Agradecemos en nombre del comité organizador y el comité de problemas a los países que enviaron propuestas de problemas para esta versión de la olimpiada:

Argentina, Brasil, Colombia, Cuba, Ecuador, España, México, Perú, Portugal, Uruguay.

Comité de Problemas:

Santiago Rodríguez Sierra
Nicolás De la Hoz Fernández

Problemas

Álgebra

A1 Una tripla ordenada (a, b, c) es *chevere* si existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden a^{2022}, b^{2022} y c^{2022}. Determinar el número de triplas *cheveres* (a, b, c) tales que $a, b, c \in \{1, 2, \dots 2022\}$.

A2 Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfacen que

$$f(f(x))f(y) + f(x) = f(xy)$$

para todo par de racionales x, y.

A3 Sea n un entero positivo. Dada una sucesión de números reales no negativos $x_1, \dots x_n$ definimos la *sucesión transformada* $y_1 \dots y_n$ de la siguiente manera: el término y_i es el mayor valor posible del promedio de términos consecutivos de la sucesión que contengan a x_i. Demostrar que para todo $t > 0$ la cantidad de términos y_i tales que $y_i > t$ es menor o igual que $\frac{2}{t}(x_1 + \cdots + x_n)$.

A4 Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(*i*) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$ para todos los reales x y y;

(*ii*) $|f(x)| < 2022$ para todo $x \in (0, 1)$.

A5 Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros positivos y $\mathbb{Q}$ el conjunto de los racionales positivos. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfacen

$$f^n(x) = \frac{f(nx)}{n}$$

para todo $x \in \mathbb{Q}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.

Combinatoria

C1 Sea $n > 1$ un entero positivo. Se tiene una tira de n casillas donde cada casilla está pintada de azul o rojo. Decimos que un *bloque* es una secuencia de casillas consecutivas del mismo color. Arepo está inicialmente parado en la primera casilla de la tira. Cada turno determina la cantidad de casillas m pertenecientes al bloque más grande que contiene la casilla en la que está y hace una de las siguientes acciones

- Si la casilla en la que está es azul y hay al menos m casillas hacia adelante entonces Arepo se mueve m casillas hacia adelante
- Si la casilla en la que está es roja y hay al menos m casillas hacia atrás entonces Arepo se mueve m casillas hacia atrás
- En otro caso se queda en la misma casilla

Determinar el menor entero k para el que existe una coloración inicial del tablero con k casillas azules para la que Arepo puede llegar a la ultima casilla.

C2 Sea $n \geq 1$ un entero positivo. En el plano cartesiano se dibuja un circulo C centrado en $(0, 2)$ con radio 1. Se marcan puntos $P_1, P_2 \ldots P_n$ sobre C en ese orden en el sentido horario, de manera que no existan dos puntos con la misma coordenada x. Se proyectan los puntos sobre el eje x y la proyección del punto P_i se etiqueta con el número i. Cuando leemos las etiquetas sobre el eje x de izquierda a derecha obtenemos una permutación de los números del 1 al n. Determinar el número de permutaciones diferentes que se pueden obtener.

C3 Sea n un entero positivo y sea N el número de formas de colocar $+$ y $-$ en los espacios de la expresión:

$$\_1 \ \_2 \ \_3 \ \ldots \ \_4n,$$

de modo que después de simplificar el resultado sea 0. Demuestre que:

$$2^{2n-1} \leq N < 2^{4n} - 2^{2\sqrt{2}n}.$$

C4 Se tienen $2n$ enteros positivos $a_1, \ldots a_{2n}$ no necesariamente distintos entre si. Supongamos que existe un entero M tal que hay al menos n^2+1 parejas de la forma (a_i, a_j) con $1 \leq i < j \leq 2n$ para las cuales se tiene la igualdad $a_i \cdot a_j = M$. Demuestre que existe un entero positivo k tal que, entre los $2n$ a_i's al menos $\frac{4n+3}{3}$ de ellos son iguales a k.

C5 Bruno le da a Andrea una hoja de instrucciones que llamamos dibujo, con la cual ella va a marcar 2022 puntos distintos en el plano numerados $P_1 \ldots P_{2022}$. Cada instrucción es de la forma

$$(i, j, k, \alpha, \beta, \gamma)$$

donde $1 \leq i < j < k \leq 2022$ son números enteros y $0°\alpha, \beta, \gamma < 180°$ son ángulos que suman 180° La instrucción significa que el triángulo $P_iP_jP_k$ debe tener ángulos internos

$$\angle P_i = \alpha \quad \angle P_j = \beta \quad \angle P_j = \gamma$$

y no hay instrucciones repetidas. Inicialmente, Bruno marca P_1 y P_2. Luego, Andrea coloca los demás puntos de forma que se sigan todas las instrucciones. Decimos que un dibujo es *libre* si Andrea puede colocar los puntos de infinitas maneras. ¿Cuál es la máxima cantidad de instrucciones que puede tener un dibujo libre?

Geometria

G1 Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea D un punto en el arco menor BC, con $DB > DC$. La mediatriz de OD corta a Γ en E y F, con E en el arco menor BC. Sea P el punto de corte de BE y CF. Demostrar que PD es perpendicular a BC.

G2 Sea ABC un triángulo y ω su circuncírculo. Sea M el punto medio de BC y sea K el punto de intersección de la bisectriz interna del ángulo en B con ω. Sea S un punto en MC tal que KS y AM se intersectan sobre ω, de igual manera, sea T un punto en MB tal que KM y AT se intersectan sobre ω. Si L es la intersección entre BK y AM demuestre que $\angle BAC = \angle TLS$.

G3 Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Ω. Sean P y Q puntos en el mismo semiplano definido por BC que A tales que BP y CQ son tangentes a Ω de modo que $PB = BC = CQ$. Sean K y L puntos distintos de A en la bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$ de modo que $BK = BA$ y $CL = CA$. Si M es el punto de intersección de las rectar PK y QL demuestre que $MK = ML$.

G4 Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. En la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ se marcan puntos X y Y tales que X está entre A y Y y $BX \parallel CY$. Sea Z el reflejo de X sobre BC y sea P el punto de intersección de las rectas YZ y BC. Si las rectas BY y CX se cortan en K, demostrar que $KA = KP$.

G5 Sea $n \geq 3$ un entero positivo y sea $P = P_1 \ldots P_n$ un n-ágono regular. Sean A y B dos puntos en el interior de P. Definimos $A_1, \ldots A_n$ y $B_1 \ldots B_n$ como las proyecciones de A y B sobre los lados $P_1P_2 \ldots P_nP_1$. Demostrar que se pueden separar los segmentos $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ en dos grupos de forma que ambos grupos tienen la misma longitud total.

G6 Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno, y sean O, H, G y N su circuncuncentro, su ortocentro, su gravicentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos, respectivamente. Sean P, Q, R y S puntos distintos tales que P y Q están en el segmento AB; R y S están en el segmento AC y las ternas de puntos POR, PGS, QNR y QHS son colineales. Determinar la medida del ángulo $\angle BAC$.

Teoría de Números

N1 Determinar todos los enteros positivos $n > 1$ para los que existe un conjunto S de n enteros positivos tal que si calculamos todos los máximos comunes divisores de dos elementos de S, obtenemos cada uno de los números $1, 2, 3, \dots \frac{n(n-1)}{2}$ exactamente una vez.

N2 Sea p un número primo. Determine todos los enteros positivos a tales que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definida por $a_0 = a$ y para todo $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = pa_n - (p-1)\lfloor \sqrt[p]{a_n} \rfloor^p$$

sea eventualmente constante.

N3 Determinar todos los reales $r \geq 1$ para los cuales

$$\lfloor 2^k r \rfloor \text{ divide a } \lfloor 2^{k+1} r \rfloor$$

para todo entero no negativo k.

N4 Sea $S = \{13, 133, 1333, \dots\}$ el conjunto de números que se expresan en base 10 como 1 seguido de uno o varios $3's$. Consideremos una tira horizontal de 2022 casillas, inicialmente vacías. Ana y Borja juegan de la manera siguiente: cada uno, en su turno, escribe en la casilla vacía situada más a la izquierda un dígito de 0 a 9. Empieza a jugar Ana; luego ambos jugadores se alternan hasta que todas las casillas están llenas. Cuando el juego termina, en la tira se lee - de izquierda a derecha - un número N de 2022 dígitos. Borja gana si N es divisible por alguno de los números de S, en caso contrario gana Ana. Determine cual de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y descríbala.

N5 Sea $n > 1$ un entero. Demostrar que existe al menos un entero m con $n < m < 4n^3$ tal que

$$\frac{\lfloor \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{m} \rfloor}{\lfloor \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \rfloor}$$

es entero.

N6 Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los entero positivos. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$f(a)f(a+b) - ab$$

es un cuadrado perfecto para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Soluciones

Álgebra

A1 Una tripla ordenada (a, b, c) es *chevere* si existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden a^{2022}, b^{2022} y c^{2022}. Determinar el número de triplas *cheveres* (a, b, c) tales que $a, b, c \in \{1, 2, \ldots 2022\}$.

Solución:

Respuesta: Hay $2022 + \binom{2022}{2}$ triplas que cumplen lo pedido. Primero daremos una caracterización de las triplas cheveres tales que $a, b, c \in \{1, 2, \ldots 2022\}$ a través del siguiente lema.
Lema: Una tripla (a, b, c) con $a \geq b \geq c$ y $a, b, c \in \{1, 2, \ldots 2022\}$ es chevere si y solo si $a = b$.
Dem: Claramente (a, a, c) es chevere, pues como $a \geq c$ entonces

$$\begin{aligned} 2a^{2022} &> c^{2022} \\ a^{2022} + c^{2022} &> a^{2022} \end{aligned}$$

Ahora supongamos que (a, b, c) con $a > b \geq c$ y $a, b, c \in \{1, 2, \ldots 2022\}$ es chevere. Necesitamos que $b^{2022} \geq \frac{a^{2022}}{2}$. Pues en otro caso

$$b^{2022} + c^{2022} \leq a^{2022}$$

y entonces a^{2022}, b^{2022} y c^{2022} no serían los lados de un triángulo. Como $a > b$ y son enteros, entonces $a \geq b + 1$, luego

$$\begin{aligned} 2b^{2022} &\geq (b+1)^{2022} \\ \iff \quad b^{2022} &\geq (b+1)^{2022} - b^{2022} \\ &= b^{2021} + (b+1)b^{2020} + \cdots + (b+1)^{2021} \\ &> 2022b^{2021} \end{aligned}$$

Que implica que $b > 2022$ que es falso. Entonces $a = b \geq c$ $\square$

Simplemente debemos encontrar el número de triplas de la forma (a, a, c) con $a \geq c$ y $a, c \in \{1, \ldots 2022\}$. Si $a = c$ entonces hay 2022 de estas triplas. Si $a > c$, entonces para cada uno de los $\binom{2022}{2}$ pares, hay una forma de asignar a y c de manera que $a > c$. Entonces en total hay $2022 + \binom{2022}{2}$ triplas.

A2 Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfacen que

$$f(f(x))f(y) + f(x) = f(xy)$$

para todo par de racionales x, y.

Solución:

Respuestas: Las funciones que satisfacen son $f(x) = 0$, $f(x) = 1 - x$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Se puede verificar de manera sencilla que estos cumplen.

Ahora veamos que son las únicas.

Primero encontraremos algunas propiedades generales de la función. Denotemos como $P(x, y)$ a la ecuación funcional. Notemos que $P(0, y)$ implica que

$$f(f(0))f(y) = 0$$

Si $f(y) = 0$ para todo y tenemos una solución. En otro caso, existe un $c = f(0)$ tal que $f(c) = 0$.

Sea x tal que $f(x) \neq 0$. Ahora comparamos $P(c, x)$ con $P(x, c)$ y obtenemos que

$$f(0)f(x) = f(cx) = f(x)$$

Esto implica que $f(0) = 1$. Además tenemos que $f(1) = 0$.

Luego $P(x, 0)$ implica que

$$f(f(x)) + f(x) = 1 \qquad (1)$$

para todo x.

Si usamos (1) en la ecuación original para remplazar $f(f(x))$ llegamos a que $P(x, y)$ es equivalente a

$$f(x) + f(y) = f(xy) + f(x)f(y)$$

Ahora transformaremos la funcional en términos de la función $g(x) = 1 - f(x)$. Entonces $P(x, y)$ se convierte en

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

que denotaremos como $Q(x, y)$ y (1) se transforma en

$$1 - g(x) = g(1 - g(x)) \qquad (2)$$

Si remplazamos x por $1 - g(x)$ en (2), llegamos a que

$$g(g(x)) = g(x) \qquad (3)$$

para todo x.

Notemos que $Q(x, y)$, (2), (3) definen por completo a g entonces podemos enfocarnos en estas propiedades. Además notemos que (3) implica que g es la identidad en los valores de la imagen de g.

Sea I la imagen de f y sean $a, b \in I$. Notemos que $Q(a, b)$ implica que $ab \in I$ y que $Q(\frac{a}{b}, b)$ implica que $\frac{a}{b} \in I$.

Además si evaluamos (2) en a podemos notar que $1 - a \in I$. Entonces $b - a = b(1 - \frac{a}{b}) \in I$ si $b \neq 0$.

Es decir que la imagen es cerrada bajo la multiplicación, división y resta.

Sabemos que $0, 1 \in I$. Hay dos casos

Caso 1: $I = \{0, 1\}$

Supongamos que existe a tal que $g(a) = 0$. Entonces $Q(a, x)$ implica que

$$Q(ax) = 0$$

para todo x. Si $a \neq 0$ entonces g es constante en 0 lo que contradice que $g(1) = 1$. Entonces la única posibilidad es que $a = 0$. Entonces como

$g(x) \in \{0,1\}$ entonces tenemos que $g(x)=1$ para todo $x \neq 0$ y $g(0)=0$.

Remplazando en f tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Caso 2: $I \neq \{0,1\}$
Entonces supongamos que $a \neq 0 \in I$. Luego $a^2-1 \in I$. Además $a-1 \in I$. Luego $a+1 = \frac{a^2-1}{a-1} \in I$. Finalmente $2 = a+1-(a-1) \in I$.

Esto implica que $2^n \in I$ para todo entero positivo n. Como I es cerrado bajo la resta y $1 \in I$, $2^n - k \in I$ para todo $k \leq 2^n$ entero. Entonces $\mathbb{Z}^+ \subset I$.

$2, 3 \in I$ entonces $-1 = 2-3 \in I$. Luego si $a \in I$ entonces $-a \in I$.
Además $\frac{1}{n} \in I$ para todo entero n. Luego podemos demostrar que $r \in I$ para todo racional r, por lo que g es la identidad en todo $\mathbb{Q}$

Remplazando en f tenemos que $f(x) = 1-x$.
Esto termina la solución.

