Домашня контрольна робота
з Методів математичної фізики
студента групи ОФ-91
Сухова Олександра Сергійовича
Варіант 10

Задача 1

Умова:

$$\begin{cases} U_{tt} = \Delta U = U_{xx} + U_{yy} \\ U|_{t=0} = x \cdot y \cdot (6-x) \cdot (3-y) \\ U_t|_{t=0} = 0 \\ U|_{x=0} = U|_{y=0} = U|_{x=6} = U|_{y=3} = 0 \end{cases}$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді добутку:

$$U(x,y,t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$$

Тоді:

$$\frac{T_{tt}}{T} = \frac{Y_{yy}}{Y} + \frac{X_{xx}}{X}$$

Методом розділення змінних:

$$\frac{X_{xx}}{X} = -\alpha, \quad \frac{Y_{yy}}{Y} = -\beta, \quad \frac{T_{tt}}{T} = -\alpha - \beta$$

З межових умов:

$$\begin{aligned} U|_{x=0} &= X(0) \cdot Y(y) \cdot T(t) = 0 \to X(0) = 0 \\ U|_{y=0} &= X(x) \cdot Y(0) \cdot T(t) = 0 \to Y(0) = 0 \\ U|_{x=6} &= X(6) \cdot Y(y) \cdot T(t) = 0 \to X(6) = 0 \\ U|_{y=3} &= X(x) \cdot Y(3) \cdot T(t) = 0 \to Y(3) = 0 \end{aligned}$$

Маємо 2 однакові задачі Штурма Ліувілля:

$$\begin{cases} X_{xx} + \alpha X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(6) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_{yy} + \beta Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(3) = 0 \end{cases}$$

Їх розв'язки наступні:

$$X_n = sin\left(\frac{\pi n x}{6}\right), \ \ \alpha_n^2 = \left(\frac{\pi n}{6}\right)^2, \ \ n = 1, 2, \ ...$$

$$Y_m = sin\left(\frac{\pi m x}{3}\right), \ \ \beta_m^2 = \left(\frac{\pi m}{3}\right)^2, \ \ m = 1, 2, \ ...$$

Тоді:

$$T_{tt} = -\mu_{nm}^2 \cdot T, \ \ \mu_{nm}^2 = \left(\frac{\pi n}{6}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{3}\right)^2$$

Маємо:

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cdot sin(\mu_{nm} \cdot t) + B_{nm} \cdot cos(\mu_{nm} \cdot t)$$

$$U(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) \cdot X_n(x) \cdot Y_m(y)$$

Знайдемо A_{nm} та B_{nm} з початкових умов:

$$U_t(x,y,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}\cdot A_{nm}\cdot X_n(x)\cdot Y_m(y) \rightarrow\ A_{nm} = 0,\ \forall n,m = 1,2,\ ...$$

$$\left(A_{nm} = \frac{1}{\mu_{nm}}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}\int_0^6\int_0^3 0\cdot sin\left(\frac{\pi n x}{6}\right)\cdot sin\left(\frac{\pi m y}{3}\right)dxdy = 0\right)$$

Оскільки:

$$U(x,y,0) = x\cdot y\cdot(6-x)\cdot(3-y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\cdot X_n(x)\cdot Y_m(y)$$

$$B_{nm} = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}\int_0^6\int_0^3 x\cdot y\cdot(6-x)\cdot(3-y)\cdot sin\left(\frac{\pi n x}{6}\right)\cdot sin\left(\frac{\pi m y}{3}\right)dxdy$$

Розглянемо інтеграл:

$$I(a,l) = \frac{2}{a}\int_0^a z\cdot(a-z)\cdot sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right)dz \tag{1}$$

Тоді:

$$B_{nm} = I(6,n)\cdot I(3,m)$$

Знайдемо 1 проінтегрувавши частинами:

$$I(a,l) = \frac{2}{a}\cdot\frac{a\cdot\left(\left(-2a^2-\pi^2 a l^2 z+\pi^2 l^2 z^2\right)cos\left(\frac{\pi l z}{a}\right)+\pi a l\cdot(a-2z)sin\left(\frac{\pi l z}{a}\right)\right)}{\pi^3\cdot l^3}\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{4\cdot a^2\left(1-(-1)^l\right)}{\pi^3\cdot l^3}$$

