5. Übung - Programmierung

Strukturelle Induktion und λ-Kalkül

SS 18

Strukturelle Induktion

Prinzip

- **Induktionsanfang**: zeige Behauptung für das "kleinste" Element
- **Induktionsschritt**:
  1. nimm an, die Behauptung gilt für jedes Element im Konstruktor einer zusammengesetzten Struktur $\Rightarrow$ **Induktionvorraussetzung/-hypothese**
  2. zeige, dass die Behauptung dann auch für die zusammengesetzte Struktur gilt

Kombinatoren

- λ-Terme ohne freie Variablen „kombinieren ihre gebundenen Variablen“

  $\Rightarrow$ Kombinatoren

- λ-Terme mit freien Variablen „schließen Werte in die Berechnung ein“

  $\Rightarrow$ Closures (siehe Programmiersprache)

Kombinatoren

- Nomenklatur: $f = \lambda x.term \ \Rightarrow \langle \boldsymbol{f} \rangle$
- gängige Kombinatoren:

Symbol	Aufruf	Bedeutung
$\langle pred \rangle$,$\langle succ \rangle$	$\langle succ \rangle$ x	Vorgänger, Nachfolger
$\langle add \rangle$, $\langle sub \rangle$	$\langle add \rangle$ x y	Summe, Differenz
$\langle mul \rangle$	$\langle mul \rangle$ x y	Produkt
$\langle ite \rangle$	$\langle ite \rangle$ b t e	If b then t else e
$\langle iszero \rangle$	$\langle iszero \rangle$ x	Wahrheitswert von x==0

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$
$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$
$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$

$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$
$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ f\ ))\ z)$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$

$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ f\ ))\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))))\ z)$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$
$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ f\ ))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))\ x)))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ (f(f\ x)))\ z)$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$

$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ f\ ))\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))))\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))\ x)))\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ (f(f\ x)))\ z)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.f(f(f(f\ x))))\ )\ z)$

Aufgabe 2

$$\langle pow\rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$$
$$\langle pow\rangle\langle 2\rangle$$

- $\langle pow\rangle\langle 2\rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ f\ ))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))\ x)))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ (f(f\ x)))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.f(f(f(f\ x))))\ )\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((f(f(f(f\ z))))\ ))$

Aufgabe 2

$\langle pow \rangle = (\lambda nfz.n\ (\lambda gx.g\ (g\ x))f\ z)$
$\langle pow \rangle \langle 2 \rangle$

- $\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = (\lambda nfz.\ n\ (\lambda gx.\ g\ (gx))\ f\ z)\ (\lambda hy.\ h\ (h\ y))$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda hy.\ h\ (h\ y))\ (\lambda gx.g(g(x))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.(\lambda y.(\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ y))\ f\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda gx.g(g\ x))\ f\ ))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda gx.g(g\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ ((\lambda x.f(f\ x))\ x)))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.(\lambda x.f(f\ x))\ (f(f\ x)))\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((\lambda x.f(f(f(f\ x))))\ )\ z)$
  $\Rightarrow_\beta (\lambda fz.((f(f(f(f\ z))))\ ))$
  $= \langle 4 \rangle$

Aufgabe 3

$$
\begin{array}{ll}
A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s & \forall s, t, u \in \lambda - \mathit{Terme} \\
B\ s\ t\ \ \Rightarrow^* t\ s & \forall s, t \in \lambda - \mathit{Terme} \\
C\ C \Rightarrow_\beta C\ C & \\
D \Rightarrow_\beta D & \\
E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E &
\end{array}
$$

Aufgabe 3

$A\ s\ t\ u \Rightarrow^* s$	$A = (\lambda stu.s)$
$B\ s\ t\ \ \Rightarrow^* t\ s$	$\mathrm{B} = (\lambda st.ts)$
$C\ C \Rightarrow_\beta C\ C$	$\mathrm{C}\ \mathrm{C} = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
$D \Rightarrow_\beta D$	$D = (C\ C)$
$E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$	$E\ E\ t = (\lambda xy.xyx)(\lambda xy.xyx)\ t$