A3 Sea n un entero positivo. Dada una sucesión de números reales no negativos $x_1, \ldots x_n$ definimos la *sucesión transformada* $y_1 \ldots y_n$ de la siguiente manera: el término y_i es el mayor valor posible del promedio de términos consecutivos de la sucesión que contengan a x_i. Demostrar que para todo $t > 0$ la cantidad de términos y_i tales que $y_i > t$ es menor o igual que $\frac{2}{t}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Solución:

Llamemos t-intervalo a cualquier conjunto de términos consecutivos de la sucesión $x_1 \ldots x_n$ cuyo promedio sea mayor que t. Vamos a demostrar que el conjunto $C = \{x_i \mid y_i > t\}$ se puede cubrir con t-intervalos $I_1, \ldots I_m$ de manera que cada x_i esté en a lo sumo dos de ellos.

Sea I_1 el t-intervalo más grande que contiene al elemento más a la izquierda de C. A continuación, sea I_2 el t-intervalo que se extiende más hacia la derecha que contiene al elemento más a la izquierda de $C \setminus I_1$. En general, en el $k+1$- ésimo paso tomamos el t-intervalo que se extiende más hacia la derecha que contiene al elemento más a la izquierda de $C \setminus (I_1 \cup \ldots I_k)$. Como C tiene finitos elementos, tarde o temprano se tiene que $I_1 \cup \cdots \cup I_m$ cubre a C, para un entero $m \leq n$. Ahora, para cada i sea x el elemento de $C \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_i)$ más a la izquierda. Sabemos que I_{i+1} es el t-intervalo que se extiende más a la derecha que contiene a x, luego I_j no lo contiene si $j > i+1$, pues I_j se extiende más a la derecha que I_{i+1} . Queda demostrado entonces que I_i y I_j son disjuntos si $j > i+1$, de donde cada x_i está en a lo sumo dos t-intervalos entre $I_1, \ldots I_m$. Sea $S(I)$ la suma de los elementos en I. Como cada intervalo I_j , por ser un t-intervalo, contiene a lo sumo $\frac{1}{t}S(I_j)$ elementos, entonces

$$\begin{aligned}
|\{y_i \mid y_i > t\}| &\leq |I_1| + \cdots + |I_m| \\
&\leq \frac{1}{t}(S(I_1) + \ldots S(I_m)) \\
&\leq \frac{2}{t}(x_1 + \cdots + x_n)
\end{aligned}$$

Comentario 1: La afirmación se puede reducir a probar

$$\text{mín}\{y_i\} \leq \frac{2(x_1 + \ldots x_n)}{n}$$

como mostraremos a continuación.

Supongamos que existe un x_i tal que $y_i \leq t$. Entonces $x_i \leq t$, pues en otro caso podríamos tomar solamente a x_i y su promedio sería mayor a t. Vamos a quitar a x_i de la sucesión y ver como cambian ambos lados de la desigualdad pedida. Sea y'_j el mayor promedio de términos consecutivos de a sucesión que contiene a x_j después de quitar x_i. Si $y_j > t$ entonces $y'_j > t$ pues si tomamos los mismos x_m's cuyo promedio es y_j al quitar x_i quitamos un término menor a t, luego el promedio de esta cadena de términos consecutivos solamente puede crecer y por lo tanto $y'_j \geq y_j > t$.

Esto implica que la cantidad de términos y_i tales que $y_i > t$ no decrece, pero $\frac{2}{t}(x_1 + \cdots + x_n)$ si. Entonces podemos asumir que $y_i > t$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y esto será suficiente.

En esta situación lo que queremos probar es equivalente a probar que

$$\text{mín}\{y_i\} \leq \frac{2(x_1 + \ldots x_n)}{n}$$

Sin embargo no conocemos una demostración de este hecho sustancialmente diferente a la presentada en la solución del problema.

Comentario 2: La propuesta original incluía la siguiente parte b.):

Demostrar que

$$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{32n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots x_n^2}{32n}}$$

Sin embargo, creemos que la solución es demasiado técnica para ser un problema adecuado para la olimpiada.

A4 Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$ para todos los reales x y y;

(ii) $|f(x)| < 2022$ para todo $x \in (0,1)$.

Solución:

Respuesta: Solo hay tres funciones que cumplen:

$$f(x) = x+1 \quad , \quad f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = 2.$$

Claramente cada una de las funciones cumple *(i)* y *(ii)*. Ahora probaremos que son las únicas soluciones al problema.

Sea $P(x,y)$ la primera condición. Note que $P(1,0)$ nos da $2f(0) = f(1)f(0)$. Entonces, $f(0) = 0$ o $f(1) = 2$. Pero si $f(0) = 0$, mirando $P(x+1,0)$ tenemos $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y obtenemos nuestra primera solución.

Entonces supongamos que $f(1) = 2$. Mirando $P(2,0)$ y $P(1,1)$ obtenemos:

$$P(2,0) : f(0) + f(1) = f(0)f(2) \Rightarrow f(0) + 2 = f(0)f(2)$$

$$P(1,1) : f(f(1)) + f(0) = f(1)f(1) \Rightarrow f(2) + f(0) = 4$$

Entonces

$$f(0)+2 = f(0)(4-f(0)) \Rightarrow f(0)^2-3f(0)+2 = 0 \Rightarrow (f(0)-1)(f(0)-2) = 0.$$

Tenemos dos casos:

Caso 1. $f(0) = 1$.

Notemos que

$$P(x,0) : f(x) = f(x-1) + 1. \qquad (I)$$

Una inducción sencilla nos dice que $f(x) = x+1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ hacemos las siguientes sustituciones para obtener:

$$P\left(q-1, \frac{p}{q}\right) : \; f\left(\frac{p}{q}f(q-1)\right) + f(q-2) = f(q-1)f\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\Rightarrow f(p) + (q-1) = qf\left(\frac{p}{q}\right) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + 1,$$

y $f(x) = x+1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Entonces podemos remplazar $P(q-1, x)$ para $q \in \mathbb{Q}$ y obtener:

$$f(xq) = qf(x) - q + 1. \quad (II)$$

También podemos obtener las siguientes ecuaciones para $p, q \in \mathbb{Q}$:

$$P\left(q-1, x+\frac{p}{q}\right) : f\left(\left(x+\frac{p}{q}\right)q\right) + f(q-2) = f(q-1)f\left(x+\frac{p}{q}\right)$$

$$\Rightarrow f(qx+p) + (q-1) = qf\left(x+\frac{p}{q}\right)$$

y por (I) y (II) tenemos $f(qx+p) = f(qx) + p = qf(x) - q + 1 + p$. Por consiguiente:

$$(qf(x) - q + 1 + p) + (q-1) = qf\left(x+\frac{p}{q}\right) \Rightarrow f\left(x+\frac{p}{q}\right) = f(x) + \frac{p}{q}.$$

Entonces,

$$f(x+r) = f(x) + r \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}. \quad (III)$$

Ahora sea $x \in \mathbb{R}$ un real fijo y sea $s = f(x) - x - 1$. Note que para $r, q \in \mathbb{Q}$ y usando (II) y (III), llegamos a:

$$f(qx+r) = f(qx) + r = (qf(x) - q + 1) + r = q(s + x + 1) - q + 1 + r$$

$$\Rightarrow f(qx+r) = qx + r + 1 + qs.$$

Suponga que $s \neq 0$. Si escogemos $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $q \geq \dfrac{2024}{|s|}$ y $r \in \mathbb{Q}$ tal que $qx + r \in (0,1)$, por (ii) se obtiene:

$$|f(xq+r)| < 2022 \Rightarrow |qx + r + qs + 1| < 2022.$$

Aplicando la desigualdad triangular se obtiene que:

$$|qs| - |qx+r+1| \leq |qx+r+qs+1| < 2022 \Rightarrow |qs| = q|s| < 2022 + |qx+r+1|.$$

Como $qx + r \in (0, 1)$, tenemos que $|qx + r + 1| < 2$. Luego:

$$q|s| < 2024 \Rightarrow q < \frac{2024}{|s|},$$

que es una contradicción. Entonces, $s = 0$ que implica que $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso 2. $f(0) = 2$.

La condición $P(x, 0)$ da

$$2f(x) = f(x - 1) + 2. \quad (I)$$

y una inducción sencilla implica que $f(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Luego para $n \in \mathbb{Z}$, $P(n, x)$ da

$$f(2x) + 2 = 2f(x). \quad (II)$$

En particular, por (I) y (II), tenemos $f(2x) = f(x - 1)$. Iterando esta ecuación llegamos a que

$$f(2^n x) = f(2^{n-1}x - 1) = f\left(2^{n-2}x - 1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\cdots = f\left(x - 1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow f(2^n x) = f\left(x - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Por inducción en la ecuación (II) no es difícil obtener

$$f(2^n x) = 2^n(f(x) - 2) + 2. \quad (III)$$

Entonces tenemos que

$$f\left(x - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2^n(f(x) - 2) + 2.$$

Note que para $x \in (2,\ 5/2)$, tenemos $0 < x - 2 + \frac{1}{2^{n-1}} < 1$ para $n \geq 2$. Entonces

$$\left|f\left(x - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right| < 2022 \Rightarrow |2^n(f(x)-2)+2| < 2022 \text{ para todo } x \in (2,\ 5/2).$$

Pero si $f(x) \neq 2$ y tomamos un n suficientemente grande obtenemos una contradicción. entonces, $f(x) = 2$ para todo $x \in (2,\ 5/2)$.

Adicionalmente como $f(2x) = f(x-1)$ y $2x \in (2,\ 5/2) \Rightarrow x - 1 \in (0, 1/4)$, obtenemos

$$f(x) = 2 \text{ para todo } x \in (0,\ 1/4).$$

Finalmente, cambiando x por $x/2^n$ en (III), para $x > 0$ tenemos que

$$f(x) = 2^n(f(x/2^n) - 2) + 2.$$

Escogemos n tal que $0 < x/2^n < 1/4$, obtenemos que $f(x/2^n) = 2$ y $f(x) = 2$. Luego, $f(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Usando $f(2x) = f(x-1)$ es fácil extender la solución a los negativos, pues sabemos que $f(2x+2) = 2$ para todo $2x+2 \in (0, 2)$ y así $f(x) = 2$ para $x \in (-1, 0)$ y procedemos de manera similar para todos los negativos. Entonces, $f(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos.

Comentario: El hecho que f sea localmente acotada es muy importante, pues podemos construir otras funciones que solamente satisfagan (i). Daremos un ejemplo a continuación:

Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, definimos $S(\alpha) = \{p\alpha + q \mid p, q \in \mathbb{Q} \text{ para } p \neq 0\}$. Claramente

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} S(\alpha)$$

y

$$S(\alpha) \cap S(\beta) \neq \emptyset \iff S(\alpha) = S(\beta).$$

Entonces estos conjuntos crean una partición de $\mathbb{R}$ en clases de equivalencia dadas por $x \sim y \iff S(\alpha) = S(\beta)$. Sea D un conjunto de representantes de las clases. Sea $f(\alpha)$ cualquier racional para $\alpha \in D$ y extendemos la definición de f como $(p, q \in \mathbb{Q})$:

$$f(p\alpha + q) = pf(\alpha) - p + q - 1.$$

Es sencillo ver que la función está bien definida y que satisface la condición (i).

A5 Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros positivos y $\mathbb{Q}$ el conjunto de los racionales positivos. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfacen

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ veces}}(x)\ldots)) = \frac{f(nx)}{n}$$

para todo $x \in \mathbb{Q}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.

Solución:

Respuestas: Hay dos tipos de soluciones:

$$f(x) = x \text{ ó } f(x) = \tfrac{Cx}{C+x} \text{ para cada constante } C \in \mathbb{Q}$$

Demostración: Es sencillo verificar que la identidad satisface la condición. Para verificar que $f(x) = \frac{Cx}{C+x}$ satisface procederemos mediante inducción en n.

Caso Base: $n = 1$

$$f(x) = \frac{f(1x)}{1}$$

se cumple trivialmente.

Hipótesis de Inducción: Para $m \in \mathbb{Z}$ asumimos que

$$f^m(x) = \frac{Cx}{C+mx} = \frac{f(mx)}{m}$$

Paso inductivo:

$$f^{m+1}(x) = f(f^m(x)) = f\left(\frac{Cx}{C+mx}\right)$$

$$= \frac{C \cdot \frac{Cx}{C+mx}}{C + \frac{Cx}{C+mx}} = \frac{Cx}{C+(m+1)x} = \frac{f((m+1)x)}{m+1}$$

Ahora demostraremos que son las únicas. Primero se transformará la condición inicial. Sea $y = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Si se reemplaza n por $m+k$ y x por $\frac{x}{k}$ en la ecuación funcional obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$f^{m+k}\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{f\left(\frac{(m+k)x}{k}\right)}{m+k} = \frac{f(yx+x)}{m+k} \tag{1}$$

$$f^{m+k}\left(\frac{x}{k}\right) = f^{m}\left(f^{k}\left(\frac{x}{k}\right)\right) \tag{2}$$

$$f^{m}\left(f^{k}\left(\frac{x}{k}\right)\right) = \frac{f\left(mf^{k}(\frac{x}{k})\right)}{m} = \frac{f\left(\frac{mf(x)}{k}\right)}{m} = \frac{f(yf(x))}{m} \tag{3}$$

Reemplazando (1) y (3) en (2) obtenemos

$$(y+1)f(y(f(x)) = yf(xy+x) \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{Q} \tag{*}$$

Afirmación 1:
$f(x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$
Demostración. Para un x fijo se puede escoger $y \in \mathbb{Q}$ tal que

$$y(f(x)) = xy + y \iff y = \frac{x}{f(x) - x}$$

Entonces tenemos que en la ecuación $(*)$ se deduce que $y + 1 = y$ que es absurdo, por lo tanto $y \notin \mathbb{Q}$. Entonces $f(x) - x \leq 0$. □

Sea $g(x) = f(x)/x$. Nótese que $g(x) \leq 1$ por la afirmación 1. Escribamos $(*)$ en términos de g lo que permite cancelar los factores fuera de f.

$$(y+1)xyg(x)g(xyg(x)) = yx(y+1)g(xy+x)$$
$$g(x)g(xyg(x)) = g(xy+x) \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{Q} \tag{**}$$

Ahora se trabajara exclusivamente con $(**)$. Sea $P(x, y)$ la afirmación $(**)$. Ahora vamos a separar en dos casos, cada caso resultará en una familia de soluciones.

