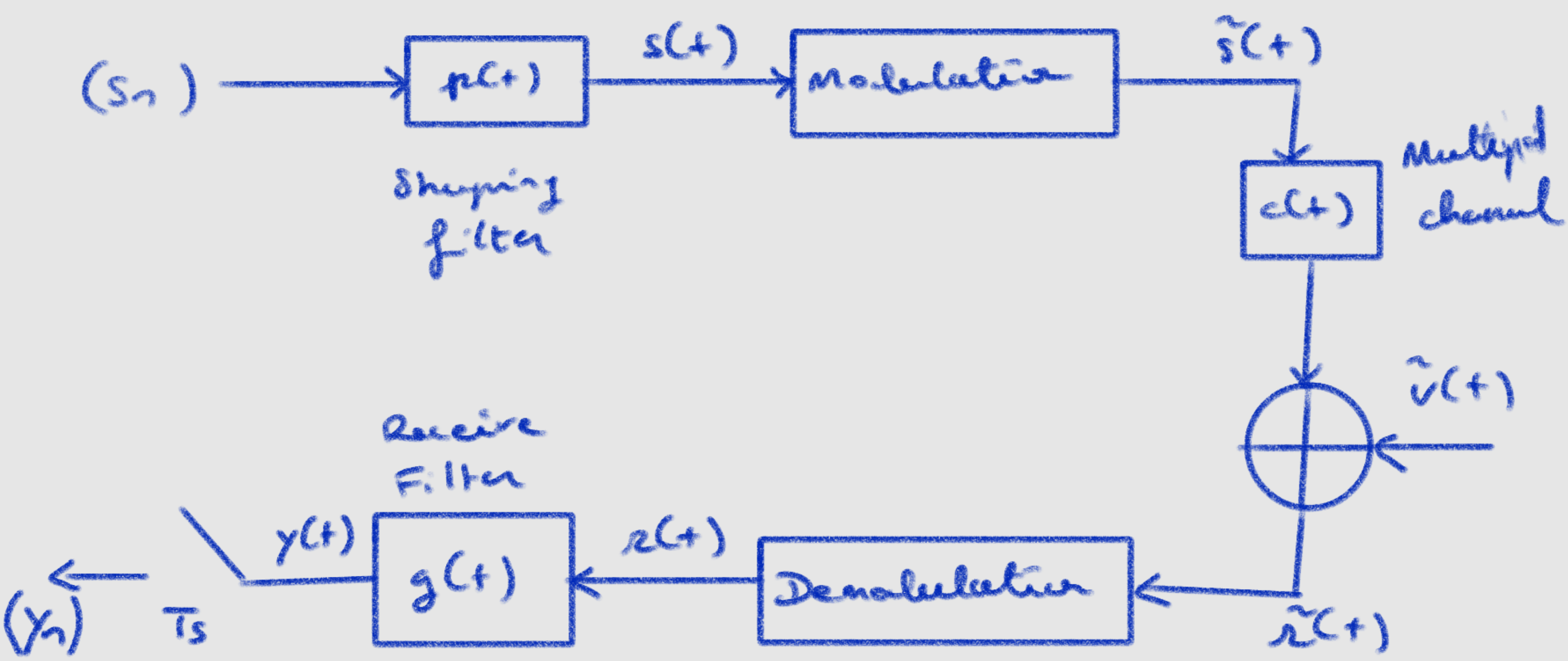
MIMO Communications

I/ Mimo channel modeling

A/ Siso model



Siso transmit/received chain

$$\tilde{s}(t) = Re\left(s(t) e^{i 2\pi f_c t} \right)$$

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \, p(t - kT_s)$$

$$\tilde{r}(t) = Re\left(r(t) e^{i 2\pi f_c t} \right)$$

$$r(t) = \sum^{P} \gamma_n \, s(t - \tau_n) + v(t)$$

$p=1$

P : multipath number

τ_p : p-th path delay

γ_p : p-th path fading coeff

$$y(t) = (r * g)(t)$$

$$= \sum s_n h(t - kT_s) + w(t)$$

$$h(t) = \sum_{p=1}^{P} \gamma_p (p * g)(t - \tau_p)$$ equivalent channel

$$w(t) = (g * v)(t)$$

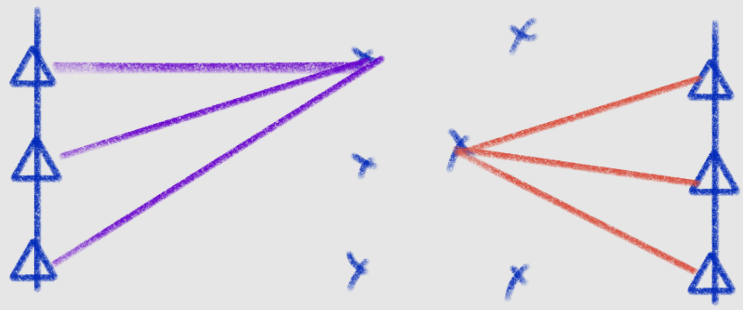
$$c(t) = \sum_{p=1}^{P} \gamma_p \delta(t - \tau_p)$$

$$g * c * p$$

$$s(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Canal Equivalent

B) miso model



miso simo

$$\tilde{x}_p(t) = \alpha_p \sum_{n=1}^{N} \tilde{s}_n(t - \tau_{n,p})$$

fading coeff
btw antenna &
p-th scatterer

propagation delay
btw n-antenna
p-scatterer

où $\tilde{s}_n(t) = \mathrm{Re}\left(s_n(t)\, e^{i 2\pi f_c t}\right)$

On peut approximer le model bande de base $\tilde{x}_p(t)$ comme :

$$x_p(t) = \alpha_p\, e^{-i 2\pi f_c \tau_{1,p}}\, \underline{a}(\theta_p, \phi_p)^T\, \underline{s}(t - \tau_{1,p})$$

steering vector
de N-antenna array

$(s_1(t) \cdots s_N(t))^T$

Soit $\bar{\tau}_{n,p} = \tau_{n,p} - \tau_{1,p}$

$$x_p(t) = \alpha_p e^{-i2\pi f_c \tau_{1,p}} \sum \underbrace{s_n(t-\bar{\tau}_{n,p})}_{\simeq\, s_n(t-\tau_{1,p})} e^{-i2\pi f_c \bar{\tau}_{n,p}}$$

