SEMINARUL 13

Recapitulare

Problema (8.6)**.** Din punctul $C\,(10,-8)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Determinaţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de contact.

Soluţie. Întrucât, de data aceasta, nu ni se cer ecuaţiile tangentelor ci punctele de contact, procedăm altfel decât în cazul problemei precedente. Remarcăm, şi de data aceasta, că punctul C este situat în afara elipsei şi nu este situat pe una dintre tangentele verticale la aceasta.

Rescriem, mai întâi, ecuaţia elipsei sub forma

$$16x^2+25y^2-400=0.$$

Tangenta într-un punct oarecare $M_0(x_0,y_0)$ al elipsei se scrie sub forma

$$16xx_0+25yy_0-400=0.$$

Cum tangenta trebuie să treacă prin punctul C, coordonatele acestui punct trebuie să verifice ecuaţia tangentei, prin urmare avem

$$160x_0-200y_0-400=0$$

sau

$$4x_0-5y_0-10=0. \tag{13.0.1}$$

Noi vrem să determinâm coordonatele punctului M_0, prin urmare avem nevoie de încă o ecuaţie. Aceasta rezultă din faptul că punctul se află pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia elipsei. Suntem conduşi, aşadar, la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 16x_0^2+25y_0^2-400=0,\\ 4x_0-5y_0-10=0. \end{cases} \tag{13.0.2}$$

Sistemul (13.0.2) este uşor de rzolvat şi ne conduce la soluţiile

$$x_{01,2}=\frac{5}{4}\left(1\pm\sqrt{7}\right)\quad \text{şi}\quad y_{01,2}=-1\pm\sqrt{7}.$$

Aşadar punctele de intersecţie cu elipsa a celor două tangente din C sunt

$$M_1\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),-1+\sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),-1-\sqrt{7}\right).$$

Dreapta determinată de punctele de contact este dreapta M_1M_2:

$$\frac{x-\frac{5}{4}(1+\sqrt{7})}{\frac{5}{4}(1-\sqrt{7})-\frac{5}{4}(1+\sqrt{7})}=\frac{y-(-1+\sqrt{7})}{-1-\sqrt{7}-(-1+\sqrt{7})}$$

sau

$$\frac{x-\frac{5}{4}(1+\sqrt{7})}{\frac{5}{2}}=\frac{y-(-1+\sqrt{7})}{2},$$

de unde

$$2x-\frac{5}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)=\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}\left(-1+\sqrt{7}\right)$$

sau

$$2x-\frac{5}{2}y-5=0$$

sau, în fine,

$$M_1M_2: 4x-5y-10=0.$$

□

Problema (8.7)**.** O elipsă trece prin punctul $A(4,-1)$ şi este tangentă dreptei $x+4y-10=0$. Determinaţi ecuaţia elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sau

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \tag{13.0.3}$$

Ceea ce trebuie să facem este să determinăm semiaxele (sau, ceea ce este acelaţi lucru, pătratele lor). Avem nevoie, deci, de două ecuaţii. Prima o obţinem din condiţia ca punctul A să aparţină elipsei, adică

$$a^2+16b^2=a^2b^2. \tag{13.0.4}$$

Întrucât dreapta dată este tangentă la elipsă, sistemul de ecuaţii care ne dă punctul de intersecţie dintre dreaptă şi elipsă trebuie să aibă soluţie dublă, deoarece contactul de tangenţă înseamnă că dreapta şi elipsa au două puncte comune confundate. Acest sistem de ecuaţii este

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \\ x+4y-10=0. \end{cases}$$

Dacă înlocuim pe x din a doua ecuaţie în prima (adică punem în prima ecuaţie $x=-2(2y-5)$), obţinem ecuaţia de gradul doi în y

$$\left(a^2+16vb^2\right)y^2-80b^2y+b^2(100-a^2)=0.$$

Pentru ca sistemul de mai sus să aibă soluţie dublă (mai precis, să furnizeze puncte de contact confundate), discriminantul ecuaţie de gradul doi în y trebuie să se anuleze, adică trebuie să avem

$$\Delta\equiv 4a^2b^2\left(a^2+16b^2-100\right)=0.$$

Dar a şi b sunt semiaxele unei elipse, deci trebuie să fie numere reale strict pozitive, aşadar din condiţia de mai sus obţinem ecuaţia în a şi b

$$a^2 + 16b^2 = 100 \tag{13.0.5}$$

Aşadar, pentru a determina semiaxele elipsei care îndeplineşte cerinţele problemei, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii următor (pe care îl privim ca fiind un sistem în a^2 şi b^2):

$$\begin{cases} a^2 + 16b^2 = a^2b^2, \\ a^2 + 16b^2 = 100. \end{cases} \tag{13.0.6}$$

