PRIMEIRO DIA

19 de setembro de 2017

1. Para cada inteiro positivo n, seja $S(n)$ a soma dos seus algarismos. Dizemos que n tem a propriedade P se os termos da sequência infinita $n, S(n), S(S(n)), S\left(S(S(n))\right), \ldots$ são todos pares, e dizemos que n tem a propriedade I se os termos desta sequência são todos ímpares. Mostre que, entre todos os inteiros positivos n tais que $1 \leq n \leq 2017$, são mais os que têm a propriedade I do que os que têm a propriedade P.

2. Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ a sua circunferência circunscrita. Seja D um ponto no segmento BC, distinto de B e de C, e seja M o ponto médio de AD. A reta perpendicular a AB que passa por D intersecta AB em E e Γ em F, com o ponto D entre E e F. As retas FC e EM intersectam-se no ponto X. Se $\angle DAE = \angle AFE$, mostre que a reta AX é tangente a Γ.

3. Consideremos as configurações de números inteiros

$$\begin{array}{lllll}
a_{1,1} & & & & \\
a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \\
a_{2017,1} & a_{2017,2} & a_{2017,3} & \cdots & a_{2017,2017}
\end{array}$$

com $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos os i, j tais que $1 \leq j \leq i \leq 2016$.

Determine o número máximo de inteiros ímpares que uma tal configuração pode conter.

Duração: 4 horas e meia — Versão: PORTUGUÊS

Cada problema vale 7 pontos

SEGUNDO DIA

20 de setembro de 2017

4. Sejam ABC um triângulo acutângulo com $AC > AB$ e O seu circuncentro. Seja D um ponto no segmento BC tal que O está no interior do triângulo ADC e $\angle DAO + \angle ADB = \angle ADC$. Chamamos P e Q aos circuncentros dos triângulos ABD e ACD respectivamente e M ao ponto de interseção das retas BP e CQ. Mostre que as retas AM, PQ e BC são concorrentes.

Nota. O circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência que passa pelos três vértices do triângulo.

5. Dado um inteiro positivo n, todos seus divisores inteiros positivos estão escritos num quadro. Ana e Beto jogam o seguinte jogo:
Alternadamente, cada um vai pintar um desses divisores de vermelho ou de azul. Podem escolher a cor que desejam na sua vez, mas só podem pintar números que não tenham sido pintados anteriormente. O jogo termina quando todos os números tenham sido pintados. Se o produto dos números pintados de vermelho é um quadrado perfeito, ou se não há nenhum número pintado de vermelho, Ana ganha; caso contrário, Beto ganha. Se Ana é a primeira a jogar, determine quem tem estratégia vencedora, para cada n.

6. Sejam $n > 2$ um inteiro positivo par e $a_1 < a_2 < ... < a_n$ números reais tais que $a_{k+1} - a_k \leq 1$ para todo k com $1 \leq k \leq n-1$. Seja A o conjunto dos pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ e $j - i$ par, e seja B o conjunto dos pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ e $j - i$ ímpar. Mostre que

$$\prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i) > \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i) .$$

Duração: 4 horas e meia — Versão: PORTUGUÊS

Cada problema vale 7 pontos