$$= \alpha_p e^{-i2\pi f_c \tau_{1,p}} \underline{a}^T \underline{s}(t-\tau_{1,p})$$

c) SIMO model

Enveloppe complexe reçu par le p scatterer

$$\underline{x}_p(t) = \beta_p e^{-i2\pi f_c \bar{\tau}_{1,p}} \underline{b}(\bar{\theta}_p, \bar{\phi}_p) x_p(t-\bar{\tau}_{1,p})$$

fading coeff p-th antenne

steering vector M-antenna array

propagation delay btw scatterer/p antenne

c) MIMO model

$$\underline{x}(t) = \sum_{p=1}^{P} \underline{x}_p(t) + \underline{v}(t)$$

$$= \sum_{p=1}^{P} \gamma_p \underline{b}(\bar{\theta}_p, \bar{\phi}_p) \underline{a}(\theta_p, \phi_p)^T s(t-\delta_p) + v(t)$$

où $\gamma_p = \alpha_p \beta_p e^{-i 2\pi f_c \delta_p}$

$\delta_p = T_{1,p} + \overline{T_{1,p}}$

$$y(t) = (\underline{r} * g)(t)$$

$$= \sum H(t - nT_s)\, \underline{s_n} + \underline{w}(t)$$

où

$$H(t) = \sum_{p=1}^{P} \gamma_p\, \underline{b}(\bar{\theta}_p, \bar{\phi}_p)\, a(\theta_p, \phi_p)^T (p * g)(t - \delta_p)$$

$$\underline{w}(t) = ((v_1 * g)(t), \dots (v_m * g)(t))^T$$ filtered noise

Après sous-échantillonnage :

$$\underline{Y_n} = y(nT_s)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k\, \underline{s_{n-k}} + \underline{w_n}$$

$H_k = H(kT_s)$ $\qquad$ $= \underline{w}(nT_s)$

En pratique on considère :

- canal causal

- nombre fini

$$\boxed{y_n = \sum_{k=0}^{K} H_k \underline{s}_{n-k} + \underline{w}_n}$$

$K > 1 \Rightarrow$ frequency selective channel

$K = 1 \Rightarrow$ | flat fading channel
| d'où $y_n = H s_n + w_n$

D) Modèle de Kronecker

Le modèle suppose que :