Маємо:

$$B_{nm} = \frac{144\cdot(1-(-1)^n)}{\pi^3\cdot n^3}\cdot\frac{36\cdot(1-(-1)^m)}{\pi^3\cdot m^3} = \frac{5184\cdot(1-(-1)^n)\cdot(1-(-1)^m)}{\pi^6\cdot n^3\cdot m^3}$$

Відповідь:

$$U(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{5184\cdot(1-(-1)^n)\cdot(1-(-1)^m)}{\pi^6\cdot n^3\cdot m^3} sin\left(\frac{\pi n x}{6}\right)sin\left(\frac{\pi m y}{3}\right)\cdot$$

$$\cdot cos\left(\pi\cdot t\sqrt{\left(\frac{n}{6}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^2}\right)$$

Задача 2

Умова:

$$\begin{cases} U_{tt} = 10\Delta U = 10\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) U \\ 0 \le r < 16 \\ 0 < t < \infty \\ U(16,t) = 0 \\ U(r,0) = \frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{r}{16}\right)^2\right) \\ U_t(r,0) = 0 \end{cases}$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді добутку:

$$U(r,t) = R(r) \cdot T(t)$$

З межової умови:

$$U(16,t) = 0 = R(16) \cdot T(t) \to R(16) = 0$$

Методом розділення змінних:

$$\frac{T_{tt}}{10T} = \left(\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R}\right) = -\lambda$$

Маємо рівняння:

$$r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0$$

Зробимо заміну $\sqrt{\lambda} r = \rho$, маємо рівняння Бесселя 0-го порядку:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(\rho^2 - 0^2\right) R = 0$$

Розв'язком якого є:

$$R = A \cdot J_0(\rho) + B \cdot N_0(\rho) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r) + B \cdot N_0(\sqrt{\lambda} r)$$

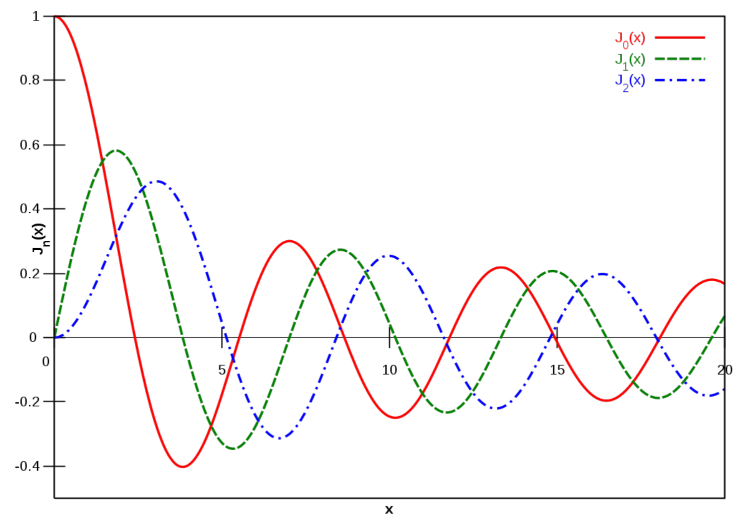
Оскільки $\left|U(r,t)\right| < \infty \to \left|R(r)\right| < \infty, \;\; \forall r : 0 \le r < 16$:

$$B = 0 \;\; \left(\lim_{r \to +0} N_0(r) = -\infty\right)$$

З межової умови:

$$R(16) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda} \cdot 16) = 0 \to \sqrt{\lambda_n} = \frac{\chi_n}{16}, n = 1, 2, \; ...$$

Нулі функції Бесселя 0-го порядку(χ_n) показані на рисунку нижче:



Тоді:

$$T_{tt} = -10 \left(\frac{\chi_n}{16}\right)^2 T$$

$$T_n = A_n \cdot sin\left(\frac{\sqrt{10}\chi_n t}{16}\right) + B_n cos\left(\frac{\sqrt{10}\chi_n t}{16}\right)$$

Маємо:

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot sin\left(\frac{\sqrt{10}\chi_n t}{16}\right) + B_n cos\left(\frac{\sqrt{10}\chi_n t}{16}\right)\right) J_0\left(\frac{\chi_n r}{16}\right)$$

Знайдемо A_n та B_n з початкових умов:

$$U_t(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{10}\chi_n}{16} \cdot A_n\right) J_0\left(\frac{\chi_n r}{16}\right) = 0 \to \; A_n = 0, \; \forall n = 1, 2, \; ...$$

$$\left(A_n = \frac{2}{16 \cdot \chi_n \cdot \sqrt{10}\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \int_0^{16} r \cdot 0 \cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{16}\right) dr = 0\right)$$

Оскільки:

$$U(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{16}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{r}{16}\right)^2\right)$$

Маємо:

$$B_n = \frac{2}{256\left(J_0'(\chi_n)\right)^2}\int_0^{16} r\cdot\frac{1}{8}\left(1-\left(\frac{r}{16}\right)^2\right)\cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{16}\right)dr$$

Використаємо наступні властивості інтегралів з функціями Бесселя:

$$\int x\cdot J_0(x)dx = x\cdot J_1(x)+C$$

$$\int x\cdot J_0(x)\cdot x^2dx = x^3\cdot J_1(x)-2\cdot x^2J_2(x)+C$$

Маємо:

$$B_n = \frac{1}{4\cdot\chi_n\left(J_0'(\chi_n)\right)^2}\cdot\int_0^{\chi_n}\frac{z}{\chi_n}\cdot\left(1-\left(\frac{z}{\chi_n}\right)^2\right)\cdot J_0\left(z\right)=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\chi_n\left(J_0'(\chi_n)\right)^2}\cdot\left(\frac{z}{\chi_n}\cdot J_1(z)-\frac{1}{\chi_n^3}\cdot\left(z^3\cdot J_1(z)-2\cdot z^2\cdot J_2(z)\right)\right)\Big|_0^{\chi_n}=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\chi_n\left(J_0'(\chi_n)\right)^2}\cdot\left(J_1(\chi_n)-J_1(\chi_n)+\frac{2}{\chi_n}\cdot J_2(\chi_n)\right)=$$

$$=\left|J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\cdot\nu}{x}J_\nu(x),\ \ \nu=2\right|=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\chi_n\left(J_0'(\chi_n)\right)^2}\left(J_1(\chi_n)-\frac{2}{\chi_n}J_2(\chi_n)+J_3(\chi_n)\right)$$

Відповідь:

$$U(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot\chi_n\left(J_0'(\chi_n)\right)^2}\left(J_1(\chi_n)-\frac{2}{\chi_n}J_2(\chi_n)+J_3(\chi_n)\right)\cdot cos\left(\frac{\sqrt{10}\chi_n t}{16}\right)\cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{16}\right)$$

Задача 3

Умова:

$$\begin{cases} U_t = \Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) U \\ 0 \le r < 5 \\ 0 < t < \infty \\ U(r,0) = 25 - r^2 \\ U(5,t) = 0 \end{cases}$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді добутку:

$$U(r,t) = R(r) \cdot T(t)$$

З межової умови:

$$U(5,t) = 0 = R(5) \cdot T(t) \to R(5) = 0$$

Методом розділення змінних:

$$\frac{T_t}{T} = \left(\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R}\right) = -\lambda$$

Маємо рівняння:

$$r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0$$

Зробимо заміну $\sqrt{\lambda} r = \rho$, маємо рівняння Бесселя 0-го порядку:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(\rho^2 - 0^2\right) R = 0$$

Розв'язком якого є:

$$R = A \cdot J_0(\rho) + B \cdot N_0(\rho) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r) + B \cdot N_0(\sqrt{\lambda} r)$$

