

ООPython

Задача 4. Функциональные пространства

Задание

Определение классов

Часть 1

- создать классы для представления 3-х различных нормированных пространств со следующими правилами вычисления норм:
 - $\|f\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|$ (пространство $C[a; b]$)
 - $\|f\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)| + \max_{x \in [a; b]} |f'(x)|$ (пространство $C^1[a; b]$)
 - $\|f\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)| + \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| + \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|$ (пространство $C^2[a; b]$)
- создать классы для представления 3-х различных метрических пространств, с правилами вычисления метрик, порождаемых нормами соответствующих нормированных пространств $C[a; b]$, $C^1[a; b]$, $C^2[a; b]$

Часть 2

- создать класс для представления 1 предгильбертова пространства $E[a; b]$ со следующим правилом вычисления скалярного произведения: $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$
- создать класс для представления 1 нормированного пространства $N[a; b]$ с нормой, порождаемой скалярным произведением пространства $E[a; b]$
- создать класс для представления 1 метрического пространства $M[a; b]$ с метрикой, порождаемой нормой пространства $N[a; b]$

Минимизировать суммарное число строк кода с помощью наследования.

Использование классов

Протестировать работу классов на следующих функциях:

- $f(x) = \frac{5}{2+3x^2}$
- $f(x) = \frac{2}{5+\cos(x)}$
- $f(x) = \sqrt[3]{3+4x^2}$
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$

1. в нормированных пространствах $C^0[0;2], C^1[0;2], C^2[0;2]$ вычислить нормы всех функций
2. в соответствующих метрических пространствах вычислить попарные расстояния между всеми функциями (на отрезке $[0;2]$)
3. в пространстве $E[0;2]$ вычислить попарные скалярные произведения между всеми функциями
4. в пространстве $E[0;2]$ попарно вычислить углы между всеми функциями

Реализация

Поиск максимума функции

Производить на множестве значений функции, заданных в узлах равномерной сетки на отрезке. Шаг сетки $h = 10^{-3}$.

Вычисление значений производных

Для 1-й производной использовать формулу центральной разности (2-й порядок точности). Для вычислений использовать соответствующий класс, реализованный Вами в **Задаче 2**. Вычисление значений 2-й производной производить с помощью этого же класса. Шаг численного дифференцирования $h = 10^{-3}$.

Вычисление интеграла

Производить по формуле трапеций (2-й порядок точности). Для вычислений использовать соответствующий класс, реализованный Вами в **Задаче 3**. Шаг численного интегрирования $h = 10^{-3}$.

Примечание 1: для поиска максимума функции на отрезке разрешено использовать функцию `numpy.amax(array)`.

Примечание 2: «закрывать глаза» на использование значений функций вне отрезка $[a; b]$ в процессе вычисления производных.