- $\delta_1 = \dots = \delta_p = \partial$
- $\gamma_1 \dots \gamma_p$ complex circular de var : $\frac{1}{P}$
- $(\theta_1, \phi_1) \cdots (\theta_p, \phi_p)(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_p) \dots$ iid et de $\gamma_1 \cdots \gamma_p$

Alors par theoreme Central Limit

$$H = (\phi + y)(0) \sum_{p=1}^{P} \gamma_p \underline{b}(\bar{\theta}_p, \bar{\phi}_p) \underline{a}(\theta_p, \phi_p)^T$$

CV en distribution vers matrice gaussienne

$\Downarrow$?

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour ? assez grand} \\ H = R^{1/2} X \tilde{R}^{1/2}\end{array}}$$

où Rx $R = (r_{i,\ell})_{i,\ell} = \mathbb{E}\left(\underline{b}(\bar{\theta},\bar{\phi}) \underline{b}(\bar{\theta},\bar{\phi})^* \right)$

Tx $\tilde{R} = (\tilde{r}_{j,k})_{j,k} = \mathbb{E}\left(\underline{a}(\bar{\theta},\bar{\phi}) \underline{a}(\bar{\theta},\bar{\phi})^* \right)$

X matrice $M \times N$ $\sim \mathcal{N}_c(0,1)$

Kronecker model for ULA

Si DoA répartis uniformément

Alors $\bar{\theta} \sim \mathcal{U}(\bar{\Theta})$ angular sector $\subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ainsi $R \longrightarrow I$ quand $\frac{d}{d_c} \to +\infty$

Rice Model (extension de Kroenecker)

En présence d'un chemin direct

$$H = \sqrt{\frac{K}{K+1}}\, C + \sqrt{\frac{1}{K+1}}\, R^{1/2} X \tilde{R}^{1/2}$$

où

$$C = \underline{b}(\bar{\theta}_0, \bar{\phi}_0)\, \underline{a}(\theta_0, \phi_0)^T$$

$(\bar{\theta}_0, \bar{\phi}_0), (\theta_0, \phi_0)$ deterministic

K ratio entre énergie du chemin direct et de l'énergie reflétée

II/ mimo channel capacity

A/ Contexte

Soit un $m \times N$ mimo channel plat.

$$\underline{y} = H \underline{x} + \underline{v}$$

où H channel matrix $\in \mathbb{C}^{m \times N}$

$v \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^m}(0, \sigma^2 I)$ BBC

$x \in \mathbb{C}^N$ signal transmis tq

$\mathbb{E}\|x\|_2^2 \leq ? \iff tr(Q) \leq ?$

où $Q = \mathbb{E}(\underline{x}\,\underline{x}^*)$

Ensemble de codes $\mathcal{E} = \{ \underline{X}_1 \dots X_{|\mathcal{E}|} \}$

où X_k mat $M \times L$ où L longueur du code

$$R = \frac{\log(|\mathcal{E}|)}{L}$$

fonction décodage : $\phi : \mathbb{C}^{M \times L} \to \mathcal{E}$

$P_e = p(\phi(Y) \neq X)$ proba d'erreur

- Un $R > 0$ est dit atteignable si $\exists$ codes tq

$$R_L \xrightarrow[L \to \infty]{} R \qquad P_{e,L} \xrightarrow[L \to \infty]{} 0$$

- $C = \sup \{ R \geq 0 \text{ tq } R \text{ atteignable} \}$

capacité du canal

- Eigenvalue décomposition de H peut être trouvée comme

$$HH^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} U^*$$

$$H^*H = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} V^*$$

s_N)

B] Cas où H déterministe

Théorème de Shannon

Si H déterministe

alors $$C = \sup_{f_x \,:\, \mathbb{E}\|x\|_2^2 \leq P} \mathbb{I}(\underline{x}, \underline{y})$$

où $\mathbb{I}(\underline{x}, \underline{y})$ info mutuelle entre i/o du canal

- $$\mathbb{I}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{H}(y) - \mathbb{H}(y \mid x)$$
$$= \mathbb{H}(y) - n \log(\pi e \sigma^2)$$

où $\mathbb{H}$ entropie et $\mathbb{H}(\cdot \mid \cdot)$ entropie conditionnelle

