XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primer Día

28 de Septiembre de 2022

Problema 1. Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea D un punto en el arco menor BC, con $DB > DC$. La mediatriz de OD corta a Γ en E y F, con E en el arco menor BC. Sea P el punto de corte de BE y CF. Demostrar que PD es perpendicular a BC.

Problema 2. Sea $S = \{13, 133, 1333, \dots\}$ el conjunto de los enteros positivos de la forma $1\overbrace{3\dots3}^{n \text{ dígitos}}$, con $n \geq 1$. Consideremos una fila horizontal de 2022 casillas, inicialmente vacías. Ana y Borja juegan de la siguiente manera: cada uno, en su turno, escribe un dígito de 0 a 9 en la casilla vacía situada más a la izquierda. Empieza a jugar Ana; luego ambos jugadores se alternan hasta que todas las casillas están llenas. Cuando el juego termina, en la fila se lee, de izquierda a derecha, un número N de 2022 dígitos. Borja gana si N es divisible por alguno de los números que están en S; en caso contrario gana Ana. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.

Problema 3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

(*i*) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$.

(*ii*) $|f(x)| < 2022$ para todo x con $0 < x < 1$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Segundo Día

29 de Septiembre de 2022

Problema 4. Sea $n > 2$ un entero positivo. Se tiene una fila horizontal de n casillas donde cada casilla está pintada de azul o rojo. Decimos que un *bloque* es una secuencia de casillas consecutivas del mismo color. Arepito el cangrejo está inicialmente parado en la primera casilla, en el extremo izquierdo de la fila. En cada turno, él cuenta la cantidad m de casillas pertenecientes al bloque más grande que contiene la casilla en la que está, y hace una de las siguientes acciones:

- Si la casilla en la que está es azul y hay al menos m casillas a la derecha de él, Arepito se mueve m casillas hacia la derecha;
- Si la casilla en la que está es roja y hay al menos m casillas a la izquierda de él, Arepito se mueve m casillas hacia la izquierda;
- En cualquier otro caso, se queda en la misma casilla y no se mueve más.

Para cada n, determinar el menor entero k para el que existe una coloración inicial de la fila con k casillas azules para la que Arepito puede llegar a la última casilla, en el extremo derecho de la fila.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Γ. Sean P y Q puntos en el semiplano definido por BC que contiene a A, tales que BP y CQ son tangentes a Γ con $PB = BC = CQ$. Sean K y L puntos distintos de A en la bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$, tales que $BK = BA$ y $CL = CA$. Sea M el punto de corte de las rectas PK y QL. Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos. Determinar todas las funciones $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$f(a)f(a+b) - ab$$

es un cuadrado perfecto para todo a, b en $\mathbb{Z}^+$.

Tiempo: 4 horas y media
Cada problema vale 7 puntos