Sistemul (13.0.6) este foarte uşor de rezolvat şi ne conduce la soluţiile

$$a^2 = 80,\ b^2 = \frac{5}{4},$$

respectiv

$$a^2 = 20,\ b^2 = 5.$$

Ambele soluţii sunt acceptabile (în sensul că, în ambele situaţii, a^2 şi b^2 sunt numere strict pozitive) şi ne conduc la cele două soluţii ale problemei:

$$\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1,$$

respectiv

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

□

Problema (8.8)**.** Determinaţi ecuaţia unei elipse ale cărei axe coincid cu axele de coordonate şi care este tangentă dreptelor $3x - 2y - 20 = 0$ şi $x + 6y - 20 = 0$.

Soluţie. Considerăm elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Pentru a determina elipsa, trebuie să determminăm semieaxele lor, a şi b (sau, ceea ce este acelaşi lucru, pătratele lor). Vom stabili mai întâi o condiţie necesară şi suficientă ca o dreaptă dată prin ecuaţia generală

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangentă elipsei. După cum am mai văzut, această condiţie este echivalentă cu condiţia ca sistemul de ecuaţii care determină punctele de contact dintre elipsă şi dreaptă să aibă soluţie dublă. Este vorba despre sistemul

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ Ax + By + C = 0. \end{cases} \tag{13.0.7}$$

Să presupunem că, în a doua ecuaţie din sistemul (13.0.7), coeficientul B este nenul. Atunci putem scrie

$$y = -\frac{Ax + C}{B}$$

şin după înlocuirea în prima ecuaţie a sistemului, obţinem ecuaţia de gradul al doilea în x

$$\left(a^2A^2 + b^2B^2\right)x^2 + 2a^2ACx + a^2\left(C^2 - b^2B^2\right) = 0. \tag{13.0.8}$$

Condiţia pe care trebuie să o punem este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să se anuleze. Un calcul simplu ne conduce la

$$\Delta = 4a^2b^2B^2\left(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2\right). \tag{13.0.9}$$

Din relaţia (13.0.9) rezultă că Δ se anulează dacă şi numai dacă

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2. \tag{13.0.10}$$

Exact aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.ăţia (13.0.10) celor două drepte din enunţ şi obţinem, pentru a^2 şi b^2 sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 9a^2 + 4b^2 = 400, \\ a^2 + 36b^2 = 400. \end{cases} \tag{13.0.11}$$

Sistemul (13.0.11) este liniar în a^2 şi b^2 şi rezolvarea lui ne conduce la $a^2 = 40, b^2 = 10$, adică elipsa căutată are ecuaţia

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

□

Problema (8.17)**.** O hiperbolă trece prin punctul $M(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $9x + 2y - 15 = 0$. Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Căutăm, mai întâi, condiţia general ă pentru ca o dreaptă de ecuaţie

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangent ă unei hiperbole de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1.$$

Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $B \neq 0$. Atunci

$$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$\left(a^2A^2 - b^2B^2\right)x^2 + 2a^2ACx + a^2\left(b^2B^2 + C^2\right) = 0.$$

Condiţia de tangenţă impune ca discriminantul acestei ecuaţii să fie egal cu zero. Dar

$$\Delta = 4a^2b^2B^2\left(a^2A^2 - b^2B^2 - C^2\right) = 0.$$

Dar a şi B nu se anulează (ele sunt numere strict pozitive), în timp ce B este diferit de zero prin ipoteză. Prin urmare, dreapta este tangentă hiperbolei dacă şi numai dacă avem

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2.$$

Ecaxt aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.