Formules de capacité du canal

$$C = \sup_{\substack{Q \succeq 0 \\ \operatorname{tr} Q \leq P}} \log\det\left(I + \frac{HQH^*}{\sigma^2}\right) \quad (1)$$

$$C = \sup_{\substack{q_1 \cdots q_r \geq 0 \\ \leq P}} \sum_{i=1}^{r} \log\left(1 + \frac{q_i s_i}{\sigma^2}\right) \quad (2)$$

$q_1 + \cdots q_r = 1$

où $(\lambda_i)_{i \in [\![0, r]\!]}$ eigenvalues de H

(1) <=> (2) <u>Démo</u>

$$C = \sup \underbrace{\log\det\left(I + \frac{HQH^*}{\sigma^2}\right)}^{\square} \quad (1)$$

Or $\det(I + AB) = \det(I + BA)$

D'où $\square = \log\det\left(I + \frac{QHH^*}{\sigma^2}\right)$

$$= \log\det\left(I + \frac{QV\Lambda V^*}{\sigma^2}\right)$$

$$= \log\det\left(I + \frac{\Lambda^{1/2} V^* Q V \Lambda^{1/2}}{\sigma^2}\right)$$

Soit $Q' = V^* Q V$

avec $Tr(Q') = Tr(V^* Q V) = Tr(Q V^* V)$

$$= Tr(QI)$$

$$= Tr(Q)$$

alors $C = \sup\limits_{\substack{Q' \geq 0 \\ tr\, Q' \leq P}} \underbrace{\log\det\left(I + \frac{\Lambda^{1/2} Q' \Lambda^{1/2}}{\sigma^2}\right)}_{\square'}$

Par inégalité de Hadamard

$$\square' \leq \sum^{r} \log\left(1 + \frac{q_i \lambda_i}{\sigma^2}\right)$$

$\square \leq \sum_{i=1} \log\left(1 + \frac{\ldots}{\sigma^2}\right)$

avec égalité ssi $Q' = \mathrm{diag}(q_1 \ldots q_N)$

Ainsi $C = \sup\limits_{\substack{q_1 \ldots q_r > 0 \\ q_1 + \ldots q_r \leq P}} \sum_{i=1}^{r} \log\left(1 + \frac{q_i \lambda_i}{\sigma^2}\right)$

Water - Filling

$\exists! (q_1^* \ldots q_r^*)$ tq $q_i^* = \left(\frac{1}{\gamma^*} - \frac{1}{\frac{\lambda_i}{\sigma^2}}\right)^+$

où γ^* unique solution de

$$f\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\frac{\lambda_i}{\sigma^2}}\right)^+ = P$$

On en déduit les coefficients diagonaux q_i^*

Emission

$y = Hx + v$

$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{r+1} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ s_M \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = V \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^*} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{q_r^*} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} s$$

matrice des puissances

$$\mathbb{E}(xx^*) = V \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^*} & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & \sqrt{q_r^*} & & \\ & (0) & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} E(ss^*) \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix} V^*$$

$$= Q$$

<u>reception</u>

$$y = Hx + v$$

$$= HV \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} s + v$$

$$y = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^*} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{q_r^*} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} S + v$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1 q_1^*}\, s_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$y = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_r q_r}\, s_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v$$

Postcoding : $z = U^* y$

bruit

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1 q_1}\, s_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_r q_r}\, s_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \omega$$

Conclusion

- Maximum de r symboles transmis
- Precoding / Postcoding optimal nécessite que H soit connu de l'emetteur et du recepteur

c) Cas où H fading gaussien

$$C = \mathbb{E}\left(\log\det\left(I + \frac{P}{N\sigma^2} H H^*\right)\right)$$

obtenu pour $x \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}\left(0, \frac{P}{N} I\right)$

III / Codage Espace-Temps

A/ Modèle

$Y = HX + V \longleftarrow \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$

connu récepteur

$\hat{X} = \phi(Y)$ où $\phi : \mathbb{C}^{M \times L} \to \mathcal{C}$ décodeur

$P_e = p(\hat{X} \neq X)$ proba d'erreur pour X obtenu

B/ Décodeur standard

$$\hat{X} \in \underset{C \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmax}}\, f(Y, X, C, \sigma^2)$$

où $f(Y, H, C, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma^2 \pi}\right)^{ML} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\| Y - HC \|_F^2\right)$

fonction de vraissemblance

où $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{L} |a_{ij}|^2 = \mathrm{Tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^{\min(N,L)} \sigma_i(A)^2$

