2 LEYES DE LOS EXPONENTES (REVISIÓN Y GENERALIZACIÓN)

2.1. LEYES DE LOS EXPONENTES ENTEROS Y POSITIVOS. En el segundo curso de matemáticas estudiamos las siguientes leyes de los exponentes enteros y positivos, ahora, las repasaremos en forma somera.

1. Producto de dos potencias de la misma base. El producto de dos potencias de la misma base (distinta de cero) es igual a la base elevada a la suma de los exponentes (*primera ley*).

Es decir:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplos:

a) $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2+4} = \left(\frac{a}{b}\right)^6$

c) $m^3 \cdot m^4 \cdot m^5 = m^{3+4} \cdot m^5 = m^7 \cdot m^5$

$= m^{7+5} = m^{12}$

d) $b^4 \cdot b^3 \cdot b = b^{4+3+1} = b^8$

e) $c^2 \cdot c \cdot c^3 = c^{2+1+3} = c^6$

2. Potencia de otra potencia. La potencia de otra potencia de la misma base (distinta de cero) es igual a la base elevada al producto de los exponentes (*segunda ley*).

Es decir:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplos:

a) $(2^4)^2 = 2^{4 \times 2} = 2^8$

b) $(m^2)^3 = m^{2 \times 3} = m^6$

c) $(x^3)^4 = x^{3 \times 4} = x^{12}$

d) $(y^5)^2 = y^{5 \times 2} = y^{10}$

3. Potencia de un producto de varios factores. La potencia de un producto es igual al producto de la misma potencia de los factores (*tercera ley*).

Es decir:

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$

Ejemplos:

a) $(5 \times 4)^2 = 5^2 \times 4^2 = 25 \times 16 = 400$
$(a^2b^3)^3 = (a^2)^3 \cdot (b^3)^3 = a^6b^9$

b) $(ab)^2 = a^2b^2$

c) $(x^2y^3)^2 = (x^2)^2 \cdot (y^3)^2 = x^4y^6$

d) $(a^2b^3c^4)^2 = (a^2)^2 \cdot (b^3)^2 \cdot (c^4)^2 = a^4b^6c^8$

4. Potencia de un fracción. Para elevar una fracción a un exponente se elevan el numerador y el denominador a dicho exponente (*cuarta ley*).

Es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

c) $\left(\frac{m^2}{n^3}\right)^3 = \frac{m^6}{n^9}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$

e) $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 = \frac{a^{12}}{b^8}$

5. División de potencias de la misma base. Se presentan los casos de que el exponente del dividendo sea mayor, igual o menor que el exponente del divisor.

Es decir, en la división $\frac{a^m}{a^n}$, se pueden presentar los tres siguientes casos:

Primer caso: $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{6^5}{6^2} = 6^{5-2} = 6^3$$

Segundo caso: $m = n$. Como m y n son iguales podemos expresarlo en la siguiente forma:

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

Ejemplo:

$$\frac{7^3}{7^3} = \frac{7}{7} \times \frac{7}{7} \times \frac{7}{7} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Tercer caso: $m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Ejemplo:

$$\frac{8^3}{8^5} = \frac{1}{8^{5-3}} = \frac{1}{8^2}$$

porque

$$\frac{8^3}{8^5} = \frac{8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8} = \frac{8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8} \times \frac{1}{8 \times 8} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{8 \times 8} = \frac{1}{8^2}$$

Ejemplos:

a) $\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2$

b) $\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

c) $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

d) $\frac{b^6}{b^6} = 1$

e) $\frac{c^3}{c^4} = \frac{1}{c^{4-3}} = \frac{1}{c}$

f) $\frac{5}{5^3} = \frac{1}{5^{3-1}} = \frac{1}{5^2}$

2.2. EXPONENTE CERO. Desde el primer curso de matemáticas sabemos que todo número racional distinto de cero, elevado al exponente cero es igual a la unidad.