Caso 1: $g(x)$ no es inyectiva.
Se va a demostrar que $g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Podemos asumir que existen $a > b \in \mathbb{Q}$ que satisfacen $g(a) = g(b)$. Entonces considerando $P(a, (z-b)/a)$ y $P(b, (z-b)/b)$ con $z > b$ llegamos a

$$g(z + a - b) = g(a)g((z-b)g(a)) = g(b)g((z-b)g(b)) = g(z)$$

Por lo que si $d = a - b > 0$ tenemos que

$$g(z + nd) = g(z) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}\text{y todo} \quad z \in \mathbb{Q}, z > b \tag{4}$$

Supongamos que para x fijo $g(x) < 1$. Entonces podemos escoger un y tal que

$$xyg(x) + nd = yx + x \iff y = \frac{nd - x}{x - xg(x)}$$

Si consideramos un n suficientemente grande, tal que $nd > x$ y tal que $xyg(x) > b$, por (4), $g(xyg(x)) = g(xyg(x) + nd) = g(yx + x)$ Luego $P(x, y)$ implica que $g(x) = 1$, que es una contradicción. Entonces $g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ $\square$

Caso 2: $g(x)$ es inyectiva.
Se va a demostrar que las únicas soluciones son

$$g(x) = \frac{C}{x + C}$$

para algún $C \in \mathbb{Q}$. Para todos $x, a \in \mathbb{Q}$ fijos, existen $y, b \in \mathbb{Q}$ tales que se cumple sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = abg(a) \\ xy + x = ab + a \end{cases}$$

Cuyas soluciones son

$$b = \frac{x}{ag(a)}$$

$$y = \frac{x + ag(a) - xg(a)}{xg(a)}$$

Podemos notar que $y \in \mathbb{Q}$ ya que $x \geq xg(a)$. De $P(x, y)$ y $P(a, b)$ obtenemos

$$\frac{g(x)g(xyg(x))}{g(a)g(abg(a))} = \frac{g(xy + x)}{g(ab + a)}$$

Simplificando usando el sistema de ecuaciones se obtiene

$$g(a) = g(xyg(x))$$

Como g es inyectiva,

$$a = xyg(x) = g(x) \cdot \frac{x + ag(a) - xg(a)}{g(a)}$$

Manipulando se llega a

$$ag(a)(1 - g(x)) = xg(x)(1 - g(a)) \quad \text{para todo} \quad a, x \in \mathbb{Q} \tag{5}$$

Si existe $g(x) = 1$, entonces $0 = xg(x)(1 - g(a))$. De donde $g(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{Q}$ que contradice la inyectividad. Por lo tanto (5) se puede transformar en

$$\frac{xg(x)}{1 - g(x)} = C \quad \text{para alguna constante} \quad C \in \mathbb{Q} \text{ y todo } x \in \mathbb{Q} \tag{6}$$

Finalmente, despejando se obtiene

$$g(x) = \frac{C}{C + x} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{Q} \quad \square$$

Entonces como las únicas soluciones posibles de $g(x)$ son $g(x) = 1$ y $g(x) = \frac{C}{C+x}$, tenemos que las únicas soluciones posibles de $f(x)$ son $f(x) = x$ y $f(x) = \frac{Cx}{C+x}$ como se quería. $\square$

Combinatoria

C1 Sea $n > 2$ un entero positivo. Se tiene una tira de n casillas donde cada casilla está pintada de azul o rojo. Decimos que un *bloque* es una secuencia de casillas consecutivas del mismo color. Arepo está inicialmente parado en la primera casilla de la tira. Cada turno determina la cantidad de casillas m pertenecientes al bloque más grande que contiene la casilla en la que está y hace una de las siguientes acciones

- Si la casilla en la que está es azul y hay al menos m casillas hacia adelante entonces Arepo se mueve m casillas hacia adelante
- Si la casilla en la que está es roja y hay al menos m casillas hacia atrás entonces Arepo se mueve m casillas hacia atrás
- En otro caso se queda en la misma casilla

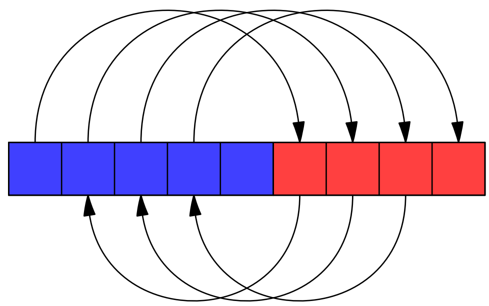
Determinar el menor entero k para el que existe una coloración inicial del tablero con k casillas azules para la que Arepo puede llegar a la ultima casilla.

Solución:

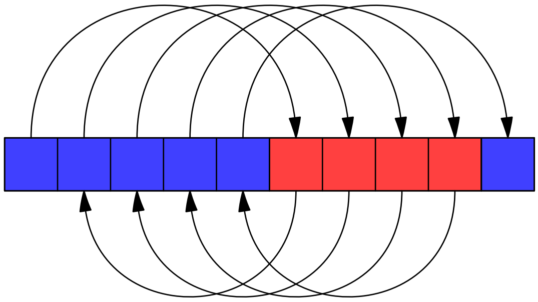
Respuesta: El menor k es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Enumeramos las casillas con los números de 1 a n. Para ver que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ es posible, consideremos las siguientes configuraciones:

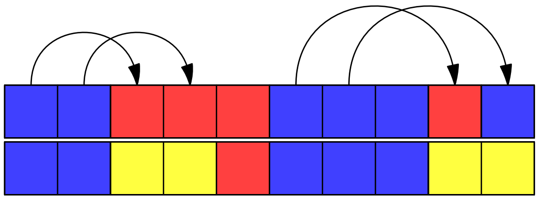
Para $n = 2k+1$ pintamos las primeras $k+1$ casillas de azul y las últimas k de rojo. Es sencillo notar que el orden de las casillas visitadas va a ser $1, k+2, 2, k+3, 3 \ldots k, 2k+1$



Para $n = 2k$ pintamos las primeras k casillas de azul, las siguientes $k-1$ de rojo y la última de azul. El orden de las casillas visitadas es $1, k+1, 2, k+2, 3 \ldots 2k-1, k, 2k$



Ahora veamos que en efecto $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ es el mínimo. Vamos a pintar de amarillo todas las casillas a las que se puede llegar saltando desde una casilla azul. Sean Y, A y R el número de casillas amarillas, azules y rojas respectivamente

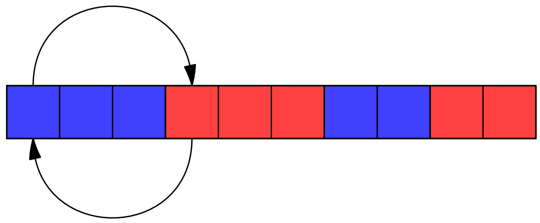


Consideremos algún bloque azul y digamos que tiene tamaño m. Por la forma en la que pintamos, las m casillas consecutivas que siguen al bloque están pintadas de amarillo. Con excepción de los bloques de los que se podría saltar por fuera del tablero, en los que solo se pintan de amarillo las casillas hasta la última casilla. En particular $A \geq Y$

Supongamos que existe una casilla roja C que no fue pintada de amarillo. Como las casillas amarillas forman bloques de casillas consecutivas, entonces no puede existir un bloque azul antes de C desde la que se pueda saltar a una casilla más adelante de C, pues si existiera entonces C sería amarilla. Luego es imposible llegar a cualquier casilla más adelante que C, en particular a la última. Entonces todas las casillas rojas deben quedar pintadas de amarillo $Y \geq R$.

Luego $A \geq R$. Como $A + R = n$, entonces $A \geq \frac{n}{2}$. Si n es impar, esta cota ya es suficiente. Si $n = 2k$ nos falta eliminar el caso $A = B = k$.

En este caso, también tenemos $A = Y = B = k$. Entonces las casillas amarillas coinciden con las rojas. Por lo que cada bloque azul esta seguido por un bloque rojo del mismo tamaño. Sin embargo si se tiene esta situación, de la primera casilla se va a llegar a la primera del segundo bloque (que es distinta de la última casilla pues $k > 1$) y de esta se va a regresar a la primera casilla por lo que nunca se llegará a la última casilla.



C2 Sea $n \geq 1$ un entero positivo. En el plano cartesiano se dibuja un circulo C centrado en $(0,2)$ con radio 1. Se marcan puntos $P_1, P_2 \ldots P_n$ sobre C en ese orden en el sentido horario, de manera que no existan dos puntos con la misma coordenada x. Se proyectan los puntos sobre el eje x y la proyección del punto P_i se etiqueta con el número i. Cuando leemos las etiquetas sobre el eje x de izquierda a derecha obtenemos una permutación de los números del 1 al n. Determinar el número de permutaciones diferentes que se pueden obtener.

Solución 1:

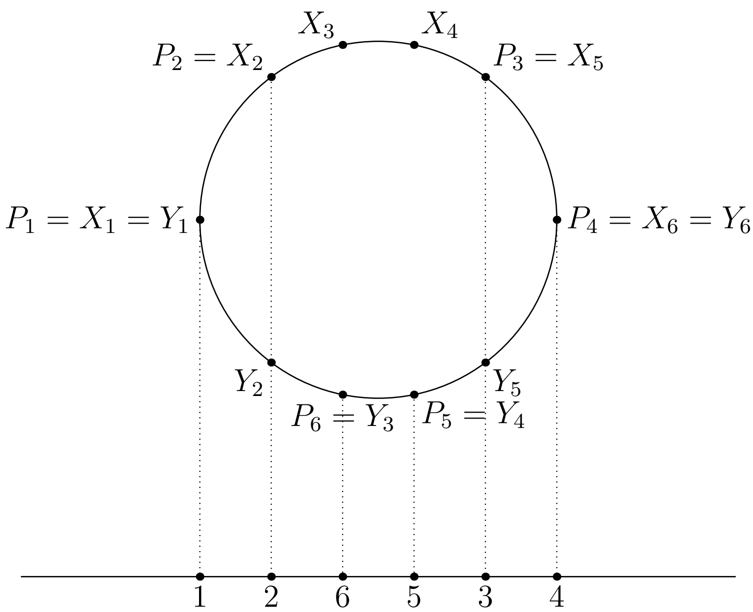
Respuesta: Se pueden obtener $n2^{n-2}$ permutaciones.

Primero, notemos que dada una configuración de $P_1, \ldots P_n$ sobre el circulo, podemos rotar cíclicamente los nombres de los puntos en el sentido de horario hasta que el punto con menor coordenada x sea P_1. Además, por cada configuración en la que P_1 es el punto con menor coordenada x, podemos rotar las etiquetas cíclicamente para obtener n configuraciones distintas. De esta forma podemos asumir que el primer elemento de la permutación es 1 y luego multiplicar por n para obtener el número total de permutaciones.

Demostraremos que hay una biyección entre las permutaciones que podemos obtener con las proyecciones y las permutaciones de 1 a n tales que si k es el último número de la permutación entonces los números entre 1 y k están en orden ascendente y números entre k y n están en orden descendente cuando leemos la permutación de izquierda a derecha. Decimos que una permutación que cumple la última condición es una permutación *colombiana.*

Primero veamos que cualquier permutación que obtenemos con una proyección es colombiana. Sea P_k el punto con mayor coordenada x, por la forma en que ponemos los números en el circulo, los números entre 1 y k están en orden ascendente y los demás en orden descendente. Entonces es colombiana.

Ahora tomemos una permutación colombiana $1 = p_1, \ldots p_n = k$ y ubiquemos a p_i en el punto $(-1 + \frac{2(i-1)}{n-1}, 0)$. Para cada $1 < i < n$ la recta $x = -1 + \frac{2(i-1)}{n-1}$ corta al circulo en dos puntos X_i y Y_i con X_i más arriba que Y_i y para $i = 1, n$ lo corta en exactamente un punto $X_1 = Y_1$ y $X_n = Y_n$ respectivamente. Sean $p_{i_1} = 1, p_{i_2} = 2 \ldots p_{i_n} = n$. Como la permutación es colombiana $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k = n$ y $n = i_k > i_{k+1} \ldots i_n$. Vamos a poner al punto P_j en X_{i_j} si $1 < j < k$ y vamos a poner al punto P_j en Y_{i_j} si $k < j < n$. A P_1 y P_k los ponemos en X_{i_1} y X_{i_k}. Como $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k = n$ y $n = i_k > i_{k+1} \ldots i_n$, entonces $P_1, \ldots P_n$ quedan en orden en sentido horario sobre el circulo, entonces podemos obtener $p_1, \ldots p_n$ proyectando los puntos que acabamos de crear.



Entonces es suficiente contar las permutaciones colombianas. Fijamos 1 en la primera posición. Para cada posición subsecuente excepto la última le asignamos la etiqueta 'ascendente' o 'descendente' y a la última le damos la etiqueta 'ascendente'. Hay 2^{n-2} formas de hacer esto. Luego ponemos los números en orden de izquierda a derecha sobre las casillas con etiqueta ascendente y luego ponemos los números en orden de derecha a izquierda en orden sobre las casillas con etiqueta descendente. Este proceso evidentemente nos da todas las permutaciones colombianas lo que termina la demostración.

Solución 2:

Igual que en la solución anterior consideramos que podemos asumir que el punto más a la izquierda es P_1 y al final solo multiplicamos por n el número de permutaciones obtenidas. Si P_k es el elemento con mayor coordenada en x y proyectamos los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sobre el eje x creamos $k-1$ intervalos en el eje x donde deben ir las proyecciones de los puntos $P_{k+1} \ldots P_n$.

Sabemos que las proyecciones puntos $P_{k+1} \ldots P_n$ van en orden descendente de izquierda a derecha. Luego el número de permutaciones que obtenemos es equivalente a repartir $n-k$ elementos en $k-1$ intervalos (con algunos intervalos posiblemente vacios) que es igual a $\binom{n-k-1+(k-1)}{(k-1)-1} = \binom{n-2}{k-2}$. Luego el número total de permutaciones posibles (variando sobre el posible valor de k) es igual a

$$n \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} = n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = n2^{n-2}.$$

C3 Sea n un entero positivo y sea N el número de formas de colocar $+$ y $-$ en los espacios de la expresión:

$$\_1\ \_2\ \_3\ \dots\ \_4n,$$

de modo que después de simplificar el resultado sea 0. Demuestre que:

$$2^{2n-1} \leq N < 2^{4n} - 2^{\lfloor 2\sqrt{2n} \rfloor}.$$

Solución:

Primero probaremos la cota inferior mediante inducción en n. El caso base es evidente pues para $n = 1$ necesitamos una forma que es $1 - 2 - 3 + 4 = 0$.

Ahora supongamos que para n hay al menos 2^{2n-1} formas de lograr lo buscado. De cada forma de poner $+$ y $-$ en los espacios vamos a crear 4 distintas. De esta forma tendremos que para $n+1$ hay al menos $4 \times 2^{2n-1} = 2^{2n+1}$ formas de lograr lo pedido, que es precisamente lo que queremos. Tomemos una forma de lograr lo pedido y denotaremos como A al conjunto de los números a los que se les asigna un $+$. Vamos a crear el conjunto de los enteros a los que se les asigna un $+$ para $n+1$.

Dividiremos en casos dependiendo de si 1 y 2 pertenecen a A.

Caso 1: $1, 2 \in A$. Entonces creamos los conjuntos

$$A \cup \{4n+1, 4n+4\}, A \cup \{4n+2, 4n+3\}$$
$$(A \setminus \{1\}) \cup \{4n+2, 4n+4\}, (A \setminus \{2\}) \cup \{4n+3, 4n+4\}$$

Caso 2: $1 \in A$, $2 \notin A$. Entonces creamos los conjuntos

$$A \cup \{4n+1, 4n+4\}, A \cup \{4n+2, 4n+3\}$$
$$(A \setminus \{1\}) \cup \{4n+2, 4n+4\}, A \cup \{2, 4n+1, 4n+2\}$$

Caso 3: $1 \notin A$, $2 \in A$. Entonces creamos los conjuntos

$$A \cup \{4n+1, 4n+4\}, A \cup \{4n+2, 4n+3\}$$
$$A \setminus \cup \{1, 4n+1, 4n+3\}, (A \setminus \{2\}) \cup \{4n+3, 4n+4\}$$

Caso 4: $1, 2 \notin A$. Entonces creamos los conjuntos

$$A \cup \{4n+1, 4n+4\}, A \cup \{4n+2, 4n+3\}$$
$$A \setminus \cup \{1, 4n+1, 4n+3\}, A \cup \{2, 4n+1, 4n+2\}$$

Pudimos crear 4 configuraciones para $n+1$ desde cada configuración para n como queríamos.

