高数

极限

x→0 时常见的麦克劳林公式

$$
\begin{aligned}
&\sin \mathrm{x}=\mathrm{x}-\frac{1}{3!} \mathrm{x}^{3}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{3}\right), \quad \cos \mathrm{x}=1-\frac{1}{2!} \mathrm{x}^{2}+\frac{1}{4!} \mathrm{x}^{4}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{4}\right), \\
&\tan \mathrm{x}=\mathrm{x}+\frac{1}{3} \mathrm{x}^{3}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{3}\right), \quad \arcsin \mathrm{x}=\mathrm{x}+\frac{1}{3!} \mathrm{x}^{3}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{3}\right), \\
&\arctan \mathrm{x}=\mathrm{x}-\frac{1}{3} \mathrm{x}^{3}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{3}\right), \quad \ln (1+\mathrm{x})=\mathrm{x}-\frac{1}{2} \mathrm{x}^{2}+\frac{1}{3} \mathrm{x}^{3}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{3}\right), \\
&\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=1+\mathrm{x}+\frac{1}{2!} \mathrm{x}^{2}+\frac{1}{3!} \mathrm{x}^{3}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{3}\right),(1+\mathrm{x})^{\mathrm{a}}=1+\mathrm{ax}+\frac{\mathrm{a}(\mathrm{a}-1)}{2!} \mathrm{x}^{2}+\mathrm{o}\left(\mathrm{x}^{2}\right)
\end{aligned}
$$

Formula_Plus

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o\left(x^2\right)$
2. $x \to 0 : 1 - \cos^{\alpha} x$

Stolz定理

$$设数列\{b_n\}单调增加且\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty, 如果\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}存在或为+\infty/-\infty, 则\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

切比雪夫积分不等式

若$f(x)$、$g(x)$在(a,b)上同单调，则有：

$$(b-a)\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx > \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Example1

比较$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+e^x}dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+e^x}dx$之间的大小

解：构造$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx - cosx$