PRIMERA SESIÓN DE PROBLEMAS

21 septiembre de 2004

Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Problema 3

Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que

$$\text{mcd}\,(a, n) = \text{mcd}\,(b, n) = 1 \quad \text{y} \quad k = a + b.$$

Duración: 4h. 30 m.
Cada problema vale siete puntos

Versión en español

SEGUNDA SESIÓN DE PROBLEMAS

22 septiembre de 2004

Problema 4

Determinar todas las parejas (a,b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Problema 5

Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente.

Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA',

B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB' y

C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'.

Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

Problema 6

Para un conjunto $\mathcal{H}$ de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un *punto de corte* de $\mathcal{H}$ si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en $\mathcal{H}$ tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.

Dado un conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ de la siguiente manera: para cualquier j ? 0, $\mathcal{A}_{j+1}$ es la unión de $\mathcal{A}_j$ con el conjunto de todos los puntos de corte de $\mathcal{A}_j$.

Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier j ? 1 se tiene que $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duración: 4h. 30 m.

Cada problema vale siete puntos

Versión en español