

$x \rightarrow 0$

克劳 公

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2!}x^3 + o(x^3),$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), \quad a^x = 1 + x \ln a + \frac{1}{2!}x^2 (\ln a)^2 + \frac{1}{3!}x^3 (\ln a)^3 + o(x^3),$$

Formul

$$f(x) = x^2 \ln(1+x), \text{求} f^{(n)}(0) \quad (n > 3)$$

$$\text{解: } f^{(n)}(0) = n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+x)}{x^n}$$

$$\text{根据} \ln(1+x) \text{级数展开后, 有 } \frac{x^2 \ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}}{x^n}$$

$$\text{当分子上方的} n = n-2 \text{时, 在消除分母} x^n, \text{有} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+x)}{x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$$

$$\text{所以 } ans = n! \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$$

Example2

$$f(x) = (1-x^m)^n, \text{求} f^{(n)}(1)$$

$$\text{解: } f^{(n)}(1) = n!(-1)^n \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^m - 1}{x - 1} \right)^n$$

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} \sim \sum_{i=0}^{m-1} x^i$$

$$\text{因为} x \rightarrow 1, \text{ 所以 } \frac{x^m - 1}{x - 1} = m$$

$$ans = n!(-1)^n \cdot m^n$$

Example3

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}, \text{求} f^{(100)}(0)$$

$$\text{解: } f(x) = 1 - \frac{x+x^2}{1+x+x^2}$$

$$f^{(n)}(0) = -1 \cdot (3n+1)! \cdot \frac{(x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}}{x^{3n+1}}$$

$$ans = 100! \cdot (-1) \cdot (1) = -100!$$

Example4

$$\text{设函数} f(x) = (x+1)^n \cdot e^{-x^2}, \text{求} f^{(n)}(-1)$$

$$\text{解: } f(x) = (x+1)^n \cdot \frac{(x+1)^n \cdot e^{-x^2}}{(x+1)^n}$$

$$\text{所以, } f^{(n)}(-1) = n! \cdot e^{-x^2}|_{x=-1} = \frac{n!}{e}$$

$$ans = \frac{n!}{e}$$

二 偏

Example1

$$\text{设} z = f(x^2 - y^2, xy), \text{且} f(u, v) \text{有连续的二阶偏导数, 则} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$\text{解: } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1 + yf_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1 + xf_2 \end{cases}$$

$$\text{小技巧(限选填): } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =>$$

$$\begin{aligned} I &= (2xf_1 + yf_2)_y + (2xf_1 + yf_2) \cdot (-2yf_1 + xf_2) \\ &= f_2 - 4xyf_{11} + 2(x^2 - y^2)f_{12} + xyf_{22} \end{aligned}$$

些 美 分

$$\begin{aligned} 1. \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \\ 2. \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx \\ 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \\ 4. \int_0^\pi f(\sin x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{当 } f(x) (m \leq f(x) \leq M) \text{ 有界, } &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0 \\ 2. \text{当 } f'(x) \text{ 连续 (闭区间连续, 则有界), } &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{积分恒等式: } \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(a+b-x) dx \\ \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2n+1} dx &= 0 \end{aligned}$$

函 分

任意一个有理真分式 $\frac{b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0}{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0} (n > m)$ 可分解成

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k} (k=2, 3, \cdots), \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i} (i=2, 3, \cdots)$$

这四类部分分式的和, 并且这四类部分分式的积分都可以求出!

$$\int \frac{1}{1+x^3} dx = \int \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2} dx$$

三 函 分

该类积分的处理思想就是去二角变成有理函数的积分。

被积函数是 $R(\sin x, \cos x)$, 其中 $R(x, y)$ 为 x, y 的二元有理函数。

$$\begin{aligned} 1. \text{若 } R(\sin x, -\cos x) &= -R(\sin x, \cos x), \text{ 则原积分可化为 } \int f(\sin x) d(\sin x) \text{ 或 } \int f(\csc x) d(\csc x). \\ 2. \text{若 } R(-\sin x, \cos x) &= -R(\sin x, \cos x), \text{ 则原积分可化为 } \int f(\cos x) d(\cos x) \text{ 或 } \int f(\sec x) d(\sec x). \\ 3. \text{若 } R(-\sin x, -\cos x) &= R(\sin x, \cos x), \text{ 则原积分可化为 } \int f(\tan x) d(\tan x) \text{ 或 } \int f(\cot x) d(\cot x) \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 为一元有理函数, 这样就可以消去三角函数, 将原分转换成有理函数的积分:

Example1

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx \\ &= - \int \frac{d \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos^4 x} \end{aligned}$$

Example2

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin^3 x + \sin x} \\ &= - \int \frac{d \cos x}{\sin^4 x + \sin^2 x} \\ &= - \int \frac{d \cos x}{(1 - \cos x)^2 + 1 - \cos^2 x} \end{aligned}$$

Example3

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{5 + 8 \sin x \cos x} \\ &= \int \frac{d \tan x}{5 \sec^2 x + 8 \tan x} \\ &= \int \frac{d \tan x}{5(1 + \tan^2 x) + 8 \tan x} \end{aligned}$$