Ahora probaremos la cota superior. Sea T el mayor entero positivo tal que

$$1 + 2 + \cdots + T < \frac{4n(4n+1)}{4}$$

Notemos que si le asignamos + solamente a los enteros de algún subconjunto de $\{1, 2 \ldots T\}$ entonces la suma total no será negativa, pues la magnitud de la suma de los negativos será al menos

$$\frac{4n(4n+1)}{2} - \frac{4n(4n+1)}{4} = \frac{4n(4n+1)}{4}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + T &< \frac{4n(4n+1)}{4} \\ \iff T^2 + T - 2n(4n+1) &< 0 \\ \iff T &< \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2n(4n+1)} \end{aligned}$$

En particular para $n = 2\sqrt{2}n$ se cumple la desigualdad anterior. Entonces al menos $2^{\lfloor 2\sqrt{2}n \rfloor}$ configuraciones no sirven y se sigue la cota superior buscada.

C4 Se tienen $2n$ enteros positivos $a_1, \ldots a_{2n}$ no necesariamente distintos entre si. Supongamos que existe un entero M tal que hay al menos n^2+1 parejas de la forma (a_i, a_j) con $1 \leq i < j \leq 2n$ para las cuales se tiene la igualdad $a_i \cdot a_j = M$. Demuestre que existe un entero positivo k tal que, entre los $2n$ a_i's al menos $\frac{4n+3}{3}$ de ellos son iguales a k.

Solución:

Por claridad de la solución plantearemos las soluciones en términos de teoría de grafos. Consideremos un grafo G con un vértice v_i por cada número a_i y pondremos una arista v_iv_j si $a_i \cdot a_j = M$.

Definimos $V_r = \{v_i | a_i = r\}$. Dado un entero a, existe a lo más un entero b tal que $ab = M$. Por lo que los vértices de V_r sólo pueden tener aristas a los vértices de $V_{M/r}$ y, de forma reciproca, hay una arista entre cualquier vértice de V_r y cualquier vértice de $V_{M/r}$. Con esto vemos que si $r \neq M/r$, entonces los vértices y las aristas de V_r, $V_{M/r}$ forman un subgrafo bipartito completo que está desconectada del resto del grafo, mientras que si $r = M/r$, entonces V_r es un subgrafo completo, que es a la vez una componente conexa de G.

Supongamos primero que M no es el cuadrado de un entero. Esto implica que G tiene por componentes conexas grafos bipartitos completos. Notemos que si $|V_r| = a$ y $|V_{M/r}| = b$, entonces la grafo bipartito completo con componentes V_r y $V_{M/r}$ tiene ab aristas. Si $|V_s| = c$ y $|V_{M/s}| = d$, entonces el subgrafo bipartito completo con componentes V_s y $V_{M/s}$ tiene cd aristas.

Sin embargo, notemos que un grafo bipartito completo con componentes C_1 y C_2 tales que $|C_1| = a + c$ y $|C_2| = b + d$ tiene $(a + c)(b + d) = (ab + cd) + (ad + cb)$ que es mayor a $ab + cd$, siempre que a, b, c, d sean enteros positivos. Por lo que el grafo bipartito completo con componentes $V_r \cup V_s$ y $V_{M/r} \cup V_{M/s}$ tiene más aristas que el subgrafo bipartito con componentes conexas $V_r \cup V_{M/r}$ y $V_s \cup V_{M/s}$. Lo anterior implica que, un grafo con $2n$ vártices que tiene como componentes conexas a grafos bipartitos completos, tiene menos aristas que una grafo bipartito completo (conexa) con $2n$ vértices.

Por lo tanto, si suponemos que G no tiene subgrafos completos, entonces tiene a lo más $m(2n-m)$ aristas pero, es fácil ver que el máximo de ese valor es cuando $m = 2n - m$, es decir cuando $m = n$ (se puede ver por ejemplo con la media geométrica media aritmética). Por lo tanto, concluimos que si G no tiene una componente conexa completa, entonces tiene a lo más $n \cdot n = n^2$ aristas. Como, por suposición, sabemos que G tiene al menos $n^2 + 1$ aristas, este no puede ser el caso, por lo que concluimos que G debe tener una componente conexa que es un subgrafo completo.

Notemos que G debe tener exactamente una componente conexa que es un grafo completo, ya que esto implica que $r = M/r$, es decir $r^2 = M$. Supongamos entonces que V_r es un subgrafo completo con v vértices. La cantidad de aristas en V_r es $\frac{v(v-1)}{2}$, por lo que si la cantidad de aristas en $G \setminus V_r$ es d, entonces queremos que $\frac{v(v-1)}{2} + d \geq n^2 + 1$ Como la cantidad $\frac{v(v-1)}{2}$ crece o decrece según crezca o decrezca v, respectivamente, entonces el menor valor posible de v se puede alcanzar sólo cuando se maximice el valor de d, de tal forma que se cumpla que $\frac{v(v-1)}{2} + d \geq n^2 + 1$.

Por lo visto anteriormente, $G \setminus V_r$ tiene a lo más $\left\lfloor \frac{2n-v}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{2n-v}{2} \right\rceil$ aristas.

Si v es par, entonces se debe cumplir

$$\frac{v(v-1)}{2} + \left(\frac{2n-v}{2}\right)^2 \geq n^2 + 1.$$

Multiplicando por 4 y expandiendo, lo anterior es equivalente a

$$v \geq \frac{4n+2}{3} + \frac{4}{3v}.$$

Cuando $v \geq 4$ se tiene $0 < \frac{4}{3v} < \frac{1}{3}$. Luego dado que $v \geq \frac{4n+2}{3}$ y v es entero entonces $v \geq \frac{4n+3}{3}$ cuando $v \geq 4$ y v sea par. Para el caso $v = 2$

note que G tendría a lo más $1+(n-1)^2 \leq n^2+1$ para n entero positivo. Luego para v par y todo entero positivo n se cumple que $v \geq \frac{4n+3}{3}$.

En el caso v impar nuestra desigualdad es la siguiente

$$\frac{v(v-1)}{2} + \left(\frac{2n-v-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2n-v+1}{2}\right) \geq n^2+1.$$

De nuevo multiplicando por 4 y expandiendo obtenemos que

$$v \geq \frac{4n+2}{3} + \frac{5}{3v}.$$

Análogamente al caso anterior, cuando $v \geq 5$ se obtiene que $v \geq \frac{4n+3}{3}$. Cuando $v=1$, G tendría a lo más $(n-1)^2$ aristas que es menor a n^2+1. Para $v=3$, G tendría a lo más $3+(n-2)(n-1) = n^2-3n+5$ aristas y este valor es mayor o igual a n^2+1 si y sólo si $n \geq \frac{4}{3}$. Dado que n es entero positivo esto solo pasa cuando $n=1$ pero entonces el grafo solo tendría 2 vértices.

En cualquier caso concluimos que G debe tener una componente conexa que es un grafo completo con al menos $\frac{4n+3}{3}$ vértices y con esto concluimos el problema.

Comentario: En caso de querer simplificar las desigualdades del final de la solución, se puede empeorar ligeramente la cota a $\frac{4n+2}{3}$ sin cambiar el centro de la solución.

C5 Bruno le da a Andrea una hoja de instrucciones que llamamos dibujo, con la cual ella va a marcar 2022 puntos distintos en el plano numerados $P_1 \dots P_{2022}$. Cada instrucción es de la forma

$$(i, j, k, \alpha, \beta, \gamma)$$

donde $1 \leq i < j < k \leq 2022$ son números enteros y $0°\alpha, \beta, \gamma < 180°$ son ángulos que suman $180°$ La instrucción significa que el triángulo $P_iP_jP_k$ debe tener ángulos internos

$$\angle P_i = \alpha \quad \angle P_j = \beta \quad \angle P_j = \gamma$$

y no hay instrucciones repetidas. Inicialmente, Bruno marca P_1 y P_2. Luego, Andrea coloca los demás puntos de forma que se sigan todas las instrucciones. Decimos que un dibujo es *libre* si Andrea puede colocar los puntos de infinitas maneras. ¿Cuál es la máxima cantidad de instrucciones que puede tener un dibujo libre?

Solución:

Se puede alcanzar una cantidad de instrucciones de $\binom{2021}{3}$ en un dibujo libre. Esto se puede lograr disponiendo a $P_3, P_4, ..., P_{2021}$ de forma que $P_1, P_2, ..., P_{2021}$ formen un 2021-ágono regular, y Bruno dando todas las instrucciones para los $\binom{2021}{3}$ triángulos formados. Luego, Andrea puede colocar a P_{2021} en cualquier otro punto en el plano, resultando en infinitas configuraciones que siguen todas las instrucciones. Extendamos la definición de dibujo a cualquier conjunto de instrucciones del tipo $(i, j, k, \alpha, \beta, \gamma)$, y además digamos que un dibujo es "un dibujo sobre P" cuando todas las instrucciones tengan solo índices en P (donde $P \subset \mathbb{Z}^+$). Decimos que un dibujo sobre P es fijo si y solo si existe una cantidad finita de configuraciones no semejantes entre sí a las cuales los puntos con índices en P son semejantes si se siguen todas las instrucciones.

Lema 1: Si un dibujo $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{P}$ es fijo entonces para un índice $x \notin \mathcal{P}$ y una instrucción $(i, j, k, \alpha, \beta, \gamma)$ con $x \in \{i, j, k\}$ y $\{i, j, k\} \setminus \{x\} \subset \mathcal{P}$, se tiene que $\mathcal{D} \cup \{(i, j, k, \alpha, \beta, \gamma)\}$ sobre $\mathcal{P} \cup \{x\}$ es fijo.

Demostración: En $\mathcal{D}\cup\{(i,j,k,\alpha,\beta,\gamma)\}$ sobre $\mathcal{P}\cup\{x\}$, la configuración de los puntos con índices en $\mathcal{P}$ tendrá solo finitos acomodos no semejantes entre sí, ya que $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{P}$ es fijo. En cada uno de esos acomodos, la instrucción $(i,j,k,\alpha,\beta,\gamma)$ fuerza a P_x a tomar solo dos posiciones diferentes posibles por AA, dependiendo de la orientación de $\triangle P_iP_jP_k$. En total, $\mathcal{D}\cup\{(i,j,k,\alpha,\beta,\gamma)\}$ sobre $\mathcal{P}\cup\{x\}$ puede tomar máximo el doble de acomodos no semejantes entre sí que $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{P}$, lo cual sigue siendo una cantidad finita.

Lema 2: Si un dibujo $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{P}$ con $|\mathcal{P}|=n\geq 3$ tiene $\binom{n-1}{3}+1$ instrucciones, $\mathcal{D}$ es fijo.

Demostración: Lo probaremos por inducción sobre n. Notemos que si en cualquier momento dos instrucciones diferentes mencionan los mismos índices i,j,k, el dibujo no se puede realizar pues para que las instrucciones no sean idénticas, deben ser contradictorias. Esto da una cantidad de dibujos posibles de 0, por lo que el dibujo es fijo. Asumamos de ahora en adelante que las instrucciones no contienen dos ternas de índices iguales.

Para $n=3$, habrá $\binom{2}{3}+1=1$ instrucción, por lo que esta incluye a todos los puntos con índices en $\mathcal{P}$. Por AA el triángulo es semejante a uno en específico y tendrá dos orientaciones posibles: una cantidad finita.

Para n =4, habrá $\binom{3}{3}+1=2$ instrucciones. Tomemos un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ con $|\mathcal{A}|=3$ que incluya los 3 índices de una instrucción. La otra instrucción forzosamente incluirá el índice i que no está en A y dos índices que sí están en él. Así que por el Lema 1, $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{A}\cup\{i\}=\mathcal{P}$ será fijo.

Para $n\geq 5$, vamos a quitar a un índice asociado a pocas instrucciones de $\mathcal{P}$, usar la hipótesis inductiva, y luego volverlo a agregar y usar el Lema 1 para argumentar que $\mathcal{D}$ es fijo.

Sean $c_1,c_2,\ldots,c_n$ la cantidad de instrucciones donde está incluido como índice $i_1,i_2,...,i_n$, todos los índices de $\mathcal{P}$, respectivamente. Como cada instrucción contiene 3 índices, tendremos que

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 3\left(\binom{n-1}{3} + 1\right)$$

Sin pérdida de generalidad sea $c_n = \text{mín}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ y sea $\mathcal{A}_n$ el conjunto de instrucciones que contienen a i_n como índice. Se tiene $|\mathcal{A}_n| = c_n$ por definición y

$$nc_n \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 3\left(\binom{n-1}{3} + 1\right).$$

$$\Rightarrow c_n \leq \frac{3}{n}\left(\binom{n-1}{3} + 1\right)$$

Como $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{D}$,

$$|\mathcal{D} \backslash \mathcal{A}_n| = |\mathcal{D}| - c_n \geq \binom{n-1}{3} + 1 - \frac{3}{n}\left(\binom{n-1}{3} + 1\right) = \frac{n-3}{n}\left(\binom{n-1}{3} + 1\right)$$

$$= (n-3)\left(\frac{(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) + 6}{6n}\right)$$

$$= (n-3)\left(\frac{n^2 - 6n + 11}{6}\right)$$

Como $n \geq 5$,

$$n - 3 \geq 2 \Rightarrow (n-3) \cdot 3 \geq 6$$

$$\Rightarrow (n-3)(n^2-6n+11) \geq (n-3)(n^2-6n+8)+6 = (n-3)(n-2)(n-4)+6$$

$$\Rightarrow (n-3)\left(\frac{(n^2 - 6n + 11)}{6}\right) \geq (n-3)\left(\frac{((n-3)(n-2)(n-4))}{6} + 1\right)$$

$$= \binom{n-2}{3} + 1$$

$$\Rightarrow |\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}_\backslash| \geq \binom{n-2}{3} + 1$$

Utilizando la hipótesis inductiva, $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}_n$ sobre $\mathcal{P} \setminus \{i_n\}$ es fijo.