MAX DE VRAISSEMBLANCE

$$\boxed{\hat{X} \in \operatorname*{argmin}_{c \in \mathcal{C}} \| Y - Hc \|_F^2}$$

problème des moindres carrés

$O(|\mathcal{C}|)$ ou $O(|\mathcal{A}|^{NL})$

ZF Decoder (Zero Forcing)

Soit $Z = F^* Y$

alors
$$\begin{aligned} Z &= F^*(HX + V) \\ &= F^* H X + F^* V \\ &= IX + F^* V \\ &= X + F^* V \end{aligned}$$

$$F_{ZF} = \operatorname{argmin} \| F^* H - I \|_F^2$$

$$\boxed{F_{ZF} = (H^*)^+ = (H^+)^*}$$ $O(NL|d|)$

où H^+ pseudo-inverse de H

Rem : • Soit H tq $rg(H) = N$

alors $F_{ZF} = H(H^* H)^{-1}$

$$Z = X + F_{ZF}^* V$$

• Souvent $\hat{x} \notin \mathcal{C}$, des opérations supplémentaires peuvent être nécessaires

• ZF est sous-optimal

• Le bruit filtré n'est plus blanc
son énergie est amplifiée si valeurs propres de H proches de 0

Décodeur MMSE

Pour un temps symbole on a

$$z = Hx + v$$

$$F_{mmse} \in \underset{F \in \mathbb{C}^{M \times N}}{\operatorname{argmin}} \ \mathbb{E} \| F^* y - x \|_2^2$$

$$F_{mmse} = (HQH^* + \sigma^2 I)^{-1} HQ$$

où $Q = \mathbb{E}(xx^*)$

DECODEUR MMSE

$$\hat{X} = (\hat{x}_{n,l}), \quad \hat{x}_{n,l} \in \underset{s \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |z_{n,l} - s|^2$$

où $Z = (z_{n,l}) = Q^* H^* (HQH^* + \sigma^2 I)^{-1} Y$

- Si $Q = I$ alors $F_{mmse} \xrightarrow[\sigma^2 \to 0]{} F_{ZF}$

- Si $Q = I$ le filtered noise energy

$$FNE = \frac{1}{L} \mathbb{E} \| F_{mmse}^* V \|_F^2$$

$$= \sigma^2 \| F_{mmse} \|_F^2$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i(H)}{\sigma_i(H)^2 + \sigma^2} \right)^2$$

Decodeur SIC

Si $M \geq N$ alors on peut écrire

$$H = QR \leftarrow N \times N \text{ triangulaire supérieure}$$

isométrique $M \times N$

Soit $Z = Q^* Y$

$$= RX + Q^* V$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ & \ddots & \\ (0) & & r_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \\ x_{N1} & & x_{NN} \end{pmatrix} + W$$

où $W = Q^* V \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma^2)$

SIC Decoder

$$\hat{x}_{n,\ell} \in \arg\min \left| z_{n,\ell} - \sum_{k=n+1}^{N} r_{n,k} \hat{x}_{k,\ell} - r_{n,n} s \right|^2$$

où $Z = Q^* Y$, $\hat{X} = (\hat{x}_{n,\ell})_{n\ell}$ pour $n \leq N-1$

et $\hat{x}_{n,\ell} \in \arg\min_{s \in \mathcal{A}} | z_{N,\ell} - r_{N,N} s |^2$ pour $n = N$

- Généralement meilleurs perf que ZF / MMSE

mais moins d'erreur

- Possibilité de propagation d'erreur
- Si utilisé de concert avec ZF / mmse :

  SIC-ZF SIC-MMSE

C/ Proba d'erreur et critère de Tarokh

$$pe = p(\hat{x} \neq x)$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{c \in \mathcal{E}} p(\hat{x} \neq x \mid x = c)$$

$$pe = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{c \in \mathcal{E}} \sum_{\substack{c' \in \mathcal{E} \\ c' \neq c}} p(\hat{x} = c' \mid x = c)$$

