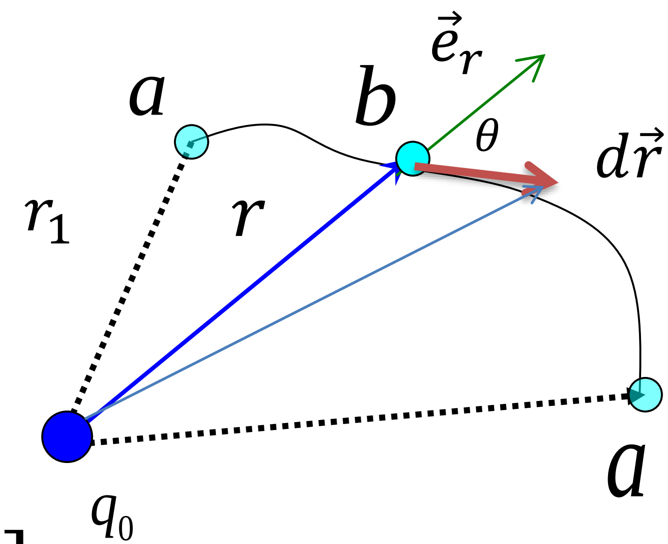
静电场中做功：

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = d_l \cos\theta = \mathrm{d}r$$

dr是半径的微小变化



$$W_{ab} = \int_a^b \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]$$

静电力做功只与初末位置有关，**是保守力**。

5.2.3 环路定理

沿着闭合回路移动，静电场做功：

$$W_{ab} = \oint q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

静电场的环流：静电场沿着闭合回路的环路积分

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

斯托克斯旋度定理

静电场是保守场，静电力是保守力

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

5.2 作业

5.34

5.35