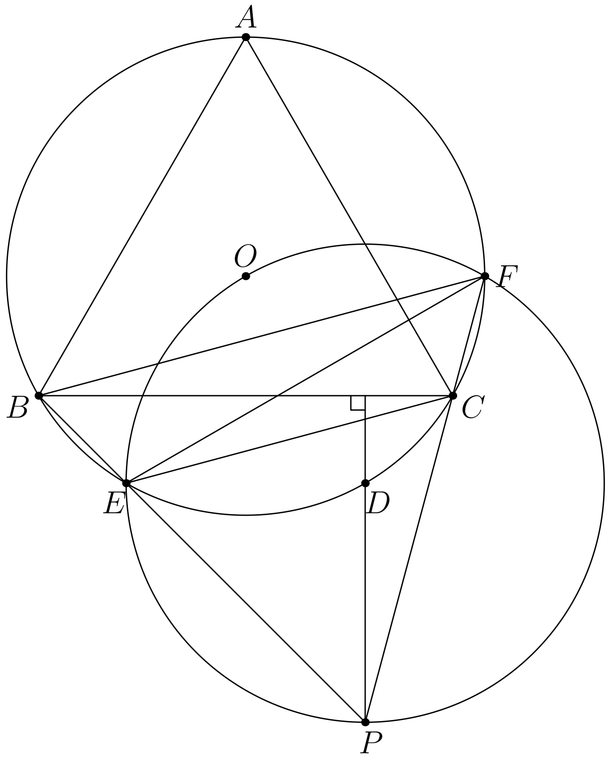
Si $\mathcal{A}_n = \emptyset$, tendríamos $\binom{n-1}{3} + 1 = |\mathcal{D}| = |\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}_n|$ pero entonces habría $\binom{n-1}{3} + 1$ instrucciones sobre $|\mathcal{P} \setminus \{i_n\} = n - 1$ índices, y por casillas habría una terna de índices representada dos veces en las instrucciones, contradicción. Entonces $|\mathcal{A}_n| \geq 1$, y habrá una instrucción conteniendo a i_n y otros dos índices en $\mathcal{P} \setminus \{i_n\}$, y por el Lema 1, $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{P}$ es fijo. $\square$

Por el Lema 2, si hubiera más de $\binom{2021}{3}$ instrucciones en el dibujo de Bruno, como P_1 y P_2 están fijos y por la semejanza, habría solo una cantidad finita de acomodos posibles en los cuales Andrea puede disponer a los puntos, y el dibujo no sería libre. Concluimos que la máxima cantidad de instrucciones en un dibujo libre es $\binom{2021}{3}$.

Geometria

G1 Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea D un punto en el arco menor BC, con $DB > DC$. La mediatriz de OD corta a Γ en E y F, con E en el arco menor BC. Sea P el punto de corte de BE y CF. Demostrar que PD es perpendicular a BC.

Solución 1:



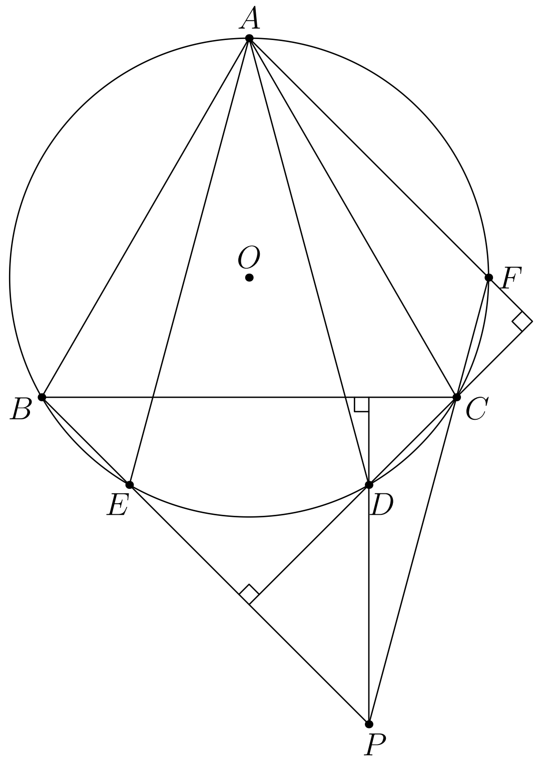
Vamos a demostrar que $BECF$ es un trapecio isósceles. Como EF es mediatriz de OD, tenemos que $DE = OE$. Además, como O es el centro del circulo, $DO = OE$, entonces el triangulo ODE es equilátero. De igual manera, ODF es equilátero. Esto significa que $\angle EOF = 120°$. Además, por ángulo central tenemos que $\angle BOC = 120°$. Esto junto con $OB = OC = OE = OF$ implica que $EF = BC$. Entonces $BECF$ es un trapecio isósceles.

Usando el trapecio tenemos que $\angle EBF = \angle BFC = \angle BAC = 60°$. Luego $\angle EPF = 60°$, por lo que $EOFP$ es ciclico. Además $DE = DF = DO$, es decir que D es el centro de este circulo.

Entonces usando que D es el circuncentro de EFP y que $BECF$ es un trapecio isósceles obtenemos que $\angle DPF = 90° - \angle PEF = 90° - \angle PCB$. Por lo que PD es perpendicular a BC como queriamos.

Comentario: En vez de las igualdades del último párrafo se puede terminar de la siguiente manera: Notemos que $\triangle PEF$ es el reflejo de $\triangle PCB$ sobre la bisectriz de $\angle BPC$ por el trapecio isósceles. Entonces la recta PD vista como una ceviana en el triangulo $\triangle PEF$ corresponde a su isogonal en el triángulo $\triangle PCB$. Como en $\triangle PEF$, PD es la recta que conecta el vértice y el circuncentro, entonces PD es la altura en $\triangle PCB$.

Solución 2:



Al igual que en la solución anterior probamos que $\angle EOF = 120°$ y que $ED = DF$.

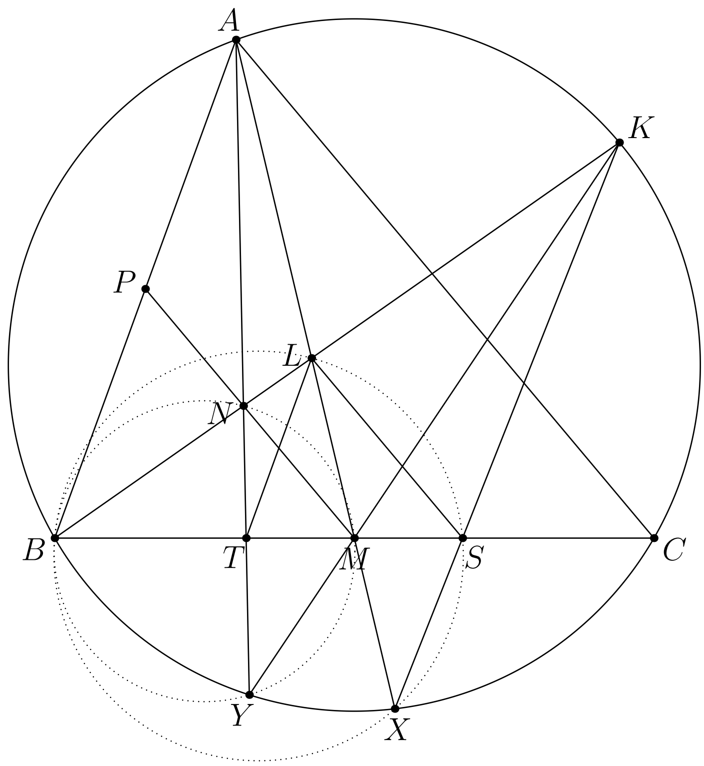
Vamos a probar que $AF \parallel BE$. Para eso notemos que por ángulo inscrito tenemos que $\angle BEA = \angle BCA = 60° = \angle EAF$.

Ahora probaremos que CD es perpendicular a AF. Notemos que $\angle ADC = \angle ABC = 60°$. Además, como $DE = DF$, entonces AD es bisectriz de $\angle EAF$, entonces $\angle DAF = 30°$. Por lo tanto el angulo entre las rectas AF y DC es $180° - (60° + 30°) = 90°$.

Entonces CD es perpendicular a BP. De igual manera BD es perpendicular a CP. Entonces D es el ortocentro de $\triangle BCP$, de donde se tiene que PD es perpendicular a BC.

G2 Sea ABC un triángulo y ω su circuncírculo. Sea M el punto medio de BC y sea K el punto de intersección de la bisectriz interna del ángulo en B con ω. Sea S un punto en MC tal que KS y AM se intersectan sobre ω, de igual manera, sea T un punto en MB tal que KM y AT se intersectan sobre ω. Si L es la intersección entre BK y AM demuestre que $\angle BAC = \angle TLS$.

Solución 1:



Sea X el punto de intersección de AT con ω y Y el punto de intersección de AM con ω. Para demostrar que $\angle BAC = \angle TLS$, es suficiente demostrar que $LS \parallel AC$ y $LT \parallel AB$.

Por ángulo inscrito, $\angle ABK = \angle AYK$. Luego, por ser BK bisectriz, $\angle ABK = \angle LBS$. Entonces, $\angle LBS = \angle LYS$ y $BLSY$ es cíclico. Como $ABYC$ también es cíclico $\angle ACM = \angle AYB = \angle LSB$. Por lo tanto, $LS \parallel AC$.

Sea N el punto de intersección de AX con BL y P la intersección de la prolongación de NM con AB. Por ángulo inscrito y la bisectriz,

$\angle LBM = \angle ABK = \angle AXM$, por lo tanto $BNMX$ es un cuadrilátero cíclico.

Como $ABXC$ y $BNMX$ son cíclicos tenemos que $\angle NMB = \angle BXA = \angle BCA$. Se concluye que $AC \parallel NM$.Entonces PM es paralela media y P es el punto medio de AB. Luego, por el Teorema de Ceva:

$$\frac{AL}{LM} \cdot \frac{TM}{BT} \cdot \frac{BP}{PA} = 1.$$

Como $BP = PA$, entonces:

$$\frac{AL}{LM} = \frac{BT}{TM}.$$

Entonces se concluye que $AB \parallel LT$.

Solución 2:

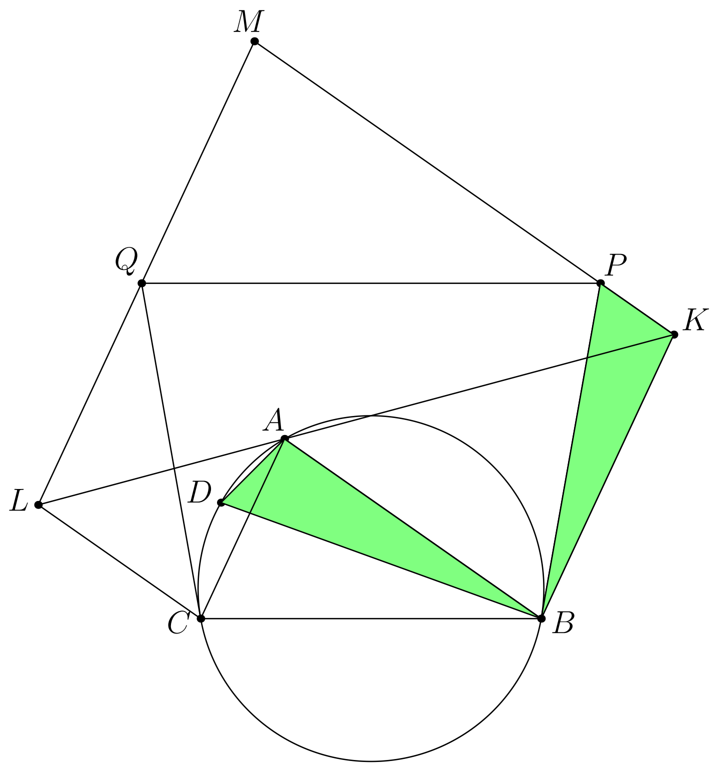
Al igual que en la solución anterior, demostramos $LS \parallel AC$. Es decir que $\triangle AMC \sim \triangle LMS$. Por el teorema de Mariposa en el cuadrilatero $AKXY$ tenemos que M es el punto medio de TS. Entonces usando la semejanza y el punto medio obtenemos

$$\frac{BM}{TM} = \frac{CM}{SM} = \frac{AM}{LM}$$

Esto junto implica que $LT \parallel AB$ lo que termina la solución.

G3 Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Ω. Sean P y Q puntos en el mismo semiplano definido por BC que A tales que BP y CQ son tangentes a Ω de modo que $PB = BC = CQ$. Sean K y L puntos distintos de A en la bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$ de modo que $BK = BA$ y $CL = CA$. Si M es el punto de intersección de las rectar PK y QL demuestre que $MK = ML$.

Solución 1:



Sea D el punto sobre Γ distinto de C tal que $BD = BC$

Notemos que

$$\angle ABD = \angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = \angle CDB - \angle BCA = \angle CAB - \angle BCA$$

y

$$\angle KBP = \angle KBA - \angle PBA = \angle CAB - \angle BCA$$

Donde $\angle PBA = \angle BCA$ resulta de BP tangente a Γ. Por lo tanto $\angle KBP = \angle ABD$. Dado que $BK = BA$ y $BP = BC = BD$, concluimos que los triángulos $\triangle BPK$ y $\triangle BDA$ son congruentes.

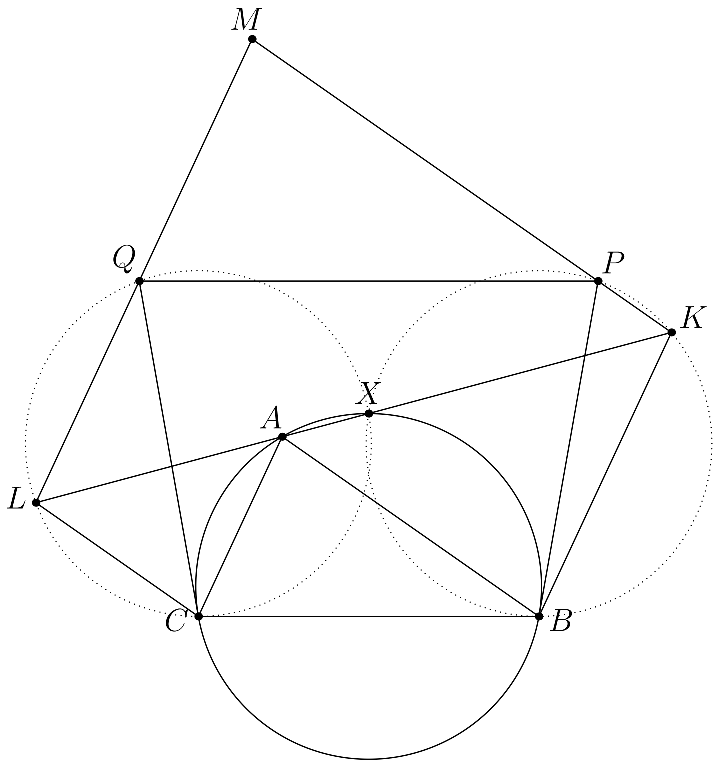
De aquí se concluye que

$$\angle BPK = \angle BDA = \angle BCA = \angle PBA$$

y por lo tanto las rectas PK y AB son paralelas. Análogamente, las retas QL y AC son paralelas.

Finalmente, observe que BK es paralela a AC, y a su vez que $\angle KBA = \angle CAB$. Por lo tanto ML es paralela a BK. Como ML es paralela a BK y MK es paralela a AB concluimos que los triángulos $\triangle MKL$ y $\triangle BAK$ son semejantes. Como por hipótesis $BA = BK$, resulta que $MK = ML$.

