OLIMPIADA IBEROAMERICANA MATEMATICA BOLIVIA 2012

Cochabamba 02/10/12

DURACIÓN: 4 ½ Horas

(Cada problema vale 7 puntos)

PRUEBA DÍA 1

1. Sobre el rectángulo ABCD se dibujan los triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que cada uno comparte puntos con el interior del rectángulo. La recta AX corta a la recta DC en P. La recta AY corta a la recta BC en Q. Demostrar que el triángulo APQ es equilátero.

2. Un entero positivo es ***bisumado*** si se puede escribir como suma de dos enteros positivos que tengan la misma suma de sus dígitos. Por ejemplo, 2012 es bisumado pues 2012 = 2005 + 7 y tanto 2005 como 7 tienen suma de dígitos igual a 7.

   Encontrar todos los enteros positivos que **no** son bisumados.

3. Sea n un entero positivo. Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de enteros entre 0 y $2^n - 1$ inclusive, a cada uno de sus 2^n subconjuntos se le asigna la suma de sus elementos; en particular, el subconjunto vacío tiene suma 0. Si estas 2^n sumas dejan distintos residuos al dividirlas entre 2^n, se dice que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es n-*completo*. Determinar, para cada n, la cantidad de conjuntos n-completos.

OLIMPIADA IBEROAMERICANA MATEMATICA BOLIVIA 2012

Cochabamba 03/10/12

DURACIÓN: 4 ½ Horas

(Cada problema vale 7 puntos)

PRUEBA DÍA 2

4. Sean a, b, c, d números enteros tales que $a-b+c-d$ es impar y divide a $a^2-b^2+c^2-d^2$. Demostrar que, para todo entero positivo n, $a-b+c-d$ divide a $a^n-b^n+c^n-d^n$.

5. Sea ABC un triángulo y sean P y Q los puntos de intersección de la paralela a BC por A con las bisectrices exteriores de los ángulos B y C, respectivamente.
La perpendicular a BP por P y la perpendicular a CQ por Q se cortan en R. Sea I el incentro de ABC. Demostrar que $AI = AR$.

6. Demostrar que, para todo entero positivo n, existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.