

TP : Codage spatio-temporel pour les systèmes MIMO

## 1 Introduction

L'objectif de ce TP est de mettre en oeuvre, sous MATLAB, quelques codes spatio-temporels (V-BLAST [4], code d'Alamouti [1]) pour les systèmes de communications numériques multi-antennes, et d'analyser numériquement leurs performances en termes de probabilité d'erreur.

Les communications MIMO étant un domaine de recherche très actif depuis une quinzaine d'années, de nombreuses publications scientifiques sur le sujet existent et continuent de paraître chaque année. Les étudiants curieux d'en apprendre plus, en particulier sur les codes spatio-temporels, pourront par exemple consulter les références [5, 3, 2].

Pour le TP, on considérera un lien sans-fil MIMO non sélectif en fréquence composé de  $N$  antennes d'émission et de  $M$  antennes de réception, comme décrit en figure 1. Le signal  $y_{m,\ell}$  reçu par l'antenne  $m$  à l'instant  $\ell$  est alors modélisé par

$$y_{m,\ell} = \sum_{n=1}^N h_{m,n} x_{n,\ell} + v_{m,\ell},$$

où

- $h_{m,n}$  est un coefficient représentant le gain complexe entre la  $n$ -ième antenne d'émission et la  $m$ -ème antenne de réception ; les coefficients  $(h_{m,n})$  sont modélisés comme des variables i.i.d. gaussiennes complexes standards (pas de corrélation entre antennes) ;
- $x_{n,\ell}$  représente le symbole émis par l'antenne  $n$  à l'instant  $\ell$ , supposé à valeurs dans un alphabet  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  ;
- $v_{m,\ell}$  représente un bruit additif ; les variables  $(v_{m,\ell})$  sont modélisées comme i.i.d gaussiennes complexes centrées de variance  $\sigma^2$ .

En groupant les signaux reçus dans le vecteur  $\mathbf{y}_\ell = [y_{1,\ell}, \dots, y_{M,\ell}]^T$ , on aboutit au modèle vectoriel

$$\mathbf{y}_\ell = \mathbf{H}\mathbf{x}_\ell + \mathbf{v}_\ell,$$

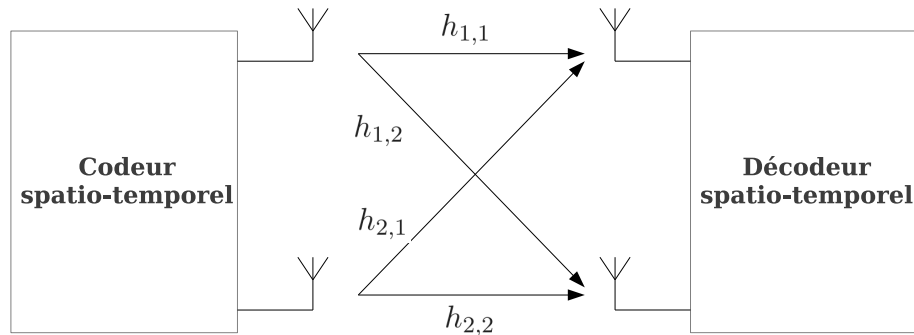


FIGURE 1 – Système MIMO  $2 \times 2$

où  $\mathbf{x}_\ell = [x_{1,\ell}, \dots, x_{N,\ell}]^T$  et  $\mathbf{v}_\ell = [v_{1,\ell}, \dots, v_{M,\ell}]^T$ . Le canal sera supposé à évanouissements par blocs, c'est-à-dire que la matrice  $\mathbf{H}$  reste constante lors de la transmission de  $L$  symboles  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L$ . En notant  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L]$ , on aboutit alors au modèle matriciel

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V},$$

où  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L]$  et  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_L]$ .

On supposera les mots  $\mathbf{X}$  à valeurs dans un *code spatio-temporel en bloc* (STBC pour Space-Time Bloc Code), c'est-à-dire un sous-ensemble fini  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_{N,L}(\mathcal{A})$ , satisfaisant la contrainte de puissance

$$\|\mathbf{X}\|_F^2 \leq NL,$$

où  $\|\cdot\|_F$  représente la norme de Frobenius. Sous ces normalisations, on définira alors le SNR comme la quantité  $\frac{1}{\sigma^2}$ .

Pour les expérimentations, on supposera que les symboles des mots de code prennent leurs valeurs dans un alphabet QPSK, que l'on notera  $\mathcal{A}$ , et l'on supposera également que  $M \geq N$ .