Solución 2:



Sea X el corte entre la bisectriz externa de $\angle BAC$ y Γ. Es conocido que X es el punto medio del arco BC que contiene a A. Luego $XB = XC$ y por lo tanto $\angle XBC = \angle XCB = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Por ángulo semiinscrito tenemos que $\angle QBX = \angle XCB = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Como además $BC = BQ$ entonces los triángulos $\triangle XBC$ y $\triangle XQC$ son congruentes y por lo tanto

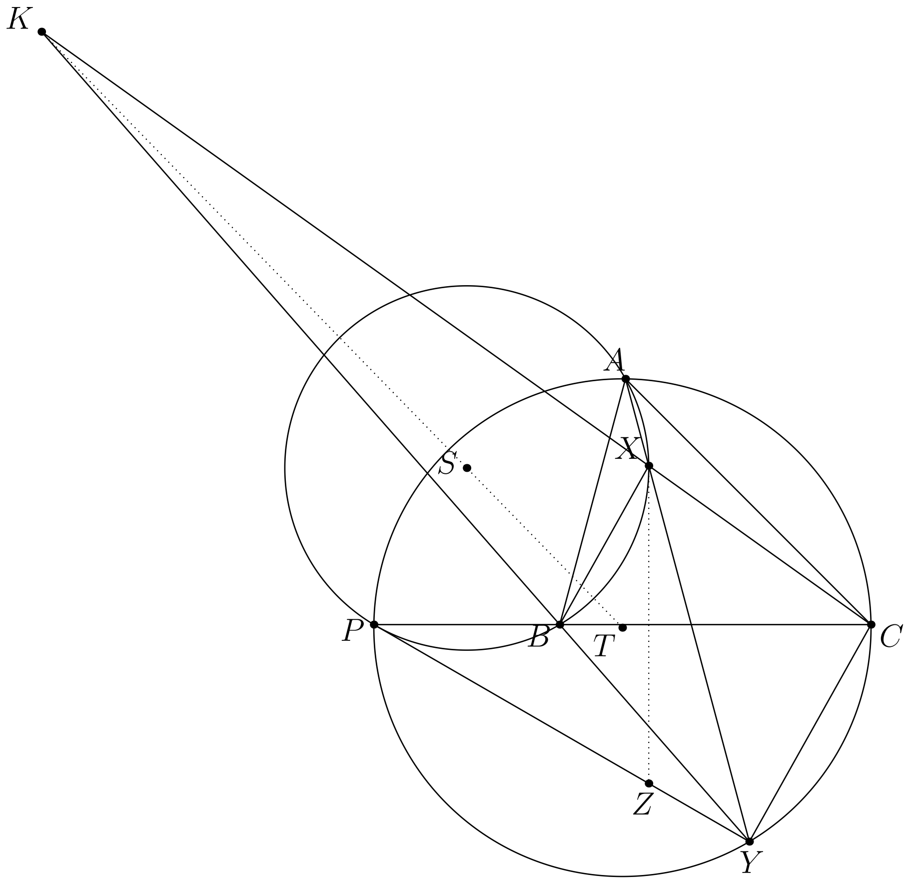
$XQ = XB$.

Entonces $\angle AQB = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Por la bisectriz externa, $\angle LAB = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ y como $BA = BL$ entonces $\angle BLX = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = \angle BQA$. Entonces $BLQX$ es cíclico.

Luego $\angle QLX = \angle QBX = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. De manera análoga obtenemos que $\angle PKX = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ lo que implica que $\triangle MKL$ es isósceles y termina la demostración.

G4 Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. En la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ se marcan puntos X y Y tales que X está entre A y Y y $BX \parallel CY$. Sea Z el reflejo de X sobre BC y sea P el punto de intersección de las rectas YZ y BC. Si las rectas BY y CX se cortan en K, demostrar que $KA = KP$

Solución:



Sea P_1 el punto donde el circuncírculo de ACY corta a BC por segunda vez. Sea D el pie de la bisectriz de $\angle BAC$. Claramente, D es interior al circuncírculo de ACY y por potencia de un punto, tenemos que $DP_1 \cdot DC = DA \cdot DY$. Como BX y CY son paralelas, $\frac{DB}{DC} = \frac{DX}{DY}$ de donde se obtiene fácilmente que $DP_1 \cdot DB = DA \cdot DX$ y como D es exterior a los segmentos BP_1 y AX, $AXBP_1$ es cíclico.

Para las dos posiciones posibles, usando los cuadriláteros cíclicos $ACYP_1$ y $AXBP_1$ tenemos que

$$\angle CP_1Z = \angle DP_1X = \angle BAX = \angle CAY = \angle CP_1Y.$$

Luego P_1, Z e Y son colineales, y P_1 es el punto donde YZ corta a BC, de donde $P = P_1$ y $AXBP$ y $ACYP$ son cíclicos.

Sean ahora S y T los circuncentros de ABX y ACY respectivamente. Notemos que $SA = SP$ y $TA = TP$, de donde la recta ST es la mediatriz de AP. El problema se vuelve entonces equivalente a demostrar que K, S y T son colineales.

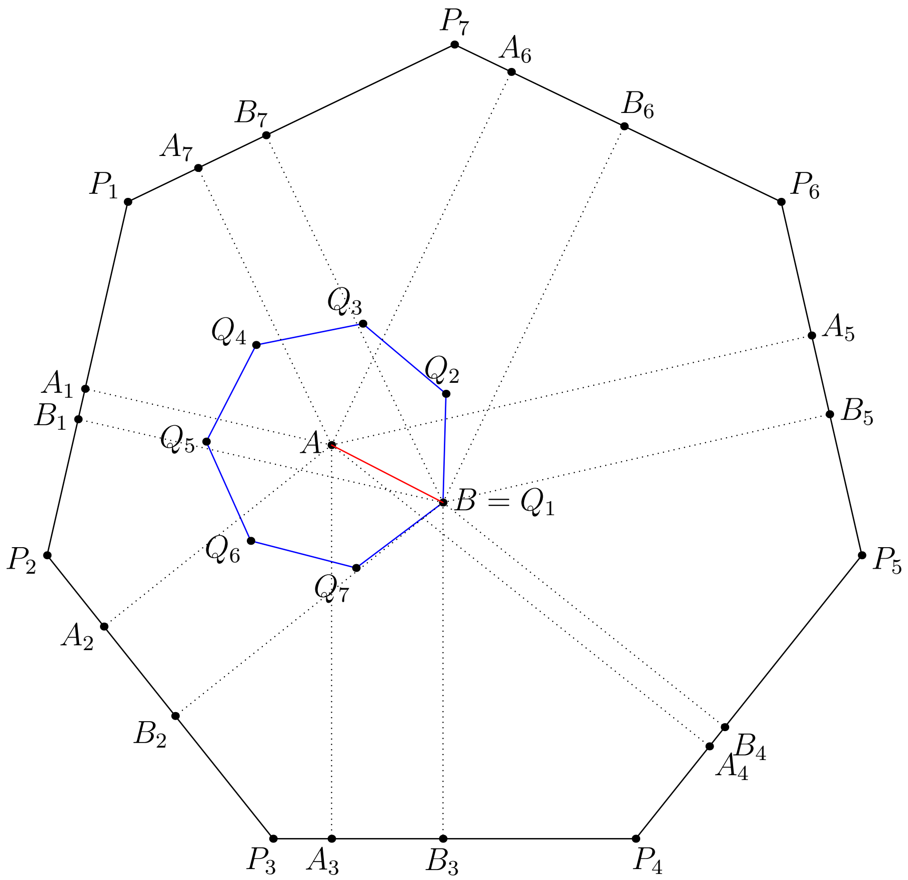
Pero notemos que como $\angle BAX \angle YAC$, por ángulo central tenemos que $\angle BSX \angle YTC$, y como BSX y YTC son isósceles, estos triángulos son semejantes. Ahora, como BX y YC son paralelas, tenemos por Thales que

$$\frac{KB}{KY} = \frac{KX}{KC}.$$

Luego, la homotecia centrada en K que manda B a Y también manda X a C. Sea entonces T_1 la imagen de S tras aplicar esta misma homotecia, tenemos que BSX e YT_1C son semejantes, y como tanto T como T_1 están en el mismo semiplano que A respecto a CY tenemos que $T = T_1$. Luego K, S y T son colineales y $KA = KP$.

G5 Sea $n \geq 3$ un entero positivo y sea $P = P_1 \dots P_n$ un n-ágono regular. Sean A y B dos puntos en el interior de P. Definimos $A_1, \dots A_n$ y $B_1 \dots B_n$ como las proyecciones de A y B sobre los lados $P_1P_2 \dots P_nP_1$. Demostrar que se pueden separar los segmentos $A_1B_1, \dots, A_nB_n$ en dos grupos de forma que ambos grupos tienen la misma longitud total.

Solución 1:



Sea $Q = Q_1 \cdots Q_n$ el único n-ágono regular centrado en A, con $Q_1 = B$ y la misma orientación que P. Para cada $k \in \{1, ..., n\}$, tenemos la igualdad de ángulos orientados $\angle(AB, AQ_k) = \angle(P_{2-k}P_{3-k}, P_1P_2)$, donde extendemos los índices periódicamente módulo n (ambos ángulos son iguales a $\frac{2(k-1)\pi}{n}$). Resulta que

$$\angle(AB, P_{2-k}P_{3-k}) = \angle(AQ_k, A_1A_2).$$

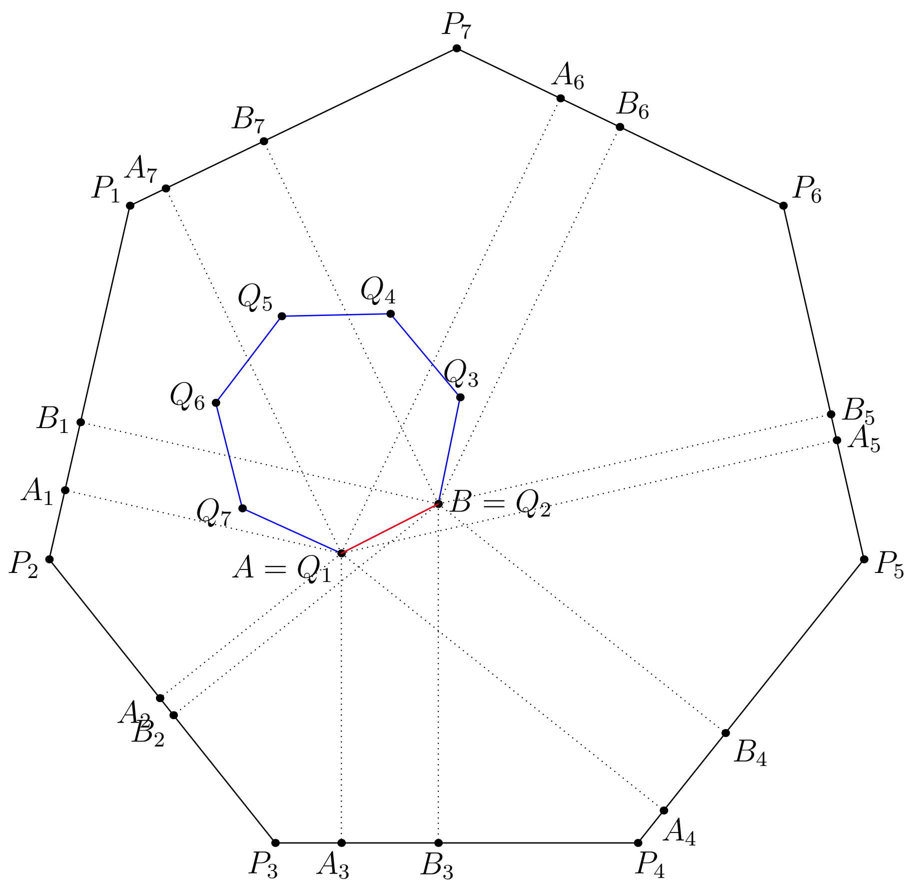
Como $AB = AQ_k$, se deduce que la longitud de la proyección del segmento AB sobre la línea $P_{2-k}P_{3-k}$ es igual a la longitud de la proyección del segmento AQ_k en la línea P_1P_2.

Denote por O la proyección de A sobre la línea P_1P_2, y por L_k la proyección de Q_k en P_1P_2. La observación anterior implica que basta para demostrar que se puede dividir el segmentos $OL_1, \ldots, OL_n$ en dos grupos para que ambos grupos tengan la misma longitud total. Considere un sistema de ejes cartesianos con origen en O de modo que P_1P_2 sea el eje x. Entonces el eje y es la línea OA, y por lo tanto Q es un n-ágono regular cuyo centro tiene una coordenada x igual a 0. Si hacemos $x_1, ..., x_n$ indican las coordenadas x de $Q_1, ..., Q_n$, obtenemos

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 0,$$

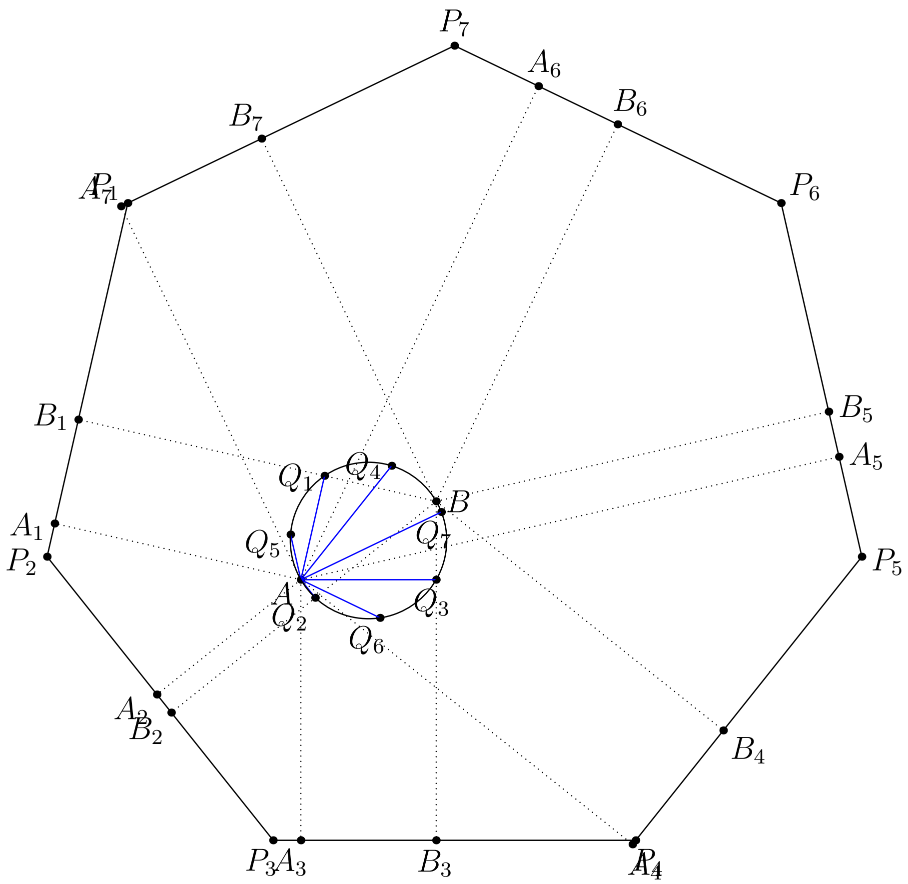
de donde $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Pero $x_k = \pm OL_k$ para cada k. Por lo tanto, existe una suma de la forma $\pm OL_1 \cdots \pm OL_n$ se desvanece. Esto implica el enunciado del problema.