PAIRWISE ERROR PROBABILITY (PEP)

$$pe(c \to c') = p\left(\|Y - Hc'\|_F^2 \leq \|Y - Hc\|_F^2 \mid x = c \right)$$

Proba de décoder c' sachant c et c, c' seuls mots codes

Alors en utilisant ML décoder on obtient

$$pe \leq \frac{1}{\ } \sum \sum pe(c \to c')$$

$p_e \quad |\mathcal{E}| \; c\in\mathcal{E} \; c'\in\mathcal{E}, c'\neq c$

• Calculer borne sup de $p_e(c \to c')$

$$p_e(c \to c')$$

$$= p\left(\| H(c-c') + V\|_F^2 \leq \|V\|_F^2 \mid X = c \right)$$

$$= p\left(\underbrace{\|H(c-c') + V\|_F^2 - \|V\|_F^2}_{=\Delta} \leq 0 \mid X = c \right)$$

$$\Delta = \|H(c-c')\|_F^2 + \|V\|_F^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle V, H(c-c')\rangle) - \|V\|_F^2$$

$$= \|H(c-c')\|_F^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\left(V^* H(c-c')\right)\right)$$

Alors

$$p_e(c \to c') = p(\Delta \leq 0)$$

$$= \mathbb{E}\left(p(\Delta \leq 0 \mid H)\right)$$

• $\mathrm{Tr}(V^* H(c-c')) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0, \sigma^2 \|H(c-c')\|_F^2\right)$

• Conditionnellement à H :

$$\mathcal{L}(\Delta \mid H)$$

$$= \mathcal{N}_{\mathbb{R}}\left(\|H(c-c')\|_F^2, 2\sigma^2 \|H(c-c')\|_F^2\right)$$

$$p_e(c \to c') =$$

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{N}_{\mathbb{R}}\left(\|H(c-c')\|_F^2,\ 2\sigma^2 \|H(c-c')\|_F^2 \right) \leq 0 \mid H \right)$$

<u>Calcul de cette espérance</u>

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

$$p_e(c \to c') = \mathbb{E}\left(Q\left(\frac{\|H(c-c')\|_F^2}{\sigma\sqrt{2}\, \|H(c-c')\|_F} \right) \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(Q\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \|H(c-c')\|_F \right) \right)$$

Borne de Chernoff

Par Borne de Chernoff $\longleftarrow$ $Q(x) \leq e^{-x^2/2}$

$$p_e(c \to c') \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2} \|H(c-c')\|_F^2 \right) \right)$$

Or $\|H(c-c')\|_F^2$

$$= \mathrm{Tr}\big(H \underbrace{(c-c')(c-c')^*}_{U \Lambda U^*} H^* \big)$$

$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ valeurs propres de $(c-c')(c-c')^*$

$$= \mathrm{Tr}\big((HU) \Lambda (U^* H^*) \big)$$

en loi

D'où $H \overset{\mathcal{L}}{=} HU$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\|HC-C'\|_F^2\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\mathrm{Tr}(H\Lambda H^*)\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}|h_{ij}|^2\lambda_j\right)\right)$$

$$= \prod_{i,j}\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\lambda_j|h_{ij}|^2\right)\right)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{N}\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\lambda_j|h|^2\right)\right)\right)^M \quad \text{où } h \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$$

- $\mathbb{E}\left(\exp(-\lambda|h|^2)\right)$

$$= \int \exp(-\lambda|h|^2)\frac{1}{\pi}e^{-|h|^2}\underbrace{dh}_{d\mathrm{Re}(h)\,d\mathrm{Im}(h)}$$

Posons $h = \rho e^{i\theta}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda\rho^2)\frac{1}{\pi}\exp(-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\exp(-(\lambda+1)\rho^2)\rho\,d\rho$$

Posons $u = \rho^2$

$$du = 2\rho\, d\rho$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-(\lambda+1)u)\, du$$

$$= \frac{1}{1+\lambda}$$

- D'où

$$\left(\prod_{j=1}^{N} \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2} \lambda_j |h|^2\right)\right)\right)^m$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda_j}{4\sigma^2}}\right)^m$$

On obtient

BORNE SUP DU PEP DE TAROKH

$$\boxed{\begin{array}{l} pe(c \to c') \leq \displaystyle\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda_j}{4\sigma^2}}\right)^m \\ \text{où } \{\lambda_j\}_{j\in[\![1,m]\!]} \text{ valeurs propres de } (c-c')(c-c')^* \end{array}}$$

- à haut SNR :