## 2 Code V-BLAST

Le V-BLAST (pour Vertical-Bell Laboratories Layered Space-Time) consiste à répartir "verticalement" les symboles à transmettre, c'est-à-dire que l'on transmet un symbole par antenne. Si  $x_1, \dots, x_{NL}$  sont les symboles à transmettre, on forme alors le mot de code

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{N+1} & \dots & x_{(L-1)N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N & x_{2N} & \dots & x_{LN} \end{bmatrix}.$$

Le code V-BLAST est donc donné par l'ensemble des matrices

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}_{N,L}(\mathcal{A}).$$

Plusieurs méthodes de décodage existent pour les codes V-BLAST. On distingue le décodage classique au sens du maximum de vraisemblance, et les décodeurs basés sur des *récepteurs linéaires* (ZF, MMSE), où les observations sont pré-filtrées spatialement.

Pour les expérimentations, on prendra  $M = N = L = 2$ .

### 2.1 Décodage ML

Le décodage par maximum de vraisemblance ("ML" pour Maximum Likelihood) est celui qui minimise la probabilité d'erreur. Cette procédure revient ici à estimer le mot de code émis par

$$\hat{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}\|_F^2,$$

i.e. à choisir le mot de code  $\mathbf{X}$  qui minimise la distance entre l'observation  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{H}\mathbf{X}$ .

- Implémenter le décodage ML, et tracer la probabilité d'erreur en fonction du SNR.
- Quel est le principal inconvénient du décodage ML ?

## 2.2 Décodage ZF

La méthode ZF (Zero-Forcing) consiste à annuler la contribution du canal, en pré-filtrant le signal reçu. On forme alors la matrice

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}^\# \mathbf{Y},$$

où  $\mathbf{H}^\#$  est la pseudo-inverse de  $\mathbf{H}$ . Le mot de code émis est alors estimé par "seuillage dur" de  $\mathbf{Z}$ , en formant la matrice  $\hat{\mathbf{X}}$  dont l'entrée  $(n, \ell)$  est donnée par

$$\hat{x}_{n,\ell} = \underset{z \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |z_{n,\ell} - z|^2,$$

où  $z_{n,\ell}$  est l'entrée  $(n, \ell)$  de  $\mathbf{Z}$ .

- Donner la loi de  $\mathbf{z}_\ell$  (pour  $\ell = 1, \dots, L$ ), où  $\mathbf{z}_\ell$  est la  $\ell$ -ième colonne de  $\mathbf{Z}$ . Que dire de l'énergie du bruit  $\mathbb{E} \|\mathbf{H}^\# \mathbf{v}_\ell\|^2$  après cette transformation ? Sous quelle caractéristique de  $\mathbf{H}$  cette énergie peut-elle être grande ?
- Implémenter le décodage ZF, et tracer la probabilité d'erreur en fonction du SNR.

## 2.3 Décodage MMSE

Le décodage par filtre de Wiener (ou "MMSE" pour Minimum Mean Square Error) consiste à pré-filtrer spatialement les données reçues, de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne en sortie du filtre.

En toute généralité, pour un signal reçu  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$  est le signal émis,  $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^M}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ , et où  $\mathbf{H}$  est connue, il s'agit alors de construire la matrice de filtrage  $\mathbf{F}_{\text{MMSE}}$  telle que

$$\mathbf{F}_{\text{MMSE}} = \underset{\mathbf{F} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \|\mathbf{F}^* \mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2,$$

c'est-à-dire minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le signal émis et le signal filtré.

Pour un mot reçu  $\mathbf{Y}$  de longueur  $L$ , on forme alors, comme le décodage par ZF, la matrice

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}_{\text{MMSE}}^* \mathbf{Y}.$$

L'estimée du mot de code émis est alors donnée par la matrice  $\hat{\mathbf{X}}$ , dont l'entrée  $(n, \ell)$  est donnée par

$$\hat{x}_{n,\ell} = \underset{z \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |z_{n,\ell} - z|^2.$$

- Déterminer l'expression du filtre MMSE  $\mathbf{F}_{\text{MMSE}}$ .
- Donner la loi de  $\mathbf{z}_\ell$ . Que dire de l'énergie du bruit  $\mathbb{E} \|\mathbf{F}_{\text{MMSE}}^* \mathbf{v}_\ell\|^2$  après cette transformation ? Comparer la différence avec le ZF.
- Implémenter le décodeur MMSE et comparer les performances au décodeur ZF. Que constate-t-on à fort SNR ? Justifier en s'appuyant sur les résultats théoriques développés.

## 2.4 Décodage SIC

Le décodage SIC (pour "Successive Interference Cancellation") repose sur une décomposition QR de la matrice de canal  $\mathbf{H}$ . En effet, pour  $M \geq N$ , on peut toujours écrire  $\mathbf{H}$  sous la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

où  $\mathbf{Q}$  est une matrice  $M \times N$  à colonnes orthonormées, et où  $\mathbf{R}$  est une matrice  $N \times N$  triangulaire supérieure. On forme alors la matrice

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Q}^* \mathbf{Y},$$

L'estimée du mot de code émis est alors donnée par la matrice  $\hat{\mathbf{X}}$  dont les colonnes sont formées par soustractions successives ; pour  $\ell$  fixé, on commence par estimer

$$\hat{x}_{N,\ell} = \underset{z \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |z_{N,\ell} - r_{N,N}z|^2,$$

puis par récurrence

$$\hat{x}_{n,\ell} = \underset{z \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} \left| z_{n,\ell} - \sum_{k=n+1}^N r_{n,k} \hat{x}_{k,\ell} - r_{n,n}z \right|^2,$$

où  $(r_{n,k})$  est l'entrée  $(n,k)$  de  $\mathbf{R}$ .