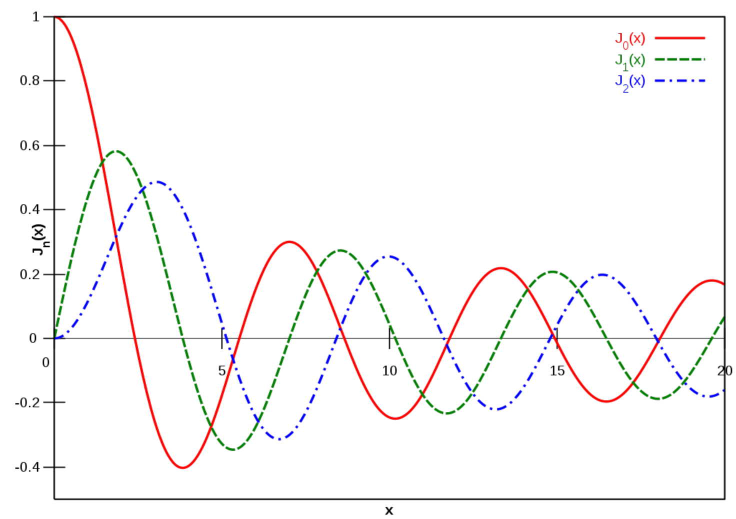
Оскільки $\left|U(r,t)\right| < \infty \to \left|R(r)\right| < \infty,\ \forall r : 0 \le r < 5$:

$$B = 0 \ \left(\lim_{r \to +0} N_0(r) = -\infty\right)$$

З межової умови:

$$R(5) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda} \cdot 5) = 0 \to \sqrt{\lambda_n} = \frac{\chi_n}{5}, n = 1, 2,\ ...$$

Нулі функції Бесселя 0-го порядку(χ_n) показані на рисунку нижче:



Тоді:

$$T_t = -\left(\frac{\chi_n}{5}\right)^2 T$$

$$T_n = A_n \cdot e^{-\left(\frac{\chi_n}{5}\right)^2 \cdot t}$$

Маємо:

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{\chi_n}{5}\right)^2 \cdot t} J_0\left(\frac{\chi_n r}{5}\right)$$

Знайдемо A_n початкової умови:

$$U(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{5}\right) = 25 - r^2$$

Маємо:

$$A_n = \frac{2}{25\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \int_0^5 r \cdot \left(25 - r^2\right) \cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{5}\right) dr$$

Використаємо наступні властивості інтегралів з функціями Бесселя:

$$\int x \cdot J_0(x) dx = x \cdot J_1(x) + C$$

$$\int x \cdot J_0(x) \cdot x^2 dx = x^3 \cdot J_1(x) - 2 \cdot x^2 J_2(x) + C$$

Маємо:

$$A_n = \frac{2}{25\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \cdot \int_0^{\chi_n} \frac{z}{\chi_n} \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{\chi_n}\right)^2\right) \cdot J_0(z) =$$

$$= \frac{2}{25\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \cdot \left(\frac{z}{\chi_n} \cdot J_1(z) - \frac{1}{\chi_n^3} \cdot \left(z^3 \cdot J_1(z) - 2 \cdot z^2 \cdot J_2(z)\right)\right)\Big|_0^{\chi_n} =$$

$$= \frac{2}{25\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \cdot \left(J_1(\chi_n) - J_1(\chi_n) + \frac{2}{\chi_n} \cdot J_2(\chi_n)\right) =$$

$$= \left|J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2 \cdot \nu}{x} J_\nu(x), \quad \nu = 2\right| =$$

$$= \frac{2}{25\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \left(J_1(\chi_n) - \frac{2}{\chi_n} J_2(\chi_n) + J_3(\chi_n)\right)$$

Відповідь:

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{25\left(J_0'(\chi_n)\right)^2} \left(J_1(\chi_n) - \frac{2}{\chi_n} J_2(\chi_n) + J_3(\chi_n)\right) \cdot e^{-\left(\frac{\chi_n}{5}\right)^2 \cdot t} \cdot J_0\left(\frac{\chi_n r}{5}\right)$$