XXXIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

Primer día

15 de septiembre de 2019

Problema 1. Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n. Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

Problema 2. Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real x se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1)).$$

Problema 3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. La paralela a AC que pasa por B corta a Γ en D ($D \neq B$) y la paralela a AB que pasa por C corta a Γ en E ($E \neq C$). Las rectas AB y CD se cortan en P, y las rectas AC y BE se cortan en Q. Sea M el punto medio de DE. La recta AM corta a Γ en Y ($Y \neq A$) y a la recta PQ en J. La recta PQ corta al circuncírculo del triángulo BCJ en Z ($Z \neq J$). Si las rectas BQ y CP se cortan en X, demuestra que X pertenece a la recta YZ.

Nota. El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

Duración del examen: 4 horas 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.

XXXIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

16 de septiembre de 2019

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ e inscrito en la circunferencia Γ. Sean P y Q dos puntos en el segmento AB (A, P, Q, B están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean E y F los segundos puntos de intersección de las rectas CP y CQ con Γ, respectivamente. Las rectas AB y EF se cortan en G. Demuestra que la recta DG es tangente a Γ.

Problema 5. Don Miguel coloca una ficha en alguno de los $(n+1)^2$ vértices determinados por un tablero de $n \times n$. Una *jugada* consiste en mover la ficha desde el vértice en que se encuentra a un vértice adyacente en alguna de las ocho posibles direcciones: $\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$ siempre y cuando no se salga del tablero. Un *recorrido* es una sucesión de jugadas tal que la ficha estuvo en cada uno de los $(n+1)^2$ vértices exactamente una vez. ¿Cuál es la mayor cantidad de jugadas diagonales ($\nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$) que en total puede tener un recorrido?

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ enteros positivos y P un polinomio con coeficientes enteros tal que, para todo entero positivo n,

$$P(n) \text{ divide a } a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n.$$

Demuestra que P es un polinomio constante.

Duración del examen: 4 horas 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.