În cazul nostru concret, condiţia de mai sus devine

$$81a^2 - 4b^2 = 225.$$

Aceasta este prima ecuaţie pentru determinarea pătratelor semiaxelor. A doua se obţine din condiţia ca punctul M să se afle pe hiperbolă, ceea ce ne conduce la

$$9a^2 - 6b^2 + a^2b^2 = 0.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii, obţinem $a^2 = 10/3$, $b^2 = 45/4$ sau $a^2 = 5$, $b^2 = 45$, de unde rezultă ecuaţiile celor două hiperbole care îndeplinesc condiţiile din enunţul problemei. □

Problema (8.20)**.** Să se determine ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că ea este tangentă dreptei $3x - 2y + 4 = 0$ şi determinaţi punctul de tangenţă.

Soluţie. Ecuaţia parabolei este de forma

$$y^2 - 2px = 0.$$

Vom stabili condiţia necesară şi suficientă pentru ca parabola să fie tangentă dreptei

$$Ax + By + C = 0.$$

din ecuaţia parabolei deducem imediat că

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia dreptei, obţinem

$$A \cdot \frac{y^2}{2p} + By + C = 0$$

sau

$$Ay^2 + 2pBy + 2pC = 0.$$

condiţia de tangenţă este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să fie egal cu zero, adică

$$4p^2B^2 - 8ACp = 0$$

sau

$$p^2B^2 - 2ACp = 0.$$

Cum p este parametrul parabolei, el nu se poate anula, deci condiţia de mai sus devine

$$pB^2 - 2AC = 0.$$

Scopul nostru este să determinăm p din condiţia de tangenţă. Dacă $B = 0$, adică dreapta este verticală, atunci fie nu avem soluţii (dacă $C \neq 0$), fie orice parabolă ne furnizează o soluţie, dacă $C = 0$. În acest ultim caz, problema este nedeterminată. Dacă $A = 0$, pe de altă parte, singura soluţie ar fi $p = 0$, care nu este acceptabilă (parabola nu are tangente paralele cu axa de simetrie!). Dacă nici A, nici B, nici C nu se anulează, atunci

$$p = \frac{2AC}{B^2}.$$

În cazul nostru concret, obţinem $p = 6$, deci ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 12x.$$

Dacă rezolvăm sistemul de ecuaţii format din ecuaţia parabolei, pe xcare tocmai am determinat-0 şi ecuaţia tangentei, obţinem punctul de contact $M_0\left(\frac{4}{3}, 4\right)$. $\square$

Problema (8.21)**.** Determinaţi ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că tangenta paralelă cu dreapta $5x - 4y - 2 = 0$ trece prin punctul $A(4, 7)$.

Soluţie. panta tangentei este $k = 5/4$. Ecuaţia tangentei de pantă $5/4$ este

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{2}{5}p.$$

Dacă impunem condiţia ca A să se afle pe tangentă, obţinem

$$7 = \frac{5}{4} \cdot 4 + \frac{2}{5}p,$$

de unde rezultă imediat că $p = 5$, adică ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 10x.$$

□

Problema (9.6)**.** Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Soluţie. Scăpăm, întâi, de numitori. Ecuaţia devine

$$x^2 - 4y^2 = 16z.$$

Descompunem ecuaţia:

$$(x + 2y)(x - 2y) = 16 \cdot z.$$

Atunci ecuaţiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeţei vor fi

$$\begin{cases} \lambda(x + 2y) = 16\mu, \\ \mu(x - 2y) = \lambda z, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \alpha(x - 2y) = 16\beta, \\ \beta(x + 2y) = \alpha z. \end{cases}$$

Începem prin a determina generatoarea din prima familie. Faptul că această generatoare este paralelă cu planul dat înseamnă că vectorul său director este perpendicular pe vectorul normal la planul dat. Ca să obţinem un vector director al dreptei, înmulţim vectorial vectorii normali la cele două plane care determină dreapta, $\mathbf{n}_{11}(1, 2, 0)$ (am împărţit cu λ) şi $\mathbf{n}_{12}(\mu, -2\mu, -\lambda)$. Avem

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ \mu & -2\mu & -\lambda \end{vmatrix} = (-2\lambda, \lambda, -4\mu).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(3, 2, -4)$. Condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan este, prin urmare,

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = -6\lambda + 2\lambda + 16\mu = -4\lambda + 16\mu,$$

de unde $\lambda = 4\mu$. Dacă punem $\mu = 1$, obţinem $\lambda = 4$, deci ecuaţiile generatoarei căutate devin

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

Trecem acum la generatoarea din cea de-a doua familie. De data asta, vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_{21}(1,-2,0)$ (am împărţit cu α) şi $\mathbf{n}_{22}(\beta,2\beta,-\alpha)$. Astfel, un vector director al generatoarei va fi

