XXIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Salvador, Brasil, 20–28 de Septiembre de 2008

Martes, 23 de Septiembre de 2008

Problema 1. Se distribuyen los números 1, 2, 3, ..., 2008^2 en un tablero de 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q los pies de las perpendiculares a la recta r que pasan por A y C, respectivamente. Las rectas CP y AB se intersectan en M y las rectas AQ y BC se intersectan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto común.

Problema 3. Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

Idioma: Español

Duración: 4 h 30 min
Cada problema vale 7 puntos

XXIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Salvador, Brasil, 20–28 de Septiembre de 2008

Miércoles, 24 de Septiembre de 2008

Problema 4. Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

Problema 5. Sean ABC un triángulo y X, Y, Z puntos interiores de los lados BC, AC, AB respectivamente. Sean A', B', C' los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYX. Demuestre que

$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si las rectas AA', BB', CC' tienen un punto común.

Observación: Para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

Problema 6. En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro jugadores cada uno. Se organiza un torneo de biribol en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no son fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

Idioma: Español

Duración: 4 h 30 min
Cada problema vale 7 puntos