第二章 刚体力学

主要内容

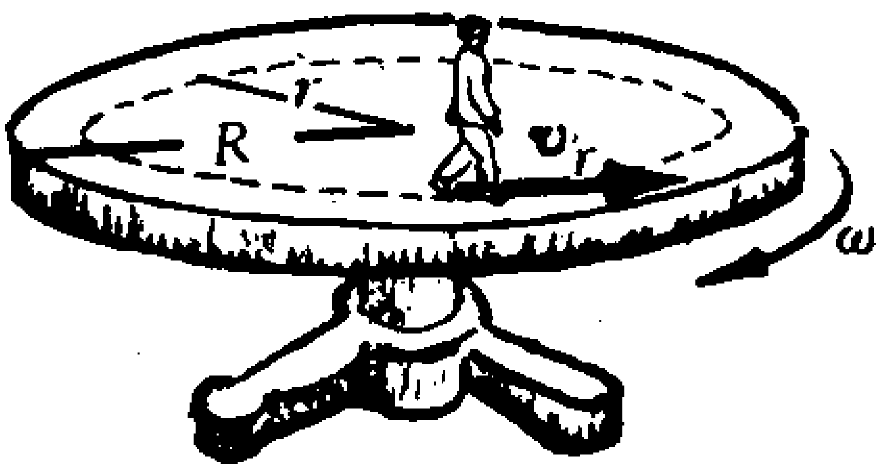
2.1 定轴转动描述

2.2 转动定律

2.3 刚体定轴转动的动能定理

2.4 定轴转动的角动量定理

此直升机有什么问题?



2.1 刚体定轴转动运动学

质点： 研究问题与形状、大小无关

刚体： 大小和形状都保持不变的物体。(理想化模型)

任意两质点间距离保持不变，质元之间没有相对移动。

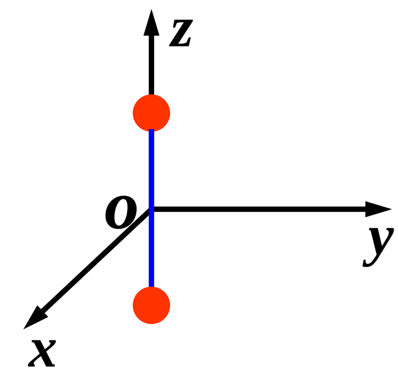
刚体运动分类： 平动（等价于质点），定轴转动（转门），平面平行运动（滚动的圆柱体），定点转动（慢陀螺），一般运动

2.1.1 自由度

刚体自由度：确定物体空间位置的独立坐标个数

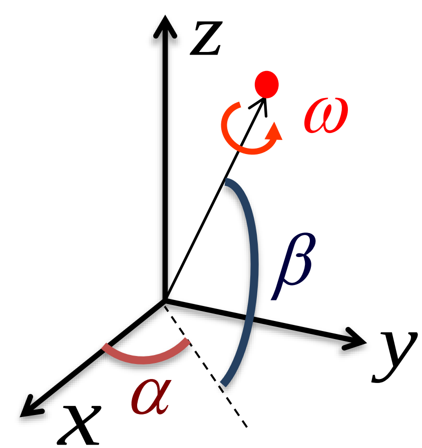
1） 质心的平动： x,y,z

2） 绕质心轴的转动： α, β, ω



一个质点自由度: 3 (x, y, z)

刚性转动自由度: 6 (x, y, z, α, β, ω)



确定转轴位置：2个自由度 (α, β)