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{n}_{21}\times\mathbf{n}_{22}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-2&0\\\beta&2\beta&-\alpha\end{vmatrix}=(2\alpha,\alpha,4\beta).$$

Prin urmare, condiţia de paralelism între generatoare şi planul dat se poate scrie

$$0=\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}=6\alpha+2\alpha-16\beta=8\alpha-16\beta,$$

de unde rezultă că $\alpha=2\beta$. Dacă punem $\beta=1$, atunci $\alpha=2$, iar ecuaţiile generatoarei din cea de-a doua familie se vor scrie:

$$\begin{cases}x-2y-8=0,\\x+2y-2z=0.\end{cases}$$

□

Problema (9.7)**.** Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$$

care sunt paralele cu planul

$$x+y+z=0.$$

Soluţie. Suprafaţa este, în mod evident, un hiperboloid cu o pânză. Pentru a uşura calculele, scăpăm, mai întâi, de numitori. Ecuaţia devine

$$x^2+4y^2-9z^2=36.$$

Rescriem această ecuaţie sub forma

$$x^2-9z^2=36-4y^2.$$

Descompunem cei doi membrii în factori de gradul întâi şi obţinem

$$(x+3z)(x-3z)=(6+2y)(6-2y).$$

Astfel, ecuaţiile primei familii de generatoare vor fi

$$\begin{cases}\lambda(x+3z)=\mu(6+2y),\\\mu(x-3z)=\lambda(6-2y),\end{cases}$$

în timp ce pentru a doua familie de generatoare obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases}\alpha(x+3z)=\beta(6-2y),\\\beta(x-3z)=\alpha(6+2y).\end{cases}$$

Vom determina, mai întâi, generatoarea din prima familie care îndeplineşte condiţiile din enunţ. Începem prin a rescrie sistemul de ecuaţii sub forma

$$\begin{cases}\lambda x-2\mu y+3\lambda z-6\mu=0,\\\mu x+2\lambda y-3\mu z-6\lambda=0.\end{cases}$$

Vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea corespunzătoare parametrilor sunt $\mathbf{n}_{11}(\lambda, -2\mu, 3\lambda)$, respectiv $\mathbf{n}_{12}(\mu, 2\lambda, -3\mu)$. Un vector director al generatoarei va fi, prin urmare, vectorul

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda & -2\mu & 3\lambda \\ \mu & 2\lambda & -3\mu \end{vmatrix} = \left(6\left(\mu^2 - \lambda^2\right), 6\lambda\mu, 2\left(\mu^2 + \lambda^2\right)\right).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(1, 1, 1)$. Astfel, condiţia de paralelism dintre generatoare şi plan se va scrie

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = 6(\mu^2 - \lambda^2) - 6\lambda\mu + 2(\mu^2 + \lambda^2) = 8\mu^2 + 6\lambda\mu - 4\lambda^2 = 2(4\mu^2 + 3\lambda\mu - 2\lambda^2).$$

Trebuie, prin urmare, să rezolvăm ecuaţia

$$4\mu^2 + 3\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0,$$

pentru a determina relaţia dintre λ şi μ. Această ecuaţie, după cum se vede, este o ecuaţie omogenă de gradul al doilea, pe care o vom rezolva cu metoda standard. Anume, împărţim ecuaţia cu λ^2 şi notăm $t = \dfrac{\mu}{\lambda}$. Atunci ecuaţia devine

$$4t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt, după cum remarcăm imediat,

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}. \tag{*}$$

Putem alege $\lambda = 1$, de unde obţinem $\mu = t_{1,2}$. Aşadar, ecuaţiile generatoarelor din prima familie care sunt paralele cu planul dat sunt

$$\begin{cases} x - 2t_{1,2}y + 3z - 6t_{1,2} = 0, \\ t_{1,2}x + 2y - 3t_{1,2}z - 6 = 0 \end{cases}$$

unde $t_{1,2}$ sunt valorile date de formula (*). Este de remarcat că, datorită gradului înalt de simetrie a hiperboloidului cu o pânză, există *două* generatoare din prima familie care sunt paralele cu planul dat.