On pose $\rho = \frac{1}{\sigma^2}$, $r = \text{rang}(c-c')$

$$pe(c \to c') \leq \left(\frac{4}{\rho}\right)^{Mr} \left(\prod_{j=1}^{r} \frac{1}{\lambda_j}\right)^{M} + O\left(\frac{1}{\rho^{Mr+1}}\right)$$

quand $\rho \to +\infty$

CRITERE DE RANG DE TAROKH

Un code $\mathcal{E}$ doit être choisi tq

$$r_{min}(\mathcal{E}) = \min_{\substack{c,c' \in \mathcal{E} \\ c \neq c'}} rg(c - c') \quad \text{MAXIMAL}$$

Rem

$d(\mathcal{E}) = M \times r_{min}(\mathcal{E})$: diversity advantage

$\max(d(\mathcal{E})) = MN$ atteint pour $r_{min}(\mathcal{E}) = N$

coïncide avec nb de chemins ind entre M et N

CRITERE DE DETERMINANT DE TAROKH

Un code $\mathcal{E}$ doit être choisi tq

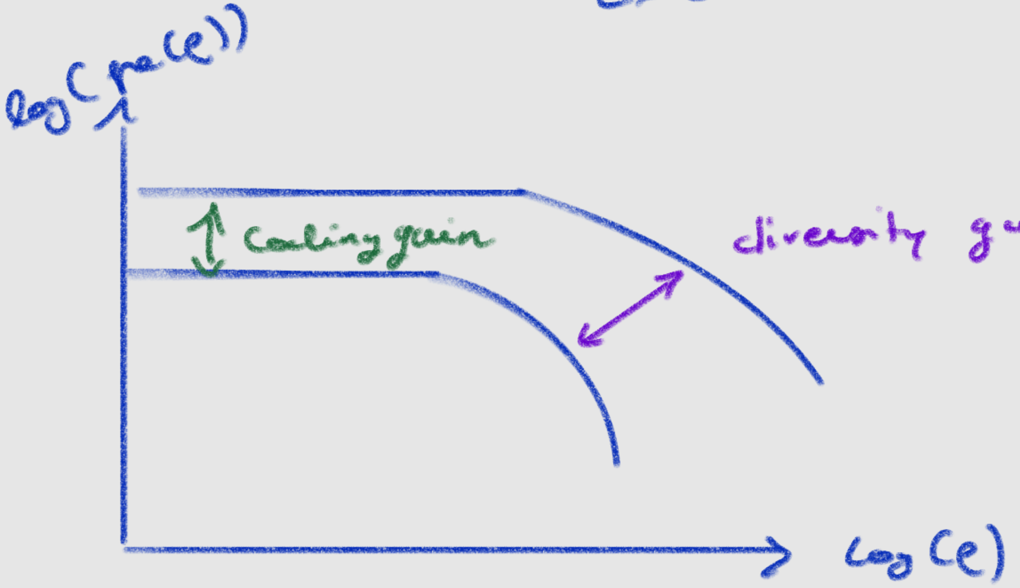
$$\lambda_{min}(\mathcal{E}) = \min_{\substack{c,c' \in \mathcal{E} \\ c \neq c'}} \prod_{j=1}^{rg(c-c')} \lambda_j \quad \text{MAXIMAL}$$

Rem :

$\lambda_{min}(\mathcal{E})$: coding advantage de $\mathcal{E}$

Quand $r_{min}(\mathcal{E}) = N$

Alors $\lambda_{min}(\mathcal{E}) = \max\limits_{\substack{c,c' \in \mathcal{E} \\ c \neq c'}} \det\left((C-C')(C-C')^*\right)$



D) Exemples de STBC

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,L} \\ \vdots & & \\ c_{N,1} & \cdots & c_{N,L} \end{pmatrix}}_{L \text{ channel use}} \Big\updownarrow N \text{ antennes}$$

1) V-BLAST

Idée : Transmettre N streams de symboles avec chaque stream attribué à 1 antenne

$$C = \begin{pmatrix} s_0^{(0)} & \cdots & s_{L-1}^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ s_0^{(N-1)} & & s_{L-1}^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E} = S^N$ où $S \subset \mathbb{C}^L$ set de substreams

$$R(\mathcal{E}) = \frac{\log|\mathcal{E}|}{L} = \frac{N}{L}\log|S|$$

$r_{min} = 1$

Pas de diversity advantage dû à l'absence de codage entre antennes

2) D-BLAST

Idée : Chaque stream shift 'circularly' entre antennes

$$C = \begin{pmatrix} s_0^{(0)} & \cdots & s_0^{(K-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1^{(0)} & & s_1^{(K-1)} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & s_{N-1}^{(0)} & & s_N^{(K-1)} \end{pmatrix}$$

