Seminar 7

$\boxed{2.1.44.}$ Fie mulțimea $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$, $i^2 = -1$. Să se arate că $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ este un monoid în raport cu înmulțirea nr. complexe. Să se determine: $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^{\times}$

Soluție: $\boxed{1.}$ $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + adi + cbi - bd = \underbrace{ac-bd}_{\in \mathbb{Z}} + i\underbrace{(ad+cb)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$\Longrightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$\boxed{2.}$ $\bullet\ \forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$, $z_3 = e+if$

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Calcule $\Rightarrow$ asociativitatea

- $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$

„ · ” pe $\mathbb{C}$ este asociativă

$\Rightarrow$ „ · ” pe $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ este asociativă

$\boxed{3.}$ $\forall\, z \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $\exists\, e \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

a.î. $z \cdot e = e \cdot z = z$

$z = a+bi$, $e = e_1 + e_2 i$ $\quad a+bi$

$z \cdot e = z \Rightarrow (a+bi)(e_1+e_2 i) =$

$= a e_1 + \underline{a e_2 i} + \underline{b e_1 i} - b e_2 =$

$= a+bi$

$\Rightarrow a e_1 - b e_2 + i(a e_2 + b e_1) = a+bi$

$$\begin{cases} a e_1 - b e_2 = a \\ a e_2 + b e_1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a e_1 - b e_2 = a \\ b e_1 + a e_2 = b \end{cases}$$

$\Rightarrow e_1 = 1$ și $e_2 = 0$

$e = 1$

$1 \cdot z = z \Rightarrow 1 \cdot (a+bi) = a+bi$ „1"

$\Rightarrow (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}, \cdot)$ monoid

Fie $(M, \cdot)$ monoid și considerăm

$M^{\times} = \{x \in M \mid x$ este inversabil în $M\}$

$= \{x \in M \mid \exists\, x^{-1} \in M$ a.î. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} x = 1\}$

$z \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $\exists$ $z^{-1} \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

a.î. $z \cdot z^{-1} = \underline{z^{-1} \cdot z = 1}$,

$z = a+bi$, $z^{-1} = c+di$,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow (a+bi)(c+di)$

$ac - bd + i(bc+ad) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 & \mid \cdot a \\ bc + ad = 0 & \mid \cdot b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 c - abd = a \\ b^2 c + abd = 0 \end{cases}$$

$$c(a^2+b^2) = a$$

$$c = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad a^2+b^2 \neq 0$$

$$a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - bd = 1$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} - bd = 1$$

$$-bd = \frac{a^2+b^2}{1} - \frac{a^2}{a^2+b^2} \quad |:(-b)$$

$$d = -\frac{b^{\cancel{2}}}{(a^2+b^2)\cancel{b}} \Rightarrow d = -\frac{b}{a^2+b^2},$$

$$a^2+b^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow z^{-1} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{Z}} \cdot i$$

$$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^\times = \{a+bi \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ (a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0),\ a^2+b^2 / a,\ a^2+b^2 / b\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2 / a \\ a^2+b^2 / b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2+b^2 \in D_a \\ a^2+b^2 \in D_b \end{array}$$

$a^2+b^2 \in \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$, $\forall\ a,b \in \mathbb{Z}$

$a^2+b^2 \neq 0$

$\Rightarrow a^2+b^2=1$

$(a,b) \in \{(0,1);\ (1,0);\ (-1,0);\ (0,-1)\}$

$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^{\times} = \{i;\ 1;\ -1;\ -i\}$

$\boxed{2.1.45}$ Fie operația $*: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.
$(\mathbb{R}, *)$ grup? $(\mathbb{R}\setminus\{5\}, *)$ și $((5,\infty), *)$, $((-\infty,5), *)$ sunt grupuri?

<u>Rezolvare</u>: $x * y = (x-5)(y-5)+5$

- $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y \in \mathbb{R}$

$$x * y = \underbrace{(x-5)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{(y-5)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{5}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

- $x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = y * x$

$$x * y = (x-5)(y-5)+5 = (y-5)(x-5)+5$$
$$= y * x$$

$\Rightarrow$ comutativitatea

- $x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad (x*y)*z = x*(y*z)$

$(x*y)*z = [(x-5)(y-5)+5]*z =$

$= (x-5)(y-5)(z-5)+5$

$x*(y*z) = x*[(y-5)(z-5)+5] =$

$= (x-5)(y-5)(z-5)+5$

$\Rightarrow$ asociativitatea

- $\exists\, e \in \mathbb{R}$ a.î. $e*x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(e-5)(x-5)+5 = x$

$ex - 5x - 5e + 25 + 5 = x$

$(e-5)x - 5e + 30 = x$

$e-5 = 1$ și $\quad -5e+30 = 0$

$e = 6 \in \mathbb{R}$ $\quad\quad e = 6$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists\, x' \in \mathbb{R}$ a.î. $x * x' = 6$

$(x-5)(x'-5)+5 = 6 \ |-5$

$(x-5)\cdot(x'-5) = 1$

$x' - 5 = \frac{1}{x-5}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$x' = \frac{1}{x-5} + 5, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\Rightarrow$ $x=5$ nu este inversabil $\Rightarrow$ $(\mathbb{R},*)$ nu este grup

- $(\mathbb{R}\setminus\{5\},*)$ grup?