Trecem acum la generatoarele din cea de-a doua familie. Rescriem ecuaţiile lor sub forma

$$\begin{cases} \alpha x + 2\beta y + 3\alpha z - 6\beta = 0, \\ \beta x - 2\alpha y - 3\beta z - 6\alpha = 0. \end{cases}$$

Vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_{21}\left(\alpha, 2\beta, 3\alpha\right)$, respectiv $\mathbf{n_{22}}(\beta, -2\alpha, -3\beta)$, prin urmare un vector director al generatoarei este

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_{21} \times \mathbf{n}_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha & 2\beta & 3\alpha \\ \beta & -2\alpha & -3\beta \end{vmatrix} = \left(6\left(\alpha^2 - \beta^2\right), 6\alpha\beta, -2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right).$$

Ca şi în cazul celeilalte familii de generatoare, şi aici condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan se va scrie sub forma

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 2\left(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\beta^2\right).$$

Avem, astfel, de data aceasta, ecuaţia omogenă

$$2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

care, după ce punem $s = \dfrac{\alpha}{\beta}$, ne conduce la ecuaţia de gradul al doilea

$$2s^2 + 3s - 4 = 0,$$

cu soluţiile

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}. \tag{**}$$

Dacă punem $\beta = 1$, obţinem $\alpha = s_{1,2}$. Aşadar, ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie care sunt paralele cu planul dat sunt

$$\begin{cases} s_{1,2}x + 2y + 3s_{1,2}z - 6 = 0, \\ x - 2s_{1,2}y - 3z - 6s_{1,2} = 0, \end{cases}$$

unde numerele $s_{1,2}$ sunt date de formula (**). Şi aici sunt, desigur, două generatoare paralele cu planul dat. $\square$

Problema (9.8)**.** Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia planului tangent într-un punct oarecare al elipsoidului este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

prin urmare ecuaţia planului tangent prin tăieturi se va scrie

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_0}} - 1 = 0.$$

Astfel, tăieturile planului pe axe sunt $\dfrac{a^2}{x_0}$, $\dfrac{b^2}{y_0}$ şi $\dfrac{c^2}{z_0}$.

Cerinţa problemei este ca tăieturile să aibă aceeaşi lungime, prin urmare coordonatele punctului de tangenţă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{|x_0|} = \dfrac{b^2}{|y_0|} = \dfrac{c^2}{|z_0|}, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Ne vom ocupa exclusiv de cazul în care toate coordonatele sunt strict pozitive. Restul soluţiilor se obţin în acelaşi mod (în fapt, ele sunt simetricele acestei soluţii relativ la axele de coordonate, planele de coordonate şi originea coordonatelor).

În această situaţie, primele două ecuaţii se pot scrie sub forma

$$y_0 = \frac{b^2}{a^2}x_0,$$

respectiv

$$z_0 = \frac{c^2}{a^2}x_0.$$

Dacă înlocuim în cea de-a treia ecuaţie, găsim:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^4}+\frac{c^2x_0^2}{a^4}=1,$$

ceea ce ne conduce la soluţia

$$x_0=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad y_0=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad z_0=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

□

Problema (10.4)**.** Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $A(0,-a,0)$ ş având curba directoare $x^2=2py,\ z=h.$

Soluţie. Începem, ca de obicei, cu ecuaţiile vârfului:

$$(V)\begin{cases}x=0,\\y+a=0,\\z=0,\end{cases}$$

care ne conduc la ecuaţiile generatoarelor,

$$(G_{\lambda,\mu})\begin{cases}y+a=\lambda x,\\z=\mu x.\end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de intersecţţie dintre generatoare şi curba dată, începem prin a rezolva sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile generatoarelor şi cea de-a doua ecuaţie a curbei directoare:

$$\begin{cases}y+a=\lambda x,\\z=\mu x,\\z=h.\end{cases}$$

Obţinem imediat că

$$x=\frac{h}{\mu},$$

în timp ce

$$y=\lambda x-a=\frac{\lambda h}{\mu}-a=\frac{h\lambda-a\mu}{\mu}.$$

Dacă înlocuim acum aceste valori în prima ecuaţie a curbei directoare, obţinem condiţia de compatibilitate

$$\frac{h^2}{\mu^2}-\frac{2p(h\lambda-a\mu)}{\mu}=0$$

sau

$$2pa\mu^2-2ph\mu\lambda+h^2=0.$$

Dacă înlocuim, în condiţia de compatibilitate de mai sus, parametrii din ecuaţiile generatoarelor, obţinem

$$2pa\left(\frac{z}{x}\right)^2-2ph\frac{z}{x}\cdot\frac{y+a}{x}+h^2=0$$

sau

$$2paz^2-2phz(y+a)+h^2x^2=0,$$

care este ecuaţia suprafeţei conice căutate. □

Problema (10.6)**.** Să se scrie ecuaţia cilindrului circumscris sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ştiind că generatoarele sale fac unghiuri egale cu cele trei axe de coordonate.