Es decir:

$a^0 = 1$, siendo $a \neq 0$

Como una potencia de exponente cero no responde a la definición de potencia (producto de varios factores iguales), se buscó un significado que cumpliera con las leyes de los exponentes enteros y positivos. Recordemos el razonamiento hecho en el segundo curso de matemáticas.

Es decir:

Si $a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$ de acuerdo con la primera ley de los exponentes la igualdad anterior, $a^m \cdot a^0 = a^m$, sólo puede ser cierta si $a^0 = 1$, esto es, si $a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$.

2.3. EXPONENTE NEGATIVO. Todo número racional distinto de cero elevado a un exponente entero y negativo, es igual a una fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador el mismo número racional con el exponente positivo.

Es decir:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Este convenio se ha establecido en vista de que el exponente negativo, como el exponente cero, no responden a la definición de potencia (producto de factores iguales). Se buscó de esta manera un significado que cumpla con las leyes de los exponentes enteros y positivos.

Así podemos observar:

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}, \ \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} \qquad a \neq 0$$

Entonces

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

Ejercicio IV

A. Realizar las siguientes operaciones:

a) $8^4 \times 8^5$ *f*) $\frac{3^4}{3}$

b) $7^3 \times 7^4$ *g*) $\frac{5^3}{5^2}$

c) $a^4 \cdot a^5$ *h*) $\frac{b^4}{b^3}$

d) $c^7 \cdot c^3$ *i*) $\frac{c^7}{c^5}$

e) $m^c n^d$ j) $a^m : a^p$

B. Obtener el valor de la potencia que resulte.

a) $5^2 x 5^3$ *d*) $(4^3)^3$

b) $\frac{12^6}{12^4}$ *e*) $\frac{15^4}{15^5}$

c) $(3^2)^3$ *f*) $(2^4)^2$

C. Hallar el valor de las siguientes potencias:

a) 3^{-2} *f*) $\frac{5^4}{5^4}$

b) 7^0 *g*) $\frac{b^h}{b^h}$

c) $\frac{a^5}{a^5}$ *h*) 15^{-2}

d) $(a^3 \cdot a^2 \cdot a)^3$ *i*) 5^{-3}

e) $(2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^5)^2$ *j*) c^{-2}

2.4. EXPONENTE FRACCIONARIO. Si para elevar una potencia a un exponente n,basta multiplicar por n el exponente de dicha potencia, para realizar la operación inversa, es decir, para extraer la raíz de índice n de una potencia, bastará dividir el exponente de la potencia entre el índice n de la raíz.

Ejemplos:

1. Siendo

$$(a^5)^2 = a^{10}$$

entonces

$$\sqrt{a^{10}} = a^{\frac{10}{2}} = a^5$$

puesto que, al hacer la prueba de la radicación, elevando al cuadrado la raíz hallada, obtendremos la cantidad subradical, como nos indica la primera igualdad.

2. Siendo

$$(a^4)^3 = a^{12}$$

entonces,

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

En general, siendo

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

se tiene

$$\boxed{\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m}$$

Si el exponente del subradical no es múltiplo del índice de la raíz, tenemos entonces un exponente fraccionario.

Ejemplos:

$$\sqrt{6^5} = 6^{\frac{5}{2}},\ \sqrt{8^3} = 8^{\frac{3}{2}},\ \sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}},\ \sqrt[3]{9^2} = 9^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[3]{b^4} = b^{\frac{4}{3}},\ \sqrt{a^7} = a^{\frac{7}{2}},\ \sqrt[4]{d^9} = d^{\frac{9}{4}},$$

por lo que se ha establecido el siguiente convenio:

Toda cantidad con exponente fraccionario equivale a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo subradical es la misma cantidad, elevada a la potencia que indica el numerador del exponente.

