XXXVIII OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Español, Dia 1

*Viernes, 8 de septiembre de 2023*

**Problema 1.** Sea $n$ un entero positivo. Se realizan las 35 multiplicaciones:

$$1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ \cdots,\ 35 \cdot n$$

Demuestre que en alguno de estos resultados aparece al menos una vez el dígito 7.

**Problema 2.** Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Encuentre todas las funciones $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que:

$$2023f(f(x)) + 2022x^2 = 2022f(x) + 2023[f(x)]^2 + 1$$

para todo entero $x$.

**Problema 3.** Ana y Beto juegan con una balanza de dos platillos. Tienen 2023 pesas etiquetadas con sus pesos, que son los números $1,\ 2, \ldots,\ 2023$, sin que ninguno de ellos se repita. Cada jugador, en su turno, elige una pesa que todavía no estaba colocada en la balanza y la coloca en el platillo con menos peso en ese momento. Si la balanza está en equilibrio, la coloca en cualquier platillo. Ana comienza el juego, y siguen de esta manera alternativamente hasta colocar todas las pesas. Ana gana si al finalizar la balanza se encuentra equilibrada, en caso contrario gana Beto. Determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describa la estrategia.

*Tiempo: 4 horas y 30 minutos*
*Cada problema vale 7 puntos*

XXXVIII OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Español, Dia 2

*Sábado, 9 de septiembre de 2023*

**Problema 4.** Sean $B$ y $C$ dos puntos fijos en el plano. Para cada punto $A$ del plano, fuera de la recta $BC$, sea $G$ el baricentro del triángulo $ABC$. Determine el lugar geométrico de los puntos $A$ tales que $\angle BAC + \angle BGC = 180°$.

**Nota:** El lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen la propiedad.

**Problema 5.** Una sucesión $P_1, \ldots, P_n$ de puntos en el plano (no necesariamente distintos) es *carioca* si existe una permutación $a_1, \ldots, a_n$ de los números $1, \ldots, n$ para la cual los segmentos

$$P_{a_1}P_{a_2},\ P_{a_2}P_{a_3},\ \ldots,\ P_{a_n}P_{a_1}$$

son todos de la misma longitud.

Determine el mayor número $k$ tal que para cualquier sucesión de $k$ puntos en el plano, se pueden añadir $2023 - k$ puntos de modo que la sucesión de 2023 puntos es carioca.

**Problema 6.** Sea $P$ un polinomio de grado mayor o igual que 4 con coeficientes enteros. Un entero $x$ se llama *$P$-representable* si existen números enteros $a$ y $b$ tales que $x = P(a) - P(b)$. Demuestre que, si para todo $N \geq 0$, más de la mitad de los enteros del conjunto $\{0, 1, \ldots, N\}$ son $P$-representables, entonces todos los enteros pares son $P$-representables o todos los enteros impares son $P$-representables.

*Tiempo: 4 horas y 30 minutos*
*Cada problema vale 7 puntos*