绕转轴方向：1个自由度 ω

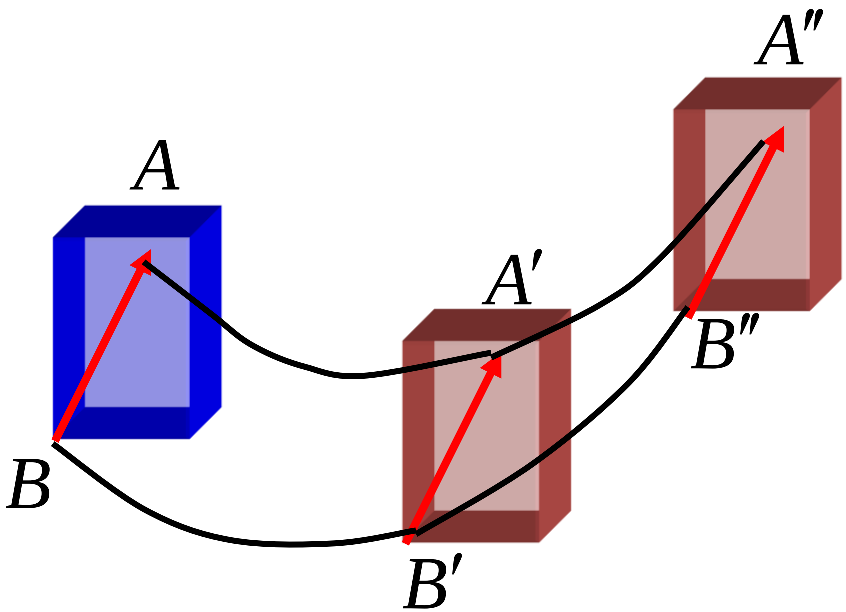
2.1.2 刚体运动的分类

平动: 刚体内所作的任一条直线空间指向保持不变。

任一点可以代表整个刚体的平动规律（如质心）

刚体的平动遵守质心运动定理：

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$



2.1.2 刚体运动的分类

定轴转动：（转门）

刚体内各点都绕同一固定直线(转轴)作圆周运动

刚体内各点对应的一切角量完全相同，可用一点的角量规律来代表整个刚体的转动规律。

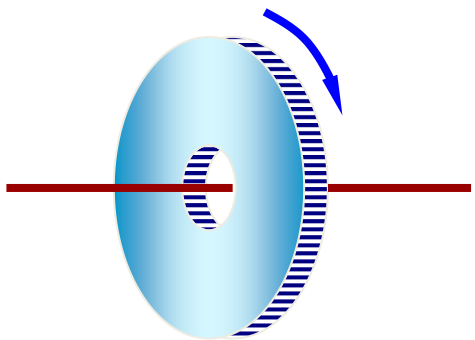
定点转动：（慢陀螺）

转轴一端固定，另一端不固定，转轴空间指向随时间变化。

一般运动：平动 + 转动

分解为质心的平动（质心运动定理）和刚体绕过质心轴的转动（转动定律）

2.1.3描述刚体定轴转动的物理量



描述刚体定轴转动的物理量

角坐标： $\theta = f(t)$ （逆时针为正）

有限大的角位移： 不满足交换律，不是矢量

无限小的角位移： 矢量（轴矢量），方向：右手螺旋

角速度： $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$ 方向：右手螺旋

