$f(x)=x^2\ln(1+x)$,求$f^n(0)\ \ (n>3)$

解：$f^{(n)}(0)=n!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x)}{x^n}$

根据$\ln(1+x)$级数展开后，有$\dfrac{x^2\ln(1+x)}{x^n}\sim\dfrac{x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}}{x^n}$

当分子上方的$n=n-2$时，在消除分母x^n,有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x)}{x^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$

所以 $ans=n!\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$

Example2

$f(x)=(1-x^m)^n$,求$f^{(n)}(1)$

解：$f^{(n)}(1)=n!(-1)^n\cdot\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x^m-1}{x-1})^n$

$\dfrac{x^m-1}{x-1}\sim\sum\limits_{i=0}^{m-1}x^i$

因为$x\to 1$，所以$\dfrac{x^m-1}{x-1}=m$

$ans=n!(-1)^n\cdot m^n$

Example3

$f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$， 求$f^{(100)}(0)$

解：$f(x)=1-\dfrac{x+x^2}{1+x+x^2}$

$f^{(n)}(0)=-1\cdot(3n+1)!\cdot\dfrac{(x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}}{x^{3n+1}}$

$ans=100!\cdot(-1)\cdot(1)=-100!$

Example4

设函数$f(x)=(x+1)^n\cdot e^{-x^2}$,求$f^{(n)}(-1)$

解：$f(x)=(x+1)^n\cdot\dfrac{(x+1)^n\cdot e^{-x^2}}{(x+1)^n}$

所以，$f^n(-1)=n!\cdot e^{-x^2}|_{x=-1}=\dfrac{n!}{e}$

$ans=\dfrac{n!}{e}$

二 偏

Example1

设 $z=f(x^2-y^2,xy)$,且 $f(u,v)$有连续的二阶偏导数数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

解：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1+xf_2\end{cases}$

小技巧(限选填)：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(\dfrac{\partial z}{\partial x})_y+\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=>$

$$\begin{aligned}I&=(2xf_1+yf_2)_y+(2xf_1+yf_2)\cdot(-2yf_1+xf_2)\\&=f_2-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}\end{aligned}$$

些 关 分

1. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$
2. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$
4. $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

1.当$f(x)(m \le f(x) \le M)$有界，$=> \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$

2.当$f'(x)$连续(闭区间连续，则有界)，$=> \lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$

积分恒等式：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^{2n+1}dx = 0$$

函 分

任意一个有理真分式$\frac{b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0}{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}(n>m)$可分解成

$$\frac{A}{x-a},\frac{A}{(x-a)^k}(k=2,3,\cdots),\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}(i=2,3,\cdots)$$

这四类部分分式的和, 并且这四类部分分式的积分都可以求出！

$$\int\frac{1}{1+x^3}dx = \int\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{1-x+x^2}dx$$

三 函 分

该类积分的处理思想就是去二角变成有理函数的积分。

被积函数是$R(\sin x,\cos x)$,其中$R(x,y)$为x,y 的二元有理函数。

1. 若$R(\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$,则原积分可化为$\int f(\sin x)d(\sin x)$或$\int f(\csc x)d(\csc x)$.
2. 若$R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$,则原积分可化为$\int f(\cos x)d(\cos x)$或$\int f(\sec x)d(\sec x)$.
3. 若$R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x)$,则原积分可化为$\int f(\tan x)d(\tan x)$或$\int f(\cot x)d(\cot x)$

其中$f(x)$为一元有理函数, 这样就可以消去三角函数, 将原分转换成有理函数的积分：

Example1

$$\begin{aligned}&\int\frac{1}{\sin x\cos^4 x}dx\\ =&-\int\frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos^4 x}\end{aligned}$$

Example2

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sin^3 x+\sin x}\\ =&-\int \frac{d\cos x}{\sin^4 x+\sin^2 x}\\ =&-\int \frac{d\cos x}{(1-\cos x)^2+1-\cos^2 x}\end{aligned}$$

Example3

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{5+8\sin x\cos x}\\ =&\int \frac{d\tan x}{5\sec^2+8\tan x}\\ =&\int \frac{d\tan x}{5(1+\tan^2 x)+8\tan x}\end{aligned}$$

Example4

$$\begin{aligned}&\int \frac{ln\tan x}{\sin x\cdot\cos x}dx\\ =&\int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x\\ =&\int \ln\tan x d\ln\tan x\end{aligned}$$

万　公

$$令\tan\frac{x}{2}=t,则dx=\frac{2dt}{t^2+1},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

三　　反

Example1

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

Example2

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

变　　分

Example1

设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

引理：$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(t)dt$

解：化简分母，根据洛必达对分子分母求导可得 =>

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{dt}-2\int_0^x tf(t)\mathrm{dt}}{x\int_0^x f(u)\mathrm{du}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{dt}+2xf(x)-2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{du}+xf(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{dt}}{\int_0^x f(u)\mathrm{du}+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=1,其中\xi 介于 0,x 之间\end{aligned}$$