Soluţie. În mod evident, o directoare a acestei suprefeţe este dreapta

$$(\Delta):\ x = y = z,$$

care se poate scrie şi sub forma

$$(\Delta): \begin{cases} x - y = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Astfel, ecuaţiile generatoarelor se pot scrie sub forma

$$(G_{\mu,\nu}): \begin{cases} x - y = \lambda, \\ x - z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, punem condiţia ca generatoarele să fie tangente sferei. Din ecuaţiile generatoarelor scoatem pe y şi z în funcţie de x şi înlocuim în ecuaţia sferei. Avem

$$x^2 + (x - \lambda)^2 + (x - \mu)^2 = 1$$

sau

$$3x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0.$$

Condiţia de tangenţă se traduce prin condiţia ca această ecuaţie să aibă discriminantul egal cu zeo, adică

$$4(\lambda + \mu)^2 - 12(\lambda^2 + \mu^2 - 1) = 0$$

sau

$$2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu - 3 = 0.$$

O altă modalitate de a determina condiţia de compatibilitate este să impunem ca distanţa de la centrul sferei la generatoare să fie egală cu raza sferei (adică cu 1).

Centrul sferei este $O(0, 0, 0)$, iar un punct de pe generatoare este, de exemplu, $M(0, -\lambda, -\mu)$. Un vector director al oricărei generatoare este $\mathbf{v}(1, 1, 1)$, deci condiţia de ompatibilitate se traduce prin condiţia

$$\frac{\|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

Dar

$$\mathbf{r}_M \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\lambda & -\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\mu - \lambda, -\mu, \lambda),$$

deci

$$\|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}\| = \sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu},$$

în timp ce $\|\mathbf{v} = \sqrt{3}$. Condiţia de compatibilitate se va scrie, deci

$$\frac{\sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu}}{\sqrt{3}} = 1,$$

condiţie care, după ridicarea la pătrat, ne conduce exact la condiţia stabilită mai sus.

Ne întoarcem acum la determinarea ecuaţiei suprafeţei cilindrice. În acest scop, înlocuim în condiţia de compatibilitate λ şi μ sin ecuaţiile generatoarelor. Obţinem

$$2(x - y)^2 + 2(x - z)^2 - 2(x - y)(x - z) - 3 = 0$$

sau

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 3 = 0.$$

□

Problema (10.8)**.** Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide generate de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul $x + z = 0$, se sprijină pe axa Ox şi pe cercul $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Soluţie. Ecuaţiile axei Ox sunt

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

deci ecuaţiile generatoarelor (drepte care trec prin Ox şi sunt paralele cu planul dat) vor fi

$$\begin{cases} y = \lambda z, \\ x + z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul

$$\begin{cases} y = \lambda z, \\ x + z = \mu, \\ z = 0, \end{cases}$$

format din ecuaţiile generatoarelor şi cea mai simplă dintre ecuaţiile curbei directoare.

Obţinem imediat $x = \mu$, $y = z = 0$, deci, după înlocuirea în cealaltă ecuaţie a curbei directoare, condiţia de compatibilitate devine

$$\mu^2 = 1.$$

Astfel, după ce înlocuim parametri idin ecuaţiile generatoarelor, ecuaţia suprafeţei conoide va fi

$$(x + z)^2 = 1$$

sau

$$x + z = \pm 1,$$

adică suprafaţa se reduce la o reuniune de două plane paralele. □

Problema (10.9)**.** Să se afle ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea dreptei $x - y = a, z = 0$ în jurul dreptei $x = y = z$.

