XVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática

San Salvador, 1 de octubre de 2002

Primer día

Problema 1

Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente $1, 2, \ldots, 2001, 2002$. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$.
En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma $3k + 1$. Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

Problema 2

Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

Problema 3

Un punto P es interior al triángulo equilátero ABC y cumple que $\angle APC = 120°$. Sean M la intersección de CP con AB y N la intersección de AP con BC. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo MBN al variar P.

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada pregunta vale 7 puntos.

Versión en español

XVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática

San Salvador, 2 de octubre de 2002

Segundo día

Problema 4

En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestre que $\angle EMD = \angle DMF$.

Problema 5

La sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots$ se define como:

$$a_1 = 56 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n} \qquad \text{para cada entero } n \geq 1.$$

Demuestre que existe un entero k, $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

Problema 6

Un policía intenta capturar a un ladrón en un tablero de 2001×2001. Ellos juegan alternadamente. Cada jugador, en su turno, debe moverse una casilla en uno de los tres siguientes sentidos:

$\downarrow$ (abajo); $\quad \rightarrow$ (derecha); $\quad \nwarrow$ (diagonal superior izquierda).

Si el policía se encuentra en la casilla de la esquina inferior derecha, puede usar su jugada para pasar directamente a la casilla de la esquina superior izquierda (el ladrón no puede hacer esta jugada). Inicialmente el policía está en la casilla central y el ladrón está en la casilla vecina diagonal superior derecha al policía. El policía comienza el juego. Demuestre que:

(a) El ladrón consigue moverse por lo menos 10000 veces sin ser capturado.

(b) El policía posee una estrategia para capturar al ladrón.

Nota: El policía captura al ladrón cuando entra en la casilla en la que está el ladrón. Si el ladrón entra en la casilla del policía, no se produce captura.

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada pregunta vale 7 puntos.