7. Transformări de coordonate în plan

Def: Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și $g = (g_1, g_2): M \to \mathbb{R}^2$ o funcție vectorială de variabilele u și v.

a) Corespondența

$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases}, \quad \forall (u,v) \in M \qquad (1)$$

definește o transformare de coordonate, de la coordonatele curbilinii (u,v) la coordonatele carteziene (x,y).

b) Dacă g_1, g_2 sunt funcții de clasă C^1 pe M atunci spunem că transformarea (1) este de clasă C^1 pe M.

c) Dacă funcția $g: M \to g(M)$ este bijectivă cu inversa $g^{-1} = h = (h_1, h_2)$, atunci spunem că transformarea (1) este biunivocă pe M. În acest caz

$$\begin{cases} u = h_1(x,y) \\ v = h_2(x,y) \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in g(M) \qquad (2)$$

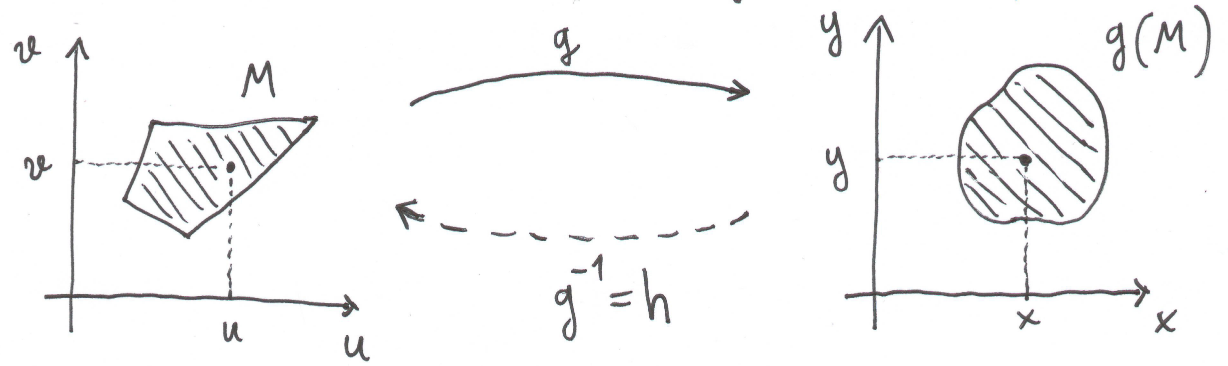
se numește transformarea inversă.

d) Determinantul

$$\det J(g)(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}, \quad \forall (u,v) \in M$$

se numește *jacobianul* transformării (1).

e) Dacă $\det J(g)(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in M$ atunci spunem că transformarea (1) este *nesingulară* pe M.



$$(u,v) \in M \longleftrightarrow (x,y) \in g(M)$$

Prop: Cu notațiile din definiția anterioară, dacă transformarea (1) este de clasă C^1, biunivocă și nesingulară atunci și transformarea inversă (2) va avea aceleași proprietăți.

Ex: (transformarea în coordonate polare)

Fie $\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \end{cases}$, $\forall (u,v) \in (0,+\infty) \times [0, 2\pi) = M$.

$g(u,v) = (u \cdot \cos v, u \cdot \sin v)$ este de clasă C^1 pe M.

$$\det J(g)(u,v) = \begin{vmatrix} \cos v & -u \cdot \sin v \\ \sin v & u \cdot \cos v \end{vmatrix} = u \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) = u$$

$\det J(g)(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in M \Rightarrow$ transformarea este nesingulară.

$x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) \Rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v \Rightarrow v = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$, unde

$$\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0,\ y\geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0,\ y\in\mathbb{R} \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0,\ y<0 \end{cases}$$

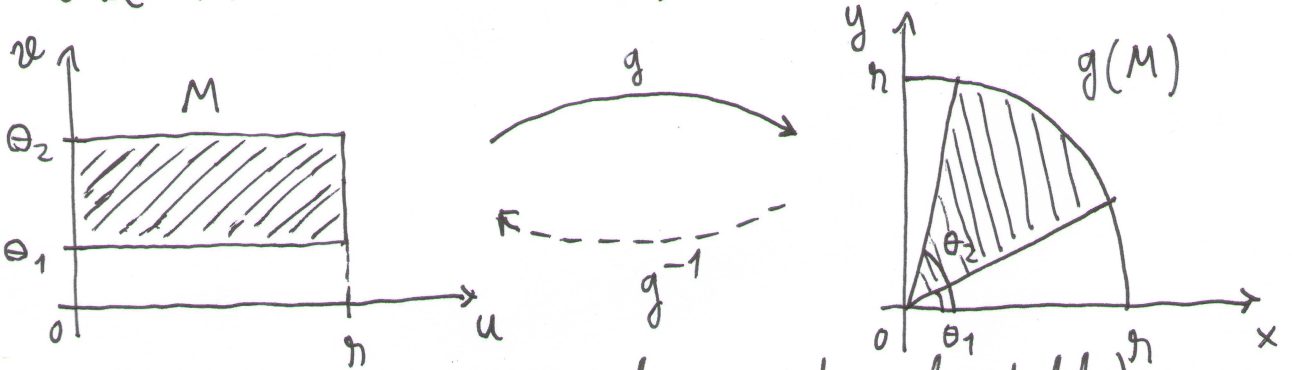
$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{Arctg}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \to [0, 2\pi)$

$\Rightarrow$ g este biunivocă pe M și $g^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)$

<u>Obs</u>: Transformarea în coordonate polare este de clasă C^1, biunivocă și nesingulară pe $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$.

