XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Primer Día
16 de septiembre de 2003

1. *a*) Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas

			………		
			………		

Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.
b) ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

Tanto en *a*) como en *b*), si la respuesta es afirmativa, explique cómo distribuiría los números, y si es negativa, justifique el porqué.

2. Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos M, N y P los puntos medios de AC, DB y CD, respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son paralelas.

3. Pablo estaba copiando el siguiente problema:

Considere todas las sucesiones de 2004 números reales $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2003})$, *tales que*

$$x_0 = 1,$$
$$0 \le x_1 \le 2x_0,$$
$$0 \le x_2 \le 2x_1,$$
$$\vdots$$
$$0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}.$$

Entre todas estas sucesiones, determine aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: $S = \cdots$.

Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

donde el último término, x_{2003}, tenía coeficiente +1, y los anteriores tenían coeficiente +1 ó –1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos **Versión en español**

XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Segundo Día
17 de septiembre de 2003

4. Sea $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

5. En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP=CQ$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y AQ respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX, XY y DY.

6. Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos **Versión en español**