角加速度： $\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 方向：右手螺旋

角速度与角加速度的方向与转动正方向相同时，记为正值；反之负值。**类似质点一维直线运动。**

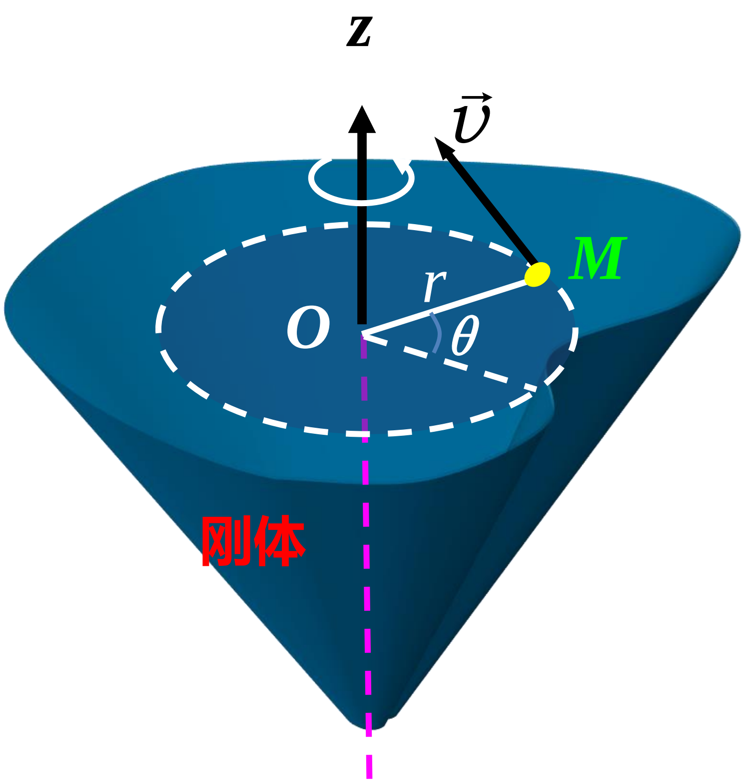
2.1.3描述刚体定轴转动的物理量

匀加速转动的运动学公式

当角加速度为常量时：

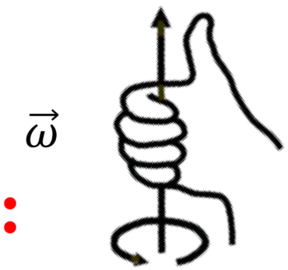
与质点的匀变速直线运动公式相类似

$$
\begin{cases}
\omega = \omega_0 + \beta t \\
\Delta\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \\
{\omega_2}^2 - {\omega_1}^2 = 2\beta\Delta\theta
\end{cases}
$$



2.1.4 线量与角量关系

弧长: $s = r\Delta\varphi$

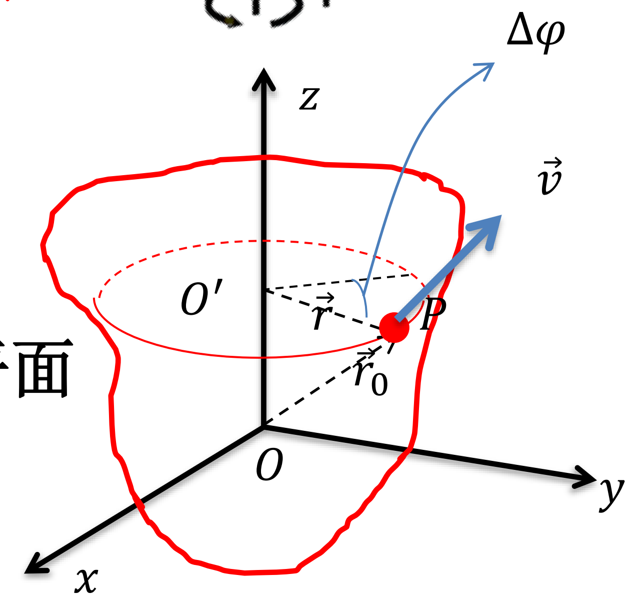


速度（可选择轴上任意位置为原点）：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v = \omega r = \omega r_0 \sin\theta = |\vec{\omega} \times \vec{r}_0|$$

