PRIMER DÍA

19 de septiembre de 2017

1. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Decimos que n tiene la propiedad P si los términos de la sucesión infinita $n, S(n), S(S(n)), S(S(S(n))), \ldots$ son todos pares, y decimos que n tiene la propiedad I si los términos de esta sucesión son todos impares. Demostrar que entre todos los enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 2017$ son más los que tienen la propiedad I que los que tienen la propiedad P.

2. Sean ABC un triángulo acutángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D un punto en el segmento BC, distinto de B y de C, y sea M el punto medio de AD. La recta perpendicular a AB que pasa por D corta a AB en E y a Γ en F, con el punto D entre E y F. Las rectas FC y EM se cortan en el punto X. Si $\angle DAE = \angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

3. Consideramos las configuraciones de números enteros

$$\begin{array}{lllll}
a_{1,1} & & & & \\
a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \\
a_{2017,1} & a_{2017,2} & a_{2017,3} & \cdots & a_{2017,2017}
\end{array}$$

con $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos los i, j tales que $1 \leq j \leq i \leq 2016$.

Determinar la máxima cantidad de enteros impares que puede contener una tal configuración.

Duración: 4 horas y media — Versión: ESPAÑOL

Cada problema vale 7 puntos

SEGUNDO DÍA

20 de septiembre de 2017

4. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto en el segmento BC tal que O está en el interior del triángulo ADC y $\angle DAO + \angle ADB = \angle ADC$. Llamamos P y Q a los circuncentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente y M al punto de intersección de las rectas BP y CQ. Demostrar que las rectas AM, PQ y BC son concurrentes.

Nota. El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

5. Dado un entero positivo n, se escriben todos sus divisores enteros positivos en un pizarrón. Ana y Beto juegan el siguiente juego:
Por turnos, cada uno va a pintar uno de esos divisores de rojo o azul. Pueden elegir el color que deseen en cada turno, pero solo pueden pintar números que no hayan sido pintados con anterioridad. El juego termina cuando todos los números han sido pintados. Si el producto de los números pintados de rojo es un cuadrado perfecto, o si no hay ningún número pintado de rojo, gana Ana; de lo contrario, gana Beto. Si Ana tiene el primer turno, determinar para cada n quién tiene estrategia ganadora.

6. Sean $n > 2$ un entero positivo par y $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ números reales tales que $a_{k+1} - a_k \leq 1$ para todo k con $1 \leq k \leq n-1$. Sea A el conjunto de pares (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j-i$ par, y sea B el conjunto de pares (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j-i$ impar. Demostrar que

$$\prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i) > \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i).$$

Duración: 4 horas y media — Versión: ESPAÑOL

Cada problema vale 7 puntos