Example4

$$\begin{aligned} & \int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cdot \cos x} dx \\ &= \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d \tan x \\ &= \int \ln \tan x d \ln \tan x \end{aligned}$$

万 公

$$\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t, \text{ 则 } dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}, \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

三 反

Example1

$$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Example2

$$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

变 分

Example1

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$

$$\text{引理: } \int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

解: 化简分母, 根据洛必达对分子分母求导可得 \Rightarrow

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f(t)dt - 2 \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(u)du} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f(t)dt + 2xf(x) - 2xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = 1, \text{ 其中 } \xi \text{ 介于 } 0, x \text{ 之间} \end{aligned}$$

注意: 这里最后一步不能再次进行洛必达, 因为函数连续不意味着可导, 利用积分中值定理即可。

二 分

Example1

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

解: 因为 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$, $\frac{x^b}{\ln x} - \frac{x^a}{\ln x} = \int_a^b (\frac{x^t}{\ln x})' dt = \int_a^b x^t dt$

所以 $I = \int_0^1 dx \int_a^b x^t dt = \int_a^b dt \int_0^1 x^t dx = \int_a^b \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{a+1}{b+1}$

Example2

Method1:凑微分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

解: $I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b -e^{-xt} dt = \int_a^b (-\frac{e^{-xt}}{t}) \Big|_0^{+\infty} dt = \int_a^b \frac{0 - (-\frac{1}{t})}{1} dt = \ln \frac{b}{a}$

Froullani 分

Method2: (Froullani) 分公

$$\int_0^{+\infty} f(bx) - f(ax) dx$$

$$\begin{aligned}
& \text{已知 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \sin(x+y)}{x(x+y)} dx dy \\
= & \text{解: 令 } \overline{F}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, F'(x) = \frac{\sin x}{x}, I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \\
& = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \\
& = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right) d \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \\
& = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} \\
& = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$



$$\oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Example1

求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$, 其中 a, b 为正常数, L 为从

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \oint_{L+OA} - \int_{OA} \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\sigma - \int_0^{2a} (-bx)dx \\ &= (b-a) \iint_{D_1} d\sigma + 2a^2b \\ &= (b-a) \frac{\pi a^2}{2} + 2a^2b \end{aligned}$$

Example2

挖洞法

计算曲线积分 $I = \oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R > 1$)

解: 我们可以看到所求积分内含有奇点(未被定义的点), 所以我们得采取'挖洞法'(遵循 $L_1: 4$

设函数 $f(x, y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线 $\int_L 2xydx + Q(x, y)dy$ 与路径无关, 并且对于任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x, y)dy, \text{求} Q(x, y)。$$

解: $Q'_x(x, y) = 2x, Q(x, y) = x^2 + f(y)$
 $\Rightarrow \int_0^1 (t^2 + f(y))dy = \int_0^t (1 + f(y))dy \Rightarrow f(t) = 2t - 1$
所以, $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$

分定

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{\partial\Omega} P dydz + Q dzdx + R dx dy$$

中值定理

若 $f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在, 则对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 和 $y \in [f'(x_1), f'(x_2)]$, $\exists c \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(c) = y$.

Example1

设 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内可导, 证明:
(1)存在 $\xi \in (-2, 2)$, 使得 $\xi(1 - \xi)f'(\xi) + 1 - 2\xi = 0$
(2)存在 $\xi \in (-2, 2)$, 使得 $\xi(1 - \xi)f'(\xi) + 1 - 3\xi = 0$

解: (1) $f'(x) + \frac{1 - 2x}{x - x^2} = 0$, 对等式左右两边分别积分 $\Rightarrow \int f'(x)dx + \int \frac{d(x - x^2)}{x - x^2} = C_1$
 $e^{f(x)} \cdot (x - x^2) = C_2$, 于是我们构造: $F(x) = e^{f(x)} \cdot x(1 - x)$
因为 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理 $\Rightarrow F(x) = 0 (x \in (0, 1))$
对 $F(x)$ 求导, 易得 $\xi(1 - \xi)f'(\xi) + 1 - 2\xi = 0$
(2)同上。

Example2

设 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上二阶可导, $f(0) = f'(0), f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,
证明:存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1 - 2\xi}$.

解: 这里我们有两种方式得到构造的函数:
1.通过这个二阶微分方程找到 y, y' 之间的联系改造
2.通过表格法
这里我们采用第二种方式:

| | | |
|----------|---------|--------|
| $1 - 2x$ | -2 | 0 |
| $f''(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ |

$(1 - 2x)f'(x) + 2f(x) = 3f(x) + C$
我们构造函数 $F(x) = (1 - 2x)f'(x) - f(x) = C$, 因为 $F\left(\frac{1}{2}\right) = F(0) = 0$
之后我们对于 $F(x)$ 求导, 易得到题中的形式。

Example3

... (b) 在 [

... 在

解：因

又因为 $\int_0^{\infty} f(x) dx$

证毕。

Laplace 变

$f(s)$