1. $\forall\ x,y\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$

$$x*y=\underbrace{(x-5)}_{\neq 0}\underbrace{(y-5)}_{\neq 0}+5\neq 5$$

$\Rightarrow$ $x*y\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$

2. asociativitatea ✓
3. $e=6\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$
4. $x'=\dfrac{1}{x-5}+5,\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$

$\Rightarrow$ $(\mathbb{R}\setminus\{5\},*)$ grup

- $((5,\infty),*)$ grup?

1. $\forall\ x,y\in(5,\infty)$

$$x*y=\underbrace{(x-5)}_{>0}\underbrace{(y-5)}_{>0}+5>5$$

$\Rightarrow x * y \in (5,\infty)$

2\. asociativitatea ✓

3\. $e = 6 \in (5,\infty)$

4\. $x' = \underbrace{\frac{1}{x-5}}_{>0} + 5 > 5 \quad , \forall\, x \in (5,\infty)$

$\Rightarrow ((5,\infty), *)$ este grup

• $((-\infty,5), *)$

$e = 6 \notin (-\infty,5)$

$\Rightarrow ((-\infty,5),*)$ <u>nu</u> este grup

<u>sau</u>: $\forall x,y \in (-\infty,5)\,, \quad x * y \in (-\infty,5)$

$$\left.\begin{array}{l} x<5 \Rightarrow x-5<0 \\ y<5 \Rightarrow y-5<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(x-5)(y-5) > 0$

$(x-5)(y-5) + 5 > 5$

$\Rightarrow x * y > 5$

$\Rightarrow x * y \notin (-\infty,5)$

$\boxed{2.1.53}$ Să se arate că grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe.

<u>Soluție</u>: • $(G_1, \circ)$ și $(G_2, *)$ grupuri

$f: G_1 \to G_2$ <u>izomorfism de grupuri</u>:

(1): $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$

(2): f bijectivă

• $G_1 \simeq G_2$ ($(G_1, \circ)$, $(G_2, *)$ sunt <u>izomorfe</u>) dacă între ele există cel puțin un izomorfism de grupuri.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x$

$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$

$\Rightarrow$ f morfism de la

$(\mathbb{R}, +)$ la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

- f inj ?

$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_1) = f(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ inj (I)

- f surj.

$\forall\ y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow e^x = y$

$x = \ln y$ (II)

$\forall\ y \in \mathbb{R}_+^*$

(I), (II) $\Rightarrow$ f bijectivă
Dar f morfism $\Bigg\}$ $\Rightarrow$

$\exists\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^x$
izomorfism de grupuri

$\Rightarrow (\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

$\boxed{2.1.54}$ Să se arate că $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arg x$ este un homomorfism de grupuri între $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ și să se determine $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$.

Soluție: Greșeala:

pt. $x = y = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

$$x \cdot y = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2 =$$

$$= \cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$$

$$f(x \cdot y) = \arg(x \cdot y) =$$

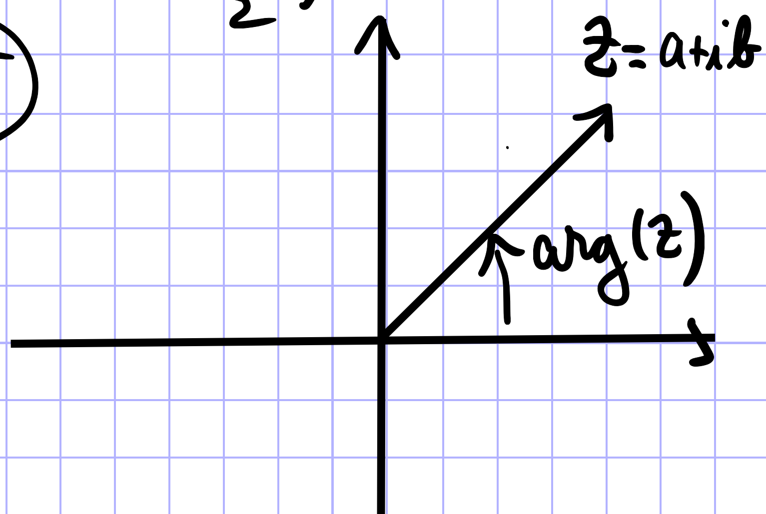
$$= \arg(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)) = \pi$$

$$f(x) + f(y) = \arg x + \arg y =$$

$$= 2\arg\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{3\pi}{\cancel{2}} = 3\pi$$

$$\pi \neq 3\pi$$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, \quad f(x) = \cos x + i \sin x$

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) \overset{?}{=} f(x) \cdot f(y)$

$\Longleftrightarrow \cos(x+y) + i \sin(x+y) \overset{?}{=}$

$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$

$\Longleftrightarrow \underline{\cos x \cos y} - \underline{\underline{\sin x \sin y}} +$

$+ i \sin x \cos y + i \sin y \cos x \overset{?}{=}$

$\underline{\cos x \cos y} + i \cos x \sin y +$

$+ i \sin x \cos y - \underline{\underline{\sin x \sin y}}$

$\Longrightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ este homomorfism

$\operatorname{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \}$

nucleul funcției

$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ (temă)

$f(x) = 1 \Longrightarrow \cos x + i \sin x = 1$

$x = 0$ convine

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x = 2k\pi \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$