Comentario: Mostraremos una variación de la construcción de la solución anterior que hace más sencillo ver que las proyecciones pueden ser separadas en dos grupos con misma longitud total.



Esta vez construimos el n-ágono $Q = Q_1, Q_2 \dots Q_n$ $A = Q_1$ y $B = Q_2$. De manera similar a la solución anterior, podemos probar que las longitudes $A_1B_1, \dots A_nB_n$ son iguales a las longitudes de las proyecciones de $Q_1Q_2, \dots Q_{n-1}Q_n, Q_nQ_1$ sobre P_1P_2. Cuando proyectamos el polígono Q entero sobre P_1P_2 cubrimos cierto segmento exactamente dos veces pues el Q es convexo. Además los extremos del segmento corresponden a proyecciones de vértices (de nuevo por convexidad), digamos P_m y P_k. Entonces si separamos los lados de Q en los dos grupos de lados consecutivos delimitados por P_m y P_k, evidentemente las proyecciones tienen la misma longitud total.

Solución 2: En esta solución también construimos un n-ágono regular pero de una manera diferente.



Sea Q_k el pie de la altura desde A hasta la recta BB_k. De manera que $\angle AQ_kB = 90°$, $A_KB_K = AQ_K$ y además $P_kP_{k+1} \parallel AQ_K$ (De aquí en adelante considere todos los indices módulo n). Luego todos los puntos Q_k pertenecen al círculo de diametro AB y por las paralelas

$\angle(AQ_k, AQ_{k+1}) = \angle(P_kP_{k+1}, P_{k+1}P_{k+2})$. Uniendo estas dos propiedades concluimos que, si todos los Q_k son puntos diferentes, el polígono $Q = Q_1 \dots Q_n$ es regular (Los puntos no están necesariamente en orden).

Tenemos dos casos. Si no todos los puntos de Q son diferentes, esto ocurre cuando dos de las proyecciones de A a las rectas BB_k son iguales. Esto quiere decir que el polígono original tiene lados paralelos, es decir que n es par. En tal caso es fácil la división de los segmentos A_kB_k pues para todo k, A_kB_k=$A_{k+n/2}B_{k+n/2}$.

Por otro lado, si n es impar, el poligono Q es regular. En tal caso tenemos un punto A sobre su circunferencia y dado que AQ_k es igual a A_KB_K, tenemos que dividir las longitudes AQ_k en dos grupos con la misma longitud total. Probamos el siguiente lema para terminar el problema. Mostramos una solución usando Ptolomeo pero hay varias soluciones analíticas.

Lema: Sea n un entero positivo impar, $X_1X_2 \dots X_n$ un polígono regular (los puntos nombrados en orden horario) y A un punto sobre su cincuferencia. Entonces se cumple que

$$\sum_{i \text{ impar}} AX_i = \sum_{i \text{ par}} AX_i.$$

Demostración: Sin perdida de generalidad supongamos que A esta en el arco X_1X_n donde no está ningún otro X_i. Sea $C = X_1X_2$ y $D = X_1X_3$. Utilizando el teorema de Ptolomeo sobre los cuadriláteros de la forma $AX_iX_{i+1}X_{i+2}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
C \cdot AX_1 + C \cdot AX_3 &= D \cdot AX_2, \\
D \cdot AX_3 &= C \cdot AX_2 + C \cdot AX_4, \\
C \cdot AX_3 + C \cdot AX_5 &= D \cdot AX_4, \\
&\dots \\
D \cdot AX_1 + C \cdot AX_n &= C \cdot AX_2, \\
D \cdot AX_n + C \cdot AX_1 &= C \cdot AX_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos que

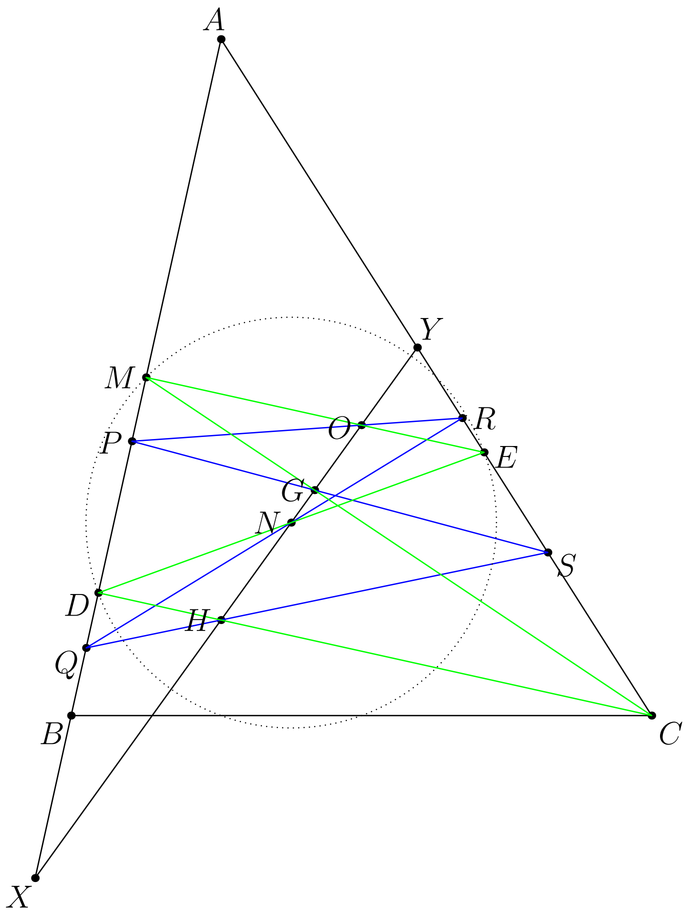
$$(2C + D) \sum_{i \text{ impar}} AX_i = (2C + D) \sum_{i \text{ par}} AX_i.$$

$\square$

Comentario: El caso $n = 3$ del lema es un caso particular del teorema de Pompeiu.

G6 Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno, y sean O, H, G y N su circuncuncentro, su ortocentro, su gravicentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos, respectivamente. Sean P, Q, R y S puntos distintos tales que P y Q están en el segmento AB; R y S están en el segmento AC y las ternas de puntos POR, PGS, QNR y QHS son colineales. Determinar la medida del ángulo $\angle BAC$.

Solución 1:



Se sabe que O, H, G y N están en una misma recta (la recta de Euler). Sean X e Y los puntos en los que la recta de Euler corta a AB y a AC, respectivamente. Sea $\alpha(T) = \frac{TA}{TX}$ para un punto en AB, $\beta(T) = \frac{TX}{TY}$ para un punto en XY, y $\gamma(T) = \frac{TY}{TA}$ para un punto en AC. Aplicando el teorema de Menelao al triángulo AXY, vemos que

$$\alpha(P)\beta(O)\gamma(R) = \alpha(P)\beta(G)\gamma(S) = \alpha(Q)\beta(N)\gamma(R) = \alpha(Q)\beta(H)\gamma(S) = 1,$$

de donde igualando el producto del primero y cuarto término con el producto del segundo y tercero obtenemos $\beta(O)\beta(H) = \beta(G)\beta(N)$.

Sea M el punto medio de AB, sea D el pie de la altura desde C a AB, y sea E la intersección de DN y AC. Por el teorema de Menelao,

$$\alpha(M)\beta(O)\gamma(E) = \frac{\alpha(M)\beta(G)\gamma(C) \cdot \alpha(D)\beta(N)\gamma(E)}{\alpha(D)\beta(H)\gamma(C)} \cdot \frac{\beta(O)\beta(H)}{\beta(G)\beta(N)} = 1,$$

lo que significa que M, O y E están alineados.

Como $\angle DME = \angle DMO = 90°$, y E está en DN, el punto E es el punto de la circunferencia de los nueve puntos antipodal a D. Puesto que E está en la circunferencia de los nueve puntos y en el lado AC, E es bien el punto medio de AC o bien el pie de la altura desde B. En el primer caso tendríamos $90° = \angle AME = \angle ABC$, que contradice la hipótesis de que ABC es agudo. Por tanto E es el pie de la altura desde B. Como E está en MO, que es la mediatriz de AB, resulta $AE = BE$. El triángulo AEB es isósceles y rectángulo en E, con lo que $\angle BAC = \angle BAE = 45°$. $\square$

Comentario: La idea fundamental detrás de la solución es que si el enunciado es verdad para alguna escogencia de R entonces es verdad para cualquier R, en particular para $R = C$. La siguiente solución va a probar esto mismo usando el lenguaje proyectivo.

Solución 2:

Probaremos el siguiente lema:

Lema: Para algún punto X sobre la recta AC, sea $X_1 = XH \cap AB$, sea $X_2 = X_1N \cap AB$, sea $X_3 = X_2O \cap AB$ y sea $X_4 = X_3G \cap AC$. Entonces si hay más de dos puntos X sobre AC tales que $X = X_4$, entonces para todo punto X sobre AC se cumple $X = X_4$

Dem: Consideremos el mapa $X \to X_4$ y denotamos $\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{AD} / \frac{BC}{BD}$ a la razón cruz entre los pares de puntos A, B y C, D, como siempre la razón cruz se define con segmentos dirigidos. Sean D, E, F los tres puntos fijos. Como proyectar a través de un punto de una recta a otra preserva la razón cruz y el mapa $X \to X_4$ es la composición de cuatro proyecciones, entonces el mapa $X \to X_4$ preserva la razón cruz. Luego tenemos que

$$\{D, E; F, X\} = \{D, E; F, X_4\} \iff \frac{DF}{DX} / \frac{EF}{EX} = \frac{DF}{DX_4} / \frac{EF}{EX_4}$$

que es equivalente a $\frac{DX}{EX} = \frac{DX_4}{EX_4}$. Como estamos trabajando con segmentos dirigidos, esto implica $X = X_4$ para cualquier X. $\square$

Entonces vamos a encontrar tres puntos fijos distintos del mapa descrito en el lema. Notemos que A es punto fijo pues todas las proyecciones resultan en A. Además si Y es el corte entre la recta de Euler y AC, entonces Y tambíen es punto fijo pues proyectamos 4 a lo largo de la recta de Euler. $Y \neq A$ pues ABC no es isosceles.

El enunciado del problema nos asegura un tercer punto fijo distinto de los anteriores dos, pues en las proyecciones empezando en Y y A, hay puntos repetidos al hacer las proyecciones. Entonces tenemos tres puntos fijos. Por el Lema todos los puntos de AC son fijos. En particular C es fijo y se termina como en la primera solución.

Teoría de Números

N1 Determinar todos los enteros positivos $n > 1$ para los que existe un conjunto S de n enteros positivos tal que si calculamos todos los máximos comunes divisores de dos elementos de S, obtenemos cada uno de los números $1, 2, 3, \dots \frac{n(n-1)}{2}$ exactamente una vez.

Solución:

Respuesta: Solamente $n = 2$ y $n = 3$ cumplen lo pedido.

Para $n = 2$ usamos el conjunto $\{1, 2\}$ y para $n = 3$ usamos $\{2, 3, 6\}$.

Ahora supongamos que n cumple la propiedad, probaremos que $n = 2, 3$. Para algún entero positivo k sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que S contiene exactamente m múltiplos de k. Entonces si tomamos cualesquiera dos de esos múltiplos, su máximo común divisor es divisible entre k. Entonces entre los $\binom{n}{2}$ máximos comunes divisores de elementos de S hay exactamente $\binom{m}{2}$ de ellos que son múltiplos de k.

Por otra parte, notemos que entre $1, 2, \dots \frac{n(n-1)}{2}$ hay

$$\left\lfloor \frac{n(n-1)}{2k} \right\rfloor$$

múltiplos de k. Entonces para todo entero positivo k tenemos que $\lfloor n(n-1)/2k \rfloor$ es un número triangular.

Supongamos que p un número primo que divide a $\frac{n(n-1)}{2}$, si tomamos $k = \frac{n(n-1)}{2p}$, por lo anterior tenemos que

$$\left\lfloor \frac{n(n-1)}{2k} \right\rfloor = p$$

es triangular. Supongamos que a es tal que

$$\frac{a(a-1)}{2} = p \iff a(a-1) = 2p$$

entonces tenemos los siguientes casos

- $a = 1$, $a - 1 = 2p$, pero $0 \neq 2p$
- $a = 2$, $a - 1 = p$, pero $p = 1$ que es absurdo
- $a = p$, $a - 1 = 2$ de donde obtenemos $p = 3$
- $a = 2p$, $a - 1 = 1$, de lo que se deduce $p = 1$ que es absurdo.

Entonces el único primo que puede dividir a $\frac{n(n-1)}{2}$ es 3. Por lo que existe un entero no negativo b tal que

$$3^b = \frac{n(n-1)}{2} \iff 2 \times 3^b = n(n-1)$$

Como $mcd(a, a-1)$ tenemos los siguientes casos.

- $n = 1$, $n - 1 = 2 \times 3^b$ que es imposible pues $n > 1$
- $n = 2$, $n - 1 = 3^b$ que es solución con $b = 0$
- $n = 3^b$, $n - 1 = 2$ que implica $n = 3$ y es solución con $b = 1$.
- $n = 2 \times 3^b$, $n - 1 = 1$ que implica $n = 2$ y es solución con $b = 0$ (la misma solución del caso 2).

Entonces los únicos n posibles son $n = 2$ y $n = 3$ como queríamos.

N2 Sea p un número primo. Determine todos los enteros positivos a tales que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definida por $a_0 = a$ y para todo $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = pa_n - (p-1)\lfloor \sqrt[p]{a_n} \rfloor^p$$

sea eventualmente constante.

Solución:

Respuesta: $a = m^p$ para algún entero positivo m.

Esta cumple, pues

$$pa^p - (p-1)\lfloor \sqrt[p]{a^p} \rfloor^p = a^p$$

Ahora veamos que a debe ser una potencia p-ésima. Note que:

$$a_{n+1} = pa_n - (p-1)\lfloor \sqrt[p]{a_n} \rfloor^p \geq pa_n - (p-1)(\sqrt[p]{a_n})^p = a_n,$$

con igualdad si a_n es una potencia p-ésima perfecta. De esta forma, para que la sucesión sea eventualmente constante, debe existir un n tal que a_n sea una potencia p-ésima.