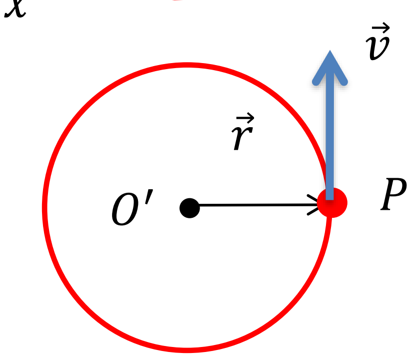
转动平面



加速度: 切向+法向

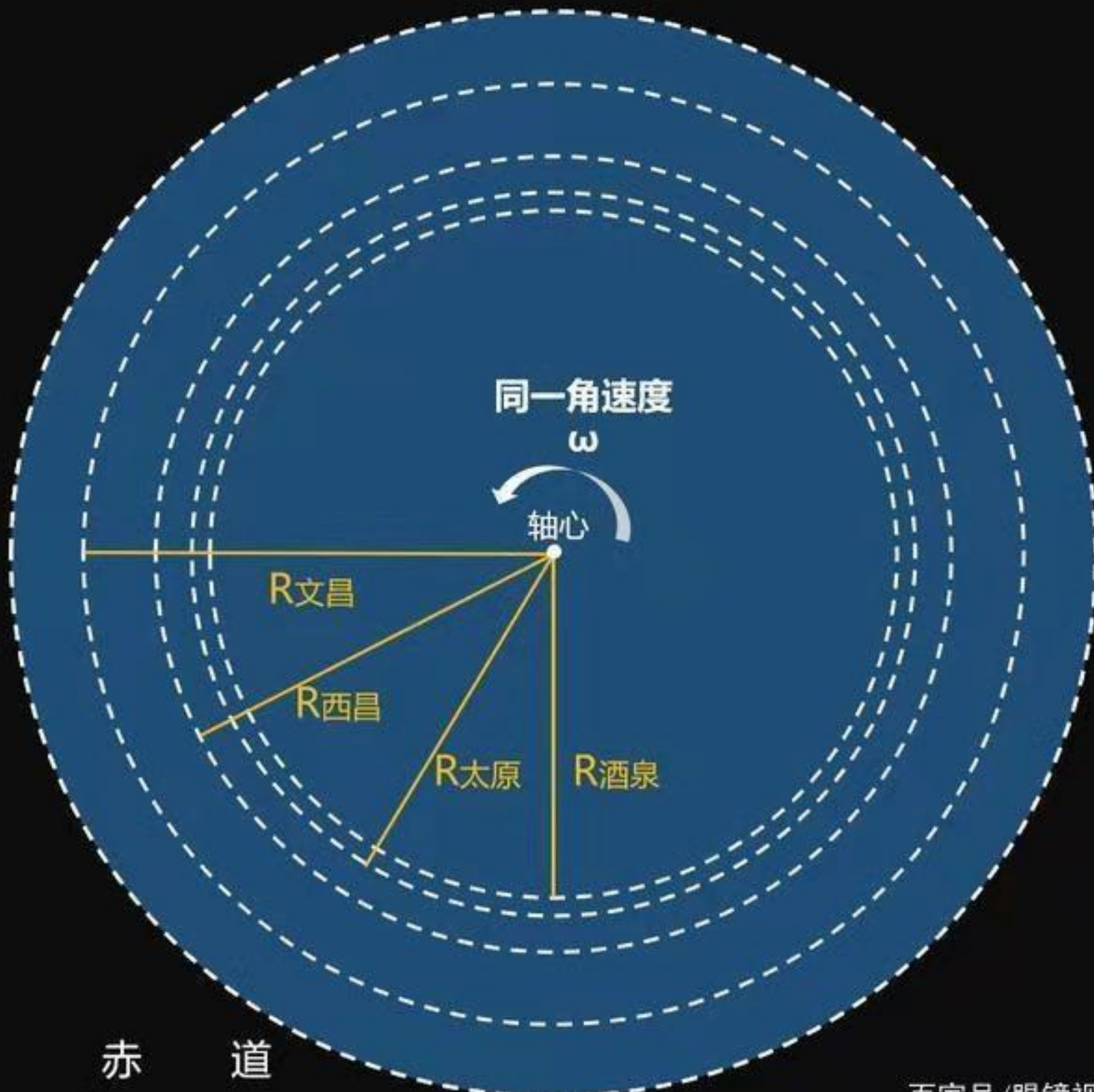
$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\beta$$

$$a_n = r\omega^2$$



中国卫星发射中心自转半径示意图

眼 镜 视 野 | 制 图



例题：一刚体以每分钟转60转绕Z轴作匀速转动。设某时刻该刚体上一点P的位置矢量为 $\vec{r}_0 = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)\ \mathrm{m}$ 求P点的速度矢量。

$$\omega = \frac{60 \times 2\pi}{60} = 2\pi\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} \qquad \vec{\omega} = 2\pi\vec{k}\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \left(2\pi\vec{k}\right) \times \left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{v} = \left(2\pi\vec{k}\right) \times \left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) = (4\pi\vec{j} - 6\pi\vec{i})\ \mathrm{m/s}$$

2.1 作业

2.9

2.10