Soluţie. Generatoarele suprafeţei de rotaţie sunt o familie de cercuri, care, la rândul lor, se obţin ca intersecţii dintre sfere de rază variabilă cu centrul pe axa de rotaţie şi plane variabile, perpendiculare pe axa de rotaţie. În cazul nostru, axa de rotaţie trece prin origine, deci putem considera sfere cu centrul în origine. Astfel, generatoarele se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu}) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a găsi condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile curbei directoare şi ecuaţia planului perpendicular pe axa de rotaţie, adică sistemul

$$\begin{cases} x - y = a, \\ z = 0, \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Obţinem imediat că $x = \dfrac{\mu + a}{2}, y = \dfrac{\mu - a}{2}, z = 0$. Dacă înlocuim în ecuaţia sferei, obţem

$$\left(\frac{\mu + a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu - a}{2}\right)^2 = \lambda^2$$

sau
$$\mu^2 - 2\lambda^2 + a^2 = 0.$$
Aceasta este condiţia de compatibilitate pe care o căutam. Pentru a găsi ecuaţia suprefeţei de rotaţie, înlocuim în condiţia de compatibilitate λ şi μ daţi de ecuaţiile generatoarelor. Această ecuaţie se va scrie, prin urmare, sub forma
$$(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2+z^2) + a^2 = 0$$
sau
$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz-a^2 = 0.$$
□

Problema (10.17)**.** Să se afle ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea curbei $x^2+y^2 = z^3, y = 0$ în jurul axei Oz.

Soluţie. Ecuaţiile cercurilor generatoare sunt
$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \lambda^2, \\ z = \mu. \end{cases}$$
Dacă adăugăm acestui sistem a doua ecuaţie a curbei directoare, obţinem sistemul
$$x^2+y^2+z^2 = \lambda^2, z = \mu, y = 0.$$
Din acest sistem, avem imediat $x^2 = \lambda^2 - \mu^2$, $y = 0$ şi $z = \mu$. După înlocuirea în prima ecuaţie a curbei directoare, pbţinem condiţia de compatibilitate sub forma
$$\lambda^2 - \mu^2 = \mu^3.$$
După substituirea lui λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor, obţinem ecuaţia suprafeţei de rotaţie:
$$x^2+y^2+z^2-z^2 = z^3$$
sau
$$x^2+y^2 = z^3.$$
□

Problema (11.6)**.** Se consideră pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$. Demonstraţi că patrulaterul $A'B.C'D'$, cu $A'\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), B'\left(3+\frac{3\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C'\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), D'\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este un dreptunghi şi indicaţi o secvenţă de transformări geometrice care transformă pătratul în dreptunghi.

Soluţie. Un calcul simplu ne arată că $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, deci patrulaterul $A'B"C'D'$ este un paralelogram. Pe de altă parte, $\overrightarrow{B'C'} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, de aceea $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$, adică acest paralelogram este un dreptunghi.

Vrem să transformăm pătratul $ABCD$ în dreptunghiul $A'B'C'D'$ astfel încât imaginea lui A să fie A', imaginea lui B să fie B', etc. În acest scop, scalăm, mai întâi pătratul astfel încât să se transforme într-n dreptunghi congruent cu cel dat, apoi mutăm acest dreptunghi peste dreptunghiul $A'B'C'D'$.

Remarcăm că $A'B' = 4$, în timp ce $B'C' = 2$. Astfel, trebuiesă aplicăm pătratului dat o scalare, în raport cu centrul său, de factor 2 în direcţie orizontală şi de factor 1 în direcţie verticală (pentru că latura pătratului este egală cu 2). Centrul pătratului este mijlocul segmentului AC, adică punctul $M(1, 1)$. Prin urmare, prima transformare este scalarea neuniformă

$$T_1 = \text{Scale}(2, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Următorul pas este să rotim dreptunghiul obţinut, tot în jurul lui M, astfel încât laturile sale să devină paralele cu laturile dreptunghiului $A'BÇ'D'$. Unghiul dintre cele două direcţii este unghiul dintre axa Ox şi vectorul $\overrightarrow{A'B'}$, şi se observă imediat că acest unghi este de $45°$. Astfel, cea de-a doua transformare este rotaţia de unghi $45°$ în jurul punctului $M(1, 1)$. Se obţine matricea

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În sfîrşit, dreptunghiul rotit (care are, în continuare, centrul în M) se translatează astfel încât centrul său să coincidă cu centrul dreptunghiului $A'B'Ç'D'$, centru care se află în mijlocul $M'(3, -1)$ al segmentului $A'C'$. Astfel, translaţia trebuie să fie făcută cu vectorul $\overrightarrow{MM'}(2, -2)$, adică are matricea

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel, transformarea pe care o căutăm este transformarea

$$T = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Problema (11.9)**.** Determinaţi imaginea triunghiului ABC, cu $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$ prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1, 2)$ relativ la punctul B, urmată de o rotaţie de $30°$ în jurul punctului $Q(1, 1)$.