Fie $M = [0, r]\times[\theta_1, \theta_2]$, $r>0$, $0\leq\theta_1<\theta_2\leq 2\pi$



$\boxed{\text{T}}$ (schimbarea de variabile în integrala dublă)

Fie $M\subseteq\mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și

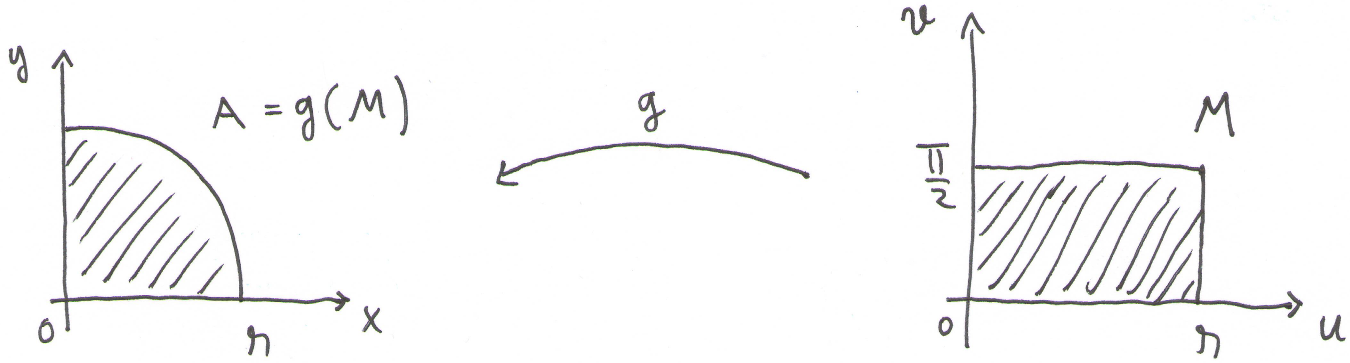
$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases}, \quad \forall\,(u,v)\in M, \quad g=(g_1, g_2)$$

o transformare de clasă C^1, biunivocă și nesingulară pe $\operatorname{int} M$. Dacă $f: M\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe M, atunci are loc formula

$$\iint_{g(M)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_M f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot \left| \det J(g)(u,v) \right| du\,dv$$

<u>Ex</u>: Calculați $\iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, unde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq r^2\}, \quad r > 0.$$



$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \end{cases}, \quad (u,v) \in (0,+\infty) \times (0, 2\pi)$$

$$M = [0, r] \times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_M e^{-u^2} \cdot u \cdot du\,dv = \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u^2} \cdot u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^r e^{-u^2} \cdot u\,du \right) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^{-u^2}}{2} \Bigg|_{u=0}^{u=r} dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-r^2}\right) dv = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-r^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

<u>Aplicație</u>: Integrala probabilităților și funcția Γ a lui Euler.

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ integrala probabilităţilor.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$

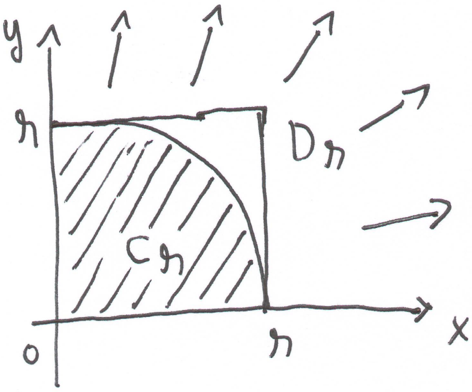
$\left.\begin{array}{l} p = 2 > 1 \\ \lambda = 0 < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow I$ integrală improprie convergentă.

Notăm $I(r) = \int_0^{r} e^{-x^2}\,dx$, $D_r = [0, r]^2$ şi

$C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $r > 0$ fixat.

$I = \lim\limits_{r\to\infty} I(r)$

$\lim\limits_{r\to\infty} D_r = [0, +\infty)^2 = \lim\limits_{r\to\infty} C_r$



$I^2 = \lim\limits_{r\to\infty} I(r)\cdot I(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \int_0^{r} e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{r} e^{-y^2}dy =$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \int_0^{r} e^{-x^2}\left(\int_0^{r} e^{-y^2}dy\right)dx = \lim\limits_{r\to\infty} \int_0^{r}\left(\int_0^{r} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx =$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \iint_{[0,+\infty)^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy =$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{C_r} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx\ ,\ \forall t>0$$

se numește <u>funcția Γ a lui Euler.</u>

$\Gamma(t)$ este convergentă, $\forall t>0$

$\Gamma(n+1)=n!\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

(seminar 8)

Se poate arăta că $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este funcție continuă.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}\,dx \underset{\substack{x=t^2,\ t>0\\ dx=2t\,dt}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}e^{-t^2}\cdot 2t\,dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\,.$$