XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primeiro Dia

28 de Setembro de 2022

Problema 1. Seja ABC um triângulo equilátero com circuncentro O e circunferência circunscrita Γ. Seja D um ponto sobre o arco menor BC, com $DB > DC$. A mediatriz de OD intersecta Γ em E e F, com E sobre o arco menor BC. Seja P o ponto de interseção de BE com CF. Prove que PD é perpendicular a BC.

Problema 2. Seja $S = \{13, 133, 1333, \dots\}$ o conjunto dos inteiros positivos da forma $1\overbrace{3\dots3}^{n \text{ dígitos}}$, com $n \geq 1$. Considere uma fila horizontal de 2022 casas, inicialmente vazias. Ana e Borja jogam da seguinte maneira: cada um, em sua jogada, escreve um dígito de 0 a 9 na casa vazia situada mais à esquerda. Começa a jogar Ana; depois eles jogam alternadamente até que todas as casas estejam preenchidas. Quando o jogo termina, na fila lê-se, da esquerda para a direita, um número N de 2022 dígitos. Borja ganha se N for divisível por algum dos números pertencentes a S; caso contrário Ana ganha. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora e descreva-a.

Problema 3. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

(*i*) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$, para todos x, y em $\mathbb{R}$.

(*ii*) $|f(x)| < 2022$, para todo x com $0 < x < 1$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.