Supongamos que a_n es una potencia p-ésima, probaremos que a_{n+1} tampoco lo será. Supongamos en busca de una contradicción que $a_{n+1} = k^p$, para algún entero positivo k. Sea $m = \lfloor \sqrt[p]{a_n} \rfloor$, tenemos $m^p < a_n < (m+1)^p$ y también:

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = pa_n n - (p-1)m^p \equiv m^p \equiv m \pmod{p} \\ &a_{n+1} = k^p \equiv k \pmod{p} \\ &\Rightarrow k \equiv m \pmod{p} \quad (*) \end{aligned}$$

Por el pequeño teorema de Fermat. Como $k^p = a_{n+1} > a_n > m^p$, tenemos $k > p$. Por $(*)$, obtenemos que $k \geq m + p$. Pero:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= pa_n - (p-1)\lfloor \sqrt[p]{a_n} \rfloor^p \\ &< p(m+1)^p - (p-1)m^p \\ &= m^p + p\binom{p}{1}m^{p-1} + p\binom{p}{2}m^{p-2} + \cdots + p\binom{p}{p} \\ &< m^p + \binom{p}{1}p^1 m^{p-1} + \binom{p}{2}p^2 m^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p}p^p = (m+p)^p \end{aligned}$$

Entonces $a_{n+1} < (m+p)^p$, que es una contradicción. Por lo tanto si a no es una potencia p-ésima entonces ningún otro término será una potencia p-ésima y la sucesión no será constante. Entonces a es una potencia p-ésima como queriamos.

N3 Determinar todos los reales $r \geq 1$ para los cuales

$$\lfloor 2^k r \rfloor \text{ divide a } \lfloor 2^{k+1} r \rfloor$$

para todo entero no negativo k.

Solución:

Respuesta: Se cumple para $r \in \mathbb{Z}^+$ y para $r = \frac{3}{2}$.

Evidentemente $r \in \mathbb{Z}^+$ cumple. Si $r = \frac{3}{2}$, entonces cuando $k = 0$, $1 \mid 3$ y para $k \geq 1$, $3 \times 2^{k-1} \mid 3 \times 2^k$.

Ahora demostraremos que en efecto estas son las únicas soluciones. La idea principal de la solución está encapsulada en el siguiente lema.
Lema: Para $k \geq 1$ se cumple que $2\lfloor 2^k r \rfloor = \lfloor 2^{k+1} r \rfloor$.

Dem: Sea $2^k r = n + \epsilon$ con n entero positivo y $0 \leq \epsilon < 1$. Como $r, k \geq 1$, entonces $n \geq 2$. Además

$$n \mid \lfloor 2^{k+1} r \rfloor = \lfloor 2n + 2\epsilon \rfloor = 2n + \lfloor 2\epsilon \rfloor$$

Entonces $n \mid \lfloor 2\epsilon \rfloor$. Sin embargo $0 \leq \lfloor 2\epsilon \rfloor < 2\epsilon < 2$. Lo que la única posibilidad es $\lfloor 2\epsilon \rfloor = 0$ y por lo tanto $2\lfloor 2^k r \rfloor = \lfloor 2^{k+1} r \rfloor$ $\square$

En general si para algún real a se cumple que $\lfloor 2a \rfloor = 2\lfloor a \rfloor$, entonces si $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$, se cumple que

$$2\{a\} = \{2a\}$$

Además, lo anterior se cumple si y solo si $\{a\} \in [0, \frac{1}{2})$, por lo que necesitamos que

$$\{2^n r\} \in [0, \frac{1}{2}) \text{ para todo entero positivo } n$$

Si $\{2r\} \neq 0$ entonces existe un n tal que

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \{2r\} < \frac{1}{2^n}$$

Entonces
$$\frac{1}{2} \leq \{2^n r\} < 1$$
Que es imposible. Entonces $\{2r\} = 0$. Si r es entero, ya está. Si no, entonces $r = \frac{2m+1}{2}$ para algún entero positivo m. Verificando los dos primeros términos,

$$m \mid 2m+1 \iff m \mid 1 \iff m = 1$$

Es decir $r = \frac{3}{2}$.

Comentario: Una versión más general del problema que también podría usarse en la competencia es la siguiente:
Sea $n > 1$ un entero positivo. Determinar todos los reales $r \geq 1$ para los cuales
$$\lfloor n^k r \rfloor \text{ divide a } \lfloor n^{k+1} r \rfloor$$
para todo entero no negativo k.
En este caso la respuesta es $r \in \mathbb{Z}^+$ o $r = \frac{m}{n}$ con $1 \leq m \leq n-1$. La demostración de esta versión es esencialmente idéntica a la del problema original.

N4 Sea $S = \{13, 133, 1333, \dots\}$ el conjunto de números que se expresan en base 10 como 1 seguido de uno o varios $3's$. Consideremos una tira horizontal de 2022 casillas, inicialmente vacías. Ana y Borja juegan de la manera siguiente: cada uno, en su turno, escribe en la casilla vacía situada más a la izquierda un dígito de 0 a 9. Empieza a jugar Ana; luego ambos jugadores se alternan hasta que todas las casillas están llenas. Cuando el juego termina, en la tira se lee - de izquierda a derecha - un número N de 2022 dígitos. Borja gana si N es divisible por alguno de los números de S, en caso contrario gana Ana. Determine cual de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Solución:

Respuesta: Ana puede asegurar la victoria.

Sea s_k el k-ésimo elemento de S, es decir, un 1 seguido de k 3's. Ana gana si consigue que N no sea divisible por ninguno de los números $s_1, s_2, \dots, s_{2022}$, pues el único número de 2022 dígitos que es divisible por cualquiera de los restantes s_k es 00. . . 0, que también es divisible por los s_k excluidos.

Así Ana consigue 1011 movimientos. Veamos que, en el movimiento $1012-k$, Ana puede forzar que N no sea divisible por s_{2k-1} o por s_{2k}. En efecto, antes del $1012-k$-ésimo movimiento de Ana, los dígitos ya elegidos restringen N a un intervalo I de amplitud 10^{2k}. Puesto que $s_{2k} > 10^{2k}$, el intervalo I contiene a lo sumo un múltiplo de s_{2k}. Además, tenemos que $s_{2k-1} \geq 13 \cdot 10^{2k-2}$, y entonces I contiene a lo sumo $\lceil 10^{2k}/s_{2k-1} \rceil \leq \lceil 10^{2k}/(13 \cdot 10^{2k-2}) \rceil = \lceil 100/13 \rceil = 8$ múltiplos de s_{2k-1}.

Hay a lo sumo 9 múltiplos de s_{2k-1} o de s_{2k} en I, y por tanto Ana puede elegir un dígito en el $1012-k$-ésimo movimiento en el que no coincida el dígito correspondiente de cualquiera de esos 9 números. Esto significa que el número N no es divisible por ninguno de los $s_1, s_2, \dots, s_{2022}$, lo que asegura que Ana gana el juego.

Comentario: La propuesta original también contenía la siguiente versión del juego como una segunda parte del problema:

Sea $S = \{13, 133, 1333, \dots\}$ el conjunto de números que se expresan en base 10 como 1 seguido de uno o varios $3's$. Consideremos una tira horizontal de 2022 casillas, inicialmente vacías. Ana y Borja juegan de la manera siguiente: cada uno, en su turno, escoge una casilla vacía y en ella escribe un dígito de 0 a 9. Empieza a jugar Ana; luego ambos jugadores se alternan hasta que todas las casillas están llenas. Cuando el juego termina, en la tira se lee - de izquierda a derecha - un número N de 2022 dígitos. Borja gana si N es divisible por alguno de los números de S, en caso contrario gana Ana. Determine cual de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Solución:
En esta versión, Borja tiene una estrategia ganadora. La idea principal es aprovechar el hecho que 1001 es múltiplo de 13. Vamos a separar las 2022 casillas en bloques de 6 casillas consecutivas. Cada vez que Ana ponga un dígito en una casilla C, Borja va a buscar la casilla que está a tres casillas de distancia de C en el mismo bloque que C. Luego va a poner en esta casilla el mismo dígito que Ana. De esta manera se asegura que al finalizar el juego, cada bloque tenga la siguiente forma

$$\overline{abcabc} = 1001 \times \overline{abc}$$

Esto asegura que el número total sea múltiplo de 13 que es un elemento de S.

Creemos que la solución versión depende mucho de la coincidencia aritmética $1001 = 13 \times 77$ y por lo tanto no es muy adecuada para la competencia.

N5 Sea $n > 1$ un entero. Demostrar que existe al menos un entero m con $n < m < 4n^3$ tal que

$$\frac{\lfloor\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots\sqrt{m}\rfloor}{\lfloor\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots\sqrt{n}\rfloor}$$

es entero.

Solución:

Para cada entero positivo m sea $s_m = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots\sqrt{m}$ y sea $a_m = \lfloor s_m \rfloor$. Para abreviar llamamos $A = a_n$ y $K = 2A - 1$. Probaremos que para algún m con $K^2 \leq m \leq K^2 + K$ ocurre que a_m es múltiplo de A. Notemos que $s_n \geq n$, pues es la suma de n términos mayores a 1 y que $s_n \leq n\sqrt{n}$ pues es la suma de n términos todos menores a $\sqrt{n}$. Como

$$K^2 = (2A+1)^2 \geq A^2 \geq n^2 > n$$

y

$$K^2 + K < (K+1)^2 = 4A^2 < 4(n\sqrt{n})^2 = 4n^3$$

El rango está contenido en $[n, 4n^3]$ y por lo tanto si encontramos un m en el rango, entonces ya terminamos el problema. De aquí en adelante solamente nos referiremos a m's en dicho rango.

Notemos que $K^2 + K < \left(K^2 + \frac{1}{2}\right)$, entonces para todo m se tiene que $\lfloor\sqrt{m}\rfloor = K$ y más aún, $\sqrt{m} < K + \frac{1}{2}$. Esta última desigualdad implica que $a_m = a_{m-1} + \lfloor\sqrt{m}\rfloor = a_{m-1} + K$ o $a_m = a_{m-1} + \lfloor\sqrt{m}\rfloor + 1 = a_{m-1} + K + 1$.

Esto significa que $a_m - a_{m-1}$ es congruente a 0 o a 1 $\pmod{A}$. Probaremos el siguiente lema.
Lema: Para todo m en el rango indicado al menos uno entre $a_{m+1} - a_m$ y $a_m - a_{m-1}$ es K.
Dem: Si ambos fueran $K+1$ tendríamos que $a_{m+1} - a_{m-1} = 2K + 2$. Sin embargo, como $K^2 \leq m < m+1 \leq K^2 + K$ entonces

$$a_{m+1} \leq s_{m+1} = s_{m-1} + \sqrt{m} + \sqrt{m+1} < (a_{m-1}) + 2\left(K + \frac{1}{2}\right) = a_{m-1} + 2K + 2$$

Lo que nos da una contradicción $\square$.

Como hay $2A$ enteros en el rango, entonces al menos A de ellos cumplen $a_m - a_{m-1} = K$. Luego en $\{a_m\}_{m\in[K^2,K^2+K]}$ están todos los residuos módulo A pues por lo anterior restamos 1 al residuo $\pmod A$ al menos A veces. Entonces hay un múltiplo de A en $\{a_m\}_{m\in[K^2,K^2+K]}$ lo que termina la solución.

N6 Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los entero positivos. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$f(a)f(a+b) - ab$$

es un cuadrado perfecto para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Solución:
Respuesta: La única solución es $f(x) = x$.

Claramente la identidad cumple, pues la expresión se convierte en a^2 que es un cuadrado perfecto.
Como siempre, dado un primo p denotamos $v_p(n)$ al exponente de p en la factorización prima de n.

Lema: Para todo primo $p > 5$ se cumple que $f(p) = p$.
Dem: Primero demostraremos que $f(p) \mid p$. Primero, verificaremos que $v_p(f(p)) \leq v_p(p) = 1$.
Supongamos lo contrario. Evaluando la condición del enunciado en $a = p$ y $b = 1$ nos dice que

$$f(p)f(p+1) - p$$

es un cuadrado perfecto. Pero,

$$v_p(f(p)f(p+1) - p) = 1 \text{ pues } v_p(f(p)) > 1 \text{ y } v_p(p) = 1$$

lo que nos lleva a una contradicción pues el valor p-ádico de un cuadrado siempre es par. Entonces $v_p(f(p)) \leq v_p(p) = 1$.

Ahora supongamos que $v_q(f(p)) \geq 1$ para algún primo $q \neq p$ y $q \neq 2$. Entonces tenemos que

$$f(p)f(b+p) - pb \equiv -pb \mod q \text{ para todo } b \in \mathbb{Z}^+$$

Sabemos que existe un t que no es residuo cuadrático módulo q. En caso que todos los residuos fueran cuadráticos, la función $x \to x^2$ sería biyectiva módulo q pero no es sobreyectiva pues $a^2 \equiv (-a)^2 \mod q$. Además como q es primo, existe un c tal que $-pc \equiv 1 \mod q$. Entonces si tomamos $b = ct$. Tendríamos que

$$f(p)f(b+p) - pb \equiv t \mod q$$

pero, el lado izquierdo es un residuo cuadrático y el derecho no lo es. Entonces $v_q(f(p)) = 0$.

Para el caso $q = 2$ revisamos que $v_2(f(p)) \leq 1$. Dado que, de lo contrario, si $v_2(f(p)) \geq 2$ y si consideramos $b = 2$ tenemos que

$$f(p)f(p+2) - 2p \equiv 2 \pmod 4.$$

Pero el lado izquierdo debe ser un cuadrado perfecto y 2 no es residuo cuadrático módulo 4.

Dadas las evaluaciones anteriores obtenemos que $f(p) \mid 2p$, en particular $f(p) = 1, 2, p, 2p$ para todo primo p. Si existiera un primo p tal que $f(p) = 1$ o $f(p) = 2$, Entonces evaluando la condición en $a = p$, $b = q-p$

$$f(p)f(q) - p(q-p) < 2f(q) - pq + p^2 \leq 4q - pq + p^2$$

debe ser un cuadrado para todo $q > p$. Pero si consideramos un $q > p^2$ y dado que $p > 5$ este valor es negativo. Luego para todo primo p, $f(p) = p$ o $f(p) = 2p$. Si $f(p) = 2p$ consideramos la misma condición $a = p$, $b = q - p$ con $q > p$ y se obtiene que

$$f(p)f(q) - p(q-p) = 2pf(q) - p(q-p) = p(2f(q) - q + p).$$

es un cuadrado perfecto. Luego p debe dividir a $2f(q) - q$ el cual es igual a q o $3q$. Pero como $p > 5$ y $q > p$ esto es imposible.

Por lo tanto, $f(p) = p$ para todo primo $p > 5$. $\square$

Ahora ya estamos listos para terminar el problema. Tomemos un a fijo, por la condición del problema, para cada primo p existe un entero x_p tal que

$$x_p^2 = f(a)f(p) - a(p-a) = f(a)p - ap + a^2 \iff (x_p - a)(x_p + a) = p(f(a) - a)$$

Supongamos que $f(a) \neq a$. Entonces como p puede ser arbitrariamente grande, entonces x_p también puede ser arbitrariamente grande. Tomamos un p lo suficientemente grande, de forma que $x_p - a \geq 2$. Como p es primo, a lo sumo uno entre $x_p - a$ y $x_p + a$ divide a p, entonces al menos uno entre $x_p - a$ y $x_p + a$ divide a $f(a) - a$. Lo que significa que $f(a) - a$ tiene divisores arbitrariamente grandes que es imposible. Entonces $f(a) - a = 0$ lo que termina la demostración.