$L = N + K - 1$

$\mathcal{E} = \mathcal{S}^K$

$$R(\mathcal{E}) = \frac{\log|\mathcal{E}|}{L} = \frac{K}{N+K-1}\log|\mathcal{S}|$$

$$r_{min} = \min_{\substack{s,s'\in\mathcal{S}\\ s\neq s'}} \|s-s'\|_0$$

3) Codes orthogonaux

$$C = \sum_{k=1}^{K} (s_k \Phi_k + \bar{s}_k \Psi_k)$$

$$CC^* = \alpha\left(\sum_{k=1}^{K} |s_k|^2\right) I \qquad \alpha > 0$$

Φ_k, Ψ_k matrices $N\times L$ de valeurs $\{-1, 0, 1\}$

$$\hat{C} = \arg\min_{C\in\mathcal{E}} \|Y - HC\|_F^2$$

$$\|Y - HC\|_F^2 = \|Y\|_F^2 + \|HC\|_F^2 - 2\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(Y^* HC))$$

- $2\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(Y^* HC))$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\left(Y^* H \sum_{k=1}^{K} s_k \Phi_k + \bar{s}_k \Psi_k\right)\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(s_k \,\mathrm{Tr}(Y^* H \Phi_k) + \bar{s}_k \,\mathrm{Tr}(Y H \Psi_k)\right)$$

$$= 2 \sum_{k} \mathrm{Re}\left(s_k \left(\mathrm{Tr}(Y^* H \Phi_k) + \overline{\mathrm{Tr}(Y^* H \Psi_k)}\right)\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_k s_k \bar{z}_k\right)$$

D'où

$$z_k = \overline{\mathrm{Tr}(Y^* H \Phi_k)} + \mathrm{Tr}(Y^* H \Psi_k)$$

$$\|Y - HC\|_F^2$$

$$= \|Y\|_F^2 + \alpha \sum_k |s_k|^2 \|H\|_F^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_k s_k \bar{z}_k\right)$$

Ainsi

$$\hat{C} = \underset{C \in \mathcal{E}}{\arg\min} \|Y - HC\|_F^2$$

$$\Leftrightarrow (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_K)$$

$$= \underset{(s_1, \dots, s_K)}{\arg\min} \left(\|Y\|_F^2 + \alpha \sum_k |s_k|^2 \|H\|_F^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_k s_k \bar{z}_k\right)\right)$$

$$= \underset{(s_1, \dots, s_K)}{\arg\min} \sum_k \left| \frac{z_k}{\|H\|_F} - \sqrt{\alpha}\, \|H\|_F\, s_k \right|^2$$

$$= \arg\min \sum | z \; - \sqrt{\alpha}\; \|H\|^2 \quad |^2$$

$$= \underset{(s_1 \cdots s_K)}{\operatorname{argmin}} \sum_k \left| z_k - \sqrt{\alpha}\, \|H\|_F\, s_k \right|$$

D'où

$$\boxed{\forall k \in [\![1, K]\!] \quad \hat{s}_k = \underset{s \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} \left| z_k - \sqrt{\alpha}\, \|H\|_F^2\, s \right|^2}$$

Pour $N = L = 2$: Alamouti codes

$$C = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ -\bar{s}_2 & s_1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ max diversity advantage $= 2M$

→ rate 1 symbol/canal use

E1 DMT

Capacité ergodique

$$C(\rho) = \mathbb{E}\left(\log\det\left(I + \rho H H^* \right)\right) \quad \rho : \text{SNR}$$

$$C(\rho) \sim \min(M, N) \log(\rho)$$

$f \to 500$

adaptation du nb de mots codes transmis
en fonction du SNR

63

120 + 120 + 96 + 11×24 + 66 × 1

336 + 264 + 66

336 + 330

666

500 → 1300

166 × 2,5

332 + 83

415

1715

48 → 3

118 → 2,5

+ 48 × 0,5

+ 24

1798

500 → 1300

166 × 3 → 498

1623

140

1760