注意：这里最后一步不能再次进行洛必达，因为函数连续不意味着可导, 利用积分中值定理即可。

二　　分

Example1

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

解：因为$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$，$\frac{x^b}{\ln x} - \frac{x^a}{\ln x} = \int_a^b (\frac{x^t}{\ln x})'dt = \int_a^b x^t dt$

所以 $I = \int_0^1 dx \int_a^b x^t dt = \int_a^b dt \int_0^1 x^t dx = \int_a^b \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{a+1}{b+1}$

Example2

> Method1:凑微分
>
> $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

解：$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b -e^{-xt} dt = \int_a^b (-\frac{e^{-xt}}{t})\Big|_0^{+\infty} dt = \int_a^b \frac{0-(-1)}{t} dt = \ln$

Froullani 分

> Method2: (Froullani) 分公
>
> $$\int_0^{+\infty} f(b$$

已知 $\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$,则 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{sinx\cdot sin(x+y)}{x(x+y)}dxdy$

$=$

解：令 $F(x)=\int_0^{x}\frac{sinx}{x}dx, F'(x)=\frac{sinx}{x}$，$I=\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx\int_x^{+\infty}\frac{sint}{t}dt$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx(\int_0^{+\infty}\frac{sint}{t}dt-\int_0^{x}\frac{sint}{t}dt)$$

$$=(\frac{\pi}{2})^2-\int_0^{+\infty}(\int_0^{x}\frac{sint}{t}dt)d(\int_0^{x}\frac{sint}{t}dt)$$

$$=(\frac{\pi}{2})^2-$$

2

π π

$$\iiint f(x,y,z)dv = \iiint f(rsin\varphi cos\theta,$$

公

$$\oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$ [redacted]

Example1

求$I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$,其中$a,b$为正常数，$L$为 [redacted]

$$
\begin{aligned}
\text{解：} I &= \oint_{L+\overrightarrow{OA}} - \int_{\overrightarrow{OA}} \\
&= \iint\limits_{D_1} (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}) d\sigma - \int_0^{2a} (-bx) dx \\
&= (b-a) \iint\limits_{D_1} d\sigma + 2a^2 b \\
&= (b-a) \frac{\pi a^2}{2} + 2a^2 b
\end{aligned}
$$

Example2

> 挖洞法

计算曲线积分$I = \oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$,其中$L$是以$(1,0)$为中心，$R$为半径的圆周($R >$ [redacted]

解：我们可以看到所求积分内含有奇点(未被定义的点)，所以我们得采取'挖洞法'(遵循 [redacted]

$L_1 : 4$

设函数$f(x,y)$在xOy平面上具有一阶连续偏导数，曲线$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，并且对于任意t恒有
$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$,求$Q(x,y)$。

解：$Q'_x(x,y)=2x$，$Q(x,y)=x^2+f(y)$

$=>\int_0^1 (t^2+f(y))dy=\int_0^t (1+f(y))dy => f(t)=2t-1$

所以，$Q(x,y)=x^2+2y-1$

分

定

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中值定

定

若 $f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在, 则对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 和 $y\in[f'(x_1),f'(x_2)]$, $\exists\, c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(c)=y$.

Example1

设$f(x)$在$(-2,2)$内可导，证明：

(1)存在$\xi\in(-2,2)$, 使得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-2\xi=0$

(2)存在$\xi\in(-2,2)$, 使得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-3\xi=0$

解：$(1) f'(x)+\frac{1-2x}{x-x^2}=0$, 对等式左右两边分别积分 $=>\int f'(x)dx+\int\frac{d(x-x^2)}{x-x^2}=C_1$

$e^{f(x)}\cdot(x-x^2)=C_2$, 于是我们构造：$F(x)=e^{f(x)}\cdot x(1-x)$

因为$F(0)=F(1)=0$, 由罗尔定理 $=> F(x)=0(x\in(0,1))$

对$F(x)$求导，易得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-2\xi=0$

(2)同上。

Example2

设$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上二阶可导, $f(0)=f'(0), f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,

证明:存在$\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得$f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

解：这里我们有两种方式得到构造的函数：

1.通过这个二阶微分方程找到y，y'之间的联系改造

2.通过表格法

这里我们采用第二种方式：

$1-2x \quad -2 \quad 0$

$f''(x) \quad f'(x) \quad f(x)$

$(1-2x)f'(x)+2f(x)=3f(x)+C$

我们构造函数$F(x)=(1-2x)f'(x)-f(x)=C$, 因为$F(\frac{1}{2})=F(0)=0$

之后我们对于$F(x)$求导，易得到题中的形式。

Example3

[redacted]

解：因

又因为 $\int_0$

证毕。

Laplace 变