Ejemplos:

a) $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$ *b*) $b^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{b^4}$

c) $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$ *d*) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

e) $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ *f*) $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$

g) $\sqrt[6]{8^5} = 8^{\frac{5}{6}}$ *h*) $\sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}}$

Si el exponente fraccionario tuviera signo negativo, es necesario aplicar primero el convenio para exponentes negativos y, después, emplear el convenio establecido para los exponentes fraccionarios.

Ejemplos:

a) $8^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{8^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{8^3}}$ *e*) $\dfrac{1}{\sqrt{7^3}} = \dfrac{1}{7^{\frac{3}{2}}} = 7^{-\frac{3}{2}}$

$b)\ 15^{-\frac{6}{7}} = \dfrac{1}{15^{\frac{6}{7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{15^6}}$ $\quad f)\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{1}{3^{\frac{4}{5}}} = 3^{-\frac{4}{5}}$

$c)\ a^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$ $\quad g)\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{m^3}} = \dfrac{1}{m^{\frac{3}{4}}} = m^{-\frac{3}{4}}$

$d)\ x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ $\quad h)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{b^5}} = \dfrac{1}{b^{\frac{5}{3}}} = b^{-\frac{5}{3}}$

Ejemplos:

Calcular el valor de las siguientes expresiones.

$a)\ 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$

$b)\ 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$

$c)\ 8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

Ejercicio V

Expresar en forma de raíz las siguientes potencias con exponente fraccionario.

$a)\ 5^{\frac{3}{4}}$ $\quad f)\ a^{\frac{4}{7}}$

$b)\ 9^{\frac{3}{4}}$ $\quad g)\ b^{\frac{8}{5}}$

$c)\ 4^{-\frac{5}{3}}$ $\quad h)\ c^{-\frac{4}{3}}$

$d)\ 18^{\frac{7}{4}}$ $\quad i)\ b^{\frac{m}{n}}$

$e)\ 25^{-\frac{3}{8}}$ $\quad j)\ a^{-\frac{e}{c}}$

Ejercicio VI

Expresar las siguientes raíces en forma de potencias con exponentes fraccionarios.

$a)\ \sqrt{12^3}$ $\quad f)\ \sqrt{a^3}$

$b)\ \sqrt[3]{5^2}$ $\quad h)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$

$c)\ \sqrt[3]{17^2}$ $\quad i)\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{c^7}}$

$d)\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^7}}$ $\quad j)\ \sqrt[n]{c^m}$

$e)\ \sqrt{2^5}$ $\quad k)\ \sqrt[c]{a^b}$

Ejercicio VII

Calcular el valor de las siguientes expresiones.

$a)\ 64^{\frac{1}{2}}$ $\quad d)\ 16^{-\frac{1}{2}}$

$b)\ 27^{\frac{1}{3}}$ $\quad e)\ 216^{-\frac{1}{3}}$

$c)\ 4^{\frac{3}{2}}$ $\quad f)\ 10^{\frac{3}{2}}$

2.5. GENERALIZACIÓN DE LAS LEYES DE LOS EXPONENTES. Al ampliar el concepto de exponente entero y positivo, para dar cabida a los exponentes cero, negativos y fraccionarios, hemos de ver si a estos exponentes se pueden aplicar las mismas leyes que hemos estudiado para los exponentes enteros y positivos.

Veamos cómo sucede así y cómo, por tanto, está justificada la generalización de las leyes de los exponentes.

Apliquemos la primera ley al producto de dos potencias de la misma base con exponente cero.

$$a^0\, a^0 = a^{0+0} = a^0 = 1$$

En efecto, como $a^0 = 1$, al multiplicar a^0 por a^0, el resultado debe ser 1.

Observemos ahora el caso de un producto de potencias de la misma base con exponente negativo.

$$a^{-3}\, a^{-4} = a^{(-3)+(-4)} = a^{-7}$$

En efecto,

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

entonces,

$$a^{-3}\, a^{-4} = \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^{3+4}} = \frac{1}{a^7} = a^{-7}$$

que es lo que queríamos comprobar.