- Donner la loi de  $\mathbf{z}_\ell$ . Que dire de l'énergie du bruit  $\mathbb{E} \|\mathbf{Q}^* \mathbf{v}_\ell\|^2$  après cette transformation ?
- Implémenter le décodeur SIC et comparer les performances aux décodeurs précédents.
- Quel est le principal défaut de ce décodeur ?

## 3 Code d'Alamouti

Le code d'Alamouti est un code de longueur  $L = 2$ , valable pour  $N = 2$  antennes d'émission, donné par

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{A}) : x_{1,1} = \overline{x_{2,2}} \text{ et } x_{2,1} = -\overline{x_{1,2}}\}.$$

Ce code permet donc de transmettre 1 symbole par utilisation canal.

- Montrer que le décodage par maximum de vraisemblance du code d'Alamouti revient, pour un mot de code émis

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & -\overline{x_2} \\ x_2 & \overline{x_1} \end{bmatrix},$$

à estimer les symboles  $x_1$  et  $x_2$  par

$$\hat{x}_1 = \underset{z \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |z_1 - \|\mathbf{H}\|_F^2 z|^2, \text{ et } \hat{x}_2 = \underset{z \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |z_2 - \|\mathbf{H}\|_F^2 z|^2,$$

où  $z_1 = \mathbf{h}_1^* \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2^* \mathbf{h}_2$ ,  $z_2 = \mathbf{h}_2^* \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2^* \mathbf{h}_1$ , avec  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  les colonnes respectives de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{Y}$ .

- Donner les lois de  $z_1$  et  $z_2$ . A quel type de canal le décodage précédent permet-il de se ramener ?
- Implémenter le code d'Alamouti et comparer les performances au V-BLAST (décodage MV), en superposant sur une même figure les résultats pour  $M = 2, 4$  et 8 antennes de réception. Expliquer les différences observées au regard des résultats du cours.

## 4 Bonus : Performances sur canal estimé

En pratique, le canal  $\mathbf{H}$  n'est pas connu, et il est alors nécessaire de l'estimer au préalable avant d'effectuer le décodage. Dans le cas d'une estimation supervisée, une séquence d'apprentissage sur  $L$  utilisations canal est envoyée :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{S}^* + \mathbf{V},$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice  $L \times N$  ( $L > N$ ) des symboles d'apprentissage, supposée donc connue à l'émetteur. Pour garantir de bonnes propriétés d'estimation, on impose en général que

$$\frac{\mathbf{S}^*\mathbf{S}}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbf{I}.$$

- *Que signifie la propriété précédente en termes "statistiques" ? Montrer que cette propriété est vérifiée en particulier si les symboles sont choisis uniformément dans un alphabet QPSK.*

Dans le cas présent, il est plus aisé de considérer l'estimation de  $\mathbf{G} = \mathbf{H}^*$ , et l'on travaille ainsi sur la quantité

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^* = \mathbf{S}\mathbf{G} + \mathbf{W},$$

où  $\mathbf{W} = \mathbf{V}^*$ .

- *Le récepteur connaissant  $\mathbf{S}$ , donner l'équation des moindres carrés permettant d'obtenir l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de  $\mathbf{G}$ . Résoudre l'équation puis donner l'estimateur de  $\mathbf{H}$ .*
- *Implémenter l'estimateur de canal, puis comparer les courbes de probabilité d'erreur pour le code V-BLAST (avec décodeur MV). Faire les tracés sur plusieurs valeurs de  $L$ . Comparer à la courbe de probabilité d'erreur lorsque le canal est connu parfaitement.*
- *Que constate-t-on sur les tracés quand  $L \rightarrow \infty$  ?*

## Références

- [1] S.M. Alamouti. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(8) :1451–1458, 1998.
- [2] J.C. Belfiore, G. Rekaya, and E. Viterbo. The golden code : a  $2 \times 2$  full-rate space-time code with nonvanishing determinants. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(4) :1432–1436, 2005.
- [3] M.O. Damen, K. Abed-Meraim, and J.C. Belfiore. Diagonal algebraic space-time block codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(3) :628–636, 2002.
- [4] G.J. Foschini. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas. *Bell labs technical journal*, 1(2) :41–59, 1996.
- [5] David Gesbert, Mansoor Shafi, Da-shan Shiu, Peter J Smith, and Ayman Nagueib. From theory to practice : an overview of mimo space-time coded wireless systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 21(3) :281–302, 2003.