Soluţie. Matricea scalării este

$$T_1 = \text{Scale}(1, 1, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

în timp ce matricea rotaţiei este

$$T_2 = \text{Rot}(1, 1, 30°) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă facem mai întâi scalarea, apoi rotaţia, obţinem transformarea

$$T = T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imaginea triunghiului este dată de

$$(A'B'C') = T \cdot (ABC) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \sqrt{3} & 1 & 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Problema (11.11)**.** Demonstraţi că ordinea în care se fac transformările este importantă aplicând triunghiului de vârfuri $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$:

(a) o rotaţie de unghi $45°$ în jurul originii, urmată de o translaţie de vector $(1,0)$;

(b) o translaţie de vector $(1,0)$, urmată de o rotaţie de unghi $45°$ în jurul originii.

Soluţie. Matricea unei rotaţii de $45°$ în jurul originii este

$$T_1 = \mathrm{Rot}(0,0,45°) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

în timp ce matricea translaţiei de vector $(1,0)$ este

$$T_2 = \mathrm{Trans}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea primei transformări (rotaţie urmată de translaţie) este

$$T = T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar imaginea triunghiului prin acxeastă transformare este

$$(A'B'C') = T.(ABC) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea celei de-a doua transformări (translaţie urmată de rotaţie), este

$$T = T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar imaginea triunghiului prin această transformare este

$$(A''B''C'') = T' \cdot (ABC) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observă că cele două imagini nu coincid. □

Problema (11.13)**.** Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia axei Ox, de unghi θ cu $\operatorname{tg}\theta = 3$.

Soluţie. Matricea transformării este

$$T = \operatorname{Shear}(0,0,\mathbf{i},\theta) = \begin{pmatrix} I_2 + \operatorname{tg}\theta \left(\mathbf{i}^{\perp} \otimes \mathbf{i}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că

$$\mathbf{i}^{\perp} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci matricea transformării devine

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imaginea dreptunghiului prin forfecare va fi dată de

$$(A'B'C'D') = T \cdot (ABCD) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

În problemele care urmează, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1,2,2)$, $B(2,4,3)$, $C(4,3,2)$.

Problema (12.12)**.** Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi 30°, relativ la planul care trece prin punctele $O(0,0,0)$, $P(1,1,1)$, $Q(1,3,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,-1,0)$.

Soluţie. Formula pentru matricea de transformare prin forfecare este

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) & -\operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem nevoie, prin urmare, de un versor normal la planul de forfecare, de un punct din acest plan, precum şi de un versor al direcţiei de forfecare. Vom alege ca punct din plan punctul O, ca urmare matricea forfecării de va reduce la

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina un verso normal la plan, determinăm, mai întâi, un vector normal. Acesta se poate obţine calculând produsul vectorial al vectorilor $\overrightarrow{OP}(1,1,1)$ şi $\overrightarrow{OQ}(1,3,2)$, care sunt neparaleli şi se află, ambii, în planul de forfecare. Obţinem, în ptimă instanţă, vectorul normal

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = (-1,-1,2),$$

care ne conduce la versorul normal

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Versorul direcţiei de forfecare este versorul asociat vectorului $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Produsul tensorial $\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}$ este dat de

$$\mathbf{n} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum $\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$, rezultă că

$$\operatorname{tg} 30^\circ \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

prin urmare

$$I_3 + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În final, aşadar,

$$\operatorname{Shear}(O, \mathbf{n}, \mathbf{u}, 30^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imaginea triinghiului prin forfecare este dată de

$$(A'B'C') = \operatorname{Shear}(O, \mathbf{n}, \mathbf{u}, 30^\circ) \cdot (ABC) = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 2 & \frac{7}{2} \\ \frac{11}{6} & 4 & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Problema (12.16)**.** Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $60°$ în jurul dreptei

$$(\Delta):\begin{cases} x-y+z-1=0,\\ 2x+y=0.\end{cases}$$

Problema (12.17)**.** Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2,5,3)$, de factori de scală $(2,1,3)$.