En general,

$$a^{-m}\, a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$$

puesto que

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

entonces,

$$a^{-m}\, a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} =$$

$$= a^{-(m+n)} = a^{-m-n} = a^{(-m)+(-n)}$$

que es lo que se quería demostrar.

En forma semejante, se puede probar, en los otros casos, que las leyes estudiadas para los exponentes enteros y positivos tienen validez para exponentes cualesquiera.

Ejemplos:

a) $7^0 \times 7^3 = 7^{0+3} = 7^3$

b) $a^{-4}\, a^{-5} = a^{(-4)+(-5)} = a^{-9}$

c) $b^{-3}\, b^{-2} = b^{(-3)+(-2)} = b^{-5}$

d) $5^4 \times 5^{-1} = 5^{(4)+(-1)} = 5^3$

e) $m^{-7}\, m^4 = m^{(-7)+(4)} = m^{-3}$

f) $\dfrac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

g) $\dfrac{a^{-3}}{a^2} = a^{(-3)-(2)} = a^{-3-2}\, a^{-5}$

h) $\dfrac{6^{-4}}{6^{-3}} = 6^{(-4)-(-3)} = 6^{-4+3} = 6^{-1}$

i) $(m^4)^2 = m^{4\times 2} = m^8$

j) $(n^{-3})^{-5} = n^{(-3)(-5)} = n^{15}$

k) $(8^{-2})^3 = 8^{(-2)(3)} = 8^{-6}$

l) $(c^{-3})^4 = c^{(-3)(4)} = c^{-12}$

m) $(a^2)^{-5} = a^{(2)(-5)} = a^{-10}$

n) $(b^0)^{-3} = b^{(0)(-3)} = b^0 = 1$

ñ) $7^{-\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{5}{3}} = 7^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}} = 7^{\frac{3}{3}} = 7$

o) $12^{\frac{3}{2}} \times 12^{\frac{5}{2}} = 12^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = 12^{\frac{8}{2}} = 12^4$

p) $a^{\frac{3}{4}}\, a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$

q) $\dfrac{14^{\frac{5}{4}}}{14^{\frac{3}{4}}} = 14^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} = 14^{\frac{2}{4}} = 14^{\frac{1}{2}}$

r) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$

s) $\left(m^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = m^{\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = m^{-\frac{3}{10}}$

Ejercicio VIII

Realizar las siguientes operaciones:

1. $3^4 \times 3^3$

2. $4^5 \times 4^{-3}$

3. $2^{-1} \times 2^3$

4. $a^4\ a^3$

5. $b^{-3}\ b^{-5}$

6. $m^{-3}\ m^{-6}$

7. $a^0\ a^5$

8. $a^{-3}\ a^4$

9. $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{7}{3}}$

10. $7^{\frac{3}{4}} \times 7^{-\frac{1}{4}}$

11. $a^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{3}{2}}$

12. $16^{\frac{3}{5}} \times 16^{\frac{2}{3}}$

13. $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{3}{4}}$

14. $m^2\ m^{-4}\ m^5$

15. $b^{-3}\ b^4\ b^{-2}$

16. $\frac{9^4}{9^2}$

17. $\frac{13^{-3}}{13^2}$

18. $\frac{15^{-2}}{15^5}$

19. $\frac{23^3}{23^{-4}}$

20. $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}$

21. $\frac{e^2}{e^{-3}}$

22. $\frac{b^{-4}}{b^2}$

23. $\frac{m^{\frac{3}{4}}}{m^{\frac{1}{4}}}$

24. $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{1}{6}}}$

25. $(6^3)^4$

26. $(a^{-1})^{-3}$

27. $(17^{-2})^5$

28. $(b^4)^{-2}$

29. $\left(c^{\frac{3}{4}}\right)^4$

30. $(m^{-2})^{\frac{2}{5}}$

Ejercicio IX

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $2^2 \times 2^3$

b) $12^{-3} \times 12^4$

c) $16^{\frac{3}{2}} \times 16^{\frac{1}{2}}$

d) $5^3 \times 5^{-4}$

e) $\frac{17^4}{17^2}$

$f)\ \dfrac{2^3}{2^5}$

$g)\ \dfrac{4^{-1}}{4^{-2}}$

$h)\ \dfrac{3}{3^{-1}}$

$i)\ (4^2)^2$

$j)\ (2^{-1})^2$

2.6. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE MONOMIOS QUE TENGAN EXPONENTES CUALESQUIERA. Las reglas que se han estudiado en el segundo curso de matemáticas para la realización de las distintas operaciones con monomios de exponentes enteros y positivos, se aplican también, de acuerdo con la generalización de las leyes de los exponentes, a las operaciones con monomios de exponentes cualesquiera.

Ejemplos:

1. $(3a^2b^3)\,(-4a^3b^4) = -12a^5b^7$

2. $(2a^3b^4)\,(5a^{-2}b) = 10ab^5$

3. $(-x^4\,y^3)\,(7x^{-2}y^{-1}) = -7x^2y^2$

4. $(m^3\,n^{-2})\,(m^0n) = m^3\,n^{-1}$

5. $\dfrac{4a^2\,b^4}{2a\,b^3} = 2ab$

6. $\dfrac{8a^3b^2c^4}{-4a^3b^5c} = -2a^0\,b^{-3}c^3 = -2b^{-3}c^3$

7. $\dfrac{-15m^4n^{-3}}{-5m^7n^{-8}} = 3\,m^{-3}n^5$

8. $\dfrac{2a^4b^2c^0}{-a^0b^5c^3} = -2a^4b^{-3}c^{-3}$

9. $(-6\,x^{\frac{2}{3}}\,y^{-1})\,(-2\,x^{\frac{5}{3}}y^4) = 12\,x^{\frac{7}{3}}y^3$

10. $(m^{\frac{2}{5}}\,n^{-3})\,(-3\,m^{\frac{1}{2}}\,n^{-1}) = -3\,m^{\frac{9}{10}}\,n^{-4}$

11. $\dfrac{-6\,a^{\frac{6}{5}}\,b^2}{-3\,a^{\frac{2}{5}}\,b} = 2\,a^{\frac{4}{5}}\,b$

12. $(-a^2b^4)^2 = a^4b^8$

13. $(2m^{-3}n^2)^3 = 8m^{-9}n^6$

14. $(a^0\,b^{-1}\,c^2)^4 = a^0\,b^{-4}\,c^8 = b^{-4}c^8$

15. $(x^3y^0z^{-2})^{-3} = x^{-9}y^0z^6 = x^{-9}z^6$

Ejercicio X

Realizar las siguientes operaciones:

$a)\ (-3a^2b^{-4})\,(-2ab^2)$

$b)\ (5a^0b^{-3}c^2)\,(-4a^{-2}b^5c^{-1})$

$c)\ (-6a^{-2}b^3c^4)\cdot(2ab^{-1}c^{-2})$

$d)\ (x^0y^{-1}z^{-2})\,(x^0y^{-1}z^{-1})$

$e)\ (2a^{\frac{2}{3}}\,b^{-1}c)\,(-3a^{\frac{4}{3}}b^3c^{-1})$

$f)\ (a^{\frac{3}{5}}b^2c^{-3})\,(5a^{\frac{2}{3}}b^{-4}c)$

$g)\ \dfrac{12\,m^3n^4}{-3m^7n^2}$

$h)\ \dfrac{18x^2\,y^{-2}z^0}{6xy^{-4}z^2}$

$i)\ \dfrac{-16a^0b^3c^0}{-8a^2b^6c^{-3}}$

$j)\ \dfrac{-21a^3b^4c}{7a^6b^4c}$