

Problema 1.

Para cada entero positivo n , se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n . Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

Problema 2.

Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c , se cumple que

$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x).$$

Problema 3.

Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Duración de la prueba: 4 horas y media.

Valor de cada problema: 7 puntos.

Problema 4.

Se tienen N monedas, de las cuales $N - 1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Problema 5.

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D . Sean M y N los puntos medios de BH y CH , respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y , respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q , demuestre que H , P , D y Q están en una misma circunferencia.

Problema 6.

Dado un conjunto X y una función $f : X \rightarrow X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$.

Para cada número real x , definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x .

Dado un número entero positivo n , decimos que $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pruebe que:

- Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.
- Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Duración de la prueba: 4 horas y media.

Valor de cada problema: 7 puntos.